



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Simulación numérica de la propagación de haces gaussianos
y sus patrones de difracción no lineal.

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Ian Gámez Santamaría.

Asesorado por

Dra. Marcela Maribel Mendez Otero

Puebla Pue.
Enero del 2026



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Simulación numérica de la propagación de haces gaussianos
y sus patrones de difracción no lineal.

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Ian Gámez Santamaría.

Asesorado por

Dra. Marcela Maribel Mendez Otero

Puebla Pue.
Enero del 2026

Título: Simulación numérica de la propagación de haces gaussianos y sus patrones de difracción no lineal.

Estudiante: IAN GÁMEZ SANTAMARÍA.

COMITÉ

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Presidente

Dr. Marcelo David Iturbe Castillo
Secretario

Dra. Emma Vianey García Ramírez
Vocal

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Vocal

Dra. Marcela Maribel Mendez Otero
Asesor

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Contexto Histórico de la Óptica	1
1.1.1. Evolución Histórica de la Luz	1
1.2. Propagación de Haces en Medios No Lineales	1
1.3. Objetivos de la Investigación	2
1.3.1. Objetivo General	2
1.3.2. Objetivos Específicos	2
1.3.3. Alcances y Limitaciones	3
2. Fundamentos Teóricos de la Propagación de Haces	5
2.1. Postulados de la Óptica de Ondas	5
2.1.1. Ecuación de Onda	5
2.1.2. Intensidad, Potencia y Energía	5
2.2. Ondas Monocromáticas	6
2.2.1. Representación Compleja y la Ecuación de Helmholtz	6
2.3. Ondas Paraxiales	8
2.3.1. Ecuación de Helmholtz Paraxial	9
2.4. El Haz Gaussiano	9
2.4.1. Amplitud Compleja	9
2.4.2. Propiedades	11
2.5. La ecuación de onda electromagnética y la aproximación paraxial	14
2.6. Deducción de la Ecuación Paraxial de Onda No Lineal (NPWE)	15
2.7. Límites de la Aproximación Paraxial	17
2.7.1. Ecuaciones de Propagación No Paraxiales	20
2.8. El operador de difracción y su evolución.	20
3. Óptica No Lineal y el Efecto Kerr Local	23
3.0.1. Relación con la ecuación paraxial no lineal de onda (NPWE)	26
4. Resultados numéricos	29
4.1. Descripción del Modelo de Propagación	29
4.2. Modelo de Respuesta No Local	30
4.3. Fases negativas	45
5. Conclusiones	55
A. SPS Apéndice	57
A.1. Discusión Adicional del Método de Solución para la Ecuación de Helmholtz	57
Bibliografía	59

Agradecimientos

Próximamente...

Resumen

Esta investigación presenta un estudio de la propagación de haces gaussianos en medios no lineales locales, estudiando los patrones de difracción a campo lejano y los perfiles de intensidad de la ecuación de paraxial no lineal, el trabajo se centra en el efecto de auto-modulación de fase inducido por el efecto Kerr óptico, donde el cambio de fase no lineal $\Delta\Phi_0$ es directamente proporcional a la intensidad del haz según $\Delta\Phi_0 = k_0 n_2 I(r) L$.

El modelo resuelve la ecuación paraxial no lineal mediante el método de operador dividido paso a paso (split-step Fourier), considerando un medio local con cambios de fase no lineal de π a 4π radianes, en diferentes posiciones respecto a la cintura del haz: $z = -z_0$, 0 , y $+z_0$.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto Histórico de la Óptica

La óptica se puede definir como la ciencia de la vista, es decir, es una rama de la física que se encarga de estudiar las propiedades de la luz al igual que sus fenómenos [54], sus raíces provienen de civilizaciones occidentales, siendo estas fuente de inspiración para científicos que han trabajado en mejorar el conocimiento sobre la luz.

Una de las primeras ideas sobre la luz, eran de carácter religioso. En Egipto, el dios del sol Ra era considerado la deidad del cual su ojo expedía la luz del día [72]. En textos bíblicos, la luz se presenta con un origen divino, creada antes que el sol y la luna.

EucLides(300 A.E.C) propuso propiedades de la luz, como la propagación rectilínea de los rayos de luz y la ley de reflexión [55]. Estos principios al combinarse con el de Hero (100 D.E.C), que indica que la luz sigue la trayectoria de mas corta, y la ley de refracción, que sus orígenes se remontan desde Ptolomeo(170 D.E.C) sentaron las bases para la óptica geométrica.

1.1.1. Evolución Histórica de la Luz

Antes del siglo XVII, el modelo para describir la luz consistía en la aplicación formaciones geométricas de rayos que se propagaban en el espacio. En el siglo XIX cuando James Clerk Maxwell formuló su teoría electromagnética, diciendo que la luz se propaga como ondas electromagnéticas y que existe un campo electromagnético [15].

Las ecuaciones de Maxwell, presentan complejidad matemática y dificultades para su interpretación. Para abordar estas limitaciones, Hermann von Helmholtz realizó una serie de simplificaciones [34]. Que incluyeron:

- La formulación de la ecuación de Helmholtz independiente del tiempo
- La introducción de la aproximación paraxial.

Estas simplificaciones dieron lugar a la ecuación de Helmholtz, que proporcionó un modelo práctico para modelar sistemas ópticos reales.

1.2. Propagación de Haces en Medios No Lineales

Cuando un haz gaussiano se propaga a través de un medio no lineal, experimenta fenómenos que alteran su comportamiento. La introducción de medios no lineales permite superar el problema de la difracción mediante efectos que se compensan.

El efecto Kerr no lineal, introduce una perturbación en la constante de propagación axial dada por:

$$k'_x(k_x) = k_x(k_x) + \Delta k_x, \quad (1.1)$$

donde Δk_x representa la perturbación no lineal dependiente de la intensidad del haz [58].

La ecuación que describe la propagación de haces en medios no lineales es la ecuación de Schrödinger no lineal:

$$i \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u = 0. \quad (1.2)$$

Esta ecuación describe el caso espacial (segundo termino) donde existen la difracción (tercer termino) y el efecto de auto-enfoque.

Los enfoques para modelar estos fenómenos se pueden clasificar en dos categorías:

El primer enfoque[65], se basa en la aproximación de medio delgado, que asume que el campo eléctrico a la salida del medio no lineal puede describirse mediante una modulación de fase instantánea aplicada al haz incidente.

Frente a estas aproximaciones, el presente trabajo propone un enfoque mediante la solución numérica de la ecuación de onda paraxial no lineal (NPWE) durante la propagación en el medio.

La metodología desarrollada en este trabajo proporciona una herramienta para estudiar la automodulación de fase en sistemas como: Cristales fotónicos y materiales ferroeléctricos[61], fibras ópticas con no linealidad Kerr [20], semiconductores en condiciones de alta intensidad luminosa [60] y medios dieléctricos convencionales en regímenes no lineales[65].

1.3. Objetivos de la Investigación

1.3.1. Objetivo General

Desarrollar un modelo numérico basado en la ecuación de onda paraxial no lineal para estudiar la propagación de haces Gaussianos en medios no lineales locales, analizando los efectos de auto modulación de fase y sus patrones de difracción a campo lejano.

1.3.2. Objetivos Específicos

1. Revisión de la ecuación de onda paraxial lineal

- Estudiar los fundamentos matemáticos de la propagación de haces en medios lineales
- Analizar las soluciones analíticas para haces Gaussianos en aproximación paraxial
- Revisar los parámetros característicos de haces Gaussianos (cintura, longitud de Rayleigh, divergencia)

2. Revisión de conceptos fundamentales de óptica no lineal local

- Estudiar el efecto Kerr óptico y su dependencia con la intensidad
- Analizar los mecanismos de auto-focalización y auto-modulación de fase

3. Formalización del marco teórico para propagación no lineal local

- Derivar la ecuación de Schrödinger no lineal paraxial para medios locales
- Establecer las condiciones de borde y parámetros de simulación
- Definir los criterios de convergencia y estabilidad numérica

4. Desarrollo e implementación de la herramienta computacional

- Implementar el método Split-Step Fourier para resolver la ecuación no lineal
- Desarrollar algoritmos para el cálculo de perfiles de intensidad y fase
- Crear rutinas para la visualización de resultados 2D.

5. Análisis de resultados de simulación

- Estudiar la evolución de parámetros del haz (ancho, curvatura de fase)
- Analizar los patrones de difracción en campo lejano

1.3.3. Alcances y Limitaciones

■ Alcance:

- El estudio de medios no lineales locales con respuesta Kerr instantánea
- Se considera propagación paraxial y en una dimensión transversal
- El análisis se enfoca en haces Gaussianos de diferente cintura inicial

■ Limitaciones:

- No se incluyen efectos de no localidad en la respuesta no lineal
- No se consideran efectos temporales
- El modelo asume medios homogéneos y sin pérdidas

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos de la Propagación de Haces

El estudio de la propagación de haces en medios ópticos es la base teórica para comprender y modelar fenómenos ópticos, desde la focalización hasta la formación de patrones complejos. En el contexto de esta investigación, el presente capítulo establece los fundamentos matemáticos y físicos que gobiernan la dinámica del campo electromagnético.

2.1. Postulados de la Óptica de Ondas

2.1.1. Ecuación de Onda

La luz se propaga en forma de ondas. En espacio libre, las ondas de viajan con velocidad c_o . Un medio transparente homogéneo como el vidrio se caracteriza por una única constante, su índice de refracción n (≥ 1). En un medio con índice de refracción n , las ondas de luz viajan con una velocidad:

$$c = \frac{c_o}{n}. \quad (2.1)$$

Una onda óptica se describe matemáticamente por una función real de posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y tiempo t , denotada $u(\mathbf{r}, t)$ y conocida como la función de onda. Satisface la ecuación:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.2)$$

donde ∇^2 es el operador Laplaciano, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Cualquier función que satisfaga (2.2) representa una onda óptica.

Debido a que la ecuación de onda es lineal, se aplica el principio de superposición; es decir, si $u_1(\mathbf{r}, t)$ y $u_2(\mathbf{r}, t)$ representan ondas ópticas, entonces $u(\mathbf{r}, t) = u_1(\mathbf{r}, t) + u_2(\mathbf{r}, t)$ también representa una onda óptica.

2.1.2. Intensidad, Potencia y Energía

La intensidad $I(\mathbf{r}, t)$, definida como la potencia por unidad de área (unidades de watts/cm²), es proporcional al promedio del cuadrado de la función de onda:

$$I(\mathbf{r}, t) = 2\langle u^2(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (2.3)$$

La operación $\langle \cdot \rangle$ denota promedio sobre un intervalo de tiempo que es mucho más largo que el tiempo de un ciclo.

La potencia óptica $P(t)$ (unidades de watts) que fluye hacia un área A normal a la dirección de propagación de la luz es la intensidad integrada:

$$P(t) = \int_A I(\mathbf{r}, t) dA. \quad (2.4)$$

La energía (unidades de joules) recolectada en un intervalo de tiempo dado es la integral temporal de la potencia óptica sobre un intervalo de tiempo.

2.2. Ondas Monocromáticas

Una onda monocromática se representa por una función de onda con dependencia armónica del tiempo:

$$u(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})], \quad (2.5)$$

donde:

- $a(\mathbf{r})$ = amplitud
- $\varphi(\mathbf{r})$ = fase inicial
- ν = frecuencia (ciclos/s o Hz)
- $\omega = 2\pi\nu$ = frecuencia angular (radianes/s)

Tanto la amplitud como la fase son generalmente dependientes de la posición.

2.2.1. Representación Compleja y la Ecuación de Helmholtz

Función de Onda Compleja

Es conveniente representar la función de onda real $u(\mathbf{r}, t)$ en términos de una función compleja debido a su facilidad de manejo matemático:

$$U(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \exp[i\varphi(\mathbf{r})] \exp(i2\pi\nu t), \quad (2.6)$$

de modo que:

$$u(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{U(\mathbf{r}, t)\} = \frac{1}{2}[U(\mathbf{r}, t) + U^*(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.7)$$

La función $U(\mathbf{r}, t)$, conocida como la función de onda compleja, describe toda la onda ; la función de onda $u(\mathbf{r}, t)$ es simplemente su parte real. Al igual que la función de onda $u(\mathbf{r}, t)$, la función de onda compleja $U(\mathbf{r}, t)$ también debe satisfacer la ecuación de onda:

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (2.8)$$

Amplitud Compleja

La ecuación (2.6) puede escribirse en la forma:

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(i2\pi\nu t), \quad (2.9)$$

donde el factor independiente del tiempo $U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \exp[i\varphi(\mathbf{r})]$ se denomina amplitud compleja.

La función de onda $u(\mathbf{r}, t)$ está, por lo tanto, relacionada con la amplitud compleja por:

$$u(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{U(\mathbf{r}) \exp(i2\pi\nu t)\} = \frac{1}{2}[U(\mathbf{r}) \exp(i2\pi\nu t) + U^*(\mathbf{r}) \exp(-i2\pi\nu t)]. \quad (2.10)$$

En una posición dada $\mathbf{r}$, la amplitud compleja $U(\mathbf{r})$ es una variable compleja cuya magnitud $|U(\mathbf{r})| = a(\mathbf{r})$ es la amplitud de la onda y cuyo argumento $\arg(U(\mathbf{r})) = \varphi(\mathbf{r})$ es la fase.

Ecuación de Helmholtz

Sustituyendo $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(i2\pi\nu t)$ en la ecuación de onda (2.8), obtenemos la ecuación diferencial:

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.11)$$

llamada ecuación de Helmholtz, donde:

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}, \quad (2.12)$$

se denomina número de onda.

Intensidad Óptica

La intensidad óptica se determina usando (2.3), cuando:

$$2u^2(\mathbf{r}, t) = 2a^2(\mathbf{r}) \cos^2[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})] = |U(\mathbf{r})|^2 \{1 + \cos(2[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})])\}, \quad (2.13)$$

se promedia sobre un tiempo mayor que un período, $1/\nu$, el segundo término de (2.13) se anula, de modo que:

$$I(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2. \quad (2.14)$$

Por lo tanto, la intensidad óptica de una onda monocromática es el valor absoluto al cuadrado de su amplitud compleja. La intensidad de una onda monocromática estacionaria no varía con el tiempo.

Frentes de Onda

Los frentes de onda son las superficies con la misma fase, $\varphi(\mathbf{r}) = \text{constante}$; las constantes a menudo se toman como múltiplos de 2π , $\varphi(\mathbf{r}) = 2\pi q$, donde q es un entero. La normal al frente de onda en la posición $\mathbf{r}$ es paralela al vector gradiente $\nabla\varphi(\mathbf{r})$ (un vector con componentes $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, y $\partial\varphi/\partial z$ en un sistema de coordenadas cartesianas). Representa la dirección en la que el cambio de la fase es máxima.

Onda Plana

Una solución simple de la ecuación de Helmholtz en un medio homogéneo es la onda plana, la cual tiene amplitud compleja:

$$U(\mathbf{r}) = A \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = A \exp[-i(k_x x + k_y y + k_z z)], \quad (2.15)$$

donde A es una constante compleja llamada envolvente compleja y $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ se llama vector de onda. Para que la ecuación (2.15) satisfaga la ecuación de Helmholtz (2.11), $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$, de modo que la magnitud del vector de onda $\mathbf{k}$ es el número de onda k .

Dado que la fase $\arg(U(\mathbf{r})) = \arg(A) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, los frentes de onda obedecen $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = 2\pi q + \arg(A)$ ($q = \text{entero}$). Esta es la ecuación que describe planos paralelos al vector de onda $\mathbf{k}$ (de ahí el nombre de onda plana). Estos planos están separados por una distancia $\lambda = 2\pi/k$, de modo que:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad (2.16)$$

donde λ se llama longitud de onda. La onda plana tiene una intensidad constante $I(\mathbf{r}) = |A|^2$ en todo el espacio, por lo que transporta potencia infinita. Esta onda es una idealización, ya que existe en todas partes y en todo momento.

Si el eje z se toma en la dirección del vector de onda $\mathbf{k}$, entonces $U(\mathbf{r}) = A \exp(-ikz)$ y la función de onda correspondiente, es la ecuación (2.10), dada es:

$$u(\mathbf{r}, t) = |A| \cos[2\pi\nu t - kz + \arg(A)] = |A| \cos[2\pi\nu(t - z/c) + \arg(A)]. \quad (2.17)$$

La función de onda, por lo tanto, es periódica en el tiempo con un período $1/\nu$, y periódica en el espacio con un período $2\pi/k$, que es igual a la longitud de onda λ . Dado que la fase de la función de onda compleja, $\arg(U(\mathbf{r}, t)) = 2\pi\nu(t - z/c) + \arg(A)$, varía con el tiempo y la posición en función de la variable $t - z/c$, c se llama velocidad de fase de la onda.

En un medio con índice de refracción n , la velocidad de fase $c = c_o/n$ y la longitud de onda $\lambda = c/\nu = c_o/n\nu$, de modo que $\lambda = \lambda_o/n$ donde $\lambda_o = c_o/\nu$ es la longitud de onda en el espacio. Para una frecuencia dada ν , la longitud de onda en el medio se reduce en relación con la del espacio por el factor n . Como consecuencia, el número de onda $k = 2\pi/\lambda$ aumenta en relación con el del espacio ($k_o = 2\pi/\lambda_o$) por el factor n .

$$c = \frac{c_o}{n}, \quad \lambda = \frac{\lambda_o}{n}, \quad k = nk_o \quad (2.18)$$

2.3. Ondas Paraxiales

Se dice que una onda es paraxial si sus normales al frente de onda son rayos. Una forma de construir una onda paraxial es con una onda plana $A \exp(-ikz)$, considerarla como una onda portadora, y modular su envolvente compleja A , haciéndola una función de posición lentamente variable $A(\mathbf{r})$ en función de la dirección de propagación, de modo que la amplitud compleja de la onda modulada se convierte en:

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(-ikz) \quad (2.19)$$

La variación de $A(\mathbf{r})$ con la posición a lo largo del eje de propagación debe ser lenta dentro de la distancia de una longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, de modo que la onda mantiene aproximadamente su naturaleza de onda plana.

La función de onda $u(\mathbf{r}, t) = |A(\mathbf{r})| \cos[2\pi\nu t - kz + \arg[A(\mathbf{r})]]$ de una onda paraxial se representa en la Figura 2.1a como una función de z en $t = 0$ y $x = y = 0$. Esta es una función sinusoidal de z con amplitud $|A(0, 0, z)|$ y fase $\arg[A(0, 0, z)]$ que varía lentamente con z . Dado que el cambio

de la fase $\arg[A(x, y, z)]$ es pequeño dentro de la distancia de una longitud de onda, los frentes de onda planos, $kz = 2\pi q$, de la onda plana portadora se curvan solo ligeramente, de modo que sus normales son rayos paraxiales [Fig. 2.1b].

2.3.1. Ecuación de Helmholtz Paraxial

Para que la onda paraxial (2.19) satisfaga la ecuación de Helmholtz (2.11), la envolvente compleja $A(\mathbf{r})$ debe satisfacer otra ecuación diferencial parcial obtenida sustituyendo (2.19) en la ecuación de Helmholtz (2.11). La suposición de que $A(\mathbf{r})$ varía lentamente con respecto a z significa que dentro de una distancia $\Delta z = \lambda$, el cambio ΔA es mucho más pequeño que la de la propia A ; es decir, $\Delta A \ll A$. Esta desigualdad de variables complejas se aplica a las magnitudes de las partes real e imaginarias por separado.

Dado que $\Delta A = (\partial A / \partial z) \Delta z = (\partial A / \partial z) \lambda$, se sigue que $\partial A / \partial z \ll A / \lambda = Ak / 2\pi$, y por lo tanto

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA. \quad (2.20)$$

De manera similar, la derivada $\partial A / \partial z$ varía lentamente dentro de la distancia λ , de modo que $\partial^2 A / \partial z^2 \ll k \partial A / \partial z$, y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k^2 A. \quad (2.21)$$

Sustituyendo (2.3) en la ecuación de Helmholtz y despreciando $\partial^2 A / \partial z^2$ en comparación con $k \partial A / \partial z$ o $k^2 A$, obtenemos

$$\nabla_T^2 A - i2k \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (2.22)$$

donde $\nabla_T^2 A = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ es el operador Laplaciano transversal.

La ecuación (2.22) es la aproximación de la función envolvente lentamente variable de la ecuación de Helmholtz. La llamaremos la ecuación de Helmholtz paraxial. Es una ecuación diferencial parcial que se asemeja a la ecuación de Schrödinger.

2.4. El Haz Gaussiano

2.4.1. Amplitud Compleja

El concepto de ondas paraxiales se introdujo en la Sección 2.3. Una onda paraxial es una onda plana e^{-jkz} (con número de onda $k = 2\pi / \lambda$ y longitud de onda λ) modulada por una envolvente compleja $A(\mathbf{r})$ que es una función de posición que varía lentamente (ver Fig. 2.1). La amplitud compleja es:

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(-ikz) \quad (2.23)$$

Se supone que la envolvente es aproximadamente constante dentro de una vecindad de tamaño λ , de modo que la onda es localmente similar a una onda plana con frentes normales al frente de onda que son rayos paraxiales.

Para que la amplitud compleja $U(\mathbf{r})$ satisfaga la ecuación de Helmholtz, $\nabla^2 U + k^2 U = 0$, la envolvente compleja $A(\mathbf{r})$ debe satisfacer la ecuación de Helmholtz paraxial (2.22):

$$\nabla_T^2 A - i2k \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (2.24)$$

donde $\nabla_T^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ es la parte transversal del operador Laplaciano.

Una solución simple a la ecuación de Helmholtz paraxial proporciona la onda paraboloidal:

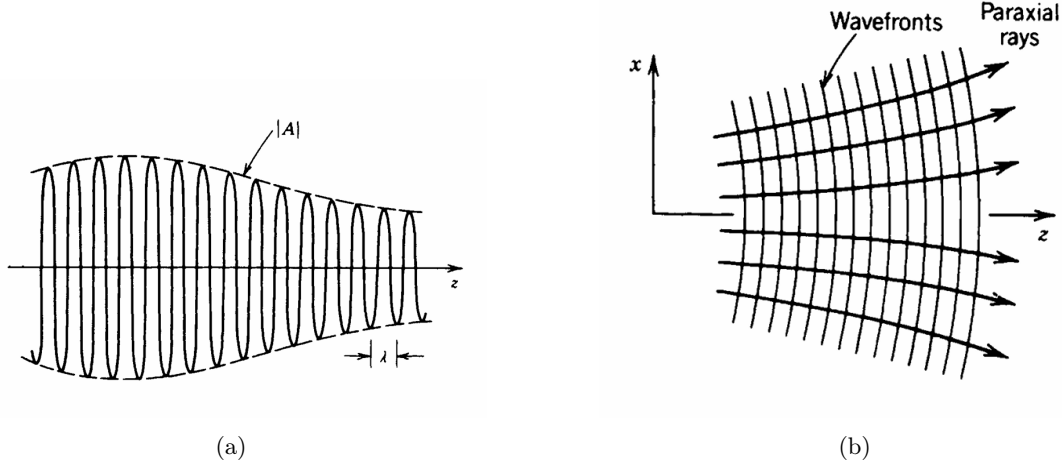


Figura 2.1: (a) La magnitud de una onda paraxial como función de la distancia axial z . (b) Los frentes de ondas y el frente de onda normal de una onda paraxial.[58]

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{z} \exp\left(-ik\frac{\rho^2}{2z}\right), \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad (2.25)$$

donde A_1 es una constante. La onda paraboloidal es la aproximación paraxial de la onda esférica $U(\mathbf{r}) = (A_1/r) \exp(-ikr)$ cuando x e y son mucho menores que z .

Otra solución de la ecuación de Helmholtz paraxial proporciona el haz gaussiano. Se obtiene a partir de la onda paraboloidal mediante una transformación. Dado que la envolvente compleja de la onda paraboloidal (2.25) es una solución de la ecuación de Helmholtz paraxial (2.24), una versión de la misma, con $z - \xi$ reemplazando a z donde ξ es una constante:

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left[-ik\frac{\rho^2}{2q(z)}\right], \quad q(z) = z - \xi \quad (2.26)$$

también es una solución. Esto proporciona una onda paraboloidal centrada en el punto $z = \xi$ en lugar de $z = 0$, cuando ξ es complejo, la Ecuación (2.26) sigue siendo una solución de (2.24), pero adquiere propiedades dramáticamente diferentes. En particular, cuando ξ es puramente imaginario, digamos $\xi = -iz_0$ donde z_0 es real, la Ecuación (2.26) da lugar a la envolvente compleja del haz gaussiano:

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left[-ik\frac{\rho^2}{2q(z)}\right], \quad q(z) = z + iz_0. \quad (2.27)$$

El parámetro z_0 se conoce como el rango de Rayleigh.

Para separar la amplitud y la fase de esta envolvente compleja, escribimos la función compleja $1/q(z) = 1/(z + iz_0)$ en términos de sus partes real e imaginaria, definiendo dos nuevas funciones $R(z)$ y $W(z)$, tales que:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi W^2(z)} \quad (2.28)$$

Se mostrará que $W(z)$ y $R(z)$ son medidas del ancho del haz y del radio de curvatura del frente de onda, respectivamente. Sustituyendo la Ecuación (2.28) en la Ecuación (2.27) y usando la Ecuación (2.23), se obtiene una expresión para la amplitud compleja $U(\mathbf{r})$ del haz gaussiano:

$$U(\mathbf{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp \left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right] \exp \left[-ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z) \right], \quad (2.29)$$

$$W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.30)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right], \quad (2.31)$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1} \frac{z}{z_0}, \quad (2.32)$$

$$W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi} \right)^{1/2}. \quad (2.33)$$

Se ha definido una nueva constante $A_0 = A_1/jz_0$ por conveniencia. Contiene dos parámetros, A_0 y z_0 , que se determinan a partir de las condiciones. Todos los demás parámetros están relacionados con el rango de Rayleigh z_0 y la longitud de onda λ por las Ecuaciones (2.30) a (2.33).

2.4.2. Propiedades

Las Ecuaciones (2.29) a (2.33) se utilizarán ahora para determinar las propiedades del haz gaussiano.

Intensidad

La intensidad $I(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2$ es una función de las distancias axial y radial z y $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$:

$$I(\rho, z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)} \right]^2 \exp \left[-\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right] \quad (2.34)$$

donde $I_0 = |A_0|^2$. En cada valor de z la intensidad es una función gaussiana de la distancia radial ρ . Esta es la razón por la cual la onda se llama haz gaussiano. La función gaussiana tiene su pico en $\rho = 0$ y desciende con el aumento de ρ . El ancho $W(z)$ de la distribución gaussiana aumenta con la distancia axial z .

Sobre el eje del haz ($\rho = 0$) la intensidad:

$$I(0, z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)} \right]^2 = \frac{I_0}{1 + (z/z_0)^2}, \quad (2.35)$$

tiene su valor máximo I_0 en $z = 0$ y desciende gradualmente con el aumento de z , alcanzando la mitad de su valor pico en $z = \pm z_0$ (Fig. 2.2). Cuando $|z| \gg z_0$, $I(0, z) \approx I_0 z_0^2 / z^2$, de modo que la intensidad disminuye con la distancia de acuerdo con una ley del cuadrado inverso, como en las ondas esféricas y paraboloidales. La intensidad pico general $I(0, 0) = I_0$ ocurre en el centro del haz ($z = 0$, $\rho = 0$).

Potencia

La potencia total transportada por el haz es la integral de la intensidad sobre un plano transversal (digamos a una distancia z):

$$P = \int_0^\infty I(\rho, z) 2\pi\rho d\rho, \quad (2.36)$$

lo que da:

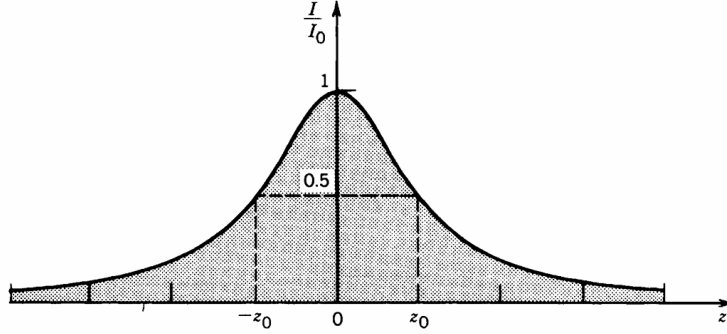


Figura 2.2: Intensidad normalizada del haz.[58]

$$P = \frac{1}{2} I_0 (\pi W_0^2). \quad (2.37)$$

El resultado es independiente de z . Así, la potencia del haz es la mitad de la intensidad pico multiplicada por el área del haz. Dado que los haces a menudo se describen por su potencia P , es útil expresar I_0 en términos de P usando la Ecuación (2.37) y reescribir la Ecuación (2.34) en la forma:

$$I(\rho, z) = \frac{2P}{\pi W^2(z)} \exp \left[-\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right]. \quad (2.38)$$

La relación entre la potencia transportada dentro de un círculo de radio ρ_0 en el plano transversal en la posición z y la potencia total es:

$$\frac{1}{P} \int_0^{\rho_0} I(\rho, z) 2\pi\rho d\rho = 1 - \exp \left[-\frac{2\rho_0^2}{W^2(z)} \right]. \quad (2.39)$$

Radio del Haz

Dentro de cualquier plano, la intensidad del haz asume su valor pico sobre el eje del haz y cae por un factor $1/e^2 \approx 0,135$ a la distancia radial $\rho = W(z)$.

La dependencia del radio del haz con z está gobernada por la Ecuación (2.30):

$$W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.40)$$

El valor mínimo W_0 en el plano $z = 0$, llamado la cintura del haz. Así, W_0 es el radio de la cintura. El diámetro de la cintura $2W_0$ se llama tamaño del spot. El radio del haz aumenta gradualmente con z , alcanzando $\sqrt{2}W_0$ en $z = z_0$, y continúa aumentando monótonamente con z (Fig.2.3). Para $z \gg z_0$ el primer término de (2.40) puede ser despreciado, resultando en la relación lineal:

$$W(z) \approx \frac{W_0}{z_0} z = \theta_0 z, \quad (2.41)$$

donde $\theta_0 = W_0/z_0$. Usando (2.33), también podemos escribir:

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi W_0}. \quad (2.42)$$

Divergencia del Haz

Lejos del centro del haz, cuando $z \gg z_0$, el radio del haz aumenta aproximadamente lineal con z , definiendo un cono con semi-ángulo θ_0 . Por lo tanto, la divergencia angular del haz se define por el ángulo:

$$\theta_0 = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{2W_0}, \quad (2.43)$$

La divergencia del haz es directamente proporcional a la relación entre la longitud de onda λ y el diámetro de la cintura del haz $2W_0$, si la cintura se comprime, el haz diverge.

Profundidad de Foco

Dado que el haz tiene su ancho mínimo en $z = 0$, logra su mejor enfoque en el plano $z = 0$. En cualquier dirección, el haz gradualmente crece. La distancia axial dentro de la cual el radio del haz se encuentra dentro de un factor $\sqrt{2}$ de su valor mínimo (es decir, su área se encuentra dentro de un factor de 2 de su mínimo) se conoce como la profundidad de foco (Fig. 2.3), se puede ver a partir de la Ecuación (2.40) que la profundidad de foco es el doble del rango de Rayleigh:

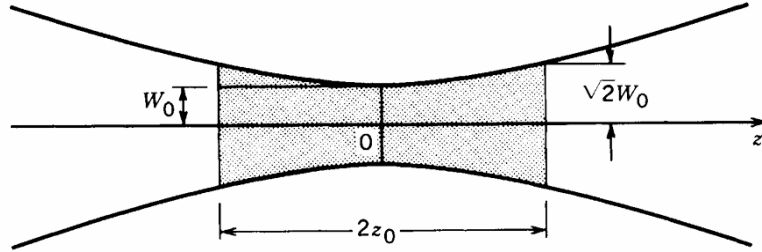


Figura 2.3: Profundidad de Foco de un haz Gaussiano. [58]

$$2z_0 = \frac{2\pi W_0^2}{\lambda}. \quad (2.44)$$

La profundidad de foco es directamente proporcional al área del haz en su cintura, e inversamente proporcional a la longitud de onda.

Fase

La fase del haz gaussiano, a partir la Ecuación (2.29) es:

$$\varphi(\rho, z) = kz - \zeta(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)}. \quad (2.45)$$

Sobre el eje del haz ($\rho = 0$) la fase:

$$\varphi(0, z) = kz - \zeta(z), \quad (2.46)$$

comprende dos componentes. El primero, kz , es la fase de una onda plana. El segundo representa un retraso de fase $\zeta(z)$ dado por la Ecuación (2.32) que varía desde $-\pi/2$ en $z = -\infty$ hasta $+\pi/2$ en $z = \infty$, conocida.

Frentes de Onda

El tercer componente en la Ecuación (2.45) es la curvatura del frente de onda. Representa la desviación de la fase en puntos fuera del eje en un plano transversal dado de aquella en el punto axial. Las superficies de fase constante satisfacen $k[z + \rho^2/2R(z)] - \zeta(z) = 2\pi q$. Dado que $\zeta(z)$ y $R(z)$ varían relativamente lento, son aproximadamente constantes en puntos dentro del radio del haz en cada frente de onda. Por lo tanto, podemos escribir $z + \rho^2/2R = q\lambda + \zeta\lambda/2\pi$, donde $R = R(z)$ y $\zeta = \zeta(z)$. Esta es precisamente la ecuación de una superficie paraboloidal de radio de curvatura R .

2.5. La ecuación de onda electromagnética y la aproximación paraxial

Para describir la propagación de un haz láser en cualquier medio, se utiliza el conjunto de las ecuaciones de Maxwell. para un medio dieléctrico, no magnético, sin cargas libres ($\rho_{libre} = 0$) y sin corrientes libres ($\mathbf{J}_{libre} = \mathbf{0}$), estas ecuaciones toman la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (\text{Ley de Gauss}), \quad (2.47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Ley de Gauss para el magnetismo}), \quad (2.48)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Faraday}), \quad (2.49)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Ampère-Maxwell}), \quad (2.50)$$

donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico, $\mathbf{H}$ es el campo magnético, $\mathbf{D}$ es el campo de desplazamiento eléctrico y $\mathbf{B}$ es el campo de inducción magnética. Para un medio lineal, isótropo y no dispersivo, lo que los relacionan son $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, donde ϵ es la permitividad dieléctrica del medio y μ_0 es la permeabilidad del vacío.

Para obtener una ecuación que gobierne la propagación del campo eléctrico $\mathbf{E}$, se toma el rotacional de la Ley de Faraday (Ecuación 2.49):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}). \quad (2.51)$$

Utilizando la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ y sustituyendo la Ley de Ampère-Maxwell (Ecuación 2.50) para $\nabla \times \mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$), se obtiene:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (2.52)$$

Asumiendo que el medio es homogéneo ($\epsilon = 0$), la Ley de Gauss (Ecuación 2.47) implica que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Sustituyendo $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y asumiendo que ϵ no depende del tiempo, se llega a la ecuación de onda electromagnética homogénea para el campo eléctrico:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.53)$$

La velocidad de fase de la onda en el medio está dada por $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon}$, es conveniente expresar esto en términos de la velocidad de la luz en el vacío $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ y el índice de refracción lineal del medio $n_0 = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0} = c_0/v$. Así, $\mu_0 \epsilon = \mu_0 \epsilon_0 n_0^2 = n_0^2/c_0^2$, y la Ecuación (2.53) se reescribe como:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n_0^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.54)$$

Esta es la ecuación de onda fundamental que describe cómo se propaga cualquier perturbación electromagnética en un medio lineal, homogéneo e isotrópico. Su solución más simple es una onda plana monocromática $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, donde $\mathbf{k}$ es el vector de onda cuya magnitud es $|\mathbf{k}| = k = n_0 \omega / c = n_0 k_0$, siendo k_0 el número de onda en el vacío.

Se parte de una solución de la Ecuación (2.54) que supone una onda monocromática que se propaga en una sola dirección (e.g., $+z$) y cuya amplitud varía lentamente en el plano transversal (x, y) y a lo largo de z . Esto conduce a la función envolvente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} A(x, y, z) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (2.55)$$

donde $A(x, y, z)$ es la amplitud compleja, $\hat{\mathbf{x}}$ es el vector unitario que indica la polarización lineal, y c.c. denota el complejo conjugado. La suposición fundamental es que la variación de A a lo largo de la dirección de propagación z es mucho más lenta que la de la onda portadora e^{ikz} , es decir, $|\partial^2 A / \partial z^2| \ll k |\partial A / \partial z|$.

Para encontrar la ecuación que controla $A(x, y, z)$, se sustituye la función envolvente (Ecuación 2.55) en la ecuación de onda (Ecuación 2.54). Calculando las derivadas:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial A}{\partial z} + ikA \right) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} - k^2 A \right) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} (-\omega^2 A) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (2.58)$$

El Laplaciano $\nabla^2 \mathbf{E}$ se puede separar en la parte transversal y la parte longitudinal: $\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla_{\perp}^2 \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2}$, donde

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (2.59)$$

es el operador Laplaciano transversal.

Sustituyendo todo en la Ecuación (2.54) y notando que $k^2 = n_0^2 \omega^2 / c_0^2$, los términos proporcionales a $-k^2 A$ y $n_0^2 \omega^2 / c_0^2 A$ se cancelan exactamente. Además, bajo la aproximación paraxial ($|\partial^2 A / \partial z^2| \ll k |\partial A / \partial z|$), el término $\partial^2 A / \partial z^2$ puede despreciarse frente a $2ik \partial A / \partial z$. Tras estas simplificaciones y dividiendo toda la ecuación por el factor común $(1/2) e^{i(kz - \omega t)}$, se obtiene la ecuación paraxial de ondas:

$$\nabla_{\perp}^2 A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad (2.60)$$

2.6. Deducción de la Ecuación Paraxial de Onda No Lineal (NPWE)

En óptica no lineal, la polarización del medio $\mathbf{P}$ se expande en una serie de potencias del campo eléctrico:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} + \mathbf{P}_{\text{NL}} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E} \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^{(3)} \mathbf{E} \mathbf{E} \mathbf{E} + \dots, \quad (2.61)$$

donde $\chi^{(1)}$ es la susceptibilidad lineal (relacionada con el índice de refracción lineal $n_0 = \sqrt{1 + \chi^{(1)}}$) y $\mathbf{P}_{\text{NL}}$ es la polarización no lineal. Para un medio isotrópico y centrado en la inversión (como un vidrio o un líquido), los términos de orden par ($\chi^{(2)}$, etc.) se anulan. El primer término no lineal no nulo es el de tercer orden, $\chi^{(3)}$, que da lugar al efecto Kerr óptico.

La polarización no lineal de tercer orden se escribe como:

$$\mathbf{P}_{\text{NL}} = \epsilon_0 \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}. \quad (2.62)$$

Esta polarización no lineal actúa como un término fuente en la ecuación de onda. Partiendo de las ecuaciones de Maxwell y asumiendo un medio sin cargas ni corrientes libres, se obtiene la ecuación de onda no lineal inhomogénea:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\text{T}}}{\partial t^2}. \quad (2.63)$$

donde $\mathbf{P}_{\text{T}} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} + \mathbf{P}_{\text{NL}}$ es la polarización total. Para un medio lineal, $\mathbf{P}_{\text{NL}} = 0$ y se recupera la Ecuación (2.54). El término no lineal $\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\text{NL}}}{\partial t^2}$ es el responsable de todos los fenómenos ópticos no lineales.

Se asume que la polarización no lineal $\mathbf{P}_{\text{NL}}$ también puede expresarse con una envolvente lentamente variable:

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} P_{\text{NL}}(x, y, z) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (2.64)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (2.55 y 2.64) en la Ecuación (2.63), y realizando el mismo procedimiento de aproximación que llevó a la Ecuación (2.60) (es decir, despreciando $\partial^2 A / \partial z^2$ frente a $k |\partial A / \partial z|$ y asumiendo que tanto A como P_{NL} varían lentamente en la escala de una longitud de onda), se llega a:

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 A = -\mu_0 \omega^2 P_{\text{NL}} e^{-i(kz - \omega t)}. \quad (2.65)$$

El lado derecho de esta ecuación actúa como un forzamiento no lineal que modifica la propagación libre del haz.

Para el efecto Kerr óptico, la polarización no lineal P_{NL} está directamente relacionada con la envolvente del campo A .

$$P_{\text{NL}} = \epsilon_0 \chi^{(3)} |A|^2 A. \quad (2.66)$$

La modificación del índice de refracción Δn inducida por esta polarización no lineal se define a través de la relación:

$$\Delta n = \frac{1}{2n_0} \chi^{(3)} |A|^2 \quad (2.67)$$

Combinando las Ecuaciones (2.65, 2.66 y 2.67), y notando que $\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 / n_0^2$, se obtiene el término no lineal en su forma final:

$$-\mu_0 \omega^2 P_{\text{NL}} e^{-i(kz - \omega t)} = -\frac{2k^2}{n_0} \Delta n A. \quad (2.68)$$

Finalmente, se incorpora también la atenuación óptica incluyendo un término de absorción. Esto se hace permitiendo que el número de onda k sea complejo, $k = k_r + i\alpha/2$, donde α es el coeficiente de absorción lineal. Sustituyendo este k complejo en la derivación y manteniendo sólo términos de primer orden en α , se añade el término $ik\alpha A$.

Reuniendo todos los términos, se llega a la ecuación paraxial no lineal de ondas (NPWE):

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n_0^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\text{NL}}}{\partial t^2}. \quad (2.69)$$

El siguiente paso es introducir la función envolvente lentamente variable (Ecuación 2.55) en esta ecuación no lineal. Sustituyendo $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} A(x, y, z) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}$ y $\mathbf{P}_{\text{NL}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} P_{\text{NL}} e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.}$ en la Ecuación (2.69), y realizando el mismo procedimiento de aproximación que llevó a la Ecuación (2.60) (es decir, despreciando $\partial^2 A / \partial z^2$ frente a $k \partial A / \partial z$ y asumiendo que P_{NL} varía lentamente), se obtiene la ecuación paraxial no lineal de ondas (NPWE):

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 A + \frac{2k^2}{n_0} \Delta n A + ik\alpha A = 0. \quad (2.70)$$

Donde

$$ik \frac{\partial A}{\partial z}, \quad (2.71)$$

la ecuación (2.71) representa la evolución de la envolvente A a lo largo de la dirección de propagación z . El factor $2ik$ surge naturalmente de la derivación y asegura que la ecuación sea consistente con la propagación de una onda.

$$\nabla_{\perp}^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad (2.72)$$

la Ecuación (2.72) es el operador Laplaciano transversal. Describe el fenómeno de la difracción, que es la tendencia natural de un haz a expandirse a medida que se propaga debido a su confinamiento espacial finito.

$$\frac{2k^2}{n_0} \Delta n A. \quad (2.73)$$

La ecuación (2.73) incorpora los efectos no lineales. La modificación no lineal del índice de refracción Δn es una función de la intensidad óptica $I = |A|^2$. Para el efecto Kerr óptico, esta dependencia es instantánea y espacialmente local:

$$\Delta n = n_2 I = n_2 |A|^2, \quad (2.74)$$

donde n_2 es el coeficiente no lineal de tipo Kerr (usualmente dado en m^2/W). Este término es responsable de la auto-modulación de fase: la fase del haz se modifica a sí misma a través de su propia intensidad, lo que puede llevar a efectos como el auto-enfoque o auto-des-enfoque.

$$ik\alpha A. \quad (2.75)$$

Este término describe la absorción óptica. El coeficiente de absorción α puede ser constante (absorción lineal) o puede depender de la intensidad (absorción no lineal), como en la absorción de dos fotones:

$$\alpha(I) = \alpha_0 + \beta I, \quad (2.76)$$

donde α_0 es el coeficiente de absorción lineal y β es el coeficiente de absorción de dos fotones. La parte imaginaria i indica que la absorción afecta principalmente a la amplitud (y no a la fase) del campo.

La NPWE (Ecuación 2.70) es una ecuación diferencial parcial que describe la evolución de la envolvente compleja $A(x, y, z)$ de un haz láser a que se propaga en un medio no lineal.

2.7. Límites de la Aproximación Paraxial

El trabajo de M. Lax, W. H. Louisell y W. B. McKnight. [44] establece las bases matemáticas para la aproximación paraxial partiendo directamente de las ecuaciones de Maxwell, resolviendo así una aparente paradoja fundamental en óptica de haces.

Cuando se estudia la propagación de luz en medios isótropos inhomogéneos con índice de refracción variable, surge una inconsistencia matemática. Si se asume un campo eléctrico polarizado planamente en la dirección x ($\vec{\delta} = [\delta_x, 0, 0]$), las ecuaciones de Maxwell exactas implican que δ_x debe ser independiente de la coordenada x . Sin embargo, en el tratamiento paraxial convencional se buscan soluciones gaussianas que dependen explícitamente de las coordenadas transversales, violando esta condición.

Esta aparente contradicción se resuelve mediante un procedimiento sistemático de expansión que muestra que la aproximación paraxial corresponde al término de orden cero en un desarrollo asintótico.

Escalamiento y Expansión Sistemática

El enfoque de M. Lax, W. H. Louisell y W. B. McKnight. [44] introduce un escalamiento natural basado en los parámetros característicos del haz gaussiano:

$$x = w_0 \xi, \quad y = w_0 \eta; \quad z = l \zeta. \quad (2.77)$$

donde w_0 es el radio de la cintura del haz y $l = kw_0^2$ es la longitud de difracción. El parámetro de expansión natural es:

$$f = \frac{w_0}{l} = \frac{1}{kw_0}. \quad (2.78)$$

El campo eléctrico se expresa como:

$$\vec{\delta} = e^{ikz}(\vec{F}_T + \hat{z}F_z), \quad (2.79)$$

y se desarrolla en series de potencias de f :

$$\vec{F}_T = \vec{F}_T^{(0)} + f^2 \vec{F}_T^{(2)} + \dots, \quad (2.80)$$

$$F_z = f F_z^{(1)} + f^3 F_z^{(3)} + \dots, \quad (2.81)$$

Ecuaciones de Orden Cero y Primer Orden

Sustituyendo las expansiones en las ecuaciones de Maxwell escaladas, se obtiene:

Orden Cero (Aproximación Paraxial Estándar):

$$\nabla_T^2 \vec{F}_T^{(0)} + 2i \frac{\partial \vec{F}_T^{(0)}}{\partial \zeta} = -(gl)m_0 \vec{F}_T^{(0)}. \quad (2.82)$$

Primer Orden (Componente Longitudinal):

$$F_z^{(1)} = i \nabla_T \cdot \vec{F}_T^{(0)}. \quad (2.83)$$

Esto demuestra que el campo de orden cero es puramente transversal y satisface la ecuación paraxial convencional, mientras que el campo de primer orden es longitudinal y está determinado completamente por la divergencia transversal del campo de orden cero.

Interpretación Física y Magnitud de las Correcciones

La relación entre los componentes longitudinal y transversal es:

$$\frac{|\delta_z|}{|\delta_T|} \sim f = \frac{1}{kw_0}. \quad (2.84)$$

El componente longitudinal presenta un desfase de $\pi/2$ respecto al transversal, lo que tiene implicaciones en la estructura del frente de onda y la densidad de energía.

Implicaciones para Medios No Lineales

Para medios con no linealidad Kerr ($\Delta n = n_2 I$), el formalismo permanece válido siempre que el parámetro de no linealidad satisfaga:

$$\frac{n_2 I}{n_0} \ll 1. \quad (2.85)$$

En este caso, la ecuación paraxial de orden cero se convierte en la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) utilizada comúnmente en óptica no lineal:

$$\nabla_T^2 \psi + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} + 2k^2 \frac{n_2}{n_0} |\psi|^2 \psi = 0. \quad (2.86)$$

La aproximación paraxial, que condujo a la ecuación paraxial de ondas (Ecuación 2.60), es una herramienta fundamental para el estudio de la propagación de haces láser. Sin embargo, su validez está sujeta a condiciones específicas sobre la naturaleza del haz. Esta sección tiene como objetivo establecer de manera rigurosa los límites de esta aproximación, cuantificando el error cometido al despreciar el término $\partial^2 A / \partial z^2$ y discutiendo las consecuencias de su incumplimiento.

Para fundamentar esta aproximación, partimos de la expresión para el campo eléctrico dado (Ecuación 2.55):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} A(x, y, z) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (2.87)$$

La suposición física subyacente es que la amplitud compleja $A(x, y, z)$ varía lentamente en la dirección de propagación z en comparación con la variación rápida de la onda portadora e^{ikz} . Matemáticamente, esto implica que la escala longitudinal característica de variación de A , llamada L_z , es mucho mayor que la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$:

$$L_z \gg \lambda. \quad (2.88)$$

Para cuantificar esto, sustituimos la forma de la envolvente lentamente variable en la ecuación de onda homogénea (Ecuación 2.53). Como se mostró en la Sección 2.5, esto conduce a una ecuación exacta antes de cualquier aproximación:

$$\nabla_\perp^2 A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0. \quad (2.89)$$

La aproximación paraxial consiste en despreciar el término $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$ frente a $2ik \frac{\partial A}{\partial z}$, argumentando que es significativamente menor. Para establecer el criterio de validez, comparamos la magnitud de ambos términos. Estimamos las derivadas como:

$$\left| \frac{\partial A}{\partial z} \right| \sim \frac{|A|}{L_z}, \quad (2.90)$$

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \sim \frac{|A|}{L_z^2}. \quad (2.91)$$

Por lo tanto, la condición para que la aproximación sea válida es:

$$\left| \frac{\partial^2 A / \partial z^2}{2ik \partial A / \partial z} \right| \sim \frac{1/L_z^2}{k/L_z} = \frac{1}{kL_z} \ll 1. \quad (2.92)$$

Esto confirma que la aproximación paraxial es válida cuando $kL_z \gg 1$, o equivalentemente, $L_z \gg \lambda$.

2.7.1. Ecuaciones de Propagación No Paraxiales

Para situaciones donde la aproximación paraxial no es suficiente, es necesario recurrir a métodos de propagación más generales. La expresión exacta para la propagación en el espacio de Fourier (espacio recíproco) es una alternativa robusta. Dado el campo en un plano $z = 0$, $A(x, y, 0)$, su transformada de Fourier es $\tilde{A}(k_x, k_y, 0)$. El campo en un plano $z > 0$ se obtiene entonces mediante:

$$A(x, y, z) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \tilde{A}(k_x, k_y, 0) e^{ik_z z} \right\}, \quad (2.93)$$

donde $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$. Esta expresión es válida para cualquier ángulo, siempre que $|k_\perp| \leq k$ (ondas homogéneas). Sin embargo, su implementación numérica es más costosa computacionalmente que el método Split-Step paraxial, debido a la necesidad de calcular la raíz cuadrada para cada componente espectral.

$$k_z = k - \frac{k_\perp^2}{2k} - \frac{k_\perp^4}{8k^3} - \dots, \quad (2.94)$$

lo que conduce a una ecuación diferencial parcial con derivadas de orden superior (e.g., $\nabla_\perp^4$), conocida como ecuación de onda de ángulo ancho.

2.8. El operador de difracción y su evolución.

La Ecuación Paraxial de Ondas No Lineal (NPWE) derivada en la sección anterior gobierna la evolución de la envolvente compleja $A(x, y, z)$ de un haz láser durante su propagación en un medio óptico. Esta ecuación puede reescribirse aislando la derivada con respecto a z :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k} \nabla_\perp^2 A - i \frac{k}{n_0} \Delta n A - \frac{\alpha}{2} A. \quad (2.95)$$

Esta forma manifiesta que la evolución del haz es gobernada por la competencia entre tres operadores distintos:

1. Un operador de difracción lineal: $\hat{D} = \frac{i}{2k} \nabla_\perp^2$
2. Un operador no lineal que modula la fase: $\hat{N} = -i \frac{k}{n_0} \Delta n$
3. Un operador de absorción que atenúa la amplitud: $\hat{L} = -\frac{\alpha}{2}$

El foco de esta sección es analizar en detalle el primer operador, $\hat{D}$, que describe el efecto puro de la difracción, es decir, cómo se propaga un haz en ausencia total de no linealidades y pérdidas ($\Delta n = 0, \alpha = \text{cte.}$).

Bajo estas condiciones, la NPWE se reduce a la ecuación paraxial de difracción:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k} \nabla_\perp^2 A \quad (2.96)$$

La solución formal de la Ecuación (2.96) para un paso de propagación Δz se puede escribir utilizando la noción de operador de evolución:

$$A(x, y, z + \Delta z) = \exp \left(\Delta z \cdot \frac{i}{2k} \nabla_\perp^2 \right) A(x, y, z) \quad (2.97)$$

Sin embargo, la naturaleza no conmutativa y la dependencia espacial de los operadores $\hat{N}$ y $\hat{L}$ en la ecuación completa (Ecuación 2.95) hacen que encontrar una solución analítica exacta sea

complicado para el caso general no lineal. Por esta razón, el método numérico de Split-Step Fourier (o Split-Step) se convierte en una herramienta necesaria.

La idea fundamental del método Split-Step es aproximar el operador de evolución para un paso pequeño Δz asumiendo que los efectos de difracción y no linealidad actúan independientemente a lo largo de medio paso cada uno. La precisión de esta aproximación es del orden $O(\Delta z^2)$.

La evolución del operador de difracción, aislado en el espacio de Fourier, es, por tanto, conceptualmente simple y computacionalmente eficiente. Su acción sobre un haz arbitrario se reduce a aplicar un desfase lineal en el espacio recíproco, donde cada componente espacial de Fourier (que corresponde a una onda plana propagándose en una dirección definida por $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$ adquiere un desplazamiento de fase distinto.

Para ilustrar la acción pura del operador de difracción, considérese su efecto sobre el modo fundamental de propagación: el haz Gaussiano. Un haz Gaussiano a la cintura ($z = 0$) tiene un perfil de campo dado por $A(r, 0) = A_0 \exp(-r^2/w_0^2)$, donde w_0 es el radio de la cintura. La evolución de este haz gobernada únicamente por la Ecuación (2.96) tiene una solución analítica conocida:

$$A(r, z) = A_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-i \left[kz - \zeta(z) + \frac{kr^2}{2R(z)} \right]\right), \quad (2.98)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}, \quad (2.99)$$

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right), \quad (2.100)$$

$$\zeta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (2.101)$$

donde $z_0 = \pi w_0^2 n_0 / \lambda$ es la longitud de Rayleigh y define la escala de distancia sobre la cual la difracción expande significativamente el haz. El radio del haz $w(z)$ crece monotónicamente, la curvatura del frente de onda $R(z)$ cambia de signo en $z = 0$, y la fase de Gouy $\zeta(z)$ acumula un deslizamiento de fase extra de π a medida que el haz pasa por la cintura.

Capítulo 3

Óptica No Lineal y el Efecto Kerr Local

La no linealidad es una propiedad del medio de propagación, las propiedades se describen mediante la relación entre el vector de densidad de polarización $\vec{P}(\vec{r}, t)$ y el vector de campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$:

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E(t). \quad (3.1)$$

En este caso, la polarización depende de la intensidad del campo eléctrico, donde $\chi^{(1)}$ se conoce como la susceptibilidad lineal. En óptica no lineal, la respuesta óptica se describe con la ecuación (3.1), expresando la polarización $P(t)$ como una serie de potencias del campo $E(t)$:

$$P(t) = \varepsilon_0 \left[\chi^{(1)} E(t) + \chi^{(2)} E^2(t) + \chi^{(3)} E^3(t) + \dots \right] \quad (3.2)$$

$$P(t) = P^{(1)}(t) + P^{(2)}(t) + P^{(3)}(t) + \dots \quad (3.3)$$

Las cantidades $\chi^{(2)}$ y $\chi^{(3)}$ representan las susceptibilidades ópticas no lineales de segundo y tercer orden.

Para medios centrosimétricos, el término no lineal de segundo orden está ausente. La no linealidad dominante es entonces de tercer orden y el material se denomina medio Kerr:

$$P^{(3)}(t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} E(t)^3 \quad (3.4)$$

Sustituyendo $E(t)$ en la polarización de tercer orden:

$$P^{(3)}(t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} [E(t)]^3 = \varepsilon_0 \chi^{(3)} [E(\omega)e^{i\omega t} + E^*(\omega)e^{-i\omega t}]^3 \quad (3.5)$$

Expandiendo el cubo:

$$[E(t)]^3 = E^3(\omega)e^{i3\omega t} + 3E^2(\omega)E^*(\omega)e^{i\omega t} + 3E(\omega)E^{*2}(\omega)e^{-i\omega t} + E^{*3}(\omega)e^{-i3\omega t} \quad (3.6)$$

Simplificando usando $|E(\omega)|^2 = E(\omega)E^*(\omega)$:

$$[E(t)]^3 = E^3(\omega)e^{i3\omega t} + 3|E(\omega)|^2 E(\omega)e^{i\omega t} + 3|E(\omega)|^2 E^*(\omega)e^{-i\omega t} + E^{*3}(\omega)e^{-i3\omega t} \quad (3.7)$$

Por lo tanto:

$$P^{(3)}(t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} [E^3(\omega) e^{i3\omega t} + 3|E(\omega)|^2 E(\omega) e^{i\omega t} + 3|E(\omega)|^2 E^*(\omega) e^{-i\omega t} + E^{*3}(\omega) e^{-i3\omega t}] \quad (3.8)$$

Para la componente a frecuencia ω , la amplitud compleja $P_{NL}(\omega)$ es el coeficiente de $e^{i\omega t}$:

$$P_{NL}(\omega) = 3\varepsilon_0 \chi^{(3)} |E(\omega)|^2 E(\omega) \quad (3.9)$$

Para la componente a frecuencia 3ω , la amplitud compleja $P_{NL}(3\omega)$ es el coeficiente de $e^{i3\omega t}$:

$$P_{NL}(3\omega) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3(\omega) \quad (3.10)$$

Si se omite ε_0 , se obtiene el resultado esperado:

$$P_{NL}(\omega) = 3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2 E(\omega) \quad (3.11)$$

$$P_{NL}(3\omega) = \chi^{(3)} E^3(\omega) \quad (3.12)$$

Efecto Kerr Óptico

El efecto Kerr óptico es el fenómeno no lineal de tercer orden que describe la modificación instantánea y local del índice de refracción de un material inducida por la intensidad del campo óptico que se propaga.

La componente de polarización a frecuencia ω corresponde a un incremento de la susceptibilidad $\Delta\chi$:

$$\varepsilon_0 \Delta\chi = \frac{P_{NL}(\omega)}{E(\omega)} = 3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2 = 6\eta \chi^{(3)} I \quad (3.13)$$

donde $I = |E(\omega)|^2 / 2\eta$ es la intensidad óptica de la onda inicial. Dado que $n^2 = 1 + \chi$, esto equivale a un incremento del índice de refracción:

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial \chi} \Delta\chi = \frac{\partial(\sqrt{1+\chi})}{\partial \chi} \Delta\chi = \frac{1}{2\sqrt{1+\chi}} \Delta\chi \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow \Delta n = \frac{\Delta\chi}{2n} \quad (3.15)$$

Sustituyendo la ecuación (3.13) en (3.15):

$$\Delta n = \frac{3\eta \chi^{(3)} I}{\varepsilon_0 n} = n_2 I \quad (3.16)$$

Por lo tanto, el cambio en el índice de refracción es proporcional a la intensidad óptica. El índice de refracción total es una función lineal de la intensidad:

$$n(I) = n + n_2 I \quad (3.17)$$

donde:

$$n_2 = \frac{3\eta_0 \chi^{(3)}}{n^2 \varepsilon_0} \quad (3.18)$$

Para un medio isotrópico, esta respuesta se cuantifica mediante la modificación del índice de refracción, dada por:

$$n = n_0 + n_2 I \quad (3.19)$$

La consecuencia de la Ecuación (3.19) es la auto-modulación de fase. Un haz con un perfil de intensidad transversal no uniforme induce un perfil de índice de refracción igualmente no uniforme,

$$\Delta n(x, y) = n_2 I(x, y) \quad (3.20)$$

. La fase no lineal después de propagarse una distancia L en el medio es:

$$\phi_{\text{NL}}(x, y) = k_0 \Delta n(x, y) L = k_0 n_2 I(x, y) L \quad (3.21)$$

Auto Modulación de Fase Como resultado del efecto Kerr óptico, una onda que viaja en un medio no lineal de tercer orden experimenta auto modulación de fase. El cambio de fase para un haz de potencia P y área transversal A , que viaja una distancia L en el medio, es:

$$\phi = \frac{2\pi n(I)L}{\lambda_0} = \frac{2\pi(n + n_2 P/A)L}{\lambda_0} \quad (3.22)$$

siendo alterado por:

$$\Delta\phi = 2\pi n_2 \frac{PL}{\lambda_0 A} \quad (3.23)$$

El cambio en el índice de refracción conduce a un cambio en el vector de onda dentro del medio.
. Ahora tenemos:

$$\Delta k(x, y, z) = k_{\text{nl}} - k_{\text{lin}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta n(x, y, z) = \frac{2\pi n_2}{\lambda_0} I(x, y, z) \quad (3.24)$$

Este cambio en el vector de onda se traduce en una modificación de la fase óptica acumulada durante la propagación, la fase total acumulada por el haz al propagarse una distancia L en el medio no lineal viene dada por:

$$\phi_{\text{total}} = \int_0^L k_{\text{total}} dz = \int_0^L [k_{\text{lin}} + \Delta k(z)] dz = k_{\text{lin}} L + \Delta\phi \quad (3.25)$$

donde el cambio de fase no lineal $\Delta\phi$ es:

$$\Delta\phi(x, y) = \int_0^L \Delta k(x, y, z) dz = \int_0^L \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta n(x, y, z) dz \quad (3.26)$$

Para un medio delgado ($L \ll z_0$, donde z_0 es la longitud de Rayleigh) y con una intensidad que varía lentamente en la dirección z (lo que permite despreciar la dependencia con z de I dentro del medio), la integral se simplifica notablemente. Bajo estas condiciones, podemos aproximar:

$$\Delta\phi(x, y) \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta n(x, y) L = \frac{2\pi n_2 L}{\lambda_0} I(x, y) \quad (3.27)$$

Usando la definición del número de onda en el vacío $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, obtenemos la expresión fundamental para el cambio de fase no lineal:

$$\Delta\phi(x, y) = k_0 \Delta n(x, y) L = k_0 n_2 I(x, y) L \quad (3.28)$$

Efectos de Auto-acción Los efectos de auto-acción se refiere a como un haz de luz modifica su propagación mediante la respuesta no lineal de un material. Estos incluyen autoenfocamiento y auto-atrapamiento .

El **autoenfocamiento** ocurre cuando un haz con distribución transversal no uniforme modifica las propiedades del medio de propagación, causando que el haz se enfoque en materiales con n_2 positivo, el material actúa como un medio gradiente que genera un cambio de fase no uniforme, curvando el frente de onda y funcionando como una lente positiva.

El **auto-atrapamiento** ocurre cuando un haz se propaga con diámetro constante d como consecuencia del autoenfocamiento y difracción. Este fenómeno solo puede ocurrir si la potencia del haz es exactamente igual a la potencia crítica [9]:

$$P_{cr} = \frac{\pi(0,61)^2 \lambda_0^2}{8n_0 n_2} \quad (3.29)$$

En general, los efectos de auto-acción pueden describirse mediante la ecuación de onda no lineal.

Perfil de fase para un haz Gaussiano

Para un haz con perfil de intensidad transversal Gaussiano, la intensidad viene dada por:

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)$$

donde:

- I_0 es la intensidad pico en el centro del haz ($r = 0$)
- w es el radio del haz a la posición z (definido donde la intensidad decae a $1/e^2$ de su valor máximo)
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la coordenada radial

Sustituyendo en la Ecuación 3.28, obtenemos el perfil de cambio de fase no lineal:

$$\Delta\phi(r) = \Delta\phi_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \quad (3.30)$$

donde $\Delta\phi_0 = k_0 n_2 I_0 L$ es el cambio de fase no lineal máximo sobre el eje ($r = 0$).

3.0.1. Relación con la ecuación paraxial no lineal de onda (NPWE)

Finalmente, es crucial destacar que este cambio de fase no lineal $\Delta\phi$ se incorpora naturalmente en la ecuación paraxial no lineal de onda (NPWE) que derivamos en el Capítulo 2. Recordando la forma de la NPWE :

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 A + \frac{2k^2}{n_0} \Delta n A + ik\alpha A = 0. \quad (3.31)$$

El término

$$\frac{2k^2}{n_0} \Delta n A = \frac{2k^2}{n_0} n_2 |A|^2 A \quad (3.32)$$

es el responsable de acoplar la intensidad del haz con su propia fase, generando la auto-modulación de fase.

El operador no lineal

$$\hat{N} = -i \frac{k}{n_0} \Delta n, \quad (3.33)$$

introducido en la Sección 2.3 actúa específicamente sobre la fase del campo, modificándola según:

$$\exp(i\Delta\phi) = \exp(ik_0n_2IL) \quad (3.34)$$

Esta modificación de fase es la que conduce a todos los fenómenos no lineales discutidos en esta sección.

Capítulo 4

Resultados numéricos

4.1. Descripción del Modelo de Propagación

Se considera un haz Gaussiano de cintura ω_0 y longitud de onda λ cuya amplitud compleja a la salida del medio está dada por:

$$E(r, z) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp \left[\frac{-r^2}{\omega(z)^2} \right] \exp \left[\frac{-\alpha L}{2} \right] \exp \left[-ikz - ik \frac{r^2}{2R(z)} + i\zeta(z) \right], \quad (4.1)$$

donde:

- A_0 es una constante de amplitud,
- $\omega(z)$ es el ancho del haz a la distancia z ,
- $R(z)$ es el radio de curvatura del frente de onda,
- $\zeta(z)$ es el término de fase debido al efecto Guoy,
- L es el grosor de la muestra,
- α es el coeficiente de absorción lineal del medio.

Se considera que el campo inicial no se verá afectado al propagarse por el medio más que por un pequeño cambio de fase $\Delta\phi$ a la salida del medio. El cambio de fase $\Delta\phi$ se obtiene de integrar el cambio en el índice de refracción Δn a lo largo del grosor de la muestra:

$$\Delta\phi = k \int_0^L \Delta n(I) dz, \quad (4.2)$$

donde $\Delta n(I)$ representa la contribución no lineal del índice de refracción, que puede incluir términos locales y no locales.

En el modelo propuesto, la no localidad del medio se manifiesta a través de:

- Modificación del ancho del perfil de cambio de fase respecto al ancho del perfil de intensidad incidente
- Alteración de la magnitud del cambio de fase máximo sobre el eje de propagación
- Cambios en la amplitud del campo de salida

Estos efectos se modelan matemáticamente mediante la inclusión de un término de convolución en la expresión del cambio de fase no lineal [41]:

$$\Delta n(I) = n_2 I + s \cdot (R * I), \quad (4.3)$$

donde:

- n_2 es el coeficiente no lineal Kerr,
- s es la fuerza de la no localidad,
- R es la función de respuesta no local,
- $*$ denota la operación de convolución.

4.2. Modelo de Respuesta No Local

La no linealidad de un material representa una propiedad fundamental que caracteriza la respuesta del medio ante la presencia de un campo externo. Se suele considerar que la respuesta del material en un punto específico depende del valor del campo únicamente en ese mismo punto [49]. Cuando se cumple esta condición, se dice que el material es **local**. Sin embargo, numerosos materiales exhiben un comportamiento que complica esta simplificación.

En el caso de un medio no local, dicho cambio puede representarse mediante la expresión fenomenológica [41]:

$$\Delta n(I) = s \int R(\vec{\xi} - \vec{r}) I(\vec{\xi}, z) d\vec{\xi} \quad (4.4)$$

donde:

- La integral $\int d\vec{\xi}$ se realiza sobre todas las dimensiones transversales
- s indica el signo de la no linealidad, tomando valores 1 o -1
- $s = 1$ corresponde a no linealidad positiva (autoenfocamiento)
- $s = -1$ corresponde a no linealidad negativa (autodesenfocamiento)
- $R(\vec{r})$ es la función de respuesta, considerada real, localizada y simétrica
- La función de respuesta satisface la condición de normalización $\int R(\vec{r}) d\vec{r} = 1$

El ancho de la función de respuesta R determina el **grado de no localidad** del material.

Para el caso particular de una respuesta local, donde $R(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$, obtenemos:

$$\Delta n = s I(\vec{r}, z) \quad (4.5)$$

Esto significa que el cambio en el índice de refracción en un punto está determinado exclusivamente por la intensidad de la luz en ese mismo punto.

Para la implementación numérica, utilizamos una función de respuesta gaussiana:

$$R(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{nl}^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_{nl}^2}\right), \quad (4.6)$$

donde σ_{nl} representa el ancho característico de la respuesta no local [35].

En este trabajo, solo se enfoca en resolver el caso donde el medio lineal es local, y describimos un método numérico basado en técnicas de operador dividido y transformada discreta de Fourier [24].

Ecuación de Onda y Método de Solución

Partimos del supuesto habitual de que la propagación de un componente de frecuencia única puede describirse mediante la ecuación escalar de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega, x, y) E = 0, \quad (4.7)$$

donde $E(\omega, x, y, z)$ es la componente transversal del campo eléctrico, ω es la frecuencia circular de la luz, y el índice de refracción $n(\omega, x, y)$ se supone que depende solo de las coordenadas transversales x e y .

La solución a la ecuación (4.7) en $z = \Delta z$ puede escribirse formalmente en términos del campo en $z = 0$ como:

$$E(x, y, \Delta z) = \exp \left[\pm i \Delta z \left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \right)^{1/2} \right] E(x, y, 0), \quad (4.8)$$

donde $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. La raíz cuadrada en la Ec. (4.8) puede escribirse en la forma

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \right)^{1/2} = \frac{\nabla_{\perp}^2}{(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2)^{1/2} + \frac{\omega}{c} n} + (\omega/c)n. \quad (4.9)$$

Si n en el primer miembro del lado derecho de la Ec. (4.9) se reemplaza por el valor de referencia n_0 , la Ec. (4.9) se convierte en

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \right)^{1/2} \approx \frac{\nabla_{\perp}^2}{(\nabla_{\perp}^2 + k^2)^{1/2} + k} + k + k[(n/n_0) - 1], \quad (4.10)$$

con

$$k = (n_0 \omega)/c. \quad (4.11)$$

La aproximación en la Ec. (4.10) es válida para variaciones suficientemente pequeñas en $n(x, y)$, como se muestra en el Apéndice (A.1). Deseamos restringir la solución para E a una sola onda propagándose en la dirección positiva z . Si la dependencia temporal de $E(\omega, x, y, z)$ es $\exp(i\omega t)$, E puede expresarse de la forma

$$E(x, y, z) = \epsilon(x, y, z) \exp(-ikz). \quad (4.12)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.8) y tomando el signo negativo se obtiene:

$$\epsilon(x, y, \Delta z) = \exp \left[-i \Delta z \frac{\nabla_{\perp}^2}{(\nabla_{\perp}^2 + k^2)^{1/2} + k} + \chi(x, y) \right] \epsilon(x, y, 0), \quad (4.13)$$

donde $\chi = k[(n/n_0) - 1]$.

A segundo orden en Δz , la ecuación (4.13) puede reescribirse en la forma de operador dividido simetrizado:

$$\begin{aligned} \epsilon(x, y, \Delta z) = & \exp \left[-\frac{i \Delta z}{2} \frac{\nabla_{\perp}^2}{(\nabla_{\perp}^2 + k^2)^{1/2} + k} \right] \exp(-i \Delta z \chi) \\ & \times \exp \left[-\frac{i \Delta z}{2} \frac{\nabla_{\perp}^2}{(\nabla_{\perp}^2 + k^2)^{1/2} + k} \right] \epsilon(x, y, 0) + O(\Delta z)^3, \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde el error surge de la no conmutación de $\nabla_{\perp}^2$ y $\chi(x, y)$. Esta expresión es adecuada para generar una solución numérica y, debido a la unitariedad de los operadores, la solución será incondicionalmente estable.

Una representación numérica precisa de la ecuación (4.14) puede obtenerse expresando $\epsilon(x, y, z)$ como una serie de Fourier bidimensional con un número finito de [24]:

$$\epsilon(x, y, z) = \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \sigma_{mn}(z) \exp \left[\frac{2\pi i}{L} (mx + ny) \right], \quad (4.15)$$

donde L es la longitud de la malla computacional.

La propagación del haz a través de una distancia Δz en un medio homogéneo de índice de refracción n_0 transforma $\sigma_{mn}(0)$ en:

$$\sigma_{mn}(\Delta z) = \sigma_{mn}(0) \exp \left[i\Delta z \left(\frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{(-\kappa_x^2 - \kappa_y^2 + k^2)^{1/2} + k} \right) \right], \quad (4.16)$$

donde κ_x y κ_y son los números de onda transversales:

$$\kappa_x = \frac{2\pi m}{L}, \quad \kappa_y = \frac{2\pi n}{L}. \quad (4.17)$$

En conclusión, la aproximación extendida de Fresnel permite la división de operadores, crucial para el uso de métodos espectrales de solución, pero no está restringida a haces que se propagan en ángulos pequeños con respecto al eje z .

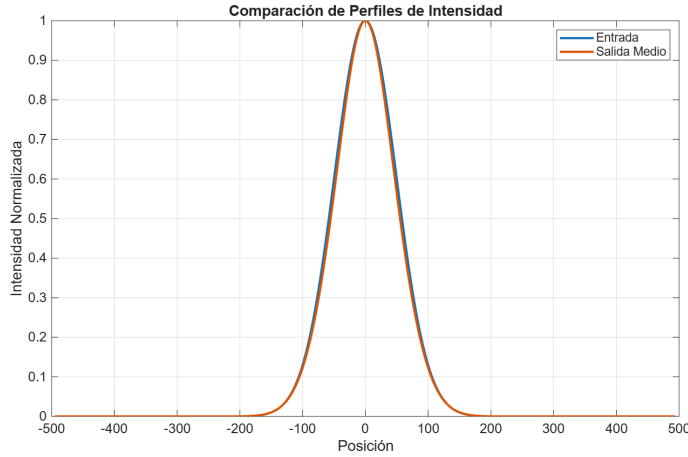


Figura 4.1: Perfiles de intensidad a la entrada y a la salida del medio, calculado con la ecuación de Helmholtz.

Formulación Matemática de la Aproximación Paraxial

Partiendo de la ecuación de Helmholtz escalar:

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \quad (4.18)$$

y considerando un campo que se propaga predominantemente en la dirección z , expresamos el campo eléctrico como:

$$E(x, y, z) = \psi(x, y, z) e^{-ikz}, \quad (4.19)$$

donde $\psi(x, y, z)$ es la envolvente lentamente variable. Sustituyendo en la ecuación (4.18) y despreciando el término $\partial^2 \psi / \partial z^2$ bajo la aproximación paraxial, obtenemos la **ecuación paraxial de ondas**:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (4.20)$$

donde $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Para incluir efectos no lineales, la ecuación (4.20) se extiende como:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} + 2k^2 \frac{\Delta n(I)}{n_0} \psi + ik\alpha(I)\psi = 0, \quad (4.21)$$

donde:

- $\Delta n(I) = n_2 I + s(R * I)$: cambio no lineal del índice de refracción
- $\alpha(I) = \alpha_0 + \beta I$: coeficiente de absorción no lineal
- n_2 : coeficiente no lineal Kerr (m^2/W)
- s : fuerza de la no localidad
- R : función de respuesta no local
- $*$: operación de convolución

Método de Operador Dividido (Split-Step) Paraxial

El método de operador dividido descompone la ecuación de propagación en operadores lineales y no lineales que se aplican secuencialmente. Para la ecuación (4.21), identificamos dos operadores principales:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})\psi, \quad (4.22)$$

donde:

- $\hat{D} = \frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2$: operador de difracción lineal
- $\hat{N} = \frac{ik}{n_0} \Delta n(I) - \frac{\alpha(I)}{2}$: operador no lineal

El algoritmo completo para un paso de propagación Δz sigue la estructura simetrizada:

$$\textbf{Paso 1: } \psi^{(1)} = \mathcal{N}\left(\frac{\Delta z}{2}\right) \psi(z) \quad (4.23)$$

$$\textbf{Paso 2: } \psi^{(2)} = \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{L}_{\text{paraxial}}(\Delta z) \cdot \mathcal{F}[\psi^{(1)}] \right] \quad (4.24)$$

$$\textbf{Paso 3: } \psi(z + \Delta z) = \mathcal{N}\left(\frac{\Delta z}{2}\right) \psi^{(2)} \quad (4.25)$$

donde $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ representan las transformadas de Fourier directa e inversa, respectivamente.

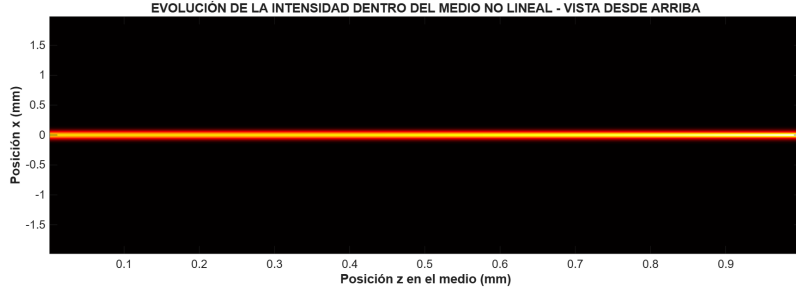


Figura 4.2: Propagación de un haz gaussiano en un medio no lineal local.

Campo de Salida

El campo de salida $\psi_{\text{salida}}(x, y)$ se obtiene mediante la propagación numérica del campo de entrada a través del medio no lineal utilizando el método de operador dividido (split-step Fourier)

Este proceso garantiza que el campo de salida capture todos los efectos no lineales y de propagación de manera numérica, siguiendo el esquema simétrico del método split-step Fourier.

Una vez obtenido el campo a la salida del medio no lineal (Fig 4.3), se procede a calcular el patrón de difracción en campo lejano mediante la transformada de Fourier:

$$E_{\text{lejano}}(k_x, k_y) = \mathcal{F}\{E_{\text{salida}}(x, y)\}, \quad (4.26)$$

$$I_{\text{lejano}}(k_x, k_y) = |E_{\text{lejano}}(k_x, k_y)|^2, \quad (4.27)$$

donde (k_x, k_y) son las coordenadas en el espacio de Fourier, relacionadas con las coordenadas angulares en el plano de observación.

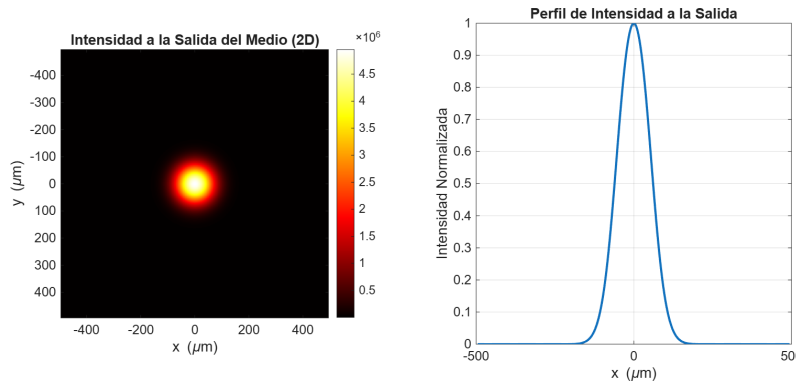


Figura 4.3: Distribucion de intensidades a la salida de un medio no lineal.

Este enfoque permite describir numéricamente los patrones de difracción del fenómeno de auto-modulación espacial de fase, proporcionando una herramienta para el estudio de las propiedades no lineales de materiales.

El patrón de difracción en campo lejano se obtiene mediante la transformada de Fourier del campo de salida:

$$\psi_{\text{lejano}}(k_x, k_y) = \mathcal{F}\{\psi_{\text{salida}}(x, y)\}, \quad (4.28)$$

$$I_{\text{lejano}}(k_x, k_y) = |\psi_{\text{lejano}}(k_x, k_y)|^2. \quad (4.29)$$

Las coordenadas físicas en el plano de observación están relacionadas con las frecuencias espaciales mediante:

$$u = \frac{\lambda d}{2\pi} k_x, \quad v = \frac{\lambda d}{2\pi} k_y, \quad (4.30)$$

donde d es la distancia de propagación en espacio libre.

La aproximación paraxial es válida cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\frac{\lambda}{\pi w_0} \ll 1 \quad \text{y} \quad \theta_{\max} \ll 1, \quad (4.31)$$

donde $\theta_{\max}$ es el ángulo máximo de divergencia del haz.

Mientras que el método exacto de Helmholtz utiliza el operador:

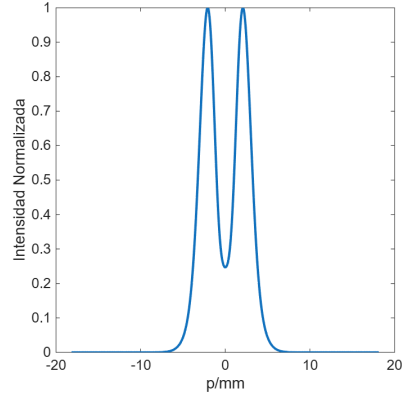
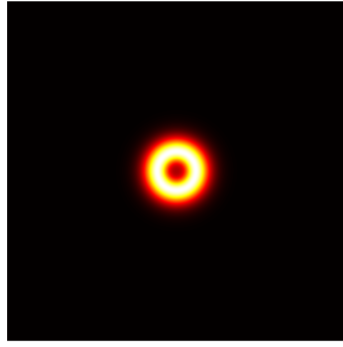
$$\mathcal{L}_{\text{exacto}} = \exp \left(i \Delta z \frac{k_x^2 + k_y^2}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} + k} \right), \quad (4.32)$$

la aproximación paraxial emplea:

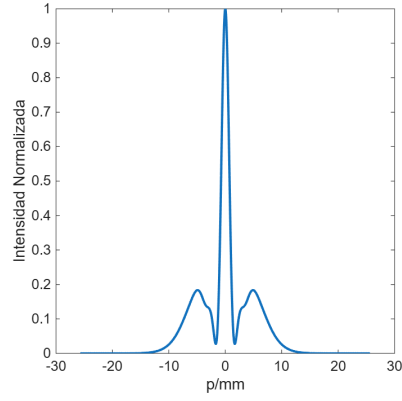
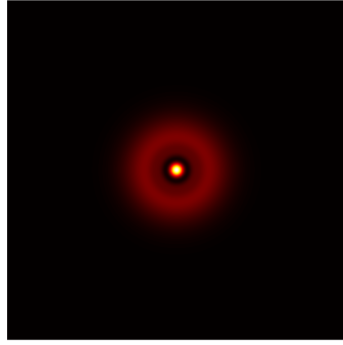
$$\mathcal{L}_{\text{paraxial}} = \exp \left(-i \frac{\Delta z}{2k} (k_x^2 + k_y^2) \right), \quad (4.33)$$

que corresponde al primer término de la expansión en serie de $\mathcal{L}_{\text{exacto}}$ para $k_x^2 + k_y^2 \ll k^2$.

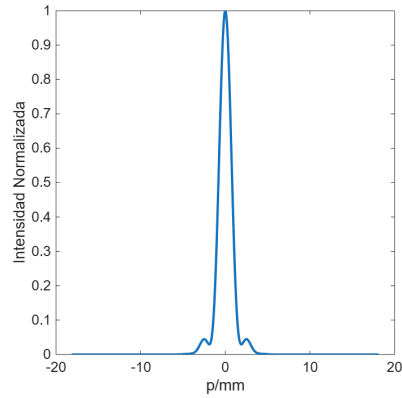
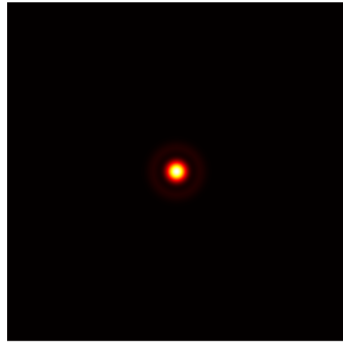
La implementación permite capturar efectos complejos, como la auto-modulación espacial de fase y la formación de patrones de difracción no lineales a campo lejano.



(a)

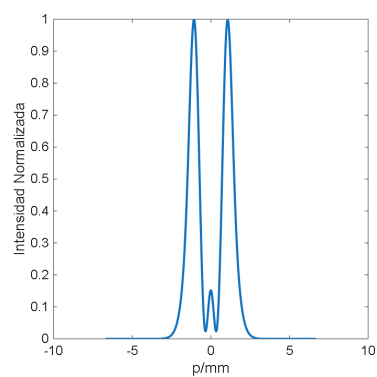
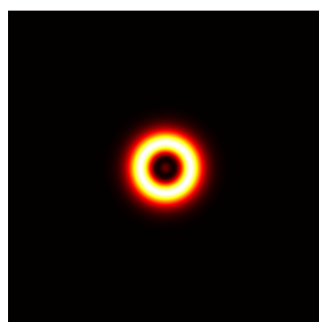


(b)

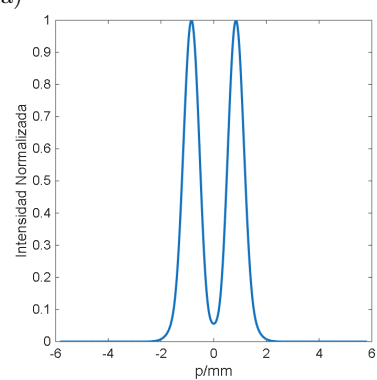


(c)

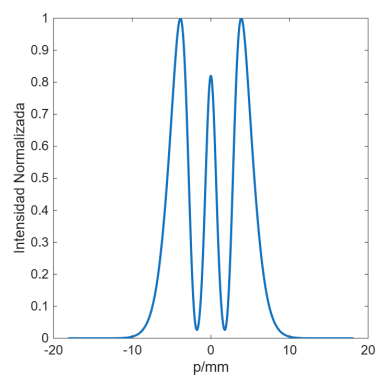
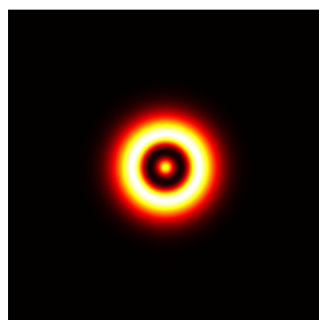
Figura 4.4: Patrones de difracción y perfiles de intensidad a campo lejano en un medio local $s = 0$ colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -z_0$, b) $z = 0$, c) $z = z_0$, $\Delta\Phi_0 = \pi$.



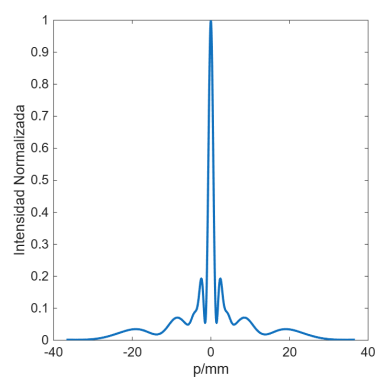
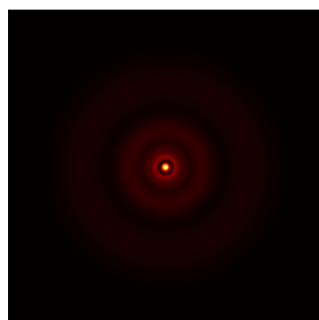
(a)



(b)



(c)



(d)

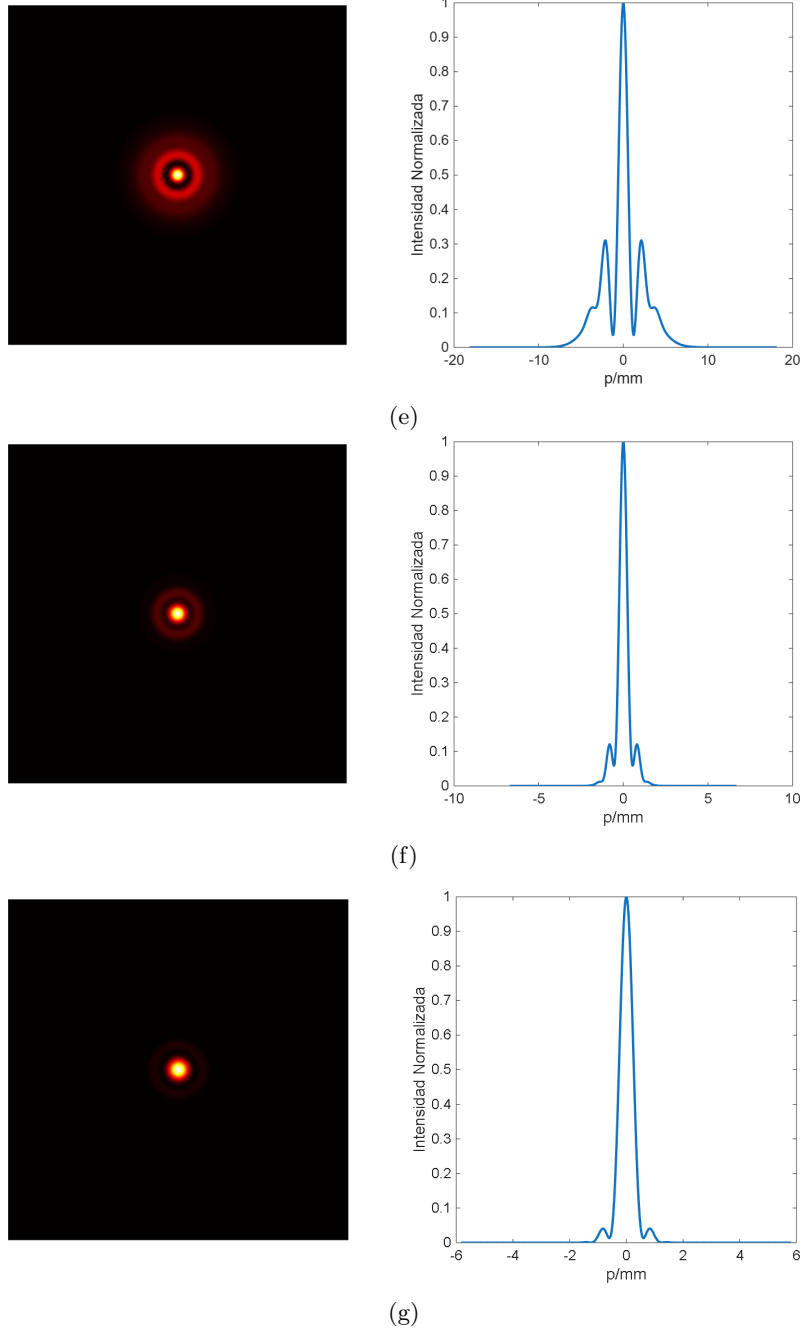
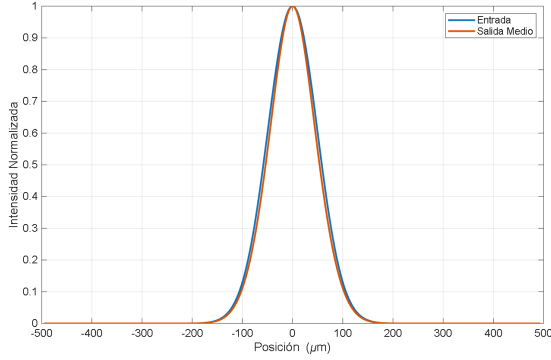
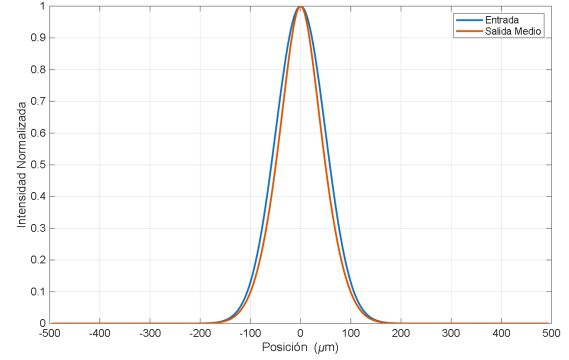


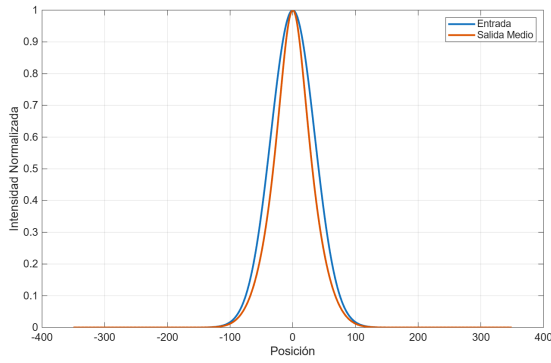
Figura 4.5: Patrones de difracción y perfiles de intensidad a campo lejano en un medio local $s = 0$ colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -4z_0$, b) $z = -2z_0$, c) $z = -z_0$, d) $z = 0$, e) $z = z_0$, f) $z = 2z_0$, g) $z = 4z_0$ y $\Delta\Phi_0 = 2\pi$.



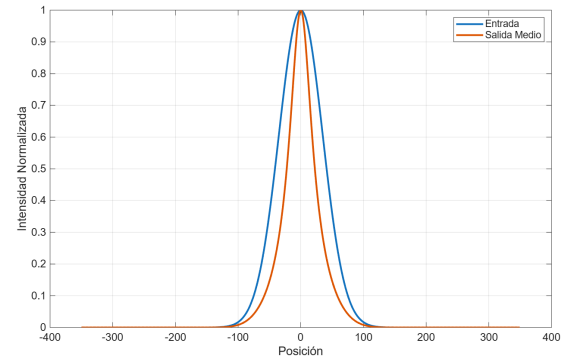
(a)



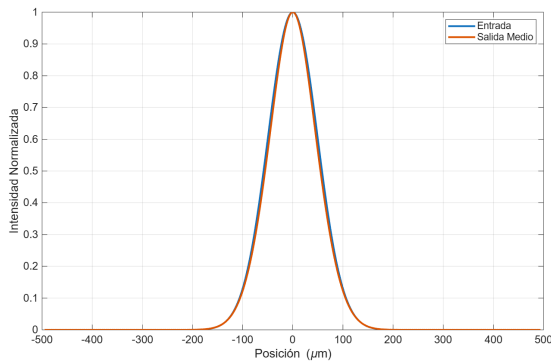
(a)



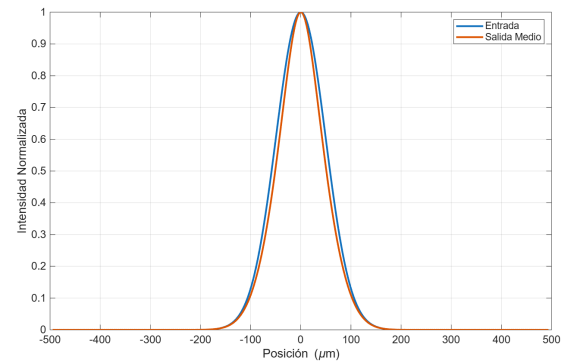
(b)



(b)



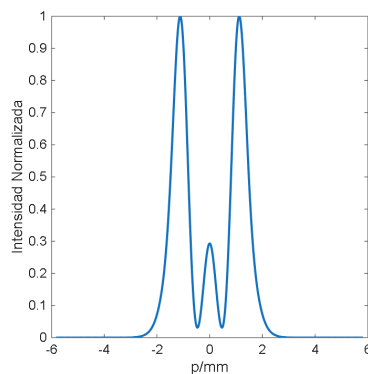
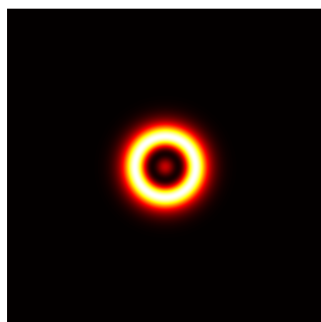
(c)



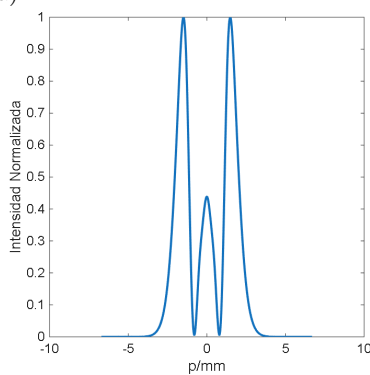
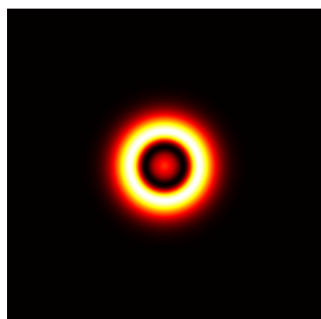
(c)

Figura 4.6: Comparación de perfiles de intensidad a la entrada y a la salida de un medio local $s = 0$ colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -z_0$, b) $z = 0$, c) $z = z_0$, y $\Delta\Phi_0 = \pi$.

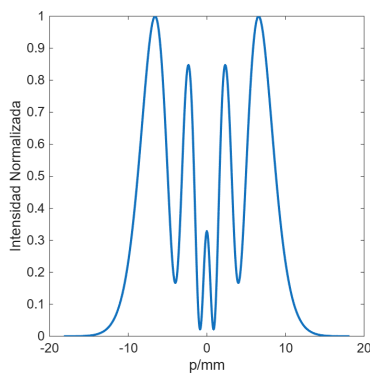
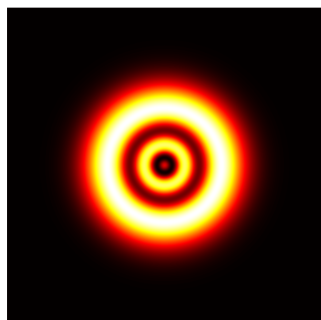
Figura 4.7: Comparación de perfiles de intensidad a la entrada y a la salida de un medio local $s = 0$ colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -z_0$, b) $z = 0$, c) $z = z_0$, y $\Delta\Phi_0 = 2\pi$.



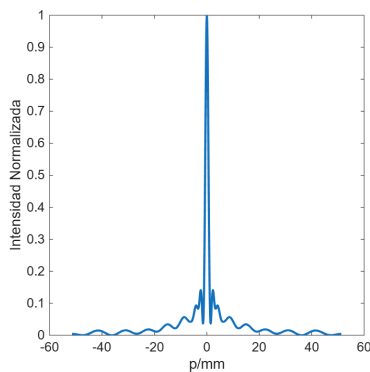
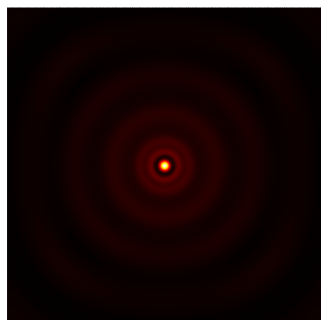
(a)



(b)



(c)



(d)

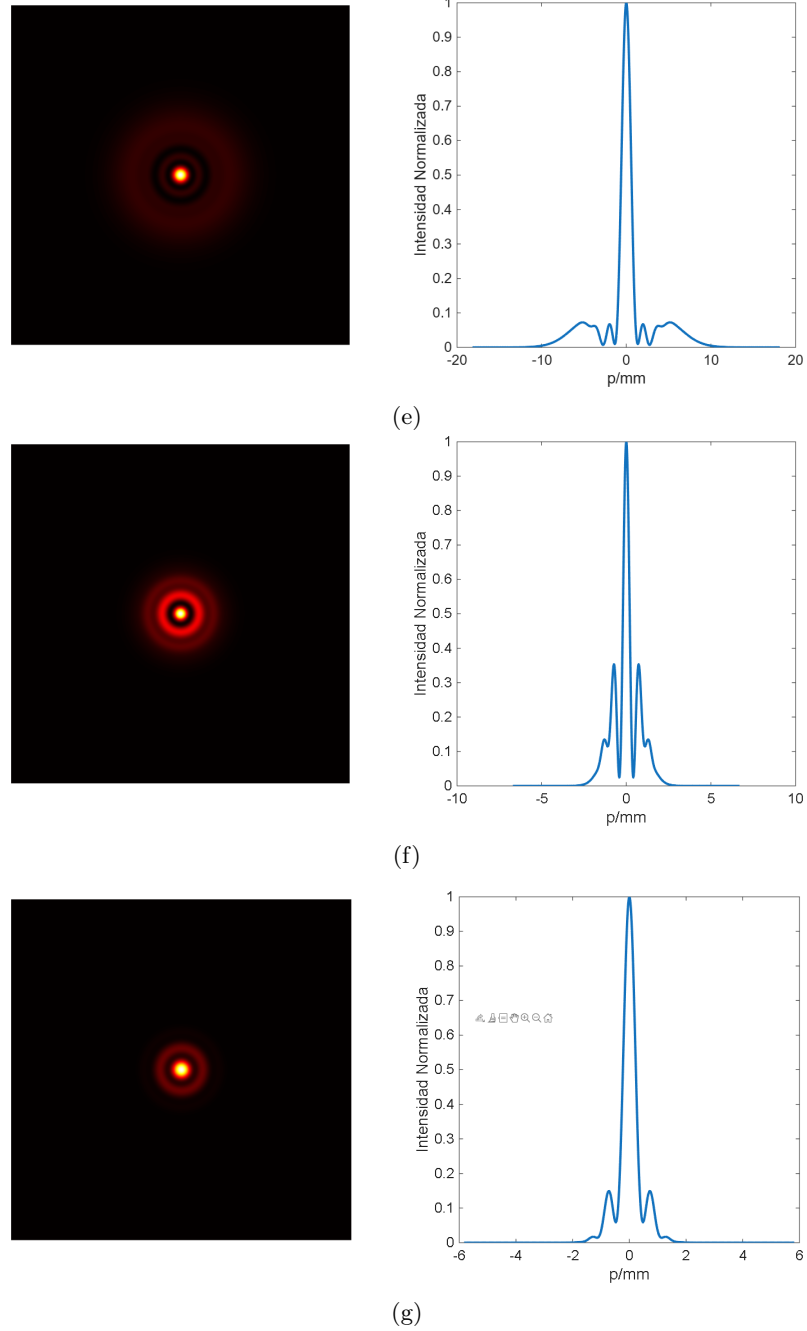
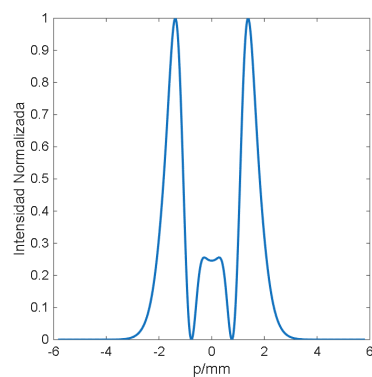
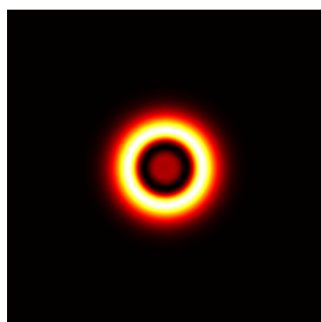
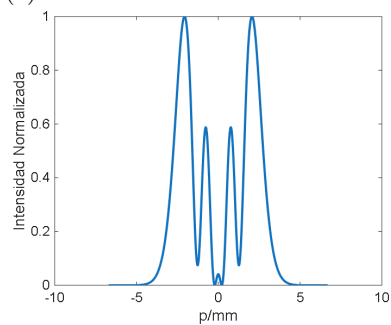
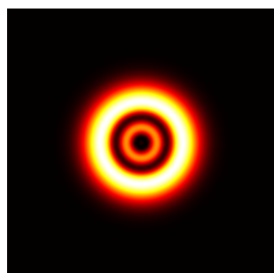


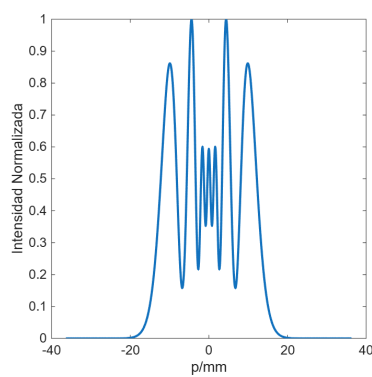
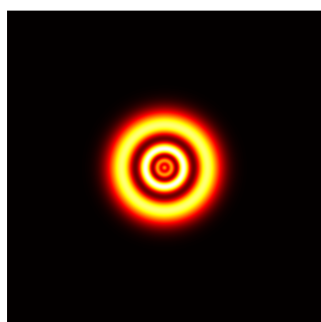
Figura 4.8: Patrones de difracción y perfiles de intensidad a campo lejano en un medio local $s = 0$ colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -4z_0$, b) $z = -2z_0$, c) $z = -z_0$, d) $z = 0$, e) $z = z_0$, f) $z = 2z_0$, g) $z = 4z_0$ y $\Delta\Phi_0 = 3\pi$.



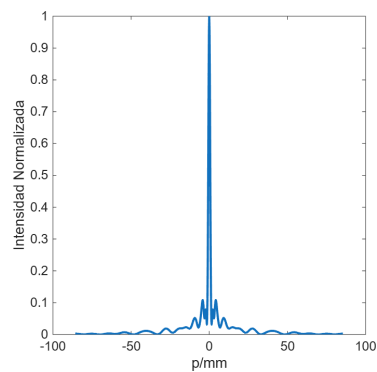
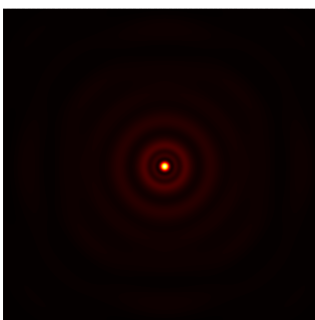
(a)



(b)



(c)



(d)

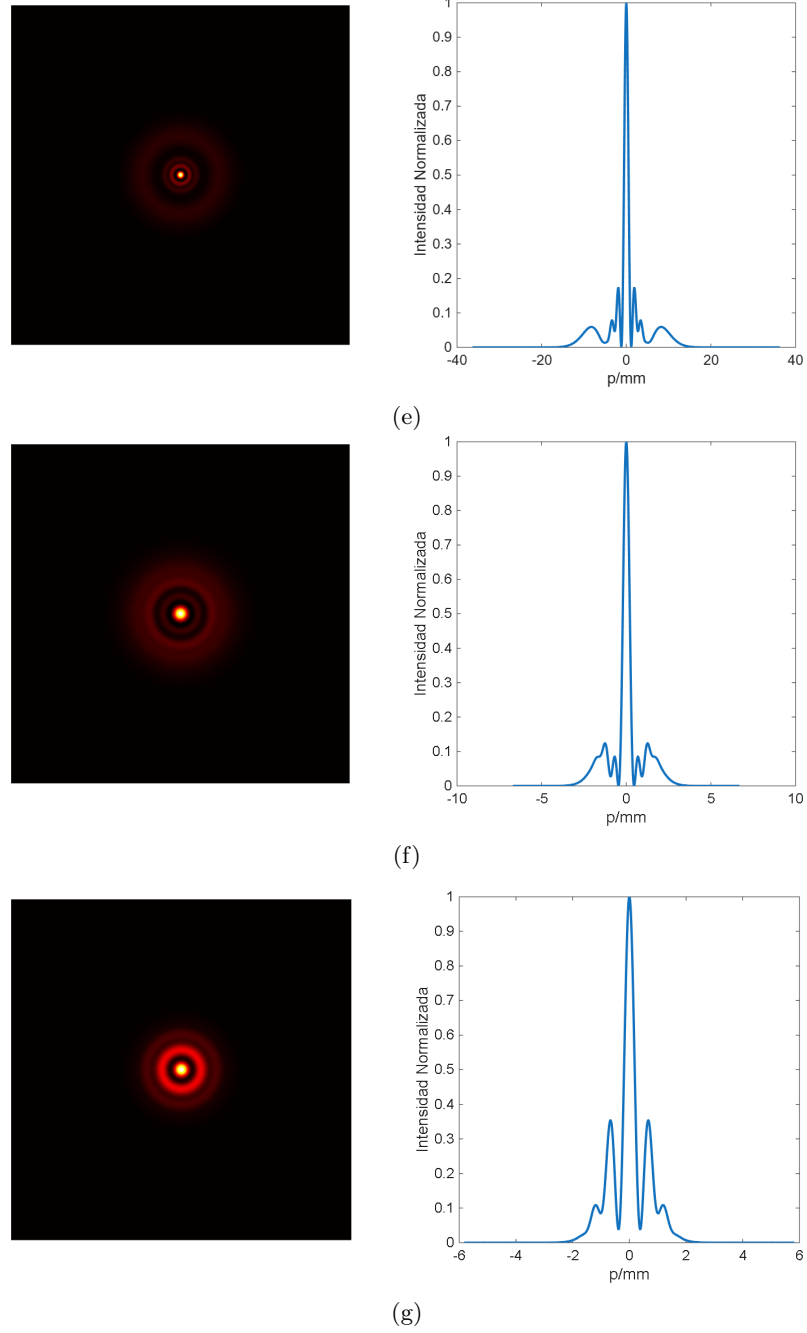
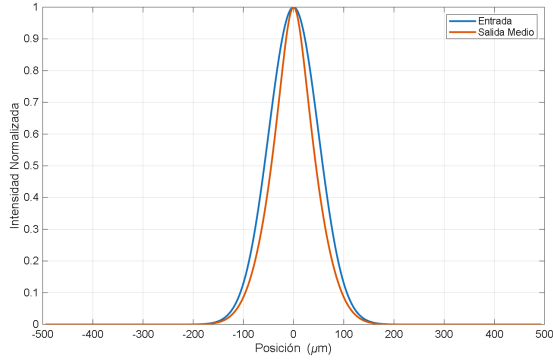


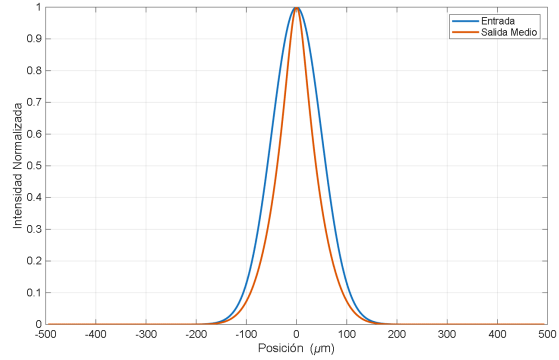
Figura 4.9: Patrones de difracción y perfiles de intensidad a campo lejano en un medio local $s = 0$ colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -4z_0$, b) $z = -2z_0$, c) $z = -z_0$, d) $z = 0$, e) $z = z_0$, f) $z = 2z_0$, g) $z = 4z_0$ y $\Delta\Phi_0 = 4\pi$.

Resultados numéricos

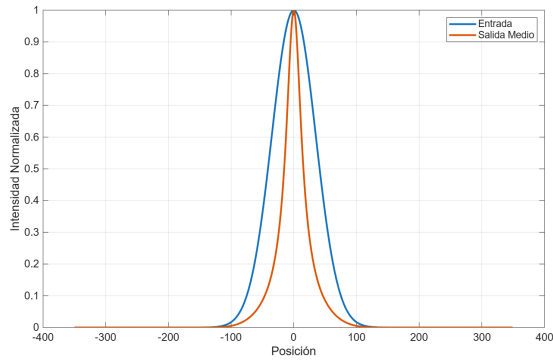
4.2 Modelo de Respuesta No Local



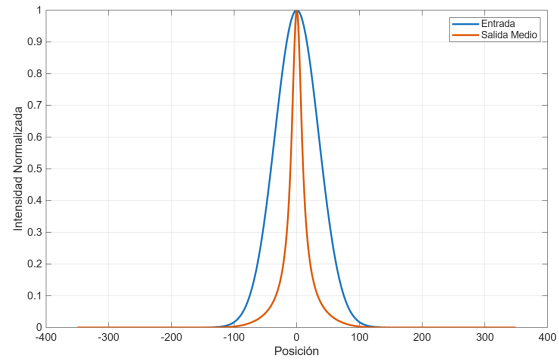
(a)



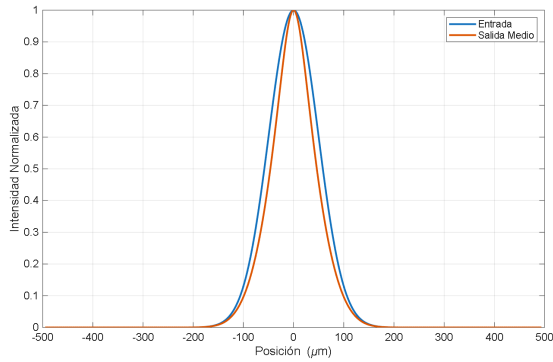
(a)



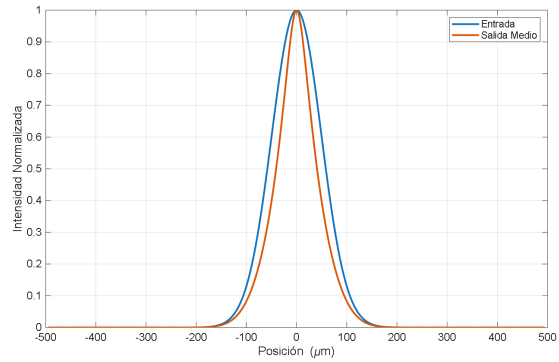
(b)



(b)



(c)

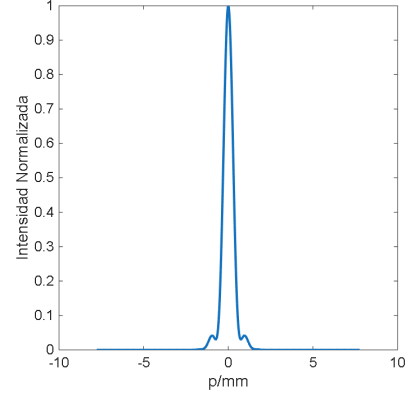
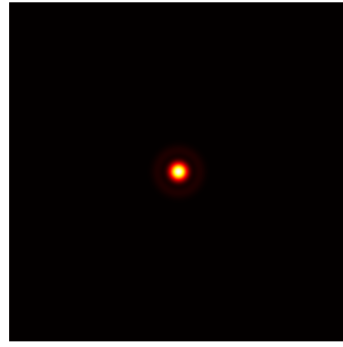


(c)

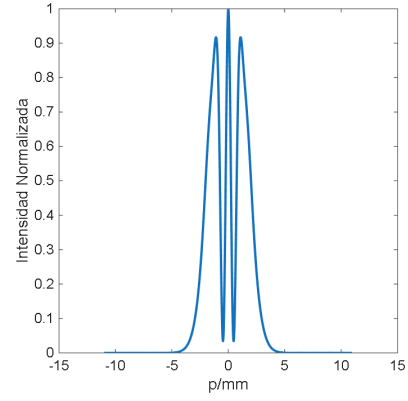
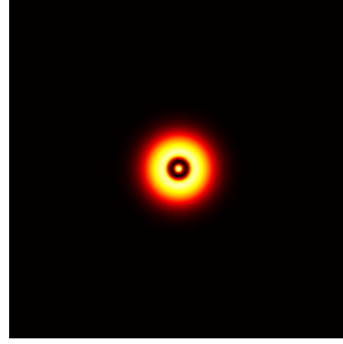
Figura 4.10: Comparación de perfiles de intensidad a la entrada y a la salida de un medio local $s = 0$ colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -z_0$, b) $z = 0$, c) $z = z_0$ y $\Delta\Phi_0 = 3\pi$.

Figura 4.11: Comparación de perfiles de intensidad a la entrada y a la salida de un medio local $s = 0$ colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -z_0$, b) $z = 0$, c) $z = z_0$ y $\Delta\Phi_0 = 4\pi$

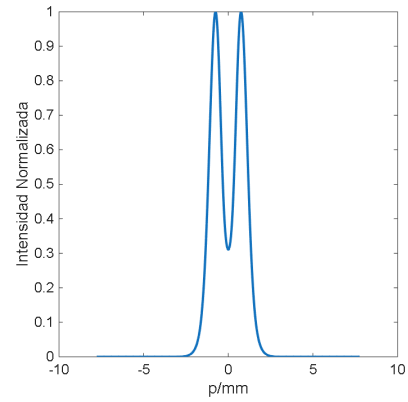
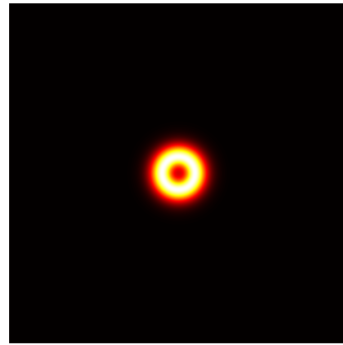
4.3. Fases negativas



(a)

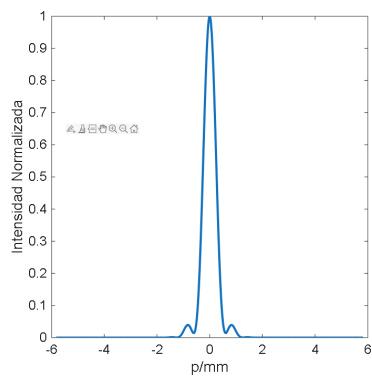


(b)

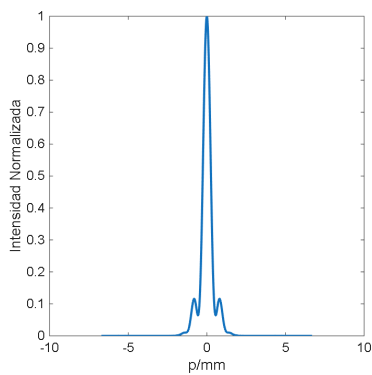


(c)

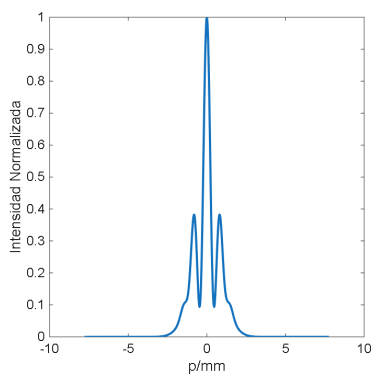
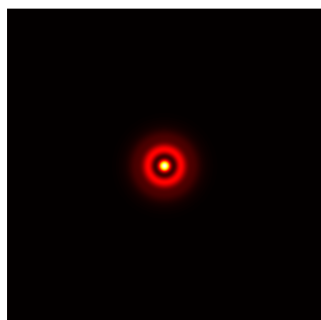
Figura 4.12: Patrones de difracción y perfiles de intensidad a campo lejano en un medio local $s = 0$ colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -4z_0$, b) $z = -2z_0$, c) $z = -z_0$, d) $z = 0$, e) $z = z_0$, f) $z = 2z_0$, g) $z = 4z_0$, y $\Delta\Phi_0 = -\pi$.



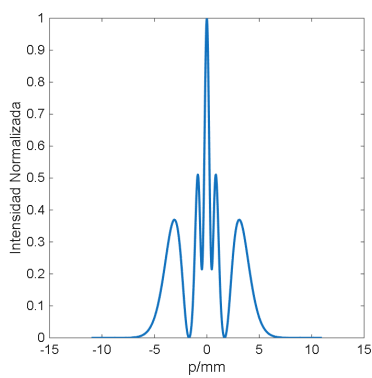
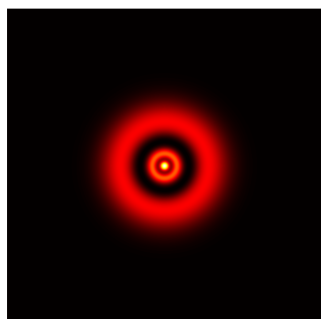
(a)



(b)



(c)



(d)

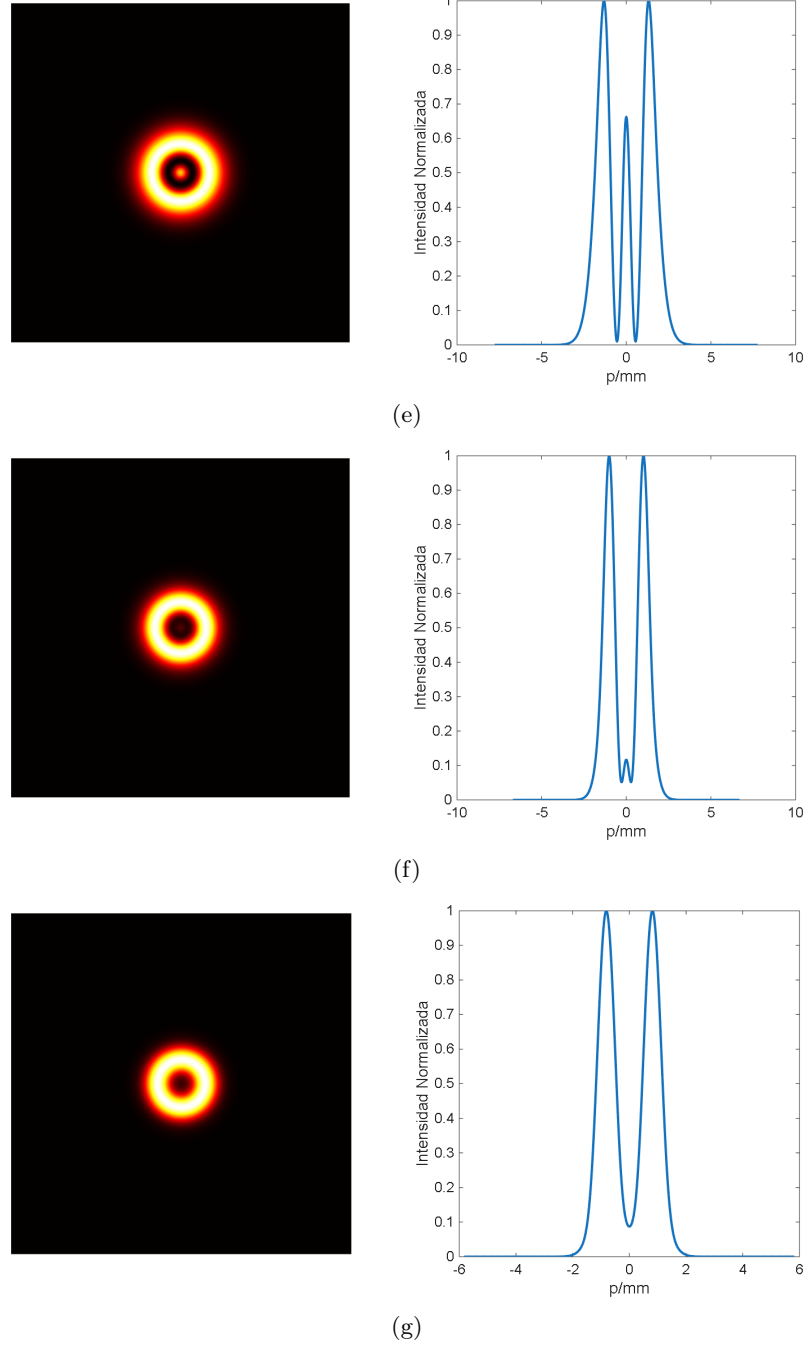
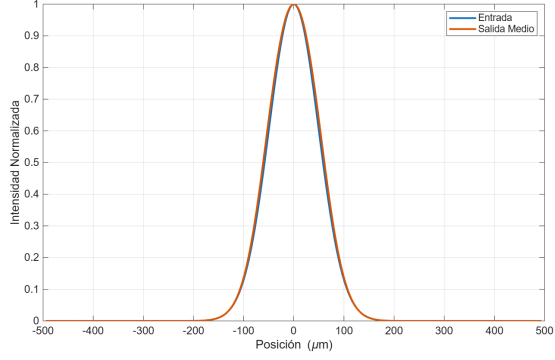
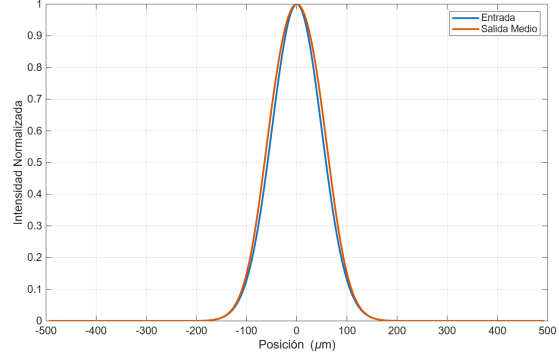


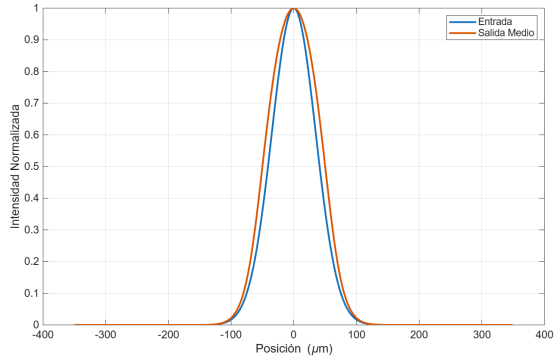
Figura 4.13: Patrones de difracción y perfiles de intensidad a campo lejano en un medio local colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -4z_0$, b) $z = -2z_0$, c) $z = -z_0$, d) $z = 0$, e) $z = z_0$, f) $z = 2z_0$, g) $z = 4z_0$, y $\Delta\Phi_0 = -2\pi$.



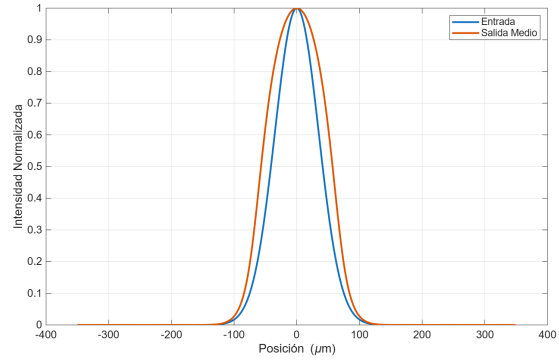
(a)



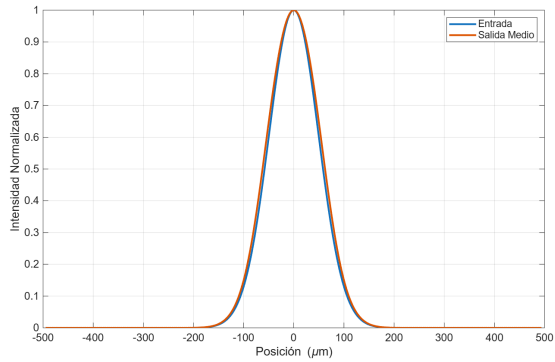
(a)



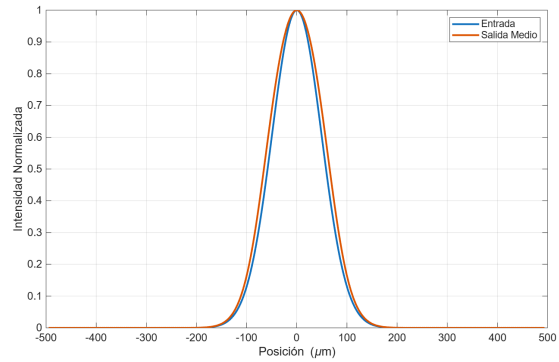
(b)



(b)



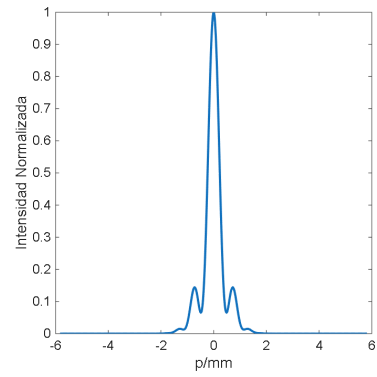
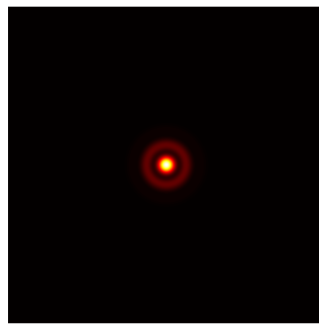
(c)



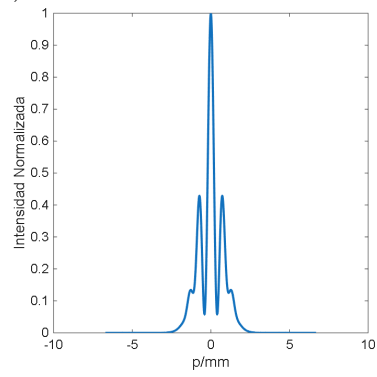
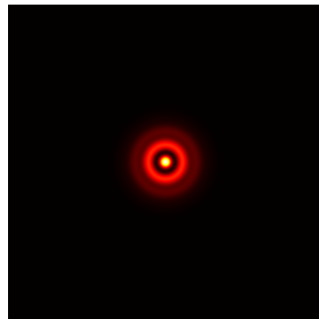
(c)

Figura 4.14: Comparación de perfiles de intensidad a la entrada y a la salida de un medio local, colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -z_0$, b) $z = 0$, c) $z = z_0$, $\Delta\Phi_0 = -\pi$

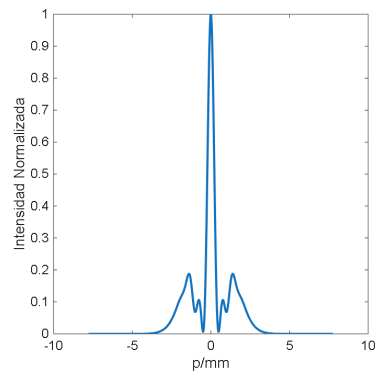
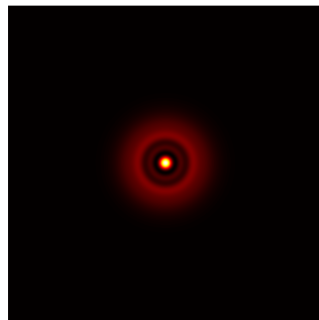
Figura 4.15: Comparación de perfiles de intensidad a la entrada y a la salida de un medio local, colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -z_0$, b) $z = 0$, c) $z = z_0$, $\Delta\Phi_0 = -2\pi$



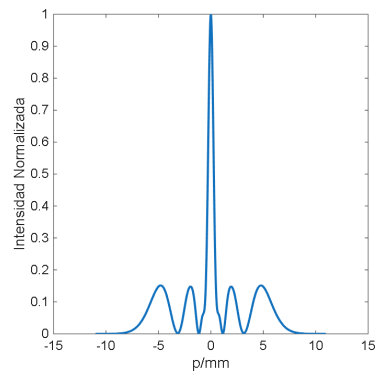
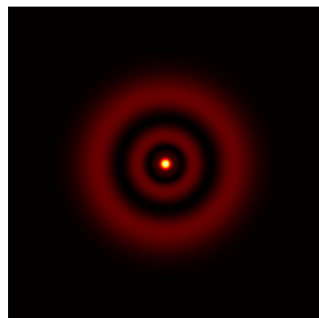
(a)



(b)



(c)



(d)

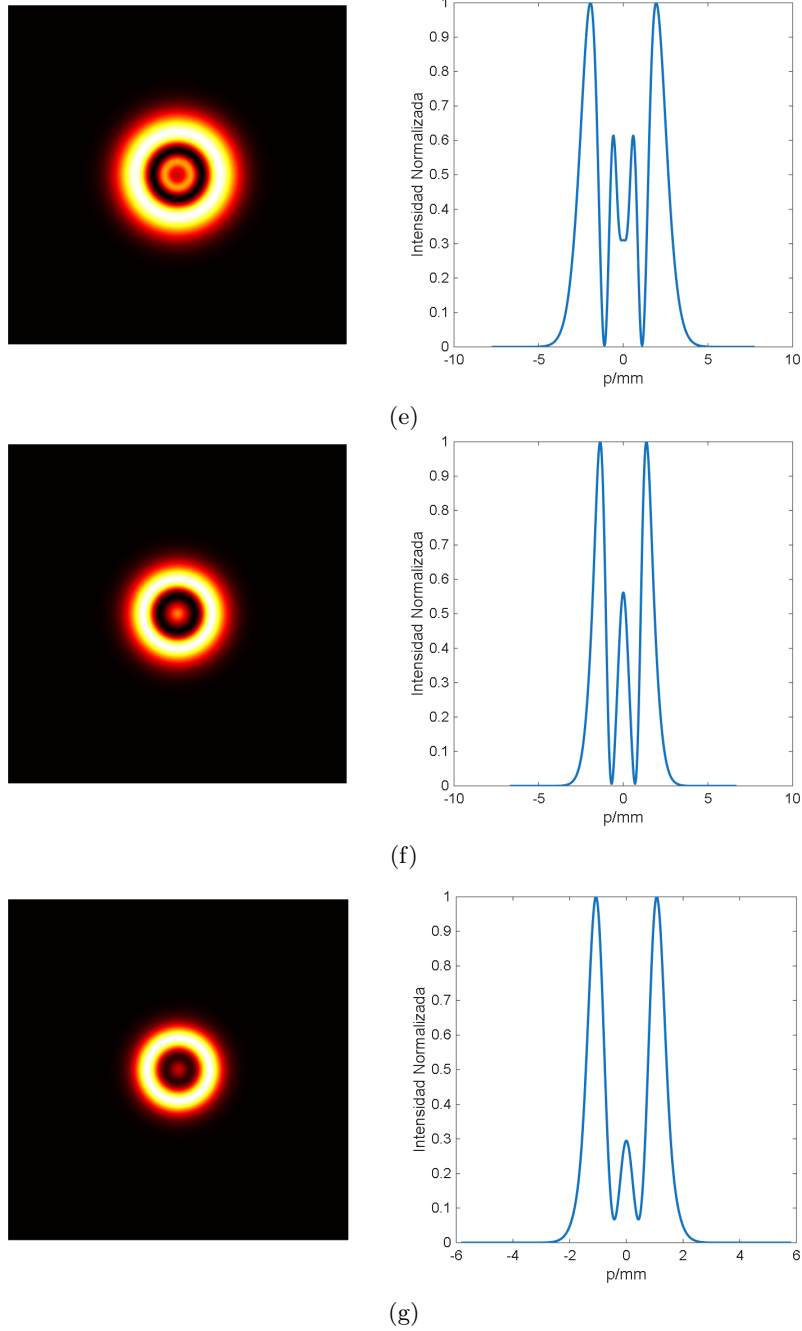
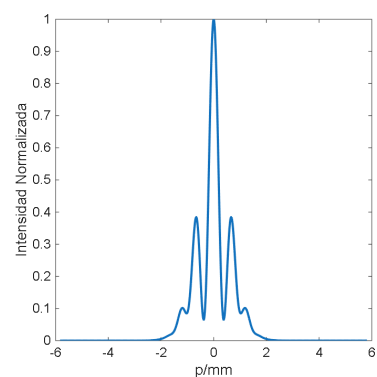
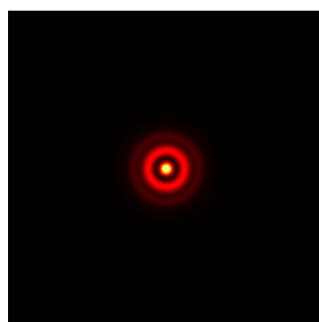
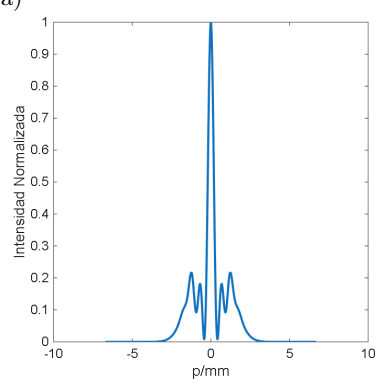
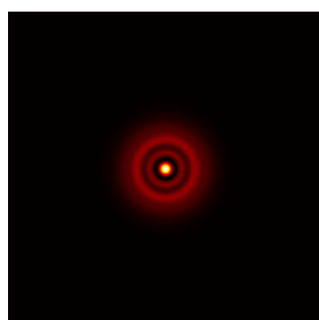


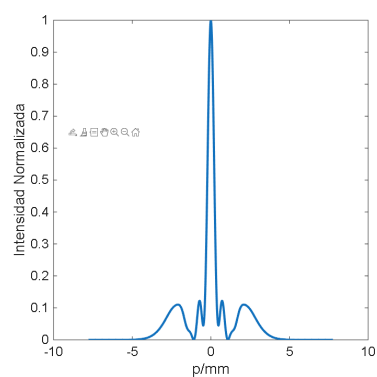
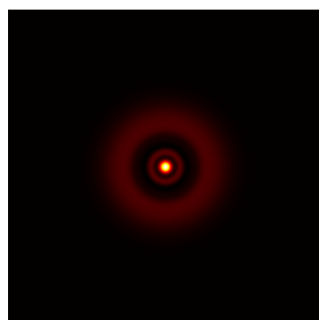
Figura 4.16: Patrones de difracción y perfiles de intensidad a campo lejano en un medio local colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -4z_0$, b) $z = -2z_0$, c) $z = -z_0$, d) $z = 0$, e) $z = z_0$, f) $z = 2z_0$, g) $z = 4z_0$, y $\Delta\Phi_0 = -3\pi$.



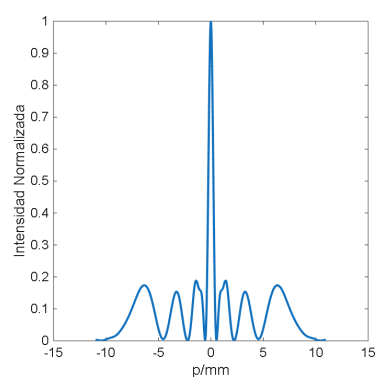
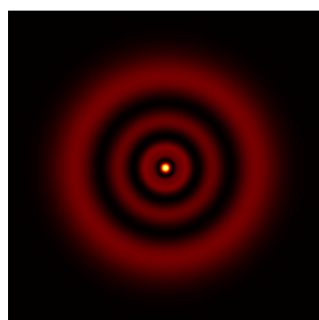
(a)



(b)



(c)



(d)

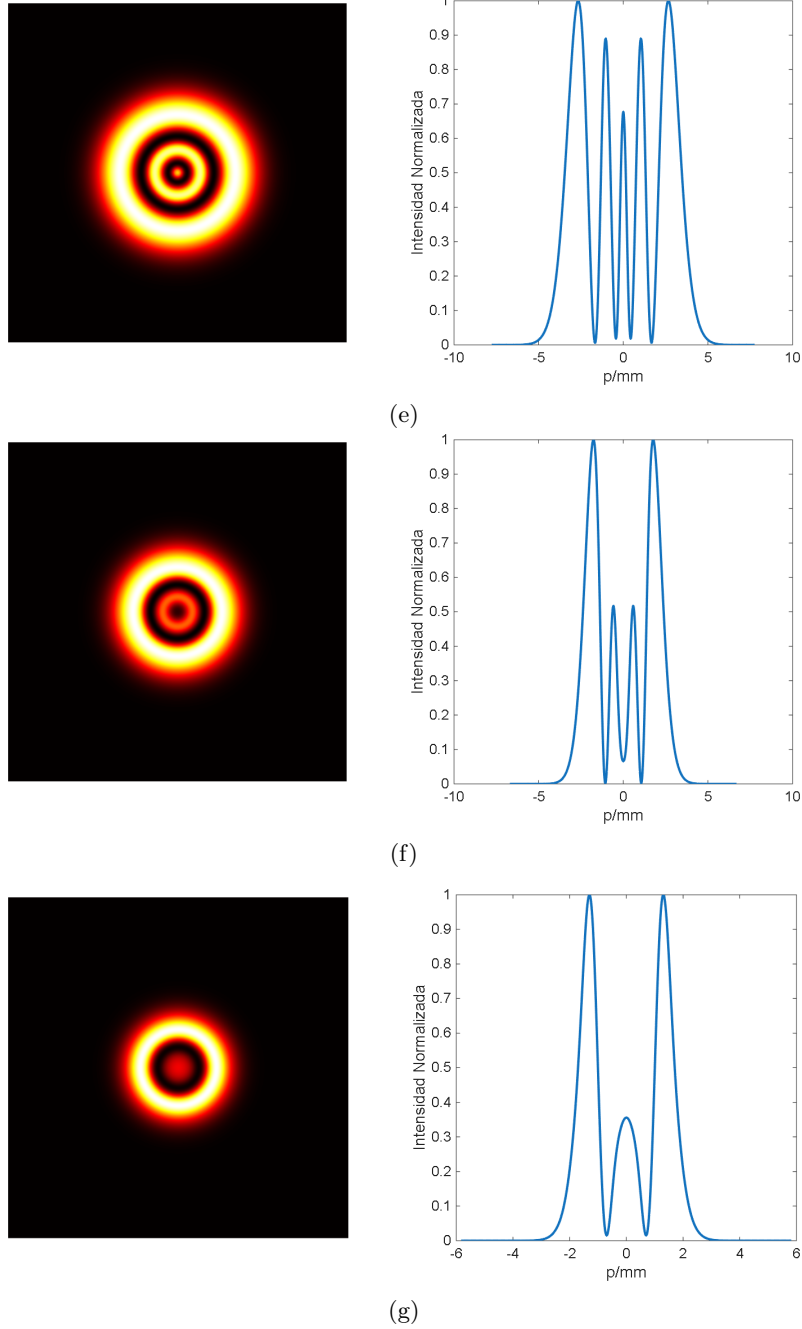
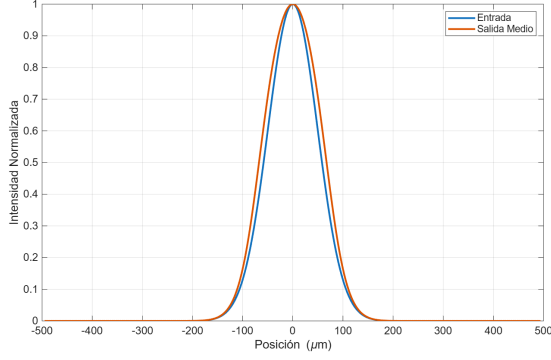
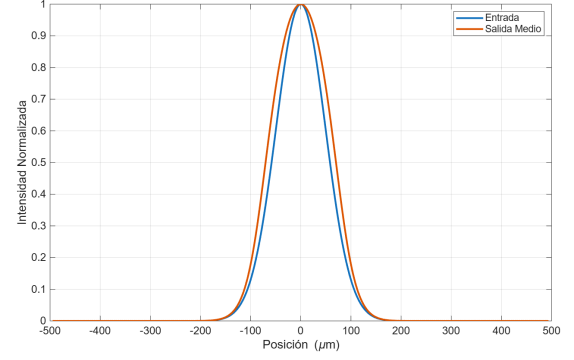


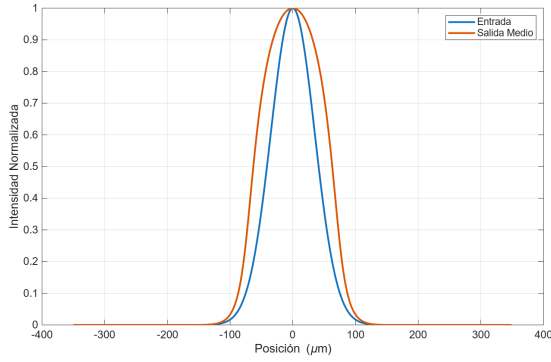
Figura 4.17: Patrones de difracción y perfiles de intensidad a campo lejano en un medio local colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -4z_0$, b) $z = -2z_0$, c) $z = -z_0$, d) $z = 0$, e) $z = z_0$, f) $z = 2z_0$, g) $z = 4z_0$, y $\Delta\Phi_0 = -4\pi$.



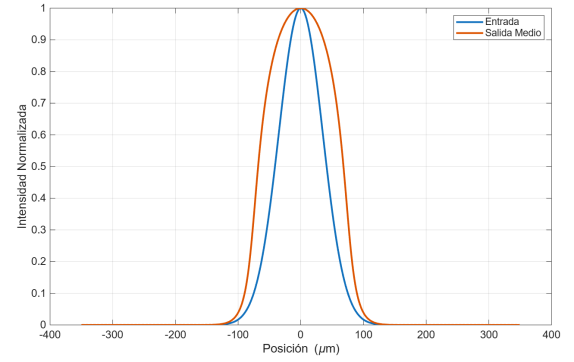
(a)



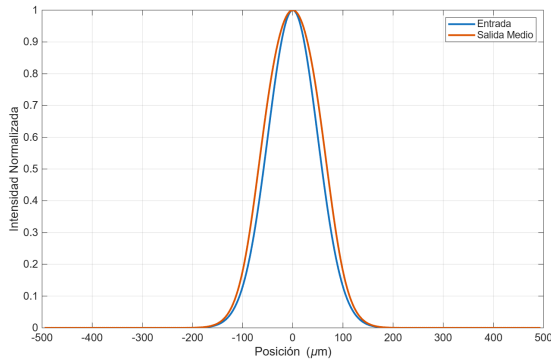
(a)



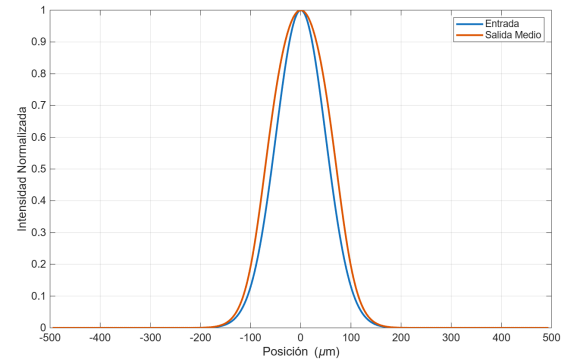
(b)



(b)



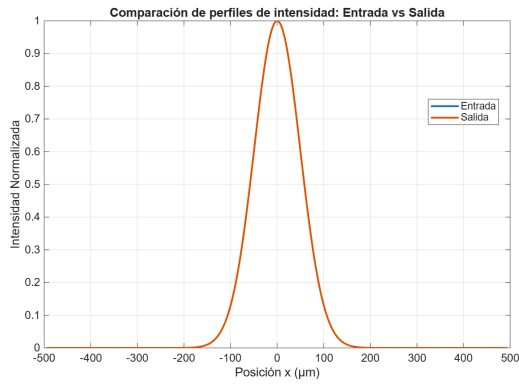
(c)



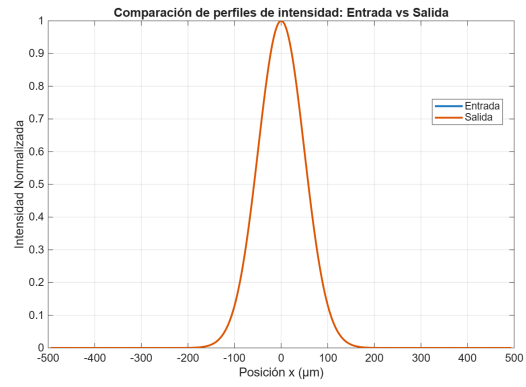
(c)

Figura 4.18: Comparación de perfiles de intensidad a la entrada y a la salida de un medio local colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -z_0$, b) $z = 0$, c) $z = z_0$, y $\Delta\Phi_0 = -3\pi$

Figura 4.19: Comparación de perfiles de intensidad a la entrada y a la salida de un medio local colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = -z_0$, b) $z = 0$, c) $z = z_0$, y $\Delta\Phi_0 = -4\pi$



(a)



(b)

Figura 4.20: Patrones de difracción a campo lejano y perfiles de intensidad a la entrada y a la salida de un medio no lineal local, por el metodo de modelación numérica empleada por [19] , colocado a diferentes posiciones respecto a w_0 : a) $z = z_0$ con $\Delta\Phi_0 = 3\pi$, b) $z = z_0$, con $\Delta\Phi_0 = -3\pi$.

Capítulo 5

Conclusiones

- Se implementó un algoritmo basado en el método de operador dividido paso a paso (Split-Step Fourier) para resolver la ecuación paraxial no lineal que describe la propagación en medio no lineal. El modelo fue verificado al reproducir los patrones de difracción no lineal reportados en [19, 26].
- Se verificó una relación entre la magnitud del cambio de fase no lineal máximo relacionado con la intensidad del haz en el medio y la morfología del patrón de difracción a campo lejano, que deriva en una interferencia más compleja durante la propagación a campo lejano.
- Se demostró que el enfoque basado en la solución numérica de la ecuación de onda paraxial no lineal (NPWE) es una mejora frente a las aproximaciones de medio empleadas en [26]. Mientras que este modelo, es eficiente, se ve limitado al despreciar los efectos de propagación del medio.
- Se modelaron efectos acumulativos en la propagación, donde la no linealidad y la difracción interactúan de manera continua.
- Se proporcionó información en posiciones intermedias en su propagación sobre el medio no lineal, permitiendo analizar la evolución del haz y los procesos de auto-modulación.
- El análisis de los perfiles de intensidad transversales a la entrada y salida del medio reveló una reducción consistente del ancho del haz. Este estrechamiento es una evidencia del fenómeno de autoenfoco no lineal, el cual es mayor sobre la cintura del haz, donde el frente de onda plano.
- Se observó que cuando el medio se sitúa antes de la cintura del haz los patrones de difracción presentan anillos más delgados mejor definidos y con una intensidad más pronunciada entre los máximos y mínimos. Cuando el medio se coloca después de la cintura, los anillos se vuelven más difusos y anchos.
- El modelo implementado puede extenderse para analizar los efectos de no-localidad a través del término de convolución.

Apéndice A

SPS Apéndice

A.1. Discusión Adicional del Método de Solución para la Ecuación de Helmholtz

Buscamos una solución a la ecuación de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\nabla_1^2 E - \frac{\omega^2}{c^2} n^2(x, y) E, \quad (\text{A.1})$$

que tenga la forma:

$$E(x, y, z) = \exp(\pm iAz) E(x, y, 0), \quad (\text{A.2})$$

donde la aplicación del operador $\exp(\pm iAz)$ está definida por una expansión en serie de Taylor:

$$\exp(\pm iAz) = 1 \pm iAz - \frac{1}{2} A^2 z^2 + \dots. \quad (\text{A.3})$$

Sustituyendo la expresión (A.2) en (A.1) obtenemos la relación que debe satisfacer A :

$$A^2 = \nabla_1^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 = \nabla_1^2 + k^2 \left(1 + \frac{\delta n}{n_0} \right)^2, \quad (\text{A.4})$$

donde $k = n_0 \omega / c$ y $n = n_0 + \delta n(x, y)$.

Podemos evaluar la precisión de las siguientes formas aproximadas para el operador solución A :

$$A_1 = \frac{\nabla_1^2}{2k} + k \left(1 + \frac{\delta n}{n_0} \right), \quad (\text{A.5})$$

$$A_2 = (\nabla_1^2 + k^2)^{1/2} + k \frac{\delta n}{n_0}. \quad (\text{A.6})$$

El operador A_1 proporciona una solución a la aproximación de Fresnel o parabólica de la ecuación de Helmholtz. El operador A_2 es equivalente a la expresión en la ecuación (4.13).

Al elevar al cuadrado A_1 obtenemos:

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \left(1 + \frac{\delta n}{2n_0} \right) \nabla_1^2 + \nabla_1^2 \frac{\delta n}{2n_0} + \frac{\nabla_1^4}{4k^2} \\ &\quad + k^2 \left(1 + \frac{\delta n}{n_0} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Para $\delta n = \delta n^0 = \text{constante}$ y $E(x, y, 0) = E_0 \exp[i(\kappa_x x + \kappa_y y)]$, la aplicación de A_1^2 es equivalente a:

$$A_1^2 = \left[1 + \frac{\delta n^0}{n_0} - \left(\frac{\kappa_1}{2k} \right)^2 \right] \kappa_1^2 + k^2 \left(1 + \frac{\delta n^0}{n_0} \right)^2. \quad (\text{A.8})$$

Esta es una buena aproximación siempre que:

$$\frac{\delta n^0}{n_0} \ll 1, \quad \frac{\kappa_1}{k} \ll 1. \quad (\text{A.9})$$

Al elevar al cuadrado A_2 y usar la expansión:

$$(\nabla_1^2 + k^2)^{1/2} = k \left(1 + \frac{\nabla_1^2}{2k^2} - \frac{1}{8} \frac{\nabla_1^4}{k^4} + \dots \right) \quad (\text{A.10})$$

obtenemos:

$$A_2^2 = \left[1 + \frac{\delta n^0}{n_0} + \frac{1}{4} \frac{\delta n^0}{n_0} \left(\frac{\kappa_1}{k} \right)^2 \right] \kappa_1^2 + k^2 \left(1 + \frac{\delta n^0}{n_0} \right)^2. \quad (\text{A.11})$$

La ecuación (A.11) es una buena aproximación si $\delta n^0/n_0 \ll 1$, pero a diferencia del caso de la ecuación (A.8), no hay restricción en el tamaño de κ_1 excepto que sea menor que k .

En conclusión, la aproximación extendida de Fresnel permite la división de operadores, crucial para el uso de métodos espectrales de solución, pero no está restringida a haces que se propagan en ángulos pequeños con respecto al eje z .



Bibliografía

- [1] G. P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. 5th. Academic Press, 2013.
- [2] G. P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. 5th. Academic Press, 2013.
- [3] S. A. Akhmanov et al. “Thermal self-actions of laser beams”. En: *IEEE Journal of Quantum Electronics* 4.10 (1968), págs. 568-575.
- [4] J. A. Arnaud. *Beam and Fiber Optics*. Academic, 1976.
- [5] A. Ashkin et al. “Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles”. En: *Optics Letters* 11.5 (1986), págs. 288-290.
- [6] T. Baba. “Slow light in photonic crystals”. En: *Nature Photonics* 2 (2008), págs. 465-473.
- [7] N. Bloembergen. *Nonlinear Optics*. World Scientific, 1996.
- [8] G. D. Boyd y D. A. Klienman. “Parametric interaction of focused Gaussian light beams”. En: *Journal of Applied Physics* 39.8 (1968), págs. 3597-3639. URL: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1656831>.
- [9] R. W. Boyd. *Nonlinear Optics*. 4th. Academic Press, 2020.
- [10] R. W. Boyd. *Nonlinear Optics*. 4th. Academic Press, 2020.
- [11] P. N. Butcher y D. Cotter. *The Elements of Nonlinear Optics*. Cambridge University Press, 1990.
- [12] W. R. Callen, B. G. Huth y R. H. Pantell. “Optical patterns of thermally self-defocused light”. En: *Applied Physics Letters* 11.3 (1967), págs. 103-105.
- [13] P. Chen et al. “Optical limiting properties and Z-scan measurements of a novel organometallic cluster”. En: *Optics Communications* 173.1-6 (1999), págs. 487-492.
- [14] R. Y. Chiao y A. M. Steinberg. “Tunneling Times and Superluminality”. En: *Progress in Optics*. Ed. por E. Wolf. Vol. 37. North-Holland, 1997, págs. 345-405.
- [15] J. Clerk Maxwell. “A dynamical theory of the electromagnetic field”. En: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155 (1864), págs. 459-512.
- [16] C. Conti, M. Peccianti y G. Assanto. “Route to nonlocality and observation of accessible solitons”. En: *Physical Review Letters* 91.7 (2003), pág. 073901.
- [17] H. Crew, ed. *The Wave Theory of Light, Memoirs by Huygens, Young and Fresnel*. American Book Company, 1900.
- [18] D. Damjanovic. “Ferroelectric, dielectric and piezoelectric properties of ferroelectric thin films and ceramics”. En: *Reports on Progress in Physics* 69.5 (2006), págs. 1267-1324.
- [19] L. Deng et al. “Formation and evolution of far-field diffraction patterns of divergent and convergent Gaussian beams passing through self-focusing and self-defocusing media”. En: *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* 7.8 (2005), págs. 409-415.
- [20] J. M. Dudley y J. R. Taylor. “Supercontinuum generation in photonic crystal fiber”. En: *Reviews of Modern Physics* 78 (2006), págs. 1135-1184.

- [21] S. D. Durbin, S. M. Arakelian e Y. R. Shen. "Laser-induced diffraction rings from a nematic-liquid-crystal film". En: *Optics Letters* 6.9 (1981), págs. 411-413.
- [22] G. C. Duree y et al. "Observation of self-trapping of an optical beam due to the photorefractive effect". En: *Physical Review Letters* 71.4 (1993), págs. 533-536.
- [23] R. P. Feynman. *QED: The Strange Theory of Light and Matter*. Penguin Books, 1990.
- [24] J. A. Fleck, J. R. Morris y M. D. Feit. *Applied Physics*. Vol. 10. 1976, pág. 129.
- [25] J. A. Fleck, J. R. Morris y M. D. Feit. "Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere". En: *Appl. Phys.* 10 (1976), págs. 129-160. DOI: 10.1007/BF00896333.
- [26] E. V. García Ramírez. "Modelo para describir Z-scan y auto-modulación espacial de fase en medios delgados no lineales no locales". Tesis doctoral. Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2012.
- [27] S. Gatz y J. Herrmann. "Anisotropy, nonlocality, and space-charge field displacement in (2 + 1)-dimensional self-trapping in biased photorefractive crystals". En: *Optics Letters* 23.15 (1998), págs. 1176-1178.
- [28] C. F. Gauss. *Disquisitiones Arithmeticae*. Lipsiae, 1801.
- [29] D. Gloge, ed. *Optical Fiber Technology*. IEEE Press, 1976.
- [30] J. W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. 3rd. Roberts y Company Publishers, 2005.
- [31] J. P. Gordon et al. "Long-transient effects in lasers with inserted liquid samples". En: *Journal of Applied Physics* 36.1 (1965), págs. 3-8.
- [32] L. V. Hau et al. "Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas". En: *Nature* 397 (1999), págs. 594-598.
- [33] H. He et al. "Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity". En: *Physical Review Letters* 75.5 (1995), págs. 826-829.
- [34] H. Helmholtz. *Handbuch der physiologischen Optik*. Voss, 1867.
- [35] M. Hesami. "Numerical study of propagation and interaction of spatial solitons in nonlinear and nonlocal media". Tesis doct. Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2020.
- [36] J. D. Joannopoulos, P. R. Villeneuve y S. Fan. "Photonic crystals: putting a new twist on light". En: *Nature* 386 (1997), págs. 143-149.
- [37] I. Kaminer et al. "Periodic solitons in nonlocal nonlinear media". En: *Optics Letters* 32.21 (2007), págs. 3209-3211.
- [38] O. Keller. "Optical Works of L. V. Lorenz". En: *Progress in Optics*. Ed. por E. Wolf. Vol. 43. North-Holland, 2002, págs. 267-268.
- [39] I. C. Khoo. *Liquid Crystals*. 2nd. Wiley, 2010.
- [40] H. Kogelnik y T. Li. "Laser beams and resonators". En: *Applied Optics* 5.10 (1966), págs. 1550-1567. URL: <https://www.osapublishing.org/ao/fulltext.cfm?uri=ao-5-10-1550&id=14408>.
- [41] W. Krolikowski y O. Bang. "Solitons in nonlocal nonlinear media: Exact solutions". En: *Physical Review E* 63.1 (2000), pág. 016610.
- [42] W. Krolikowski et al. "Modulational instability, solitons and beam propagation in spatially nonlocal nonlinear media". En: *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* 6.5 (2004), págs. 288-294.
- [43] T. Kuga et al. "Novel optical trap of atoms with a doughnut beam". En: *Physical Review Letters* 78.25 (1997), págs. 4713-4716.

- [44] M. Lax, W. H. Louisell y W. B. McKnight. "From Maxwell to paraxial wave optics". En: *Physical Review A* 11.4 (1975), págs. 1365-1370.
- [45] X. Liu et al. "Theoretical study on the pulse response of passive optical limiters based on the nonlinear refraction". En: *Optics Communications* 197.4-6 (2001), págs. 451-460.
- [46] D. Marcuse. *Theory of Dielectrical Optical Waveguides*. Academic, 1964.
- [47] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity & Magnetism*. Vol. 20. Dover, 1954.
- [48] M. McLaren y et al. "Entangled Bessel-Gaussian beams". En: *Optics Express* 20.21 (2012), págs. 23589-23597. URL: <https://www.osapublishing.org/oe/fulltext.cfm?uri=oe-20-21-23589&id=242670>.
- [49] A. Minovich et al. "Experimental reconstruction of nonlocal response of thermal nonlinear optical media". En: *Optics Letters* 32.12 (2007), págs. 1599-1601.
- [50] I. Newton. *Opticks*. Dover, 1952.
- [51] I. Newton. *Opticks*. Dover, 1952, págs. 281-282.
- [52] I. Newton. *Opticks*. Dover, 1952, pág. 210.
- [53] D. Park. *The Fire Within the Eye*. Princeton University Press, 1999.
- [54] Real Academia Española. *Diccionario de la lengua española*. 23rd. versión 23.8 en línea. 2023. URL: <https://dle.rae.es>.
- [55] V. Ronchi. *The Nature of Light*. Heinemann, 1970.
- [56] V. Ronchi. *The Nature of Light*. Heinemann, 1970, pág. 71.
- [57] V. Ronchi. *The Nature of Light*. Heinemann, 1970, pág. 143.
- [58] B. E. A. Saleh y M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. 3rd. Wiley, 2019. ISBN: 9781119506874.
- [59] E. Santamato e Y. R. Shen. "Field-curvature effect on the diffraction ring pattern of a laser beam dressed by spatial self-phase modulation in a nematic film". En: *Optics Letters* 9.12 (1984), págs. 564-566.
- [60] S. Schmitt-Rink, D. S. Chemla y D. A. B. Miller. "Nonlinear optics in semiconductors". En: *Advances in Physics* 38.2 (1989), págs. 89-188.
- [61] D. A. Scrymgeour y V. Gopalan. "Nonlinear optical properties of ferroelectric crystals". En: *Annual Review of Materials Research* 35 (2005), págs. 239-274.
- [62] M. H. Shamos, ed. *Great Experiments in Physics*. Dover, 1987.
- [63] M. Sheik-Bahae, A. A. Said y E. W. Van Stryland. "Nonlinear refraction and optical limiting in semiconductors". En: *Optical Engineering* 29.10 (1990), págs. 1158-1165.
- [64] M. Sheik-Bahae et al. "Sensitive measurement of optical nonlinearities using a single beam". En: *IEEE Journal of Quantum Electronics* 26.4 (1990), págs. 760-769.
- [65] R. M. Shelby. "Nonlinear optics in thin films and layered media". En: *Journal of the Optical Society of America B* 2.6 (1985), págs. 1010-1016.
- [66] Y. R. Shen. *The Principles of Nonlinear Optics*. Wiley-Interscience, 1984.
- [67] G. I. Stegeman y R. A. Stegeman. *Nonlinear Optics: Phenomena, Materials and Devices*. Wiley, 2012.
- [68] D. Suter y T. Blasberg. "Stabilization of transverse solitary waves by a nonlocal response of the nonlinear medium". En: *Physical Review A* 48.6 (1993), págs. 4583-4587.
- [69] K. Svoboda y S. M. Block. "Biological applications of optical forces". En: *Annual Review of Biophysics and Biomolecular Structure* 23.1 (1994), págs. 247-285.

- [70] E. T. Whittaker. *A History of the Theories of Aether and Electricity*. Vol. 1. Humanities Press, 1973.
- [71] F. Yu et al. “Far-field dark-spot formation of a divergent Gaussian beam passing through an absorptive self-defocusing medium”. En: *Journal of the Optical Society of America B* 19.4 (2002), págs. 812-818.
- [72] A. Zajonc. *Catching the Light: The Entwined History of Light and Mind*. Oxford University Press, 1995.
- [73] L. Zhang y et al. “Propagation dynamics of super-Gaussian beams in fractional Schrödinger equation: from linear to nonlinear regimes”. En: *Optics Express* 24.13 (2016), págs. 14406-14418. URL: <https://www.osapublishing.org/oe/fulltext.cfm?uri=oe-24-13-14406&id=344871>.
- [74] A. A. Zozulya et al. “Self-focusing and soliton formation in media with anisotropic nonlocal material response”. En: *Europhysics Letters* 36.6 (1999), págs. 419-424.