



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA “LUIS RIVERA TERRAZAS”

“MODELOS NULOS DE REDES COMPLEJAS”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA

CLAUDIA TERESA MARTÍNEZ MARTÍNEZ

DIRECTORES DE TESIS

DR. JOSÉ ANTONIO MÉNDEZ BERMÚDEZ

DR. YAMIR MORENO VEGA

No. de CVU: 784756

ENERO 2022

©2022 - Claudia Teresa Martínez Martínez

Derechos Reservados

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mis asesores. Al Dr. José Antonio Méndez Bermúdez por todas las enseñanzas y el apoyo brindado en estos años de trabajo, por la confianza y paciencia que ha tenido conmigo y, por supuesto, por introducirme al mundo de las redes. Al Dr. Yamir Moreno por ser parte de este proyecto y por todas las facilidades brindadas para realizar una estancia de investigación en el BIFI, donde me dio la oportunidad de conocer a su excelente equipo de trabajo.

Agradezco a los Doctores Mauricio Torres, Jonathan Torres Herrera, Alfredo Díaz de Anda y Lev Guzmán Vargas por sus valiosas observaciones y sugerencias, así como por tomarse el tiempo para revisar detalladamente este documento.

Agradezco de manera muy especial a los Doctores: Ernesto Estrada, Jesús Muñoz Rojas, Thomas Peron, Jair Pineda Pineda, Francisco A. Rodrigues, José Manuel Rodríguez y José María Sigarreta por la interacción y el intercambio de conocimientos que han resultado en la publicación de algunos artículos relacionados con este trabajo.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca otorgada durante mi maestría y doctorado, además de la beca de movilidad para realizar una estancia en el extranjero.

Agradezco a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP por los apoyos económicos otorgados.

Agradezco al Instituto de Física “Ing. Luis Rivera Terrazas” y a todas las personas que forman parte de él, a los Doctores que tuvieron un lugar en mi formación, así como al personal administrativo que siempre tiene disposición de apoyar a los estudiantes, especialmente a la Lic. Lucrecia Hernández y a la Lic. Mónica Hernández, al personal del centro de cómputo, de manera particular al Lic. Luis Rojas.

Agradezco a los compañeros y amigos que de alguna manera me acompañaron y apoyaron en este camino, especialmente a mi buen amigo Richard por todo su apoyo moral y académico durante estos años de estudio.

Finalmente, agradezco a toda mi familia por el apoyo incondicional siempre recibido:

A mi madre por su amor, dedicación y por procurar siempre lo mejor para nosotras.

A mi padre por siempre motivarme a estudiar y cumplir mis objetivos y de alguna manera despertar en mí el interés por la ciencia.

A mi abuela por tanto amor, por todas sus enseñanzas y por ser un gran ejemplo de fortaleza.

A mis hermanas Tania y Nancy por mostrarme su apoyo en cualquier circunstancia.

A mis sobrinas Nathalia y Samantha por traer tantas alegrías a mi vida, especialmente en los últimos años.

*En memoria de mi abuela,
Teresa Moscoso Cruz.*

*En memoria de mi padre,
José Alfredo Martínez Moscoso.*

*Con el máximo amor y agradecimiento a mi madre,
Julia Isabel Martínez Cruz.*

Modelos nulos de redes complejas

Resumen

En esta Tesis se proponen modelos nulos, basados en ensambles de matrices aleatorias, para las matrices de adyacencia de redes complejas. Entre las redes complejas estudiadas están:

- (i) grafos aleatorios de tipo Erdős-Rényi
- (ii) redes bipartitas,
- (iii) redes mutualistas,
- (iv) grafos geométricos aleatorios no uniformes y
- (v) grafos con pérdidas y ganancias.

Se realizó análisis de escalamiento para identificar el parámetro universal de cada modelo nulo, es decir, el parámetro que fija las propiedades de la red correspondiente. Para ello se caracterizaron cantidades topológicas y espectrales de la red. Para las cantidades topológicas se calcularon algunos índices topológicos basados en los grados de los vértices. Principalmente se utilizaron: (i) el grado promedio y (ii) el índice de Randić. Otros índices topológicos también serán utilizados.

Mientras que para cantidades espectrales se calcularon cantidades comúnmente utilizadas en estudios de Teoría de Matrices Aleatorias, tales como: (i) la entropía de Shannon (o entropía de información) de los autovectores, (ii) el promedio de la razón de espaciamentos entre autovalores consecutivos y (iii) la distribución de las razones de espaciamentos entre autovalores consecutivos.

En todos los casos se identificó la fase conectada (en donde los autovectores del modelo nulo son extendidos), la fase aislada (en donde los autovectores del modelo nulo son localizados), así como el régimen de transición entre ambas fases.

Esta Tesis pretende sistematizar la definición y el estudio de modelos nulos de redes complejas. Cuando fue posible comparamos nuestros resultados con datos de redes del mundo real.

Null models of complex networks

Abstract

In this thesis, we propose null models, based on ensembles of random matrices, for the adjacency matrices of complex networks. Among the complex networks that we study we have:

- (i) random networks of Erdős-Rényi type,
- (ii) bipartite networks,
- (iii) mutualistic networks,
- (iv) non-uniform random graphs and
- (v) random graphs with losses and gain.

We perform scaling analysis to identify the universal parameter of each null model, that is, the parameter that fixes the properties of the corresponding network. To that end, we characterize topological and spectral quantities of the network. To explore topological properties we calculate degree-based topological indices. We use mainly: (i) the average degree and (ii) the Randić index. Other topological indices will also be used. Whereas to characterize the spectral properties we compute quantities commonly used in studies of Random Matrix Theory, such as (i) the Shannon entropy (or information entropy) of the eigenvectors, (ii) the average of the ratio of consecutive eigenvalue spacings and (ii) the distribution of the ratio of consecutive eigenvalue spacings.

In all cases, we identify the connected phase (where the eigenvectors of the null model are extended), the isolated phase (where the eigenvectors of the null model are located), as well as the transition regimen between both phases.

This Thesis aims to systematize the definition and study of null models of complex networks. When possible we validate our results with data from real-world networks.

Publicaciones

La mayor parte de los resultados presentados en el Capítulo 4 fueron publicados en los artículos:

- C. T. Martínez-Martínez, J. A. Méndez-Bermúdez, José M Rodríguez, José M Sigarreta, “Computational and analytical studies of the Randić index in ErdősRényi models”, *Applied Mathematics and Computation*, 377, 125137, (2020).
- C. T. Martínez-Martínez, J. A. Méndez-Bermúdez, José M Rodríguez, José M Sigarreta, “Computational and analytical studies of the Harmonic index on ErdősRényi models”, *Math. Comput. Chem*, 85, 395-426, (2021).

Los resultados reportados en el Capítulo 5 fueron publicados en los artículos

- C. T. Martínez-Martínez, J. A. Méndez-Bermúdez, Yamir Moreno, Jair J Pineda-Pineda, José M Sigarreta, “Spectral and localization properties of random bipartite graphs”, *Chaos, Solitons & Fractals: X*, 3, 100021, (2019).
- Jair J Pineda-Pineda, C. T. Martínez-Martínez, A Méndez-Bermúdez, Jesús Muñoz-Rojas, José M Sigarreta, “Application of Bipartite Networks to the Study of Water Quality”, *Sustainability*, 12, 5143, (2020).

El Capítulo 6 aparece en

- C. T. Martínez-Martínez, J. A. Méndez-Bermúdez, Thomas Peron, Yamir Moreno, “Statistical properties of mutualistic-competitive random networks”, *Chaos, Solitons & Fractals: X*, 153, 111504, (2021).

Los resultados mostrados en el Capítulo 7 están incluidos en

- C. T. Martínez-Martínez, J. A. Méndez-Bermúdez, Francisco A. Rodrigues, Ernesto Estrada, “Nonuniform random graphs on the plane: A scaling study”, *Phys. Rev. E*, 105, 034304, (2022).

La sección 8.1 fue publicada en

- C. T. Martínez-Martínez, J. A. Méndez-Bermúdez, “Information Entropy of Tight-Binding Random Networks with Losses and Gain: Scaling and Universality”, *Entropy*, 21, 86, (2019).

Participación en eventos

- “Scaling properties of random networks with losses and gain”, C. T. Martínez-Martínez y J. A. Méndez-Bermúdez, Latin american conference on complex networks (LANET 2017), Puebla, Puebla, México (2017).
- Estudio de propiedades espectrales y de autoestados de redes con pérdidas y ganancias, C. T. Martínez-Martínez y J. A. Méndez-Bermúdez, Tercera reunión de Ingeniería en Física Aplicada, Huajuapán de León, Oaxaca, México (2018).
- “Scaling properties of random networks with losses and gain”, C. T. Martínez-Martínez y J. A. Méndez-Bermúdez, Chaos, quantum chaos and more (gathering in memory of Boris Chirikov on his 90th birthday), Cuernavaca, Morelos, México (2018).
- “Escalamiento de redes bipartitas”, C. T. Martínez-Martínez, J. A. Méndez-Bermúdez, Yamir Moreno, Jair J Pineda-Pineda y José M Sigarreta, Congreso Sur-Sureste Matematicas, Acapulco, Guerrero, México (2018).
- Estancia de investigación en el Instituto de Biocomputación y Física de Sistemas Complejos (BIFI) de la Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España (2019-2020).

Contenido

1	Introducción	1
1.1	Antecedentes	1
1.2	Definición de redes y conceptos básicos	2
1.2.1	Clasificación de redes	5
1.2.2	Modelos nulos	6
1.2.3	Matriz de adyacencia	7
1.3	Organización del trabajo	9
2	Cantidades topológicas	10
2.1	Grado, grado promedio y número de enlaces	10
2.2	Índices topológicos	12
3	Cantidades espectrales	15
3.1	Teoría de matrices aleatorias (RMT)	15
3.2	Enfoque RMT	18
3.3	Cantidades espectrales	19
3.4	Energía de un grafo	21
3.4.1	Energía asociada a índices	22
4	Redes de tipo Erdős-Rényi (ER)	23
4.1	Modelo de Erdős-Rényi	23
4.2	Propiedades topológicas	24
4.3	Propiedades espectrales	30
5	Redes bipartitas	34
5.1	Modelo de red bipartita	34
5.2	Análisis de escalamiento	36
5.2.1	Propiedades espectrales	42
5.3	Aplicación a la evaluación de calidad de agua	47
6	Redes mutualistas	51
6.1	Modelo de red mutualista	52
6.1.1	Análisis de escalamiento de redes mutualistas	53
6.2	Redes mutualistas del mundo real	61

7	Redes geométricas aleatorias (RGG)	65
7.1	RGG no uniforme	67
7.1.1	Propiedades topológicas	68
7.1.2	Propiedades espectrales	75
8	Redes con pérdidas y ganancias	83
8.1	Modelo ER con pérdidas y ganancias	84
8.1.1	Análisis de escalamiento	85
8.1.2	Propiedades de autovalores	90
9	Conclusiones	94
A	Publicaciones	98
	Bibliografía	106

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes

El estudio de la física ha evolucionado mucho en los últimos años. En 1972 P. W. Anderson afirmaba que debía cambiarse el enfoque reduccionista seguido por los físicos de ese tiempo. Anderson decía que la capacidad de reducir todo a simples leyes fundamentales no implica la capacidad de partir de esas leyes y reconstruir el universo, ya que se deben enfrentar además las dificultades asociadas a la escala y complejidad [1]. Él argumentaba que no es posible entender el comportamiento de agregados grandes y complejos de partículas elementales en términos de una simple extrapolación de las propiedades de unas pocas partículas. En cambio proponía que en cada nivel de complejidad aparecen propiedades completamente nuevas, y la comprensión de los nuevos comportamientos requiere una investigación que es tan fundamental en su naturaleza como cualquier otra. De esta manera propuso entonces ordenar las ciencias de forma jerárquica, de manera que cada nivel superior transmita sus reglas a uno inferior pero que además cada nivel pueda obedecer leyes emergentes que no sean inferidas de los constituyentes fundamentales. Estas ideas de sistemas jerárquicos fueron evolucionando y junto con la teoría del caos dieron inicio a la teoría de Sistemas Complejos [2].

Podemos ver que los sistemas complejos se encuentran en todas partes y esto ha hecho que su estudio sea muy importante en la últimas décadas. El estudio de los sistemas complejos ha crecido tanto que en una entrevista en el año 2000 S. Hawking señaló que este siglo podría ser el siglo de la complejidad [3], lo cual parece ser acertado dados los miles de artículos que se han publicado en los últimos años, además del reciente premio

Nobel de Física 2021 otorgado por un lado a Giorgio Parisi por “el descubrimiento de la interacción entre el desorden y las fluctuaciones en los sistemas físicos, desde el átomo al sistema planetario” y por otro lado a Syukuro Manabe y Klaus Hasselmann por sus “contribuciones para modelar el clima de la Tierra, cuantificar la variabilidad y predicción del calentamiento global”, es decir, por un lado se reconoció el estudio de la ciencia de la complejidad y por otro lado una aplicación de esta.

Hasta ahora no se tiene un concepto o definición precisa de lo que es un sistema complejo. De acuerdo con Newman [4], un sistema complejo es un sistema compuesto por muchas partes que interactúan, a menudo llamadas agentes, que muestra un comportamiento colectivo que no se sigue trivialmente de los comportamientos de las partes individuales. El todo es más que la suma de sus partes. Los comportamientos colectivos a veces también se denominan comportamientos “emergentes”, por lo tanto, se puede decir que un sistema complejo es un sistema de partes que interactúan y que muestra un comportamiento emergente.

De acuerdo con esta “definición” podríamos representar sistemas complejos a través de redes en las que los nodos o vértices representan los agentes del sistema y las interacciones entre agentes se representan mediante aristas. En esta forma podremos intentar estudiar las propiedades de un sistema complejo mediante las propiedades de una red asociada a él. Para esto es necesario crear modelos nulos o modelos de referencia que sirvan de esqueleto para el sistema complejo bajo estudio de manera que la red contenga la mayor información del sistema que queremos estudiar y nos sea útil para tratar de predecir nuevas propiedades o comportamientos. Con esto en mente, en este trabajo proponemos algunos modelos nulos que pueden utilizarse como referencia para el estudio de sistemas complejos. Para esto necesitamos primero definir algunos conceptos de redes, los cuales se presentan en las siguientes secciones.

1.2 Definición de redes y conceptos básicos

Para entender y estudiar un sistema complejo es fundamental conocer como interactúan sus componentes entre sí. Una forma de representar y entender la organización de sistemas complejos es a través de los grafos o redes. Una red es un conjunto de vértices o nodos que se conectan mediante aristas.

En la Fig. 1.1 podemos ver el ejemplo de una red con 6 vértices y 6 aristas en la

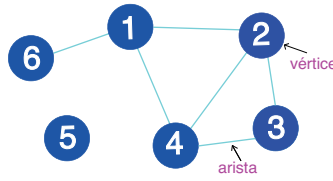


Figura 1.1: Ejemplo de una red con 6 vértices y 6 aristas.

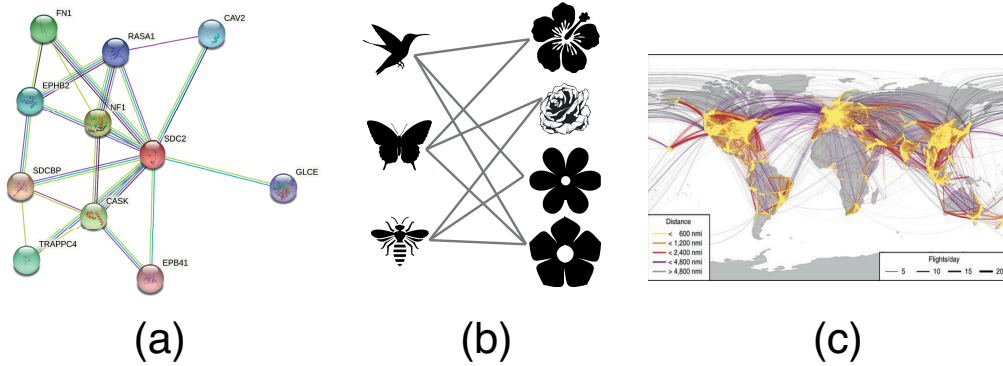


Figura 1.2: (a) Red de proteínas, (b) red de polinizadores y (c) red de vuelos internacionales. Imágenes tomadas de (a) [5] y (c) [6].

que representamos los vértices mediante puntos azules etiquetados con los números del 1 al 6 y las aristas por líneas en color cyan que representan la interacción entre un par de vértices. Nos referimos al número de vértices en una red como el tamaño de la misma, de manera que la red de la Fig. 1.1 es de tamaño $n = 6$.

Dependiendo de la aplicación, los vértices y las aristas de una red tienen diferentes significados [7,8]. Por ejemplo, en física de la materia condensada, los vértices y las aristas de la red regular conocida como modelo de Anderson de enlace fuerte son los sitios y las integrales de traslape, respectivamente [9]. En el caso de una red de proteínas los vértices son las proteínas y las aristas las interacciones que hay entre ellas para realizar determinadas funciones [Fig. 1.2 (a)], mientras que en el caso de redes de polinizadores podemos representar las plantas y los polinizadores por vértices y mediante aristas indicar la interacción entre ellos [Fig. 1.2 (b)].

Podemos darnos cuenta que las redes abundan en la naturaleza, son parte de nuestra vida diaria y se presentan en diferentes niveles de organización. Por ejemplo, algunas redes biológicas que encontramos a nivel microscópico son las redes de regulación

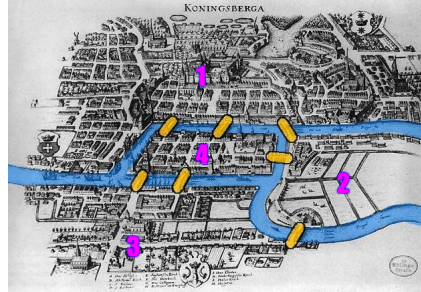


Figura 1.3: Puentes de Königsberg. Imagen tomada de [10].

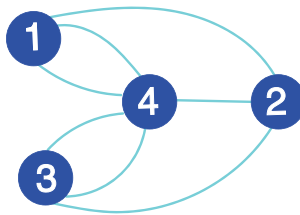


Figura 1.4: Representación en forma de grafo de los puentes de Königsberg. Los vértices representan las regiones de la ciudad etiquetadas con los números 1,2,3 y 4 en la Fig. 1.3 y las aristas representan a los puentes.

genética, redes de proteínas, redes neuronales, redes metabólicas. Por otro lado, a un nivel de organización mucho mayor, encontramos redes de comunicación e informáticas (la red de internet, la red informática mundial –www por sus siglas en inglés “World Wide Web”, redes telefónicas, etc.), redes sociales (amistades, colaboradores científicos, propagación de enfermedades, etc.), redes ecológicas (interacciones tróficas en un ecosistema), redes de transporte como la red de vuelos internacionales [Fig. 1.2 (c)], etc.

Podemos ver entonces que las redes complejas son ubicuas. Esto ha incrementado el interés en estudiar las propiedades estructurales y dinámicas de las redes complejas. Durante las últimas décadas se han publicado miles de artículos sobre este tema en revistas de investigación científica de distintas disciplinas que abarcan diferentes áreas como física, biología, sociología, neurología, economía y medicina, entre otras.

El estudio de las redes comienza con el nacimiento de la teoría de grafos el cual se asocia con el problema de los puentes de Königsberg resuelto por Leonhard Euler en el siglo XVIII [11,12]. En aquel tiempo la ciudad de Königsberg era atravesada por el río Pregel, de manera que éste la dividía en cuatro regiones distintas que estaban unidas mediante siete puentes [Ver Fig. 1.3], entonces la gente se preguntaba ¿Es posible dar un paseo saliendo de

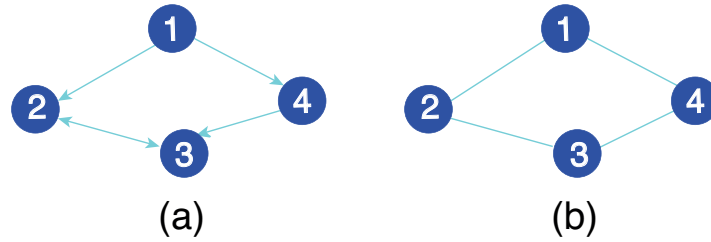


Figura 1.5: Ejemplo de red (a) dirigida y (b) no dirigida.

alguna de las regiones, pasando por todos los puentes solamente una vez y regresar al punto de partida? Para responder esta pregunta podríamos tratar de hacerlo recorriendo todos los posibles caminos, sin embargo esto es un proceso engorroso no muy útil. En lugar de esto Euler resolvió el problema representando el mapa en forma de grafo tomando solo lo esencial del problema, las 4 regiones y los 7 puentes. Representó cada región como un vértice y cada puente como una arista [Ver Fig. 1.4], y basándose en el número de aristas conectadas a cada vértice (grado) demostró que no es posible hacer ese recorrido puesto que sería necesario que cada vértice estuviera conectado a un número par de aristas. Actualmente en teoría de grafos, este tipo de caminos se conocen como ciclos eulerianos. La solución de Euler a este problema fue plasmado en el trabajo titulado “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis” [13], en 1736, y se cita a menudo como el primer trabajo de la teoría de grafos [11]. De la solución de Euler al problema de los puentes de Königsberg podemos ver que al trasladar un sistema a su representación en forma de red podemos inferir ciertas propiedades del sistema de una manera más eficaz, esto ha llevado a que la teoría de grafos se convierta en una importante área de conocimiento [14].

1.2.1 Clasificación de redes

Para el estudio de redes en ocasiones es importante clasificarlas. Existen muy diversas clasificaciones de redes. La forma más sencilla de clasificarlas es de acuerdo con el sentido de conexión de sus aristas; si sus aristas tienen un sentido de conexión definido como se puede ver en la Fig. 1.5 (a) se dice que las redes son dirigidas, mientras que si las aristas no tienen ningún sentido de conexión como en la Fig. 1.5 (b) se dice que las redes son no dirigidas. A lo largo de este trabajo se estudiarán redes no dirigidas.

De acuerdo con su topología es posible clasificarlas como deterministas, fractales y aleatorias [15]. Las redes deterministas y fractales se construyen mediante reglas específicas,

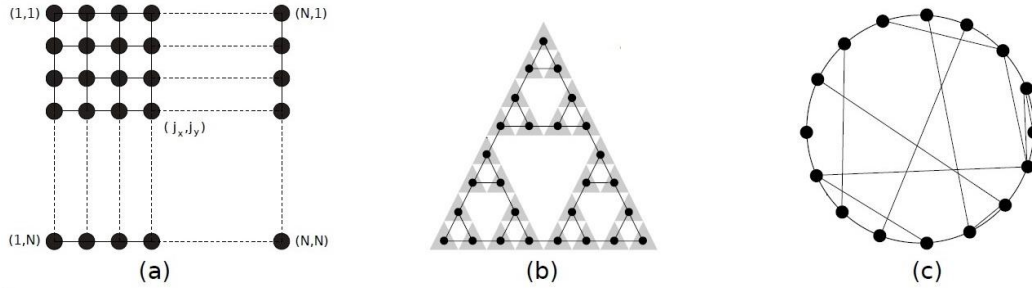


Figura 1.6: Ejemplos de redes (a) deterministas, (b) fractales y (c) aleatorias. Imagen tomada de [15].

ver por ejemplo las Figs. 1.6(a-b). Por otra parte las redes aleatorias se definen por un conjunto de parámetros con valores determinados (por ejemplo el número de nodos y/o el número de aristas) pero la distribución de las aristas es aleatoria, ver un ejemplo en la Fig. 1.6(c). En este último caso el estudio de una sola red aleatoria no tiene relevancia; en lugar de ello se estudian las propiedades estadísticas de un ensamble de redes caracterizadas por un conjunto de parámetros con valores fijos, como son el tamaño de la red, el número de conexiones que la componen, etc. Existen varios modelos de redes aleatorias en la literatura [8, 16]. Entre los más relevantes podemos mencionar los grafos aleatorios introducidos por Erdős y Rényi (ER) [17], las redes de escala libre de Barabási y Albert [18] y las redes de mundo pequeño de Watts y Strogatz [19]. Estos modelos reproducen algunas características de redes del mundo real como la internet, redes de potencia, redes sociales y biológicas, entre otras [7, 8, 16, 20], sin embargo, dado el crecimiento del estudio de sistemas complejos a través de redes creemos que es necesario introducir nuevos modelos nulos (modelos de referencia) de redes complejas con parámetros y características específicas.

1.2.2 Modelos nulos

Podemos representar un sistema complejo mediante redes complejas. Si se conoce exactamente cual es la red que representa cierto sistema complejo es posible estudiar directamente las propiedades del sistema a través del estudio de las propiedades de la red. Sin embargo, en la mayoría de los casos no se conoce con exactitud cuál es la red producida por un sistema complejo, pero sí conocemos ciertas propiedades que debe exhibir, entonces para poder representar el sistema a través de una red se recurre a la construcción de un

modelo de red basado en las propiedades conocidas del sistema, este modelo se conoce como modelo nulo. En teoría de redes, un modelo nulo es un modelo que sirve como referencia para representar una red y nos permite estudiar y predecir algunas de sus propiedades. Dado que un modelo nulo es construido a partir de ciertas propiedades de un sistema, la red que cumple con esas propiedades no es única y, por lo tanto, el modelo nulo generará un ensamble de redes con las mismas propiedades en promedio que el sistema original [21]. De manera que el estudio del sistema se realizará mediante un análisis estadístico de las propiedades de dicho ensamble.

En este trabajo proponemos modelos nulos basados en redes aleatorias que nos sirven como esqueleto para modelar y estudiar ciertos sistemas. Una vez generado el modelo nulo se estudian de manera estadística sus propiedades topológicas y espectrales.

1.2.3 Matriz de adyacencia

Independientemente del campo, clasificación o aplicación de una red, una forma de representarla matemáticamente es mediante la matriz de adyacencia. La matriz de adyacencia $\mathbf{A}$ de una red simple no dirigida (una red sin aristas múltiples ni lazos) es la matriz con elementos A_{ij} definidos por [8]

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay una arista entre los vértices } i \text{ y } j, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Esta definición produce matrices simétricas de tamaño $n \times n$ con ceros en la diagonal principal; donde n es el número de vértices de la red correspondiente.

Nótese que para el caso de las redes dirigidas la matriz de adyacencia ya no es simétrica.

Dada la importancia que tiene la matriz de adyacencia en este trabajo, veamos el siguiente ejemplo de construcción: Consideramos la red de la Fig. 1.7 compuesta por 5 vértices. La matriz de adyacencia correspondiente será de tamaño 5×5 .

Para construir la matriz de adyacencia lo primero que tenemos que hacer es etiquetar los vértices (aunque la manera de etiquetar los vértices es arbitraria, esto no afecta las propiedades de la red). Después se colocan unos en las entradas (i, j) de la matriz en donde exista una arista que conecte el vértice i y el j ; de acuerdo con la Fig. 1.7 estas entradas son: $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(2,4)$ y $(3,4)$, pero como la red no es dirigida si el

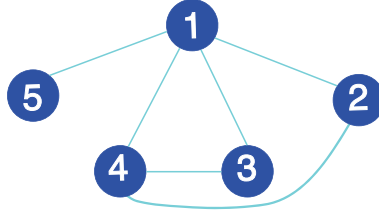


Figura 1.7: Ejemplo de una red compuesta por 5 vértices y 6 aristas.

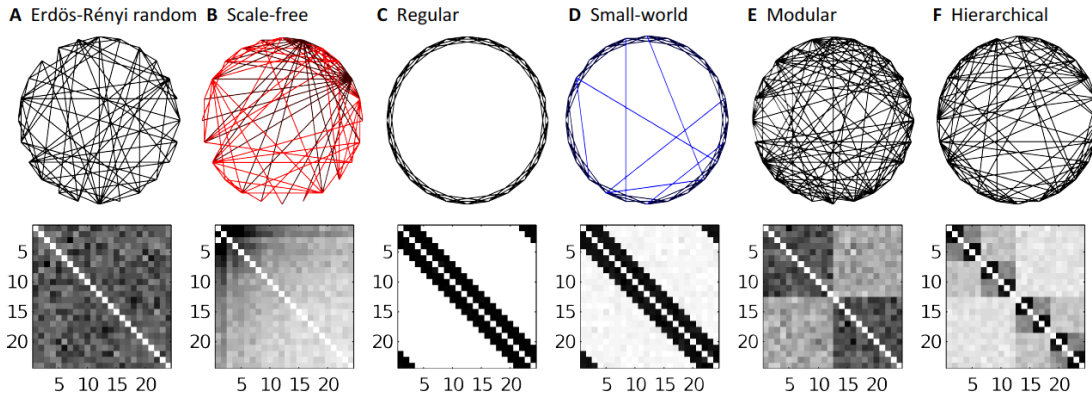


Figura 1.8: Ejemplos de diferentes tipos de redes con 25 vértices (arriba) y sus matrices de adyacencia correspondientes (abajo). Figura tomada de [22].

vértice i está conectado con el vértice j entonces también el vértice j está conectado con el vértice i , entonces también consideramos las entradas $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$, $(5,1)$, $(4,2)$ y $(4,3)$.

Finalmente, la matriz de adyacencia de la red de la Fig. 1.7 es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Es importante notar que con esta construcción generamos matrices binarias, aunque también es posible tener matrices pesadas si en lugar de colocar unos en las entradas correspondientes a vértices conectados colocamos otros números que pueden representar la fuerza o el peso de la conexión entre vértices.

En la Fig. 1.8 se muestran ejemplos de diferentes tipos de redes (todas con 25 vértices) y sus correspondientes matrices de adyacencia, en este caso se trata de matrices pesadas, la escala de grises corresponde al peso de las conexiones. Podemos observar que las matrices de adyacencia contienen información relevante de la red. Por ejemplo, en las matrices de adyacencia de la Fig. 1.8 se ve claramente (A) el desorden, (C) la regularidad o (E) la modularidad de la red correspondiente. Esto nos hace notar que el estudio apropiado de las matrices de adyacencia nos puede ayudar a entender o incluso diseñar redes con propiedades específicas.

Una vez que se construye la matriz de adyacencia de una red, podemos utilizarla para estudiar las propiedades de la misma. Para esto en esta Tesis vamos a utilizar las propiedades topológicas y espectrales que se describen en los siguientes capítulos.

1.3 Organización del trabajo

En este trabajo se proponen y estudian algunos modelos nulos de redes complejas. Mediante análisis numérico se busca encontrar un parámetro que fije las propiedades del sistema, es decir, buscamos un parámetro que dependa de los parámetros que definen el modelo, de manera que una vez que nosotros fijemos dicho parámetro las propiedades del modelo no cambien. A este parámetro lo llamaremos *parámetro de escalamiento*. Para determinar el parámetro de escalamiento de cada modelo utilizaremos algunas cantidades topológicas y algunas propiedades espectrales basadas en Teoría de Matrices Aleatorias las cuales se definen en los Capítulos 2 y 3 respectivamente. En el Capítulo 4 se presenta el modelo de Erdős-Rényi y se estudian sus propiedades topológicas, este modelo es muy importante ya que será utilizado como una base para generar otros modelos. En el Capítulo 5 se propone y se estudia un modelo de red bipartita, en este caso caracterizamos el modelo a través de sus propiedades espectrales. En el Capítulo 6 se propone un modelo de red mutualista y estudiamos algunas de sus propiedades topológicas y espectrales. En el Capítulo 7 proponemos un modelo de red geométrica aleatoria con distribución no uniforme y estudiamos tanto sus propiedades topológicas como espectrales, posteriormente en el Capítulo 8 proponemos un modelo de red con pérdidas y ganancias y estudiamos sus propiedades espectrales y finalmente en el Capítulo 9 presentamos las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Cantidades topológicas

En esta Tesis estudiamos diferentes modelos de redes caracterizándolas mediante distintas cantidades. Para el estudio de las propiedades topológicas de la red utilizaremos algunas cantidades propias de la teoría de grafos como es el grado promedio y el número de vértices no aislados y algunas otras que han surgido principalmente en el estudio de grafos moleculares. En este capítulo se definirán estas cantidades.

2.1 Grado, grado promedio y número de enlaces

La cantidad topológica más importante que utilizamos es el *grado de un vértice*, a partir del grado de un vértice se definirán algunas otras cantidades.

El grado de un vértice se define como el número de aristas conectadas a él. Denotamos el grado del vértice i como k_i . Para un grafo no dirigido de n vértices el grado puede escribirse en términos de la matriz de adyacencia binaria como [8]

$$k_i = \sum_j^n A_{ij}. \quad (2.1)$$

Cada arista en un grafo no dirigido tiene dos extremos, si se tienen L aristas entonces hay $2L$ extremos, dado que el número total de extremos es igual a la suma de los grados de todos los vértices, entonces

$$2L = \sum_{i=1}^n k_i, \quad (2.2)$$

o

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij}. \quad (2.3)$$

El grado promedio $\langle k \rangle$ de un grafo no dirigido está dado por

$$\langle k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i = \frac{2L}{n}. \quad (2.4)$$

El número máximo posible de aristas en un grafo simple (es decir, un grafo sin múltiples aristas o autoconexiones), sin restricciones de conexión, está dado por

$$L_{max} = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1). \quad (2.5)$$

Sí un grafo alcanza su número máximo de conexiones, se dice que es un *grafo completo*.

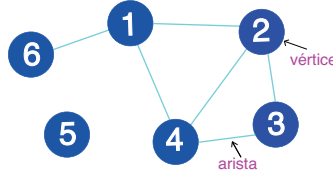


Figura 2.1: Red con 6 vértices y 6 aristas.

Para ejemplificar los conceptos de grado, grado promedio y número de aristas vamos a considerar la red de la Fig. 2.1. Podemos ver claramente que el vértice 1 tiene tres aristas incidentes a él, entonces $k_1 = 3$, por otra parte el vértice 5 no tiene ninguna arista incidente a él, decimos entonces que es un *vértice aislado* y por lo tanto $k_5 = 0$. Tenemos entonces que $k_1 = 3$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$, $k_4 = 3$, $k_5 = 0$ y $k_6 = 1$, de manera que el número de aristas es

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 k_i = \frac{1}{2}(3 + 3 + 2 + 3 + 0 + 1) = 6, \quad (2.6)$$

y usando la Ec. (2.4) el grado promedio de la red es $\langle k \rangle = \frac{2(6)}{6} = 2$.

El número de vértices no aislados, $V_{\times}$, se define como el número total de vértices menos el número de vértices aislados K_1 ,

$$V_{\times} = n - K_1. \quad (2.7)$$

En la red de la Fig. 2.1 solamente hay un vértice aislado (vértice 5), entonces $K_1 = 1$ y $V_{\times} = n - K_1 = 6 - 1 = 5$.

De aquí en adelante consideraremos grafos $G(n)$ con n vértices. El conjunto de vértices del grafo G será denotado por $V(G)$. El grado del vértice i será denotado por k_i e $i \sim j$ denota la arista de $G(n)$ que conecta los vértices i y j .

En adición a estas cantidades podemos definir otros índices basados en el grado de los vértices, entre ellos los índices topológicos.

2.2 Índices topológicos

Otras cantidades topológicas que utilizamos en esta Tesis para caracterizar nuestros modelos nulos y encontrar el parámetro de escalamiento son los *índices topológicos*. La mayoría de estos índices han surgido principalmente de la química matemática y es ahí donde tienen una mayor aplicación, sin embargo nosotros hemos propuesto utilizarlos para caracterizar ensambles de grafos aleatorios y encontrar el parámetro de escalamiento de diferentes modelos.

En topología molecular se utilizan varias herramientas de la teoría de grafos al estudio de los componentes químicos representando las moléculas mediante grafos moleculares. Un grafo molecular es un grafo simple que representa una molécula en el que los vértices son los átomos y las aristas los enlaces químicos. Es posible observar que para grafos moleculares el concepto de grado de un vértice tiene una estrecha relación con el concepto de valencia aunque ambos conceptos no son idénticos [23].

Un *descriptor topológico* es un número que representa una estructura química, obtenido a partir de alguna propiedad topológica de un grafo molecular; además, si se correlaciona con una propiedad molecular, se llama *índice topológico* y se utiliza para estudiar y entender las propiedades físico-químicas de compuestos químicos. Podemos considerar a Harold Wiener como el pionero en el estudio de los denominados índices topológicos, en 1947 Wiener [24] utilizó la suma de las distancias topológicas más cortas entre cada par de vértices de un grafo molecular para modelar propiedades físicas de los alcanos.

El interés por los índices topológicos radica en el hecho de que sintetizan algunas de las propiedades de una molécula en un solo número. Con esto en mente, durante más de 40 años cientos de índices topológicos han sido propuestos y estudiados. Debido a la similitud entre el concepto de valencia y grado de un vértice muchos de los índices topológicos están basados en los grados de los vértices de un grafo molecular y algunos de

ellos son herramientas reconocidas en la investigación química.

De manera general un índice topológico (TI por sus siglas en inglés “Topological Index”) basado en los grados de los vértices se define como [23]:

$$TI = TI(G) = \sum_{i \sim j} f(k_i, k_j), \quad (2.8)$$

donde la suma cubre todos los pares de vértices adyacentes i, j del grafo molecular G , y $f = f(x, y)$ es una función elegida apropiadamente.

Existe un gran número de índices topológicos, sin embargo en esta Tesis nos centraremos en los más conocidos, los cuales presentaremos a continuación.

- *Índice de Randić*

Uno de los índices más conocidos y estudiados es el índice de conectividad de Randić, el cual fue definido en [25] como

$$R(G) = \sum_{i \sim j} \frac{1}{\sqrt{k_i k_j}}. \quad (2.9)$$

Existen más de mil artículos y un par de libros dedicados a este índice (ver, por ejemplo, [26–28] y las referencias en él). Además de las múltiples aplicaciones del índice de Randić en la fisicoquímica, este índice ha encontrado varias aplicaciones en otras áreas de investigación como la teoría de la información [29], la similitud de grafos [30], la alineación de proteínas [31], la heterogeneidad de grafos [32] y robustez de redes [33].

- *Índices de Zagreb*

Otro par de índices que han sido ampliamente estudiados son el primer y segundo índice de Zagreb que se definen como

$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} k_u^2, \quad (2.10)$$

$$M_2(G) = \sum_{i \sim j} (k_i k_j)^2. \quad (2.11)$$

A diferencia del índice de Randić, los dos índices de Zagreb casi no tienen aplicaciones para modelar propiedades físico-químicas, farmacológicas o de cualquier otra índole de moléculas orgánicas, más bien estos índices se propusieron para medir la complejidad molecular [23, 34].

- *Índice modificado de Zagreb*

Asociado a los índices de Zagreb existe el índice modificado de Zagreb el cual está definido por

$$MZ(G) = \sum_{i \sim j} \frac{1}{k_u k_v}. \quad (2.12)$$

El índice modificado de Zagreb se ha utilizado en el modelado de la estructura y el cálculo del punto de ebullición de hidrocarburos bencenoides [35].

- *Índice de suma de conectividad*

Por otro lado el índice de suma de conectividad, es un índice recientemente propuesto por Zhou y Trinajstić [36], el cuál se define como

$$\chi(G) = \sum_{i \sim j} \frac{1}{\sqrt{k_u + k_v}}. \quad (2.13)$$

Este índice también ha sido muy estudiado y se ha notado que hay una gran correlación entre este índice y el índice de Randić, podemos notar que la única diferencia entre estos dos es el cambio de la suma por el producto en el divisor.

- *Índice de grado inverso*

El índice de grado inverso comenzó a llamar la atención a través de conjeturas del programa informático Graffiti [37]. Este índice está definido por

$$ID(G) = \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{d_u} = \sum_{i \sim j} \left(\frac{1}{k_i^2} + \frac{1}{k_j^2} \right). \quad (2.14)$$

- **Número de vértices no aislados** El número de vértices no aislados también puede definirse en función de los grados de los vértices como:

$$V_{\times} = \sum_{i \sim j} \left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_j} \right). \quad (2.15)$$

- *Índice armónico*

Finalmente utilizaremos el índice armónico definido como [37]

$$H(G) = \sum_{i \sim j} \frac{2}{k_u + k_v}. \quad (2.16)$$

Todas estas cantidades serán utilizadas a lo largo de esta Tesis para encontrar o verificar el parámetro de escalamiento de los modelos nulos que proponemos.

Capítulo 3

Cantidades espectrales

Además de las cantidades topológicas definidas en el capítulo anterior estudiaremos las propiedades de las redes mediante sus cantidades espectrales, para esto analizaremos los autovalores y autovectores de la matriz de adyacencia utilizando principalmente herramientas de teoría de matrices aleatorias, las cuales se describen en este capítulo.

3.1 Teoría de matrices aleatorias (RMT)

Una matriz aleatoria es una matriz cuyos elementos son variables aleatorias provenientes de una distribución dada. Las matrices aleatorias surgieron inicialmente en 1930 en problemas estadísticos.

Dada una matriz aleatoria resulta muy interesante conocer las propiedades de sus autovalores y autovectores. El estudio y conocimiento de estas propiedades fue una pieza clave para el entendimiento del comportamiento estadístico de resonancias en física nuclear y fue la manera en que en los años 50's las matrices aleatorias comenzaron a tomar una gran relevancia debido a los trabajos de Wigner en los que introdujo el concepto de distribución estadística de los niveles de energía nuclear [38], los primeros conjuntos de matrices [39] y la conjetura de Wigner [40]. En los años 60's Mehta propuso un análisis detallado de la distribución de espaciamiento entre autovalores de matrices aleatorias [41] y posteriormente Dyson estableció los fundamentos matemáticos de la teoría de matrices aleatorias (RMT por sus siglas en inglés), además de la clasificación de conjuntos de matrices aleatorias de acuerdo con sus simetrías [42–46]. Dyson señaló a la RMT como un nuevo tipo de mecánica estadística, en el que renunciamos al conocimiento exacto no del estado del sistema sino

del propio sistema, imaginando al núcleo complejo como una “caja negra” en la que un gran número de partículas interactúan de acuerdo con leyes desconocidas, de manera que el problema entonces es definir de una manera matemáticamente precisa un ensamble de sistemas en los que todas las posibles leyes de interacción son igualmente probables [42].

De esta manera la teoría de matrices aleatorias fue surgiendo y tomando gran relevancia hasta el punto en que hoy en día se considera una disciplina en sí misma y tiene múltiples aplicaciones en áreas muy diversas. El conocimiento de las propiedades estadísticas de autovalores y autovectores de matrices aleatorias además de ayudar a tratar de entender o predecir el comportamiento del núcleo compuesto es muy útil para estudiar el comportamiento de diversos sistemas como la conductividad de los metales desordenados, el comportamiento de los sistemas caóticos, los ceros de la función zeta de Riemann, problemas relacionados a sólidos desordenados, hasta aplicaciones en los mercados financieros [47, 48] por mencionar algunos ejemplos.

De manera general RMT es útil para tratar de entender o predecir el comportamiento de sistemas complejos que pueden ser representados por matrices, definiendo ensambles en los que todas las posibles leyes de interacción dentro del sistema son considerados [49]. Los sistemas más simples que se estudian por RMT consideran ensambles de matrices totalmente llenas de elementos provenientes de una distribución normal no correlacionada que son únicamente determinados por su simetría.

Los tres ensambles más estudiados de matrices aleatorias son:

- GOE: Una matriz de tamaño $n \times n$ pertenece al ensamble gaussiano ortogonal (GOE, por sus siglas en inglés: “Gaussian Orthogonal Ensemble”) si es simétrica, real y además sus elementos son números aleatorios caracterizados por una distribución normal con media cero y varianza 1 en la diagonal, mientras que fuera de la diagonal sus elementos son números aleatorios caracterizados por una distribución normal con media cero y varianza $1/2$.
- GUE: Una matriz de tamaño $n \times n$ pertenece al ensamble gaussiano unitario (GUE, por sus siglas en inglés: “Gaussian Unitary Ensemble”) si es hermitiana y los elementos en la diagonal principal m_{jj} son variables aleatorias independientes caracterizadas por una distribución normal con media cero y desviación estándar $1/\sqrt{2}$ y los elementos fuera de ella se escriben como $m_{jk} = u_{jk} + iv_{jk}$, donde u_{jk} y v_{jk} también son variables aleatorias independientes caracterizadas por una distribución normal con media cero

y desviación estándar $1/2$.

- GSE: Una matriz de tamaño $n \times n$ pertenece al ensamble gaussiano simpléctico (GSE, por sus siglas en inglés: “Gaussian Symplectic Ensemble”) si sus elementos son variables aleatorias cuaterniónicas independientes. Los elementos de la diagonal son reales y caracterizados por una distribución normal con media cero y desviación estándar $1/2$, mientras que aquellos fuera de la diagonal son de la forma $z_{jk} = u_{jk} + iv_{jk}$ y $w_{jk} = u'_{jk} + iv'_{jk}$, donde u_{jk}, v_{jk}, u'_{jk} y v'_{jk} provienen de una distribución normal de media cero y desviación estándar $1/2\sqrt{2}$.

Las matrices de estos ensambles son invariantes bajo las transformaciones de los grupos ortogonal, unitario y simpléctico, respectivamente [50].

Dado que es posible estudiar sistemas complejos a través de su representación mediante grafos aleatorios y que estos producen matrices de adyacencia $\mathbf{A}$ que pueden considerarse como matrices aleatorias, un enfoque particularmente adecuado para estudiar la relación entre la estructura y la dinámica de un sistema representado por una red es mediante la Teoría de Matrices Aleatorias. Desde el punto de vista de la física matemática, en el contexto de RMT, en 1988 Rodgers y Bray [51] propusieron un ensamble de matrices aleatorias ralas caracterizadas por el parámetro ξ equivalente a matrices de adyacencia de redes de tipo Erdős-Rényi. Desde entonces han aparecido en la literatura estudios analíticos y numéricos enfocados en modelos de matrices aleatorias ralas (ver por ejemplo [51–65]). En el campo de las redes complejas, la aplicación de las técnicas de RMT puede ayudar a identificar las propiedades universales de familias de sistemas representados por modelos específicos de redes complejas; ver por ejemplo [66–71]. Esto es de interés porque permite reducir el número de parámetros del modelo así como definir relaciones que permiten predecir el comportamiento del sistema en términos de uno o pocos parámetros relevantes. En esta Tesis el objetivo principal es identificar las propiedades universales de los modelos propuestos en función de un *parámetro de escalamiento* que dependa de los parámetros que definen dicho modelo. Para identificar el parámetro de escalamiento utilizaremos principalmente herramientas de Teoría de Matrices Aleatorias.

3.2 Enfoque RMT

El enfoque del que partiremos para el estudio de redes aleatorias utilizando RMT es el siguiente: primero representaremos una red a través de su matriz de adyacencia binaria. Posteriormente, agregaremos pesos aleatorios a los elementos de la matriz de adyacencia diferentes de cero. Los pesos aleatorios serán caracterizados por una distribución normal de media cero y varianza $\frac{1}{2}$. Además de esto agregaremos autoconexiones que harán que la diagonal principal de la matriz de adyacencia sea diferente de cero, estas entradas de la matriz también tendrán pesos aleatorios caracterizados por una distribución normal de media cero pero con varianza 1. A la matriz resultante de agregar estas autoconexiones y pesos la llamaremos *matriz pesada*. Podemos ver entonces que cuando la red es totalmente desconectada su matriz de adyacencia pesada corresponde a una matriz diagonal de números aleatorios, que en RMT se conoce como límite de Poisson (PE). Además, dado que las redes estudiadas en esta Tesis son no dirigidas sus matrices de adyacencia son simétricas, entonces cuando la red es totalmente conectada, su matriz de adyacencia pesada pertenece al ensamble GOE definido anteriormente. Podemos ver entonces que la importancia de agregar autoconexiones y pesos aleatorios a las matrices de adyacencia radica en que nos permite reproducir límites conocidos en RMT de las cantidades que vamos a calcular con los cuales podremos comparar nuestros resultados, como se verá más adelante. Es importante mencionar que agregar pesos a la matriz de adyacencia no modifica la propiedades topológicas de la red.

Los elementos de la matriz de adyacencia pesada $\mathbf{A}$ de las redes aleatorias aquí estudiadas quedarán definidos como:

$$A_{ij} = \begin{cases} \sqrt{2}\epsilon_{ii} & \text{si } i = j, \\ \epsilon_{ij} & \text{si hay una arista entre los vértices } i \text{ y } j, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Con ϵ_{ij} variables aleatorias estadísticamente independientes caracterizadas por una distribución normal con media cero y varianza uno.

Dado que implementar estos pesos es un paso fundamental en el enfoque de RMT que usaremos en esta Tesis, a continuación se presenta un ejemplo de como se modifica la matriz de adyacencia de la red presentada en la Fig. 1.7. agregando estos pesos aleatorios.

Recordemos la matriz de adyacencia binaria para la red de la Fig. 1.7:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Una vez que se tiene la matriz de adyacencia binaria de la red, se agregan las autoconexiones e implementan los pesos aleatorios. Un ejemplo de como se modificaría la matriz de adyacencia anterior es el siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0.2696 & 0.4943 & -1.4831 & -1.0203 & -0.4470 \\ 0.4943 & 2.0548 & 0 & -0.2900 & 0 \\ -1.4831 & 0 & 0.4754 & 1.1741 & 0 \\ -1.0203 & -0.2900 & 1.1741 & 0.6489 & 0 \\ -0.4470 & 0 & 0 & 0 & 0.7059 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Podemos notar que los pesos aleatorios sustituyen a los valores que originalmente eran uno en la matriz de adyacencia y que como la red no es dirigida la matriz de adyacencia pesada continua siendo simétrica. Notése que a excepción de la diagonal principal, las entradas de la matriz de adyacencia que eran igual a cero en la matriz binaria siguen siendo cero en la matriz pesada.

Una vez que hemos obtenido las matrices de adyacencia pesadas estudiamos sus propiedades espectrales a través de cantidades comúnmente utilizadas en el estudio de modelos de matrices aleatorias las cuales se definen en la siguiente sección.

3.3 Cantidades espectrales

Dados los autovalores $\{\lambda_i\}$ ($i = 1, \dots, n$) ordenados de forma que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ y los correspondientes autovectores normalizados Ψ^i (i.e. $\sum_{j=1}^n |\Psi_j^i|^2 = 1$) de una matriz de adyacencia podemos definir algunas cantidades comúnmente utilizadas en RMT.

La entropía de Shannon es una cantidad ampliamente utilizada para medir la localización de los autovectores de las matrices de adyacencia de redes aleatorias, [66, 72].

La entropía de Shannon del autovector normalizado Ψ^i está dada por:

$$S_i = - \sum_{j=1}^n |\Psi_j^i|^2 \ln |\Psi_j^i|^2 . \quad (3.4)$$

Esencialmente, la entropía de Shannon puede entenderse como el logaritmo del número de sitios significativamente habitados por un autoestado dado. Cuando no tenemos conexiones en la red y su matriz de adyacencia pesada corresponde a una matriz diagonal aleatoria (límite PE) los autovectores solamente tienen un elemento distinto de cero igual a uno y por lo tanto $S_{PE} = 0$, por otro lado, para matrices totalmente llenas de números aleatorios la entropía de Shannon máxima está dada por el logaritmo del tamaño de la matriz menos una constante dependiente de la simetría del sistema, $S_\nu = \ln(n) - c_\nu$, con $c_\nu = \psi(\frac{\nu}{2} + 1) - \ln(\frac{\nu}{2})$, donde ψ corresponde a la función digamma [73]. Para la distribución gaussiana $\nu = 1$ y $c_1 = \psi(\frac{3}{2}) - \ln(\frac{1}{2}) \approx 0.7296$ (límite GOE), de manera que la entropía máxima está dada por $S_{GOE} \approx \ln(n/2.07)$ [66, 73, 74].

Otra cantidad utilizada en esta Tesis es la razón de espaciamientos entre autovalores consecutivos. La razón r_i está dada por [75, 76]

$$r_i = \frac{\min(\lambda_{i+1} - \lambda_i, \lambda_i - \lambda_{i-1})}{\max(\lambda_{i+1} - \lambda_i, \lambda_i - \lambda_{i-1})} . \quad (3.5)$$

En contraste con la entropía de Shannon, que es una cantidad bien aceptada para medir el grado de desorden en redes complejas, el uso de la razón de espaciamientos entre autovalores consecutivos es relativamente reciente en estudios de grafos. Creemos que la falta de uso de r en estudios de redes se debe principalmente al hecho de que la introducción de r es relativamente reciente. De hecho, la mayoría de los estudios de propiedades espectrales de redes aleatorias, desde un punto de vista RMT, se basan en la distribución de espaciado entre niveles de energía consecutivos $P(s)$. Sin embargo, nosotros preferimos usar $\langle r \rangle$ o $P(r)$, en lugar de $P(s)$, porque el cálculo de las razones $r_i \equiv \min(s_i, s_{i+1}) / \max(s_i, s_{i+1})$ (con $s_i = (\lambda_{i+1} - \lambda_i) / \Delta$, siendo Δ el espaciado medio de autovalores) no requieren el desdoblamiento del espectro [77], una tarea que puede volverse engorrosa principalmente para los espectros de sistemas del mundo real.

En la referencia [75] son reportados los límites para r en el caso de Poisson y GOE, tenemos que para vértices aislados $\langle r \rangle_{PE} \approx 0.3863$ mientras que para grafos completos, $\langle r \rangle_{GOE} \approx 0.5359$, aunque es importante señalar que nosotros observamos que estos límites no se cumplen para matrices de tamaño pequeño ($n < 100$) como se verá más adelante.

Además del promedio de r también utilizamos la distribución de r , $P(r)$. La distribución de r en el caso de Poisson y GOE está dada por [75]:

$$P_{\text{PE}}(r) = \frac{2}{(1+r)^2} \quad (3.6)$$

y

$$P_{\text{GOE}}(r) = \frac{27}{4} \frac{r(1+r)}{(1+r+r^2)^{5/2}}, \quad (3.7)$$

respectivamente.

3.4 Energía de un grafo

Otra cantidad espectral que vamos a utilizar, aunque no tienen relación con RMT es la energía de un grafo. El concepto de energía de un grafo tiene su origen en química.

En la teoría orbital molecular de Hückel en la que las moléculas de carbono e hidrógeno se representan mediante grafos se define el Hamiltoniano de la molécula como

$$H_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{para } i = j, \\ \beta & \text{si el átomo } i \text{ está enlazado al átomo } j, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3.8)$$

De manera que $\mathbf{H} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{A}$, con $\mathbf{I}$ la matriz identidad y $\mathbf{A}$ la matriz de adyacencia binaria del grafo.

De la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\mathbf{H}\Psi = E\Psi, \quad (3.9)$$

consideramos Ψ_i como la función de onda que describe a uno de los electrones en la molécula y que se extiende sobre todos los átomos de la molécula. Los autovalores de cada átomo E_i satisfacen

$$E_i = \alpha + \beta\lambda_i, \quad (3.10)$$

con λ_i los autovalores de la matriz de adyacencia $\mathbf{A}$. Entonces podemos definir la energía total de la molécula como [78, 79]

$$E = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \quad (3.11)$$

Aunque esta definición surja en química es aplicable a cualquier grafo y se ha extendido a otros tipos de energía relacionados con otras matrices de grafos, como veremos

a continuación. Además de su aplicación para calcular la energía de moléculas químicas tiene algunas otras aplicaciones en cristalografía [80, 81], teoría de macromoléculas [82, 83], así como análisis y comparación de secuencias de proteínas [84–87]. Se ha aplicado también en el análisis de redes, incluidos los problemas de transporte aéreo, comunicaciones por satélite y biología [88–95].

3.4.1 Energía asociada a índices

Adicional a la energía de un grafo, podemos calcular la energía asociada a un índice aplicado a un grafo. Para calcular esta energía lo primero que tenemos que hacer es construir la matriz asociada al índice de interés, la cuál es similar a la matriz de adyacencia binaria del grafo pero pesada en función del índice en consideración. Por ejemplo, considerando que el índice de interés es de la forma

$$TI = \sum_{i \sim j} f(k_i, k_j). \quad (3.12)$$

Definimos la matriz del índice TI como la matriz de elementos F_{ij} dados por

$$F_{ij} = \begin{cases} f(k_i, k_j) & \text{si hay una arista entre los vértices } i \text{ y } j, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3.13)$$

Ahora consideramos $\{\phi_i\}$ ($i = 1, \dots, n$) como los autovalores de la matriz del índice TI , la energía asociada al índice TI está dada por

$$E_{TI} = \sum_{i=1}^n |\phi_i|, \quad (3.14)$$

Podemos sustituir TI por cualquier índice que sea una función del grado de dos vértices adyacentes y así definir la energía asociada a ese índice.

Todas las cantidades que se presentaron en los Capítulos 2 y 3 serán utilizadas para el estudio de las propiedades de los modelos nulos y serán de gran utilidad para definir el parámetro de escalamiento.

Capítulo 4

Redes de tipo Erdős-Rényi (ER)

En este capítulo presentamos el modelo de Erdős-Rényi, el cual es un modelo de red aleatoria caracterizado por los parámetros n y p definidos más adelante, que será utilizado como base para generar los modelos nulos. En el artículo [66] se estudiaron las propiedades espectrales de este tipo de redes mediante un enfoque de RMT, además se encontró que el parámetro de escalamiento para este modelo está dado por $\xi \approx np$, sin embargo, en este capítulo nosotros utilizamos como herramienta algunos índices topológicos y su energía asociada para encontrar el parámetro de escalamiento.

4.1 Modelo de Erdős-Rényi

El modelo de Erdős-Rényi (ER) fue introducido por Solomonoff y Rapoport [96] y posteriormente ampliamente estudiado por los matemáticos Paul Erdős y Alfréd Rényi [17]. Este modelo es ampliamente utilizado para generar nuevos modelos de redes aleatorias y ya que es precisamente el modelo que utilizaremos de base para proponer nuestros modelos nulos resulta de gran importancia definirlo.

Las redes de tipo ER, $G(n, p)$, constan de dos parámetros: el número de vértices o tamaño de la red n y la probabilidad de conexión $p \in (0, 1)$. Se construyen de la siguiente manera: inicialmente se tienen n vértices aislados, posteriormente cada par de vértices se conecta de manera independiente con probabilidad p , de manera que el número de conexiones sigue una distribución binomial [8]:

$$P(L) = \binom{L_{max}}{L} p^L (1-p)^{L_{max}-L}, \quad (4.1)$$

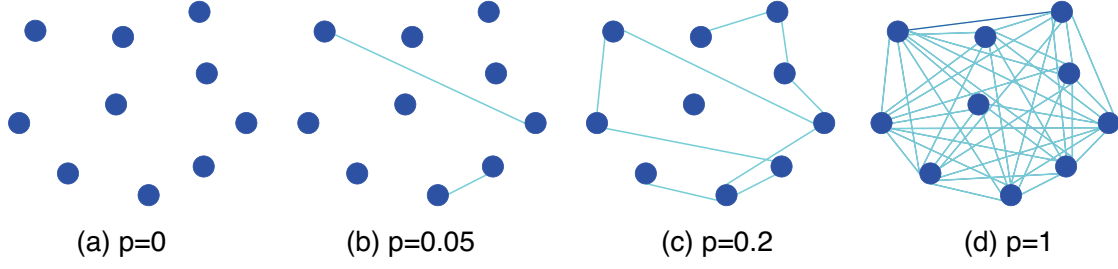


Figura 4.1: Ejemplos de redes de tipo ER con 10 nodos y diferentes valores de p .

de manera que

$$\langle L \rangle = L_{max}p = \frac{n(n-1)p}{2}, \quad (4.2)$$

de forma que el grado promedio para redes ER está dado por:

$$\langle k \rangle = \frac{2n(n-1)p}{2n} = (n-1)p. \quad (4.3)$$

En la Fig. 4.1 podemos ver algunos ejemplos de redes de tipo ER con diferentes probabilidades de conexión: Cuando $p = 0$ tenemos n vértices aislados [ver Fig. 4.1 (a)], al aumentar el valor de p también aumenta el número de conexiones [ver Figs. 4.1 (b-c)], hasta que para $p = 1$ tenemos una red completa [ver Fig. 4.1 (d)].

4.2 Propiedades topológicas

Primero construimos programas computacionales en Fortran que generan matrices de adyacencia para redes ER, posteriormente calculamos algunas de sus propiedades topológicas. Iniciamos el estudio de redes de tipo ER con un estudio computacional y estadístico del índice de Randić definido en la Ec. (2.9).

Calculamos el índice de Randić para ensambles de redes ER con diferentes combinaciones de n y p . En la Fig. 4.2 (a) mostramos el índice de Randić promedio $\langle R(G) \rangle$ en función de la probabilidad p para diferentes tamaños n . El promedio fue calculado sobre 2000 redes aleatorias $G(n, p)$.

Podemos observar que las curvas de $\langle R(G) \rangle$, para todos los valores de n que consideramos, tienen una forma similar en función de p : $\langle R(G) \rangle$ muestra una transición suave (en escala semi-logarítmica) de cero a R_{max} cuando p aumenta de cero (vértices aislados) a uno (redes completas). R_{max} representa el valor máximo que el índice de Randić alcanza, el cual observamos que ocurre en $p = 1$ (cuando se tiene el número máximo de

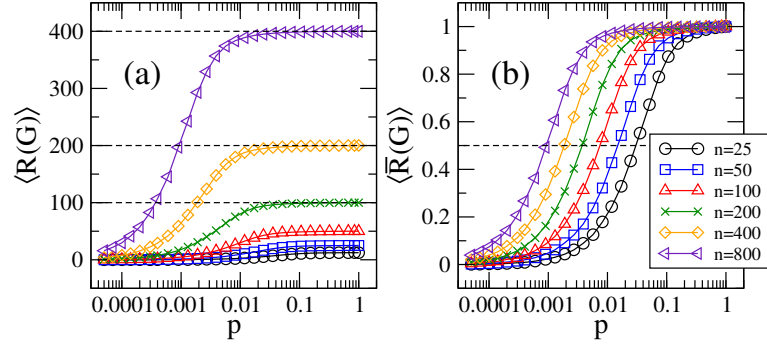


Figura 4.2: (a) Índice de Randić promedio $\langle R(G) \rangle$ como función de la probabilidad p para redes de tipo Erdős-Rényi para diferentes tamaños de red $n \in [25, 800]$. (b) $\langle R(G) \rangle$ normalizado a $n/2$, $\langle \bar{R}(G) \rangle$, como función de p . Las líneas punteadas en (a) indican los valores de $n/2$ para $n \in [200, 800]$. La línea punteada en (b) indica $\langle \bar{R}(G) \rangle = 0.5$, usado para definir p^* . Cada símbolo fue calculado sobre el promedio de 2000 redes aleatorias. Figura tomada de [97].

conexiones), en este caso todos los vértices tienen el mismo grado $k_i = n - 1$, recordando la definición del índice de Randić y el número máximo de conexiones $L_{max} = \frac{n(n-1)}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned} R_{max}(G) &= \sum_{u \sim v} \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-1)}} \\ &= L_{max} \frac{1}{(n-1)} = \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n-1} = \frac{n}{2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ahora, para facilitar nuestro análisis, en la Fig. 4.2 (b) presentamos nuevamente $\langle R(G) \rangle$ pero ahora normalizado a su valor máximo $n/2$:

$$\langle \bar{R}(G) \rangle = \frac{\langle R(G) \rangle}{n/2}. \quad (4.5)$$

En esta figura podemos ver claramente que el efecto principal de aumentar n es el desplazamiento de las curvas $\langle \bar{R}(G) \rangle$ vs. p hacia la izquierda en el eje p . Además, el hecho de que estas curvas, graficadas en escala semilogarítmica, se desplacen la misma cantidad en el eje p al duplicar n , nos hace anticipar la existencia de un parámetro de escalamiento que depende del tamaño de la red n . Para buscar ese parámetro de escalamiento primero establecemos una medida para caracterizar la posición de las curvas $\langle \bar{R}(G) \rangle$ en el eje p : Elegimos el valor de p , que etiquetamos como p^* , para el cual $\langle \bar{R}(G) \rangle \approx 0.5$ [ver la línea punteada en la Fig. 4.2 (b)]. Notemos que p^* ubica el punto de transición de vértices

aislados a redes completas para redes de tipo ER de tamaño n . Numéricamente obtuvimos p^* para diferentes tamaños de red y lo graficamos en la Fig. 4.3 (a). Podemos notar que hay una tendencia lineal de los datos (en escala logarítmica) lo que sugiere que el punto de transición p^* sigue una la ley de potencias

$$p^* = \mathcal{C}n^\delta. \quad (4.6)$$

Mediante ajuste numérico encontramos que la Ec. (??) proporciona un ajuste excelente a los datos con $\mathcal{C} \approx 0.77$ y $\delta \approx -1$.

Dado que buscamos un parámetro que dependa de los parámetros del modelo que fije las propiedades de la red, $\xi = \xi(n, p)$, proponemos que el parámetro de escalamiento esté dado por la probabilidad p dividida por p^* ,

$$\xi \equiv \frac{p}{p^*} \approx \frac{p}{n^{-1}} = np. \quad (4.7)$$

Ahora en la Fig. 4.3 (b) graficamos nuevamente las curvas $\langle \bar{R}(G) \rangle$ pero ahora como función de ξ . Podemos observar que las curvas para diferentes tamaños n colapsan sobre una única *curva universal*. Esto significa que una vez que se fija el producto np , también se fija el índice de Randić promedio en las redes de Erdős-Rényi. Esta afirmación está de acuerdo con los resultados reportados en [66, 68], donde las propiedades espectrales y de transporte de las redes de tipo Erdős-Rényi fueron universales para el parámetro de escalamiento np . Una vez estudiado el índice de Randić nos preguntamos si sería igualmente útil elegir cualquier otro índice topológico para encontrar el parámetro de escalamiento del modelo. Para responder esto, realizamos un estudio estadístico de otros índices topológicos. Elegimos para este fin estudiar el índice armónico $H(G)$, el índice de suma de conectividad $\chi(G)$, el índice modificado de Zagreb $MZ(G)$ y el índice de grado inverso $ID(G)$, definidos en las Ecs. (2.16), (2.13), (2.12) y (2.14) respectivamente.

Calculamos y graficamos estos índices en función de la probabilidad para diferentes ensambles de redes de tipo ER, $G(n, p)$, con diferentes parámetros. En la Fig. 4.4 (a) mostramos el promedio del índice armónico $\langle H(G) \rangle$ en función de la probabilidad p para diferentes tamaños de red n .

De aquí en adelante $\langle X \rangle$ representa el promedio de la cantidad X , donde X puede ser cualquiera de las cantidades aquí estudiadas. En todos los siguientes cálculos, los promedios $\langle X \rangle$ se calculan sobre 10^6 redes aleatorias $G(n, p)$.

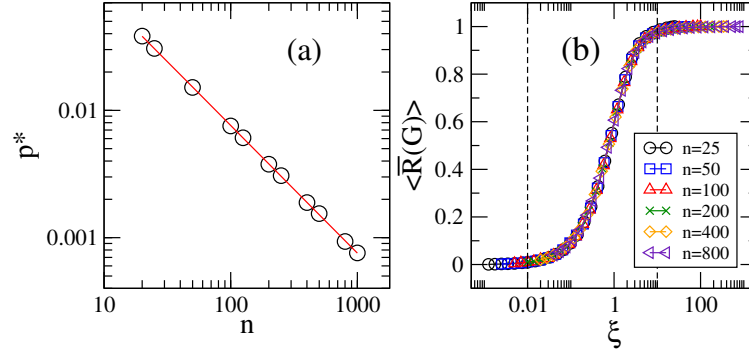


Figura 4.3: (a) p^* como función del tamaño de la red n . La línea roja corresponde al ajuste obtenido con la Ec. (??) con los parámetros $\mathcal{C} = 0.76775$ y $\delta = -1.0021$. (b) $\langle \bar{R}(G) \rangle$ como función de ξ . Las líneas verticales punteadas en (b) indican: El régimen de vértices mayormente aislados ($\xi < 0.01$), el régimen de transición ($0.01 < \xi < 10$) y el régimen de redes casi completas ($\xi > 10$). Figura tomada de [97].

Observamos que las curvas de $\langle H(G) \rangle$, para todos los valores de n aquí considerados, tienen una forma funcional similar a la que se mostró anteriormente para el índice de Randić, y también alcanza su valor máximo en $p = 1$ cuando $k_i = n - 1$ para cualquier vértice, entonces, similarmente al índice de Randić

$$\begin{aligned} H_{max}(G) &= \sum_{u \sim v} \frac{2}{(n-1) + (n-1)} = L_{max} \frac{1}{(n-1)} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n-1} = \frac{n}{2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

En la Fig. 4.4 (b) presentamos el promedio del índice de suma de conectividad $\langle \chi(G) \rangle$. En este caso podemos ver un comportamiento diferente al de los índices armónico y de Randić en el que las curvas en función de p aumentan monótonamente, ahora en el caso del promedio del índice de suma de conectividad $\langle \chi(G) \rangle$ podemos ver que para p pequeño, $\langle \chi(G) \rangle$ aumenta con p hasta acercarse a su valor máximo, una vez alcanzado ese valor máximo $\langle \chi(G) \rangle$ disminuye conforme el valor de p va aumentando, dando a las curvas $\langle \chi(G) \rangle$ vs. p una forma de campana en escala logarítmica.

Se puede observar un comportamiento similar al mostrado por el índice de suma de conectividad para $\langle MZ(G) \rangle$ e $\langle ID(G) \rangle$; ver Figs. 4.4 (c) y (d), respectivamente.

En el caso del índice armónico y el índice de Randić, el valor máximo es fácil de calcular ya que corresponde a $p = 1$, cuando todos los vértices tienen el mismo grado y conocemos el número de conexiones, por otra parte, en el caso de los otros

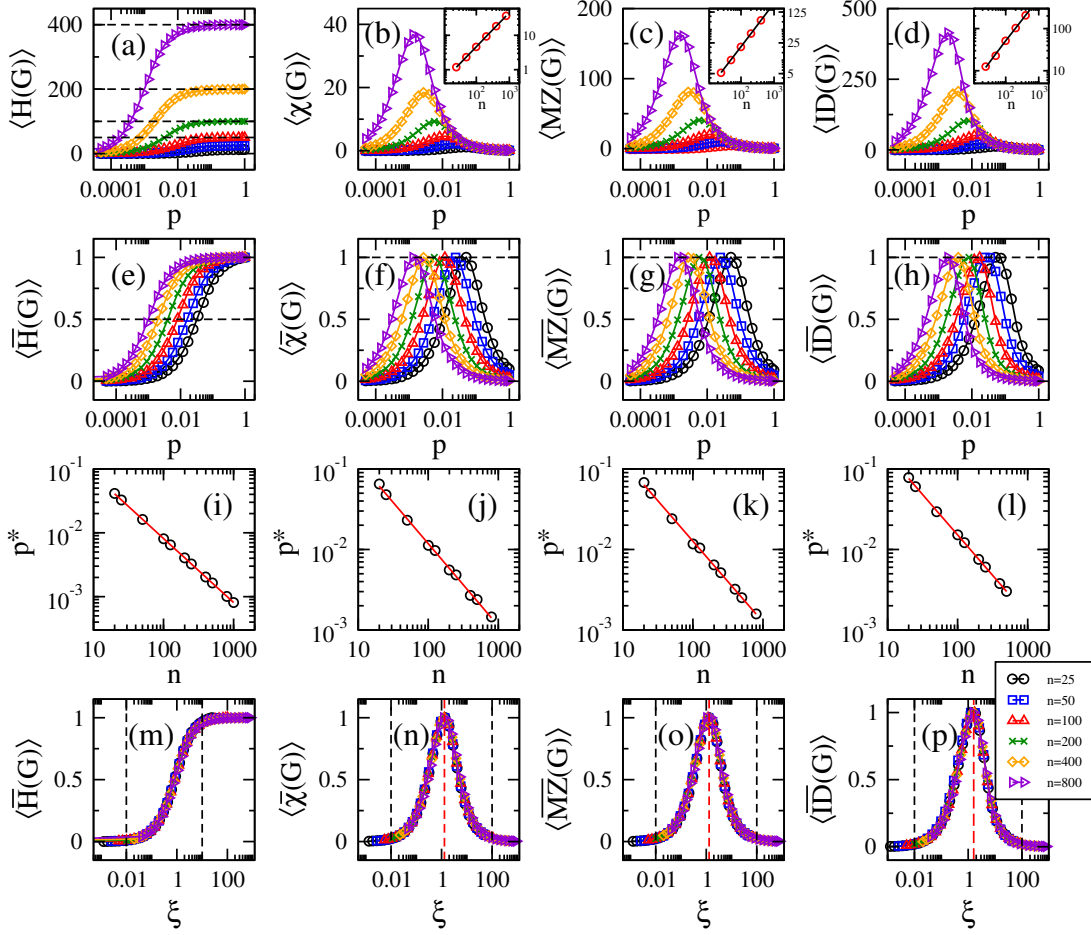


Figura 4.4: (a) Índice armónico promedio $\langle H(G) \rangle$, (b) índice de suma de conectividad promedio $\langle \chi(G) \rangle$, (c) índice modificado de Zagreb promedio $\langle MZ(G) \rangle$ e (d) índice de grado inverso promedio $\langle ID(G) \rangle$ como función de la probabilidad p de redes Erdős-Rényi con diferentes tamaños $n \in [25, 800]$. Las líneas punteadas en (a) indican $n/2$ para $n \in [200, 800]$. En los recuadros en (b-d) reportamos $\max[\langle X \rangle]$ vs. n ; las líneas negras corresponden a los ajustes a los datos realizados con la Ec. (4.9) con los parámetros de ajuste reportados en la Tabla 4.1. (e-h) Índices promedio normalizados a sus valores máximos $\langle \overline{X} \rangle = \langle X \rangle / \max[\langle X \rangle]$ como función de p . Las líneas punteadas en (e,h) indican los valores de $\langle \overline{X} \rangle$ usados para definir p^* . (i-l) p^* en función del tamaño n . Las líneas rojas corresponden a los ajustes a los datos realizados con la Ec. (??) con los parámetros de ajuste reportados en la Tabla 4.2. (m-p) Índices promedio normalizados a su valor máximo $\langle \overline{X} \rangle = \langle X \rangle / \max[\langle X \rangle]$ como función de $\xi = np$. Cada símbolo fue calculado sobre un promedio de 10^6 redes aleatorias $G(n, p)$. Figura tomada de [98].

índices no es posible calcular el valor máximo de manera tan sencilla, por este motivo dada la importancia que en nuestro análisis tiene el valor máximo para normalizar las curvas, obtuvimos los valores máximos de cada índice numéricamente, $(\max[\langle\chi(G)\rangle], \max[\langle MZ(G)\rangle] \text{ y } \max[\langle ID(G)\rangle])$, y los graficamos en los recuadros de las Figs. 4.4 (b-d) en función de n . La tendencia lineal de los datos $\max[\langle X \rangle]$ vs. n nos permite proponer la ecuación

$$\max[\langle X \rangle] = \alpha n + \beta, \quad (4.9)$$

que de hecho describe muy bien los datos numéricos; ver las líneas negras en los recuadros de las Figs. 4.4(b-d). Los valores de los parámetros obtenidos de los ajustes de la Ec. (4.9) a los datos en las Figs. 4.4 (b-d) se reportan en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Valores de α y β obtenidos de los ajustes de la Ec. (4.9) a los datos $\max[\langle X \rangle]$ vs. n de los recuadros en las Figs. 4.4(b-d).

Índice	α	β
Suma de conectividad $\chi(G)$	0.0459	0.0337
Zagreb modificado $MZ(G)$	0.2001	0.2595
Grado inverso $ID(G)$	0.5197	-1.1175

Una vez calculado el valor máximo de cada índice en las Figs. 4.4 (e-h) presentamos nuevamente $\langle H(G) \rangle$, $\langle \chi(G) \rangle$, $\langle MZ(G) \rangle$ y $\langle ID(G) \rangle$, respectivamente, pero ahora normalizados a sus valores máximos: $\langle \overline{X} \rangle = \langle X \rangle / \max[\langle X \rangle]$. De estas figuras podemos ver claramente que el efecto principal de aumentar n es el desplazamiento de las curvas $\langle X \rangle$ vs. p hacia la izquierda en el eje p . Esto es muy parecido al efecto que observamos en el caso del índice de Randić, por lo que utilizamos el mismo procedimiento para encontrar el parámetro de escalamiento: Definimos una cantidad que caracteriza la posición de las curvas en el eje p : Debido a la similitud en la forma funcional de los índices armónico y Randić, para el índice armónico también elegimos el valor de p , que etiquetamos como p^* , para el cual $\langle \overline{H}(G) \rangle \approx 0.5$; ver la línea punteada en la Fig. 4.4(e). Para los otros índices (χ , MZ , y ID), definimos p^* como el valor de p para el cual $\langle \overline{X} \rangle \approx 1$, es decir, el valor de p para el que cada índice alcanza su valor máximo; ver las líneas punteadas en las Figs. 4.4(f,h). Luego, en las Figs. 4.4 (i-l) presentamos p^* como una función de n para

todos los índices. En todos los casos se observa una tendencia lineal de los datos (en escala log-log) lo cual implica una relación de ley de potencia de la misma forma que la Ec. (??). Realizamos ajustes numéricos para encontrar los valores de los parámetros de ajuste para cada índice y los reportamos en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Valores de $\mathcal{C}$ y δ obtenidos de los ajustes de las curvas p^* vs. n de la Fig. 4.4 (i-l) con la Ec. (??).

Índice	$\mathcal{C}$	δ
Armónico	0.8215	-1.0023
Suma de conectividad	1.1836	-1.0051
Zagreb modificado	1.1542	-0.9846
Grado inverso	1.4791	-0.9965
Randić	0.7678	-1.0021

Podemos notar que en todos los casos $\delta \approx -1$. Entonces definimos el parámetro de escalamiento ξ como

$$\xi \equiv \frac{p}{p^*} \propto \frac{p}{n^\delta} \approx \frac{p}{n^{-1}} = np, \quad (4.10)$$

por lo tanto, graficando nuevamente las curvas de los índices promedio normalizados pero ahora como una función de ξ , observamos que las curvas para diferentes tamaños n caen sobre una *curva universal*, véanse las Figs. 4.4 (m-p). Esto significa que una vez que se fija el producto np , los índices armónico, suma de conectividad, Zagreb modificado, grado inverso y Randić promedio (para redes ER) también son fijos.

Podemos ver entonces que cualquiera de estos índices proporciona el mismo parámetro de escalamiento, que además es el mismo que el reportado anteriormente utilizando cantidades espectrales de RMT en [66]. De manera que para redes de tipo ER el parámetro de escalamiento está dado por $\xi = np$ y esperamos entonces que este parámetro fije cualquier cantidad asociada a este tipo de redes.

4.3 Propiedades espectrales

Para verificar la universalidad del parámetro de escalamiento ξ en cantidades espectrales, lo aplicamos a las energías $E(X)$ de las matrices correspondientes a cada uno de

los índices estudiados en la sección anterior. Siguiendo la Ec. (3.13), definimos las matrices asociadas a los índices como

(i) matriz de Randić,

$$(R)_{ij} = \begin{cases} (d_i d_j)^{-1/2} & \text{sí } i \sim j, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (4.11)$$

(ii) matriz armónica,

$$(H)_{ij} = \begin{cases} 2(d_i + d_j)^{-1} & \text{sí } i \sim j, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (4.12)$$

(iii) matriz de suma de conectividad,

$$(\chi)_{ij} = \begin{cases} (d_i + d_j)^{-2} & \text{sí } i \sim j, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (4.13)$$

(iv) matriz de Zagreb modificado,

$$(MZ)_{ij} = \begin{cases} (d_i d_j)^{-1} & \text{sí } i \sim j, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (4.14)$$

(v) matriz de grado inverso,

$$(ID)_{ij} = \begin{cases} d_i^{-2} + d_j^{-2} & \text{sí } i \sim j, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (4.15)$$

Una vez generadas las matrices asociadas a cada índice, las diagonalizamos y calculamos su energía utilizando la Ec. (3.14). En las Figs. 4.5 (a-e) presentamos la energía E de los índices armónico, suma de conectividad, Zagreb modificado, índice de grado inverso y Randić en función de la probabilidad p para redes de tipo ER de diferentes tamaños n . En todos los casos las curvas E vs. p muestran un comportamiento similar para diferentes valores de n : para p pequeño, E aumenta con p hasta alcanzar un valor máximo, entonces E disminuye desde ese máximo al aumentar el valor de p . Ahora, por conveniencia, normalizamos la energía a su valor máximo, $\bar{E} = E / \max(E)$, y la graficamos en las Figs. 4.5 (f-j). Aquí está claro que las curvas $\bar{E}$ vs. p son muy similares pero se desplazaron hacia la izquierda en el eje p en función del tamaño de la red n , de la misma manera que los índices, como queremos verificar el parámetro de escalamiento $\xi = np$, en

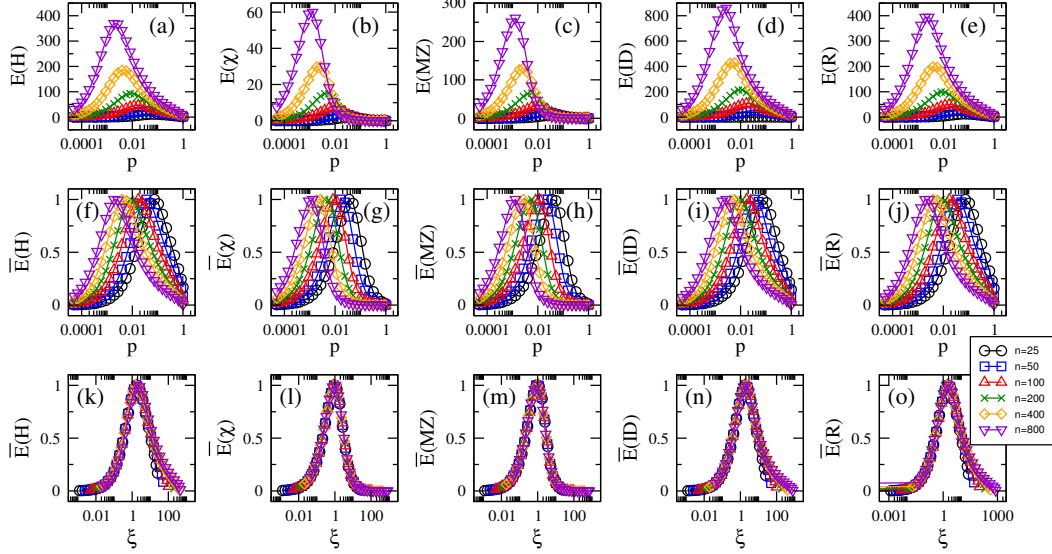


Figura 4.5: Energía de las matrices (a) armónica, (b) suma de conectividad, (c) Zagreb modificado, (d) grado inverso, y (e) Randić como función de la probabilidad p para redes de tipo Erdős-Rényi de tamaño n . (f-j) $\bar{E} = E / \max(E)$ como función de p . (k-o) $\bar{E}$ como función de ξ . Figura tomada de [98].

las Figs. 4.5 (k-o) graficamos $\bar{E}$ en función de ξ y mostramos que todas las curvas caen una encima de la otra (excepto por efectos de tamaño pequeño). Por tanto, confirmamos que las energías de los índices aquí estudiamos también se escalan con el parámetro ξ ; es decir, una vez que ξ se fija la energía normalizada $\bar{E}$ de un índice dado es (estadísticamente) la misma para diferentes combinaciones de parámetros (n, p) .

Además, de las Figs. 4.5 (k-o) podemos concluir que el valor máximo de $\bar{E}$ ocurre en el intervalo $1 < \xi < 2$, en estrecha concordancia con los valores de la transición de delocalización de los autovectores de las redes de tipo Erdős-Rényi reportados en [54, 63–66], $\xi \approx 1.4$. Por lo tanto, la energía asociadas a los índices $E(X)$ parece ser un buen indicador de transición de delocalización para redes aleatorias.

Resumiendo, en este capítulo se presentó el modelo de redes de Erdős-Rényi (ER), $G(n, p)$. Dado que este modelo ya había sido estudiado utilizando el enfoque de RMT, en este capítulo nosotros realizamos el análisis de escalamiento utilizando algunos índices topológicos y encontramos que el parámetro de escalamiento es $\xi = np$ lo cual está

de acuerdo con el resultado encontrado mediante el estudio de propiedades espectrales y de transporte [66]. Adicionalmente validamos el parámetro de escalamiento estudiando las energías asociadas a los índices. Además podemos notar que el parámetro de escalamiento $\xi = np$ de este modelo es muy similar al grado promedio $\langle k \rangle = (n - 1)p$.

Capítulo 5

Redes bipartitas

Existe una gran variedad de sistemas que pueden representarse mediante redes en las que se tienen dos clases diferentes de vértices y solamente se permite la conexión entre vértices de distintas clases. Por ejemplo, podemos construir una red actor–película [99,100] en la que un tipo de vértices son los actores y el otro las películas, de modo que conectamos un actor con una película si el actor participó en dicha película. Otro ejemplo son las redes de polinizadores en las que un tipo de vértices son las plantas y el otro los animales que las polinizan. Este tipo de redes se llaman redes bipartitas.

La aplicación de redes bipartitas tiene una lista muy extensa de ejemplos a mencionar: redes de coautoría [100,101], redes de recomendación [102], redes de contactos heterosexuales [103], redes ecológicas [104,105] entre muchas otras más.

Debido a que las redes bipartitas representan un gran número de redes realistas nos parece relevante estudiar las propiedades de estas redes. En este capítulo proponemos un modelo de red bipartita y mediante el enfoque RMT utilizamos propiedades espectrales para encontrar el parámetro de escalamiento de este modelo.

5.1 Modelo de red bipartita

El modelo de red bipartita que nosotros proponemos estudiar es el siguiente: Consideramos redes bipartitas compuestas por dos conjuntos disjuntos con m y $n - m$ vértices cada uno de modo que no hay vértices adyacentes dentro del mismo conjunto, siendo n el número total de vértices en la red bipartita. Definimos m [$n - m$] como el número de vértices del conjunto más pequeño [más grande]. En este sentido, el caso $m = n/2$ es

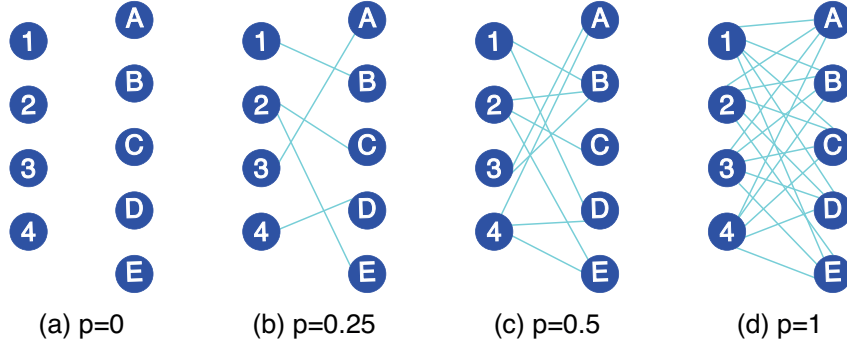


Figura 5.1: Ejemplos de redes bipartitas con $n = 9$ vértices y diferentes probabilidades de conectividad p . El conjunto de mayor tamaño tiene $m = 5$ vértices y es etiquetado con letras, mientras que el otro conjunto tiene $n - m = 4$ vértices etiquetados con números.

un caso límite donde ambos conjuntos tienen el mismo número de vértices, $m = n - m$. Además, el caso $m = 1$ es otro caso límite en el que el conjunto más pequeño consta de un solo vértice. Ahora, cuantificamos la conectividad entre ambos conjuntos de vértices siguiendo como base el modelo ER, utilizando el parámetro de conectividad p , que es la relación de pares de vértices conectados sobre el número total de posibles pares de vértices conectados; es decir, los vértices están aislados cuando $p = 0$ [Ver Fig. 5.1 (a)], mientras que la red bipartita está completa para $p = 1$ [Ver Fig. 5.1 (d)].

Los vértices están conectados aleatoriamente, de modo que el modelo que vamos a considerar son redes bipartitas aleatorias caracterizadas por el conjunto de parámetros (n, m, p) con $1 \leq m \leq n/2$ y $0 \leq p \leq 1$ que denotaremos como $G(n, m, p)$.

En la Fig. 5.1 mostramos ejemplos de este tipo de redes. Podemos ver que al igual que en el caso de redes ER, cuando $p = 0$ tenemos redes totalmente desconectadas, cuando p aumenta el número de conexiones también aumenta, y cuando $p = 1$ se alcanza el número máximo de conexiones, que en este caso será $L_{max} = m(n - m)$ y se obtiene una red completa. Una vez construida la red construimos su matriz de adyacencia. En la Fig. 5.2 mostramos las matrices de adyacencia correspondientes a las redes de la Fig. 5.1. Podemos observar que si etiquetamos los vértices de acuerdo al conjunto al que pertenecen las matrices de adyacencia de las redes bipartitas tiene una estructura de bloques.

Una vez generado el modelo de redes bipartitas aleatorias procedemos al estudio de sus propiedades espectrales.

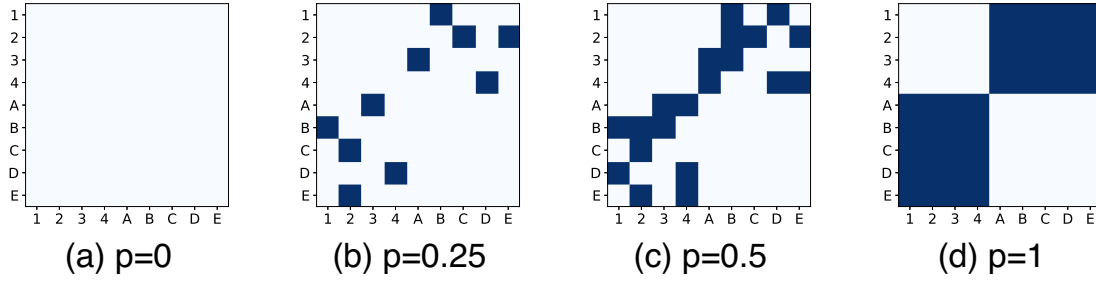


Figura 5.2: Elementos de la matriz de adyacencia distintos de cero para las redes de la Fig. 5.1.

5.2 Análisis de escalamiento

Para el estudio de las propiedades espectrales de este modelo utilizamos la matriz de adyacencia. Mediante programas en Fortran construimos matrices de adyacencia para este tipo de redes, muy similares a las de la Fig. 5.2 pero dado que utilizaremos el enfoque RMT haremos algunas modificaciones a las matrices de adyacencia binarias. Primero agregamos autoconexiones al modelo de red bipartita, es decir, hacemos los elementos de la diagonal principal de la matriz de adyacencia diferentes de cero, después consideramos que todas las aristas tienen pesos aleatorios dados por una distribución normal. Por lo tanto, definimos las matrices de adyacencia correspondientes como miembros del conjunto de $n \times n$ matrices simétricas reales ralas cuyos elementos diferentes de cero son variables aleatorias estadísticamente independientes extraídas de una distribución normal con media cero $\langle A_{ij} \rangle = 0$ y varianza $\langle |A_{ij}|^2 \rangle = (1 + \delta_{ij})/2$.

De acuerdo con esta definición, se obtiene una matriz de adyacencia diagonal aleatoria para $p = 0$, que se conoce como el ensamble de Poisson en términos de RMT.

En la Fig. 5.3, mostramos ejemplos de matrices de adyacencia de redes bipartitas aleatorias con $n = 100$ vértices y algunas combinaciones de m y p considerando las autoconexiones.

Para caracterizar los autovectores de redes bipartitas aleatorias utilizamos la entropía de Shannon definida en la Ec. (3.4). Utilizando diagonalización numérica exacta calculamos los autovectores normalizados Ψ^i y los autovalores λ_i ($i = 1 \dots n$) de las matrices de adyacencia de ensambles grandes de redes bipartitas aleatorias caracterizadas por el conjunto de parámetros (n, m, p) .

En la Fig. 5.4, presentamos las entropías de Shannon S_i de los autovectores de

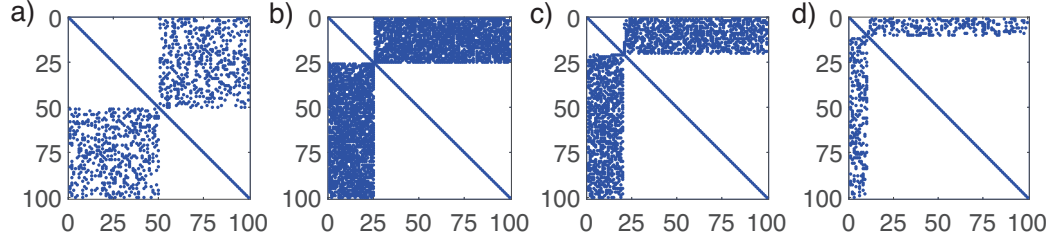


Figura 5.3: Elementos de la matriz de adyacencia distintos de cero de redes bipartitas aleatorias para algunas combinaciones de m y p : (a) $m = n/2$ y $p = 0.2$, (b) $m = n/4$ y $p = 0.75$, (c) $m = n/5$ y $p = 0.5$, (d) $m = n/10$ y $p = 0.25$. En todos los casos $n = 100$. Figura tomada de [106].

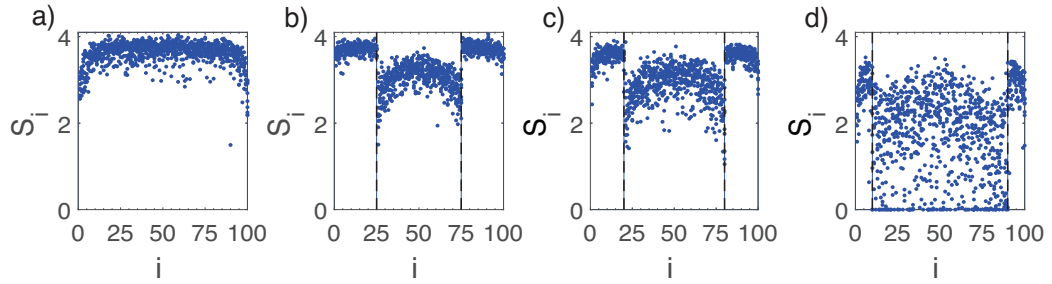


Figura 5.4: Entropía de Shannon S_i de los autovectores correspondientes a diez realizaciones de matrices de adyacencia con los parámetros de las matrices de adyacencia que se muestran en la Fig. 5.3. Las líneas punteadas en los paneles (b-d) separan grupos de entropías caracterizados por diferentes valores promedio. Figura tomada de [106].

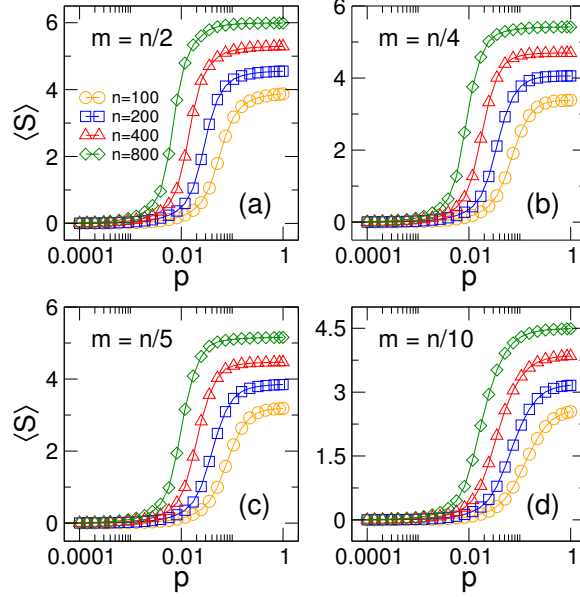


Figura 5.5: Entropía de Shannon promedio $\langle S \rangle$ como función del parámetro de conectividad p para redes bipartitas aleatorias (de tamaños que van desde $n = 100$ a 800) para varios valores de m (como se indica en cada panel). Cada símbolo fue calculado sobre un promedio de 10^6 autovectores. Figura tomada de [106].

diez realizaciones de matrices de adyacencia con los mismos parámetros que las matrices de adyacencia mostradas en la Fig. 5.3. Cuando $m = n/2$ todas las filas de la matriz de adyacencia tienen el mismo número promedio de elementos fuera de la diagonal distintos de cero, [Ver Fig. 5.3 (a)], por lo que se espera que los autovectores correspondientes sean equivalentes y deberían tener entropías similares; esto se puede verificar en la Fig. 5.4 (a). Por el contrario, para cualquier $m < n/2$, m filas de la matriz de adyacencia tienen un número mayor de elementos fuera de la diagonal distintos de cero que las restantes $n - m$ filas, ver Figs. 5.3 (b-d). Por lo tanto, como se puede ver en las Figs. 5.4 (b-d), las entropías de los autovectores correspondientes pueden agruparse en dos conjuntos caracterizados por diferentes valores promedio $\langle S \rangle$ (ver las líneas punteadas en estos paneles, que separan los dos conjuntos que tienen diferentes promedios). A pesar de estas diferencias, teniendo en cuenta que queremos usar la entropía promedio para encontrar propiedades de escalamiento en redes bipartitas aleatorias, y que para este propósito necesitamos una sola cantidad independientemente de la red específica, calculamos promedios sobre todos los autovectores disponibles, teniendo en cuenta la contribución de ambos conjuntos de autovectores.

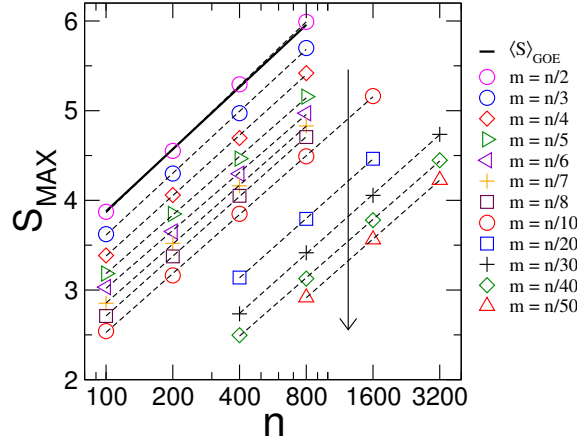


Figura 5.6: Valores máximos de la entropía de Shannon S_{MAX} como función del tamaño de la red n para varios valores de m . La línea negra corresponde a $\ln(n/2.07)$, el valor aproximado de $\langle S \rangle_{\text{GOE}}$. La flecha indica el decremento de m . Figura tomada de [106].

En la Fig. 5.5 presentamos la entropía de Shannon promedio $\langle S \rangle$ como función del parámetro de conectividad p para los autovectores de redes bipartitas aleatorias y para varias combinaciones de parámetros. Observamos que las curvas de $\langle S \rangle$, para cualquier combinación de n y m , tienen una forma funcional muy similar en función de p : las curvas $\langle S \rangle$ muestran una transición suave de aproximadamente cero a S_{MAX} cuando p aumenta de $p \sim 0$ (vértices en su mayoría aislados) a uno (redes bipartitas completas).

De la definición (3.4), se deduce que $\langle S \rangle = 0$ cuando $p = 0$, ya que los autovectores de las matrices de adyacencia (diagonales) de nuestro modelo de red bipartita aleatoria tienen solo un componente diferente de cero y su magnitud es igual a uno. Por otro lado, para $p = 1$, la red bipartita está completa y $\langle S \rangle$ obtiene su valor máximo, S_{MAX} , para una combinación dada de n y m . Podemos ver que en nuestro modelo el número máximo de elementos de la matriz de adyacencia distintos de cero se obtiene cuando $p = 1$ y $m = n/2$, pero aún en este caso la mitad de los elementos de la matriz de adyacencia fuera de la diagonal son iguales a cero. Por lo tanto, las matrices de adyacencia de nuestras redes bipartitas aleatorias nunca reproducen el ensamble ortogonal gaussiano (GOE) de la RMT (matrices completamente llenas de números aleatorios) por lo que no esperamos que el valor máximo de la entropía para este modelo coincida con S_{GOE} . En la Fig. 5.6 reportamos el valor máximo de la entropía de Shannon S_{MAX} , es decir, el valor de $\langle S \rangle$ en $p = 1$, de redes bipartitas aleatorias para varias combinaciones de n y m .

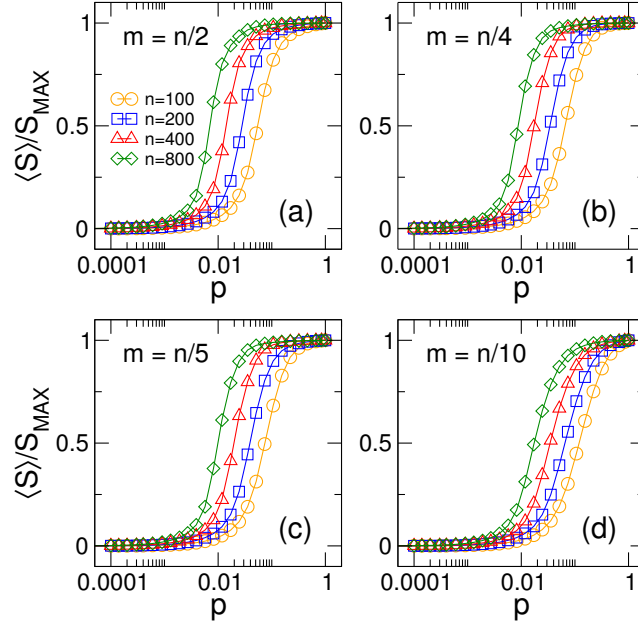


Figura 5.7: Entropía de Shannon promedio $\langle S \rangle$ normalizada a S_{MAX} como función del parámetro de conectividad p . Mismos datos que en la Fig. 5.5. Figura tomada de [106].

Al graficar S_{MAX} esperabamos notar $S_{\text{MAX}} < \langle S \rangle_{\text{GOE}}$, donde $\langle S \rangle_{\text{GOE}} \approx \ln(n/2.07)$ es la entropía promedio de los autovectores (aleatorios y delocalizados) del GOE. Sin embargo, sorprendentemente observamos que $S_{\text{MAX}} \approx \langle S \rangle_{\text{GOE}}$ para $m = n/2$, mientras que $S_{\text{MAX}} < \langle S \rangle_{\text{GOE}}$ ocurre para cualquier valor $m < n/2$, ver Fig. 5.6. Además, en la Fig. 5.6, podemos ver claramente que

$$S_{\text{MAX}} \propto \ln(n) . \quad (5.1)$$

Por lo tanto, podemos concluir que la configuración de entropía máxima en nuestro modelo de red bipartita aleatoria corresponde a $m = n/2$ y $p = 1$ para lo cual se observan características del GOE para $\langle S \rangle$ y esperamos que también para otras cantidades.

Ahora, para facilitar nuestro análisis, en la Fig. 5.7 graficamos nuevamente $\langle S \rangle$ pero normalizado a S_{MAX} . En la Fig. 5.7 podemos notar que las curvas $\langle S \rangle / S_{\text{MAX}}$, graficadas en escala semi-logarítmica, se desplazan hacia la izquierda en el eje p al aumentar n , esto nos permite suponer la existencia de un parámetro de escalamiento que depende de n . Para comprobar esta hipótesis y encontrar dicho parámetro de escalamiento, primero definimos una cantidad que permita caracterizar la posición de las curvas $\langle S \rangle / S_{\text{MAX}}$ en el eje p : elegimos el valor de p , que etiquetamos como p^* , para el cual $\langle S \rangle / S_{\text{MAX}} \approx 0.5$ que es el

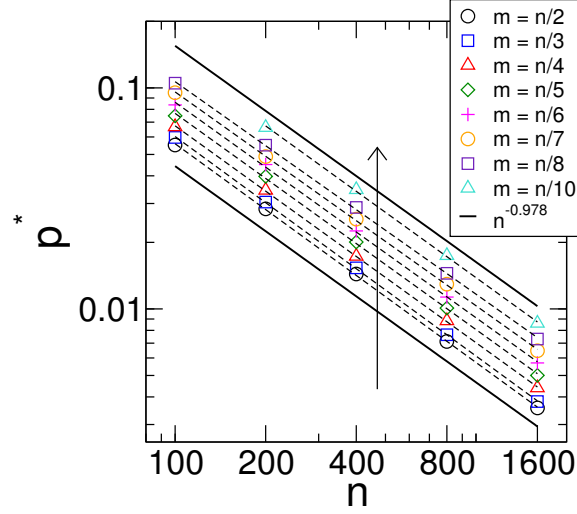


Figura 5.8: Punto de transición localización–delocalización, p^* , (definido como el valor de p para el cual $\langle S \rangle / S_{\text{MAX}} \approx 0.5$) como función del tamaño de la red bipartita n para varios valores de m . Las líneas punteadas corresponden a los ajuste a los datos realizados con la Ec. (5.2). La flecha indica el decremento de m . Figura tomada de [106].

punto de transición de localización a delocalización. En la Fig. 5.8 graficamos p^* en función de n para varios valores de m . La tendencia lineal de los datos (en escala logarítmica) en la Fig. 5.8 implica una relación de ley de potencia de la forma

$$p^* = Cn^\delta. \quad (5.2)$$

Con la Ec. (5.2) ajustamos las curvas p^* vs. n (líneas punteadas en la Fig. 5.8) y observamos que efectivamente esta ecuación proporciona muy buenos ajustes a los datos. En la Tabla 5.1 reportamos los valores de δ obtenidos con la Ec. (5.2). Para el parámetro de escalamiento utilizamos el valor promedio de δ obtenido de los ajustes, el cual corresponde a -0.978 como se indica en la última columna de la Tabla 5.1. En la Fig. 5.8 podemos observar que las líneas sólidas negras proporcionales a $n^{-0.978}$ siguen una buena relación con los ajustes para los diferentes valores de m (líneas punteadas). A partir de esta observación podemos proponer el parámetro ξ , que definimos como la razón entre el parámetro de conectividad y el punto de transición de localización a delocalización como el parámetro de escalamiento de las curvas $\langle S \rangle / S_{\text{MAX}}$ vs. p :

$$\xi = \frac{p}{p^*} \propto \frac{p}{n^{\langle \delta \rangle}} \approx pn^{0.978}. \quad (5.3)$$

m/n	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10	$\langle \delta \rangle$
δ	0.9912	0.9874	0.9857	0.9818	0.9727	0.9713	0.9702	0.968	0.978

Tabla 5.1: Valores de la potencia δ obtenidos de los ajustes, con la Ec. (5.2), a las curvas p^* vs. n de la Fig. 5.8.

Al graficar nuevamente las curvas $\langle S \rangle / S_{\text{MAX}}$ vs. p pero ahora como una función de ξ , observamos que las curvas para diferentes tamaños de redes bipartitas n colapsan en una sola curva, ver Fig. 5.9. Es decir, llegamos a la conclusión de que, para una razón m/n dada, ξ fija las propiedades de localización de los autovectores de las matrices de adyacencia de las redes bipartitas aleatorias, además podemos observar que cuando $\xi < 1/10$ los autovectores están localizados y cuando $10 < \xi$ los autovectores están extendidos, mientras que la transición de localización a delocalización ocurre en el intervalo $1/10 < \xi < 10$.

Hasta aquí podemos decir que logramos escalar las curvas de entropía de Shannon para redes bipartitas aleatorias, como se muestra en la Fig. 5.9, aunque todavía hay una dependencia de esas curvas universales con la razón m/n . Para mostrar claramente esto, en la Fig. 5.10 mostramos las curvas escaladas de la entropía de Shannon para varios valores de m/n en la región de transición de localización a delocalización. Aquí podemos observar que cuanto mayor es la razón m/n , más aguda es la transición de localización a delocalización. Entonces, caracterizamos el ancho de la región de transición, que llamamos Δ , como el ancho total a la mitad del máximo de las funciones $d\langle S \rangle / d\xi$ vs. ξ . En el recuadro de la Fig. 5.10 reportamos Δ en función de m/n . A partir de esta figura, observamos un claro aumento de Δ al disminuir la razón m/n , un aumento que parece saturarse para valores pequeños de $m/n \sim 1/100$.

Una vez que hemos encontrado que ξ escala las propiedades de autovectores (caracterizadas por su entropía de Shannon) del modelo de redes bipartitas aleatorias aquí estudiados, es natural esperar que otras propiedades (es decir, propiedades espectrales, propiedades dinámicas, propiedades de transporte, etc.) del modelo también escalen con el mismo parámetro. Esto es lo que exploramos a continuación.

5.2.1 Propiedades espectrales

Ahora validamos que el parámetro ξ es el parámetro de escalamiento inspeccionando de cerca los autovalores de nuestro modelo.

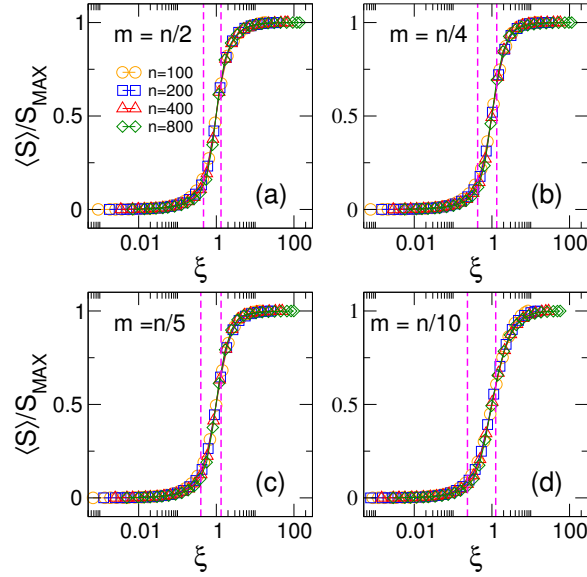


Figura 5.9: Entropía de Shannon promedio $\langle S \rangle$ normalizada a S_{MAX} en función del parámetro de escalamiento ξ , ver Ec. (5.3). Mismos datos de la Fig. 5.5. Las líneas verticales punteadas corresponden al ancho de la región de transición Δ definida como el ancho completo a la mitad del máximo de las funciones $d\langle S \rangle / d\xi$ vs. ξ . Figura tomada de [106].

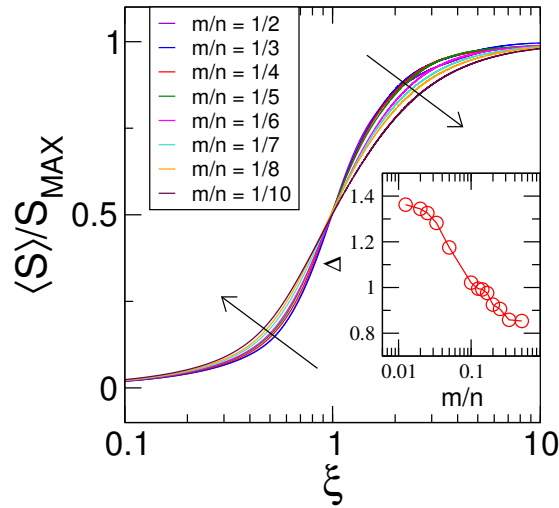


Figura 5.10: Curvas escaladas para la entropía de Shannon para redes bipartitas aleatorias con varios valores de m/n . Las flechas indican el decremento de m/n . Todas las curvas corresponden a datos interpolados con $n = 800$. Recuadro: Ancho de la región de transición Δ como función de m/n . Figura tomada de [106].

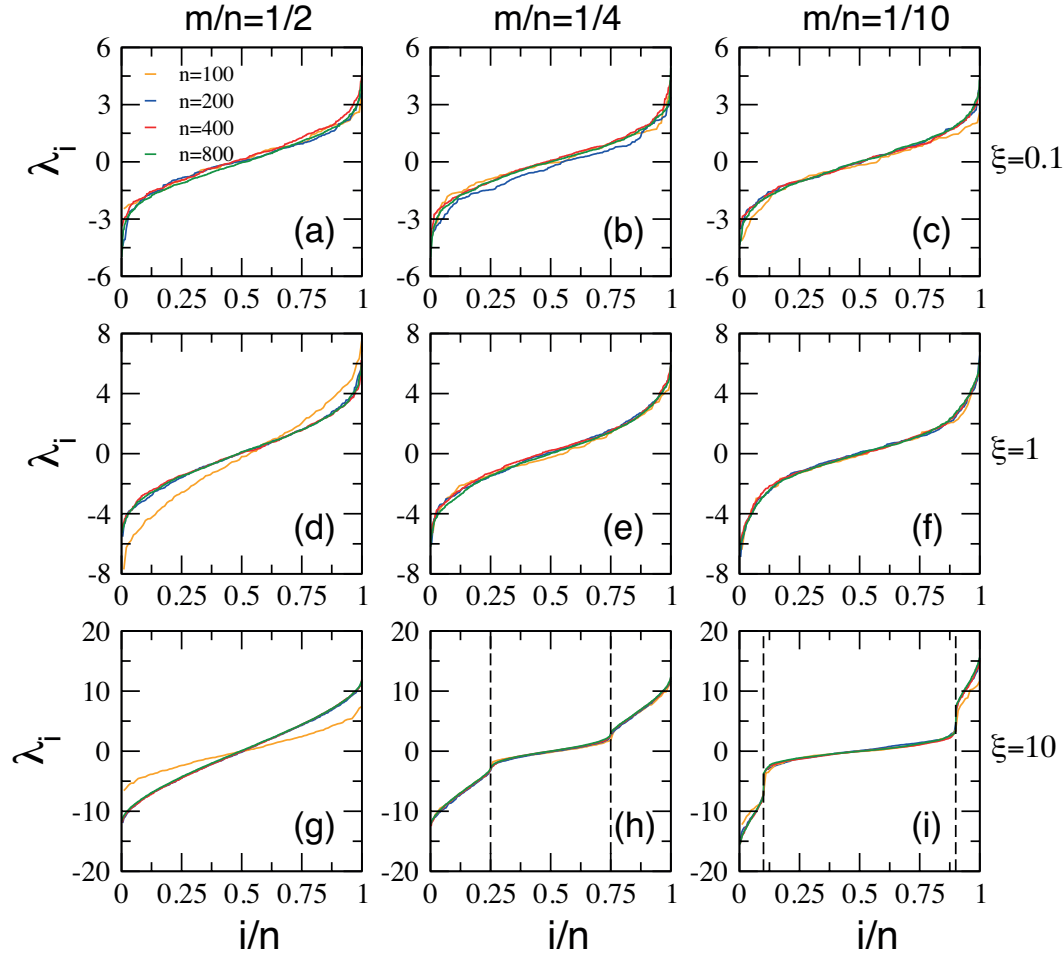


Figura 5.11: Autovalores λ_i de matrices de adyacencia de redes bipartitas aleatorias para varias combinaciones de parámetros (m, n, p) . Las columnas [filas] son caracterizadas por un valor fijo de m/n [ξ]. Se considera la realización de una sola red para cada curva. Las líneas punteadas en los paneles (h) y (i) coinciden con las de las Figs. 5.4(b) y 5.4(d), respectivamente. Figura tomada de [106].

En la Fig. 5.11, presentamos los espectros de las matrices de adyacencia de redes bipartitas aleatorias para varias combinaciones de los parámetros m , n y p . Cada panel se caracteriza por una razón fija m/n y un parámetro de escalamiento fijo ξ . A partir de los resultados de la sección anterior, uno debería esperar que los cuatro espectros, reportados en cada uno de los paneles de la Fig. 5.11 y correspondientes a diferentes tamaños de red n , caigan uno encima del otro. Este es de hecho el caso, excepto por un efecto de tamaño pequeño claramente observado en la Fig. 5.11 (d, g) cuando $n = 100$. También es interesante observar que la estructura de bloques de la matriz de adyacencia se revela claramente en los espectros, para valores grandes de ξ y una razón pequeña m/n , ver Fig. 5.11 (h-i).

Para caracterizar las propiedades espectrales del modelo de red bipartita aleatoria, usamos la razón de espaciamientos entre autovalores consecutivos r , definidos en la Ec. (3.5).

En la Fig. 5.12 se muestran histogramas de $P(r)$ para redes bipartitas aleatorias con varias combinaciones de parámetros (m, n, p) . Al igual que en la Fig. 5.11, cada panel se caracteriza por una razón fija m/n y un parámetro de escalamiento fijo ξ . Con esta figura verificamos la invariancia de $P(r)$ para ξ fijo, excepto por un efecto de tamaño pequeño que es más evidente cuando $r \rightarrow 0$; en los recuadros en los paneles (a-c, g-i) podemos observar la convergencia a un $P(r)$ estable para n suficientemente grande. En la Fig. 5.12 graficamos también los límites para $P(r)$ en el caso Poisson y GOE, dados por las Ecs. (3.6) y (3.7) respectivamente. De la Fig. 5.12, observamos la transición de Poisson a GOE en la forma de $P(r)$ al aumentar ξ . Además, en los bordes de la transición, es decir, en $\xi = 0.1$ y $\xi = 10$, la forma de $P(r)$ está bien descrita por las correspondientes predicciones de la RMT en los límites de Poisson y GOE, respectivamente. Esto confirma nuestra definición de la región de transición de localización a delocalización: $0.1 < \xi < 10$. Mientras que, como se esperaba, para valores intermedios de ξ , ver, por ejemplo, la Fig. 5.12 (d-f), $P(r)$ tiene una forma que es intermedia entre $P_P(r)$ y $P_{GOE}(r)$. Finalmente, recordando que para cualquier $m/n < 2$ las matrices de adyacencia correspondientes tienen más elementos fuera de la diagonal nulos que no nulos (ver Fig. 5.3), podemos mencionar que es bastante sorprendente que incluso para $m/n = 1/10$ $P(r)$ esté muy cerca de $P_{GOE}(r)$ cuando ξ es grande, ver Fig. 5.12 (i). Aun cuando en el caso de los autovectores encontramos que $S_{\text{MAX}} \approx S_{\text{GOE}}$ solo para $m/n = 1/2$, mientras que $S_{\text{MAX}} < S_{\text{GOE}}$ para cualquier $m/n < 1/2$. Por lo tanto, para nuestro modelo de red bipartita aleatoria, podemos afirmar que $P(r)$ es menos sensible a las desviaciones de las estadísticas GOE que $\langle S \rangle$.

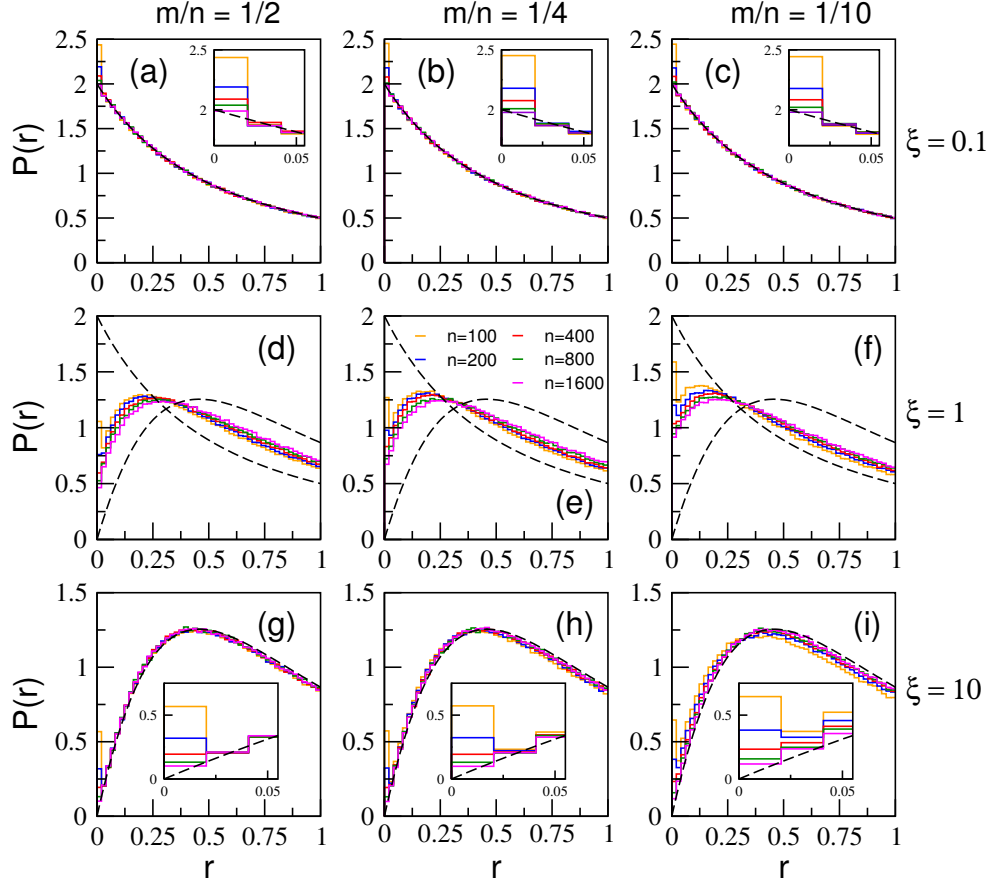


Figura 5.12: Distribución de razones de espaciamentos entre autovalores consecutivos $P(r)$ para los autovalores de la matriz de adyacencia de redes bipartitas aleatorias con varias combinaciones de parámetros (m, n, p) . Las columnas [filas] son caracterizadas por valores fijos de m/n [ξ]. Cada histograma se construyó utilizando 10^6 razones. Las líneas punteadas en los paneles (a-c) [(g-i)] corresponden a las predicciones de RMT para $P(r)$ en los límites Poisson [GOE], ver Ec. (3.6) [Ec. (3.7)]. En los paneles (d-f) ambas ecuaciones, Ec. (3.6) y (3.7), se muestran con líneas punteadas. Los recuadros son ampliaciones de los paneles principales para r cercano a cero. Figura tomada de [106].

5.3 Aplicación a la evaluación de calidad de agua

Como ya se mencionó anteriormente una gran cantidad de sistemas biológicos pueden ser representados mediante redes bipartitas. En evaluación ambiental es común inferir algunas propiedades ecológicas de un sistema midiendo la presencia o ausencia de ciertos bioindicadores. Particularmente en estudios de calidad del agua se utilizan organismos sensibles a un determinado contaminante como bioindicadores para evaluar el nivel de calidad del agua. Esta presencia de bioindicadores puede representarse mediante una red bipartita en la que los bioindicadores (que en este caso pueden ser familias de invertebrados) son un conjunto y el otro conjunto está dado por los niveles de tolerancia a la contaminación de dichos bioindicadores. En este caso podríamos decir que a mayor número de bioindicadores hay una mayor calidad del agua, en términos de redes, a mayor número de conexiones en la red mayor es la calidad del agua.

Con la finalidad de caracterizar la presencia o ausencia de estos bioindicadores se han propuesto varios índices que resultan de una combinación de algunos parámetros como pueden ser los niveles de tolerancia, la abundancia de los bioindicadores, el número de familias de bioindicadores con los mismos valores de tolerancia, entre otros. Estos índices se conocen como *índices bióticos* y son muy útiles ya que sintetizan las características de los bioindicadores presentes mediante un valor numérico el cual permite asociar estas características con un nivel de calidad de agua. Una gran cantidad de índices bióticos han sido propuestos como el índice BMWP [107], el ASPT [108], el índice de diversidad de Simpson [109], entre otros. Algunos pueden ser más simples que otros ya sea porque involucran menos parámetros o porque su cálculo puede ser más sencillo.

En esta sección proponemos utilizar la curva universal de entropía promedio de redes bipartitas en función del parámetro de escalamiento ξ obtenida en la sección anterior [ver Fig. 5.10] para calibrar los niveles de calidad del agua, en lugar de utilizar los índices bióticos.

Nuestra propuesta es dividir la curva de entropía universal en el número de niveles en los que deseamos clasificar la calidad del agua y a partir de esta partición encontrar los valores de ξ [p] que separan estos intervalos.

Como ejemplo del uso de la curva universal en la calibración de niveles de calidad de agua consideramos los datos de la red de bioindicadores dada en [110], donde se estudia la calidad de agua del reservorio Guájaro, Colombia, de acuerdo con la presencia de 30 tipos

de bioindicadores y 8 niveles de tolerancia. Vemos entonces que en este caso la red bipartita correspondiente será de tamaño $n = 38$ con $m = 8$. Recordemos que la curva universal de entropía tiene una dependencia de la razón m/n , entonces según la red de bioindicadores utilizada debemos tener en cuenta el valor de m/n , en este caso $m/n = 8/38 \approx 0.2105$ que no corresponde con ninguna de las razones m/n reportadas en la sección anterior, entonces para obtener una curva universal para esta razón m/n construimos curvas de entropía correspondientes a diferentes tamaños de redes con $m/n = 8/38$. Las normalizamos y obtenemos la curva universal. En la Fig. 5.13 (a) mostramos la curva universal para $m/n = 8/38$.

De acuerdo con lo reportado en [110] la calidad de agua es mayor cuando se tienen más conexiones, esto lo podemos traducir al máximo de la entropía, mientras que la calidad más baja se da para menos número de conexiones o entropía mínima. Consideramos entonces que la calidad del agua es baja cuando la entropía está en el régimen localizado y excelente cuando la entropía de la red está en el régimen delocalizado.

Nos interesa clasificar los niveles de calidad del agua como: baja, regular, buena, muy buena y excelente, entonces asociamos el intervalo de baja calidad con $\langle S \rangle / S_{max} \leq 0.05$ y el de excelente calidad con $\langle S \rangle / S_{max} \geq 0.95$, para obtener los otros intervalos dividimos la región de transición en tres secciones de acuerdo a su valor de entropía normalizada y seccionamos así las regiones de calidad de agua como: baja, regular, buena, muy buena y excelente, como se puede apreciar en la Fig. 5.13 (b). Utilizando interpolación numérica obtenemos los intervalos de ξ para estas regiones de calidad de agua y a partir de ξ obtenemos los valores de conectividad p que las redes bipartitas de bioindicadores deben tener para pertenecer a cada región de calidad de agua. Estos valores se reportan en la Tabla 5.2.

De esta manera podemos utilizar las curvas universales de redes bipartitas para crear intervalos de clasificación, como en este caso de presencia de bioindicadores. Estos intervalos nos pueden ser útiles ya que por ejemplo, si al estudiar una muestra de agua del reservorio de Guájaro encontramos que su correspondiente red bipartita está formada por 24 aristas, como sabemos que el número máximo de conexiones de esa red es $m(n - m) = 8(30) = 240$, entonces su conectividad es $p = 24/240 = 0.1$, y viendo la Tabla 5.2 encontramos que podemos clasificar esa muestra como agua de calidad regular, similarmente si requerimos agua que se encuentre en la región de calidad muy buena, de la Tabla 5.2 sabemos que debe tener un valor de $\xi \geq 1.3$ o $p \geq 0.219$, entonces de los datos que conocemos

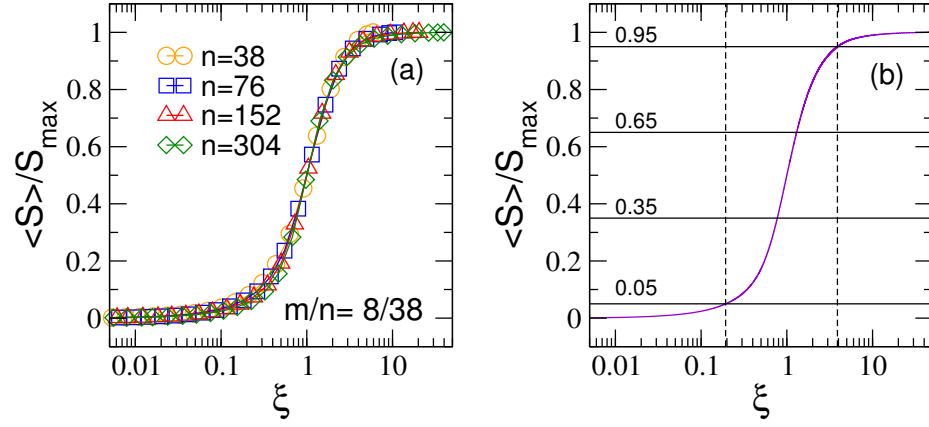


Figura 5.13: (a) Entropía de Shannon promedio $\langle S \rangle$ normalizada a S_{max} en función del parámetro de escalamiento ξ para redes bipartitas aleatorias con $m/n = 8/38$. (b) Curva universal $\langle S \rangle / S_{max}$ vs. ξ . Las líneas horizontales indican las diferentes regiones de calidad del agua. Las líneas punteadas verticales indican $\xi = 193$ y $\xi = 3.88$ delimitando la baja y excelente calidad de agua, respectivamente. Ver Tabla 5.2. Figura tomada de [111].

Tabla 5.2: Calidad del agua de acuerdo con los valores de $\langle S \rangle$, ξ y p según los datos de bioindicadores en el reservorio de Guájaro, Colombia reportados en [110].

Calidad del agua	$\langle S \rangle$	ξ	p
Baja	$0.00 < \langle S \rangle \leq 0.05 S_{max}$	$0.00 < \xi \leq 0.193$	$0.00 < p \leq 0.033$
Regular	$0.05 < \langle S \rangle \leq 0.35 S_{max}$	$0.193 < \xi \leq 0.774$	$0.033 < p \leq 0.131$
Buena	$0.35 < \langle S \rangle \leq 0.65 S_{max}$	$0.774 < \xi \leq 1.300$	$0.131 < p \leq 0.219$
Muy buena	$0.65 < \langle S \rangle \leq 0.95 S_{max}$	$1.300 < \xi \leq 3.888$	$0.219 < p \leq 0.656$
Excelente	$0.95 < \langle S \rangle \leq S_{max}$	$3.88 < \xi \leq n$	$0.656 < p \leq 1$

de este sistema podemos decir que para que el agua se encuentre en la región de buena calidad, la red de bioindicadores y niveles de tolerancia debe tener al menos $m(n-m)p \approx 53$ conexiones de manera que al estudiar la muestra si encontramos que su correspondiente red tiene al menos 53 aristas sabemos que cumple con los requerimientos necesarios.

En resumen, en este capítulo estudiamos redes bipartitas caracterizadas por los parámetros: p , n y m . Utilizando la entropía de Shannon encontramos que el parámetro de escalamiento para este modelo está dado por $\xi = pn^{0.978}$ para m/n fijo, muy similar a las redes ER. Verificamos nuestro escalamiento demostrando que para un ξ fijo, las propiedades espectrales (caracterizadas por la distribución de la razón de espaciamientos entre autovalores consecutivos) del modelo también son universales, es decir, no dependen de los valores específicos de los parámetros de la red. Nuestro análisis proporciona una manera de predecir las propiedades de localización de las redes bipartitas aleatorias: para $\xi < 0.1$, los autovectores están localizados, la transición de localización a delocalización se produce para $0.1 < \xi < 10$, mientras que cuando $10 < \xi$ los autovectores se extienden.

Finalmente mostramos una aplicación de la curva universal de la entropía de Shannon como una curva de calibración de calidad del agua basada en la presencia de ciertos bioindicadores.

Capítulo 6

Redes mutualistas

Una vez construidas las redes bipartitas es posible construir otras redes asociadas a ellas relacionando los vértices que pertenecen a un mismo conjunto. Por ejemplo, a partir de la red actor-película mencionada en el capítulo anterior, podemos construir otra red que revele quién actuó con quién: si dos actores están conectados en al menos una película común en la red bipartita original, entonces se crea un enlace en una nueva red informando que han colaborado al menos una vez. Debido al hecho de que todos los vértices son del mismo tipo en el nuevo mapeo, la nueva red generada a menudo se denomina *proyección de un modo* de la estructura bipartita [101]. Para cualquier red bipartita, hay dos proyecciones monomodo, una asociada con cada conjunto de vértices. En el ejemplo de la red actor-película, la otra proyección monomodo se puede obtener conectando dos películas cualesquiera que tengan al menos un actor en común.

Las proyecciones monomodo son útiles, ya que permiten investigar aspectos que pueden estar ocultos o simplemente no aparentes en la red bipartita original. Por ejemplo, la dinámica de la población de las redes de plantas y polinizadores depende fuertemente tanto de la red bipartita como de competencias intragrupalas [104]. Por un lado las conexiones en una comunidad ecológica pueden mapearse empíricamente mediante observaciones de campo; es decir, la información de que una determinada planta es polinizada por una determinada especie animal puede almacenarse en una red bipartita donde los dos tipos de vértices son plantas y polinizadores [104], mientras que las competencias intragrupalas que cuantifican la fuerza con que las plantas y los polinizadores compiten entre ellos por los recursos necesitan ser inferidos a través de proyecciones monomodales en los grupos de polinizadores y plantas [104].

No hay una sola forma de proyectar las redes bipartitas para obtener las conexiones intragrupalas, en este contexto los modelos dinámicos tradicionales adoptan una descripción de campo medio creando un escenario en el que todas las plantas y polinizadores compiten por igual por los recursos [112]. Se ha argumentado que esta es una suposición muy fuerte, ya que descuida por completo la rica estructura de las interacciones mutualistas bipartitas observadas en las comunidades ecológicas reales [113]. Para superar esta limitación, se han introducido recientemente esquemas de competencia heterogéneos [113] que consisten en proyectar las conexiones bipartitas como se describió anteriormente para la red actor-película: si dos polinizadores (plantas) dados comparten al menos una planta (polinizador) en común, se crea un enlace entre ellos que representa su interacción competitiva. En ambos escenarios de competencia, homogéneos y heterogéneos, la red subyacente a las interacciones del modelo dinámico no es la estructura bipartita original, sino más bien la unión de este último con sus proyecciones monomodo. A la red que representa la unión de una red bipartita con sus proyecciones monomodo la llamaremos *red mutualista*.

En el capítulo anterior presentamos las propiedades espectrales de redes aleatorias bipartitas, una vez realizado este estudio y pensando en lo poco que se sabe sobre la estadística de las propiedades espectrales de las redes mutualistas en este capítulo se presenta una caracterización de los espectros de redes mutualistas utilizando principalmente la razón entre espaciamientos de autovalores consecutivos, la entropía de Shannon y el índice de Randić.

6.1 Modelo de red mutualista

Comenzamos con una red bipartita construida como en el Capítulo 5, la cual está compuesta por dos conjuntos disjuntos con m y $n-m$ vértices, sin vértices adyacentes dentro del mismo conjunto, siendo n el número total de vértices en la red bipartita y cuantificando la conectividad entre ambos conjuntos mediante el parámetro p . Ahora construimos la red mutualista estableciendo conexiones entre elementos de un mismo conjunto cuando están conectados a un vértice común del otro conjunto. En la Fig. 6.1(a) podemos ver un ejemplo de red bipartita con 9 vértices, 4 en un conjunto etiquetados con números y 5 en el otro conjunto etiquetados con letras y un parámetro de conectividad $p = 0.3$. En la Fig. 6.1 (b) se muestra la red mutualista correspondiente a la red bipartita de la Fig. 6.1 (a). De la red

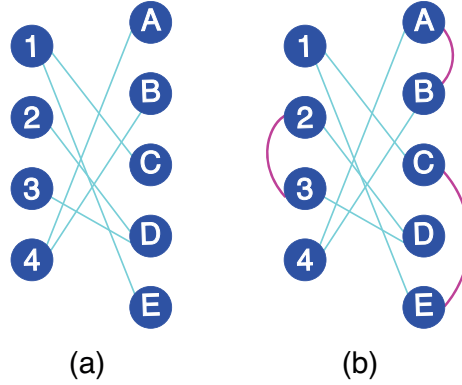


Figura 6.1: Ejemplo de (a) red bipartita representando la interacción entre los dos conjuntos con $n = 9$, $m = 4$ y $p = 0.3$, y (b) red mutualista asociada a la red bipartita de (a), las conexiones correspondientes a proyecciones monomodo están representadas en color magenta.

bipartita podemos ver que los vértices 2 y 3 están conectados al vértice D , entonces en la red mutualista se agrega una conexión entre los vértices 2 y 3, similarmente los vértices A y B tienen en común una conexión al vértice 4, entonces se agrega una arista entre los vértices A y B . En la Fig. 6.1 (b) las aristas de la red mutualista resultantes de las proyecciones monomodo se marcan en color magenta.

6.1.1 Análisis de escalamiento de redes mutualistas

Para estudiar las propiedades espectrales de este modelo seguimos el enfoque RMT; de manera que los elementos de la matriz de adyacencia tendrán pesos aleatorios provenientes de una distribución normal con media cero y varianza uno. Además, se agregarán autoconexiones. Nótese que la matriz de adyacencia es simétrica ya que la red se asume como no dirigida.

En la Fig. 6.2 se muestran las matrices de adyacencia mutualistas correspondientes a las matrices de adyacencia de las redes bipartitas aleatorias de la Fig. 5.3 una vez que implementamos las conexiones entre vértices del mismo conjunto. Recordemos que al etiquetar los vértices de acuerdo al conjunto al que pertenecen, las matrices de adyacencia de las redes bipartitas tienen una estructura de bloque 2×2 con los bloques diagonales iguales a matrices nulas, podemos observar que en el caso de redes mutualistas los bloques diagonales ya no son matrices nulas, dado que las conexiones entre vértices del mismo

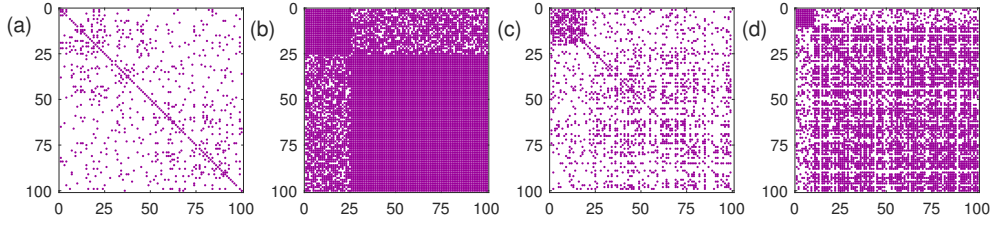


Figura 6.2: Elementos diferentes de cero de matrices de adyacencia de redes mutualistas aleatorias para algunas combinaciones de m/n y p : (a) $m/n = 1/2$ y $p = 0.05$, (b) $m/n = 1/4$ y $p = 0.75$, (c) $m/n = 1/5$ y $p = 0.1$, (d) $m/n = 1/10$ y $p = 0.3$. En todos los casos $n = 100$. Estas matrices de adyacencia mutualistas corresponden a las matrices de adyacencia de redes bipartitas de la Fig. 5.3. Figura tomada de [114].

conjunto están permitidas.

Construimos ensambles de matrices de adyacencia para redes mutualistas y las diagonalizamos numéricamente para caracterizar su propiedades espectrales y de autovectores. Dados los autovalores $\{\lambda_i\}$ ($i = 1, \dots, n$) ordenados de forma que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ y los correspondientes autovectores normalizados Ψ^i de la matriz de adyacencia, calculamos la razón de espaciamiento entre autovalores consecutivos r_i y la entropía de Shannon S_i definidos en las Ecs. (3.5) y (3.4) respectivamente. Además calculamos el promedio del índice de Randić, definido en la Ec. (2.9) para estos ensambles. En la Fig. 6.3 presentamos la razón promedio de los espaciamientos entre autovalores consecutivos $\langle r \rangle$ (paneles superiores), la entropía promedio de Shannon $\langle S \rangle$ (paneles intermedios) y el índice de Randić promedio $\langle R \rangle$ (paneles inferiores) en función de la conectividad p para redes aleatorias mutualistas caracterizadas por diferentes valores de m/n . En cada panel reportamos cinco tamaños de red que van desde $n = 100$ a 1600. De esta figura se observa que todas las curvas $\langle X \rangle$ vs. p muestran una transición del PE al GOE. (De aquí en adelante X representa las tres medidas reportadas en este capítulo: r , S y R).

Para facilitar nuestro análisis normalizamos cada una de las cantidades espectrales y topológicas tal que $\langle \bar{X} \rangle_{\text{PE}} = 0$ y $\langle \bar{X} \rangle_{\text{GOE}} = 1$. Esto es, $\langle \bar{r} \rangle \equiv [\langle r \rangle - \langle r \rangle_{\text{PE}}] / [\langle r \rangle_{\text{GOE}} - \langle r \rangle_{\text{PE}}]$, $\langle \bar{S} \rangle \equiv \langle S \rangle / \langle S \rangle_{\text{GOE}}$ y $\langle \bar{R} \rangle \equiv \langle R \rangle / \langle R \rangle_{\text{GOE}}$.

Recordemos que en el límite PE: $\langle r \rangle_{\text{PE}} \approx 0.3863$, $\langle S \rangle_{\text{PE}} = 0$ y $\langle R \rangle_{\text{PE}} = 0$, mientras que en límite GOE: $\langle r \rangle_{\text{GOE}} \approx 0.5359$, $\langle S \rangle_{\text{GOE}} \approx \ln(n/2.07)$ y $\langle R \rangle_{\text{GOE}} = n/2$.

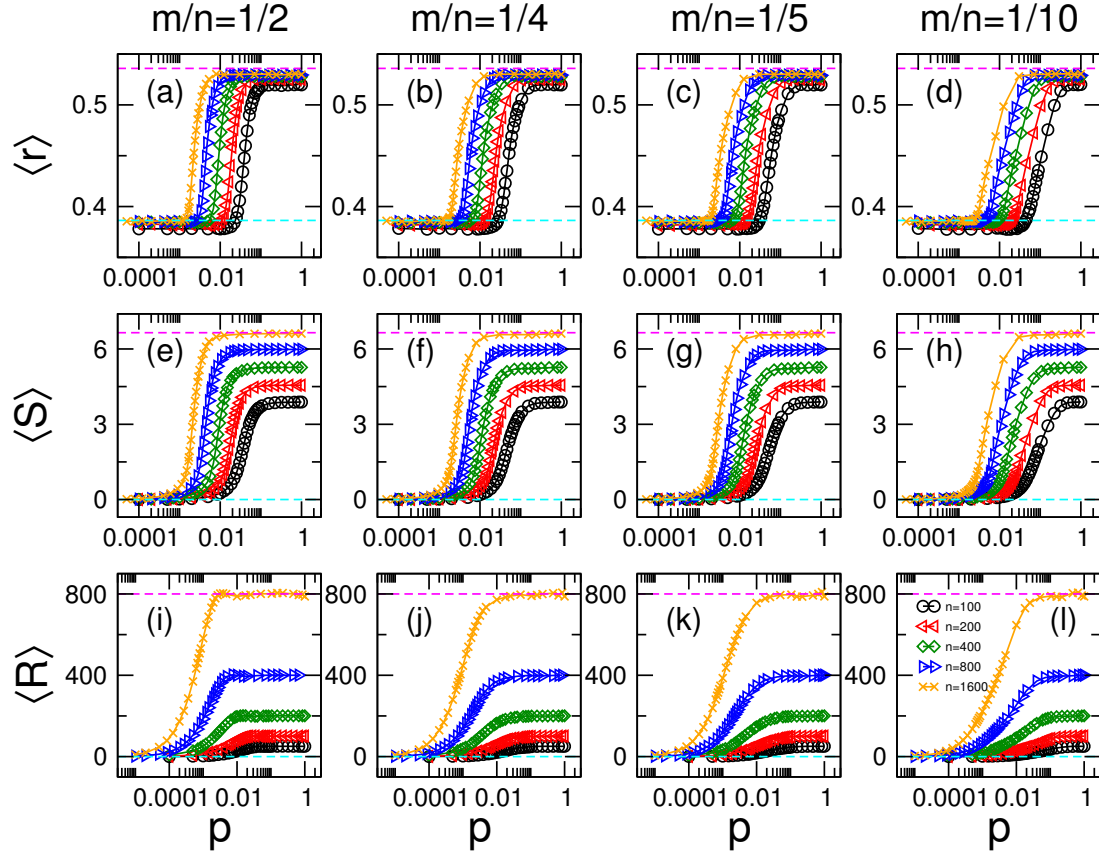


Figura 6.3: (a-d) Razón promedio de espaciamento entre autovalores consecutivos $\langle r \rangle$, (e-h) entropía de Shannon promedio $\langle S \rangle$ e (i-l) índice de Randić promedio $\langle R \rangle$ como función de la conectividad p para redes mutualistas aleatorias n . Consideramos cuatro valores de m/n : (a,e,i) $1/2$, (b,f,j) $1/4$, (c,g,k) $1/5$ and (d,h,l) $1/10$. Las líneas punteadas color cyan corresponden a las predicciones RMT para el límite PE, mientras que las rosas corresponden al límite GOE, ambas para $n = 1600$. Cada símbolo fue calculado sobre $10^6/n$ redes mutualistas aleatorias. Figura tomada de [114].

En los paneles de la Fig. 6.3 graficamos las predicciones correspondientes a los límites PE y GOE para cada cantidad cuando $n = 1600$ y observamos que particularmente para $\langle r \rangle$ no hay buena correspondencia entre estos límites y los valores calculados, posiblemente debido a efectos de tamaño pequeño. Entonces, con el fin de realizar correctamente la normalización consideramos conveniente explorar los efectos de tamaño pequeño para las tres cantidades en este modelo de red, para esto calculamos estas tres cantidades como función de p para redes de tamaño $n = 6, 10, 20, 50$ y 100 y las graficamos en la Fig. 6.4. Podemos ver que los efectos de tamaño pequeño son bastante pronunciados para $\langle r \rangle$, mientras que para $\langle S \rangle$ y $\langle R \rangle$ no se observan efectos de tamaño pequeño relevantes. En la Fig. 6.4 usamos $m/n = 1/2$, pero otras razones m/n producen curvas similares.

Ahora, en la Fig. 6.5 presentamos $\langle r \rangle$, $\langle S \rangle$ y $\langle R \rangle$ en $p = 0$ y $p = 1$ en función de n y los comparamos con las predicciones correspondientes para PE y GOE, respectivamente. Dado que observamos una buena correspondencia entre $\langle S \rangle$ y $\langle R \rangle$ en $p = 1$ con las predicciones correspondientes al GOE, [ver Figs. 6.5 (b) y 6.5 (c)], usamos $\langle S \rangle_{\text{GOE}} \approx \ln(n/2.07)$ y $\langle R \rangle_{\text{GOE}} = n/2$ para calcular $\langle \bar{S} \rangle$ y $\langle \bar{R} \rangle$, respectivamente. En contraste, las predicciones de RMT para $\langle r \rangle$ en los regímenes PE y GOE no presentan buena correspondencia con los valores que calculamos [Figs. 6.4 (a) y 6.5 (a)], por lo tanto, los valores de $\langle r \rangle_{\text{PE}}$ y $\langle r \rangle_{\text{GOE}}$ usados para calcular $\langle \bar{r} \rangle$ se calcularon numéricamente para los tamaños de red utilizados.

En la Fig. 6.6 graficamos nuevamente las curvas de la Fig. 6.3 pero normalizadas como se acaba de indicar. La Fig. 6.6 muestra que el efecto neto de aumentar el tamaño de la red n es el desplazamiento de las curvas $\langle \bar{X} \rangle$ a la izquierda en el eje p . Además, se observa que las curvas se desplazan la misma cantidad (en escala logarítmica) al duplicar n , similar a lo que observamos con los modelos anteriores, esto es un indicio de que $\langle \bar{X} \rangle$ escala con n . Así, para buscar el parámetro de escalamiento correspondiente, caracterizamos la posición de las curvas $\langle \bar{X} \rangle$ vs. p extrayendo el punto de transición de localización a delocalización p^* que definimos como el valor de p para el cual $\langle \bar{X} \rangle \approx 0.5$; es decir, el valor de p tal que $\langle \bar{X} \rangle$ está en la mitad de la transición entre el PE y el GOE.

En la Fig. 6.7, reportamos el punto de transición de localización a delocalización p^* como función de n para varios valores de la razón m/n . Podemos observar en la Fig. 6.7 una tendencia lineal de los datos (en escala logarítmica) lo cual implica una relación de ley de potencia de la forma

$$p^* = \mathcal{B}n^{-\delta}. \quad (6.1)$$

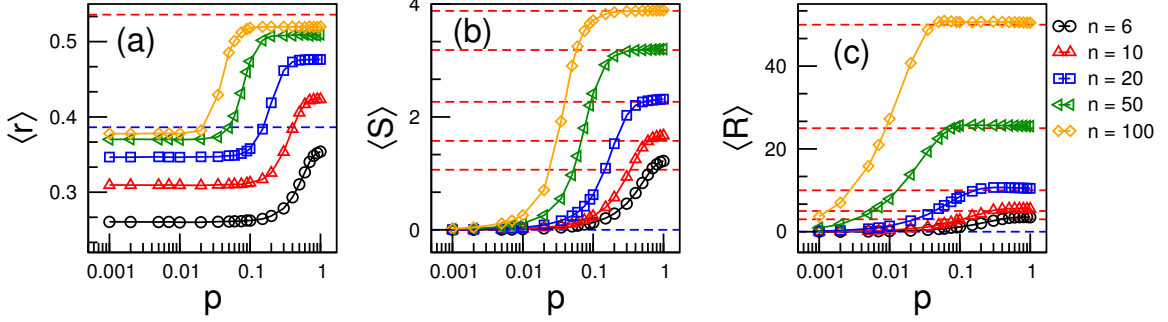


Figura 6.4: (a) Razón promedio de espaciamiento entre autovalores consecutivos $\langle r \rangle$, (b) entropía de Shannon promedio $\langle S \rangle$ y (c) índice de Randić promedio $\langle R \rangle$ como función de la conectividad p para redes mutualistas aleatorias de tamaños $n \leq 100$. Consideramos $m/n = 1/2$. Cada símbolo fue calculado sobre $10^6/n$ redes mutualistas aleatorias. Las líneas punteadas azules en (a-c) corresponden a las predicciones RMT para el límite PE, mientras que las rojas corresponden al límite GOE. Figura tomada de [114].

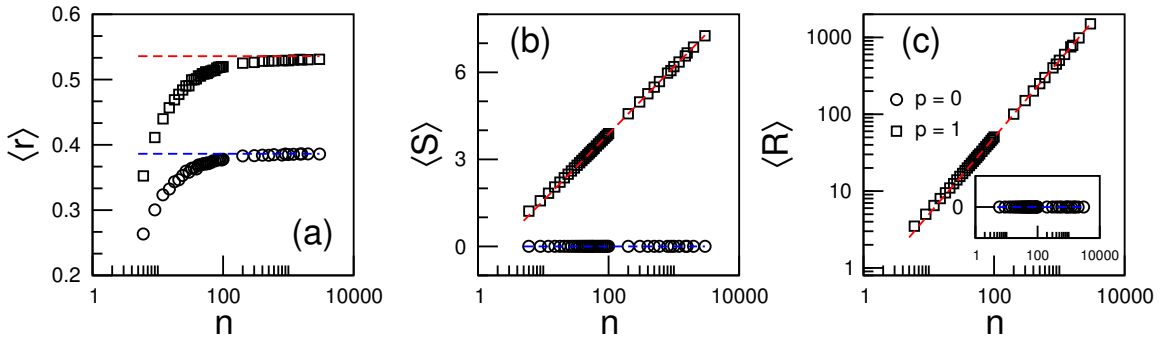


Figura 6.5: (a) $\langle r \rangle$, (b) $\langle S \rangle$ y (c) $\langle R \rangle$ para $p = 0$ (círculos) y $p = 1$ (cuadrados) como función del tamaño de la red n . Consideramos $m/n = 1/2$. Las líneas punteadas azules corresponden a las predicciones RMT para el límite PE: $\langle r \rangle_{\text{PE}} \approx 0.3863$, $\langle S \rangle_{\text{PE}} = 0$ y $\langle R \rangle_{\text{PE}} = 0$, mientras que las rojas corresponden al límite GOE: $\langle r \rangle_{\text{GOE}} \approx 0.5359$, $\langle S \rangle_{\text{GOE}} \approx \ln(n/2.07)$ y $\langle R \rangle_{\text{GOE}} = n/2$. Figura tomada de [114].

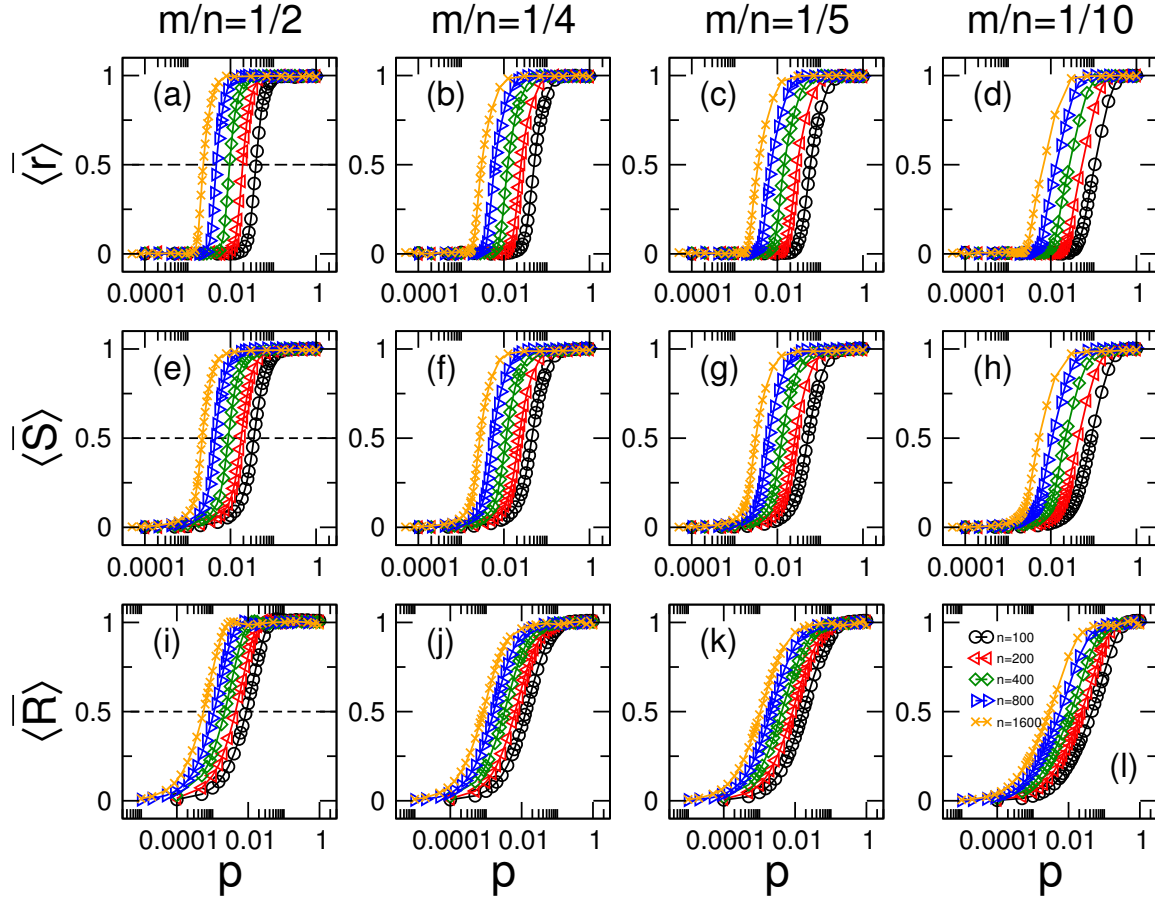


Figura 6.6: Medidas normalizadas (a-d) $\langle \bar{r} \rangle$, (e-h) $\langle \bar{S} \rangle$ e (i-l) $\langle \bar{R} \rangle$ como función de la conectividad p para redes mutualistas aleatorias de tamaño n . Mismas curvas que en la Fig. 6.3. Las líneas horizontales punteadas en los paneles derechos indican $\langle \bar{X} \rangle = 0.5$. Figura tomada de [114].

$\langle \bar{X} \rangle \backslash m/n$	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10	1/20
$\langle \bar{r} \rangle$	0.979	1.001	1.011	1.011	1.007	1.009	1.015	1.017	1.022	1.018
$\langle \bar{S} \rangle$	1.006	1.009	1.012	1.014	1.015	1.019	1.025	1.022	1.018	1.003
$\langle \bar{R} \rangle$	0.998	1.001	0.994	0.996	0.998	0.998	1.003	0.997	0.987	0.976

Tabla 6.1: Valores de la potencia δ obtenidos de los ajustes, con la Ec. (6.1), a las curvas p_X^* vs. n de la Fig. 6.7.

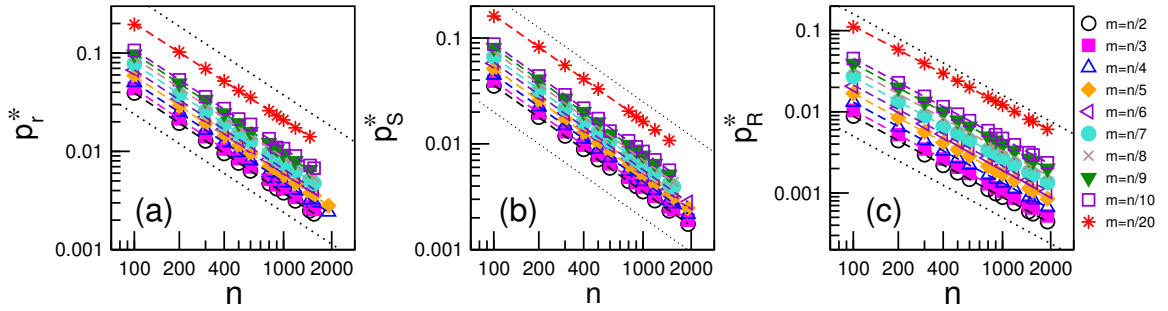


Figura 6.7: Punto de transición localización–delocalización p^* como función de n para diferentes valores de m/n . p^* fue extraído de las curvas (a) $\langle \bar{r} \rangle$ vs. p , (b) $\langle \bar{S} \rangle$ vs. p y (c) $\langle \bar{R} \rangle$ vs. p . Las líneas punteadas son ajustes a los datos con la Ec. (6.1); los valores de δ y $\mathcal{B}$ obtenidos de esos ajustes son reportados en la Tabla 6.1 y la Fig. 6.9, respectivamente. Las líneas negras punteadas se muestran como una guía y son proporcionales a n^{-1} . Figura tomada de [114].

En la Fig. 6.7 graficamos con líneas punteadas los ajustes realizados con la Ec. (6.1). Podemos observar que hay un muy buen ajuste a los datos. En la Tabla 6.1 reportamos los valores de la potencia δ obtenidos de los ajustes en la Fig. 6.7, podemos ver que $\delta \approx 1$ para las tres cantidades y todas las combinaciones de (n, m) que hemos considerado. Entonces, proponemos nuestro parámetro de escalamiento como

$$\xi = \frac{p}{p^*} \propto np. \quad (6.2)$$

Ahora en la Fig. 6.8 graficamos nuevamente las curvas $\langle \bar{X} \rangle$ pero ahora en función de ξ y observamos que las curvas para diferentes tamaños de red mutualista n colapsan sobre una sola curva. Es decir, para un valor dado m/n , ξ fija las propiedades espectrales y topológicas de redes aleatorias mutualistas.

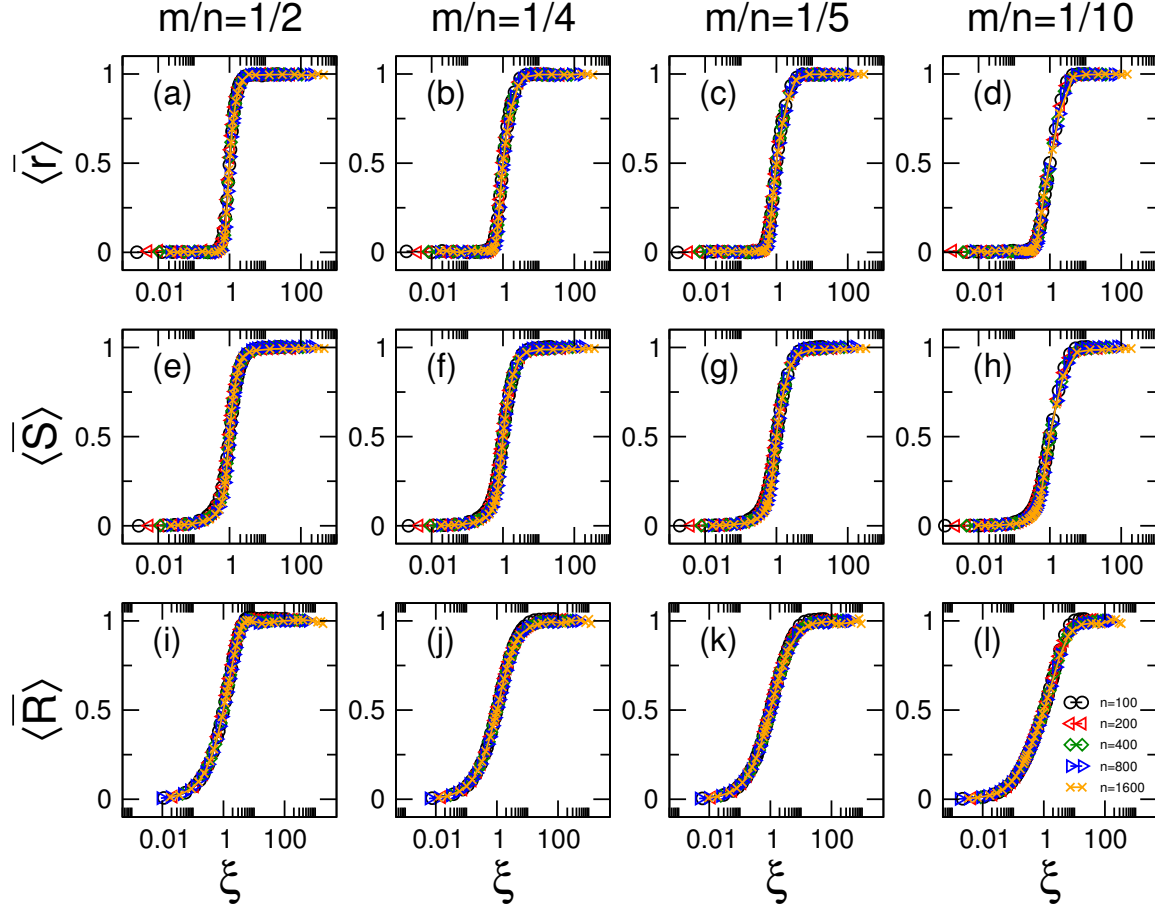


Figura 6.8: Medidas normalizadas (a) $\langle \bar{r} \rangle$, (b) $\langle \bar{S} \rangle$ y (c) $\langle \bar{R} \rangle$ como función del parámetro de escalamiento ξ para redes aleatorias mutualistas de tamaño n . Mismas curvas de la Fig. 6.6. Figura tomada de [114].

Es importante agregar que a pesar de que pudimos escalar la razón promedio de espaciamientos entre autovalores consecutivos, la entropía promedio de Shannon y el índice Randić promedio de redes mutualistas aleatorias, como se muestra en la Fig. 6.8, todavía existe una dependencia (aunque débil) de las curvas $\langle \bar{X} \rangle$ vs. ξ en la razón m/n como también se observó en el caso de redes bipartitas aleatorias. La dependencia de ξ con la razón m/n está dada por el parámetro $\mathcal{B}$ de la Ec. (6.1). En la Fig. 6.9 graficamos $\mathcal{B}$ vs. m/n . Mediante ajustes de ley de potencia a los datos reportados en la Fig. 6.9 se encontró que dada una proporción m/n el valor de $\mathcal{B}$ para cada cantidad puede calcularse mediante $\mathcal{B}_r = 2.34(m/n)^{-0.68}$, $\mathcal{B}_S = 1.97(m/n)^{-0.65}$ y $\mathcal{B}_R = 0.31(m/n)^{-1.13}$.

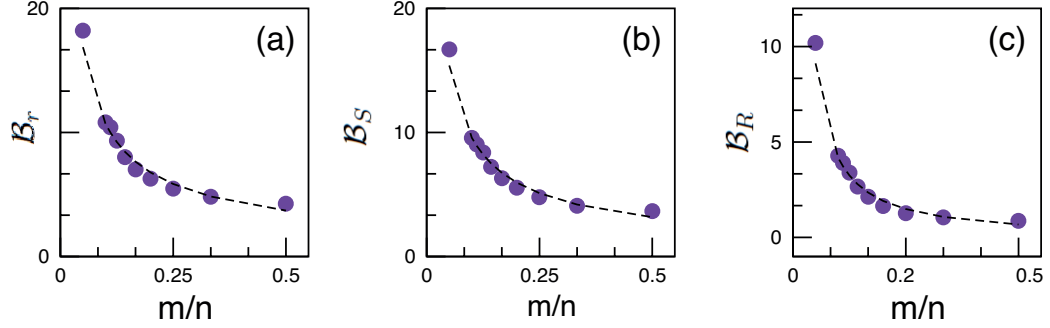


Figura 6.9: Parámetro $\mathcal{B}$ como función de la razón m/n . $\mathcal{B}$ (símbolos) fueron extraídos de los ajustes con la Ec. (6.1), de las curvas de la Fig. 6.6: (a) $\langle \bar{r} \rangle$ vs. p , (b) $\langle \bar{S} \rangle$ vs. p y (c) $\langle \bar{R} \rangle$ vs. p . Las líneas punteadas son los mejores ajustes de la ley de potencias para los datos: $\mathcal{B}_r = 2.34(m/n)^{-0.68}$, $\mathcal{B}_S = 1.97(m/n)^{-0.65}$ y $\mathcal{B}_R = 0.31(m/n)^{-1.13}$. Figura tomada de [114].

6.2 Redes mutualistas del mundo real

Ahora validamos el escalamiento de redes mutualistas desarrollado en la sección anterior, contrastando las curvas universales obtenidas para $\langle \bar{r} \rangle$, $\langle \bar{S} \rangle$ y $\langle \bar{R} \rangle$ con las propiedades espectrales y topológicas de redes del mundo real.

En la Fig. 6.8 mostramos las curvas universales para un valor fijo de m/n , podemos notar que aún existe una débil dependencia de estas curvas con la razón m/n : para observar mejor esta dependencia en la Fig. 6.10 reportamos curvas $\langle \bar{X} \rangle$ vs. ξ para varios valores de m/n . Aquí, podemos observar que cuanto mayor es la razón m/n , más aguda es la transición de PE a GOE. Sin embargo, es relevante agregar que nuestro interés se centra en valores grandes de m/n ya que hemos observado que la mayoría de las redes mutualistas del mundo real se caracterizan por razones en el intervalo $(1/3, 1/2)$. De la base de datos de redes ecológicas Web of Life (<http://www.web-of-life.es/>), tomamos un conjunto de redes de polinización, redes huésped-parásito, redes de dispersión de semillas y redes tróficas con tamaños en los rangos $n \sim 10$ a $n \sim 1000$; en las Figs. 6.11, 6.12 y 6.13 mostramos algunos ejemplos de matrices de adyacencia bipartitas (paneles superiores) y mutualistas (paneles inferiores) correspondientes a redes ecológicas del mundo real. Mostramos ejemplos de redes pequeñas $n \sim 10$ [Fig. 6.11], medianas $n \sim 100$ [Fig. 6.12] y grandes [Fig. 6.13]. Específicamente tomamos 160 redes del mundo real, de las cuales, el 50% corresponden

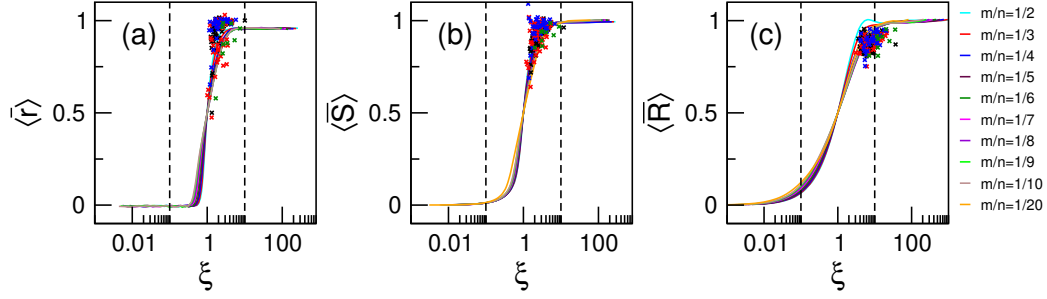


Figura 6.10: Medidas normalizadas (a) $\langle \bar{r} \rangle$, (b) $\langle \bar{S} \rangle$ y (c) $\langle \bar{R} \rangle$ como función del parámetro de escalamiento ξ para redes aleatorias mutualistas de tamaño $n = 1000$ y diferentes valores de m/n . Las líneas punteadas en $\xi = 1/10$ y $\xi = 10$ marcan el inicio de la delocalización de los autovectores y el inicio del régimen GOE, respectivamente. Las cruces indican los valores de (a) $\langle \bar{r} \rangle$, (b) $\langle \bar{S} \rangle$ y (c) $\bar{R}$ de 68 redes de polinizadores (negro), 49 redes huésped-parásito (rojo), 34 redes de dispersión de semillas (azul) y 9 redes alimentarias (verde) tomadas de la base de datos alojada en el sitio Web of Life ecological networks (<http://www.web-of-life.es/>). Figura tomada de [114].

a una razón m/n en el intervalo $(1/3, 1/2)$; mientras que la razón más pequeña m/n del conjunto de redes realista elegidas corresponde a $1/12$.

Para cada una de estas redes realistas calculamos $\langle \bar{r} \rangle$, $\langle \bar{S} \rangle$ y $\bar{R}$. Es importante mencionar que para el cálculo de estas cantidades impusimos pesos aleatorios a las matrices de adyacencia de redes del mundo real con el fin de poder comparar con los resultados que obtuvimos con el enfoque RMT, nótese que estos pesos aleatorios no juegan ningún papel en el cálculo de $\bar{R}$. Luego, calculamos el valor de ξ correspondiente a cada una de las redes del mundo real. En la Fig. 6.10 reportamos los valores de $\langle \bar{r} \rangle$, $\langle \bar{S} \rangle$ y $\bar{R}$ de redes del mundo real sobre las curvas universales obtenidas de nuestro enfoque RMT. Sorprendentemente, observamos una correspondencia razonablemente buena entre el espectro y propiedades topológicas de las redes mutualistas del mundo real (símbolos) y las correspondientes predicciones estadísticas (líneas de colores).

Es interesante notar que las redes del mundo real, aunque se caracterizan por valores de ξ por debajo del inicio del régimen GOE, muestran propiedades espectrales, autovectoriales y topológicas muy cercanas a las del GOE. Esto puede entenderse como una señal de máxima complejidad (es decir, máximo caos en términos de RMT) en las redes del mundo real analizadas.

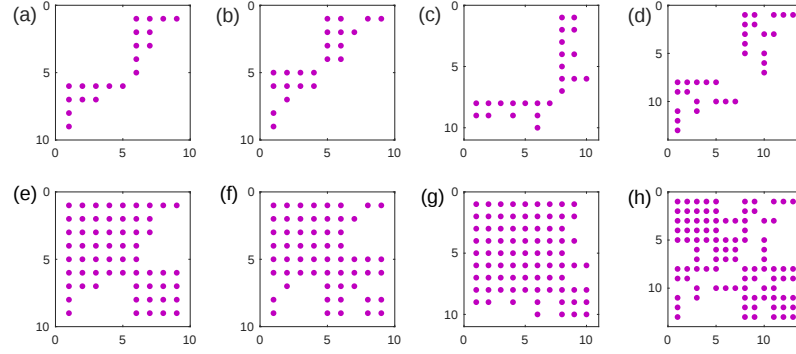


Figura 6.11: Paneles superiores: matrices de adyacencia de redes bipartitas del mundo real de la base de datos Web of Life ecological (<http://www.web-of-life.es/>). (a) Red de dispersión de semillas M_SD_029 ($n = 9$, $m = 4$, $p = 0.5$), (b) Red de dispersión de semillas M_SD_030 ($n = 9$, $m = 5$, $p = 0.55$), (c) red huésped-parásito A_HP_015 ($n = 10$, $m = 3$, $p = 0.571$) and (d) red huésped-parásito A_HP_035 ($n = 13$, $m = 6$, $p = 0.357$). Paneles inferiores: matrices de adyacencia mutualistas correspondientes. Figura tomada de [114].

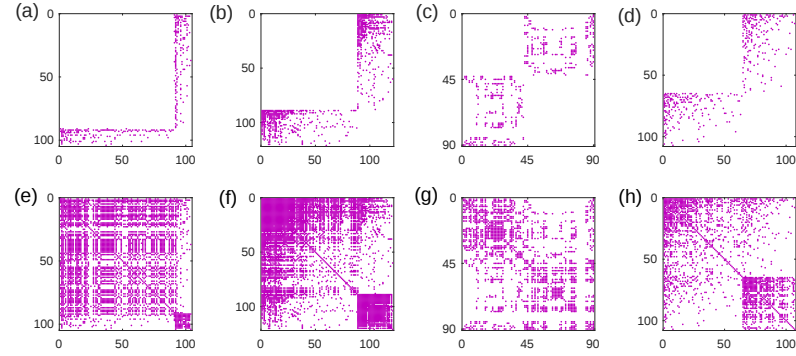


Figura 6.12: Paneles superiores: matrices de adyacencia de redes bipartitas del mundo real de la base de datos Web of Life ecological (<http://www.web-of-life.es/>). (a) red de polinización M_PL_051 ($n = 104$, $m = 14$, $p = 0.13$), (b) Red de dispersión de semillas M_SD_034 ($n = 121$, $m = 33$, $p = 0.139$), (c) red alimentaria FW_007 ($n = 90$, $m = 42$, $p = 0.109$) and (d) red de polinización M_PL_002 ($n = 107$, $m = 43$, $p = 0.071$). Paneles inferiores: matrices de adyacencia mutualistas correspondientes. Figura tomada de [114].

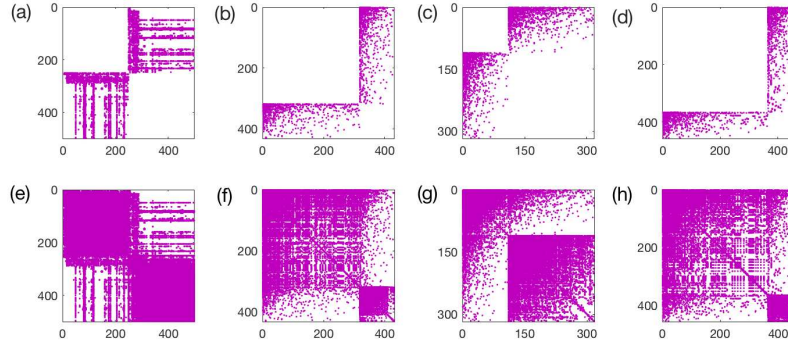


Figura 6.13: Paneles superiores: matrices de adyacencia de redes bipartitas del mundo real de la base de datos Web of Life ecological (<http://www.web-of-life.es/>). (a) Red alimentaria FW_008 ($n = 498$, $m = 249$, $p = 0.0534$), (b) red de polinización M_PL_054 ($n = 431$, $m = 113$, $p = 0.022$), (c) Red de dispersión de semillas M_SD_022 ($n = 317$, $m = 110$, $p = 0.049$ and (d) red de polinización M_PL_056 ($n = 456$, $m = 91$, $p = 0.026$). Paneles inferiores: matrices de adyacencia mutualistas correspondientes. Figura tomada de [114].

En resumen, en este capítulo estudiamos redes mutualistas aplicando un enfoque estadístico, basado en técnicas de teoría de matrices aleatorias. Las redes mutualistas que estudiamos están definidas por tres parámetros: el tamaño de la red n , el tamaño del conjunto más pequeño m (con $1 \leq m \leq n/2$) y la conectividad entre los dos conjuntos $p \in [0, 1]$.

Nos centramos en las propiedades espectrales, de autovectores y topológicas del modelo de red aleatorio, calculando, respectivamente, la razón de los espacios de autovalores consecutivos r , la entropía de Shannon S y el índice de Randić R .

Basándonos en un análisis de escalamiento encontramos el parámetro $\xi \propto np$ que fija las propiedades espectrales y topológicas de redes mutualistas aleatorias. Nuestro estudio proporciona una forma de predecir las propiedades promedio de redes mutualistas una vez que ξ es conocido. Además con el parámetro ξ podemos identificar los regímenes de autovectores localizados o redes mayormente desconectadas $\xi < 1/10$ en el que, $\langle S \rangle \approx 0$ y $\langle R \rangle \approx 0$, y autovectores extendidos o redes mayormente conectadas $\xi > 10$ cuando $\langle S \rangle \approx \ln(n/2.07)$ y $\langle R \rangle \approx n/2$.

Finalmente, contrastamos nuestras predicciones estadísticas con las propiedades de redes del mundo real y encontramos una correspondencia razonablemente buena entre las propiedades de redes mutualistas del mundo real y nuestras curvas universales.

Capítulo 7

Redes geométricas aleatorias (RGG)

Existen una gran cantidad de sistemas que están confinados en un espacio definido. Por ejemplo, podríamos pensar en redes de transporte, o en redes biológicas donde la estructura de la red está determinada por la cercanía de las células en un tejido biológico [115], podemos pensar también en un grupo de estrellas en alguna constelación a las que interesa agrupar de acuerdo con su posición [116], las redes de parcelas y caminos en un paisaje [117], las redes de nidos y madrigueras de animales [118, 119], las redes de fracturas en rocas [120], redes de dispositivos de comunicación inalámbrica [121–123], como teléfonos móviles, sistemas informáticos inalámbricos, redes de sensores inalámbricos, en fin, podemos ver que la lista de ejemplos es muy grande pero todos tienen en común que los vértices que representan las entidades del sistema están confinados a un espacio dado.

Este tipo de sistemas en los que la distribución de los vértices está limitada a un espacio determinado pueden verse como una continuación del trabajo pionero de Gilbert en 1959 cuando propuso el modelo de grafo geométrico aleatorio (RGG por sus siglas en inglés “Random Geometric Graph”) [124].

Una RGG es una red no dirigida con n vértices distribuidos aleatoriamente en un cuadrado unitario, dos vértices están conectados por una arista si su distancia euclidiana es menor o igual que el radio de conexión ℓ [116, 125]. En la Fig. 7.1 se muestra un ejemplo de una RGG.

Este tipo de redes aleatorias han encontrado múltiples aplicaciones en áreas como

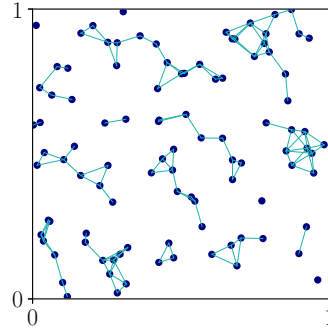


Figura 7.1: Red geométrica aleatoria (RGG) con 100 vértices y radio de conexión $\ell = 0.1$.

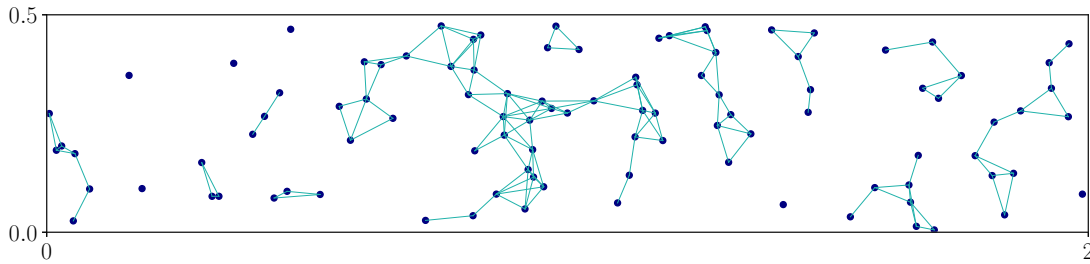


Figura 7.2: Red rectangular aleatorio (RRG) con 100 vértices y radio de conexión $\ell = 0.1$.

el modelado de la propagación de epidemias, que pueden incluir casos como la propagación de gusanos en una red informática, virus en una población humana o rumores en una red social [126–130].

Además del cuadrado podemos considerar geometrías distintas para distribuir los vértices, como pueden ser por ejemplo círculos o rectángulos. Particularmente el caso de redes geométricas embebidas en un rectángulo de área unitaria de lados a y $1/a$ se conoce como redes rectangulares aleatorias (RRG por sus siglas en inglés Random Rectangular Graph) y han sido aplicadas en una variedad de escenarios físicos [131–134]. En la Fig. 7.2 mostramos un ejemplo de una red rectangular aleatoria de lados 2 y $1/2$.

El modelo de Gilbert y sus análogos son muy útiles en situaciones donde los vértices están distribuidos uniformemente en la red. Sin embargo, en otros escenarios en los que los vértices están distribuidos en un espacio dado pero no necesariamente de manera uniforme, la consideración de RGG/RRG no es la más apropiada. Por este motivo nosotros proponemos una extensión del modelo RGG para considerar diferentes grados de no uniformidad espacial en la red.

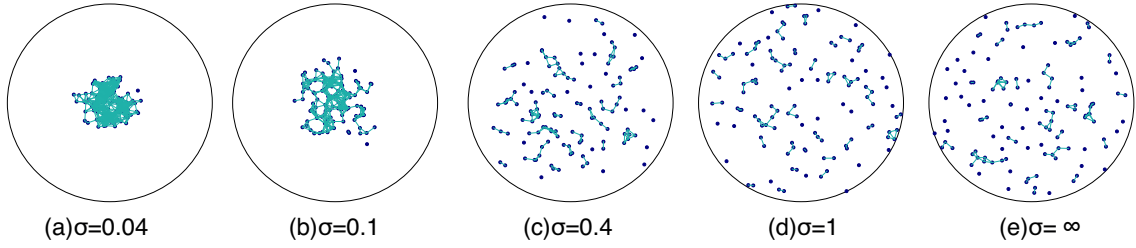


Figura 7.3: Ejemplos de RGGs con diferentes grados de no uniformidad: (a) $\sigma = 0.04$, (b) $\sigma = 0.1$, (c) $\sigma = 0.4$, (d) $\sigma = 1$ y (e) $\sigma = \infty$. En todos los casos consideramos $n = 125$ vértices y un radio de conexión $\ell = 0.1$.

7.1 RGG no uniforme

El modelo que proponemos consiste de n vértices distribuidos independientemente en el disco de radio unitario con posiciones, en coordenadas polares (l, θ) , obedeciendo a las funciones de densidad de probabilidad $\rho(l)$ y $\rho(\theta)$, respectivamente. Elegimos $\rho(l)$ como una distribución normal con media cero y varianza σ , $\rho(l) = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, y $\rho(\theta)$ como una distribución uniforme en el intervalo $\theta \in (0, 2\pi)$, $\rho(\theta) = \mathcal{U}(0, 2\pi)$. De manera que el grado de no uniformidad espacial de la red está dado por el parámetro $\sigma \in (0, \infty)$; para $\sigma < 1$ se forma un grupo de vértices alrededor del centro del disco, mientras que para $\sigma > 1$ la distribución de vértices se vuelve casi uniforme dentro del disco unitario. Al igual que en RRG y RGG, dos vértices están conectados por una arista si su distancia euclidiana es menor o igual que el radio de conexión $\ell \in [0, 2]$; donde 2 corresponde al diámetro del disco unitario, por lo que es el valor máximo que ℓ puede tomar. Podemos ver entonces que este modelo de red aleatoria depende de tres parámetros: el número de vértices n , el grado de no uniformidad σ y el radio de conexión ℓ . Nótese que tanto σ como ℓ se dan en unidades del radio del disco, el cual hemos elegido igual a uno. Se eligió un disco como geometría de distribución de los vértices, en lugar de un cuadrado como en otros estudios de RGG, para tener en cuenta la simetría radial. En la Fig. 7.3 presentamos ejemplos de RGGs con diferentes grados de no uniformidad σ . En todos los casos consideramos $n = 125$ vértices y un radio de conexión $\ell = 0.1$. Como se puede ver claramente en la Fig. 7.3, nuestro modelo de red aleatoria produce un cluster alrededor del centro del disco para $\sigma < 1$. Formalmente, reproduce el modelo RGG (en el disco) cuando $\sigma \rightarrow \infty$, sin embargo, como se puede observar en la Fig. 7.3 (d), ya para $\sigma = 1$ los vértices parecen distribuidos uniformemente. De hecho,

como se mostrará a continuación, $\sigma_c \approx 1$ separa dos regímenes: el *régimen no uniforme* cuando $\sigma < \sigma_c$ y el *régimen uniforme* cuando $\sigma \geq \sigma_c$.

Primero, caracterizamos las propiedades topológicas promedio de este modelo de red aleatoria. En particular, proponemos expresiones heurísticas para el grado promedio y el número de vértices no aislados. Luego, aplicando el enfoque de la RMT, caracterizamos las propiedades espectrales y de autovectores de la matriz de adyacencia. Finalmente, realizamos un estudio de escalamiento utilizando estas propiedades.

7.1.1 Propiedades topológicas

Empezamos el estudio del modelo RGGs no uniformes caracterizando sus propiedades topológicas mediante el uso del grado promedio $\langle k \rangle$ y el número de vértices no aislados $V_\times$. Recordemos que el grado de un vértice está dado por el número de aristas conectadas a él. Entonces se tiene que para un vértice dado en una red, hay $n - 1$ vértices distribuidos en la red a los que podría conectarse. En el caso de RGG/RRG en dos dimensiones, las conexiones entre los vértices dependen de su distancia euclideana, entonces podemos notar que el número de vértices conectados a un vértice dado es igual al número de vértices que están dentro del área definida por el radio de conexión ℓ , A_p . Así el grado de vértice esperado para el vértice i está dado por:

$$E(k_i) = \rho A_p, \quad (7.1)$$

donde ρ es la densidad de vértices por unidad de área. En el caso de redes geométricas en las que los vértices están distribuidos de manera uniforme podemos considerar $\rho = (n - 1)/A_t$, donde A_t es el área total en la que se distribuyen los vértices de la red. Para el cálculo del área de conexión se deben considerar las condiciones de frontera dadas por la ubicación del vértice en consideración, la forma más sencilla es cuando al dibujar una circunferencia de radio ℓ centrada en un vértice toda la circunferencia queda adentro de la red (vértices rodeados por circunferencia punteada color azul en la Fig. 7.4), en ese caso $A_p = \pi \ell^2$, sin embargo hay otros casos en los que esto no sucede (ver vértices rodeados por circunferencia punteada color roja en la Fig. 7.4) y es en donde son relevantes las condiciones de frontera. Tomando en cuentas estas consideraciones en el artículo [131] se derivó una expresión analítica para el grado promedio $\langle k \rangle$ de redes geométricas aleatorias embebidas en un rectángulo unitario de lados a y b :

$$\langle k \rangle = (n - 1)f, \quad (7.2)$$

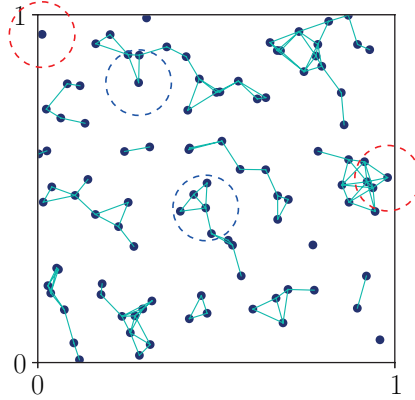


Figura 7.4: Ejemplos de diferentes ubicaciones de vértices a considerar para calcular el grado promedio. Los círculos marcados en color rojo corresponden a vértices cuyas vecindades de conexión presentan condiciones de frontera fuera de la red y los de color magenta corresponden a vértices cuyas vecindades de conexión se encuentran totalmente dentro de la red.

donde f es una función altamente no trivial del radio de conexión ℓ y las longitudes de los lados del rectángulo:

$$f(\ell) = \begin{cases} \ell^2 \left[\pi ab - \frac{4}{3}\ell(a+b) + \frac{1}{2}\ell^2 \right] & 0 \leq \ell \leq b, \\ -\frac{4}{3}a\ell^3 - \ell^2 b^2 + \frac{1}{6}b^4 + a \left(\frac{4}{3}\ell^2 + \frac{2}{3}b^2 \right) \sqrt{\ell^2 - b^2} \\ + 2\ell^2 ab \arcsin(b/\ell) & b \leq \ell \leq a, \\ b \left(\frac{4}{3}\ell^2 + \frac{2}{3}a^2 \right) \sqrt{\ell^2 - a^2} + a \left(\frac{4}{3}\ell^2 + \frac{2}{3}b^2 \right) \sqrt{\ell^2 - b^2} \\ - \ell^2(a^2 + b^2) + \frac{1}{6}(a^4 + b^4) - \frac{1}{2}\ell^4 \\ - 2ab\ell^2(\arccos(b/\ell) - \arcsin(a/\ell)) & a \leq \ell \leq \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases} \quad (7.3)$$

Claramente, cuando los lados del rectángulo son iguales, se obtiene la expresión para $\langle k \rangle$ de RGGs embebidos en el cuadrado unitario; en este caso la Ec. (7.3), se reduce y f tiene la forma

$$f(\ell) = \begin{cases} \ell^2 \left[\pi - \frac{8}{3}\ell + \frac{1}{2}\ell^2 \right] & 0 \leq \ell \leq 1, \\ \frac{1}{3} - 2\ell^2 \left[1 - \arcsin(1/\ell) + \arccos(1/\ell) \right] \\ + \frac{4}{3}(2\ell^2 + 1)\sqrt{\ell^2 - 1} - \frac{1}{2}\ell^4 & 1 \leq \ell \leq \sqrt{2}. \end{cases} \quad (7.4)$$

Ahora, en el caso de nuestro modelo tenemos una geometría distinta, ya que nosotros elegimos un círculo y no un cuadrado, además de que la densidad de vértices ya no

es uniforme, esto hace que derivar las expresiones de forma analítica para el grado promedio del modelo de RGGs no uniformes sea más complicado ya que es necesario considerar más condiciones. Entonces de manera numérica buscamos alguna relación de la expresión (7.4) considerando las condiciones de nuestro modelo y encontramos que la expresión para $\langle k \rangle$ reportada en [131], para el caso particular de los RGGs embebidos en el cuadrado unitario, funciona bastante bien para el modelo de RGGs no uniformes en el círculo unitario eligiendo correctamente un radio de conexión efectivo L . Es decir, proponemos la siguiente expresión heurística para $f(L)$:

$$f(L) = \begin{cases} L^2 \left[\pi - \frac{8}{3}L + \frac{1}{2}L^2 \right] & 0 \leq L \leq 1, \\ \frac{1}{3} - 2L^2 \left[1 - \arcsin(1/L) + \arccos(1/L) \right] \\ \quad + \frac{4}{3}(2L^2 + 1)\sqrt{L^2 - 1} - \frac{1}{2}L^4 & 1 \leq L \leq \sqrt{2}, \\ 1 & L \geq \sqrt{2}. \end{cases} \quad (7.5)$$

Al establecer $L = \ell$, las Ecs. (7.2) y (7.5) proporcionan el grado promedio de RGGs embebidos en el cuadrado unitario [Ec. (7.4)], sin embargo, la última condición de la Ec. (7.5) se incluyó para ajustarse a nuestro modelo de red aleatoria; ya que en los RGGs en el cuadrado unitario el mayor radio de conexión es $\ell = \sqrt{2}$.

La Ec. (7.5) proporciona una buena aproximación de $\langle k \rangle$ para RGGs no uniformes en el círculo unitario si $L = \alpha\ell/\sqrt{\pi}$, con $\alpha = \sqrt{2/3\sigma}$ para $\sigma < \sigma_c$ y $\alpha = 1$ para $\sigma \geq \sigma_c$; con $\sigma_c \approx 1$. El caso de RGGs uniformes en el círculo unitario queda descrito por $\alpha = 1$. Para verificar esta afirmación, en la Fig. 7.5 graficamos $\langle k \rangle$ como función de ℓ para RGGs no uniformes en el círculo unitario para $\sigma < \sigma_c$ y $\sigma \geq \sigma_c$; ahí la buena correspondencia entre los cálculos numéricos (símbolos) y la Ec. (7.5) (líneas punteadas) es evidente. Además, en el recuadro de la Fig. 7.5 (a) mostramos la contribución de las tres condiciones de la Ec. (7.5) a las curvas $\langle k \rangle$ vs. ℓ de dos ejemplos de RGGs no uniformes. En la Fig. 7.5 consideramos el tamaño de red fijo $n = 500$ pero observamos resultados equivalentes para cualquier otro tamaño de red.

En la Fig. 7.5 podemos observar también que $\sigma_c \approx 1$ separa dos regímenes en el modelo RGG no uniforme: el régimen no uniforme cuando $\sigma < \sigma_c$ y el régimen uniforme cuando $\sigma \geq \sigma_c$.

Otra cantidad que nos interesa estudiar es el número de vértices aislados V_x , la cual graficamos en la Fig. 7.6 como función del radio de conexión ℓ para RGGs no uniformes

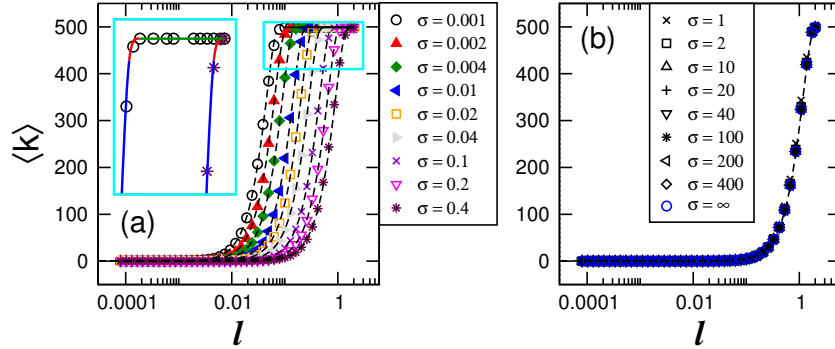


Figura 7.5: Grado promedio $\langle k \rangle$ en función del radio de conexión ℓ para RGGs no uniformes de tamaño $n = 500$ para (a) $\sigma < 1$ y (b) $\sigma \geq 1$. Cada símbolo fue calculado sobre $10^7/n$ redes aleatorias. Las líneas punteadas corresponden a las ecuaciones (7.2) y (7.5). El recuadro en (a) es una ampliación del rectángulo cyan donde los datos para $\sigma = 0.001$ (círculos) y $\sigma = 0.4$ (asteriscos) se muestra junto con las Ecs. (7.2) y (7.5); Las líneas azul, rojo y verde corresponden a la primera, segunda y tercera condiciones de la ecuación (7.5), respectivamente. Figura tomada de [135].

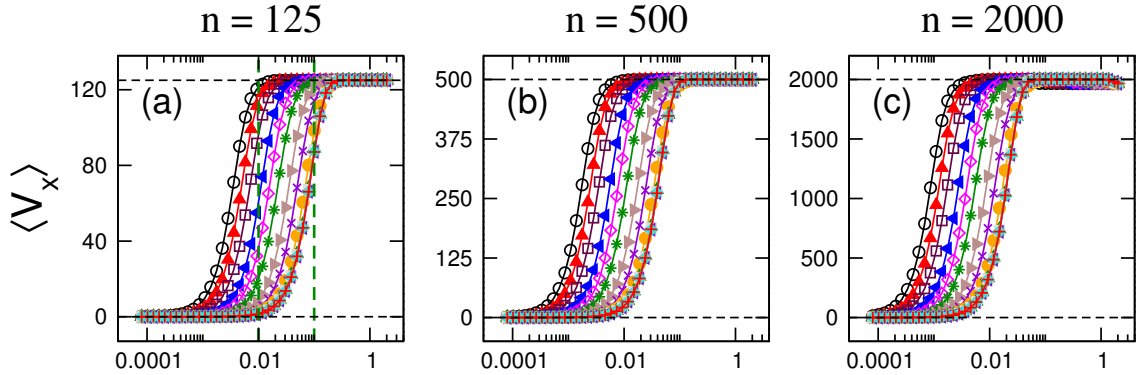


Figura 7.6: (a-c) Número promedio de vértices no aislados $\langle V_{\times} \rangle$ en función del radio de conexión ℓ para RGGs no uniformes de tamaño n : $n = 125$, $n = 500$ y $n = 2000$. Cada panel muestra 14 curvas correspondientes a diferentes grados de no uniformidad de izquierda a derecha σ : $\{0.001, 0.002, 0.004, 0.01, 0.02, 0.04, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1, 10, 100, \infty\}$. Las líneas punteadas en (a) señalan $\ell = 0.01$ y 0.1 ; 0.1 es el valor de ℓ usado en la Fig. 7.3. Cada símbolo fue calculado sobre un ensamble de $10^7/n$ redes aleatorias. Figura tomada de [135].

de tamaño n . En esta figura estamos usando tres valores de n : $n = 125$ (paneles de la izquierda), $n = 500$ (paneles centrales) y $n = 2000$ (paneles de la derecha). Cada panel muestra 14 curvas correspondientes a diferentes grados de no uniformidad σ (aumentando de izquierda a derecha), σ : $\{0.001, 0.002, 0.004, 0.01, 0.02, 0.04, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1, 10, 100, \infty\}$. En esta figura podemos ver claramente el efecto del parámetro σ en las propiedades del modelo de red aleatoria: para tamaño de red fijo y radio de conexión fijo, vea, por ejemplo, la línea punteada vertical en la Fig. 7.6 en $\ell = 0.01$, las redes pueden pasar de mayormente conectadas (ver la curva más a la izquierda correspondiente a $\sigma = 0.001$) a mayormente desconectadas (ver la curva más a la derecha correspondiente a $\sigma = \infty$). Este panorama ya se mostró en la Fig. 7.3, sin embargo en ese ejemplo la red no se desconecta incluso cuando $\sigma \rightarrow \infty$ debido al uso de un valor mayor de ℓ : $\ell = 0.1$, vea la línea vertical punteada en la Fig. 7.6 (a).

El promedio de $\langle V_{\times} \rangle$ puede calcularse a partir del número promedio de vértices aislados $\langle K_1 \rangle$ como $\langle V_{\times} \rangle = n - \langle K_1 \rangle$. De hecho, para los RGG uniformes, $\langle K_1 \rangle$ es conocido [136]; está dado por

$$\langle K_1 \rangle = n(1 - \pi\ell^2)^{n-1} = n \exp(-n\pi\ell^2) - O(n\ell^4). \quad (7.6)$$

Por lo tanto, para las RGGs uniformes, podemos escribir

$$\langle V_{\times} \rangle \approx n [1 - \exp(-n\pi\ell^2)] . \quad (7.7)$$

La Ec. (7.7) puede utilizarse también para el modelo de RGGs no uniformes utilizando el radio de conexión efectivo L , así para RGGs no uniformes,

$$\langle V_{\times} \rangle \approx n [1 - \exp(-n\pi L^2)] . \quad (7.8)$$

En la Fig. 7.7 validamos la Ec. 7.8 graficando el número promedio de vértices aislados $\langle V_{\times} \rangle$ para RGGs en el cuadrado unitario, en el círculo unitario y para dos ejemplos de RGGs no uniformes en función de ℓ , nuevamente podemos observar una buena correspondencia entre los cálculos numéricos (símbolos) y la Ec. (7.8) (líneas punteadas).

Es interesante notar que de las Ecs. (7.2) y (7.5), cuando $L \ll 1$, podemos escribir $\langle k \rangle \approx n\pi L^2$ que coincide con el argumento de la exponencial en la Ec. (7.8). Esto nos permite relacionar $\langle V_{\times} \rangle$ y $\langle k \rangle$ como

$$\langle V_{\times} \rangle \approx n[1 - \exp(-\langle k \rangle)]. \quad (7.9)$$

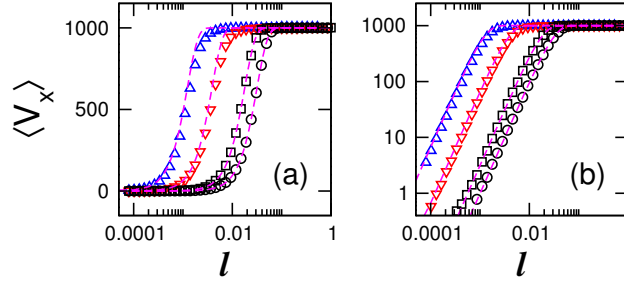


Figura 7.7: (a) Número promedio de vértices no aislados $\langle V_x \rangle$ en función del radio de conexión ℓ para RGGs embebidos en el círculo unitario (círculos), RGGs embebidos en el cuadrado unitario (cuadrados) y RGGs no uniformes con $\sigma = 0.01$ (triángulos hacia abajo) y $\sigma = 0.001$ (triángulos hacia arriba). En todos los casos se utilizó $n = 1000$. Las líneas punteadas corresponden a la ecuación (7.8). (b) Igual que en (a) pero en escala logarítmica para observar mejor la región $\ell \ll 1$. Figura tomada de [135].

La Ec. (7.9) implica que el parámetro de escalamiento $\xi \equiv \xi(n, \sigma, \ell)$ para $\langle \overline{V_x} \rangle = \langle V_x \rangle / n$ de RGGs no uniformes es en efecto $\langle k \rangle$; esto es, si graficamos las curvas de $\langle \overline{V_x} \rangle$ como función de $\langle k \rangle$ para RGGs no uniformes con diferentes combinaciones de parámetros (n, σ, ℓ) , todas las curvas caerán sobre una *curva universal* dada por la Ec. (7.9). En la Fig. 7.8 graficamos nuevamente las curvas del número promedio de vértices aislados de la Fig. 7.6 (normalizadas al tamaño de la red), $\langle \overline{V_x} \rangle$, pero ahora en función del grado promedio $\langle k \rangle$ y comprobamos que efectivamente todas las curvas $\langle \overline{V_x} \rangle$ vs. $\langle k \rangle$ caen una sobre otra (excepto por pequeñas diferencias en el intervalo $1 < \langle k \rangle < 10$, que se pueden observar en los recuadros de la Fig. 7.6 cuando $\sigma < 1$). En todos los paneles también graficamos en líneas punteadas la Ec. (7.9) y observamos una muy buena correspondencia con los datos numéricos, lo que es muy importante ya que esperabamos que la Ec. (7.9) funcionará bien solo para valores de $L \ll 1$.

Una vez que hemos observado que el grado promedio es el parámetro de escalamiento para el número de vértices no aislados, esperamos que $\langle k \rangle$ sea también el parámetro de escalamiento para otras cantidades topológicas. Con el fin de verificar esta hipótesis, exploramos el índice de Randić para este modelo.

En la Fig. 7.9 presentamos el índice de Randić promedio normalizado $\langle \overline{R} \rangle$ en función del grado promedio $\langle k \rangle$ para RGGs no uniformes de tamaño n . Normalizamos $\langle R \rangle$ al valor máximo que puede tomar: $\langle \overline{R} \rangle \equiv \langle R \rangle / n/2$. Como se esperaba, observamos

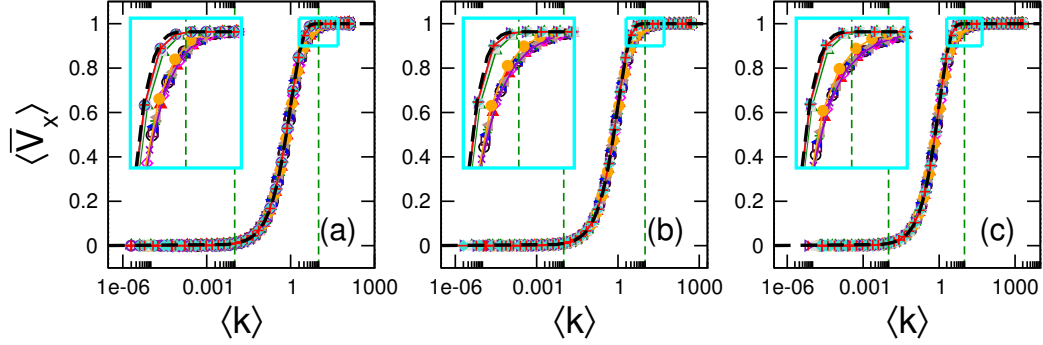


Figura 7.8: Número promedio de vértices no aislados $\langle V_{\times} \rangle$ normalizado a n como función del grado promedio $\langle k \rangle$ para RGGs no uniformes, para (a) $n = 125$, (b) $n = 500$ y (c) $n = 2000$. Cada panel muestra las 14 curvas reportadas en las Fig. 7.7(a-c). Los recuadros son ampliaciones de los rectángulos cian de los paneles principales. Las líneas punteadas corresponden a la Ec. (7.9). Las líneas punteadas verticales en $\langle k \rangle = 0.01$ y 10 marcan, aproximadamente, el inicio de la delocalización y el inicio del régimen del GOE, respectivamente. Figura tomada de [135].

que escala correctamente con $\langle k \rangle$, excepto para la región de $\langle k \rangle$ grande (ver los recuadros) donde observamos dos conjuntos de curvas que caen uno encima del otro: un conjunto correspondiente a $\sigma < 1$ y el otro a $\sigma \geq 1$. Este efecto es equivalente al observado para $\langle \bar{V}_{\times} \rangle$ (ver los recuadros de la Fig. 7.8).

Se ha demostrado que $\langle V_{\times} \rangle$ y $\langle R \rangle$ en los RGGs están altamente correlacionados [137], por lo que en las Figs. 7.10 (a, b) graficamos $\langle V_{\times} \rangle$ vs. $\langle R \rangle$ para RGG no uniformes con $\sigma < 1$ y observamos claramente que esta correlación también ocurre con los RGGs no uniformes. Además, la Fig. 7.10 también sugiere que

$$\langle V_{\times} \rangle \approx 2 \langle R \rangle, \quad (7.10)$$

ver las líneas punteadas en la parte superior de los datos en la Fig. 7.10. Por lo tanto, las Ecs. (7.10) y (7.9) nos permiten proponer

$$\langle R \rangle \approx (n/2) [1 - \exp(-\langle k \rangle)], \quad (7.11)$$

que de hecho coincide relativamente bien con los datos numéricos reportados en la Fig. 7.9 [ver las líneas punteadas]; excepto para la región de $\langle k \rangle$ grande donde las diferencias significativas entre Ec. (7.11) y los datos numéricos son evidentes [ver los recuadros].

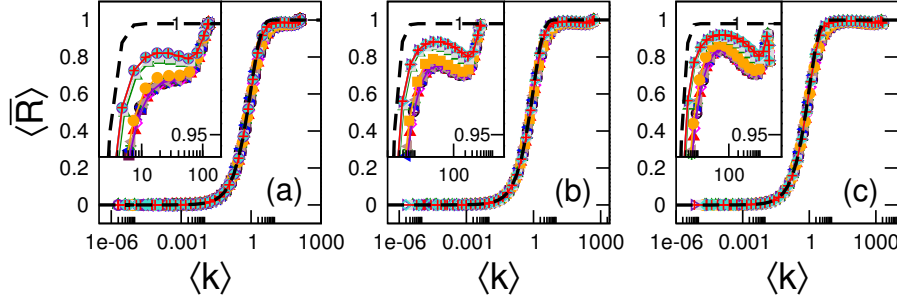


Figura 7.9: Índice de Randić promedio $\langle R \rangle$ normalizado a $n/2$ para (a) $n = 125$, (b) $n = 500$ y (c) $n = 2000$ como función del grado promedio $\langle k \rangle$ para RGGs no uniformes. Cada panel muestra 14 curvas correspondientes a diferentes grados de no uniformidad (de izquierda a derecha), σ : $\{0.001, 0.002, 0.004, 0.01, 0.02, 0.04, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1, 10, 100, \infty\}$. La línea punteada en todos los paneles corresponde a la Ec. (7.11). Cada dato fue calculado sobre un promedio de $10^7/n$ redes aleatorias. Figura tomada de [135].

7.1.2 Propiedades espectrales

En esta sección caracterizamos las propiedades espectrales de RGGs no uniformes utilizando la razón de espaciamientos entre autovalores consecutivos r y la entropía de Shannon S de los autovectores.

Siguiendo el enfoque antes mencionado de teoría de matrices aleatorias, agregamos autoconexiones y pesos caracterizados por una distribución normal con media cero y varianza uno a las matrices de adyacencia binarias de RGGs no uniformes. De manera que para $\ell = 0$ obtenemos matrices aleatorias diagonales (conjunto de Poisson (PE), en términos de RMT), mientras que cuando $\ell = 2$ obtenemos el conjunto ortogonal gaussiano (GOE) (es decir, matrices aleatorias simétricas y reales completas). Por lo tanto, se puede observar una transición del PE al GOE aumentando ℓ de cero a dos, para cualquier par fijo dado (n, σ) .

En este modelo, esta no es la única forma de observar la transición de PE a GOE; también podría observarse disminuyendo σ para un par fijo dado (n, ℓ) , ver por ejemplo Fig. 7.1, o aumentando n para (σ, ℓ) fijo.

A partir de las matrices de adyacencia pesadas de nuestro modelo y de sus autovalores ordenados $\{\lambda_i\}$ ($i = 1, \dots, n$) y los correspondientes autovectores normalizados Ψ^i (i.e. $\sum_{j=1}^n |\Psi_j^i|^2 = 1$) calculamos la razón de espaciamientos entre autovalores

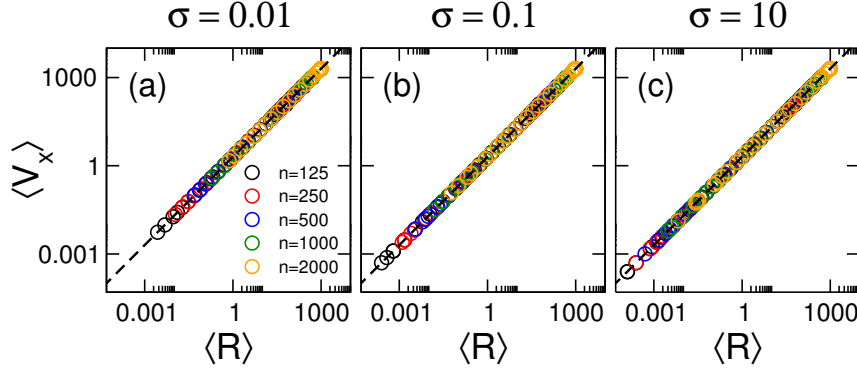


Figura 7.10: Número promedio de vértices no aislados $\langle V_{\times} \rangle$ en función del índice promedio de Randić $\langle R \rangle$ para RGGs no uniformes de diferentes tamaños n con grado de no uniformidad (a) $\sigma = 0.01$, (b) $\sigma = 0.1$ y (c) $\sigma = 10$. La línea punteada sobre los datos corresponde a $\langle V_{\times} \rangle = 2 \langle R \rangle$. Cada dato fue calculado sobre un promedio de $10^7/n$ redes aleatorias. Figura tomada de [135].

consecutivos r y la entropía de Shannon S de los autovectores definidos en las Ecs. (3.5) y (3.4).

Como se definió antes, $\langle X \rangle$ denota el promedio de cierta cantidad sobre un conjunto de matrices de adyacencia $\mathbf{A}$ o sobre todos los autovalores o autovectores según sea el caso. En esta sección X representa r o S .

En la Fig. 7.11 presentamos $\langle r \rangle$ y $\langle S \rangle$ en función del radio de conexión ℓ para este modelo. En esta figura se utilizan los mismos valores de n y σ que en la Fig. 7.6. De las Figs. 7.11 y 7.6 podemos resaltar que todas las curvas $\langle X \rangle$ vs. ℓ en todos los paneles muestran una transición suave (en escala semilogarítmica) desde el PE al GOE al aumentar ℓ ; los límites de PE y GOE se indican como líneas punteadas horizontales (inferior y superior, respectivamente). Notamos también que para n [σ] fijo, las curvas $\langle X \rangle$ vs. ℓ tienen una forma funcional muy similar pero están desplazadas hacia la derecha en el eje ℓ al aumentar n [σ], por lo tanto el inicio del límite GOE se alcanza para valores más pequeños de ℓ cuanto mayores son los valores de n y σ , sin embargo una vez que $\sigma \geq \sigma_c$, con $\sigma_c \approx 1$, las curvas $\langle X \rangle$ vs. ℓ no cambian al incrementar más σ . Observamos efectos de tamaño pequeño especialmente para $\langle r \rangle$ cuando $\ell \rightarrow 0$ y $\ell \rightarrow 2$ en el caso de $n = 125$, ver panel de la Fig. 7.11 (a).

Dada la forma similar de las curvas $\langle X \rangle$ vs. ℓ para diferentes combinaciones de

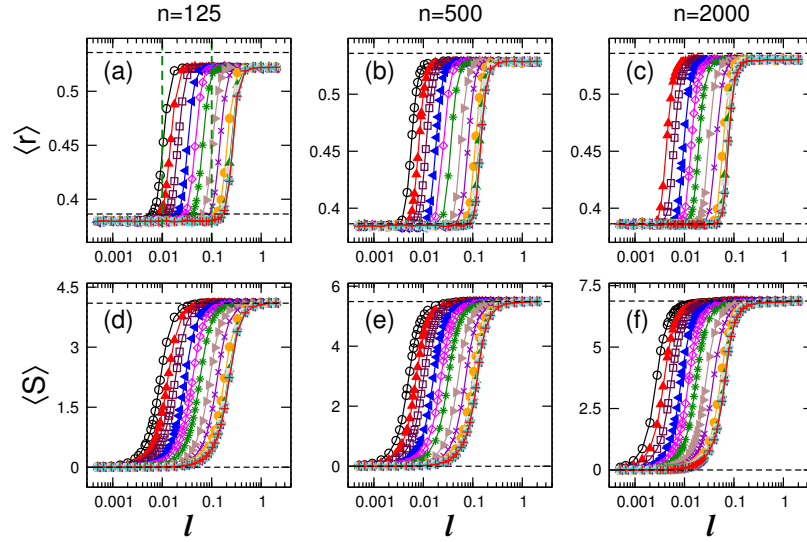


Figura 7.11: (a-c) Razón de espaciamento entre autovalores consecutivos promedio $\langle r \rangle$ y (d-f) entropía de Shannon promedio $\langle S \rangle$ en función del radio de conexión ℓ para RGGs no uniformes de tamaño n : (a,d) $n = 125$, (b,e) $n = 500$ y (c,f) $n = 2000$. Cada panel muestra 14 curvas correspondientes a diferentes grados de no uniformidad de izquierda a derecha σ : $\{0.001, 0.002, 0.004, 0.01, 0.02, 0.04, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1, 10, 100, \infty\}$. Las líneas horizontales (abajo y arriba, respectivamente) indican los límites PE y GOE. Las líneas verdes punteadas en (a) señalan $\ell = 0.01$ y 0.1 ; 0.1 es el valor de ℓ usado en la Fig. 7.3. Cada símbolo fue calculado sobre un ensamble de $10^7/n$ redes aleatorias.

Tabla 7.1: Valores del exponente γ obtenidos de los ajustes de las curvas $k^*(X)$ vs. n de los recuadros en la Fig. 7.12 (a) y (d) con la Ec. (7.12). En la columna de la derecha se reporta el valor promedio de γ .

	$\sigma = 0.001$	$\sigma = 0.002$	$\sigma = 0.004$	$\sigma = 0.01$	$\sigma = 0.02$	$\sigma = 0.04$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.4$	$\sigma = 0.8$	$\sigma = 1$	$\sigma = \infty$	$\langle \gamma \rangle$
$k^*(r)$ vs. n	0.1739	0.1656	0.1659	0.1691	0.1622	0.1672	0.1693	0.1565	0.1461	0.1376	0.1307	0.1297	0.1561
$k^*(S)$ vs. n	0.1626	0.1619	0.1614	0.1614	0.1624	0.1613	0.1621	0.1619	0.1509	0.1508	0.1443	0.1455	0.1572

n y σ , podemos anticipar que pueden escalarse de manera efectiva. Es decir, uno debería poder encontrar un parámetro de escalamiento $\xi \equiv \xi(n, \sigma, \ell)$ tal que las curvas $\langle \bar{X} \rangle$ vs. ξ sean invariantes, donde $\bar{X}$ es la medida X correctamente normalizada.

En la sección anterior concluimos que el grado promedio es el parámetro de escalamiento de $\langle V_x \rangle$, entonces nuestra primera conjetura es que $\langle k \rangle$ también puede ser el parámetro de escalamiento de $\langle r \rangle$ y $\langle S \rangle$. Para explorar esta conjetura primero normalizamos $\langle r \rangle$ y $\langle S \rangle$, de modo que podamos compararlos para diferentes tamaños de red n . Similarmente al caso de redes mutualistas, elegimos $\langle \bar{S} \rangle = \langle S \rangle / \langle S \rangle_{\text{GOE}}$ con $\langle S \rangle_{\text{GOE}} \approx \ln(n/2.07)$ y dados los efectos de tamaño pequeño observados para $\langle r \rangle$,

$$\langle \bar{r} \rangle = \frac{\langle r \rangle - \langle r(\ell = 0) \rangle}{\langle r(\ell = 2) \rangle - \langle r(\ell = 0) \rangle} ;$$

donde $\langle r(\ell = 0) \rangle$ y $\langle r(\ell = 2) \rangle$, que no dependen de σ , se calculan numéricamente para un n dado.

Luego, en la Fig. 7.12 presentamos $\langle \bar{r} \rangle$ y $\langle \bar{S} \rangle$ como función de $\langle k \rangle$; los datos que se muestran en la Fig. 7.12 son los mismos que los de la Fig. 7.11. A partir de esta figura podemos ver claramente que aunque las curvas $\langle \bar{X} \rangle$ vs. $\langle k \rangle$ caen una encima de la otra en cada uno de los paneles de la figura, todavía existe una dependencia pequeña pero medible de estas curvas con n . Es decir, mientras mantienen su forma funcional, sufren un desplazamiento en el eje $\langle k \rangle$ al aumentar n . Por lo tanto, concluimos que $\langle k \rangle$ no escala las propiedades espectrales ni de autovectores del modelo de RGGs no uniformes. Por lo tanto, para buscar el parámetro de escalamiento adecuado ξ , primero establecemos una cantidad para caracterizar la posición de las curvas $\langle \bar{X} \rangle$ vs. $\langle k \rangle$ en el eje $\langle k \rangle$. Dado que todas las curvas $\langle \bar{X} \rangle$ vs. $\langle k \rangle$ pasan de cero (régimen PE) a uno (régimen GOE) cuando $\langle k \rangle$ aumenta de valores pequeños a grandes, elegimos el valor de $\langle k \rangle$ para el cual $\langle \bar{X} \rangle \approx 0.5$; vea las líneas punteadas horizontales en la Fig. 7.12 (b, e). Etiquetamos el valor de $\langle k \rangle$ en la mitad

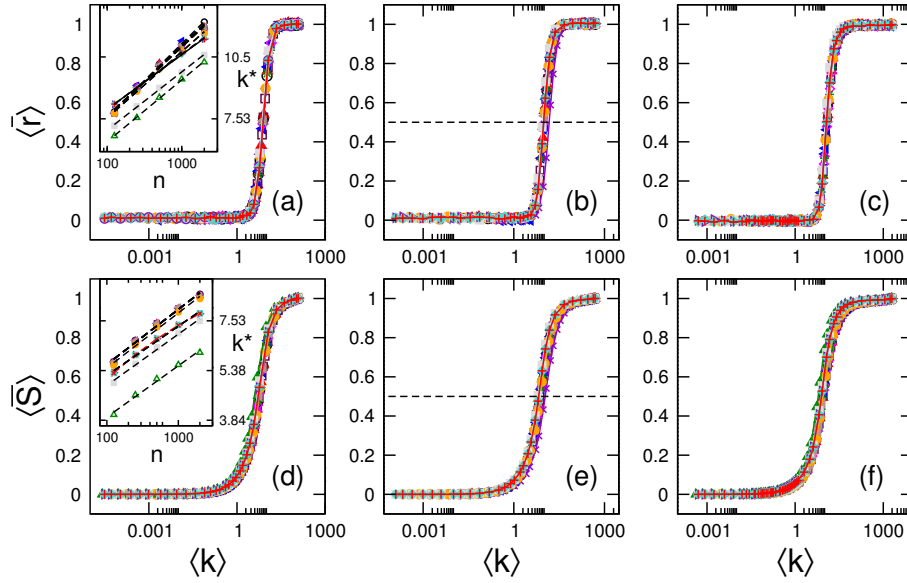


Figura 7.12: (a-c) Razón promedio de espaciamiento entre autovalores consecutivos $\langle \bar{r} \rangle$ y (d-f) energía de Shannon promedio $\langle \bar{S} \rangle$ como función del grado promedio $\langle k \rangle$ para RGGs no uniformes de tamaño (a,d) $n = 125$, (b,d) $n = 500$, y (c,f) $n = 2000$. Mismos datos que en la Fig. 7.11. Los recuadros en los paneles (a) y (d) muestran k^* vs. n extraído de la intersección de las curvas $\langle \bar{r} \rangle$ vs. $\langle k \rangle$ y $\langle \bar{S} \rangle$ vs. $\langle k \rangle$ con las líneas rectas $\langle \bar{r} \rangle = 0.5$ y $\langle \bar{S} \rangle = 0.5$, respectivamente. Las líneas punteadas corresponden a los ajustes de los datos con la Ec. (7.12). Los exponentes de γ obtenidos de los ajustes son reportados en la Tabla. 7.1. Las líneas punteadas horizontales en los paneles (b,e) representan $\langle \bar{X} \rangle = 0.5$. Figura tomada de [135].

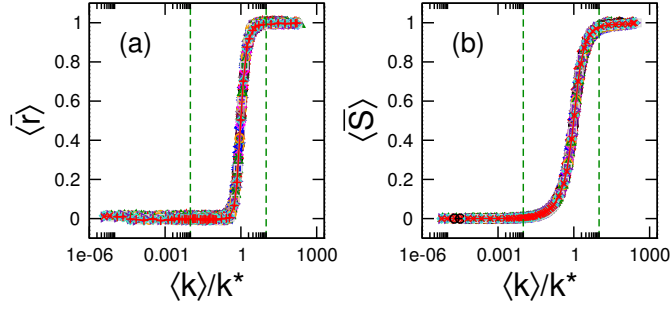


Figura 7.13: (a) $\langle \bar{r} \rangle$ y (b) $\langle \bar{S} \rangle$ como función del parámetro de escalamiento $\xi = \langle k \rangle / k^*$. Mismos datos que en la Fig. 7.12. Las líneas punteadas verticales en $\xi = 0.01$ y 10 marcan, aproximadamente, el inicio del régimen de delocalización y el inicio del régimen GOE, respectivamente. Figura tomada de [135].

de la transición de PE a GOE como k^* . En los recuadros de las Figs. 7.12 (a) y 7.12 (d) reportamos k^* vs. n extraídos de la intersección de las curvas $\langle \bar{r} \rangle$ vs. $\langle k \rangle$ y $\langle \bar{S} \rangle$ vs. $\langle k \rangle$ con las líneas rectas $\langle \bar{r} \rangle = 0.5$ y $\langle \bar{S} \rangle = 0.5$, respectivamente. De hecho, la tendencia lineal de los datos (en escala logarítmica) k^* vs. n sugiere el comportamiento de la ley de potencias,

$$k^* = \mathcal{C}n^\gamma. \quad (7.12)$$

En los recuadros de las Figs. 7.12 (a) y 7.12 (d) podemos ver que la Ec. (7.12) proporciona excelentes ajustes a los datos; vea las líneas punteadas en los recuadros de las Figs. 7.12 (a) y 7.12 (d). De los valores de γ obtenidos mediante el ajuste de la Ec. 7.12 a los datos de los recuadros en las Figs. 7.12 (a) y (d), reportados en la Tabla 7.1, podemos concluir que $\gamma \approx 0.16$ tanto para la razón de espaciamentos entre autovalores consecutivos como para la entropía de Shannon, para todos los valores de σ .

Finalmente, definimos el parámetro de escalamiento como la razón entre $\langle k \rangle$ y k^* , por lo que obtenemos

$$\xi \equiv \frac{\langle k \rangle}{k^*} \propto \frac{\langle k \rangle}{n^\gamma} = n^{-\gamma} \langle k \rangle. \quad (7.13)$$

En la Fig. 7.13 graficamos nuevamente las curvas de $\langle \bar{X} \rangle$ ahora como una función de ξ , podemos ver que ahora las curvas para diferentes tamaños de red n y grados de no uniformidad σ colapsan sobre curvas universales. Veamos también que cada medida X se caracteriza por una curva universal ligeramente diferente. En particular, observamos que la transición de PE a GOE es más aguda para $\langle \bar{r} \rangle$, en comparación con $\langle \bar{S} \rangle$.

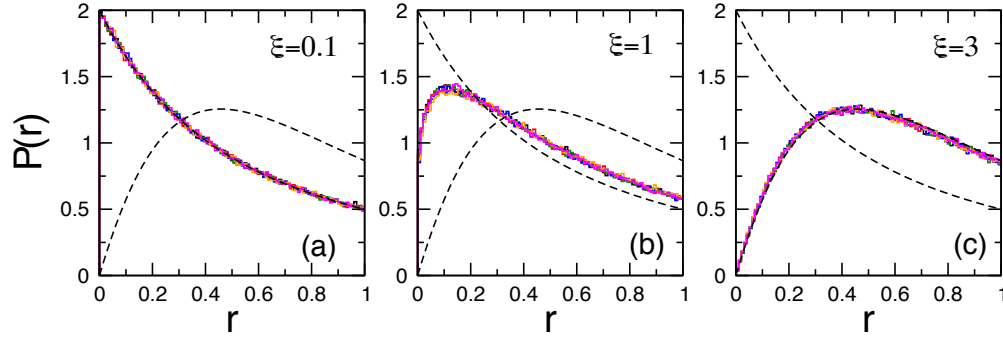


Figura 7.14: Histogramas de la función de distribución de probabilidad de la razón de espaciamentos de autovalores consecutivos $P(r)$ para tres valores del parámetro de escalamiento ξ . Cada panel muestra 6 histogramas correspondientes a las siguientes combinaciones de (σ, n) : $\{(0.2, 125), (0.04, 250), (0.1, 500), (0.001, 800), (0.02, 1000), (0.01, 2000)\}$. Cada histograma se calculó de 10^6 razones. Las líneas punteadas corresponden a $P_{\text{PE}}(r)$ y $P_{\text{GOE}}(r)$, ver Ecs. (3.6) y (3.7). Figura tomada de [135].

Finalmente, una vez definido el parámetro de escalamiento de las cantidades aquí estudiadas, se espera que otras propiedades relacionadas con estas cantidades también puedan ser escaladas por el mismo parámetro de escalamiento. Como ejemplo, validamos la universalidad del parámetro de escalamiento ξ aplicándolo a $P(r)$, la función de distribución de probabilidad de r . En la Fig. 7.14 presentamos histogramas de la función de distribución de probabilidad de r , $P(r)$. Cada panel muestra seis histogramas para diferentes combinaciones de σ y n , mientras que ℓ se ajusta para producir el mismo valor de ξ . Dado que los seis histogramas de cada panel caen uno encima del otro, podemos decir con seguridad que $P(r)$ es invariante para ξ fijo. Además, también incluimos en cada panel de la Fig. 7.14 las predicciones correspondientes para $P(r)$ para el PE (Ec. 3.6) y el GOE (Ec. 3.7). Podemos ver que existe una concordancia perfecta de $P(r)$ con $P_{\text{PE}}(r)$ y $P_{\text{GOE}}(r)$ cuando $\xi = 0.1$ y $\xi = 3$, respectivamente. Como era de esperar, para $\xi = 1$, es decir, en el régimen de transición de PE a GOE, observamos que la forma de $P(r)$ está entre las predicciones de PE y GOE.

En resumen, en este capítulo se propuso un modelo de RGGs no uniformes donde se distribuyen n vértices en un disco unitario siguiendo una distribución normal. Nuestro modelo está definido por los parámetros:

número de vértices n , radio de conexión ℓ y la varianza de la distribución de los vértices σ . Observamos en nuestro modelo la separación de dos regímenes: el régimen no uniforme cuando $\sigma < \sigma_c$ y el régimen uniforme cuando $\sigma \geq \sigma_c$, con $\sigma_c \approx 1$. Se encontraron expresiones heurísticas para el número de vértices no aislados y el grado promedio, posteriormente utilizando estas expresiones se encontró el parámetro de escalamiento ξ de este modelo. Es importante mencionar que las expresiones heurísticas para el número de vértices no aislados y el grado promedio fueron útiles para describir las curvas universales de cantidades topológicas del modelo. Finalmente validamos la universalidad del parámetro de escalamiento utilizando la distribución de probabilidad de la razón de espaciamientos entre autovalores consecutivos $P(r)$.

Capítulo 8

Redes con pérdidas y ganancias

En los capítulos anteriores se estudiaron redes cuyas matrices de adyacencia son matrices reales simétricas, es decir, matrices hermitianas con autovalores y autovectores reales. Sin embargo existen una gran cantidad de sistemas representados por redes en los que la matriz de adyacencia no es hermitiana.

En este capítulo nos inspiramos en hamiltonianos que describen sistemas abiertos o de dispersión, sistemas que interactúan con un entorno o materiales activos. Dentro del enfoque hamiltoniano no hermitiano efectivo, tal apertura o interacción se modela agregando términos complejos $\pm i\gamma$ a la diagonal principal del hamiltoniano del sistema de interés [138–143].

Iniciamos considerando el modelo de enlace fuerte de Anderson [9] con potenciales de sitio cero ($H_{ii} = 0$) e integrales de salto constantes ($H_{ij} = 1$). Dada la correspondencia uno a uno entre la matriz de adyacencia $\mathbf{A}$ de una red y la matriz hamiltoniana $\mathbf{H}$ de un sólido ξ -dimensional representaremos las matrices hamiltonianas del sistema de enlace fuerte mediante matrices de adyacencia de redes aleatorias ralas.

Consideraremos un modelo de enlace fuerte con pérdidas y ganancias. En los sistemas de enlace fuerte, el término $i\gamma$ representa pérdidas y el término $-i\gamma$ representa ganancias. Podemos agregar el término $\pm i\gamma$ a sistemas de enlace fuerte de las siguientes maneras: localmente, agregando este término solamente en algunos sitios seleccionados como se usa comúnmente en arreglos regulares para estudiar las propiedades de dispersión y transporte, ver, por ejemplo [144–146], globalmente, agregando este término a todos los sitios en el sistema, como se ha utilizado en cadenas lineales para representar un sistema acoplado a un canal de decaimiento común, ver por ejemplo [147, 148], y de forma

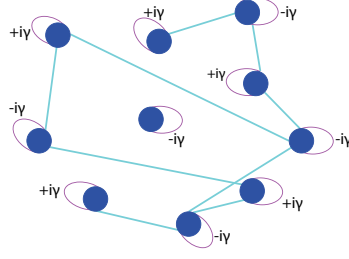


Figura 8.1: Ejemplo de red ER con pérdidas y ganancias equilibradas con 10 vértices y $p = 0.2$.

equilibrada, agregando $i\gamma$ a todos los sitios con la misma proporción de signos más y menos. La adición de términos alternos $i\gamma$ y $-i\gamma$ a los sitios de matrices unidimensionales produce cables con simetría PT [149, 150]. En nuestros modelos elegimos esta última configuración, donde *equilibrado* implica que la red está formada por un número par de vértices.

8.1 Modelo ER con pérdidas y ganancias

El modelo de redes con pérdidas y ganancias que proponemos está basado en las redes de tipo ER estudiadas en el Capítulo 4 y lo definimos como sigue. Comenzamos con el modelo *estándar* ER estudiado en el Capítulo 4, agregando autoconexiones y pesos aleatorios. Luego, agregamos la amplitud imaginaria $\pm i\gamma$ a los pesos de las autoconexiones de la red de forma equilibrada. Dado que los vértices de la red no están ordenados, las pérdidas y las ganancias equilibradas se introducen de forma aleatoria en la red. Esto, en contraste con sistemas PT -simétricos [149], donde las pérdidas y las ganancias se alternan periódicamente.

De esta manera el modelo de red aleatoria corresponde a redes aleatorias de enlace fuerte con pérdidas y ganancias aleatorias. Además modularémos la fuerza de las pérdidas y las ganancias mediante el valor de γ . En la Fig. 8.1 mostramos un ejemplo de una red de tipo ER con pérdidas y ganancias equilibradas con 10 vértices.

Las matrices de adyacencia correspondientes a redes de tipo ER con pérdidas y ganancias equilibradas quedan definidas como

$$A_{ij} = \begin{cases} \epsilon_{ij} + (-1)^i \gamma & \text{si } i = j, \\ \epsilon_{ij}/\sqrt{2} & \text{si hay una arista entre los vértices } i \text{ y } j, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (8.1)$$

Aquí, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ son variables aleatorias estadísticamente independientes caracterizadas por una distribución normal con media cero y varianza uno. Podemos notar que el término $\pm i\gamma$, con $\gamma \neq 0$, hace que la matriz de adyacencia no sea hermitiana. De acuerdo con esta definición, podemos recuperar el caso PE para $p = 0$ y $\gamma = 0$, mientras que el GOE se recupera cuando $p = 1$ y $\gamma = 0$. Las redes ER con pérdidas y ganancias dependen de tres parámetros: el tamaño de la red n , la conectividad de la red p y la magnitud de pérdidas y ganancias γ .

8.1.1 Análisis de escalamiento

Una vez que generamos las matrices de adyacencia del modelo podemos observar que no son hermitianas, sin embargo, al tratarse de una red no dirigida son simétricas.

Dadas estas condiciones resulta interesante conocer el espectro del modelo para diferentes combinaciones de parámetros. Para esto en la Fig. 8.2 presentamos el espectro correspondiente a redes tipo ER con pérdidas y ganancias para redes de tamaño $n = 100$ y diferentes valores de p y γ en distintos ordenes de magnitud. Podemos ver que los autovalores son complejos, además notamos que la amplitud de la parte compleja está determinada por la magnitud de γ .

Ahora para iniciar el análisis de escalamiento de este modelo usamos la entropía de Shannon definida en la Ec. (3.4). Construimos ensambles de matrices de adyacencia de redes aleatorias de tipo ER con pérdidas y ganancias, $G(n, p, \gamma)$, y mediante diagonalización numérica exacta obtenemos los autovectores Ψ^i y autovalores λ_i ($k = 1 \dots n$), después utilizando todos los autovectores de un ensamble de matrices de adyacencia de tamaño n calculamos la entropía de Shannon promedio del ensamble $\langle S \rangle$.

Para facilitar el estudio de la entropía de Shannon normalizamos $\langle S \rangle$ a su valor máximo. Para esto notamos que cuando $p = 0$ para cualquier valor de γ , las matrices de adyacencia son diagonales, por lo tanto, los autovectores normalizados tienen solo una componente diferente de cero con magnitud igual a uno y $\langle S \rangle = 0$. Por otro lado, para $p = 1$ y $\gamma = 0$ las matrices de adyacencia corresponden a matrices del GOE, entonces $\langle S \rangle = S_{\text{GOE}}$, sin embargo, para $p = 1$ y $\gamma \neq 0$ las matrices de adyacencia no son reales y no pertenecen al GOE, entonces, $\langle S \rangle \neq S_{\text{GOE}}$; pero dado que observamos que $\langle S \rangle \approx S_{\text{GOE}}$ utilizamos S_{GOE} como referencia para normalizar la entropía de Shannon.

En las Figs. 8.3 y 8.4 mostramos la entropía de Shannon promedio $\langle S \rangle$, normalizada

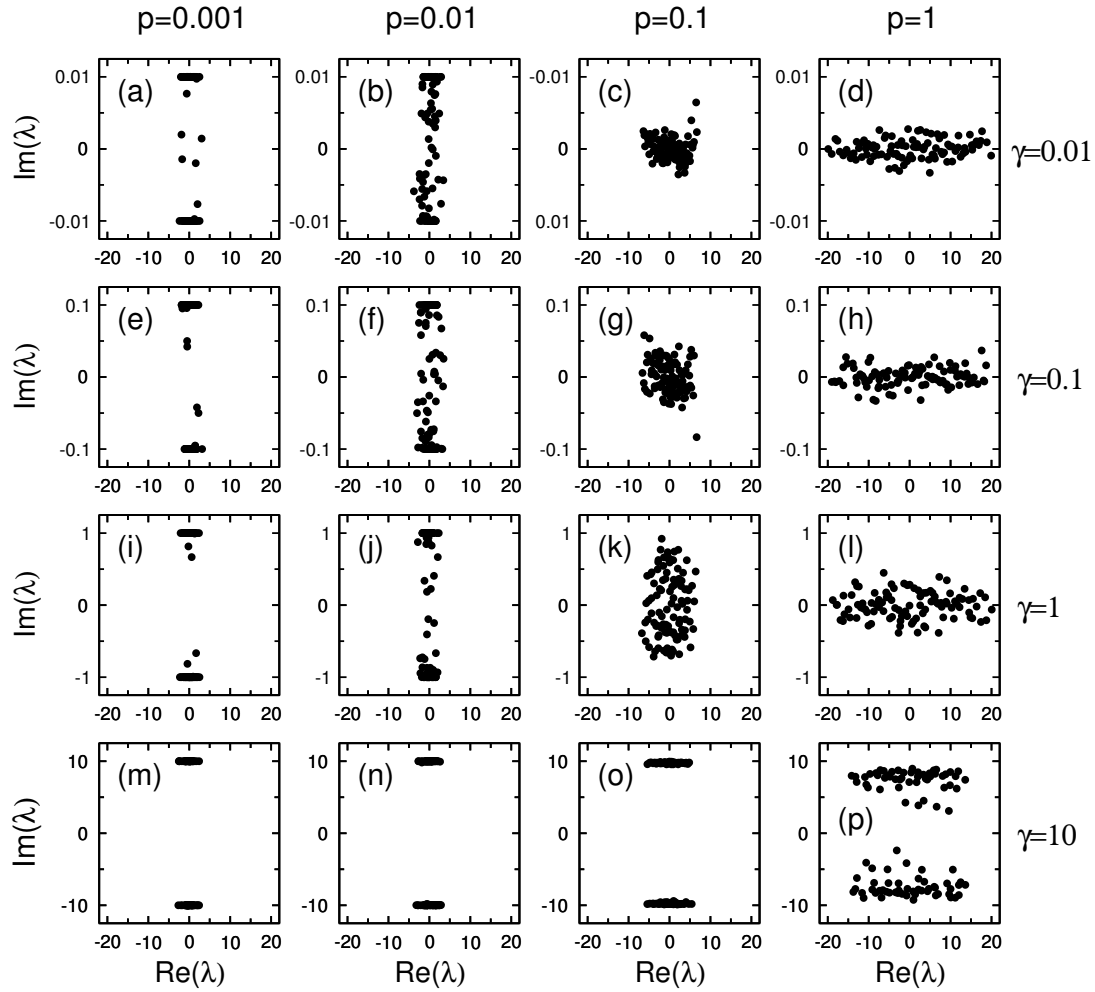


Figura 8.2: Autovalores de redes de tipo ER con pérdidas y ganancias equilibradas para diferentes valores de p y γ . En todos los casos utilizamos $n = 100$. La conectividad aumenta de derecha a izquierda mientras que la magnitud de las pérdidas y las ganancias aumenta de arriba a abajo.

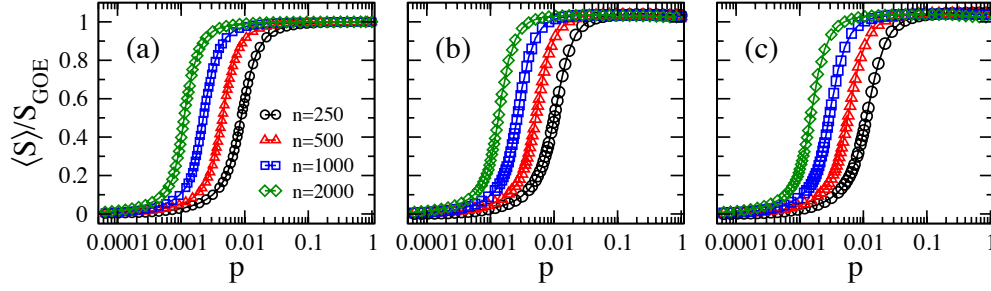


Figura 8.3: Entropía de Shannon promedio $\langle S \rangle$ normalizada a $S_{\text{GOE}} \approx \ln(n/2.07)$ en función del parámetro de conectividad p de redes aleatorias Erdős-Rényi (con tamaños en el rango $n = 250$ a 2000) con pérdidas y ganancias equilibradas de magnitud γ . (a) $\gamma = 0.01$, (b) $\gamma = 1$, y (c) $\gamma = 2$. Cada símbolo fue calculado sobre 10^6 autovectores. Figura tomada de [151].

a S_{GOE} , en función de la conectividad p para matrices de adyacencia de redes aleatorias ER con pérdidas y ganancias equilibradas. En cada panel de la Fig. 8.3 mantenemos fijo el valor de γ y variamos el tamaño de la red, mientras que en cada panel de la Fig. 8.4 el tamaño de la red se mantiene fijo y variamos la magnitud de γ . Observamos que las curvas de $\langle S \rangle / S_{\text{GOE}}$, para cualquier combinación de n y γ , tienen una forma muy similar en función de p : las curvas $\langle S \rangle / S_{\text{GOE}}$ muestran una transición suave desde aproximadamente cero (régimen localizado) a aproximadamente uno (régimen delocalizado) cuando p aumenta de $p \sim 0$ (en su mayoría vértices aislados) a uno (grafos completos).

De la Fig. 8.3, para γ fijo, observamos que cuanto mayor es el tamaño de la red n , menor es el valor de p necesario para acercarse al régimen delocalizado. Además notamos que las curvas de $\langle S \rangle / S_{\text{GOE}}$ vs. p se desplazan hacia la izquierda en el eje p al aumentar n . Todo este panorama está de acuerdo con el caso $\gamma = 0$, como se muestra en la Ref. [66] y en el Capítulo 4. Por el contrario, de la Fig. 8.4 para n fijos, las curvas de $\langle S \rangle / S_{\text{GOE}}$ vs. p se desplazan hacia la derecha en el eje p al aumentar γ ; como se ve claramente en los recuadros de la Fig. 8.4. Como referencia, incluimos el caso $\gamma = 0$ como líneas negras en todos los paneles de la Fig. 8.4. En ambas figuras observamos que al cambiar los valores de n o γ las curvas graficadas en escala semi-logarítmica, simplemente se desplazan en el eje p pero su forma sigue siendo la misma. Esto nos hace pronosticar la existencia de un parámetro de escalamiento que depende tanto de n como de γ . Para buscar el parámetro

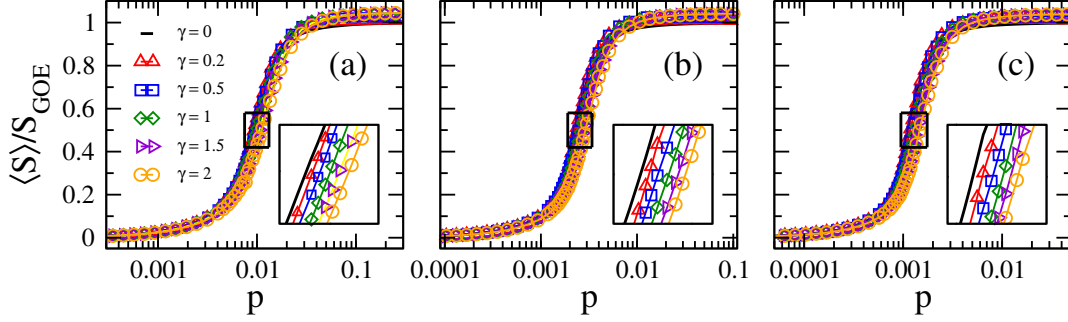


Figura 8.4: Entropía de Shannon promedio $\langle S \rangle$ normalizada a $S_{\text{GOE}} \approx \ln(n/2.07)$ en función del parámetro de conectividad p de redes aleatorias Erdős-Rényi con pérdidas y ganancias de tamaño n con diferentes magnitudes de γ . (a) $n = 250$, (b) $n = 1000$, y (c) $n = 4000$. Recuadros: Ampliaciones alrededor del punto de transición de localización a delocalización en los paneles principales. Cada símbolo fue calculado sobre 10^6 autovectores. Figura tomada de [151].

de escalamiento, caracterizamos la posición de las curvas $\langle S \rangle / S_{\text{GOE}}$ en el eje p utilizando el punto de transición de localización a delocalización de los autovectores correspondientes a matrices de adyacencia de redes ER con pérdidas y ganancias, el cual etiquetamos como p^* . Luego, en las Figs. 8.5 (a) y 8.5 (b) presentamos el punto de transición p^* en función de n y γ , respectivamente. La tendencia lineal de los datos (en escala log-log) en la Fig. 8.5 (a) implica una relación de ley de potencias de la forma

$$p^* = \mathcal{C}n^\delta. \quad (8.2)$$

Ajustamos la Ec. (8.2) a los datos de la Fig. 8.5 (a) y observamos que en efecto esta ecuación proporciona muy buenos ajustes a los datos (los valores de los parámetros de ajuste se reportan en la Tabla 8.1). Podemos observar que en este caso la potencia de ajuste es $\delta \approx -0.98$ para todo $\gamma > 0$, esta potencia presenta una ligera diferencia con el caso $\gamma = 0$ donde $\delta \approx -1$ reportado en el Capítulo 4 (ver también [66]). Por otro lado, en la Fig. 8.5 (b) graficamos la razón p^*/n^δ , con $\delta = -0.98$, en función de γ . Con esto ya tomamos en cuenta el escalamiento establecido en la Ec. (8.2) de manera que nos permite examinar más fácilmente la dependencia de p^* con γ . De hecho, para $\gamma > 0.4$ llegamos a la conclusión de que

$$\frac{p^*}{n^\delta} = \mathcal{C} \approx 2 + \frac{\gamma}{4}. \quad (8.3)$$

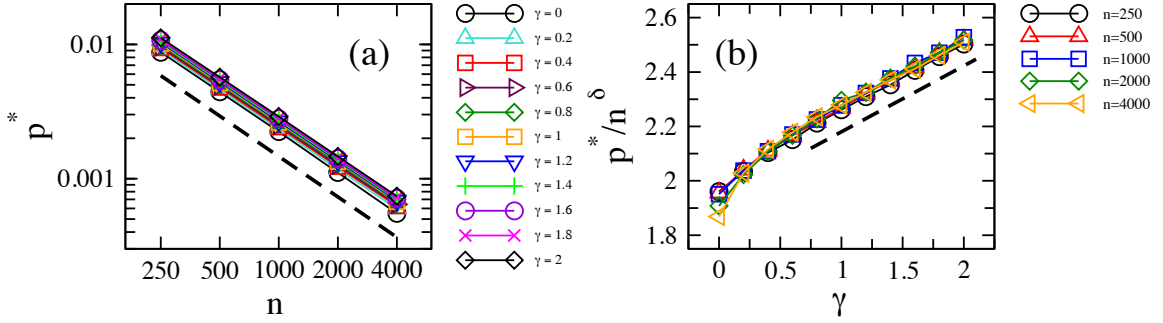


Figura 8.5: Punto de transición de localización–delocalización p^* (definido como el valor de p para el cual $\langle S \rangle / S_{\text{GOE}} \approx 0.5$) como función (a) del tamaño de la red n (para varios valores de γ) y (b) la magnitud de las pérdidas y ganancias γ (para varios valores de n). En (b) fijamos δ a -0.98. Las líneas discontinuas en (a) y (b) son proporcionales a $n^{-0.98}$ y γ , respectivamente. Figura tomada de [151].

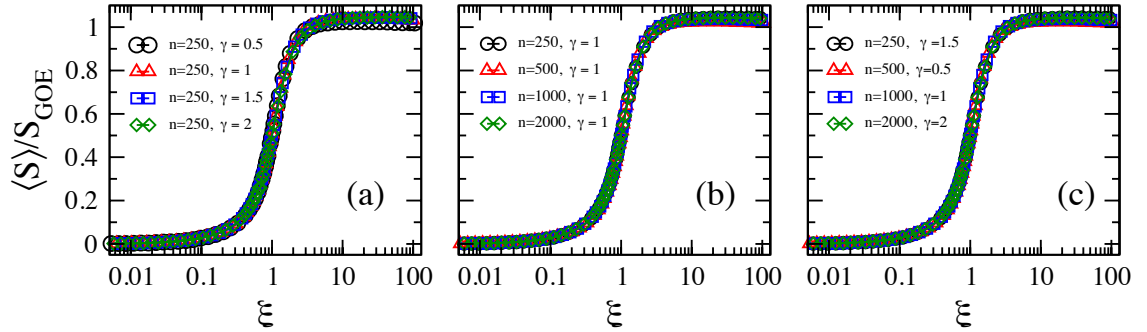


Figura 8.6: Entropía de Shannon promedio $\langle S \rangle$ normalizada a $S_{\text{GOE}} \approx \ln(n/2.07)$ en función del parámetro de escalamiento ξ , ver Ec. (8.4), de redes de tipo Erdős-Rényi con pérdidas y ganancias. (a) $n = 250$ y diferentes magnitudes de γ , (b) $\gamma = 1$ para diferentes tamaños de red n , y (c) diferentes combinaciones de n y γ . Figura tomada de [151].

Tabla 8.1: Valores de $\mathcal{C}$ y δ obtenidos de los ajustes de las curvas p^* vs. n de la Fig. 8.5(a) con la Ec. (8.3).

γ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$\mathcal{C}$	2.18	2.06	2.09	2.11	2.17	2.27	2.28	2.33	2.4	2.46	2.5
δ	-0.997	-0.982	-0.979	-0.976	-0.976	-0.976	-0.978	-0.977	-0.979	-0.979	-0.979

Por lo tanto, como podemos ver en la Fig. 8.6, al trazar nuevamente las curvas $\langle S \rangle / S_{\text{GOE}}$ ahora como una función de la conectividad dividida por el punto de transición de localización a delocalización,

$$\xi \equiv \frac{p}{p^*}, \quad (8.4)$$

observamos que las curvas para diferentes combinaciones de parámetros (n, γ) colapsan sobre una *curva universal*. Esto significa que una vez que se fija la relación ξ , sin importar el tamaño del grafo y la magnitud de las pérdidas y ganancias, la entropía de información de los autovectores también es fija.

8.1.2 Propiedades de autovalores

Una vez que hemos encontrado que ξ es el parámetro de escalamiento de las propiedades de autovectores (caracterizadas por su entropía de Shannon) del modelo de redes aleatorias ER con pérdidas y ganancias, predecimos que otras propiedades (espectrales, dinámicas, de transporte, etc.) del modelo también serán escaladas por el mismo parámetro. Por lo tanto, a continuación validamos nuestra conjetura analizando los autovalores correspondientes.

Primero calculamos los autovalores para ensambles de matrices de adyacencia de redes ER con pérdidas y ganancias utilizando diferentes combinaciones de parámetros. En la Fig. 8.7 mostramos mapas de densidad (en el plano complejo) de los autovalores λ de redes aleatorias de tipo Erdős-Rényi con pérdidas y ganancias. En esta figura podemos ver claramente la competencia de los dos parámetros principales del modelo: la conectividad p y la magnitud de las pérdidas y ganancias γ (para n fijo). Por un lado, para p pequeños (es decir, vértices en su mayoría aislados) domina la diagonal principal de las matrices de adyacencia y la parte imaginaria de los autovalores correspondientes es aproximadamente igual a $\pm i\gamma$, entonces los autovalores forman dos nubes delgadas alrededor de $\pm i\gamma$ como se muestra en los paneles de la izquierda de la Fig. 8.7. Por otro lado, para p grandes (es

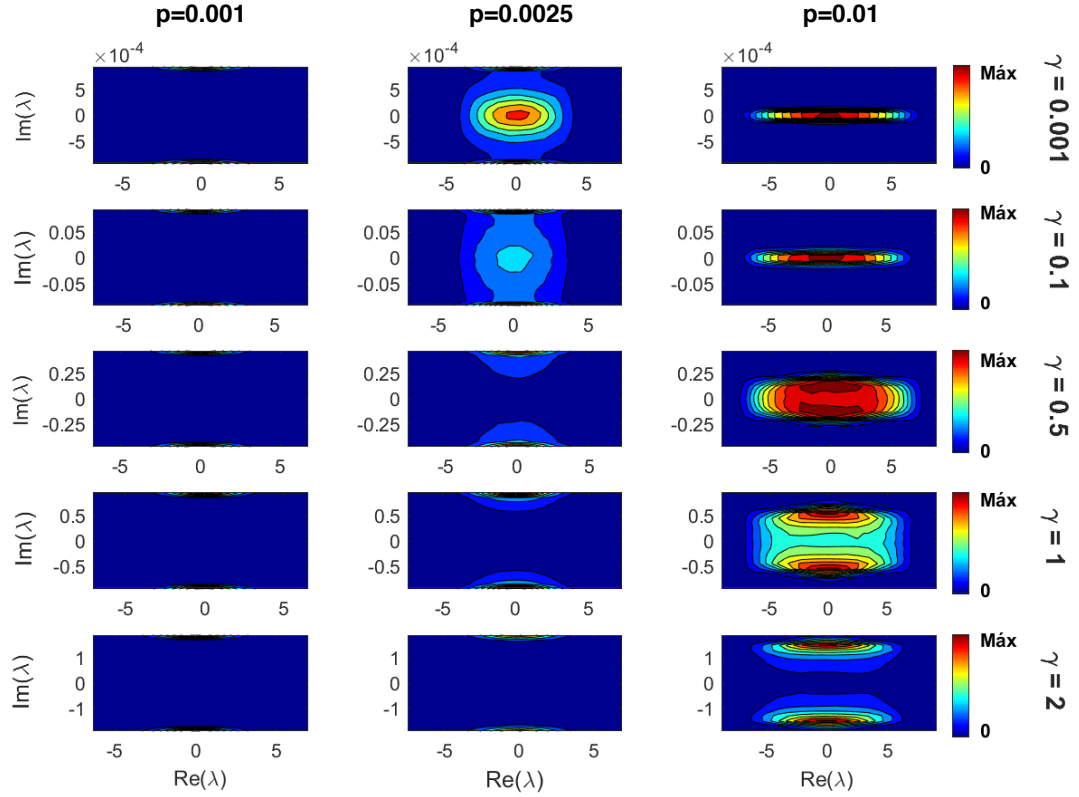


Figura 8.7: Densidad de autovalores λ en el plano complejo para varias combinaciones de conectividad p y magnitud de pérdidas y ganancias γ . Se considera $n = 1000$. La conectividad aumenta de derecha izquierda mientras que la magnitud de las pérdidas y las ganancias aumenta de arriba a abajo. Cada mapa de densidad se contruyó utilizando 10^6 autovalores. Figura tomada de [151].

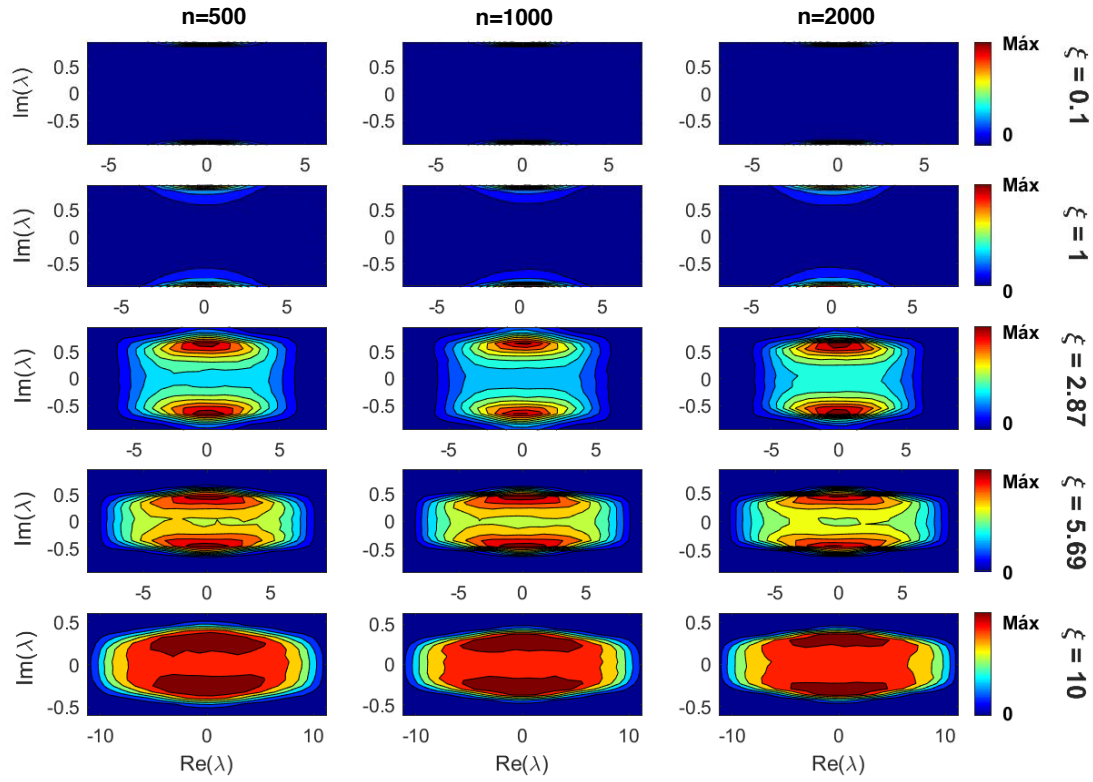


Figura 8.8: Densidad de autovalores λ en el plano complejo para tres tamaños de red n (500, 1000 y 2000) e incrementando el valor de ξ (de arriba a abajo). Cada mapa de densidad se contruyó utilizando 10^6 autovalores. Figura tomada de [151].

decir, grafos altamente conectados), la densidad de los elementos fuera de la diagonal de las matrices de adyacencia también es grande y los autovalores correspondientes forman una nube con centro en el origen del plano complejo que se hace más ancha al aumentar γ , paneles de la derecha de la Fig. 8.7. Además, para $\gamma \approx 1$ esta nube se divide en dos nubes que se separan más del eje real para valores aún mayores de γ . Los mapas de densidad de autovalores mostrados en la Fig. 8.7 corresponden a redes de tamaño $n = 1000$, sin embargo para otros tamaños encontramos resultados muy similares.

Una vez observado el panorama general del espectro en función de diferentes combinaciones de parámetros de γ y p , exploramos que sucede con el espectro para valores fijos de ξ . Para esto en la Fig. 8.8 fijamos el valor de ξ en cada renglón y el valor de n en cada columna y graficamos la densidad de autovalores complejos. Podemos observar que para ξ fijo el espectro es estadísticamente equivalente independientemente del tamaño de la red, con lo que comprobamos que ξ también fija las propiedades espectrales de nuestro modelo.

En resumen, en este capítulo se propusieron dos modelos de redes con pérdidas y ganancias equilibradas, es decir, el mismo número de pérdidas que de ganancias, en los que a diferencia de los modelos previamente estudiados, las matrices de adyacencia correspondientes no son matrices hermitianas. Por un lado el primer modelo es un modelo basado en redes de tipo ER como las estudiadas en el Capítulo 4 en el que se introdujeron pérdidas y ganancias de manera aleatoria. Estas redes tienen un espectro complejo. Utilizando la entropía de Shannon se encontró un parámetro de escalamiento para este modelo. Estudiamos también los autovalores del modelo en función de sus parámetros, observamos que la amplitud de la parte imaginaria de los autovalores está determinada por la magnitud de las pérdidas y las ganancias γ y que para valores pequeños de p los autovalores se agrupan en nubes cercanas a $\pm i\gamma$, mientras que para mayores valores de p las nubes se hacen más grandes. Después verificamos nuestro parámetro de escalamiento encontrado utilizando la entropía de Shannon para la densidad de autovalores complejos y mostramos que efectivamente, una vez que ξ es fijo, la densidad de autovalores es estadísticamente la misma.

Capítulo 9

Conclusiones

El objetivo de esta Tesis fue proponer y estudiar modelos nulos para matrices de adyacencia de redes complejas. Basándonos principalmente en el modelo de Erdős-Rényi (ER) propusimos modelos de redes bipartitas, redes mutualistas y redes con pérdidas y ganancias. También propusimos un modelo de redes geométricas aleatorias (RGG por sus siglas en inglés Random Geometric Graph) con distribución de vértices no uniforme.

Para el estudio de las propiedades de los modelos de redes aleatorias utilizamos dos enfoques diferentes. Por un lado, caracterizamos los modelos a través del estudio de sus propiedades topológicas utilizando índices topológicos. Por otro lado estudiamos las propiedades de la red mediante sus propiedades espectrales. Partiendo del hecho de que existe una correspondencia entre matrices de adyacencia de redes aleatorias con matrices aleatorias, estudiamos las propiedades espectrales de las redes utilizando algunas cantidades propias de la Teoría de Matrices Aleatorias, lo que llamamos enfoque RMT (por sus siglas en inglés Random Matrix Theory). Siguiendo este enfoque primero agregamos pesos aleatorios a las matrices de adyacencia de las redes. Posteriormente calculamos algunas cantidades usadas comúnmente en RMT para caracterizar los modelos de redes aleatorias.

Es importante remarcar que los pesos aleatorios que agregamos a las matrices de adyacencia no afectan las propiedades topológicas de los modelos de redes.

Para cada modelo de red mediante análisis de escalamiento se identificó un parámetro en función de los parámetros que lo definen que fija sus propiedades, de manera que para diferentes combinaciones de parámetros de la red mientras este parámetro se mantenga fijo, las propiedades de la red se mantienen invariantes. A este parámetro lo llamamos *parámetro de escalamiento*.

Tabla 9.1: Modelos de redes estudiadas en este trabajo

Modelo	Parámetros	Parámetro de escalamiento	$\langle k \rangle$
Erdős-Rényi	n, p	$\xi = np$	$\langle k \rangle = (n - 1)p$
Bipartita	n, m, p	$\xi = np^{0.978}$	$\langle k \rangle = \frac{2m(n-m)p}{n}$
Mutualista	n, m, p	Propiedades espectrales $\xi = (\frac{m}{n})^{0.65}np$ Propiedades topológicas $\xi = (\frac{m}{n})^{1.13}np$	
RGG	n, σ, ℓ	Propiedades espectrales $\xi = n^{-0.16} \langle k \rangle$ Propiedades topológicas $\xi = \langle k \rangle$	$\langle k \rangle \approx n\pi\ell^2$
ER PG	n, p, γ	$\xi = \frac{4p}{(8+\gamma)}n^{0.98}$	$\langle k \rangle = (n - 1)p$

En algunos modelos, para encontrar el parámetro de escalamiento, utilizamos únicamente propiedades topológicas o propiedades espectrales y en otros utilizamos ambas. Particularmente, en el caso de redes de tipo ER, en este trabajo se realizó el estudio utilizando cantidades topológicas, ya que el estudio de propiedades espectrales ya había sido reportado anteriormente en [66]. En este caso el parámetro de escalamiento encontrado utilizando los dos tipos de propiedades es el mismo. Por otra parte, el estudio de redes aleatorias mutualistas y RGGs no uniformes, se realizó con ambos tipos de propiedades y encontramos un parámetro de escalamiento ligeramente diferente para cada cantidad.

En el caso de RGGs no uniformes exploramos de forma más detallada sus propiedades topológicas, particularmente encontramos expresiones para el grado promedio y el número de vértices no aislados. Encontramos que el grado promedio es el parámetro de escalamiento para propiedades topológicas. Esto es algo que también se puede observar en las redes de tipo ER, ya que si vemos el parámetro de escalamiento y la expresión para el grado promedio (reportados en la Tabla. 9.1) hay una relación notable entre estos dos parámetros, sin embargo, encontrar una expresión para el grado promedio de una red no siempre es una tarea sencilla.

De forma general, podemos decir que el uso de los índices topológicos es igualmente útil que el uso de cantidades espectrales. Esto es muy importante, ya que el uso de índices topológicos reduce significativamente los tiempos de los cálculos computacionales, porque no es necesario diagonalizar las matrices, aunque su uso se ve un poco limitado cuando los

pesos de la matriz de adyacencia tienen un papel relevante en la definición del modelo. Podemos ilustrar esto considerando las redes con pérdidas y ganancias aquí propuestas, en las que la introducción de las pérdidas y ganancias se traduce a agregar pesos complejos en la matriz de adyacencia, en este caso, como ya mencionamos, las propiedades topológicas de la red no se ven afectadas por los pesos de la matriz de adyacencia, entonces si se realiza un análisis de escalamiento utilizando propiedades topológicas el parámetro de escalamiento resultante será el mismo que el reportado en el Capítulo 4, sin embargo al comparar las propiedades espectrales de ambos modelos observamos diferencias importantes por lo que en estos casos es más útil estudiar el modelo a través de sus propiedades espectrales.

Podemos decir entonces que los índices topológicos basados en los grados de los vértices nos pueden dar información relevante sobre la estructura de la red y que cuando la matriz de adyacencia de la red es real, los índices topológicos también sirven para predecir algunas de sus propiedades espectrales, sin embargo para el caso de redes en las que sus matrices de adyacencias no son reales los índices topológicos que se utilizaron en este trabajo no son muy útiles. Esto nos lleva a pensar en introducir nuevos índices basados en los pesos de las conexiones. Proponer y explorar este tipo de índices podría considerarse como un posible trabajo a futuro.

Es relevante resaltar la importancia que el parámetro de escalamiento tiene en nuestros modelos. El parámetro de escalamiento es útil para encontrar sistemas con diferentes combinaciones de parámetros que exhiben propiedades estadísticamente equivalentes. Por ejemplo, en el estudio de propiedades espectrales de sistemas de tamaño muy grande, los tiempos computacionales empleados para este análisis son también muy grandes, una forma de reducir estos tiempos computacionales es utilizando el parámetro de escalamiento para encontrar una combinación de parámetros que nos permitan estudiar sistemas más pequeños equivalentes al sistema que originalmente estamos estudiando. También podría ser útil para predecir el comportamiento de sistemas o inferir algunas de sus propiedades. El parámetro de escalamiento también nos sirve para encontrar las curvas universales de cada modelo, estas curvas son útiles ya que nos permiten definir los regímenes de desconexión-conexión [localización-deocalización] de los modelos de redes. Estos regímenes pueden ser utilizados para clasificar redes o para construir redes que cumplan con algún criterio específico, por ejemplo, si consideramos que queremos construir una red tipo ER con n vértices con el mínimo número de conexiones de manera que se encuentre en el régimen delocalizado, de la curva universal y el parámetro de escalamiento

podríamos conocer el valor de la conectividad necesaria que cumple con este criterio.

En la Tabla 9.1 se muestra un resumen de los modelos de redes aquí estudiados con los parámetros que los definen, su parámetro de escalamiento y su grado promedio.

En adición, en el caso de redes bipartitas y mutualistas pudimos contrastar nuestros resultados con redes realistas y encontramos que existe muy buena correspondencia entre las predicciones realizadas con estos modelos y las propiedades de redes del mundo real. Esto es de gran importancia, ya que comprobamos que aunque nuestros modelos son generados de manera aleatoria, sus propiedades son estadísticamente equivalentes a las encontradas en redes del mundo real, lo que nos demuestra la utilidad de los modelos nulos.

Aunque en este trabajo solo propusimos redes basadas en el modelo de Erdős-Rényi, el estudio realizado en esta Tesis puede extenderse para otros tipos de redes como por ejemplo las redes de escala libre o de mundo pequeño, incluso podríamos pensar en introducir este estudio en redes fractales, lo cual podemos considerar también como un posible trabajo a futuro.

También vale la pena mencionar que en este trabajo solamente exploramos modelos de redes con pocos parámetros (2 ó 3) y en estos casos nuestra metodología fue útil para obtener el parámetro de escalamiento, sin embargo, resulta interesante explorar la metodología aquí propuesta en modelos con un mayor número de parámetros.

Anexo A

Publicaciones



Article

Information Entropy of Tight-Binding Random Networks with Losses and Gain: Scaling and Universality

C. T. Martínez-Martínez and J. A. Méndez-Bermúdez *

Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48, Puebla 72570, Mexico; cl4ud7@gmail.com

* Correspondence: jmendezb@ifuap.buap.mx; Tel.: +52-22-2229-5610

Received: 12 October 2018; Accepted: 15 January 2019; Published: 18 January 2019



Abstract: We study the localization properties of the eigenvectors, characterized by their information entropy, of tight-binding random networks with balanced losses and gain. The random network model, which is based on Erdős–Rényi (ER) graphs, is defined by three parameters: the network size N , the network connectivity α , and the losses-and-gain strength γ . Here, N and α are the standard parameters of ER graphs, while we introduce losses and gain by including complex self-loops on all vertices with the imaginary amplitude $i\gamma$ with random balanced signs, thus breaking the Hermiticity of the corresponding adjacency matrices and inducing complex spectra. By the use of extensive numerical simulations, we define a scaling parameter $\xi \equiv \xi(N, \alpha, \gamma)$ that fixes the localization properties of the eigenvectors of our random network model; such that, when $\xi < 0.1$ ($10 < \xi$), the eigenvectors are localized (extended), while the localization-to-delocalization transition occurs for $0.1 < \xi < 10$. Moreover, to extend the applicability of our findings, we demonstrate that for fixed ξ , the spectral properties (characterized by the position of the eigenvalues on the complex plane) of our network model are also universal; i.e., they do not depend on the specific values of the network parameters.

Keywords: information entropy; Erdős–Rényi graphs; random matrix theory; scaling laws

1. Introduction

Independently of the field, classification, or application, a commonly-accepted mathematical representation of a network or graph is the adjacency matrix. The adjacency matrix $\mathbf{A}$ of a simple non-directed network (a simple network is a network not having multiple edges or self-edges) is the matrix with elements A_{ij} defined as [1]:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if there is an edge between vertices } i \text{ and } j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

This prescription produces $N \times N$ symmetric sparse matrices with zero diagonal elements, where N is the number of vertices of the corresponding network. The sparsity of $\mathbf{A}$ is quantified by the parameter α , which is the fraction of non-vanishing off-diagonal adjacency matrix elements. Vertices are isolated when $\alpha = 0$, whereas the network is fully connected for $\alpha = 1$. Once the adjacency matrix of a network is constructed, it is quite natural to ask about the properties of its eigenvalues and eigenvectors, which is the main subject of this paper. As commonly used, we refer to the properties of the eigenvalues and eigenvectors of the adjacency matrix as the properties of the eigenvalues and eigenvectors of the respective network.

Applied Mathematics and Computation 377 (2020) 125137



Contents lists available at ScienceDirect

Applied Mathematics and Computation

journal homepage: www.elsevier.com/locate/amc

Computational and analytical studies of the Randić index in Erdős–Rényi models

C.T. Martínez-Martínez^{a,b}, J.A. Méndez-Bermúdez^{a,c,*}, José M. Rodríguez^d,
José M. Sigarreta^{a,e}^a Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48, Puebla 72570, Mexico^b Institute for Bio-computation and Physics of Complex Systems (BIFI), University of Zaragoza, Zaragoza 50018, Spain^c Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo – Campus de São Carlos, Caixa Postal 668, São Carlos 13560-970, SP, Brazil^d Universidad Carlos III de Madrid, Departamento de Matemáticas, Avenida de la Universidad 30, Leganés 28911, Madrid, Spain^e Universidad Autónoma de Guerrero, Centro Acapulco CP 39610, Acapulco de Juárez, Guerrero, Mexico

ARTICLE INFO

Article history:

Received 26 March 2019

Revised 5 February 2020

Accepted 9 February 2020

MSC:

05C07

05C80

92E10

Keywords:

Randić index

Vertex-degree-based topological index

Random graphs

Erdős–Rényi graphs

ABSTRACT

In this work we perform computational and analytical studies of the Randić index $R(G)$ in Erdős–Rényi models $G(n, p)$ characterized by n vertices connected independently with probability $p \in (0, 1)$. First, from a detailed scaling analysis, we show that $\langle \bar{R}(G) \rangle = \langle R(G) \rangle / (n/2)$ scales with the product $\xi \approx np$, so we can define three regimes: a regime of mostly isolated vertices when $\xi < 0.01$ ($R(G) \approx 0$), a transition regime for $0.01 < \xi < 10$ (where $0 < R(G) < n/2$), and a regime of almost complete graphs for $\xi > 10$ ($R(G) \approx n/2$). Then, motivated by the scaling of $\langle \bar{R}(G) \rangle$, we analytically (i) obtain new relations connecting $R(G)$ with other topological indices and characterize graphs which are extremal with respect to the relations obtained and (ii) apply these results in order to obtain inequalities on $R(G)$ for graphs in Erdős–Rényi models.

© 2020 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

The interest in topological indices lies in the fact that they synthesize some of the fundamental properties of a molecule into a single value. With this in mind, several topological indices have been studied so far; it is worth noting the seminal work by Wiener (see [1]) in which he used the distances of a chemical graph in order to model properties of alkanes.

The Randić connectivity index was defined in [2] as

$$R(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_u d_v}}, \quad (1)$$

where uv denotes the edge of the graph G , and d_u is the degree of the vertex u . Indeed, there are lots of works dealing with this index (see, e.g., [3–5]).

* Corresponding author at: Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48, Puebla 72570, Mexico.

E-mail addresses: cl4ud7@gmail.com (C.T. Martínez-Martínez), jmendezb@ifuap.buap.mx (J.A. Méndez-Bermúdez), jomaro@math.uc3m.es (J.M. Rodríguez), josemariasigarretalmira@hotmail.com (J.M. Sigarreta).

<https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125137>

0096-3003/© 2020 Elsevier Inc. All rights reserved.

MATCH

*Communications in Mathematical
and in Computer Chemistry*

MATCH Commun. Math. Comput. Chem. **85** (2021) 395-426

ISSN 0340 - 6253

Computational and Analytical Studies of the Harmonic Index on Erdős–Rényi Models

C. T. Martínez-Martínez^{1,2}, J. A. Méndez-Bermúdez^{*1,3}, José M. Rodríguez⁴, José M. Sigarreta⁵

¹*Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48, Puebla 72570, Mexico*

²*Institute for Biocomputation and Physics of Complex Systems (BIFI), University of Zaragoza, 50018 Zaragoza, Spain*

³*Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo - Campus de São Carlos, Caixa Postal 668, 13560-970 São Carlos, SP, Brazil*

⁴*Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, Avenida de la Universidad 30, 28911 Leganés, Madrid, Spain*

⁵*Universidad Autónoma de Guerrero, Centro Acapulco CP 39610, Acapulco de Juárez, Guerrero, Mexico*

cl4ud7@gmail.com , jmendezb@ifuap.buap.mx , jomaro@math.uc3m.es ,
jsmathguerrero@gmail.com

(Received June 5, 2020)

Abstract

A main topic in the study of topological indices is to find bounds of the indices involving several parameters and/or other indices. In this paper we perform statistical (numerical) and analytical studies of the harmonic index $H(G)$, and other topological indices of interest, on Erdős–Rényi (ER) graphs $G(n, p)$ characterized by n vertices connected independently with probability $p \in (0, 1)$. Particularly, in addition to $H(G)$, we study here the (-2) sum-connectivity index $\chi_{-2}(G)$, the modified Zagreb index $MZ(G)$, the inverse degree index $ID(G)$ and the Randić index $R(G)$. First, to perform the statistical study of these indices, we define the averages of the normalized indices to their maximum value: $\langle \bar{H}(G) \rangle$, $\langle \bar{\chi}_{-2}(G) \rangle$, $\langle \bar{MZ}(G) \rangle$, $\langle \bar{ID}(G) \rangle$ and $\langle \bar{R}(G) \rangle$. Then, from a detailed scaling analysis, we show that the averages of the normalized indices scale with the product $\xi \approx np$. Moreover, we find two different behaviors. On the one hand, $\langle H(G) \rangle$ and $\langle R(G) \rangle$, as a function

*Corresponding author

Chaos, Solitons & Fractals: X 3 (2019) 100021



Contents lists available at ScienceDirect

Chaos, Solitons & Fractals: X

journal homepage: www.elsevier.com/locate/csfxf

Spectral and localization properties of random bipartite graphs

C.T. Martínez-Martínez^{a,b}, J.A. Méndez-Bermúdez^{a,c,*}, Yamir Moreno^{b,d,e},
Jair J. Pineda-Pineda^f, José M. Sigarreta^g^a Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48, Puebla 72570, Mexico^b Institute for Biocomputation and Physics of Complex Systems (BIFI), University of Zaragoza, 50018 Zaragoza, Spain^c Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo - Campus de São Carlos, Caixa Postal 668, São Carlos 13560-970, SP, Brazil^d Department of Theoretical Physics, University of Zaragoza, 50009 Zaragoza, Spain^e ISI Foundation, Turin, Italy^f Ecology and Survival of Microorganisms Research Group (ESMRG), Laboratorio de Ecología Molecular Microbiana (LEMM), Centro de Investigaciones en Ciencias Microbiológicas (CICM), Instituto de Ciencias (IC), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Puebla, México.^g Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, Carlos E. Adame No.54 Col. Garita, Acalpulco Gro. 39650, Mexico

ARTICLE INFO

Article history:

Received 30 December 2019

Accepted 19 January 2020

Available online 1 February 2020

PACS:

64.60.aq

89.75.Da

05.45.Mt

73.20.Jc

Keywords:

Bipartite graphs

Delocalization transition

Spectral properties

ABSTRACT

Bipartite graphs are often found to represent the connectivity between the components of many systems such as ecosystems. A bipartite graph is a set of n nodes that is decomposed into two disjoint subsets, having m and $n - m$ vertices each, such that there are no adjacent vertices within the same set. The connectivity between both sets, which is the relevant quantity in terms of connections, can be quantified by a parameter $\alpha \in [0, 1]$ that equals the ratio of existent adjacent pairs over the total number of possible adjacent pairs. Here, we study the spectral and localization properties of such random bipartite graphs. Specifically, within a Random Matrix Theory (RMT) approach, we identify a scaling parameter $\xi \equiv \xi(n, m, \alpha)$ that fixes the localization properties of the eigenvectors of the adjacency matrices of random bipartite graphs. We also show that, when $\xi < 1/10$ ($\xi > 10$) the eigenvectors are localized (extended), whereas the localization-to-delocalization transition occurs in the interval $1/10 < \xi < 10$. Finally, given the potential applications of our findings, we round off the study by demonstrating that for fixed ξ , the spectral properties of our graph model are also universal.

© 2020 The Authors. Published by Elsevier Ltd.

This is an open access article under the CC BY license. (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

1. Introduction

The latest developments in network science have largely contributed to a better understanding of the structure and dynamics of many real-world complex systems [1–3]. As a matter of fact, research done during the last 20 years have allowed to take key steps in our comprehension of seemingly diverse phenomena such as the large-scale spreading of diseases [4,5], information dissemination [2], cascading failures [6], diffusion dynamics [7–9] and more recently, on how multilayer systems work [10–12]. These advances are not only at a theoretical level. The increasing availability of new and rich data as well as our computational capabilities have made it possible to move from studying synthetic models, to characterize and model realistic systems.

During these years, networks have been studied from many different angles, ranging from more theoretically-grounded studies (in the best tradition of graph theory) to fully data-driven models. Sometimes, the architecture of the substrate network is known and thus, it could be modeled explicitly. However, it is often the case in which the networks are synthetic either because we do not know the real connection patterns or because we need to simplify the structure of the system to enable analytical approximations. In the latter scenario, one reasonable assumption is to generate random graphs, so that one gets rid of possible correlations and isolates the impact of the connectivity among the system's constituents on its dynamics. Besides, random versions are often very useful as null models, that allow to individuate which properties of the system are truly unexpected and which are not [13,14].

Among the many results that can be highlighted, perhaps the most useful ones are those that relate the structure of networks with their dynamics through the analysis of the spectral properties of the adjacency or Laplacian matrices of such networks. For instance, it has been shown that it is possible to characterize the

* Corresponding author at: Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48, Puebla 72570, Mexico.
E-mail address: jmendezb@ifuap.buap.mx (J.A. Méndez-Bermúdez).

<https://doi.org/10.1016/j.csfxf.2020.100021>

2590-0544/© 2020 The Authors. Published by Elsevier Ltd. This is an open access article under the CC BY license. (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)



Article

Application of Bipartite Networks to the Study of Water Quality

Jair J. Pineda-Pineda ^{1,*} , C. T. Martínez-Martínez ^{2,3} , J. A. Méndez-Bermúdez ^{2,4} ,
Jesús Muñoz-Rojas ¹ and José M. Sigarreta ⁵

¹ Ecology and Survival of Microorganisms Research Group (ESMRG), Laboratorio de Ecología Molecular Microbiana (LEMM), Centro de Investigaciones en Ciencias Microbiológicas (CICM), Instituto de Ciencias (IC), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Puebla 72570, Mexico; joymerre@yahoo.com.mx

² Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla 72570, Mexico; cl4ud7@gmail.com (C.T.M.-M.); jmendezb@ifuap.buap.mx (J.A.M.-B.)

³ Institute for Biocomputation and Physics of Complex Systems (BIFI), University of Zaragoza, 50018 Zaragoza, Spain

⁴ Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo—Campus de São Carlos, Caixa Postal 668, São Carlos 13560-970, SP, Brasil

⁵ Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, Acapulco 39650, Mexico; josemariasigarretaalmira@hotmail.com

* Correspondence: jpineda@uagro.mx

Received: 8 May 2020; Accepted: 15 June 2020; Published: 24 June 2020



Abstract: Water is a basic natural resource for life and the sustainable development of society. Methods to assess water quality in freshwater ecosystems based on environmental quality bioindicators have proven to be low cost, reliable, and can be adapted to ecosystems with well-defined structures. The objective of this paper is to propose an interdisciplinary approach for the assessment of water quality in freshwater ecosystems through bioindicators. From the presence/absence of bioindicator organisms and their sensitivity/tolerance to environmental stress, we constructed a bipartite network, G . In this direction, we propose a new method that combines two research approaches, Graph Theory and Random Matrix Theory (RMT). Through the topological properties of the graph G , we introduce a topological index, called $JP(G)$, to evaluate the water quality, and we study its properties and relationships with known indices, such as Biological Monitoring Working Party (BMWP) and Shannon diversity (H'). Furthermore, we perform a scaling analysis of random bipartite networks with already specialized parameters for our case study. We validate our proposal for its application in the reservoir of Guájaro, Colombia. The results obtained allow us to infer that the proposed techniques are useful for the study of water quality, since they detect significant changes in the ecosystem.

Keywords: water quality; biotic index; topological index; bipartite network

1. Introduction

One of the Sustainable Development Goals of the 2030 Agenda for Sustainable Development is to ensure the availability and sustainable management of water and sanitation for all and to preserve water quality by reducing pollution [1,2]. One of the less expensive and, at the same time, most reliable tools to assess water quality of aquatic ecosystems is the use of indicator organisms (bioindicators) of environmental stress [3,4]. Furthermore, by knowing the responses of these communities to certain environmental stressors, one can determine the cause of environmental deterioration and propose management and restoration strategies [5–7].

Chaos, Solitons and Fractals 153 (2021) 111504



Contents lists available at ScienceDirect
Chaos, Solitons and Fractals
 Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena
 journal homepage: www.elsevier.com/locate/chaos



Frontiers

Statistical properties of mutualistic-competitive random networks

C.T. Martínez-Martínez^{a,b}, J.A. Méndez-Bermúdez^a, Thomas Peron^{c,*}, Yamir Moreno^{b,d,e}^a Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48, Puebla 72570, Mexico^b Institute for Biocomputation and Physics of Complex Systems (BIFI), University of Zaragoza, Zaragoza 50018, Spain^c Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo São Carlos 13566-590, SP, Brazil^d Department of Theoretical Physics, University of Zaragoza, Zaragoza 50009, Spain^e ISI Foundation, Turin, Italy

ARTICLE INFO

Article history:

Received 5 September 2021

Accepted 25 September 2021

ABSTRACT

Mutualistic networks are used to study the structure and processes inherent to mutualistic relationships. In this paper, we introduce a random matrix ensemble (RME) representing the adjacency matrices of mutualistic networks composed by two vertex sets of sizes n and $m - n$. Our RME depends on three parameters: the network size n , the size of the smaller set m , and the connectivity between the two sets α , where α is the ratio of current adjacent pairs over the total number of possible adjacent pairs between the sets. We focus on the spectral, eigenvector and topological properties of the RME by computing, respectively, the ratio of consecutive eigenvalue spacings r , the Shannon entropy of the eigenvectors S , and the Randić index R . First, within a random matrix theory approach (i.e. a statistical approach), we identify a parameter $\xi \equiv \xi(n, m, \alpha)$ that scales the average normalized measures $\langle X \rangle$ (with X representing r , S and R). Specifically, we show that (i) $\xi \propto \alpha n$ with a weak dependence on m , and (ii) for $\xi < 1/10$ most vertices in the mutualistic network are isolated, while for $\xi > 10$ the network acquires the properties of a complete network, i.e., the transition from isolated vertices to a complete-like behavior occurs in the interval $1/10 < \xi < 10$. Then, we demonstrate that our statistical approach predicts reasonably well the properties of real-world mutualistic networks; that is, the universal curves $\langle X \rangle$ vs. ξ show good correspondence with the properties of real-world networks.

© 2021 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Many real-world networks can be represented as having two types of nodes grouped into two disjoint sets, such that nodes within the same set are not adjacent. A network satisfying this definition is denominated a *bipartite network*, and examples of such a structure can be found across a broad range of systems [1]. For instance, there are several types of social networks that have a natural bipartite representation, such as the actor-movie network [2,3], where actors are linked to movies in which they were cast; coauthorship networks in which the two sets of nodes are authors and papers, while the edges reveal the authorship of the latter [1,3]; and networks linking people to the social events they attended [4]. Other noteworthy examples include recommendation systems [5], networks of heterosexual contacts [6], among others [1]. Bipartite networks are particularly relevant in ecology [7], for they naturally

encode the structure of mutualistic interactions of plant-pollinator, seed dispersal, and host-parasite networks [7,8]. In the theoretical domain, bipartite networks are useful to encapsulate the structure of networks formed by distributions of subgraphs [9], where one group is formed by nodes, and the other group by subgraphs to which the nodes are attached. Bipartite networks can also offer an alternative representation of hypergraphs by mapping nodes and hyperedges into disjoint groups, where an original hyperedge is connected by an edge to the nodes it encompasses in the original hypergraph representation [1,10].

In all the above examples, the disjoint sets aggregate nodes that have the same type, and the edges only run from one set to the other. However, from a bipartite network it is also possible to unfold relationships pertaining to nodes that belong to the same group. For example, from the actor-movie network we are able to construct another network revealing who acted with whom: if two actors are connected to at least one common movie in the original bipartite network, a link is then created in a new network informing that they have collaborated at least once. The new generated network is oftentimes referred to as the *one-mode projection* of the

* Corresponding author.

E-mail address: thomas.peron@usp.br (T. Peron).

Nonuniform random graphs on the plane: A scaling study

C. T. Martínez-Martínez¹, J. A. Méndez-Bermúdez¹, Francisco A. Rodrigues² and Ernesto Estrada³¹*Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48, Puebla 72570, Mexico*²*Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo-Campus de São Carlos, Caixa Postal 668, 13560-970 São Carlos, São Paulo, Brazil*³*Institute for Cross-Disciplinary Physics and Complex Systems (IFISC-CSIC-UIB), Campus Universitat de les Illes Balears, E-07122 Palma de Mallorca, Spain*

(Received 7 September 2021; accepted 27 February 2022; published 15 March 2022)

We consider random geometric graphs on the plane characterized by a nonuniform density of vertices. In particular, we introduce a graph model where n vertices are independently distributed in the unit disk with positions, in polar coordinates (l, θ) , obeying the probability density functions $\rho(l)$ and $\rho(\theta)$. Here we choose $\rho(l)$ as a normal distribution with zero mean and variance $\sigma \in (0, \infty)$ and $\rho(\theta)$ as a uniform distribution in the interval $\theta \in [0, 2\pi)$. Then, two vertices are connected by an edge if their Euclidean distance is less than or equal to the connection radius ℓ . We characterize the topological properties of this random graph model, which depends on the parameter set (n, σ, ℓ) , by the use of the average degree $\langle k \rangle$ and the number of nonisolated vertices $V_{\times}$, while we approach their spectral properties with two measures on the graph adjacency matrix: the ratio of consecutive eigenvalue spacings r and the Shannon entropy S of eigenvectors. First we propose a heuristic expression for $(k(n, \sigma, \ell))$. Then, we look for the scaling properties of the normalized average measure $\langle \bar{X} \rangle$ (where X stands for $V_{\times}$, r , and S) over graph ensembles. We demonstrate that the scaling parameter of $\langle \bar{V}_{\times} \rangle = \langle V_{\times} \rangle / n$ is indeed $\langle k \rangle$, with $\langle \bar{V}_{\times} \rangle \approx 1 - \exp(-\langle k \rangle)$. Meanwhile, the scaling parameter of both $\langle \bar{r} \rangle$ and $\langle \bar{S} \rangle$ is proportional to $n^{-\gamma} \langle k \rangle$ with $\gamma \approx 0.16$.

DOI: 10.1103/PhysRevE.105.034304

I. INTRODUCTION

In many complex systems the entities are embedded in a geometric space such that the connections between them are mainly determined by their spatial separations. When representing these systems we deal with the so-called spatial networks [1], where nodes representing the entities of the system are located in a given space, which may include a geographic space, like in the case of road networks [1]. Nodes can also be located in a three-dimensional space like in certain biological networks where the proximity of cells in a biological tissue determines the structure of the network (see Ref. [2]). A list of related examples includes the networks of patches and corridors in a landscape [3], the networks of galleries in animal nests [4,5], the networks of fractures in rocks [6], and networks of wireless communication devices [7–9], such as mobile phones, wireless computing systems, and wireless sensor networks, among others.

In modeling these systems most of the efforts are a continuation of the pioneering work of Gilbert in 1959 when he proposed the random geometric graph (RGG) model [10]. In a RGG the nodes of the graph are distributed randomly and independently in a unit square and two nodes are connected if they are inside a disk of a given radius [11,12]. This kind of random graph has found multiple applications in areas such as modeling of epidemic spreading in spatial populations, which may include cases such the spreading of worms in a computer network, viruses in a human population, or rumors

in a social network [13–17]. Recent modifications known as random rectangular graphs (RRGs) have been applied in a variety of physical scenarios [18–21].

The Gilbert model and their analogies are very useful in situations where the nodes are uniformly distributed in the graph. This is the case for instance when we want to deploy a series of wireless sensors in a given area. In this case RGG or RRG are very useful modeling techniques to characterize the properties of the network emerging from the sensor deployment [22]. However, in the scenarios mentioned before where the nodes are embedded in a given space not necessarily in a uniform way, the consideration of RGG and/or RRG is not the most appropriate one.

Here we propose an extension of the RGG model to consider different degrees of spatial nonuniformity in the graph. First, we characterize the average topological properties of this random graph model. In particular, we propose heuristic expressions for the average degree and the number of nonisolated vertices. Then, within a random matrix theory approach, we characterize the spectral and eigenvector properties of the adjacency matrix. To this end we perform a scaling study of both the ratio of consecutive eigenvalue spacings and the Shannon entropy of eigenvectors.

II. PRELIMINARIES

Let $G = (V, E)$ be a graph where V is the set of vertices and E the set of edges. A RGG is an undirected graph with

Bibliografía

- [1] P. W. Anderson, More Is Different, *Science*, **177** (4047), 393, (1972).
- [2] L. Pietronero, Complexity ideas from condensed matter and statistical physics, *Europhys. News*, **39** (6), 26, (2008).
- [3] S. Hawking, I think the next century will be the century of complexity, in: San Jose Mercury News, morning final ed. January 23 (2000).
- [4] M. E. J. Newman, Complex Systems: A Survey. arXiv preprint arXiv:1112.1440 (2011).
- [5] <https://string-db.org/network/9606.ENSP00000307046>
- [6] A. W. Schäfer, S. R. Barrett, K. Doyme, L. M. Dray, A.R. Gnadt, R. Self, A. O'Sullivan, A. P. Synodinos y A. J. Torija, Technological, economic and environmental prospects of all-electric aircraft. *Nature Energy*, **2** (2), 160, (2019).
- [7] L. da F. Costa, O. N. Oliveira Jr, G. Travieso, F. A. Rodrigues, P. R. Villas Boas, L. Antiqueira, M. P. Viana y L. E. C. Rocha, Analyzing and modeling real-world phenomena with complex networks: a survey of applications, *Adv. Phys.*, **60** (3), 329, (2011).
- [8] M. E. J. Newman, *Networks: An introduction* (Oxford University Press, New York, 2010).
- [9] P. W. Anderson, Absence of Diffusion in Certain Random Lattices, *Phys. Rev.*, **109** (5), 1492, (1958).
- [10] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png

-
- [11] N. Biggs, E. K. Lloyd y R. J. Wilson. *Graph Theory, 1736-1936*, (Oxford University Press, 1986).
- [12] A. L. Barabási, *Network science*. (Cambridge University Press, 2015)
- [13] L. Euler. "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis." *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (1741): 128.
- [14] M. E. J. Newman, The structure and function of complex networks, *SIAM Rev.*, **45** (2), 167, (2003).
- [15] O. Mülken y A. Blumen, Continuous-time quantum walks: Models for coherent transport on complex networks, *Phys. Rep.*, **502** (2), 37, (2011).
- [16] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez y D.-U. Hwang, Complex networks: Structure and dynamics *Phys. Rep.*, **424** (4), 175, (2006).
- [17] P. Erdős y A. Rényi, On the evolution of random graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5**, 17 (1960); *Acta Mathematica Scientia Hungary* **12**, 261 (1961).
- [18] A. L. Barabási y R. Albert, Emergence of Scaling in Random Networks, *Science*, **286** (5439), 509, (1999).
- [19] D. J. Watts y S. H. Strogatz, Collective dynamics of small-world networks, *Nature*, **393** (6684), 440, (1998).
- [20] B. Bollobás, *Random Graphs. In Modern Graph Theory*, (Springer, New York, NY, 1998).
- [21] K. A. Zweig, *Network Analysis Literacy*, (Springer, Austria, 2016)
- [22] M. Kaiser, A tutorial in connectome analysis: topological and spatial features of brain networks. *NeuroImage*, **57** (3), 892, (2011).
- [23] I. Gutman, Degree-Based Topological Indices, *Croat. Chem. Acta*, **86** (4), 351, (2013).
- [24] H. Wiener, Structural determination of paraffin boiling points, *J. Am. Chem. Soc.*, **69** (1), 17, (1947).
- [25] M. Randić, On characterization of molecular branching, *J. Am. Chem. Soc.*, **97** (23), 6609, (1975).

- [26] I. Gutman y B. Furtula, *Recent Results in the Theory of Randić Index*, (University, Faculty of Science, Kragujevac, 2008).
- [27] X. Li y I. Gutman, *Mathematical Aspects of Randić Type Molecular Structure Descriptors*, (University, Faculty of Science, Kragujevac, 2006).
- [28] X. Li, Y. Shi, A survey on the Randić index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, **59** (1), 127, (2008).
- [29] I. Gutman, B. Furtula y V. Katanić, Randić index and information, *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, **15** (3), 307, (2018).
- [30] N. Nikolova y J. Jaworska, Approaches to measure chemical similaritya review, *QSAR Comb. Sci.*, **22** (9–10), 1006, (2003).
- [31] M. Randić, On the history of the connectivity index: from the connectivity index to the exact solution of the protein alignment problem, *SAR QSAR Environ. Res.*, **26** (7–9), 523, (2015).
- [32] E. Estrada, Quantifying network heterogeneity, *Phys Rev. E*, **82** (6), 066102, (2010).
- [33] P. de Meo, F. Messina, D. Rosaci, G. M. L. Sarné y A. V. Vasilakos, Estimating graph robustness through the Randić index, *IEEE Trans. Cybern.*, **48** (11), 3232, (2017).
- [34] S. Nikolić, I. M. Tolić, N. Trinajstić y I. Baučić, On the Zagreb indices as complexity indices *Croat. Chem. Acta*, **73** (4), 909, (2000).
- [35] S. Nikolic, A. Miličević y N. Trinajstić, On use of the variable Zagreb M2 index in QSPR: boiling points of benzenoid hydrocarbons, *Molecules*, **9** (12), 1208, (2004).
- [36] B. Zhou y N. Trinajstić, On a novel connectivity index, *J. Math. Chem.*, **46** (4), 1252, (2009).
- [37] S. Fajtlowicz, On conjectures of Graffiti-II *Congr. Numer.*, **60**, 187, (1987).
- [38] E.P. Wigner, On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels, *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **47** (4), 790, (1951).
- [39] E.P. Wigner, *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions II, The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, (Springer, Berlin, Heidelberg, 1993).

- [40] E.P. Wigner, *Statistical properties of real symmetric matrices with many dimensions*, (Princeton University, 1957).
- [41] M. L. Mehta, On the statistical properties of level spacings in nuclear spectra, *Nucl. Phys.*, **18**, 395, (1960).
- [42] F. J. Dyson, Statistical theory of the energy levels of complex systems. I, *J. Math. Phys.*, **3** (1), 140, (1962).
- [43] F. J. Dyson, Statistical theory of the energy levels of complex systems. II, *J. Math. Phys.*, **3** (1), 157, (1962).
- [44] F. J. Dyson, Statistical theory of the energy levels of complex systems, III, *J. Math. Phys.*, **3** (1), 166, (1962).
- [45] F. J. Dyson, A Brownian motion model for the eigenvalues of a random matrix, *J. Math. Phys.*, **3** (6), 1191, (1962).
- [46] F. J. Dyson, The threefold way. Algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics, *J. Math. Phys.*, **3** (6), 1999, (1962).
- [47] G. Akemann, J. Baik y P. Di Francesco, *The Oxford Handbook of Random Matrix Theory*, (Oxford University Press, New York, 2011).
- [48] P.J. Forrester, N.C. Snaith y J.J.M. Verbaarschot, Developments in Random Matrix Theory, *J.Phys. A*, **36** (12), R1, (2003).
- [49] G. Ergün, *Random Matrix Theory*, (Springer, New York, 2012).
- [50] K. Arwini y C. T. J Dodson, Neighborhoods of independence for random processes via information geometry, *Math. J.*, **9** (4), 863, (2005).
- [51] G. J. Rodgers y A. J. Bray, Density of states of a sparse random matrix, *Phys. Rev. B*, **37** (7), 3557, (1988).
- [52] A. D. Jackson, C. Mejia-Monasterio, T. Rupp, M. Saltzer y T. Wilke, Spectral ergodicity and normal modes in ensembles of sparse matrices, *Nucl. Phys. A*, **687** (3-4), 405, (2001).

- [53] G. Rodgers y C. de Dominicis, Density of states of sparse random matrices, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23** (9), 1567, (1990).
- [54] S. N. Evangelou, A numerical study of sparse random matrices, *J. Stat. Phys.*, **69** (1), 361, (1992).
- [55] G. Semerjian y L. F. Cugliandolo, Sparse random matrices: the eigenvalue spectrum revisited, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35** (23), 4837, (2002).
- [56] A. Khorunzhy y G. J. Rodgers, Eigenvalue distribution of large dilute random matrices, *J. Math. Phys.*, **38** (6), 3300, (1997).
- [57] R. Kühn, Spectra of sparse random matrices, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **41** (29), 295002, (2008).
- [58] T. Rogers, I. P. Castillo, R. Kühn y K. Takeda, Cavity approach to the spectral density of sparse symmetric random matrices, *Phys. Rev. E*, **78** (3), 031116, (2008).
- [59] F. Slanina, Equivalence of replica and cavity methods for computing spectra of sparse random matrices, *Phys. Rev. E*, **83** (1), 011118, (2011).
- [60] Y. Kabashima, H. Takahashi y O. Watanabe, Cavity approach to the first eigenvalue problem in a family of symmetric random sparse matrices, *J. Phys. Conf. Ser.*, **233** (1), 012001, (2010); Y. Kabashima y H. Takahashi, First eigenvalue/eigenvector in sparse random symmetric matrices: influences of degree fluctuation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **45** (32), 325001, (2012).
- [61] T. Rogers y I. P. Castillo, Cavity approach to the spectral density of non-Hermitian sparse matrices, *Phys. Rev. E*, **79** (1), 012101, (2009). I. Neri and F. L. Metz, Spectra of sparse non-Hermitian random matrices: an analytical solution, *Phys. Rev. Lett.*, **109** (3), 030602, (2012).
- [62] R. Fossion, G. Torres-Vargas, S. Díaz-Gómez y J. C. López Vieyra, Data-adaptive unfolding of non-standard random-matrix spectra: cross-over of long-range correlation statistics, arXiv:1402.6786., (2014).
- [63] A. D. Mirlin y Y. V. Fyodorov, Universality of level correlation function of sparse random matrices, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24** (10), 2273, (1991).

-
- [64] Y. V. Fyodorov y A. D. Mirlin, Localization in ensemble of sparse random matrices, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (15), 2049, (1991).
- [65] S. N. Evangelou y E. N. Economou, Spectral density singularities, level statistics, and localization in a sparse random matrix ensemble, *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 361, (1992).
- [66] J. A. Méndez-Bermúdez, A. Alcázar-López, A. J. Martínez-Mendoza, F. A. Rodrigues, y T. K. DM. Peron, Universality in the spectral and eigenfunction properties of random networks, *Phys. Rev. E*, **91**, 032122, (2015).
- [67] R. Gera, L. Alonso, B. Crawford, J. House, J. A. Méndez-Bermúdez, T. Knuth y R. Miller, Identifying network structure similarity using spectral graph theory, *Appl. Net. Sci.*, **3** (1), 1, (2018)
- [68] A. J. Martinez-Mendoza, A. Alcazar-Lopez y J. A. Méndez-Bermúdez, Scattering and transport properties of tight-binding random networks, *Phys. Rev. E*, **88** (1), 122126, (2013).
- [69] J. A. Méndez-Bermúdez, G. Ferraz-de-Arruda, F. A. Rodrigues y Y. Moreno, Scaling properties of multilayer random networks. *Phys. Rev. E*, **96** (1), 012307, (2017).
- [70] J. A. Méndez-Bermúdez, G. Ferraz-de-Arruda, F. A. Rodrigues y Y. Moreno, Diluted banded random matrices: Scaling behavior of eigenfunction and spectral properties, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **50** (49), 495205, (2017).
- [71] L. Alonso, J. A. Méndez-Bermúdez, A. Gonzalez-Melendrez y Y. Moreno, Weighted random-geometric and random-rectangular graphs: spectral and eigenfunction properties of the adjacency matrix, *J. Complex Networks*, **6** (5), 753, (2018).
- [72] G. Zhu, H. Yang, C. Yin y B. Li, Localizations on complex networks, *Phys. Rev. E*, **77** (6), 066113, (2008).
- [73] B. Mirbach y H. J. Korsch, A Generalized Entropy Measuring Quantum Localization, *Annals of Physics*, **265** (1), 066113, (1998).
- [74] F.M Izrailev, T. Kottos y G. P. Tsironis, Scaling properties of the localization length in one-dimensional paired correlated binary alloys of finite size, *J. Condens. Matter Phys.*, **8** (16), 2826, (1996).

- [75] Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud y G. Roux, Distribution of the ratio of consecutive level spacings in random matrix ensembles. *Phys. Rev. Lett.*, **110** (8), 084101, (2013).
- [76] B. Mirbach y H.J. Korsh, A generalized entropy measuring quantum localization, *Annal. Phys.*, **265** (1), 80, (1998).
- [77] M. L. Metha, *Random Matrices* (Academic Press, Amsterdam, 2004).
- [78] I. Gutman, *The energy of a graph: old and new results. In Algebraic combinatorics and applications*, (Springer, Berlin, Heidelberg, 2001).
- [79] M. Dragos y DM Cvetkovic *Spectra of graphs. Theory and application*, (Academic Press, 1980).
- [80] K. Yuge, Graph representation for configuration properties of crystalline solids, *J. Phys. Soc. Jpn*, **86** (2), 024802, (2017).
- [81] K. Yuge, Extended configurational polyhedra based on graph representation for crystalline solids, *T Trans. At. Energy Soc. Japan*, **43** (4), 233, (2018).
- [82] A. Dhanalakshmi, K. S. Rao y K. Sivakumar, Characterization of α -cyclodextrin using adjacency and distance matrix, *Indian J. Sci*, **12** (35), 78, (2015).
- [83] J. Pražnikar, M. Tomić y D. Turk, Validation and quality assessment of macromolecular structures using complex network analysis, *Sci. Rep.*, **9** (1), 1, (2019).
- [84] H. Wu, Y. Zhang, W. Chen y Z. Mu, Comparative analysis of protein primary sequences with graph energy, *Physica A* , **437**, 249, (2015).
- [85] L. Di Paola, G. Mei, A. Di Venere y A. Giuliani, Exploring the stability of dimers through protein structure topology, *Curr. Protein Peptide Sci.* , **17** (1), 30, (2016).
- [86] D. Sun, C. Xu y Y. Zhang, A novel method of 2D graphical representation for proteins and its application, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, **75**(2), 431, (2016).
- [87] L. Yu, Y. Zhang, I. Gutman, Y. Shi y M. Dehmer, Protein sequence comparison based on physicochemical properties and positionfeature energy matrix, *Sci. Rep.*, **7** (1), 1, (2017).

-
- [88] G. Gündüz, Viscoelastic properties of networks, *Int. J. Modern Phys. C*, **20** (10), 1597, (2009).
- [89] A. Giuliani, S. Filippi y M. Bertolaso, Why network approach can promote a new way of thinking in biology, *Front. Genet.*, **5**, 83, (2014).
- [90] J. Jiang, R. Zhang, L. Guo, W. Li y X. Cai, Network aggregation process in multilayer air transportation networks, *Chin. Phys. Lett.*, **33** (10), 108901, (2016)
- [91] M. Akram y S. Naz, Energy of Pythagorean fuzzy graphs with applications, *Mathematics*, **6** (8), 136, (2018).
- [92] M. Gao, E. P. Lim y D. Lo, *Network Data Mining and Analysis*, (World Scientific, New Jersey, 2019).
- [93] C. H. Huang, J. J. P. Tsai, N. Kurubanjerdjit y K. L. Ng, Computational analysis of molecular networks using spectral graph theory, complexity measures and information theory, *BioArxiv*, 536318, (2019).
- [94] H. Richter, Properties of network structures, structure coefficients, and benefit-to-cost ratios, *Biosystems*, **180**, 88, (2018).
- [95] I. Gutman y B. Furtula, Graph energies and their applications, *Bull. - Acad. serbe sci. arts, Cl. sci. math. nat., Sci. math.*, **44**, 29, (2019).
- [96] R. Solomonoff and A. Rapoport, Connectivity of random nets *B. Math. Biophys.*, **13** (2), 107, (1951).
- [97] C. T. Martínez-Martínez, J. A. Méndez-Bermúdez, José M Rodríguez y José M Sigarreta, Computational and analytical studies of the Randić index in ErdősRényi models, *Appl. Math. Comput.*, **377**, 125137, (2020).
- [98] C. T. Martínez-Martínez, J. A. Méndez-Bermúdez, José M Rodríguez, José M Sigarreta, Computational and analytical studies of the Harmonic index on ErdősRényi models, *Math. Comput. Chem.*, **85**, 395, (2021)
- [99] L. A. N. Amara, A. Scala, M. Barthelemy y H. E. Stanley, *Classes of small-world networks. The Structure and Dynamics of Networks*. (Princeton University Press, 2011).

- [100] M. E. Newman, Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results. *Phys. Rev. E*, **64** (1), 016131, (2001).
- [101] M. Newman, *Networks*, (Oxford University Press, 2018).
- [102] T. Zhou, J. Ren, M. Medo y Y. C. Zhang, Bipartite network projection and personal recommendation, *Phys. Rev. E*, **76** (4), 046115, (2007).
- [103] F. Liljeros, C. R. Edling, L. A. N. Amaral, H. E. Stanley y Y. Åberg, The web of human sexual contacts, *Nature*, **411** (6840), 907, (2001).
- [104] J. Bascompte y P. Jordano, *Mutualistic networks*, (Princeton University Press, 2013).
- [105] G. A. Pavlopoulos, P. I. Kontou, A. Pavlopoulou, C. Bouyioukos, E. Markou y P. G. Bagos, Bipartite graphs in systems biology and medicine: a survey of methods and applications, *GigaScience*, **7** (4), (2018).
- [106] C. T. Martínez-Martínez, J. A. Méndez-Bermúdez, Y. Moreno, J. J Pineda-Pineda, J. M. Sigarreta, Spectral and localization properties of random bipartite graphs, *Chaos Solitons Fractals*, **3**, 100021, (2019).
- [107] J.M. Hellawell, *Biological Surveillance of Rivers: A Biological Monitoring Handbook*, (Water Research Centre, Stevenage, UK, 1978).
- [108] P. D. Armitage, D. Moss, J. F. Wright y M. T. Furse, The performance of a new biological water quality score system based on macroinvertebrates over a wide range of unpolluted running-water sites, *Water Res.*, **17** (3), 333, (1983).
- [109] E. H. Simpson, Measurement of diversity, *Nature*, **163** (4148), 688, (1949).
- [110] K. C. Romero, J. P. Del Rio, K. C . Villarreal, J. C. C.Anillo, Z. P. Zarate, L. C. Gutierrez, O. L. Franco y J. W. A. Valencia, Lentic water quality characterization using macroinvertebrates as bioindicators: An adapted BMWP index. *Ecol. Indic.*, **72**, 53, (2017).
- [111] J. J. Pineda-Pineda, C. T. Martínez-Martínez, J. A. Méndez-Bermúdez, J. Muñoz-Rojas, J. M. Sigarreta, Application of Bipartite Networks to the Study of Water Quality, *Sustainability*, **12** (12), 5143, (2020)

-
- [112] U. Bastolla, M. A. Fortuna, A. Pascual-García, A. Ferrera, B. Luque y J. Bascompte, The architecture of mutualistic networks minimizes competition and increases biodiversity, *Nature*, **458** (7241), 1018, (2009).
- [113] C. Gracia-Lázaro, L. Hernández, J. Borge-Holthoefer y Y. Moreno, The joint influence of competition and mutualism on the biodiversity of mutualistic ecosystems, *Scientific reports*, **8** (1), 1, (2018).
- [114] C. T. Martínez-Martínez, J. A. Méndez-Bermúdez, T. Peron, Y. Moreno, Statistical properties of mutualistic-competitive random networks, *Chaos Solitons Fractals*, **153**, 111504, (2021).
- [115] E. Estrada, *The Structure of Complex Networks: Theory and Applications*, (Oxford University Press, 2011).
- [116] M. Penrose, *Random geometric graphs*, (Oxford University Press, New York, 2003).
- [117] D. Urban y T. Keitt, Landscape Connectivity: A Graph-Theoretic Perspective *Ecology*, **82** (5), 1205, (2001).
- [118] A. Perna, S. Valverde, J. Gautrais, C. Jost, R. Solé, P. Kuntz y G. Theraulaz, Topological efficiency in three-dimensional gallery networks of termite nests, *Physica A*, **387** (24), 6235, (2008).
- [119] J. Buhl, J. Gautrais, R. V. Solé, P. Kuntz, S. Valverde, J. L. Deneubourg y G. Theraulaz, Efficiency and robustness in ant networks of galleries, *Eur. Phys. J. B*, **42** (1), 123, (2004).
- [120] E. Santiago, J. X. Velasco-Hernández, y M. Romero-Salcedo, A methodology for the characterization of flow conductivity through the identification of communities in samples of fractured rocks. *Expert Syst. Appl.*, **41** (3), 811, (2014).
- [121] P. Gupta y P. R. Kumar, Critical Power for asymptotic connectivity in wireless networks, in *Stochastic analysis, control, optimization and applications* (Birkhäuser Boston, 1999).
- [122] G. J. Pottie y W. J. Kaiser, Wireless integrated network sensors, *Commun. ACM*, **43** (5), 51, (2000).

- [123] D. Estrin, R. Govindan, J. Heidemann y S. Kumar, Next century challenges: Scalable coordination in sensor networks, *in Proceedings of the ACM/IEEE International Conference on Mobile Computing and Networking* (Seattle, Washington, USA, August 1999)
- [124] E. N. Gilbert, Random Graphs, *Ann. Math. Stat.*, **30** (4), 1141, (1959).
- [125] J. Dall y M. Christensen, Random geometric graphs, *Phys. Rev. E*, **66** (1), 016121, (2002).
- [126] P. Wang y M. C. González, Understanding spatial connectivity of individuals with non-uniform population density, *Philos. Trans. Royal Soc. A*, **367** (1901), 3321, (2009).
- [127] A. Díaz-Guilera, J. Gómez-Gardees, Y. Moreno y M. Nekovee, Synchronization of Kuramoto oscillators in Random Geometric Graphs, *Int. J. Bif. Chaos*, **19** (2), 687, (2009).
- [128] M. Nekovee, Worm epidemics in wireless ad hoc networks, *New J. Phys.*, **9** (6), 189 (2007).
- [129] V. Isham, J. Kaczmarska y M. Nekovee, Spread of information and infection on finite random networks, *Phys. Rev. E*, **83** (4), 046128, (2011).
- [130] Z. Toroczkai y H. Guclu, Proximity networks and epidemics, *Physica A*, **378** (1), 68, (2007).
- [131] E. Estrada y M. Sheerin, Random rectangular graphs. *Physical Review E*, **91** (4), 042805, (2015).
- [132] E. Estrada, S. Meloni, M. Sheerin y Y. Moreno, Epidemic spreading in random rectangular networks. *Physical review E*, **94** (5), 052316, (2016).
- [133] E. Estrada y G. Chen. Synchronizability of random rectangular graphs. *Chaos*, **25** (8), 083107, (2015).
- [134] E. Estrada y M. Sheerin, Random neighborhood graphs as models of fracture networks on rocks: Structural and dynamical analysis. *Appl. Math. Comput.*, **314**, 360, (2017).

-
- [135] C. T. Martínez-Martínez, J. A. Méndez-Bermúdez, Francisco A. Rodrigues, E. Estrada, “Nonuniform random graphs on the plane: A scaling study”, *Phys. Rev. E*, **105** (3), 034304, (2022)
- [136] J. Diaz, D. Mitsche y X. Perez, Dynamic random geometric graphs, arXiv:cs/0702074v2, (2007).
- [137] R. Aguilar-Sánchez, J. A. Méndez-Bermúdez, F. A. Rodrigues y J. M. Sigarreta-Almira, Topological versus spectral properties of random geometric graphs, *Phys. Rev. E*, **102** (4), 042306, (2020).
- [138] C. Mahaux y H.A. Weidenmuller, *Shell Model Approach to Nuclear Reactions*, (North-Holland: Amsterdam, The Netherlands, 1969).
- [139] V. V. Sokolov y V. G. Zelevinsky, Dynamics and statistics of unstable quantum states. *Nucl. Phys. A*, **504** (3), 504, (1989).
- [140] V. V. Sokolov y V. G. Zelevinsky, On a statistical theory of overlapping resonances. *Phys. Lett. B*, **202** (1), 10, (1988).
- [141] V. V. Sokolov y V. G. Zelevinsky, Collective dynamics of unstable quantum states. *Ann. Phys.*, **216** (2), 323, (1992).
- [142] I. Rotter, A continuum shell model for the open quantum mechanical nuclear system. *Rep. Prog. Phys.*, **54** (4), (1991).
- [143] C. T. Martínez Martínez. *Estudio de las propiedades espectrales y de autoestados de redes con pérdidas y ganancias (Tesis de Licenciatura)*. Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, (2016).
- [144] M. Weiss, J. A. Méndez-Bermúdez y T. Kottos, Resonance width distribution for high dimensional random media. *Phys. Rev. B*, **73** (4), 045103, (2006).
- [145] I. F. Herrera-González, J. A. Méndez-Bermúdez y F.M. Izrailev, Transport through quasi-one-dimensional wires with correlated disorder. *Phys. Rev. E*, **90** (4), 042115, (2014).
- [146] I. F. Herrera-González, J. A. Méndez-Bermúdez y F.M. Izrailev, Distribution of S -matrix poles for one-dimensional disordered wires. arXiv:1810.06166 (2018).

-
- [147] G. L. Celardo, A. Biella, L. Kaplan y F. Borgonovi, Interplay of superradiance and disorder in the Anderson Model. *Fortschr. Phys.*, **61** (2-3), 250, (2013).
- [148] N. C. Chavez, F. Mattiotti, J. A. Méndez-Bermúdez, F. Borgonovi y G. L. Celardo. Real and imaginary energy gaps: A comparison between single excitation Superradiance and Superconductivity. *Eur. Phys. J. B*, **92** (7), 1, (2019).
- [149] R. El-Ganainy, K. G. Makris, M. Khajavikhan, Z. H. Musslimani, S. Rotter y D. N. Christodoulides, Non-Hermitian physics and PT symmetry. *Nature Physics* , **14** (1), 11, (2018).
- [150] O. Vázquez-Candanedo, J. C. Hernández-Herrejón, F. M. Izrailev y D. N. Christodoulides, Gain- or loss-induced localization in one-dimensional PT-symmetric tight-binding models. *Phys. Rev. A* **89** (1), 013832, (2014).
- [151] C. T. Martínez-Martínez y J. A. Méndez-Bermúdez, Information Entropy of Tight-Binding Random Networks with Losses and Gain: Scaling and Universality, *Entropy*, **21**, 86, (2019).