



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**  
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA  
LICENCIATURA EN INGENIERÍA EN ALIMENTOS

**“APLICACIÓN DEL MÉTODO DE RICHARDSON PARA LA  
SOLUCIÓN NUMÉRICA RÁPIDA DE PROBLEMAS DE  
SECADO POR DIFUSIÓN”**

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**INGENIERO EN ALIMENTOS**

PRESENTA:  
**MARTHA RAMOS MORALES**

DIRECTOR:  
**DR. IRVING ISRAEL RUIZ LÓPEZ**

CODIRECTOR:  
**DRA. ORLENDIA CORTÉS ZAVALA**

# Índice

<b>Índice de tablas</b>	<b>III</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VIII</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>X</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>I Antecedentes</b>	<b>3</b>
1.1 Generalidades del secado . . . . .	3
1.2 Aplicación del secado en alimentos . . . . .	4
1.2.1 Extensión de la vida de anaquel . . . . .	4
1.2.2 Mejora de la calidad . . . . .	4
1.2.3 Facilidad de manejo . . . . .	4
1.2.4 Procesamiento adicional . . . . .	5
1.2.5 Saneamiento . . . . .	5
1.3 Etapas del secado . . . . .	5
1.4 Métodos de cálculo para el período de velocidad constante . . . . .	7
1.4.1 Método de curva de velocidad de secado . . . . .	8
1.4.2 Método de coeficientes de transporte de masa y energía . . . . .	9
1.5 Métodos de cálculo para el período de velocidad decreciente . . . . .	11
1.5.1 Método de integración gráfica . . . . .	12
1.5.2 Casos especiales en la región de velocidad decreciente . . . . .	13
1.6 Secado controlado por difusión . . . . .	14

---

1.7	Extrapolación de Richardson . . . . .	26
<b>II</b>	<b>Hipótesis y objetivos</b>	<b>28</b>
2.1	Hipótesis . . . . .	28
2.2	Objetivo general . . . . .	28
2.3	Objetivos específicos . . . . .	28
<b>III</b>	<b>Materiales y métodos</b>	<b>29</b>
3.1	Desarrollo del modelo . . . . .	29
3.2	Adimensionalización del modelo de secado . . . . .	31
3.3	Solución numérica del modelo de secado . . . . .	32
3.4	Implementación del método de Richardson . . . . .	33
3.5	Experimentos de simulación . . . . .	35
<b>IV</b>	<b>Resultados y discusión</b>	<b>37</b>
4.1	Soluciones en una dimensión . . . . .	37
4.2	Soluciones en dos dimensiones . . . . .	56
<b>V</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>68</b>

# Índice de tablas

1.1	Características de los modelos de secado de alimentos. . . . .	23
1.2	Difusividad efectiva de la humedad en algunos alimentos. . . . .	25
4.1	Comparación del tiempo de ejecución de los métodos de Richardson y convencional para un prisma cuadrado infinito. . . . .	66

# Índice de figuras

1.1	Curva de velocidad de secado para condiciones de secado constante en función del contenido de humedad libre. . . . .	7
1.2	Representación de las concentraciones de humedad en el espesor de una placa plana.	17
1.3	Humedad libre promedio durante la deshidratación de sólidos con forma de placa bajo diferentes valores del número de Biot. . . . .	19
1.4	Humedad libre promedio durante la deshidratación de sólidos con forma de cilindro bajo diferentes valores del número de Biot. . . . .	19
1.5	Humedad libre promedio durante la deshidratación de sólidos en forma de esfera bajo diferentes valores del número de Biot. . . . .	20
4.1	Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función del número de nodos y número de Fourier. . . . .	38
4.2	Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función del número de nodos y número de Fourier. . . . .	39
4.3	Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función del número de nodos y número de Fourier. . . . .	39
4.4	Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función del número de nodos y fracción de humedad libre. . . . .	40

4.5	Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función del número de nodos y fracción de humedad libre. . . . .	40
4.6	Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función del número de nodos y fracción de humedad libre. . . . .	41
4.7	Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función del número de nodos y número de Fourier. . . . .	42
4.8	Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función del número de nodos y número de Fourier. . . . .	42
4.9	Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función del número de nodos y número de Fourier. . . . .	43
4.10	Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función del número de nodos y fracción de humedad libre. . . . .	43
4.11	Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función del número de nodos y fracción de humedad libre. . . . .	44
4.12	Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función del número de nodos y fracción de humedad libre. . . . .	44
4.13	Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función del número de nodos y número de Fourier. . . . .	46

4.14 Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función del número de nodos y número de Fourier. . . . .	46
4.15 Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función del número de nodos y número de Fourier. . . . .	47
4.16 Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función del número de nodos y fracción de humedad libre. . . . .	47
4.17 Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función del número de nodos y fracción de humedad libre. . . . .	48
4.18 Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función del número de nodos y fracción de humedad libre. . . . .	48
4.19 Comparación del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función de la fracción de humedad libre. . . . .	50
4.20 Comparación del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función de la fracción de humedad libre. . . . .	51
4.21 Comparación del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función de la fracción de humedad libre. . . . .	52

4.22 Comparación del cociente del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función de la fracción de humedad libre. . . . .	53
4.23 Comparación del cociente del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función de la fracción de humedad libre. . . . .	54
4.24 Comparación del cociente del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función de la fracción de humedad libre. . . . .	55
4.25 Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de nodos y número de Fourier . . . . .	57
4.26 Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de nodos y fracción de humedad libre. . . . .	57
4.27 Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de de prisma cuadrado infinito como función del número de nodos y número de Fourier. . . . .	58
4.28 Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de nodos y fracción de humedad libre. . . . .	58
4.29 Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de nodos y número de Fourier. . . . .	60

4.30 Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de nodos y fracción de humedad libre. . . . .	60
4.31 Comparación del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de Fourier. . . . .	61
4.32 Comparación del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función de la fracción de humedad libre. . . . .	62
4.33 Comparación del cociente del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de Fourier. . . . .	64
4.34 Comparación del cociente del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función de la fracción de humedad libre. . . . .	65
4.35 Efecto del número de ecuaciones sobre el cociente del tiempo de ejecución del método convencional al método de Richardson para un prisma cuadrado infinito para alcanzar una precisión similar. . . . .	67

# Nomenclatura

$\mathcal{A}$	denota la superficie del producto
$A_n$	enésimo coeficiente de la solución en serie
$\lambda$	calor latente de evaporación del agua (kJ/kg agua)
$\psi$	fracción de humedad libre o humedad adimensional
$\rho$	densidad en base seca (kg/m <sup>3</sup> )
$\tau$	número de Fourier
$\xi$	coordenada adimensional
$A$	área de la sección transversal del secador (m <sup>2</sup> )
$A$	área disponible para la transferencia de masa y energía en el producto (m <sup>2</sup> )
$A$	área superficial expuesta al secado (m <sup>2</sup> )
$c_s$	concentración de sólidos del material (kg sólidos/m <sup>3</sup> )
$c_w$	concentración de agua del material (kg agua/m <sup>3</sup> )
$C_{p\infty}$	calor específico del aire (kJ/kg/°C)
$C_{pw}$	calor específico del agua (kJ/kg/°C)
$D$	coeficiente de difusividad (m <sup>2</sup> /s)
$d_t$	tiempo transcurrido (s)
$d_z$	segmento pequeño a lo largo del secador (m)
$F$	constante
$G$	caudal másico de aire (kg/s)

---

$H$	humedad absoluta del aire (kg agua/kg aire seco)
$h$	coeficiente de transferencia de calor ( $W/m^2/K$ )
$h_c$	coeficiente de transferencia de energía ( $W/m^2/^\circ C$ )
$H_s$	humedad de saturación del aire (kg agua/kg aire seco)
$i$	entalpía (J/kg)
$i_v$	entalpía del vapor de agua (J/kg)
$k$	constante de secado (1/s)
$k_c$	coeficiente de transferencia de masa (m/s)
$k_d$	coeficiente de transferencia de humedad por difusión (m/s)
$L$	espesor en una placa (m)
$L_s$	kg de sólido seco usado
$N$	número de nodos
$q$	velocidad de transferencia convectiva de calor (W)
$R$	constante
$t$	tiempo(s)
$T_\infty$	temperatura del aire de secado ( $^\circ C$ )
$T_s$	temperatura de sólido ( $^\circ C$ )
$T_w$	temperatura de bulbo húmedo ( $^\circ C$ )
$X$	contenido de humedad en base seca (kg agua/kg sólidos)
$X_c$	humedad crítica
$X_e$	contenido de humedad de equilibrio (kg agua/kg sólidos)

# Introducción

El secado es quizás la operación unitaria más común y antigua de conservación de alimentos. Este método térmico implica un proceso simultáneo de transferencia de masa (humedad) y energía (calor) entre un producto higroscópico y el aire de secado para la eliminación de líquido volátil (agua) en un producto alimenticio a través de la fase vapor. Esta tecnología de secado ha evolucionado y actualmente es un proceso indispensable en la producción de alimentos, ya que disminuye el contenido de agua a un nivel que reduce la incidencia de crecimiento microbiano y retarda las reacciones químicas de deterioro, resultando productos estables en almacenamiento de menor peso y volumen para la mejora de las propiedades de transporte y envasado.

El transporte de masa durante el secado de alimentos a menudo se describe un mecanismo de difusión, descrito por la segunda ley de Fick (ley análoga a la ecuación de Fourier de transferencia de calor). La propiedad que define la velocidad de secado en este mecanismo es la difusividad del agua, una propiedad de transporte efectiva o aparente ya que puede englobar a otros mecanismos menores de transporte de masa (Mujumdar, 2006). La difusividad del agua aumenta con un incremento en la temperatura del aire de secado y puede disminuir al reducirse el contenido de humedad a medida que avanza el secado como consecuencia del colapso de la estructura porosa del producto. Los modelos difusivos se pueden utilizar para predecir el proceso de secado y son resueltos mediante enfoques numéricos (diferencias finitas, elementos finitos, volumen finito, etc.) y analíticos (separación de variables) (Ruiz-López et al., 2011b,1,1). Estos modelos ayudan a predecir la velocidad de secado, los gradientes de humedad, la temperatura dentro del producto, aspectos relacionados con la calidad del producto durante y después de la operación del secado. Sin embargo, el enfoque analítico está limitado por estar disponible a un conjunto reducido de geometrías, mientras que el enfoque numérico implica esfuerzo de programación y tiempos de simulación prolongados (Anandharamakrishnan, 2017; Delgado & de Lima, 2016; Dincer & Zamfirescu, 2016).

La extrapolación de Richardson es un método empleado para aumentar la precisión de las aproximaciones numéricas o para mantener los errores computacionales debajo de cierto límite deseado. Este método establece que la integral o derivada numérica de una función se puede

mejorar a partir de las integrales o derivadas numéricas evaluadas con dos tamaños de paso diferentes (Chapra & Canale, 2015). El objetivo de este trabajo es desarrollar e implementar un método más eficiente que el de diferencias finitas para la solución numérica de problemas de secado por difusión mediante la aplicación del método de Richardson.

# I. Antecedentes

## 1.1. Generalidades del secado

El secado puede definirse como la eliminación de sustancias volátiles (humedad) mediante calor de un producto sólido. Por lo general, aunque no exclusivamente, la principal sustancia volátil es el agua y es el único constituyente cuya eliminación se busca. En tales circunstancias, es la porción acuosa la que llamamos «humedad» (Keey, 2013). La eliminación de agua casi siempre es en forma de vapor con aire por medios mecánicos y el contenido de humedad del producto seco final varía, ya que depende del tipo de producto (Geankoplis, 1998). El término secado se usa a menudo como sinónimo de evaporación y deshidratación. Sin embargo, se diferencia de la evaporación en que el producto final es un sólido en lugar de un líquido muy viscoso; se diferencia de la deshidratación en que el contenido de humedad final del producto alimenticio seco es más del 2.5%, mientras que el del deshidratado es menos del 2.5% (Vega-Mercado et al., 2001).

En el proceso de secado, la eliminación de humedad de los alimentos es mediante el proceso simultáneo de transferencia de calor y masa debido a la aplicación de calor (Ricca et al., 2016). Por lo general, la transferencia de calor a las muestras sólidas es mediante las formas de convección, conducción, radiación o propiedad dieléctrica (Sahni & Chaudhuri., 2012). La convección es posiblemente el modo más común de secar partículas, sólidos en forma de hoja o pastosos. El calor es suministrado por aire caliente o gas que fluye sobre la superficie del sólido. El calor para la evaporación se suministra por convección a la superficie expuesta del material y la humedad evaporada se lleva al medio de secado. El comportamiento de secado de los sólidos se puede caracterizar midiendo la pérdida de contenido de humedad en función del tiempo. Los métodos utilizados para el seguimiento del proceso son diferencia de humedad, pesaje continuo y pesaje intermitente (Mujumdar, 2006). En general, el secado se realiza con temperaturas del aire superiores al punto de ebullición del líquido a eliminar (Delgado & de Lima, 2016).

## **1.2. Aplicación del secado en alimentos**

El secado es el método más utilizado para la conservación de alimentos (Pawar & Pratapa., 2017). Dado que los productos alimenticios con alto contenido de humedad son perecederos, el secado es un método ampliamente utilizado para su conservación y de esta manera se reducen las pérdidas de diversos productos (Onwude et al., 2016). Las razones del secado son casi tan diversas como los materiales que se secan. A veces, el secado se lleva a cabo para economizar el transporte o para facilitar la manipulación. Los minerales se pueden secar para aumentar la capacidad de la planta de calcinación. Muchos materiales deben secarse para que su contenido de humedad alcance un valor prescrito antes de venderse. Otros, como los alimentos, se secan para conservarlos para su almacenamiento y envío sin necesidad de refrigeración (Keey, 2013).

Mujumdar (2006), resume algunos de los principales objetivos del secado en alimentos, que son:

### **1.2.1. Extensión de la vida de anaquel**

Un producto alimenticio seco es menos susceptible al deterioro causado por el crecimiento de bacterias, mohos e insectos. La actividad de muchos microorganismos e insectos se inhiben en un entorno en el que la humedad relativa de equilibrio es inferior al 70%. Asimismo, se reduce el riesgo de reacciones oxidativas y enzimáticas desfavorables que acotan la vida útil de los alimentos.

### **1.2.2. Mejora de la calidad**

Muchas cualidades favorables y valores nutricionales de alimentos o productos alimenticios pueden mejorarse mediante el secado. Se mejora la palatabilidad y también se aumenta la digestibilidad y las conversiones metabólicas. El secado también cambia el color, el sabor y, a menudo, la apariencia de un alimento. La aceptación de ese cambio varía según el usuario final.

### **1.2.3. Facilidad de manejo**

El envasado, manipulación y transporte de un producto seco son más fáciles y económicos porque el peso y el volumen de un producto son menores en su forma seca. Un producto seco fluye más fácilmente que un producto húmedo; por lo tanto, las fuerzas de la gravedad pueden utilizarse para la carga, descarga y el transporte de corta distancia.

#### 1.2.4. Procesamiento adicional

Los productos alimenticios se secan para una mejor molienda, mezcla o segregación. Un producto seco requiere mucho menos energía que un producto húmedo para moler. Un producto seco se mezcla con otros materiales de manera más uniforme y es menos pegajoso en comparación con un producto húmedo.

#### 1.2.5. Saneamiento

El secado también se ha utilizado como medio de saneamiento de alimentos. Los insectos y otros microorganismos se destruyen durante la aplicación de difusión de calor y humedad. El aspecto sanitario del secado es un fenómeno de tiempo-temperatura. La temperatura debe ser de al menos 60 °C durante un breve período de 3 a 5 minutos. Se pueden utilizar temperaturas más bajas, hasta un mínimo de 48 °C, para la desinfección, pero la duración del tratamiento debe durar al menos 24 horas más.

### 1.3. Etapas del secado

El vapor de agua presente en un sólido tiende a ocupar todo el espacio intercelular disponible generando presión. Esta presión se denomina presión parcial de vapor de agua en la superficie ( $P_s$ ) del producto. Por otro lado, el vapor de agua en el aire realiza una presión parcial denominada presión parcial de vapor de agua en el aire ( $P_{air}$ ). Si el contenido de humedad en el producto es muy bajo, de modo que  $P_s$  es menor que la  $P_{air}$ , el producto ganará humedad. En el proceso de secado, la eliminación de humedad se logra mediante el movimiento del agua, debido a una diferencia de presiones parciales. Entonces, se producirá el secado del producto si  $P_s > P_{air}$ . El aire insaturado en contacto con el producto provoca la evaporación del agua periférica lo que genera un gradiente de humedad en las capas del producto. A través de la difusión, el agua interna se desplaza hacia la periferia, donde se evapora, creando nuevos gradientes de humedad, haciendo que el proceso continúe. El aire caliente y con baja humedad relativa tiene capacidad de evaporación e intercambio de energía, dicho aire provoca el calentamiento del producto que a su vez también aumenta la evaporación del líquido y las presiones internas (Milman, 2002).

Los productos higroscópicos durante el secado tienen contenidos de humedad comúnmente definidos como: contenido de humedad inicial, crítico y de equilibrio. El contenido de humedad inicial es la cantidad de agua en el producto al iniciar el proceso de secado. Esta agua puede estar fuertemente ligada a la masa seca del producto, que es difícil de eliminar, o en forma de agua libre que se puede eliminar fácilmente según las condiciones del entorno. El contenido de humedad en un producto produce cambios en la velocidad de secado, de constante a decreciente y se denomina como contenido de humedad crítico. El contenido de humedad en equilibrio se alcanza cuando el producto húmedo está en equilibrio con el aire de secado. En este caso, no hay flujo de humedad entre ambos. Según Fioreze (2003), esto no significa que la humedad del producto y el aire sean iguales, sino que las presiones de vapor en la superficie del producto y el aire son iguales.

El proceso de secado presenta tres pasos clásicos como se muestra en la Figura 1.1. Al comienzo del secado ocurre un aumento de la temperatura del producto y de la presión del vapor de agua (período de calentamiento), que corresponde al punto *A*. En este momento, la tasa de secado está aumentando, debido a que la humedad relativa en la capa límite es menor al 100 %, pasando a lo que suele llamarse «período de acomodación». Por otra parte, si el sólido está bastante caliente al inicio de la operación, la velocidad de secado puede iniciarse en un punto *A'*. Este periodo inicial de ajuste en estado no estacionario suele ser bastante corto, y por lo general se pasa por alto en el análisis de los tiempos de secado (Reeds, 1991). Los aumentos en la velocidad de secado continúan ocurriendo hasta el punto en que se produce la equivalencia entre la transferencia de calor y masa (agua), es decir, el período de velocidad constante (la recta entre los puntos *B* y *C*). Si bien hay humedad en la superficie para avanzar en el proceso de evaporación, la velocidad de secado permanece constante. El punto final del período de tasa constante se denomina punto de humedad crítica (contenido de humedad en el que el agua deja de comportarse como agua libre).

A medida que avanza el secado, y ya pasado del punto de humedad crítica, el contenido de humedad continúa disminuyendo y el agua en fase líquida forma puentes líquidos dentro del sólido poroso; a partir de este punto comienza el período de velocidad decreciente (correspondiente a la línea *CD*). Durante este período, se produce una reducción en la migración de humedad desde el interior hacia la superficie del producto y la transferencia de calor no es equivalente a la transferencia de masa. Finalmente, el secado ocurre dentro del producto hasta que se alcanza ese

contenido de humedad de equilibrio, es decir, cuando la cantidad de agua evaporada es igual a la cantidad de agua condensada en la superficie del sólido. En el punto  $D$  la velocidad de secado disminuye con mayor rapidez, hasta que llega al punto  $E$ , donde el contenido de humedad de equilibrio es  $X_e$ , y  $X_e - X_e = 0$  (Brooker et al., 1992; Silva, 2008).

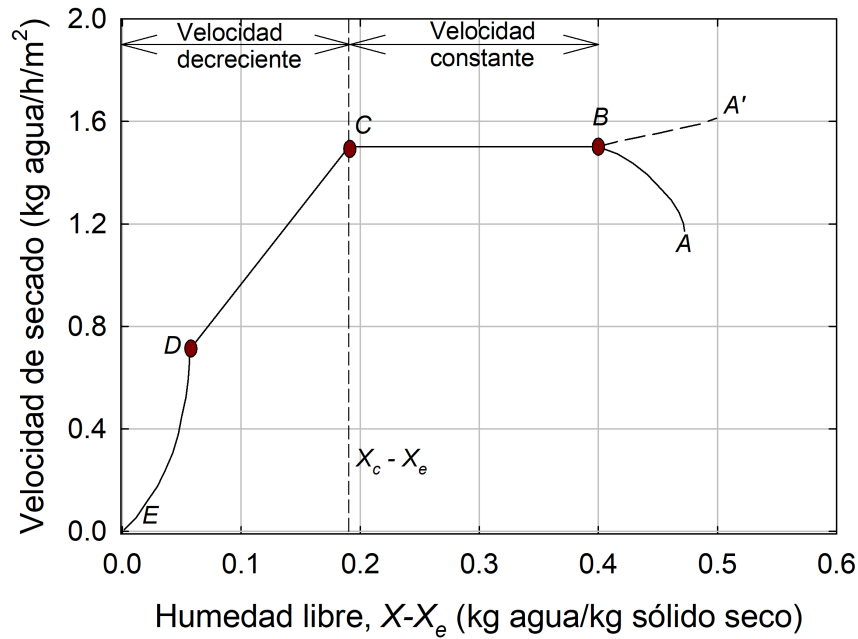


Figura 1.1. Curva de velocidad de secado para condiciones de secado constante en función del contenido de humedad libre. Adaptado de Geankoplis (1998).

El secado de diversos sólidos bajo diferentes condiciones constantes de secado casi siempre produce curvas de forma variable en el período de velocidad decreciente, pero en general siempre están presentes las dos zonas principales de la curva de velocidad de secado; el período de velocidad constante y el período de velocidad decreciente.

#### 1.4. Métodos de cálculo para el período de velocidad constante

Durante el primer período, la superficie del sólido está muy mojada al principio y sobre ella hay una película de agua continua. Esta capa de agua es agua no combinada y actúa como si el sólido no estuviera presente. La velocidad de evaporación con las condiciones establecidas para el proceso es independiente del sólido y esencialmente igual a la velocidad que tendría una

superficie de agua líquida pura. Sin embargo, las ondulaciones y hendiduras en la superficie del sólido ayudan a obtener una velocidad más alta de la que tendría una superficie completamente plana. Si el sólido es poroso, la mayor parte del agua que se evapora durante el período de velocidad constante proviene de su interior. Este período continúa mientras el agua siga llegando a la superficie con la misma rapidez con la que se evapora.

Se han desarrollado varias fórmulas empíricas para la velocidad de secado durante un período de velocidad constante con datos experimentales. Por ejemplo, la siguiente relación es capaz de describir el secado de alfalfa a altas temperaturas. Cuando  $T_\infty > 200^\circ\text{C}$ ,

$$\frac{dX}{dt} = -K_0 = 0.03066 + 0.0004143T_\infty \quad (1.1)$$

La Ecuación (1.1) implica el hecho de que a temperaturas superiores a  $200^\circ\text{C}$ , la velocidad de secado es constante siempre que la temperatura de secado también lo sea.

El factor más importante en los cálculos del secado es probablemente el tiempo requerido para secar un material a partir de un contenido inicial de humedad libre  $X_1 - X_e$  hasta un contenido de humedad  $X_2 - X_e$ . Para el secado en el período de velocidad constante, es posible estimar el tiempo necesario mediante curvas de secado obtenidas con lotes experimentales, o por predicciones de coeficientes de transferencia de masa y de transferencia de calor (Geankoplis, 1998).

#### 1.4.1. Método de curva de velocidad de secado

Para estimar el tiempo de secado de determinado lote de material, el mejor método consiste en obtener datos experimentales reales bajo condiciones de alimentación, área superficial relativa expuesta, velocidad del gas, temperatura y humedad, que sean, en esencia, las mismas que tendrá el secador que se usará en la práctica. De esta manera, el tiempo requerido para el período de velocidad constante se determina directamente con la curva de secado de contenido de humedad libre en función del tiempo. En ausencia de datos experimentales es posible emplear la curva de velocidad de secado. La velocidad específica de secado  $R$  se define de la siguiente manera:

$$R = -\frac{m_s}{A} \frac{dX}{dt} \quad (1.2)$$

donde  $m_s$  es la masa de sólidos del material a secar y  $A$  es el área de superficie expuesta para la transferencia de masa. Esta expresión se reordena e integra con respecto al intervalo para secar desde  $X_1$  a  $t_1$  hasta  $X_2$  a  $t_2$  (siendo  $t_2 > t_1$  y  $X_2 < X_1$ ).

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{m_s}{A} \int_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{R} = \frac{m_s}{A} \int_{X_2}^{X_1} \frac{dX}{R} \quad (1.3)$$

Si el secado se verifica dentro del período de velocidad constante, de manera que tanto  $X_1$  como  $X_2$  sean mayores que el contenido de humedad crítica  $X_c$ , entonces  $R = R_c$ , donde  $R_c$  es un valor constante. Al integrar la ecuación anterior para el período de velocidad constante se obtiene,

$$t_2 - t_1 = \frac{m_s}{AR_c} (X_1 - X_2) \quad (1.4)$$

#### 1.4.2. Método de coeficientes de transporte de masa y energía

En el período de velocidad constante, el secado del producto se verifica por la transferencia de masa del vapor de agua de su superficie saturada a través de una película de aire hasta la fase gaseosa general del ambiente que lo rodea. La velocidad de desplazamiento de humedad dentro del sólido es suficiente para mantener la superficie saturada. Sin embargo, las irregularidades de la superficie pueden aumentar la velocidad de evaporación. La velocidad de eliminación del vapor de agua está controlada por la velocidad de transferencia de calor hasta la superficie de evaporación, que suministra el calor latente requerido para la evaporación del líquido. Cuando se opera en estado estacionario, la velocidad de transferencia de masa equivale a la velocidad de transferencia de calor. Para deducir la ecuación de secado, se desprecia la transferencia de calor por radiación hacia la superficie sólida y la transferencia de calor por conducción por contacto con las bandejas o superficies metálicas. Suponiendo que la transferencia de calor sólo se verifica del gas caliente a la superficie del sólido por convección y de la superficie al gas caliente por transferencia de masa, es posible escribir la relación

$$\frac{dm_w}{dt} = m_s \frac{dX}{dt} = -\frac{h_c A (T_\infty - T_w)}{\lambda_w} = -k_c A (H_s(T_w) - H) \quad (1.5)$$

donde  $h_c$  y  $k_c$  son coeficientes que describen la transferencia de calor y humedad por convección en la superficie, respectivamente. La transferencia de calor y la transferencia de humedad son fenómenos que son similares en sus representaciones matemáticas. Por lo tanto, las relaciones similares a la que estiman los valores de  $h_c$  pueden usarse para encontrar los valores de  $k_c$ . Los coeficientes  $h_c$  y  $k_c$  están relacionados entre sí por el número de Lewis ( $Le$ ) como

$$Le = \frac{h_c}{k_c C_{p\infty}} \quad (1.6)$$

En condiciones en las que las presiones están en el rango de la atmósfera (aproximadamente 100 kPa) y las temperaturas están por debajo de 100 °C, el  $Le$  es casi igual a 1; por lo tanto,  $k_c$  se puede encontrar a partir de los valores de  $h_c$  como

$$k = \frac{h_c}{C_{p\infty}} \quad (1.7)$$

Al combinar las Ecuaciones 1.5 y 1.2 se obtiene

$$R_c = -\frac{m_s}{A} \frac{dX}{dt} = \frac{h_c (T_\infty - T_w)}{\lambda_w} = k_c (H_s(T_w) - H) \quad (1.8)$$

En ausencia de transferencia de calor por conducción y radiación, la temperatura del sólido está a la temperatura de bulbo húmedo del aire durante el período de secado de velocidad constante. De acuerdo con esto, es posible calcular la velocidad de secado  $R_c$  mediante la Ecuación (1.8). Sin embargo, se ha determinado que es más confiable usar la ecuación de transferencia de calor, puesto que cualquier error en la determinación de la temperatura interfacial  $T_w$  en la superficie, afecta a la fuerza impulsora ( $T_\infty - T_w$ ) mucho menos que el efecto que produce sobre ( $H_s(T_w) - H$ ). Para predecir el valor de  $R_c$  en la Ecuación (1.8) se debe conocer el coeficiente de transferencia de calor ( $h_c$ ) a partir de correlaciones empíricas, como las propuestas por Geankoplis (1998). Para

estimar el tiempo de secado en el período de velocidad constante, al sustituir la Ecuación (1.8) en la (1.4) se obtiene la siguiente expresión:

$$t_2 - t_1 = \frac{m_s \lambda_w (X_1 - X_2)}{h_c A (T_\infty - T_w)} = \frac{m_s (X_1 - X_2)}{k_c A (H_s (T_w) - H)} \quad (1.9)$$

## 1.5. Métodos de cálculo para el período de velocidad decreciente

El punto *C* de la Figura 1.1 corresponde al contenido crítico de humedad libre,  $X_c - X_e$ . En este punto no hay suficiente agua en la superficie para mantener una película continua. La superficie ya no está totalmente mojada, y la porción mojada comienza a disminuir durante el período de velocidad decreciente hasta que la superficie queda seca en su totalidad en el punto *D*.

El segundo período de velocidad decreciente empieza en el punto *D*, cuando la superficie está seca en su totalidad. El agua evaporada atraviesa el sólido para llegar hasta la corriente de aire. Es posible que la cantidad de humedad que se elimina durante el período de velocidad decreciente sea bastante pequeña, no obstante, el tiempo requerido puede ser largo (Geankoplis, 1998).

Una vez que se ha agotado toda el agua de la superficie del material, la humedad se difunde desde las partes internas del producto a la superficie. La cantidad de agua en la superficie se vuelve progresivamente escasa. Como resultado, la velocidad de secado será más lenta a medida que pasa el tiempo. La siguiente relación se puede utilizar para describir la velocidad de secado

$$\frac{dX}{dt} = -k_d A \frac{dP}{dx} \quad (1.10)$$

donde  $k_d$  es un coeficiente de transferencia de humedad (por difusión),  $A$  es el área disponible para la transferencia de masa y  $dP/dx$  es la fuerza impulsora del movimiento de la humedad en términos de presión de vapor de agua dentro del producto. La humedad puede estar en forma de vapor o líquido o una combinación de estas formas.

Es difícil resolver la Ecuación (1.10) para muchos productos. Una forma modificada de esta ecuación se presenta como

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\pi^2 D}{4L^2} (X - X_e) \quad (1.11)$$

La Ecuación (1.11) se obtiene a partir de la solución analítica a la ecuación de transferencia de masa por difusión bajo las consideraciones de una resistencia externa despreciable, que el valor de  $D$  constante y que el producto no se encoge durante el proceso ( $L$  es constante). Se propone una variación de la Ecuación (1.11) cuando la relación  $(X - X_e)/(X_i - X_e)$  es mayor que 0.6, como

$$\frac{dX}{dt} = \frac{h_c (T_\infty - T_w)}{2c_s L \lambda} \frac{X - X_e}{X_i - X_e} \quad (1.12)$$

La aplicación de la Ecuación (1.12) se limita a placas o productos geoméricamente bien definidos. Una expresión mucho más simple para el contenido promedio de humedad del material alimenticio se escribe como

$$\frac{dX}{dt} = -k(X - X_e) \quad (1.13)$$

Al escribir la Ecuación (1.13) se han hecho dos supuestos: (a) la distribución de la humedad dentro del producto es uniforme y (b) la velocidad de secado depende de la constante  $k$  y la humedad de equilibrio  $X_e$ . El valor de  $k$  debe encontrarse experimentalmente; por lo general, exponiendo completamente una fina capa de producto a un aire caliente altamente controlado. La Ecuación (1.13) se ajusta a los datos experimentales de secado (Mujumdar, 2006).

### 1.5.1. Método de integración gráfica

En el período de secado de velocidad decreciente que se muestra en la Figura 1.1, la velocidad de secado  $R$  no es constante, sino que disminuye cuando el secado para por la zona de contenido crítico de humedad libre  $X_c - C_e$ . Cuando el contenido de humedad libre  $X - X_e$  es cero, la velocidad también lo es.

El tiempo de secado para cualquier región entre  $X_1$  y  $X_2$  se obtiene mediante la Ecuación (1.3). Sin embargo, durante el período de velocidad decreciente  $R$  varía. La Ecuación (1.3) se puede integrar gráficamente para cualquier forma de la curva de secado de velocidad decreciente, trazando  $1/R$  en función de  $X$  y determinando el área bajo la curva (Geankoplis, 1998).

### 1.5.2. Casos especiales en la región de velocidad decreciente

En algunos casos especiales que se presentan en la región de velocidad decreciente, la ecuación de tiempo de secado 1.3 puede integrarse analíticamente (Geankoplis, 1998).

1. La velocidad de secado es una función lineal de  $X$ . Si tanto  $X_1$  como  $X_2$  son inferiores a  $X_c$  y la velocidad  $R$  es lineal con respecto a  $X$  en esta región,

$$R = aX + b \quad (1.14)$$

donde  $a$  es la pendiente de la línea y  $b$  es una constante. Al diferenciar la Ecuación (1.14) se obtiene  $dR = adX$ , y sustituyendo en la Ecuación (1.3),

$$t = \frac{m_s}{aA} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dR}{R} = \frac{m_s}{aA} \ln \frac{R_1}{R_2} \quad (1.15)$$

Puesto que  $R_1 = aX_1 + b$  y  $R_2 = aX_2 + b$ ,

$$a = \frac{R_1 - R_2}{X_1 - X_2} \quad (1.16)$$

Al sustituir la Ecuación (1.16) en (1.15),

$$t = \frac{m_s (X_1 - X_2)}{A (R_1 - R_2)} \ln \frac{R_1}{R_2} \quad (1.17)$$

2. La velocidad es una función lineal que pasa a través del origen. En algunos casos, una recta proyectada desde el contenido crítico de humedad que pasa a través del origen presenta de

manera adecuada a la totalidad del período de velocidad decreciente. En la Figura 1.1 esto correspondería a una recta desde  $C$  hasta  $E$  en el origen. La suposición anterior se establece con bastante frecuencia cuando se carece de datos más detallados. Entonces, para una recta a través del origen, donde la velocidad de secado es directamente proporcional al contenido de humedad libre,

$$R = aX \quad (1.18)$$

Al diferenciar,  $dX = dR/a$ . Sustituyendo en la Ecuación (1.3),

$$t = \frac{m_s}{aA} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dR}{R} = \frac{m_s}{aA} \ln \frac{R_1}{R_2} \quad (1.19)$$

La pendiente  $a$  de la línea es  $R_c/X_c$ , y para  $X_1 = X_c$  cuando  $R_1 = R_c$ ,

$$t = \frac{m_s X_c}{AR_c} \ln \frac{X_c}{X_2} \quad (1.20)$$

ó

$$R = R_c \frac{X}{X_c} \quad (1.21)$$

## 1.6. Secado controlado por difusión

Durante el secado, al menos dos procesos principales ocurren simultáneamente: transferencia de calor desde el ambiente circundante hacia el material húmedo para evaporar la humedad en la superficie del material y transferencia de humedad interna a la superficie del sólido. Parece haber cuatro modos principales de transferencia de humedad dentro del sólido: (i) flujo capilar de humedad en pequeños intersticios, (ii) difusión de humedad debido a gradientes de concentración, (iii) difusión de vapor debido a gradientes de presión parcial y (iv) difusión en capas líquidas

adsorbido en interfaces sólidas (Brennan et al., 1976; Sabarez, 2012).

El secado de un sólido con aire implica la vaporización del líquido contenido por el sólido, seguido de la eliminación del vapor por una corriente de aire. Es obvio que el agua debe, por algún mecanismo, viajar desde el interior hacia su superficie antes de que pueda escapar al aire circundante. Anteriormente se suponía que el agua viajaba a través del sólido por difusión como líquido, ahora cabe la posibilidad de que dicho líquido se difunda como vapor de agua. Algunas de las incógnitas más sobresalientes son sobre cómo viaja exactamente el agua a través del sólido hasta su superficie, cómo y dónde tiene lugar la evaporación, y cómo estos factores influyen en la distribución de la humedad a través del sólido. Las condiciones de secado como la temperatura, la humedad, la velocidad y la dirección del aire pueden asumirse como constantes, y además, que el calor latente de vaporización del agua es recibido por el sólido directamente del aire por convección.

Si se supone que el mecanismo por el cual el líquido contenido en un sólido viaja desde el interior hacia la superficie es el de difusión, ya sea de agua líquida o de vapor de agua, se pueden visualizar cuatro formas claramente diferenciadas en las que se desarrolla el proceso de secado en su conjunto. Estos son (Sherwood, 1929):

1. La difusión de líquido desde el interior hasta su superficie sólida, seguida de la vaporización del líquido en la superficie y la difusión del vapor en el aire circundante. La resistencia a la difusión interna de líquido es pequeña en comparación con la resistencia a la eliminación del vapor en la superficie.
2. La difusión de líquido desde el interior hasta su superficie sólida, seguida de la vaporización del líquido en la superficie y la difusión del vapor en el aire circundante. La resistencia a la difusión interna de líquido es grande en comparación con la resistencia a la eliminación del vapor en la superficie.
3. Vaporización del líquido en un punto cualquiera por debajo de la superficie de la estructura sólida, seguida de la difusión de vapor de agua desde ese punto a través del sólido poroso hacia la superficie y de allí al aire. La resistencia a la difusión interna de líquido es menor en comparación con la resistencia total a la eliminación del vapor.

4. Vaporización del líquido en un punto cualquiera por debajo de la superficie de la estructura sólida, seguida de la difusión de vapor de agua desde ese punto a través del sólido poroso hacia la superficie y de allí al aire. La resistencia a la difusión interna de líquido es mayor en comparación con la resistencia total a la eliminación del vapor.

El secado de un material no está limitado a uno de los casos anteriores, ya que a medida que avanza el proceso de secado, el mecanismo puede cambiar de un caso a otro. Sherwood (1929), analizó el segundo caso donde el secado se controla por la difusión interna del líquido hasta la superficie y con baja resistencia a la eliminación de vapor, y dedujo que las variables que afectan la difusión interna del líquido también afectarán la velocidad de secado en el mismo grado. Además, las leyes que gobiernan la difusión interna del líquido pueden ser aplicables al proceso de secado.

La suposición de una resistencia superficial despreciable a la difusión del vapor corresponde a la suposición de una concentración despreciable de agua libre en la superficie sólida, ya que no es necesario un gradiente de humedad para hacer que el agua se difunda a través de la película de aire de la superficie. Las concentraciones de humedad a lo largo del espesor de una placa plana pueden mostrarse gráficamente como en la Figura (1.2). Sherwood (1929), representa mediante esta figura la sección transversal de una placa, cuando el secado tiene lugar desde las caras  $AC$  y  $BD$ . La línea  $AB$  representa el gradiente de concentración inicial y la línea  $CD$  el gradiente final que corresponde al contenido de agua de equilibrio. Los gradientes de humedad durante el secado son lineales desde la superficie hasta la línea central, como se representan en las líneas  $EC$  y  $ED$ . La pendiente la curva del gradiente es proporcional a la velocidad de difusión del agua en cualquier punto, esta pendiente debe descender desde la superficie hasta la línea central y acercarse a cero en el centro. Por lo tanto, las curvas de gradiente reales son de la naturaleza de  $CFD$ .

En términos de cálculo, Sherwood (1929) propuso la ley de difusión de Newton en una placa plana infinita para describir la formación de gradientes internos de humedad,

$$\frac{\partial c_w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c_w}{\partial x^2} \quad (1.22)$$

donde  $c_w$  es la concentración de humedad (por unidad de volumen) en cualquier punto de la placa,

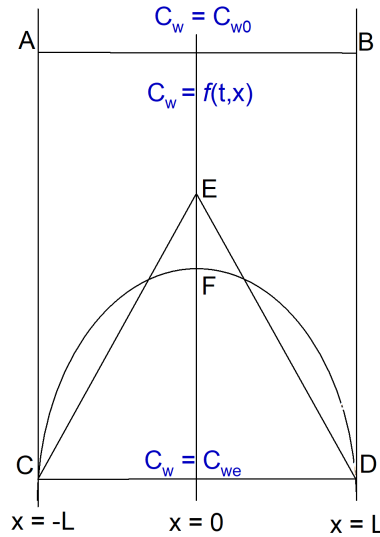


Figura 1.2. Representación de las concentraciones de humedad en el espesor de una placa plana. Adaptado de Sherwood (1929).

$t$  representa el tiempo,  $x$  la distancia entre el punto y la superficie de la hoja y  $D$  es el coeficiente de difusión. Sherwood (1929), estableció que la solución a esta ecuación era idéntica a la de la difusión de calor en un sólido similar pero con algunas consideraciones como: (a) la validez de la ley de difusión de Newton para los procesos de secado, (b) el coeficiente de difusión es constante, (c) la concentración del líquido en el sólido es uniforme al inicio del proceso, (d) la difusión ocurre de forma normal a la superficie del plano y (e) que la evaporación tiene lugar en la superficie y que la resistencia de la superficie a la difusión del vapor puede considerarse insignificante, es decir, que la concentración de líquido en la superficie desciende a su valor de equilibrio inmediatamente después del inicio del secado. Actualmente, se considera que el transporte interno de agua en sólidos durante el secado es un proceso complejo que puede involucrar difusión molecular, flujo capilar, flujo Knudsen, flujo hidrodinámico o difusión superficial. Si combinamos todos estos fenómenos en uno, la difusividad efectiva se puede definir a partir de la segunda Ley de Fick.

$$\frac{\partial c_w}{\partial t} = \nabla \cdot [D \nabla (c_w)] \quad (1.23)$$

donde  $D$  es la difusividad efectiva ( $\text{m}^2/\text{s}$ ),  $c_w$  es la concentración de agua del material ( $\text{kg agua}/\text{m}^3$  producto) y  $t$  es el tiempo (s). De forma rutinaria el contenido de agua de un material no se expresa

como concentración volumétrica, sino como su humedad en base seca  $X$  (kg agua/kg sólidos). Las variables  $c_w$  y  $X$  se relacionan por medio de

$$c_w = c_s X \quad (1.24)$$

donde  $c_s$  es la concentración de sólidos del material (kg sólidos/m<sup>3</sup> producto). Por lo tanto, la Ecuación (1.23) se puede escribir como

$$\frac{\partial (c_s X)}{\partial t} = \nabla \cdot [D \nabla (c_s X)] \quad (1.25)$$

La Ecuación (1.25) muestra el cambio en el tiempo de la distribución de la humedad del material, es decir, describe el movimiento de la humedad dentro del sólido. Esta ecuación se puede utilizar con fines de diseño en casos en los que el mecanismo de control del secado es la difusión de la humedad (Mujumdar, 2006; Ruiz-López et al., 2004,1).

Cuando el supuesto de «uniformidad de la humedad en el producto» ya no es válido debido al tamaño del producto, se debe utilizar el siguiente procedimiento para calcular la velocidad y los tiempos de secado. Como se menciono anteriormente, la humedad de transferencia es análoga a la transferencia de calor. Por lo tanto, los métodos bien establecidos de cálculos de transferencia de calor se pueden utilizar para los cálculos de secado (transferencia de humedad). Por ejemplo, los gradientes de humedad se pueden estimar utilizando gráficos de transferencia de humedad similares a los de los gráficos de Heisler para la transferencia de calor. Los gráficos para encontrar el contenido de humedad libre promedio de una placa, cilindro y esfera infinitos se muestran en las Figuras 1.3-1.5.

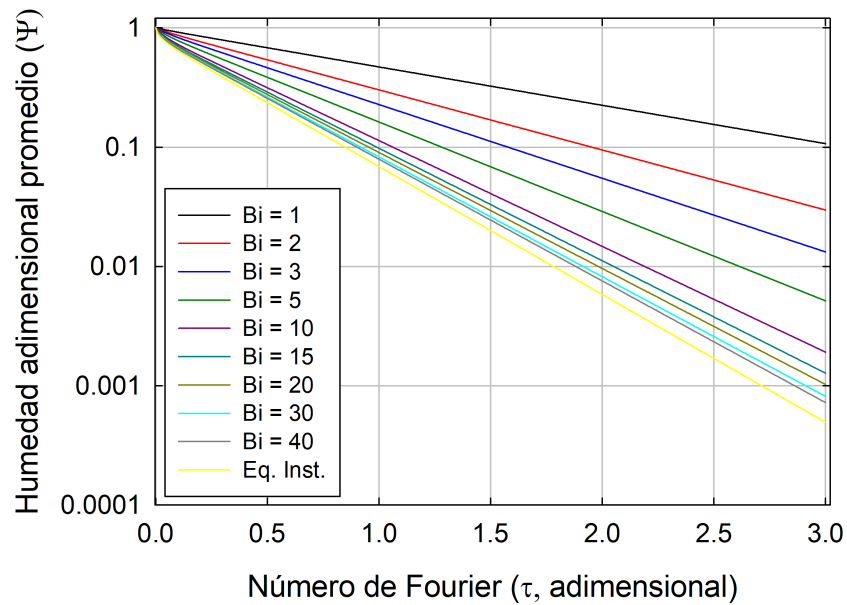


Figura 1.3. Humedad libre promedio durante la deshidratación de sólidos con forma de placa bajo diferentes valores del número de Biot.

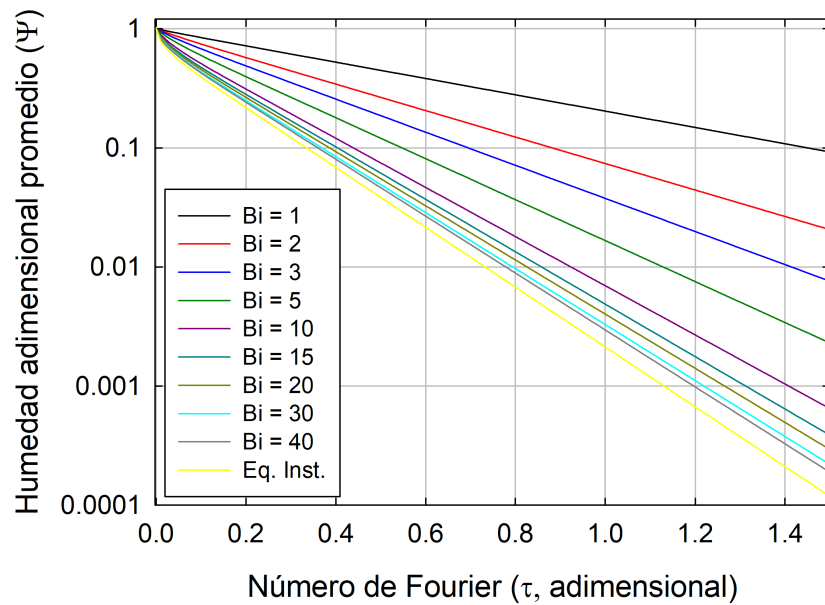


Figura 1.4. Humedad libre promedio durante la deshidratación de sólidos con forma de cilindro bajo diferentes valores del número de Biot.

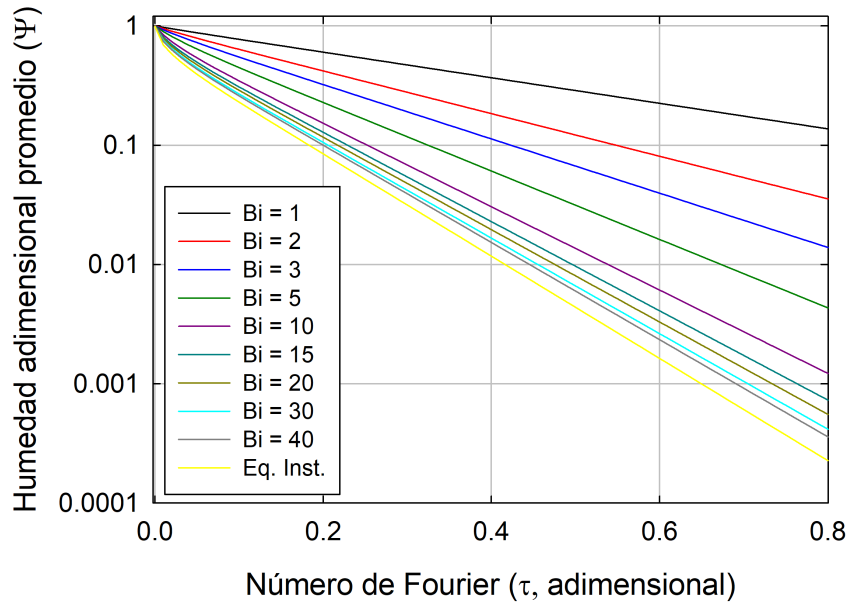


Figura 1.5. Humedad libre promedio durante la deshidratación de sólidos en forma de esfera bajo diferentes valores del número de Biot.

Como alternativa a los gráficos, Ramaswamy & Lo (1983), desarrollaron ecuaciones empíricas de uso más simple que las soluciones analíticas disponibles. Los datos para el desarrollo de estas ecuaciones son esencialmente los de los gráficos. Para la humedad en el centro del producto, las ecuaciones son las siguientes:

- Para un producto alimenticio en forma de placa,

$$\psi_c = R_p \exp(-S_p \tau) \quad (1.26)$$

$$R_p = 0.2884 \arctan\left(\frac{1}{Bi_m}\right) + 0.007927 \arctan\left(\frac{1}{Bi_m^2}\right) - 0.05287 \arctan^2\left(\frac{1}{Bi_m^{0.5}}\right) \quad (1.27)$$

$$+ 0.01696 \arctan^2\left(\frac{1}{3Bi_m}\right) - 0.09581 \arctan^{0.5}\left(\frac{1}{Bi_m^2}\right) + 1.0018$$

$$S_P = 0.4608 \arctan\left(\frac{1}{Bi_m}\right) - 0.08319 \arctan\left(\frac{1}{Bi_m^2}\right) + 0.03752 \arctan\left(\frac{1}{Bi_m^3}\right) \quad (1.28)$$

$$+ 0.8153 \arctan\left(\frac{1}{3Bi_m}\right) + 0.2439 \arctan^2\left(\frac{1}{Bi_m^{0.5}}\right) + 0.001745$$

- Para un producto alimenticio cilíndrico,

$$\psi_c = R_c \exp(-S_c \tau) \quad (1.29)$$

$$R_c = 0.7398 \arctan\left(\frac{1}{3Bi_m}\right) - 0.01723 \arctan\left(\frac{1}{Bi_m^3}\right) - 0.2151 \arctan^2\left(\frac{1}{3Bi_m}\right) + 1.004 \quad (1.30)$$

$$S_c = 0.6517 \arctan\left(\frac{1}{Bi_m}\right) + 2.3186 \arctan\left(\frac{1}{3Bi_m}\right) + 0.5124 \arctan^2\left(\frac{1}{Bi_m^{0.5}}\right) + 0.004211 \quad (1.31)$$

- Para un producto alimenticio esférico,

$$\psi_c = R_s \exp(-S_s \tau) \quad (1.32)$$

$$R_s = 1.0847 \arctan\left(\frac{1}{3Bi_m}\right) - 0.2204 \arctan^2\left(\frac{1}{Bi_m^{0.5}}\right) - 0.1222 \arctan^2\left(\frac{1}{3Bi_m}\right) \quad (1.33)$$

$$+ 0.1041 \arctan^{0.5}\left(\frac{1}{Bi_m}\right) + 0.99806$$

$$S_s = 0.1970 \arctan\left(\frac{1}{Bi_m^2}\right) + 51772 \arctan\left(\frac{1}{3Bi_m}\right) + 0.6585 \arctan^2\left(\frac{1}{Bi_m^{0.5}}\right) \quad (1.34)$$

$$+ 0.3960 \arctan\left(\frac{1}{Bi_m}\right) \arctan(Bi_m) + 0.0003257$$

donde  $\psi_c$  es la fracción de humedad libre en el centro de la placa, cilindro o esfera,  $\tau$  es el número de Fourier de transferencia de masa y  $Bi_m$  es el número de Biot másico, definidos como

$$\tau = \frac{Dt}{L^2} \quad (1.35)$$

$$Bi_m = \frac{K_{eq}k_cL}{vc_sD} \quad (1.36)$$

Estas soluciones intentan ser de aplicación más simple que las soluciones analíticas exactas, que se obtienen por separación de variables. Sin embargo, estas no se encuentran disponibles para todas las geometrías de uso en alimentos (1.1). La estimación de los coeficientes de difusión involucra el ajuste de los datos experimentales al modelo de secado y cuando no existe una solución analítica, los procedimientos de estimación de coeficientes de difusión por regresión no lineal requieren a menudo la solución iterativa del modelo de secado, lo cual puede ser computacionalmente muy costoso, especialmente en problemas con más de una dimensión de transferencia de masa. Los modelos de secado a menudo son resueltos por técnicas numéricas como diferencias finitas, volumen finito o elemento finito. Por lo tanto, cualquier avance para reducir los tiempos de cómputo puede llevar a una mejora en la estimación de las propiedades de transferencia de masa de los alimentos.

Tabla 1.1. Características de los modelos de secado de alimentos.

Alimento	Geometría	Sistema coordinado	Solución	Uso del modelo	Referencia
Manzana	Rodajas	Rectangular, 1D	Numérica	S	Bialobrzewski (2006)
Pera	Esfera	Esférico, 1D	Analítica	ED	Guiné (2006)
Higo	Esfera	Esférico, 1D	Analítica	ED	Babalis & Belessiotis (2004)
Manto de Calamar	Cilindro hueco	Cilíndrico, 1D	Numérica	ED	Teixeira & Tobinaga (1998)
Papa	Cilindros	Cilíndrico, 1D	Numérica	ED	Srikiatden & Roberts (2008)
Zanahoria	Cilindros	Cilíndrico, 1D	Numérica	ED	Srikiatden & Roberts (2008)
Manzana	Rodajas	Rectangular, 1D	Numérica	S	McCarthy & Perez (1991)
Manzana	Gajos	Elipsoidal alargado, 3D	Numérica	ED	Aguirre-García et al. (2020)
Champiñón	Casco elipsoidal	Esferoidal achatado, 2D	Numérica	ED	Estévez-Sánchez et al. (2019)
Champiñón	Casco esférico	Esférico, 2D	Numérica	ED	González-Pérez et al. (2019)
Papa	Cilindro anulares	Cilíndrico, 3D	Numérica	S	Ruiz-López et al. (2013)
Chayote	Rodajas	Rectangular, 1D	Analítica	ED	Ruiz-López et al. (2012)
Mango	Rodajas	Rectangular, 1D	Analítica	ED	Ruiz-López & García-Alvarado (2007)
Zanahoria	Rodajas	Rectangular, 1D	Numérica	S	Ruiz-López et al. (2004)
Rábano	Rodajas	Rectangular, 1D	Analítica	ED	Hernan-Lara et al. (2013)
Carambola	Rodajas	Rectangular, 1D	Analítica	ED	Ruiz-López et al. (2011a)
Mora	Rodajas	Rectangular, 1D	Analítica	ED	Maskan & Gögüs (1998)
Pasas	Rodajas	Rectangular, 1D	Analítica	ED	Karathanos & Kostaropoulos (1995)
Plátano	Rodajas	Rectangular, 1D	Analítica	ED	Mauro & Menegalli (1995)
Tomate	Rodajas	Rectangular, 1D	Analítica	ED	Akanbi et al. (2006)
Piña	Cilindro hueco	Cilíndrico, 3D	Numérica	ED	Rani & Tripathy (2020)
Pepino	Cilindros	Cilíndrico, 1D	Numérica	S	da Silva & e Silva (2014)
Kiwi	Rodajas	Rectangular, 1D	Analítica	ED	Darvishi et al. (2016)
Chabacano	Rodaja	Rectangular, 1D	Analítica	ED	Faal et al. (2015)
Aloe vera	Cubos	Rectangular, 1D	Analítica	ED	Pisalkar et al. (2011)
Cebolla	Rodaja	Rectangular, 1D	Analítica	ED	Compaore et al. (2019)

\*ED: Estimación de la difusividad del agua, S: Simulación

La difusividad de la humedad depende en gran medida de la temperatura y, a menudo, en gran medida del contenido de humedad, pero hay pocas cifras fiables. En los materiales porosos, la fracción de huecos afecta significativamente la difusividad, y la estructura y distribución de los poros lo hacen aún más. El efecto de la estructura y distribución de los poros sobre la difusión de la humedad se puede examinar considerando el material como un sistema de dos (o múltiples) fases (material seco, agua, aire en los huecos, etc.) y considerando alguno modelos estructurales para expresar la geometría del sistema . Las difusividades efectivas, reportadas en la literatura, generalmente se ha estimado a partir de datos de tasa de absorción o secado. Los datos experimentales son escasos debido al efecto del método experimental, el método de análisis, las variaciones en la composición y estructura de los materiales examinados, etc. Los alimentos son los materiales más investigados (Mujumdar, 2006). La Tabla 1.2 muestra el rango de variación de difusividad de algunos alimentos es por ello que, la mayoría de los datos se presentan como rangos.

Tabla 1.2. Difusividad efectiva de la humedad en algunos alimentos.

Alimento	Temperatura (°C)	Difusividad ( $\times 10^{10} \text{m}^2/\text{s}$ )	Referencia
Manzana	30-81	10.1-31.0	Bialobrzewski (2006)
Pera	30-50	11.8-23.5 (1.18-2.35 $10^{-9}$ )	Guiné (2006)
Higo	55-85	8.4-11.3	Babalís & Belessiotis (2004)
Manto de Calamar	60-70	1.09	Teixeira & Tobinaga (1998)
Papa	70	3.7	Srikiatden & Roberts (2008)
Zanahoria	70	5.74	Srikiatden & Roberts (2008)
Manzana	24	83.0	McCarthy & Perez (1991)
Manzana	30-50	0.049-0.6	Aguirre-García et al. (2020)
Champiñón	40-80	7.0-36.0	Estévez-Sánchez et al. (2019)
Champiñón	40-80	11.0-46.0	González-Pérez et al. (2019)
Papa	80	12.7-15.2	Ruiz-López et al. (2013)
Chayote	40-70	4.44-8.60	Ruiz-López et al. (2012)
Mango	50-70	1-17.5	Ruiz-López & García-Alvarado (2007)
Zanahoria	50-70	5.0	Ruiz-López et al. (2004)
Rábano	25-70	18.5-27.4	Hernan-Lara et al. (2013)
Carambola	45-75	10.0-37.4	Ruiz-López et al. (2011a)
Mora	60-80	2.32-27.6	Maskan & Göğüs (1998)
Pasas	15-70	1.0-5.0	Karathanos & Kostaropoulos (1995)
Plátano	30-50	2.1-2.6	Mauro & Menegalli (1995)
Tomate	45-75	37.2-122.7	Akanbi et al. (2006)
Piña	70	19.0-958	Rani & Tripathy (2020)
Pepino	22-4	1453	da Silva & e Silva (2014)
Kiwi	65	14.7-392.9	Darvishi et al. (2016)
Chabacano	50-80	16.26-43.612	Faal et al. (2015)
Aloe vera	50-80	27-80	Pisalkar et al. (2011)
Cebolla	40-70	2.8-8.1	Compaore et al. (2019)

La difusividad en los alimentos es menor a otros materiales debido a la complicada estructura de biopolímeros de los alimentos y, probablemente, a la mayor unión del agua en ellos.

Algunos procesos de evaporación están controlados por difusión en el sentido de que la velocidad de evaporación depende en gran medida de la velocidad a la que se suministra el disolvente o la mezcla a la superficie de evaporación por difusión interna. Una consideración importante es el efecto de la proporción de vapor de disolvente, o la humedad relativa, en la atmósfera en la que tiene lugar la evaporación. Se han reportado casos (Crank, 1950), cuando la evaporación tiene lugar a través de una membrana orgánica o una película de polímero, en los que la velocidad observada en la práctica aumenta al incrementar la humedad relativa en la superficie de evaporación. Este comportamiento se ha atribuido al efecto de un coeficiente de difusión bajo pequeñas concentraciones de disolvente, con el argumento de que manteniendo algo de vapor en la atmósfera exterior se elimina el intervalo de concentración en el que la difusión dentro del sólido es difícil. Se ha demostrado teóricamente (Crank, 1950), al evaluar las soluciones de la ecuación de difusión para los coeficientes de difusión y las condiciones de contorno adecuados, que tal comportamiento no es de esperar en un sistema puramente dependiente de la concentración. Se han examinado tanto la evaporación en estado estacionario a través de una membrana como la pérdida de vapor de un sólido que contiene disolvente (Crank, 1975).

## 1.7. Extrapolación de Richardson

Hay dos formas para mejorar la estimación obtenida al emplear diferencias finitas: 1. disminuir el tamaño de paso o 2. usar una fórmula de grado superior que emplee más puntos. Un tercer procedimiento, basado en la extrapolación de Richardson, utiliza dos estimaciones de la derivada para calcular una tercera aproximación más exacta. La extrapolación constituye un medio para obtener una mejor estimación de la integral  $I$  por medio de la fórmula

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1} [I(h_2) - I(h_1)] \quad (1.37)$$

donde  $I(h_1)$  e  $I(h_2)$  son estimaciones de la integral obtenidas usando dos tamaños de paso,  $h_1$  y  $h_2$ . Debido a su conveniencia cuando se expresa como un algoritmo computacional, esta fórmula

usualmente se escribe para el caso en que  $h_2 = h_1/2$ , como

$$I \cong \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1) \quad (1.38)$$

De manera similar, la ecuación 1.38 se escribirá para las derivadas como

$$D \cong \frac{4}{3}D(h_2) - \frac{1}{3}D(h_1) \quad (1.39)$$

Para aproximaciones por diferencia centrada con  $O(h^2)$ , la aplicación de esta fórmula dará una nueva estimación de la derivada de  $O(h^4)$  (Chapra & Canale, 2015).

La extrapolación de Richardson (ER) se ha usado para intentar aumentar la precisión de las aproximaciones numéricas o para mantener los errores computacionales debajo de cierto límite deseado (Zlatev et al., 2014). Este método también se ha aplicado de forma exitosa para aumentar la estabilidad de métodos de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias basados en fórmulas de Runge-Kutta (Zlatev et al., 2017). En estos casos, la solución mejorada se va arrastrando en el cómputo de las soluciones en el tiempo usando diferentes tamaños de paso (el método de Richardson se usa para mejorar el componente temporal). Faragó et al. (2009), demostraron el uso de la ER para la solución de problemas de difusión-reacción con la finalidad de mejorar la solución temporal de las ecuaciones diferenciales ordinarias que resultan de aplicar la discretización al componente espacial. Otras aplicaciones de la ER incluyen la mejora de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales en estado estacionario (ecuación de Laplace, ecuación anisotrópica de Poisson) (Dai et al., 2017; Marchi et al., 2013). Dai et al. (2016), demostraron que la ER puede usarse para resolver problemas de convección-difusión (en dos dimensiones) en estado no estacionario usando implementaciones implícitas que llevan a sistemas de ecuaciones algebraicas refinando el componente espacial. En todos los casos, no se ha usado a la ER para mejorar el componente espacial en modelos difusivos con discretizaciones que llevan a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (método de líneas), y que obtienen una solución promediada en el volumen del sólido.

## II. Hipótesis y objetivos

### 2.1. Hipótesis

Es posible aplicar el método de Richardson para disminuir el número de nodos en la solución numérica de problemas de transferencia de masa por difusión manteniendo una alta precisión en la solución.

### 2.2. Objetivo general

Analizar el impacto que tiene el método de Richardson en la solución numérica de problemas de transferencia de masa de tipo difusivo en una y dos dimensiones.

### 2.3. Objetivos específicos

1. Implementar el método de Richardson y método convencional de diferencias finitas para resolver numéricamente problemas de transferencia de masa de tipo difusivo en una y dos dimensiones.
2. Evaluar el efecto que tiene el número de nodos en el método de Richardson y método convencional de diferencias finitas sobre su precisión en la solución de la ecuación adimensional de difusión en tres geometrías con transporte de masa unidimensional.
3. Evaluar el efecto que tiene el número de nodos en el método de Richardson y método convencional de diferencias finitas sobre su precisión y tiempo de cómputo en la solución de la ecuación adimensional de difusión en un prisma cuadrado infinito con transporte de masa bidimensional.

# III. Materiales y métodos

## 3.1. Desarrollo del modelo

La segunda ley de Fick de la difusión para el caso de secado de un sólido se expresa como

$$\frac{\partial c_w}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla (c_w)) \quad (3.1)$$

El operador  $\nabla (\cdot)$  se llama gradiente y el operador  $\nabla \cdot (\cdot)$  se llama divergencia.

El operador gradiente de un escalar se desarrolla como

$$\mathbf{v} = \nabla (s) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial s}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial s}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial s}{\partial u_3} = v_1 + v_2 + v_3 \quad (3.2)$$

En cambio, la divergencia de un vector está dada por

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 v_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 v_3) \right) \quad (3.3)$$

donde  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  son los factores de escala y  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  son las coordenadas del sistema. En el sistema coordenado rectangular  $u_1 = x$ ,  $u_2 = y$ ,  $u_3 = z$ ,  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = 1$  y  $h_3 = 1$ . Para el sistema coordenado cilíndrico  $u_1 = r$ ,  $u_2 = \theta$ ,  $u_3 = z$ ,  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r$  y  $h_3 = 1$ , y en el sistema coordenado esférico  $u_1 = r$ ,  $u_2 = \theta$ ,  $u_3 = \phi$ ,  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r$  y  $h_3 = r \sin \theta$  (Spiegel, 1968).

Por lo tanto, el término  $D \nabla (c_w)$  se desarrolla en los tres sistemas coordenados a estudiar como

- Sistema coordenado rectangular

$$D \nabla (c_w) = D \frac{\partial c_w}{\partial x} + D \frac{\partial c_w}{\partial y} + D \frac{\partial c_w}{\partial z} \quad (3.4)$$

- Sistema coordenado cilíndrico

$$D \nabla (c_w) = D \frac{\partial c_w}{\partial r} + \frac{D}{r} \frac{\partial c_w}{\partial \theta} + D \frac{\partial c_w}{\partial z} \quad (3.5)$$

- Sistema coordenado esférico

$$D \nabla (c_w) = D \frac{\partial c_w}{\partial r} + \frac{D}{r} \frac{\partial c_w}{\partial \theta} + \frac{D}{r \sin \theta} \frac{\partial c_w}{\partial \phi} \quad (3.6)$$

De esta forma, el término  $\nabla \cdot (D \nabla (c_w))$  se escribe finalmente como

- En coordenadas rectangulares,

$$\nabla \cdot (D\nabla(c_w)) = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial c_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial c_w}{\partial z} \right) \quad (3.7)$$

- En coordenadas cilíndricas,

$$\nabla \cdot (D\nabla(c_w)) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D \frac{\partial c_w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D \frac{\partial c_w}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial c_w}{\partial z} \right) \quad (3.8)$$

- En coordenadas esféricas,

$$\nabla \cdot (D\nabla(c_w)) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 D \frac{\partial c_w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D \sin \theta \frac{\partial c_w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( D \frac{\partial c_w}{\partial \phi} \right) \quad (3.9)$$

Finalmente, el modelo de secado en los sistemas coordenados rectangular, cilíndrico y esférico se representa como

$$\frac{\partial c_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial c_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial c_w}{\partial z} \right) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial c_w}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D \frac{\partial c_w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D \frac{\partial c_w}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial c_w}{\partial z} \right) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial c_w}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 D \frac{\partial c_w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D \sin \theta \frac{\partial c_w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( D \frac{\partial c_w}{\partial \phi} \right) \quad (3.12)$$

Estos modelos se pueden simplificar considerando únicamente el transporte de masa unidimensional en las direcciones  $x$  (sistema coordenado rectangular) o  $r$  (sistemas coordenados cilíndrico y esférico). Además, la concentración de agua se puede representar en términos de la humedad en base seca con

$$c_w = c_s X \quad (3.13)$$

De esta forma, los modelos de secado se escriben

- En coordenadas rectangulares,

$$\frac{\partial (c_s X)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial (c_s X)}{\partial x} \right) \quad (3.14)$$

- En coordenadas cilíndricas,

$$\frac{\partial (c_s X)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D \frac{\partial (c_s X)}{\partial r} \right) \quad (3.15)$$

- En coordenadas esféricas,

$$\frac{\partial(c_s X)}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 D \frac{\partial(c_s X)}{\partial r} \right) \quad (3.16)$$

### 3.2. Adimensionalización del modelo de secado

Para su solución, la ecuación de secado se expresa de forma adimensional usando las siguientes consideraciones:

1. La concentración de sólidos es constante.
2. La difusividad del agua en el sólido es constante.
3. El sólido no cambia su tamaño ( $L$  y  $R$  son constantes).

Las Ecuaciones (3.14)-(3.16) se pueden escribir como

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{D}{u^\alpha} \frac{\partial}{\partial u} \left( u^\alpha \frac{\partial X}{\partial u} \right) \quad (3.17)$$

donde  $u = x$  en el sistema coordenado rectangular y  $u = r$  en los sistemas coordenados cilíndrico y esférico y  $\alpha$  toma los valores 0, 1 y 2 en los sistemas coordenados rectangular, cilíndrico y esférico, respectivamente. Se definen la fracción de humedad libre o humedad adimensional ( $\Psi$ ) y la coordenada adimensional ( $\xi$ )

$$\psi = \frac{X - X_e}{X_0 - X_e} \quad (3.18)$$

$$\xi = \frac{u}{L} \quad (3.19)$$

donde  $L$  es igual al espesor en una placa secada por ambas caras, es igual a la mitad del espesor si el producto es una placa secada por ambos lados y es igual al radio ( $R$ ) si el producto tiene forma de cilindro infinito o esfera. Por lo tanto,

$$X = (X_0 - X_e) \psi + X_e \quad (3.20)$$

$$\partial X = (X_0 - X_e) \partial \psi \quad (3.21)$$

$$u = L\xi \quad (3.22)$$

$$\partial u = L\partial\xi \quad (3.23)$$

Combinando las Ecuaciones (3.17), (3.21) y (3.23) obtenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{D}{L^2 \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \quad (3.24)$$

Se define el número de Fourier de transferencia de masa

$$\tau = \frac{Dt}{L^2} \quad (3.25)$$

Por lo tanto,

$$t = \frac{L^2 \tau}{D} \quad (3.26)$$

$$\partial t = \frac{L^2}{D} \partial \tau \quad (3.27)$$

Combinando las Ecuaciones (3.24) y (3.27) obtenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \quad (3.28)$$

### 3.3. Solución numérica del modelo de secado

Para su solución, la Ecuación (3.28) se desarrolla como

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{\xi^\alpha} \left( \xi^\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} (\alpha \xi^{\alpha-1}) \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (3.29)$$

En este proyecto se propone utilizar el método de líneas (Ruiz-López et al., 2004; Ruiz-López & García-Alvarado, 2007; Ruiz-López et al., 2011b) para resolver a la Ecuación (3.29). Este método se basa en discretizar únicamente las derivadas espaciales de la ecuación de difusión, convirtiendo la ecuación en derivadas parciales original en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para la discretización de la parte espacial se usaron diferencias finitas centradas, dividiendo al dominio del producto en  $N$  nodos igualmente espaciados. La distancia entre nodos, por lo tanto es,

$$\Delta \xi = \frac{1}{N-1} \quad (3.30)$$

La Ecuación (3.29) representada de forma discreta se escribe como ( $j = 2, \dots, N-1$ ):

$$\frac{d\psi_j}{d\tau} = \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{(\Delta \xi)^2} + \frac{\alpha}{\xi_j} \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2\Delta \xi} \quad (3.31)$$

La variable  $\xi_j$  representa la distancia medida desde el centro del dominio al nodo  $j$ , es decir,

$$\xi_j = (j - 1) \Delta\xi \quad (3.32)$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\psi_j}{d\tau} = \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{(\Delta\xi)^2} + \frac{\alpha(\psi_{j+1} - \psi_{j-1})}{2(j-1)(\Delta\xi)^2} \quad (3.33)$$

En el nodo  $j = 1$ , la variable  $\psi_0$  no está definida, por lo tanto, se evalúa a partir de la condición de frontera en el centro del dominio. Si únicamente se resuelve la mitad del dominio del producto, existirá una condición de simetría en el centro, la cual se escribe como

$$\frac{d\psi}{d\xi} = 0 \quad (3.34)$$

De la condición de frontera (3.34) en el centro del producto (en  $j = 1$ ) se tiene que  $\psi_{j-1} = \psi_{j+1}$ , por lo tanto, la Ecuación (3.33) se reduce a

$$\frac{d\psi_j}{d\tau} = \frac{2\psi_{j+1} - 2\psi_j}{(\Delta\xi)^2} \quad (3.35)$$

En la superficie del sólido ( $j = N$ ) se considera una condición de frontera de equilibrio instantáneo, es decir,  $\psi_N = 0$ . Por lo tanto, no se debe resolver la ecuación diferencial en el último nodo. Para el nodo  $j = N - 1$ , la Ecuación (3.33) se reduce a

$$\frac{d\psi_{N-1}}{d\tau} = \frac{-2\psi_{N-1} + \psi_{N-2}}{(\Delta\xi)^2} + \frac{-\alpha\psi_{N-2}}{2(N-2)(\Delta\xi)^2} \quad (3.36)$$

El sistema resultante de  $N - 1$  ecuaciones diferenciales ordinarias se integró usando la rutina de Matlab ode45, basada en el método de Runge-Kutta (Matlab R2010a, MathWorks Inc., Natick, Ma, USA). La solución de la humedad promedio en el volumen del producto se calculó como

$$\Psi = \frac{\int_0^1 \psi(\xi) \xi^\alpha d\xi}{\int_0^1 \xi^\alpha d\xi} = \frac{\int_0^1 \psi(\xi) \xi^\alpha d\xi}{\left. \frac{\xi^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right|_0^1} = \frac{\int_0^1 \psi(\xi) \xi^\alpha d\xi}{\frac{1^{\alpha+1}}{\alpha+1}} = (\alpha + 1) \int_0^1 \psi(\xi) \xi^\alpha d\xi \quad (3.37)$$

La Ecuación (3.37) se resolvió mediante la regla del trapecio (Chapra & Canale, 2015).

### 3.4. Implementación del método de Richardson

El método de solución desarrollado en la Sección 3.3 describe la implementación tradicional del método de líneas usando diferencias finitas para resolver la ecuación de difusión. El método de Richardson (MR) establece que la integral numérica de una función se puede mejorar a partir de

las integrales numéricas evaluados con dos tamaños de paso diferentes ( $h_1$  y  $h_2$ ). Si  $h_2 = h_1/2$ , entonces

$$I_R = \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1) \quad (3.38)$$

De forma similar, el MR también se puede usar para mejorar la derivada de una función como

$$D_R = \frac{4}{3}D(h_2) - \frac{1}{3}D(h_1) \quad (3.39)$$

Consideremos que

$$I_R = \int f_R du \quad (3.40)$$

Por lo tanto,

$$\frac{dI_R}{du} = f_R \quad (3.41)$$

Pero,

$$\frac{dI_R}{du} = \frac{d}{du} \left( \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1) \right) = \frac{4}{3}f(h_2) - \frac{1}{3}f(h_1) \quad (3.42)$$

La combinación de las Ecuaciones (3.41) y (3.42) produce

$$f_R = \frac{4}{3}f(h_2) - \frac{1}{3}f(h_1) \quad (3.43)$$

La Ecuación (3.43) establece que se pueden combinar dos soluciones obtenidas con tamaños de paso  $h_1$  y  $h_2$  para mejorar su precisión mediante el siguiente procedimiento:

1. Se genera la solución  $\Psi_2$  con  $N_2$  nodos (solución con tamaño de paso  $h_2$ ).  $N_2$  debe ser impar.
2. Se calcula el número de nodos ( $N_1$ ) para duplicar el tamaño de paso

$$N_1 = \frac{N_2 + 1}{2} \quad (3.44)$$

3. Se genera la solución  $\Psi_1$  con  $N_1$  nodos (solución con tamaño de paso  $h_1$ ).
4. Se combinan las soluciones como

$$\Psi_R = \frac{4}{3}\Psi_2 - \frac{1}{3}\Psi_1 \quad (3.45)$$

### 3.5. Experimentos de simulación

Con la finalidad de observar el error generado por el MR, se resolvieron las ecuaciones de difusión en las tres geometrías unidimensionales (placa plana, cilindro infinito y esfera) propuestas variando el número de nodos usados. Al término de la simulación se calculó el error relativo ( $\varepsilon$ ) del método numérico en relación a la solución analítica exacta ( $\Psi_a$ ) como

$$\varepsilon (\%) = 100 \frac{\Psi_R - \Psi_a}{\Psi_a} \quad (3.46)$$

Las soluciones analíticas para las geometrías rectangulares, cilíndricas y esféricas se calcularon como (Crank, 1975):

$$\Psi = \frac{\bar{X} - X_e}{X_0 - X_e} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \exp \left[ -\frac{(2n-1)^2 \pi^2 \tau}{4} \right] \quad (3.47)$$

$$\Psi = \frac{\bar{X} - X_e}{X_0 - X_e} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \exp [-\lambda_n^2 \tau] \quad (3.48)$$

$$\Psi = \frac{\bar{X} - X_e}{X_0 - X_e} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp [-n^2 \pi^2 \tau] \quad (3.49)$$

En una segunda etapa, se resolvieron las ecuaciones de difusión para las mismas tres geometrías propuestas dejando fijo el número de nodos con el MR pero variando el número de nodos del método convencional (MC) de diferencias finitas. Al finalizar la simulación se calculó el error relativo ( $\varepsilon$ ) de cada método en relación a la solución analítica ( $\Psi_a$ ), con la finalidad de observar hasta que punto el MC logra una precisión comparable al MR.

Para una tercer ronda de simulación nuevamente se resolvieron las ecuaciones de difusión para las geometrías antes mencionadas para cuando ambos métodos emplean el mismo número de nodos en la solución, calculándose el cociente del error del MR a MC como

$$Cociente = \frac{\Psi_R - \Psi_a}{\Psi_C - \Psi_a} \quad (3.50)$$

Este último experimento fue necesario para determinar si la ventaja del MR sobre el MC se mantenía al variar el número de nodos.

Adicionalmente se consideró la solución de la ecuación de difusión para una geometría de prisma cuadrado infinito (2D) y se realizaron experimentos similares a los propuestos en las geometrías unidimensionales. La solución analítica para este caso es

$$\Psi = \frac{\bar{X} - X_e}{X_0 - X_e} = \left( \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \exp \left[ -\frac{(2n-1)^2 \pi^2 \tau}{4} \right] \right)^2 \quad (3.51)$$

Al final de estas simulaciones se calculó también el cociente de tiempo de ejecución entre el MC y el MR cuando se aumenta el número de nodos en la solución.

# IV. Resultados y discusión

## 4.1. Soluciones en una dimensión

Las Figuras 4.1-4.6 muestran el error relativo del método de Richardson cuando se comparan con la solución analítica correspondiente como función del número de Fourier y fracción de humedad libre en las geometrías de placa plana, cilindro infinito y esfera. En estas figuras se muestra que a un mismo número de nodos, el menor error relativo se obtiene para la geometría de placa plana mientras que el mayor error relativo lo presenta la geometría de cilindro infinito, siendo la geometría de esfera un caso intermedio entre ellas. Para la geometría de placa plana, el error máximo ocurre a tiempos cortos de secado ( $\tau = 0.2$ ) para todos los números de nodos probados. Este comportamiento es diferente para las geometrías de cilindro infinito y esfera para los dos menores números de nodos probados ( $N \leq 13$ ). Al aumentar el número de nodos el comportamiento del error relativo se hace similar al mostrado por la geometría de placa plana. Cuando el error relativo se grafica como función de la fracción de humedad libre se puede observar dos zonas para el caso de la geometría de placa plana. En la primera región el error relativo es negativo y disminuye rápidamente desde el valor de  $\Psi = 1$  hasta un valor de fracción de humedad libre donde el error se hace igual a cero ( $\Psi = 0.87, 0.93, 0.95, 0.96$  y  $0.97$  para  $N = 7, 13, 19, 25$  y  $31$  nodos, respectivamente). La segunda región ocurre por debajo de las fracciones de humedad libre mencionadas anteriormente, donde la curva de error relativo muestra un ascenso con un máximo para después disminuir gradualmente ( $\varepsilon = 0.16, 0.07, 0.04, 0.03$  y  $0.02\%$  para  $\Psi = 0.81, 0.90, 0.93, 0.95$  y  $0.96$ , respectivamente). Las geometrías de esfera y cilindro infinito muestran un comportamiento similar al de placa plana en la primera región. La primera etapa finaliza para la geometría de esfera en valores de humedad  $\Psi = 0.65, 0.81, 0.87, 0.90$  y  $0.92$  para  $N = 7, 13, 19, 25$  y  $31$  nodos, respectivamente. En cambio, para la geometría de cilindro infinito los valores de humedad que dividen ambas etapas se encuentran en  $\Psi = 0.75, 0.85, 0.90, 0.92$  y  $0.94$  para  $N = 7, 13, 19, 25$  y  $31$  nodos, respectivamente. En la segunda etapa, la geometría de cilindro infinito muestra una forma de silla para cuando se usan  $7$  y  $13$  nodos, con dos máximos. Los valores máximos se localizan en  $\Psi = 0.65$  con  $\varepsilon = 0.39\%$  y  $\Psi = 0.06$  con  $\varepsilon = 1.2\%$  para  $N = 7$

nodos y en  $\Psi = 0.78$  con  $\varepsilon = 0.2\%$  y  $\Psi = 0.1$  con  $\varepsilon = 0.15\%$  para  $N = 13$  nodos. Para  $N > 13$ , la segunda etapa de la curva en la geometría de cilindro infinito se ve similar a la de placa plana, con un sólo máximo  $\varepsilon = 0.11, 0.09$  y  $0.07\%$  para  $\Psi = 0.86, 0.89$  y  $0.91$ , respectivamente. En el caso de la geometría de esfera, solo se observa un comportamiento de silla para el menor número de nodos probados ( $N = 7$  nodos), con máximos en  $\Psi = 0.48$  con  $\varepsilon = 0.8\%$  y  $\Psi = 0.04$  con  $\varepsilon = 0.5\%$ . Para  $N > 7$ , la geometría de esfera tiene un sólo máximo  $\varepsilon = 0.27, 0.16, 0.11$  y  $0.09\%$  para  $\Psi = 0.73$  ( $\tau = 0.007, N = 13$ ),  $0.82$  ( $\tau = 0.003, N = 19$ ),  $0.86$  ( $\tau = 0.001, N = 25$ ) y  $0.89$  ( $\tau = 0.001, N = 31$ ). En todos los casos, el máximo se va recorriendo hacia la derecha (mayor valor de humedad) al aumentar el número de nodos.

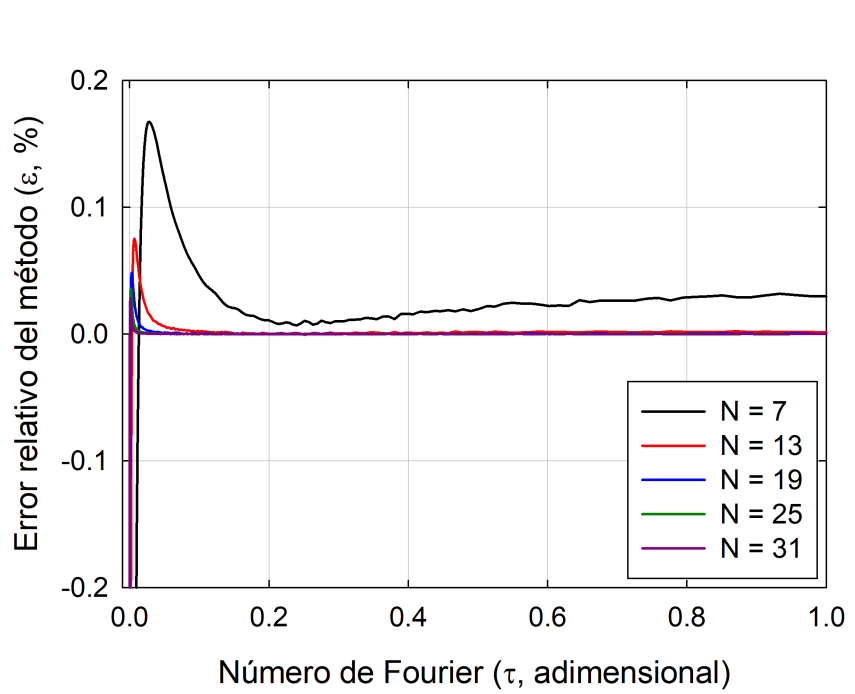


Figura 4.1. Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función del número de nodos y número de Fourier.

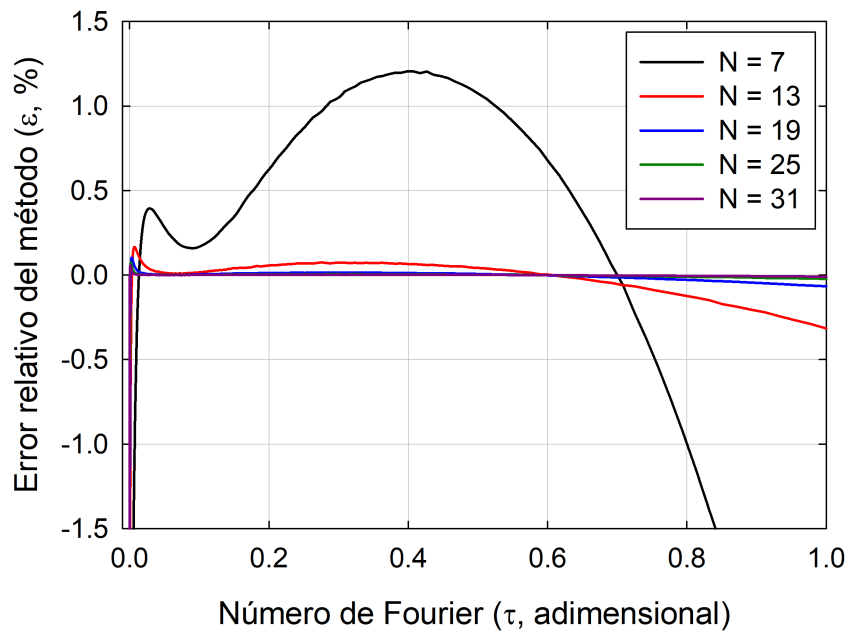


Figura 4.2. Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función del número de nodos y número de Fourier.

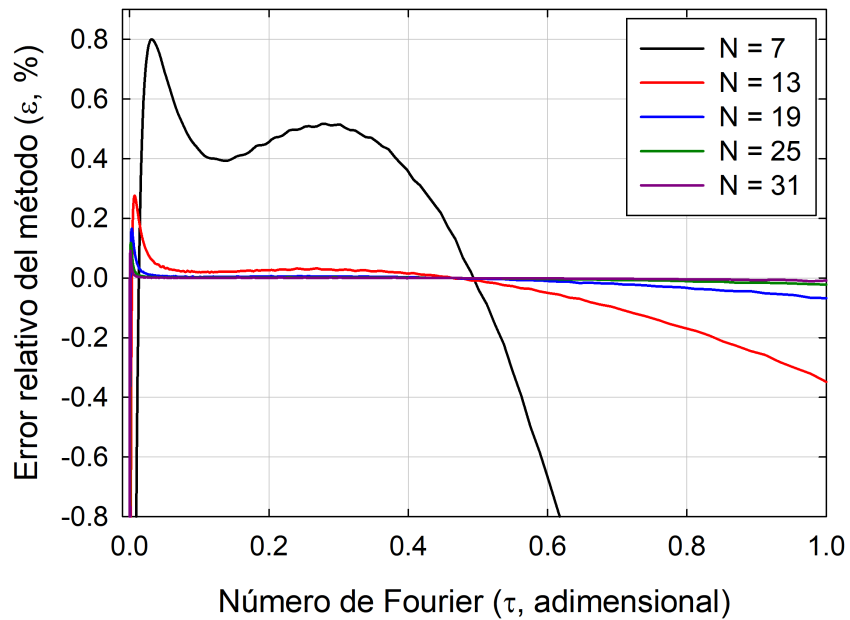


Figura 4.3. Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función del número de nodos y número de Fourier.

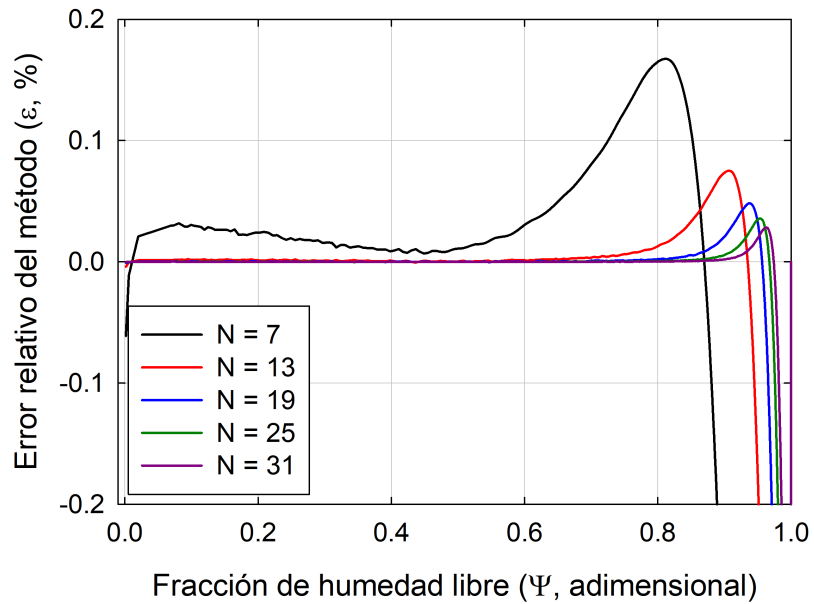


Figura 4.4. Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función del número de nodos y fracción de humedad libre.

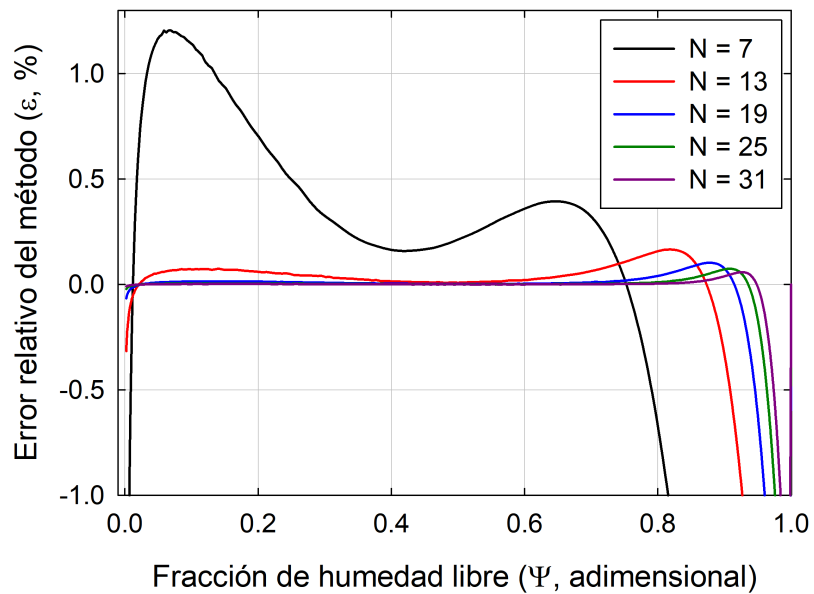


Figura 4.5. Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función del número de nodos y fracción de humedad libre.

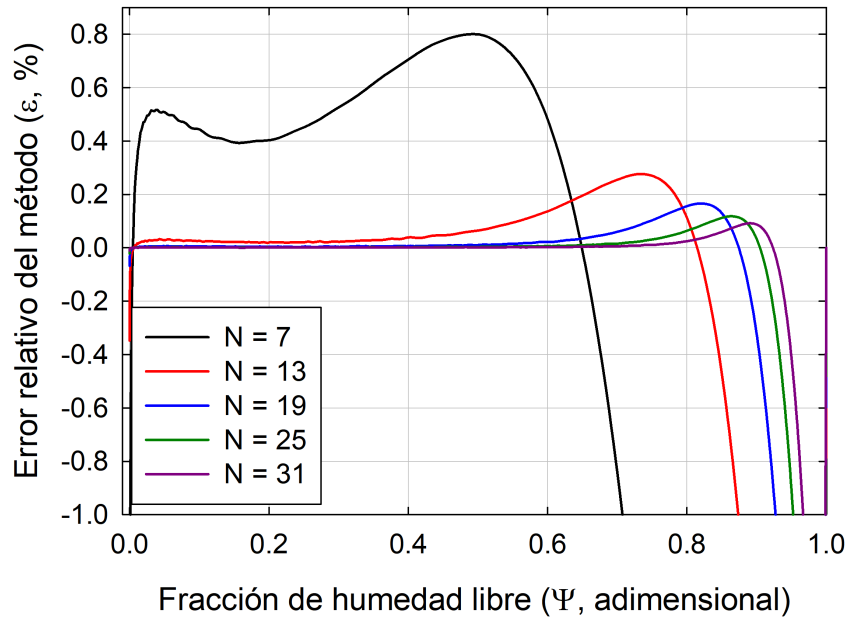


Figura 4.6. Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función del número de nodos y fracción de humedad libre.

El MR se compara favorablemente con el MC de diferencias finitas según se muestra en las Figuras 4.7-4.12. Se puede observar que el MR tiene un menor error relativo que el MC aunque este emplee un mayor número de nodos en la solución. A diferencia del MR, el error del MC es máximo al inicio del secado y se va acercando a cero a medida que transcurre el proceso para volver aumentar nuevamente. El punto de cruce por cero es único sin importar el número de nodos de la solución, estando localizado en  $\tau \approx 0.81$ ,  $0.23$  y  $0.2$  para las geometrías de placa plana, cilindro infinito y esfera, respectivamente. Las curvas de error relativo en el MC no exhiben un máximo con las del MR.

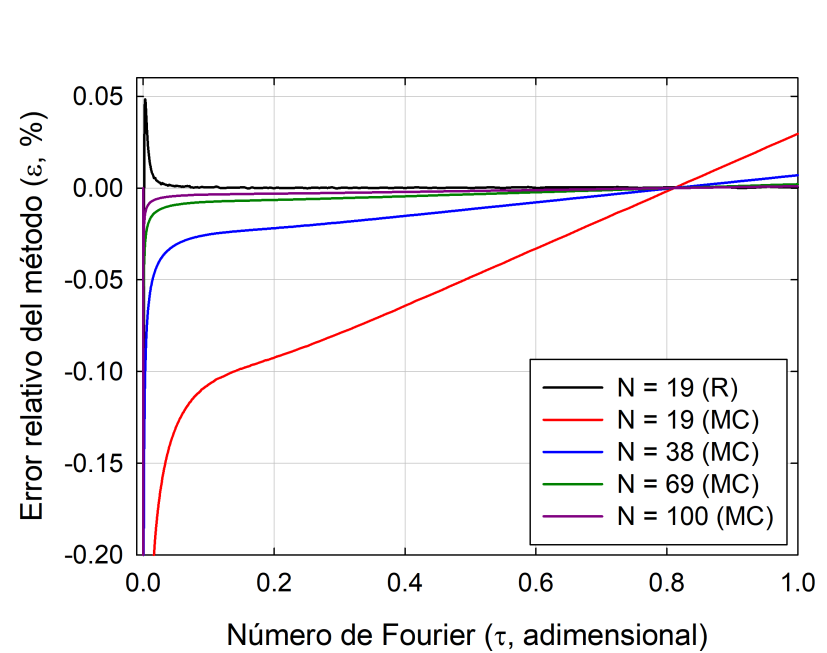


Figura 4.7. Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función del número de nodos y número de Fourier. R = método de Richardson, MC = método convencional.

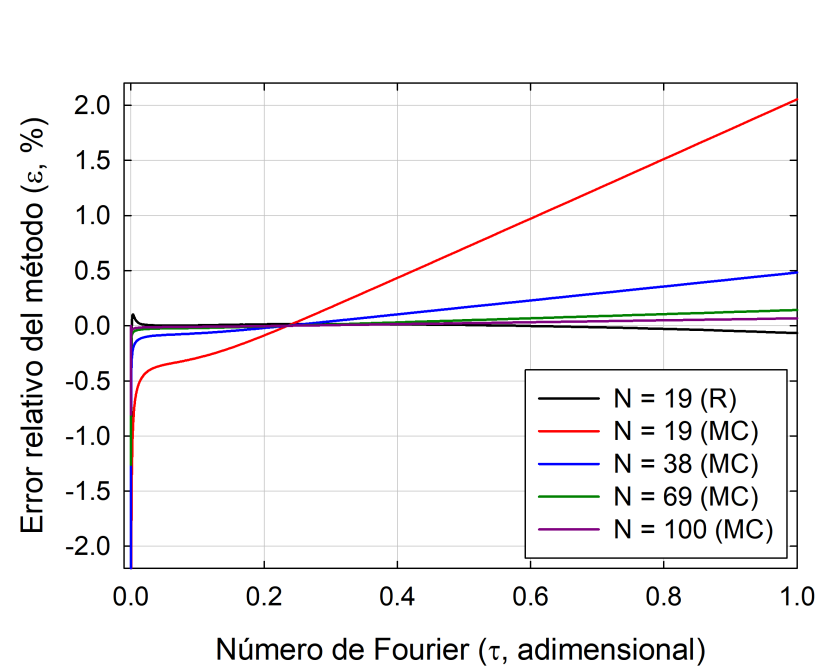


Figura 4.8. Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función del número de nodos y número de Fourier. R = método de Richardson, MC = método convencional.

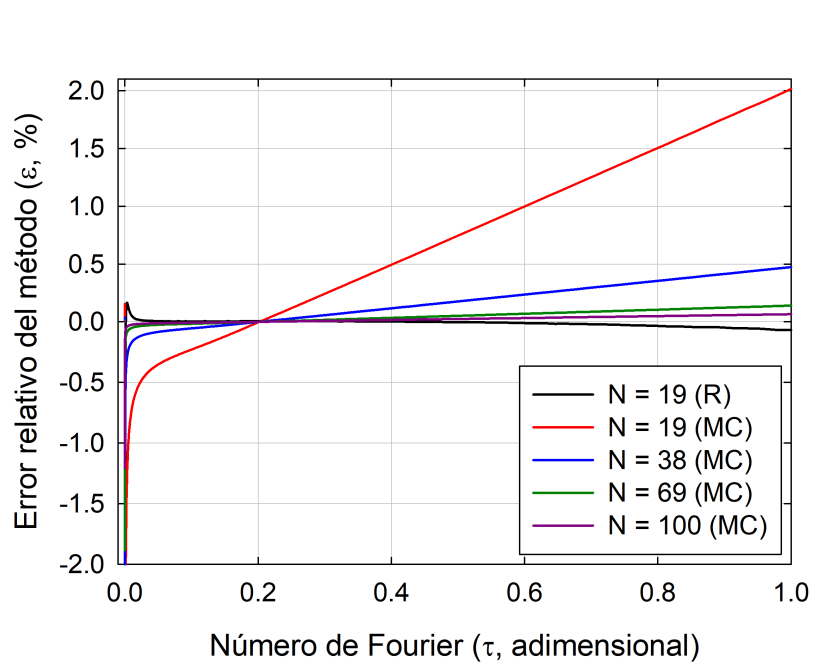


Figura 4.9. Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función del número de nodos y número de Fourier. R = método de Richardson, MC = método convencional.

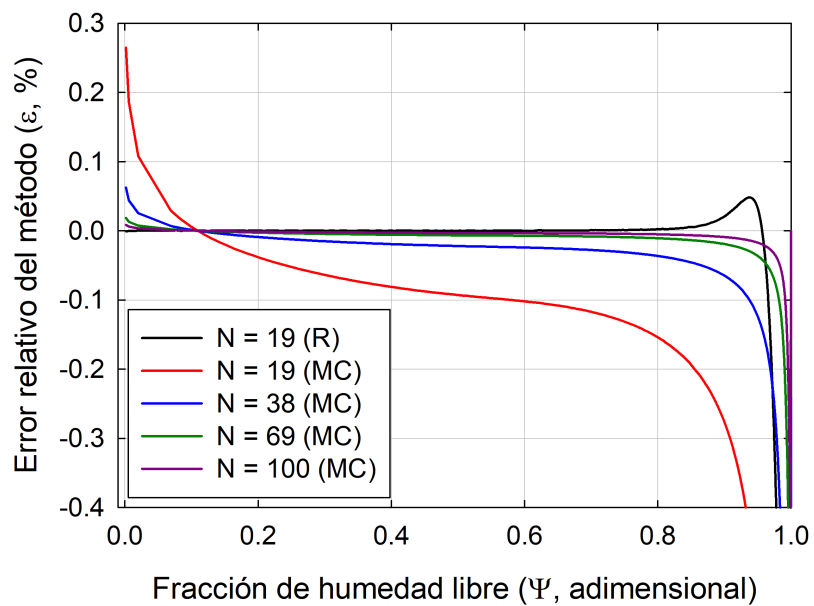


Figura 4.10. Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función del número de nodos y fracción de humedad libre. R = método de Richardson, MC = método convencional.

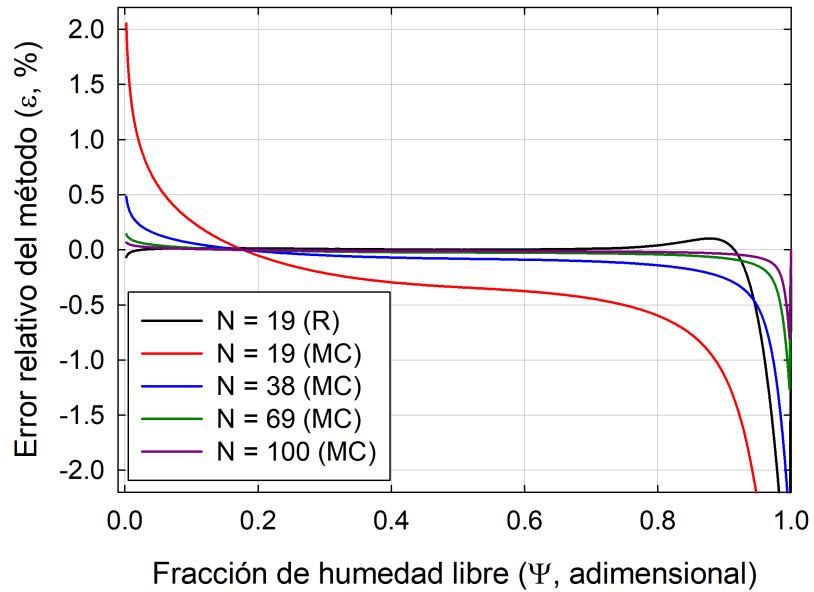


Figura 4.11. Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función del número de nodos y fracción de humedad libre. R = método de Richardson, MC = método convencional.

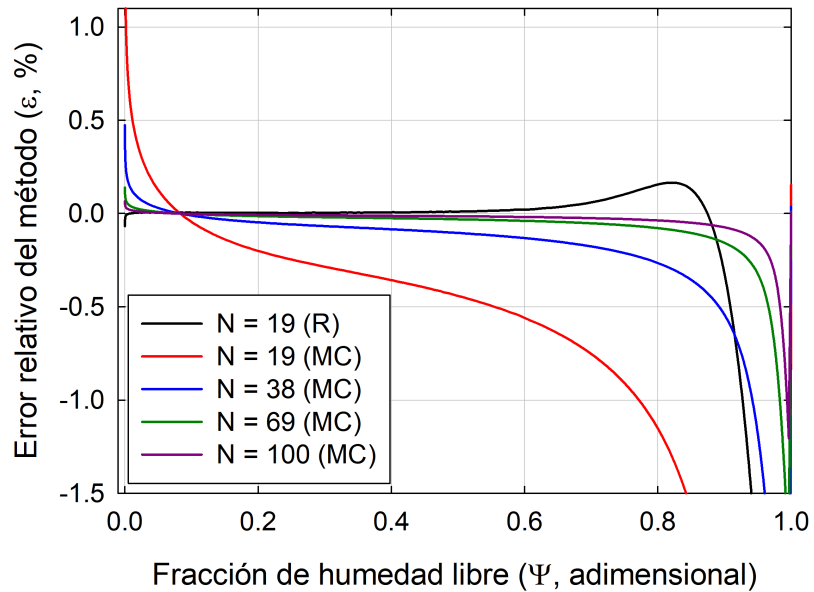


Figura 4.12. Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función del número de nodos y fracción de humedad libre. R = método de Richardson, MC = método convencional.

Las Figuras 4.13-4.18 muestran el error obtenido por el MR entre el error obtenido por el MC como función del número de Fourier y la fracción de humedad libre, para cuando ambos métodos emplean el mismo número de nodos en la solución. Las gráficas se muestran en escala logarítmica en el eje  $y$ , donde un cociente igual a 1 indica que ambos métodos tienen el mismo error. Un valor menor a 1 indica que el MR es más preciso que el MC para el mismo número de nodos usados en la solución. Por el contrario, si el cociente es mayor a 1 el MC es más preciso que el de Richardson. Se puede observar que el MR tiene un menor error que el método convencional en la mayor parte del tiempo de simulación e intervalos de humedad. Los picos en las figuras identificarían el tiempo o humedad donde más que degradarse la precisión MR, disminuye el error del MC (estos picos se localizan en los mismos valores de humedad y tiempo donde el error relativo se hace cero en las Figuras 4.19 a 4.21). En promedio, a lo largo de todo el contenido de humedad, el error del método convencional en la solución de placa plana es mayor que el del MR en 6.71, 13.8, 25.0, 37.9 y 51.7 veces para  $N = 7, 13, 19, 25$  y 31 nodos, respectivamente. En el caso de la esfera, en promedio el error del método convencional es superior en 2.55, 6.42, 10.6, 14.8 y 18.5 veces al MR para  $N = 7, 13, 19, 25$  y 31 nodos, respectivamente. Finalmente, en la geometría de cilindro infinito, el cociente de error promedio es 1.08, 3.98, 7.45, 9.17 y 8.49 para  $N = 7, 13, 19, 25$  y 31 nodos, respectivamente. Se puede verificar que la ventaja del MR sobre el MC aumenta con el número de nodos de la solución.

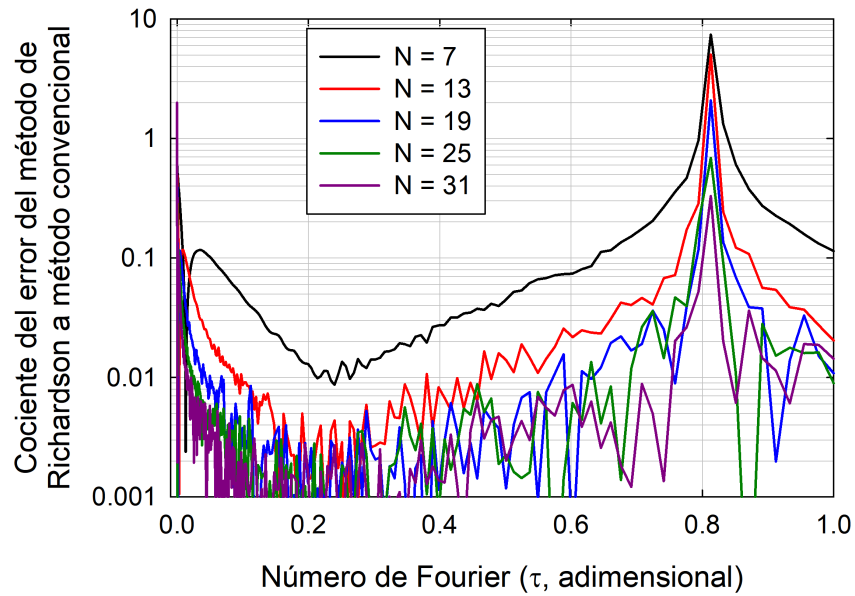


Figura 4.13. Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función del número de nodos y número de Fourier.

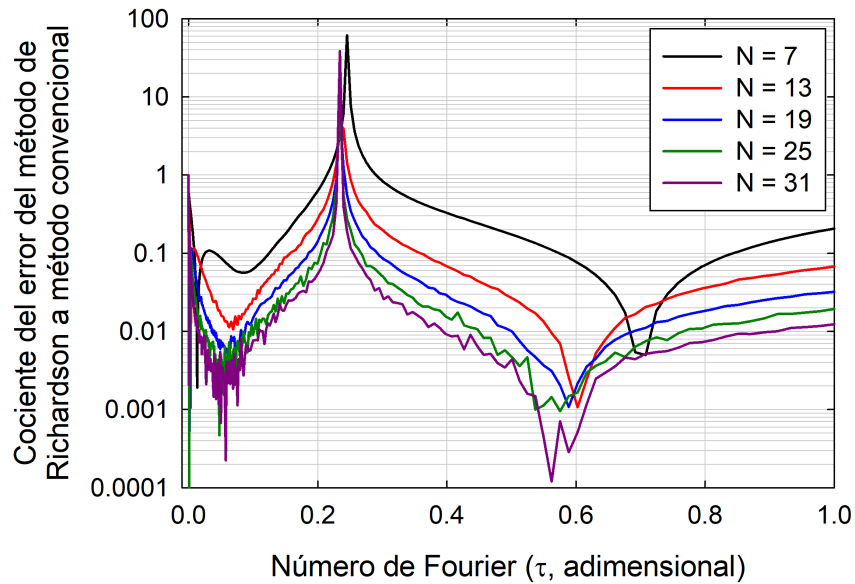


Figura 4.14. Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función del número de nodos y número de Fourier.

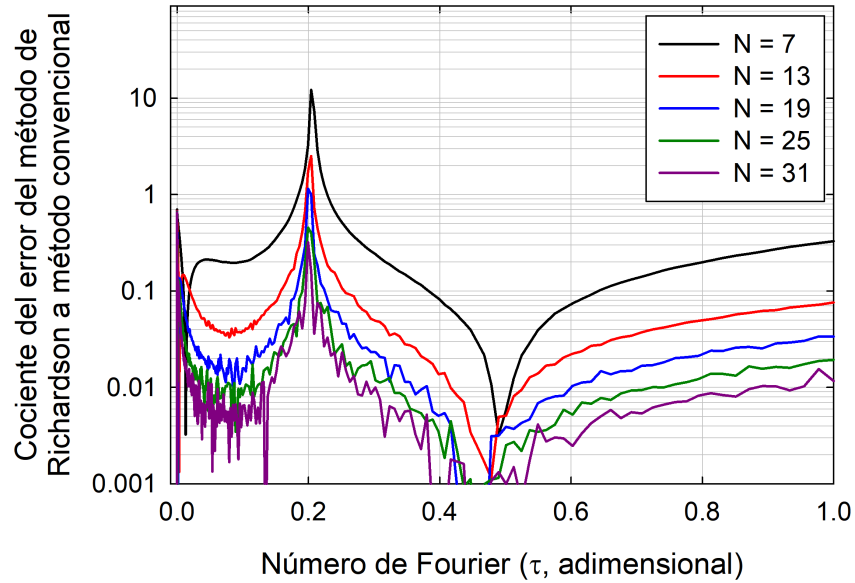


Figura 4.15. Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función del número de nodos y número de Fourier.

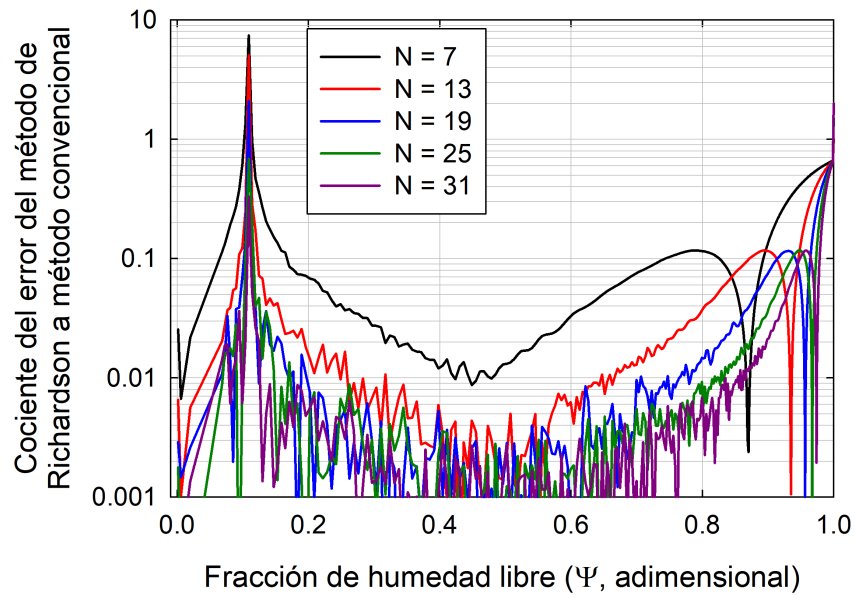


Figura 4.16. Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función del número de nodos y fracción de humedad libre.

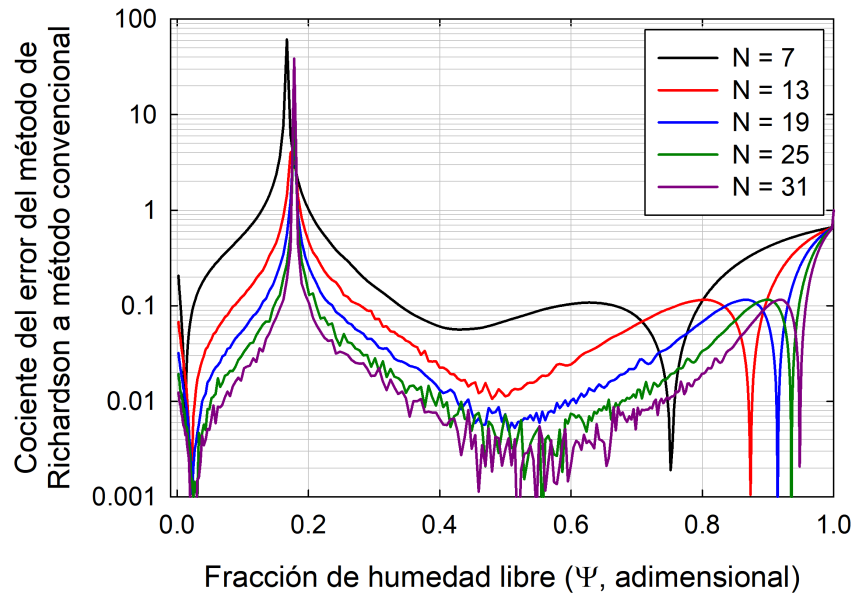


Figura 4.17. Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función del número de nodos y fracción de humedad libre.

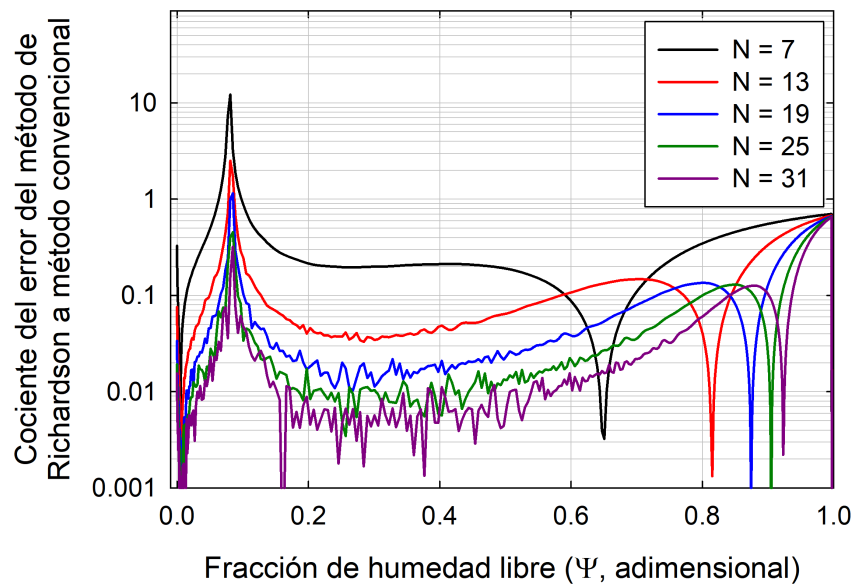


Figura 4.18. Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función del número de nodos y fracción de humedad libre.

Las Figuras 4.13-4.18 permitieron determinar que el MR excede ampliamente al MC, por lo que se hicieron simulaciones para determinar que tanto se debería aumentar el número de nodos en la solución convencional para tener un error similar al MR. Las Figuras 4.19-4.21 muestran la comparación del error relativo obtenido por el MR con el obtenido por el MC como función del número de Fourier y la fracción de humedad libre, para cuando el MR se ejecuta con 19 o 31 nodos, mientras se aumenta el número de nodos en el MC. Las Figuras 4.22-4.24 permiten ver que el número de nodos en el MC tiene que ser entre 2 y 5 veces mayor al número de nodos del MR para tener un error relativo en el mismo orden de magnitud a lo largo del tiempo o de la humedad. En promedio, a lo largo de todo el contenido de humedad, el error promedio del MC en la solución de placa plana es mayor que el del MR en 25.0, 7.25, 2.19, y 1.02 veces para  $N = 19$ , 38, 69, y 100 nodos cuando el MR usa 19 nodos, y en 51.8, 14.5, 8.09 y 5.25 veces para  $N = 31$ , 61, 81, y 101 nodos cuando el MR ocupa 31 nodos, respectivamente. En el caso de la esfera, en promedio el error del MC es superior en 14.8, 3.93, 1.75 y 0.98 veces para  $N = 19$ , 38, 69, y 100 nodos cuando el MR se resuelve con 19 nodos, y en 18.53, 5.20, 2.97 y 1.89 veces al MR resuelto con 31 nodos si el convencional emplea  $N = 31$ , 61, 81 y 101 nodos, respectivamente. Finalmente, en la geometría de cilindro infinito, en promedio el error del MC es 8.46, 2.26, 2.58 y 1.37 veces para  $N = 19$ , 38, 69 y 100 nodos cuando el MR ocupa 19 nodos, y un promedio de 4.71, 6.14, 5.86 y 2.24 veces para  $N = 31$ , 61, 81 y 101 nodos en comparación con el MR resuelto con 31 nodos, respectivamente. Se puede verificar que la ventaja del MR sobre el MC aumenta con el número de nodos de la solución.

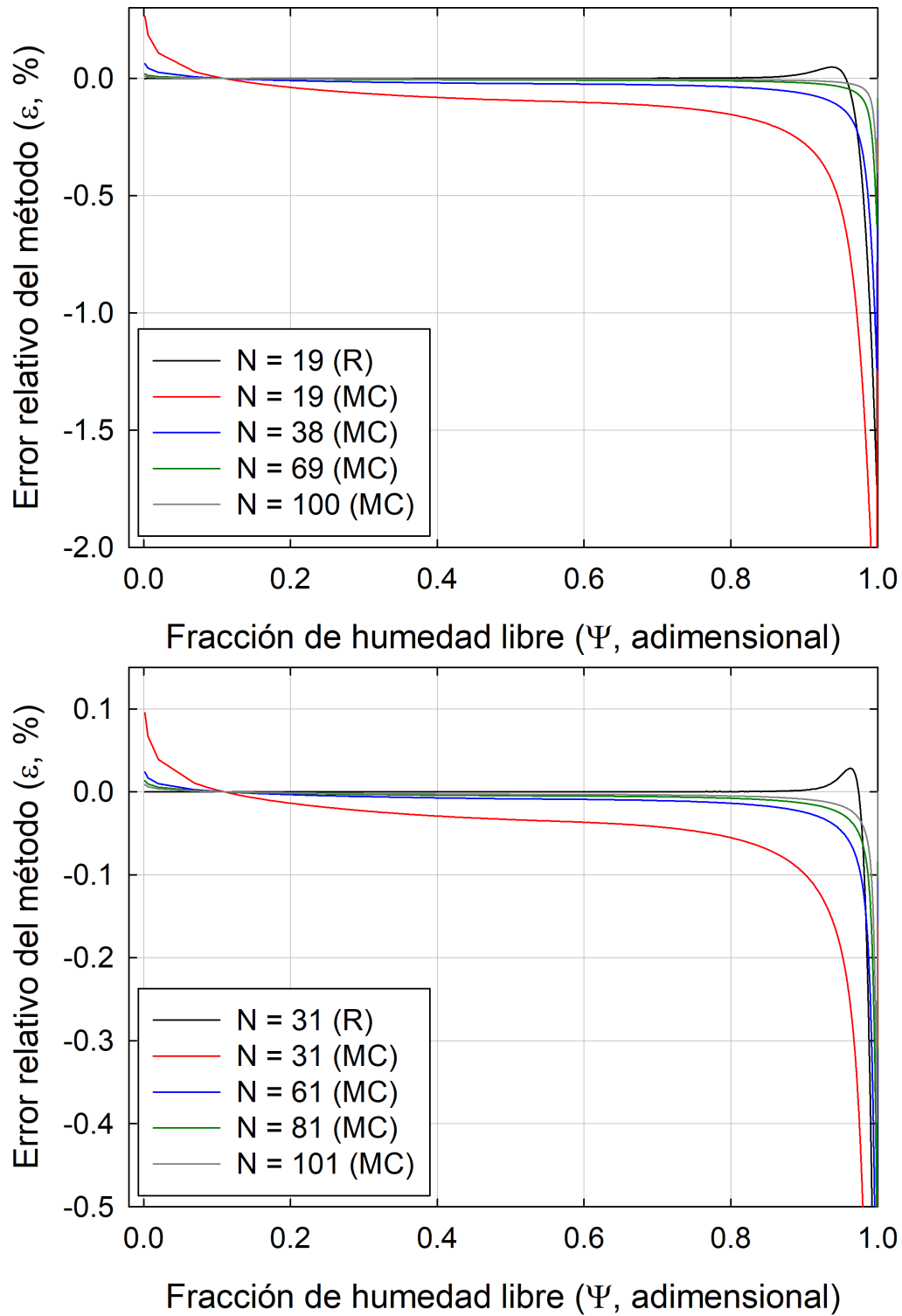


Figura 4.19. Comparación del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función de la fracción de humedad libre. R = método de Richardson, MC = método convencional.

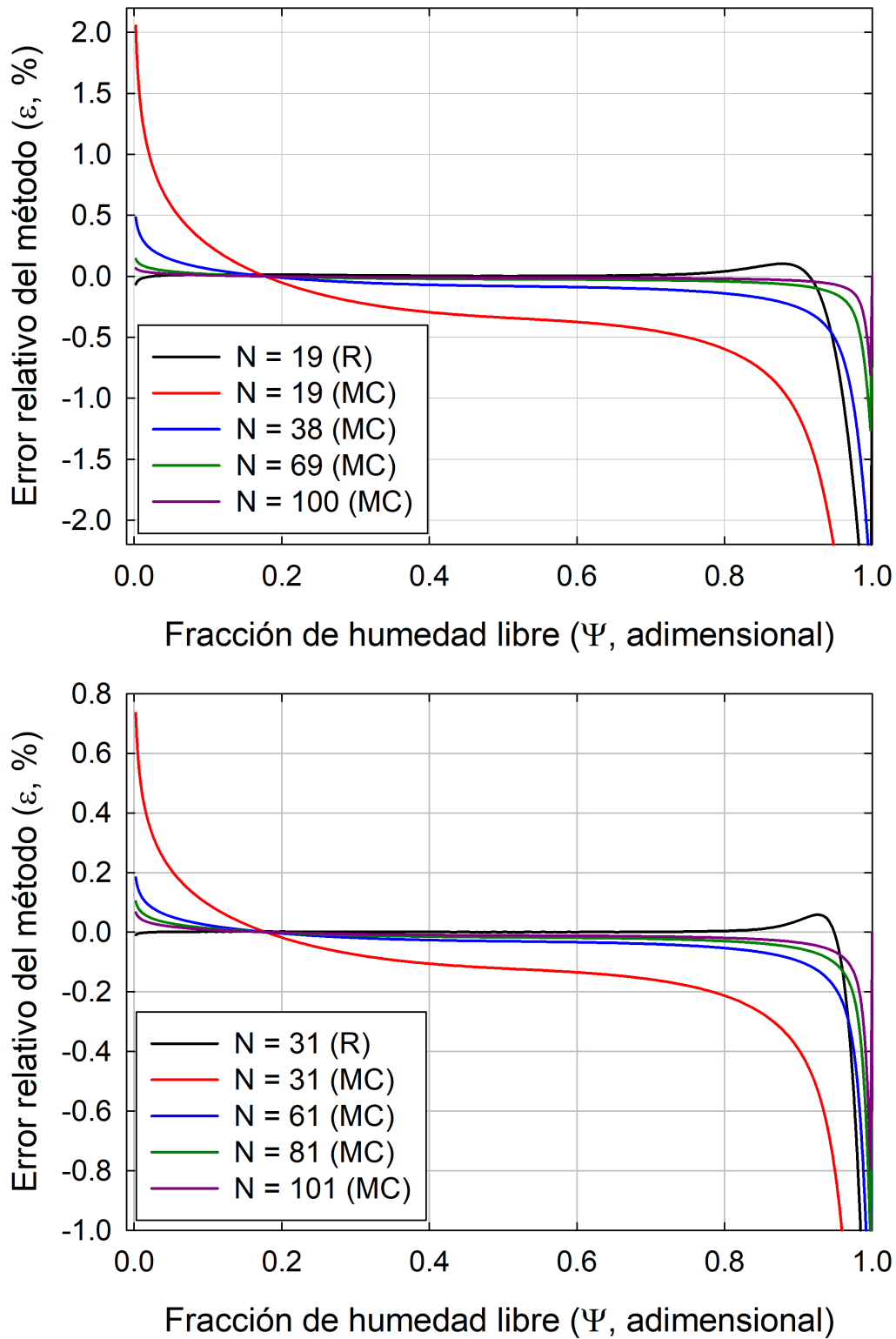


Figura 4.20. Comparación del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función de la fracción de humedad libre. R = método de Richardson, MC = método convencional.

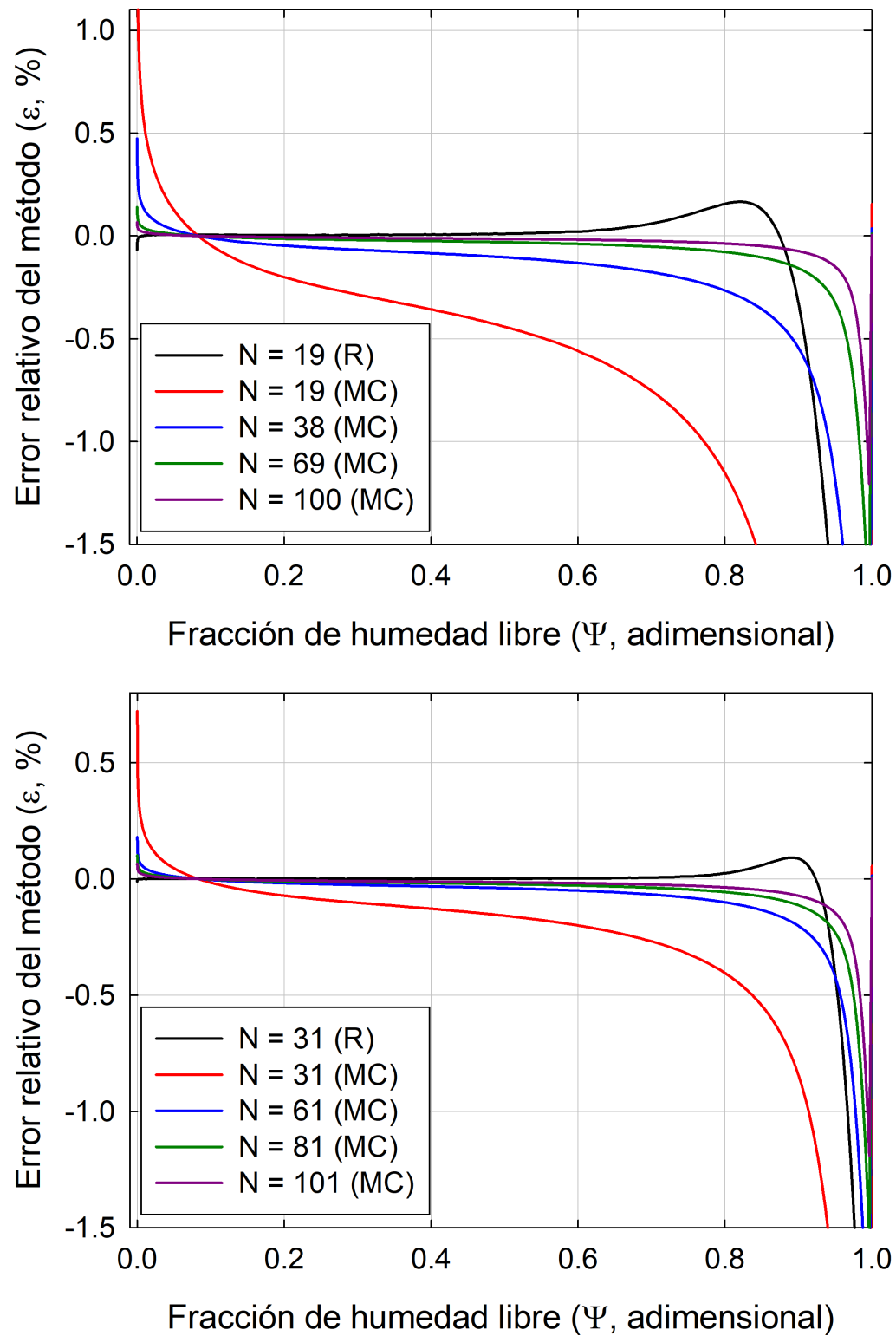


Figura 4.21. Comparación del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función de la fracción de humedad libre. R = método de Richardson, MC = método convencional.

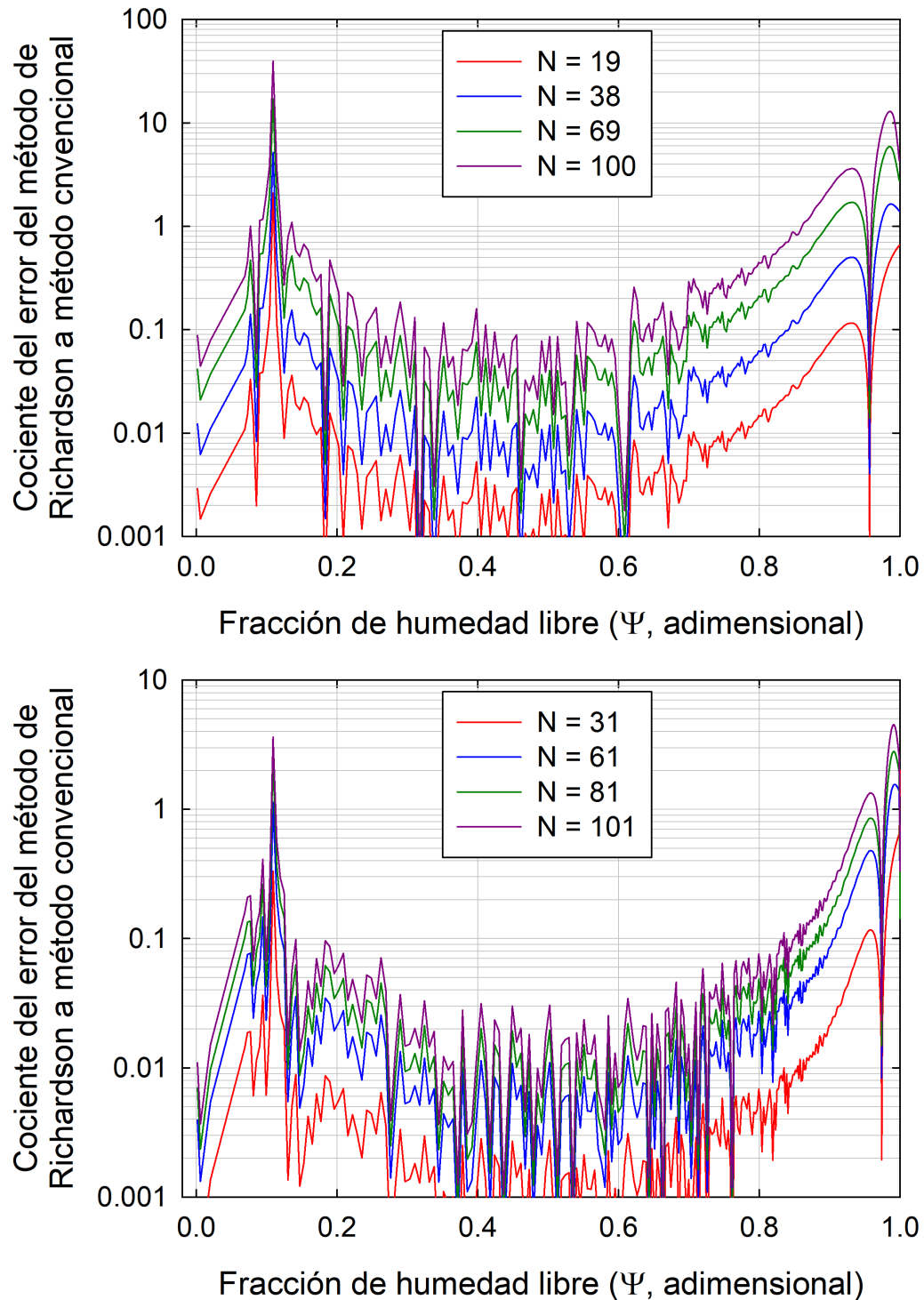


Figura 4.22. Comparación del cociente del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de placa plana como función de la fracción de humedad libre. Método de Richardson resuelto con 19 (superior) y 31 (inferior) nodos.

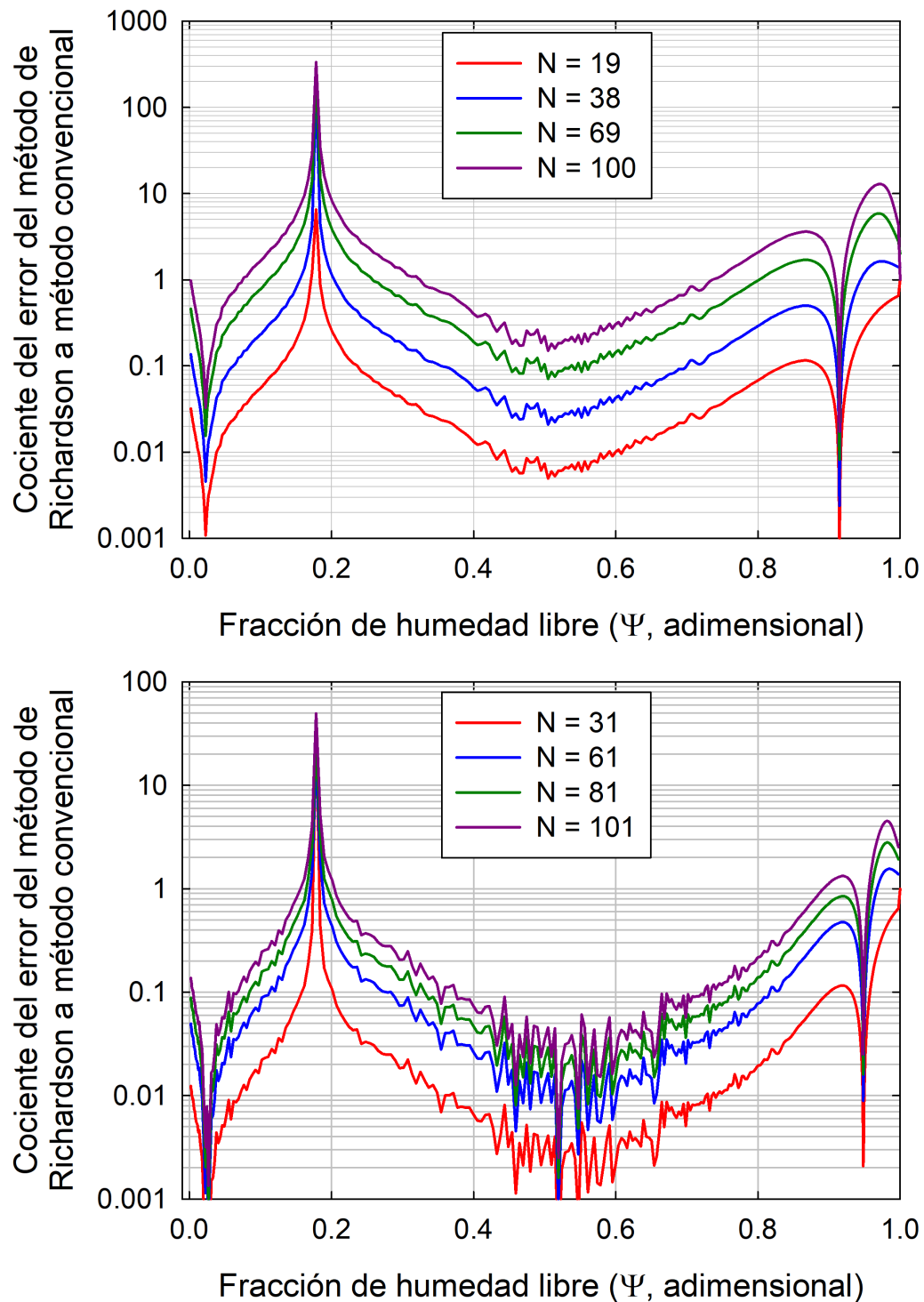


Figura 4.23. Comparación del cociente del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de cilindro infinito como función de la fracción de humedad libre. Método de Richardson resuelto con 25 (superior) y 31 (inferior) nodos.

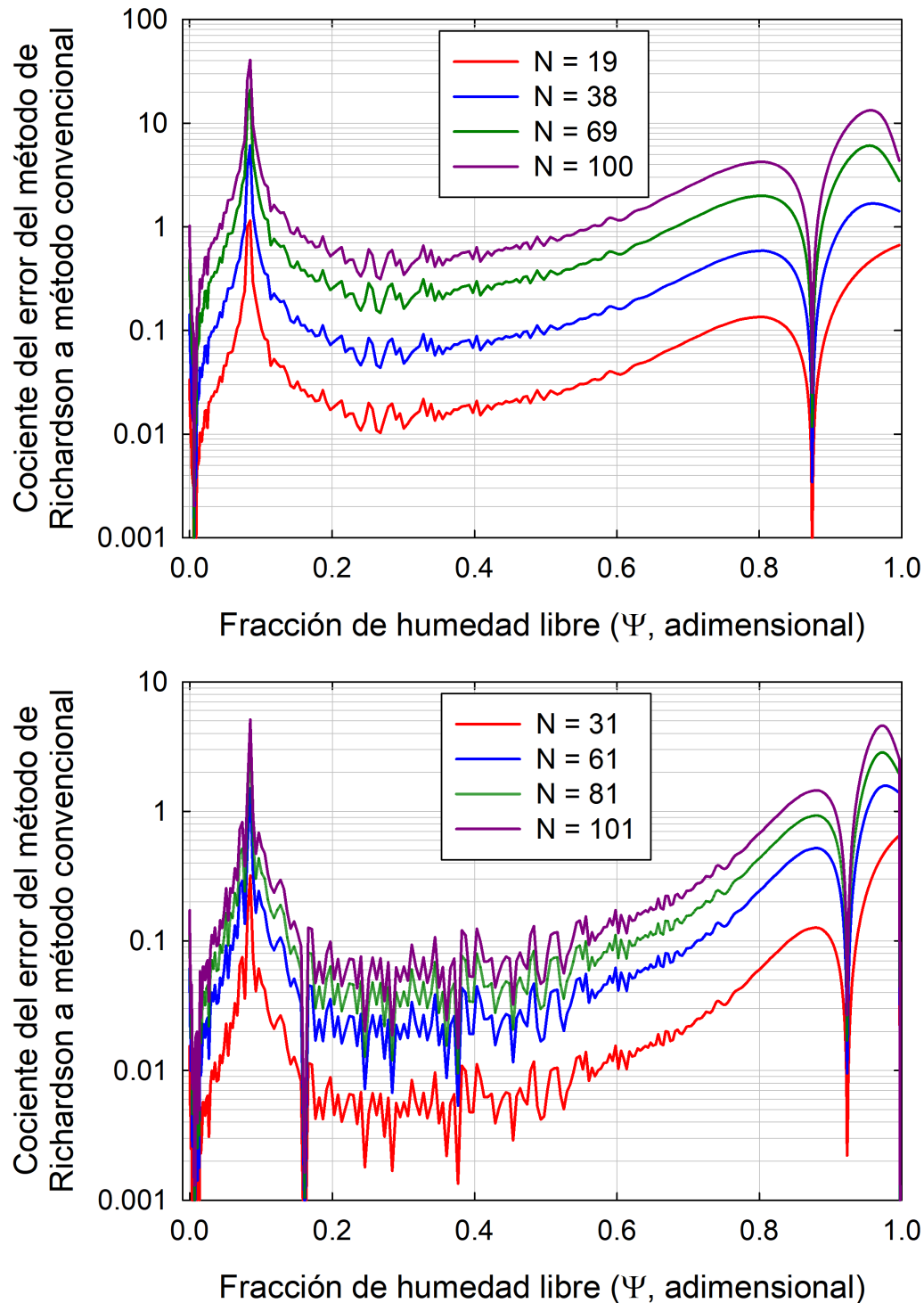


Figura 4.24. Comparación del cociente del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de esfera como función de la fracción de humedad libre. Método de Richardson resuelto con 25 (superior) y 31 (inferior) nodos.

## 4.2. Soluciones en dos dimensiones

En las Figuras 4.25 y 4.26 se muestra el error relativo del MR cuando se comparan con la solución analítica correspondiente como función del número de Fourier y fracción de humedad libre en un prisma cuadrado infinito. Cuando el error relativo se grafica como función del número de Fourier se observa que para el menor número de nodos probados (5 nodos por dirección de transferencia de masa, 25 nodos totales) se alcanza un error máximo para tiempos de secado mayores a  $\tau = 0.7$ , mientras que, para el resto de los nodos probados el error máximo ocurre en tiempos cortos de secado ( $\tau = 0.1$ ). Al graficar el error relativo como función de la fracción de humedad libre se pueden distinguir dos zonas. En la primera región el error relativo es negativo y disminuye rápidamente en valor absoluto hasta alcanzar un valor igual a cero en fracciones de humedad libre  $\Psi = 0.59, 0.73, 0.80, 0.84$  y  $0.87$  para  $N = 5, 7, 9, 11$  y  $13$  nodos en cada dirección de transferencia de masa, respectivamente. La segunda región ocurre en valores menores a las fracciones de humedad libre antes mencionadas, donde se muestran dos valores máximos de error relativo  $\varepsilon = 0.26\%$  con  $\Psi = 0.48$  y  $\varepsilon = 0.3\%$  con  $\Psi = 0.006$  cuando  $N = 5$ . Para  $N > 5$  nodos, únicamente existe un máximo en  $\varepsilon = 0.22, 0.18, 0.15$  y  $0.13\%$  para  $\Psi = 0.64, 0.73, 0.78$  y  $0.82$  para  $N = 7, 9, 11$  y  $13$  nodos, respectivamente.

De la misma forma que con las soluciones en una dimensión, el MR se compara favorablemente con el MC de diferencias finitas según se muestra en las Figuras 4.27 y 4.28. Se puede observar que el MR tiene un menor error relativo que el MC aunque este emplee un mayor número de nodos en la solución. A diferencia del MR, el error del MC es máximo al inicio del secado y se va acercando a cero a medida que transcurre el proceso para volver aumentar nuevamente. El punto de cruce por cero es único sin importar el número de nodos de la solución, estando localizado en  $\tau \approx 0.81$ .

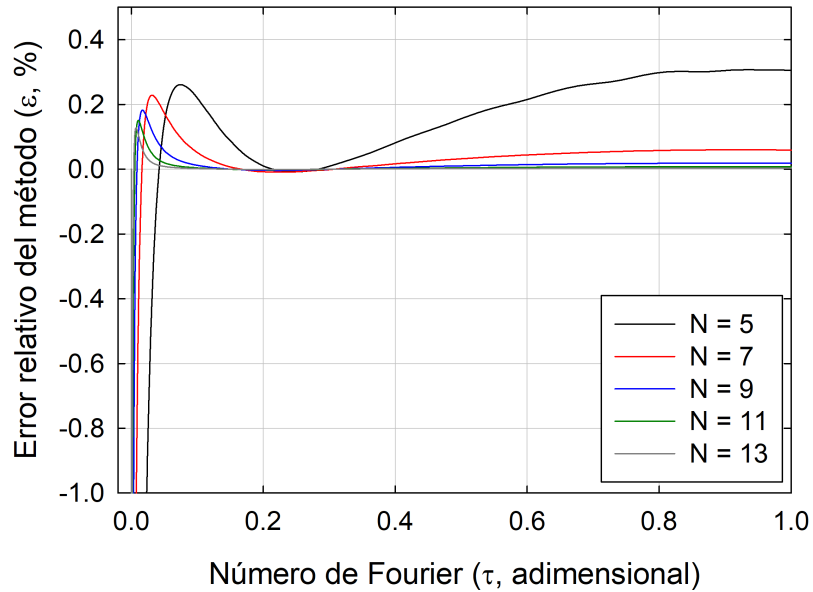


Figura 4.25. Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de nodos y número de Fourier

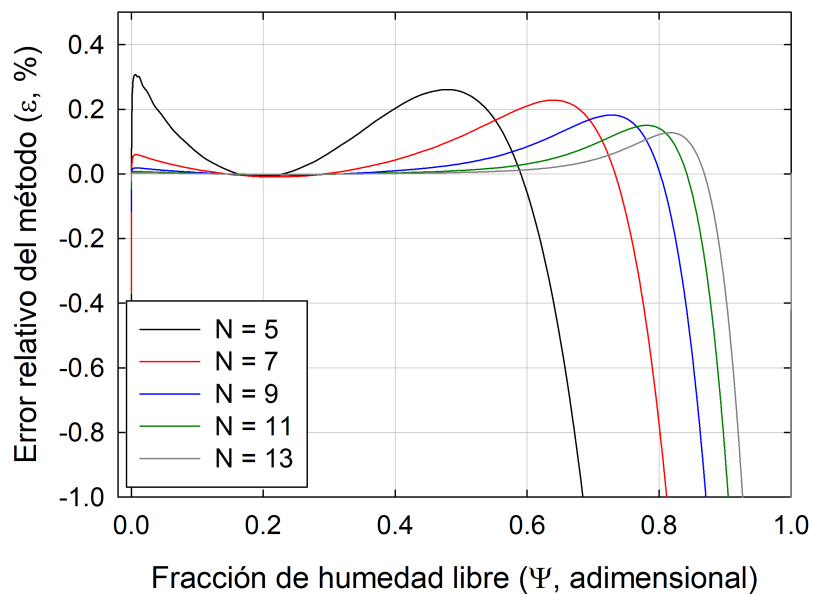


Figura 4.26. Error relativo del método de Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de nodos y fracción de humedad libre.

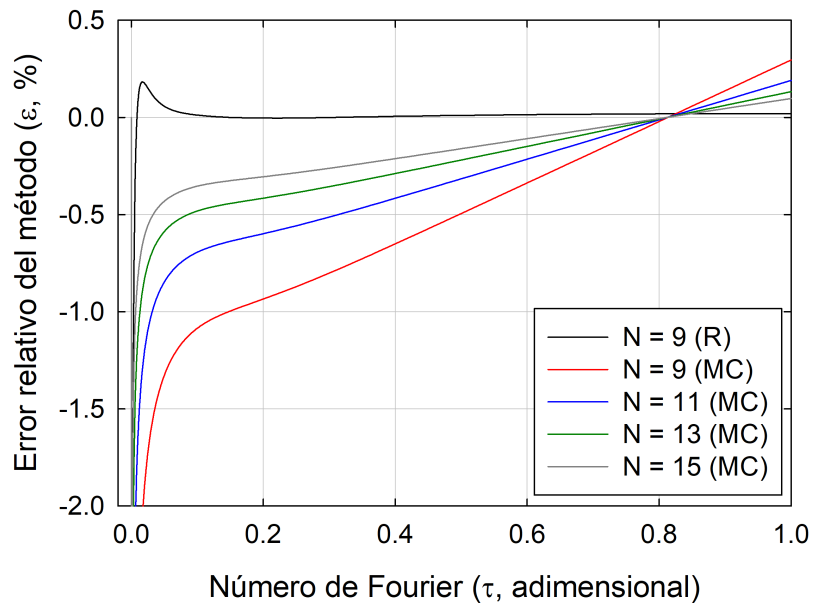


Figura 4.27. Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de nodos y número de Fourier. R = método de Richardson, MC = método convencional.

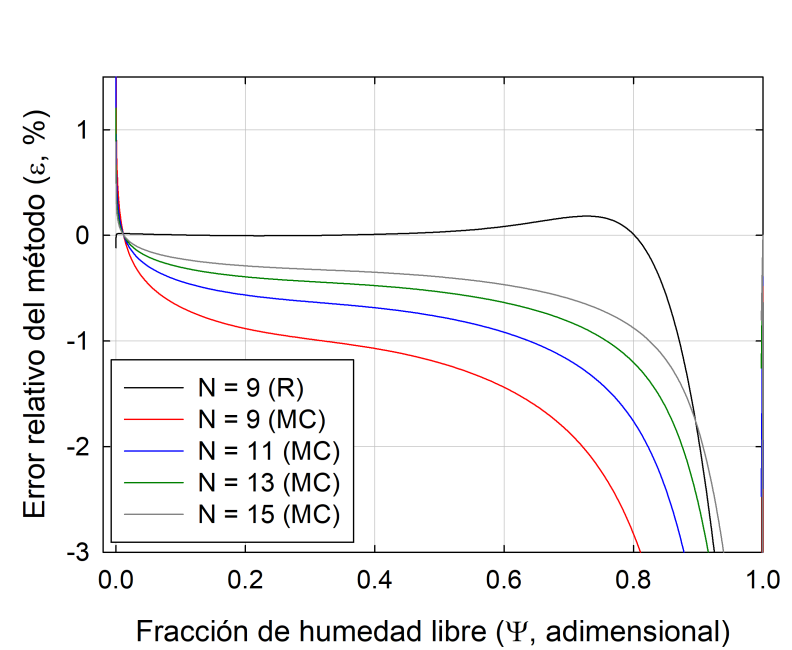


Figura 4.28. Comparación del método convencional y Richardson en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de nodos y fracción de humedad libre. R = método de Richardson, MC = método convencional.

En las Figuras 4.29 y 4.30 se muestra el error obtenido por el MR entre el error obtenido por el MC como función del número de Fourier y la fracción de humedad libre, para cuando ambos métodos emplean el mismo número de nodos en la solución. Las gráficas muestran en el eje  $y$  una escala logarítmica, donde un cociente con valor a 1 indica que ambos métodos tienen el mismo error. Un valor menor a 1 indica que el MR es más preciso que el MC para el mismo número de nodos usados en la solución. Por el contrario, si el cociente es mayor a 1 el MC es más preciso que el de Richardson. Se puede observar que el MR tiene un menor error que el método convencional en la mayor parte del tiempo de simulación e intervalos de humedad. Los picos en las figuras identificarían el tiempo o humedad donde disminuye el error del MC (estos picos se localizan en los mismos valores de humedad y tiempo donde el error relativo se hace cero en las Figuras 4.31 y 4.32). A lo largo de todo el contenido de humedad, en promedio, el error del método convencional en la solución de un prisma cuadrado infinito es mayor que el del MR en 5.3, 7.6, 8.6, 10.3 y 13.9 veces para  $N = 5, 7, 9, 11$  y  $13$  nodos, respectivamente. Además, estas figuras permitieron determinar que el MR excede ampliamente al MC, por lo que se hicieron simulaciones para determinar qué tanto se debería aumentar el número de nodos para que la solución convencional tenga un error similar al método de Richardson.

Las Figuras 4.31 y 4.32 muestran la comparación del error relativo obtenido por el MR con el obtenido por el MC como función del número de Fourier y la fracción de humedad libre, para cuando el MR se ejecuta con 9 o 13 nodos, mientras se va aumentando el número de nodos para el MC.

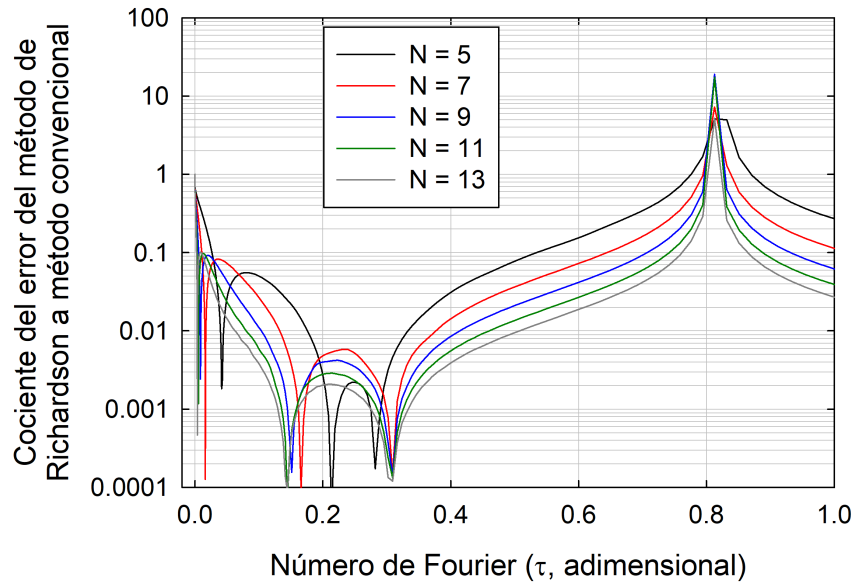


Figura 4.29. Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de nodos y número de Fourier.

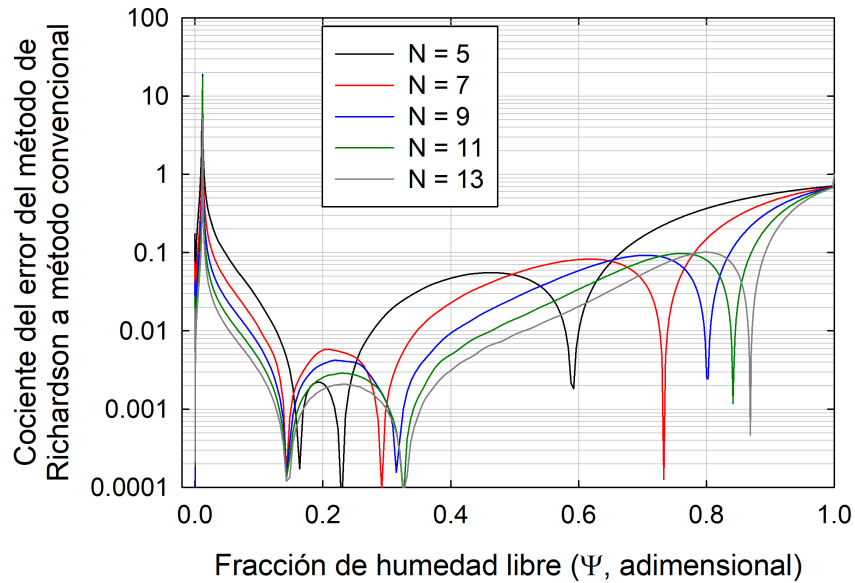


Figura 4.30. Cociente del error del método de Richardson a método convencional en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de nodos y fracción de humedad libre.

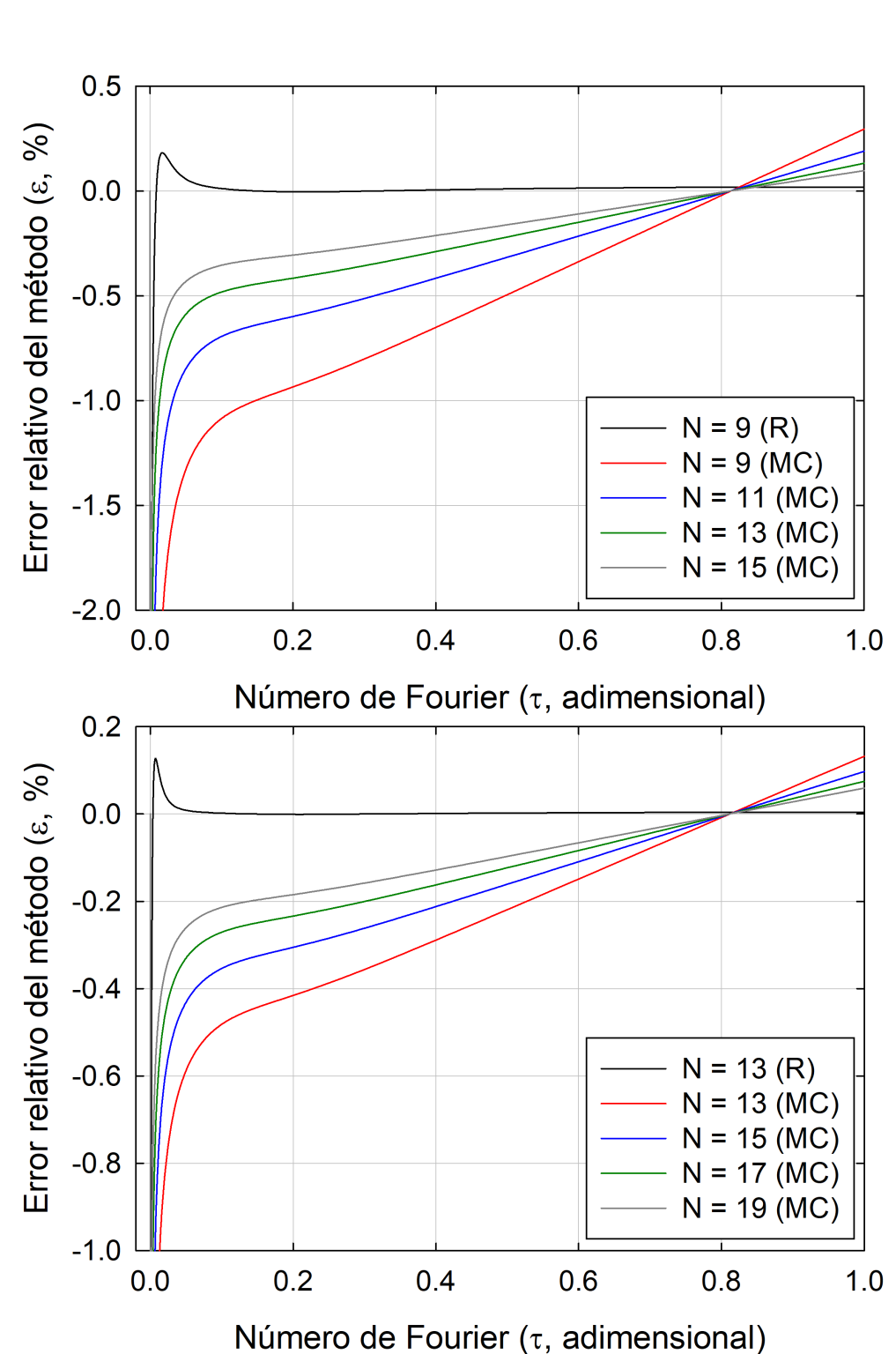


Figura 4.31. Comparación del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de Fourier. R = método de Richardson, MC = método convencional.

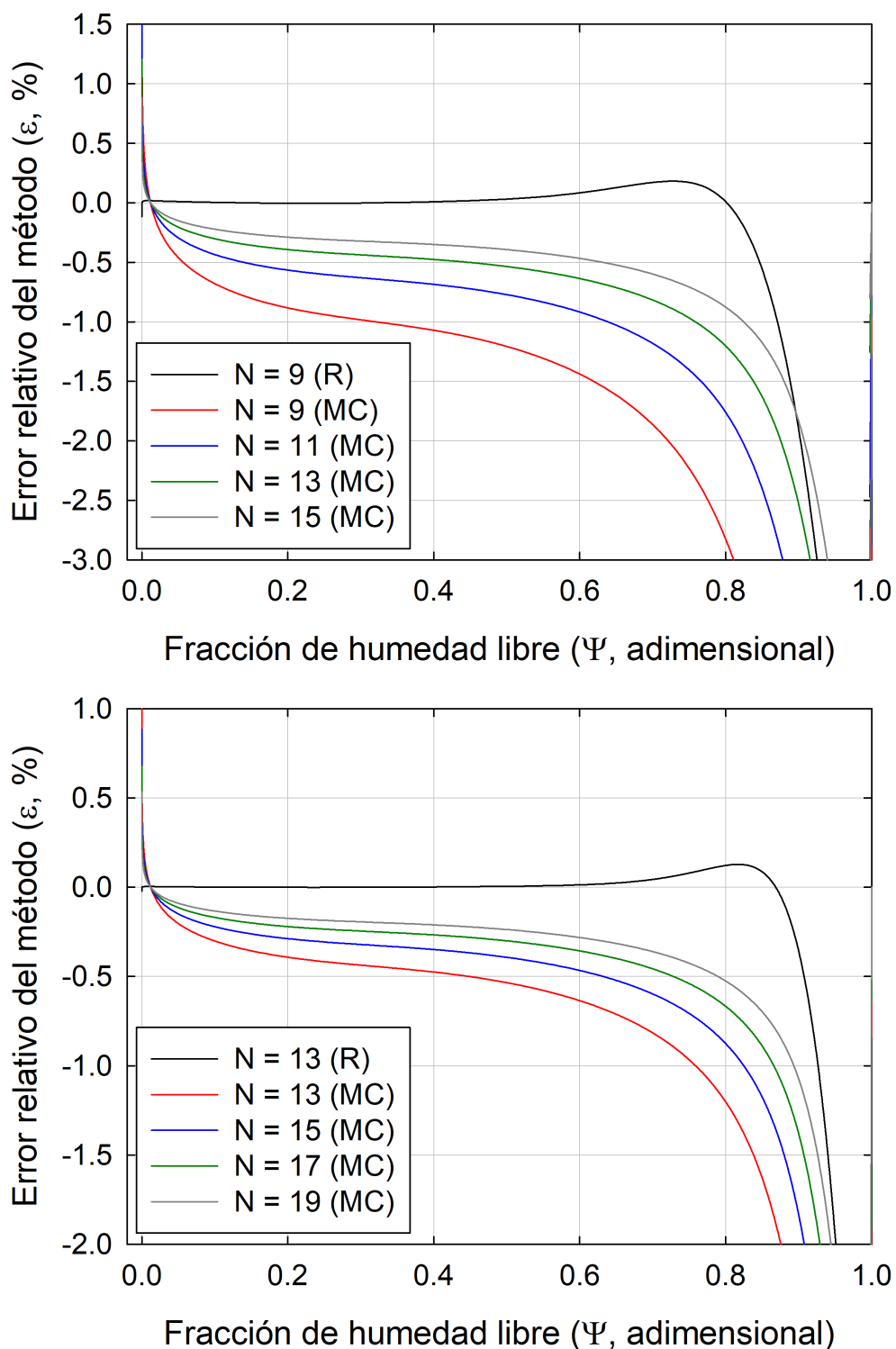


Figura 4.32. Comparación del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función de la fracción de humedad libre. R = método de Richardson, MC = método convencional.

Las Figuras 4.33 y 4.34 permiten observar que, para tener un error relativo semejante en magnitud a lo largo del tiempo y de la humedad entre el MR y el MC, éste último tiene que aumentar de forma considerable el número de nodos usados en la solución. En promedio, a lo largo de todo el contenido de humedad, el error promedio del MC en la solución de prisma cuadrado infinito es mayor que el del MR entre 8.6, 5.4, 4.5 y 3.5 veces para  $N = 9, 11, 13$  y 15 nodos cuando el MR usa 9 nodos, y en 13.9, 10.9, 8.7 y 7.1 veces para  $N = 13, 15, 17$  y 19 nodos cuando el MR ocupa 13 nodos, respectivamente. Se debe recordar que el número de nodos especificados se refiere a los nodos en una sola dirección de transferencia de masa. Por lo tanto, si el MR con 13 nodos excede al MC con 19 nodos, en realidad, el MR se estaría ejecutando con 169 ecuaciones, mientras que el convencional lo haría con 361 ecuaciones.

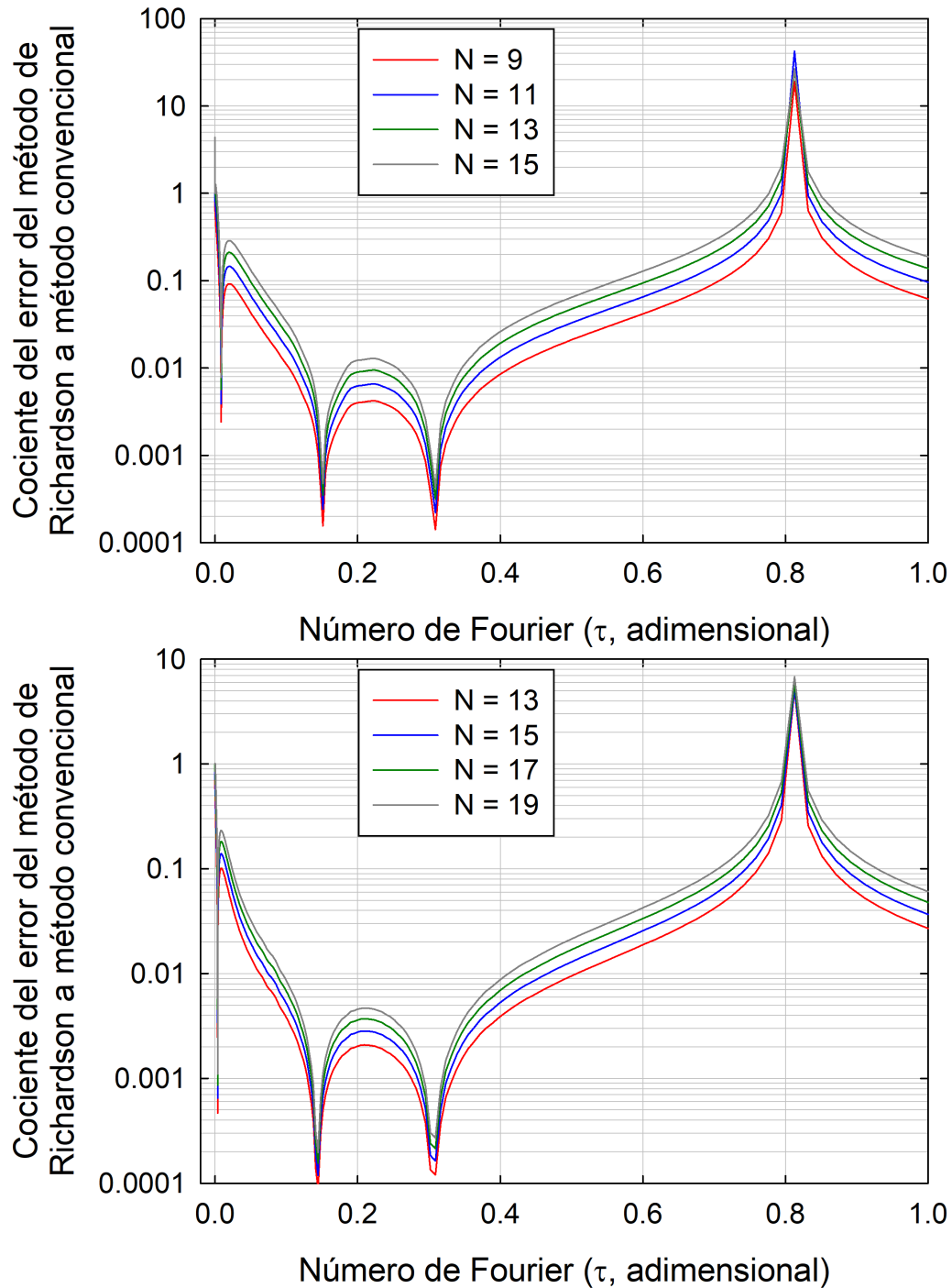


Figura 4.33. Comparación del cociente del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función del número de Fourier. Método de Richardson resuelto con 9 (superior) y 13 (inferior) nodos.

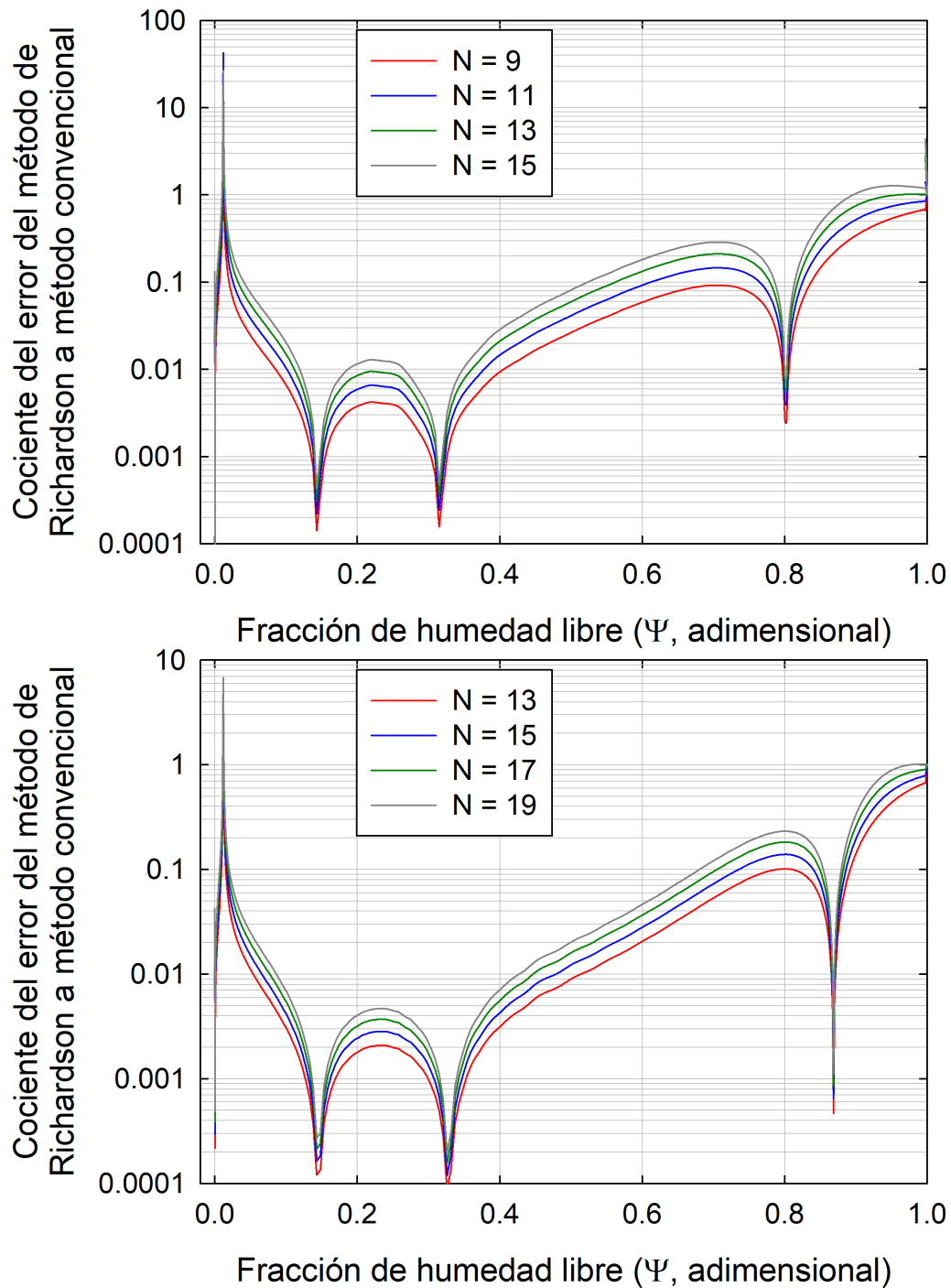


Figura 4.34. Comparación del cociente del error entre el método de Richardson usando un número de nodos fijo y método convencional resuelto bajo diferente número de nodos en la solución de la ecuación de difusión usando la geometría de prisma cuadrado infinito como función de la fracción de humedad libre. Método de Richardson resuelto con 9 (superior) y 13 (inferior) nodos.

En la Tabla 4.1 y en la Figura 4.35 se puede observar la variación del cociente de tiempos de ejecución del MC y Richardson cuando se aumenta el número de nodos en la solución. Se puede destacar, que el MC tarda cada vez más que el MR al aumentar el número de nodos; sin embargo, aunque el número de nodos en el MC es mayor y el cociente del número de ecuaciones entre ambos métodos se ajustó de tal forma que su precisión fuera similar, el MR aún es mejor.

Tabla 4.1. Comparación del tiempo de ejecución de los métodos de Richardson y convencional para un prisma cuadrado infinito bajo un cociente constante de ecuaciones resueltas.

$N_R$	$E_R$	$N_C$	$E_C$	$E_C/E_R$	$t_C/t_R$
7	65	10	100	1.54	1.15
9	106	13	169	1.59	1.56
11	157	16	256	1.63	2.07
13	218	18	324	1.49	1.86
15	289	21	441	1.53	2.13
17	370	24	576	1.56	2.65
19	461	27	729	1.58	2.78
21	562	30	900	1.60	3.11
23	673	33	1089	1.62	3.14
25	794	35	1225	1.54	3.11
27	925	38	1444	1.56	3.14
29	1066	41	1681	1.58	3.12
31	1217	44	1936	1.59	4.35
33	1378	47	2209	1.60	4.36
35	1549	49	2401	1.55	4.86
37	1730	52	2704	1.56	4.40
39	1921	55	3025	1.57	4.30
41	2122	58	3364	1.59	7.64
43	2333	61	3721	1.59	5.13
45	2554	64	4096	1.60	5.01
47	2785	66	4356	1.56	4.84
49	3026	69	4761	1.57	4.91

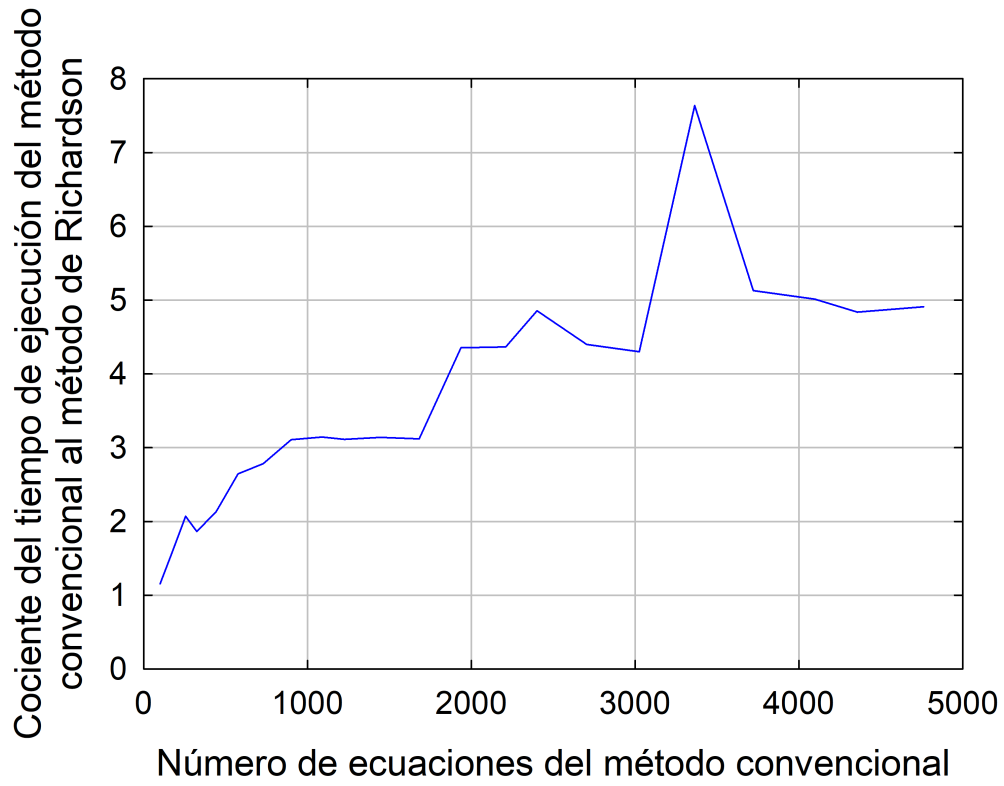


Figura 4.35. Efecto del número de ecuaciones sobre el cociente del tiempo de ejecución del método convencional al método de Richardson para un prisma cuadrado infinito para alcanzar una precisión similar.

## V. Conclusiones

En este trabajo se demostró que el método de Richardson aventaja de forma notable al método convencional de diferencias finitas en la solución de problemas de transferencia de masa descritos por la segunda ley de Fick de la difusión, disminuyendo considerablemente el esfuerzo computacional en la solución para varias geometrías en diferentes dimensiones, lográndose tiempos de ejecución más cortos. Los resultados obtenidos sugieren que la reducción del esfuerzo computacional podría ser especialmente valiosa en la solución de problemas inversos mediante regresión no lineal donde a partir de datos experimentales de secado se determina el coeficiente de difusión del agua de manera iterativa. Al ser resueltos en forma adimensional los problemas de transferencia de masa, los resultados obtenidos son extrapolables a otras operaciones capaces de ser descritas a partir de las mismas ecuaciones con el uso de variables definidas de forma conveniente, como por ejemplo deshidratación osmótica.

# Bibliografía

- Aguirre-García, M., Hernández-Carranza, P., Cortés-Zavaleta, O., Ruiz-Espinosa, H., Ochoa-Velasco, C., & Ruiz-López, I. (2020). Mass transfer analysis of bioactive compounds in apple wedges impregnated with beetroot juice: A 3d modelling approach. *Journal of Food Engineering*, 282.
- Akanbi, C. T., Adeyemi, R. S., & Ojo, A. (2006). Drying characteristics and sorption isotherm of tomato slices. *Journal of Food Engineering*, 73, 157–163.
- Anandharamakrishnan, C., Ed. (2017). *Handbook of drying for dairy products*. India: Indian Institute of Crop Processing Technology Thanjavur, Tamil Nadu, India.
- Babalís, S. J. & Belessiotis, V. G. (2004). Influence of the drying conditions on the drying constants and moisture diffusivity during the thin-layer drying of figs. *Journal of Food Engineering*, 65, 449–458.
- Bialobrzewski, I. (2006). Simultaneous heat and mass transfer in shrinkable apple slab during drying. *Drying Technology*, 24, 551–559.
- Brennan, J. G., Butters, J. R., Cowell, N. D., & Lilly, A. E. V. (1976). *Food engineering operations*. Applied Science Publishers Limited: London.
- Brooker, D. B., Bakker-Arkema, F. W., & Hall, C. W. (1992). *Drying and storage of grains and oilseeds*. New York: The AVI Publishing Company.
- Chapra, S. & Canale, R. (2015). *Numerical methods for engineers*. New York, USA: Mc Graw Hill Education, seventh edition.
- Compaore, A., Putranto, A., Dissa, A. O., Ouoba, S., Remond, R., Rogaume, Y., Zoulalian, A., Bere, A., & Koulidiati, J. (2019). Convective drying of onion: modeling of drying kinetics parameters. *Journal of Food Science and Technology*, 56(7), 3347–3354.
- Crank, J. (1975). *Mathematics of Diffusion*. Bristol, England: Oxford University Press, second edition.
- da Silva, W. P. & e Silva, C. M. D. P. S. (2014). Calculation of the convective heat transfer coefficient and thermal diffusivity of cucumbers using numerical simulation and the inverse method. *Journal of Food Scientist and Technologists*, 51(9), 1750–1761.

- Dai, R., Lin, P., & Zhang, J. (2017). An efficient sixth-order solution for anisotropic poisson equation with completed richardson extrapolation and multiscale multigrid method. *Computers and Mathematics with Applications*.
- Dai, R., Zhang, J., & Wang, Y. (2016). Higher order adi method with completed richardson extrapolation for solving unsteady convection-diffusion equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 71, 431–442.
- Darvishi, H., Zarein, M., & Farhudi, Z. (2016). Energetic and exergetic performance analysis and modeling of drying kinetics of kiwi slices. *Journal of Food Scientists and Technologists*, 53(5), 2317–2333.
- Delgado, J. M. P. Q. & de Lima, A. G. B. (2016). *Drying and energy technologies*. Springer.
- Dincer, I. & Zamfirescu, C. (2016). *Drying phenomena: theory and applications*. University of Ontario Institute of Technology, Oshawa, ON, Canada.
- Estévez-Sánchez, K., González-Pérez, J., Ochoa-Velasco, C., García-Alvarado, M., Cruz-González, D., Sampieri, A., & López, I. R. (2019). Point set registration for reduced geometry mismatch during estimation of mass transfer properties in osmotic dehydration of complex-shaped foods. *Drying Technology*.
- Faal, S., Tavakoli, T., & Ghobadian, B. (2015). Mathematical modelling of thin layer hot air drying of apricot with combined heat and power dryer. *Journal of Food Science and Technology*, 52(5), 2950–2957.
- Faragó, I., Ágnes Havasi, & Zlatev, Z. (2009). Richardson-extrapolated sequential splitting and its application. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 226, 218–227.
- Fioreze, R. (2003). Drying principles of organic products.
- Geankoplis, C. J. (1998). *Procesos de transporte y operaciones unitarias*. México: Compañía editorial Continental, S.A. de C.V.
- Guiné, R. P. (2006). Moisture diffusivity in pears: experimental determination and derivation of a mathematical prediction model. *International Journal of Food Science and Technology*, 41, 1177–1181.
- González-Pérez, J., López-Méndez, E., Luna-Guevara, J., Ruiz-Espinosa, H., Ochoa-Velasco, C., & Ruiz-López, I. (2019). Analysis of mass transfer and morphometric characteristics of

- white mushroom (*agaricus bisporus*) pilei during osmotic dehydration. *Journal of Food Engineering*, 240, 120–132.
- Hernan-Lara, E., Martínez-Sánchez, C., Pacheco-Angulo, H., Carmona-García, R., Ruiz-Espinosa, H., & Ruiz-López, I. (2013). Mass transfer modeling of equilibrium and dynamic periods during osmotic dehydration of radish in nacl solutions. *Food and Bioproducts Processing*, 91, 216–224.
- Karathanos, V. T. & Kostaropoulos, A. E. (1995). Diffusion and equilibrium of water in dough/raisin mixtures. *Journal of Food Engineering*, 25, 113–121.
- Keey, R. B. (2013). *Drying: principles and practice*. 1972.
- Marchi, C. H., Araki, L. K., Alves, A. C., Suero, R., Goncalves, S. F. T., & Pinto, M. A. V. (2013). Repeated richardson extrapolation applied to the two dimensional laplace equation using triangular and square grids. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 4661–4675.
- Maskan, M. & Göğüs, F. (1998). Sorption isotherms and drying characteristics of mulberry *morus alba*. *Journal of Food Engineering*, 37, 437–449.
- Mauro, M. A. & Menegalli, F. C. (1995). Evaluation of diffusion coefficients in osmotic concentration of bananas (*musa cavendish lambert*). *International Journal of Food Science and Technology*, 30, 199–213.
- McCarthy, M. J. & Perez, E. (1991). Model for transient moisture profiles of a drying apple slab using the data obtained with magnetic resonance imaging. *Department of Food Science and Technology and of Agricultural Engineering*, 7, 540–543.
- Milman, M. J. (2002). Equipaments for pre-processing of grain.
- Mujumdar, A., Ed. (2006). *Handbook of Industrial Drying*. New York, USA: Marcell Dekker, Inc., third edition edition.
- Onwude, D. I., Hashim, N., & Chen., G. N. (2016). Recent advances of novel thermal combined hot air drying of agricultural crops. *Trends in Food Science and Technology*, 57, 132–145.
- Pawar, S. B. & Pratape., V. M. (2017). Fundamentals of infrared heating and its application in drying of food materials: a review. *Journal of Food Process Engineering*, 40(1), 1–15.
- Pisalkar, P. S., Jain, N. K., & k: Jain, S. (2011). Osmo-air drying of aloe vera gel cubes. *Journal of Food Science and Techonology*, 48(2), 183–189.

- Ramaswamy, H. S. & Lo, K. V. (1983). Simplified mass transfer relationships for diffusion controlled air dehydration of regular solid. *Canadian agricultural engineering*, 25(1), 143–148.
- Rani, P. & Tripathy, P. P. (2020). Modelling of moisture migration during convective drying of pineapple slice considering non-isotropic shrinkage and variable transport properties. *Journal Food Scientists and Technologists*, 57(10), 3748–3761.
- Reeds, J. S. (1991). *Drying*. ASM, New York.
- Ricce, C., Rojas, M. L., Miano, A. C., Siche, R., & Augusto., P. E. D. (2016). Ultrasound pre-treatment enhances the carrot drying and rehydration. *Food Research International*, 89, 701–708.
- Ruiz-López, I., Córdova, A., Rodríguez-Jimenes, G., & García-Alvarado, M. (2004). Moisture and temperature evolution during food drying effect of variable properties. *Journal of Food Engineering*, 63, 117–124.
- Ruiz-López, I. & García-Alvarado, M. (2007). Analytical solution for food drying kinetics considering shrinkage and variable diffusivity. *Journal of Food Engineering*, 79, 208–216.
- Ruiz-López, I., Ruiz-Espinosa, H., Hernan-Lara, E., & Zárate-Castillo, G. (2011a). Modeling of kinetics, equilibrium and distribution data of osmotically dehydrated carambola (averrhoa carambola l.) in sugar solutions. *Journal of Food Engineering*, 104, 218–226.
- Ruiz-López, I., Ruiz-Espinosa, H., Luna-Guevara, M., & García-Alvarado, M. (2011b). Modeling and simulation of heat and mass transfer during drying of solids with hemispherical shell geometry. *Computers and Chemical Engineering*, 35, 191–199.
- Ruiz-López, I., Ruiz-Espinosa, H., Pacheco-Aguirre, F., & García-Alvarado, M. (2013). Drying of food products shaped as longitudinal sections of solid and annular cylinders: modeling and simulation. *Drying Technology*, 31, 1148–1159.
- Ruiz-López, I., Ruíz-Espinosa, H., Arellanes-Lozada, H., P.Bárcenas-Pozos, & García-Alvarado, M. (2012). Analytical model for variable moisture diffusivity estimation and drying simulation of shrinkable food products. *Journal of Food Engineering*, 108, 427–435.
- Sabarez, H. (2012). Computational modelling of the transport phenomena occurring during convective drying of prunes. *Journal of Food Engineering*, 111, 279–288.
- Sahni, E. K. & Chaudhuri., B. (2012). Contact drying: a review of experimental and mechanistic

- modeling approaches. *International Journal of Pharmaceutics*, 434(1-2), 334–348.
- Sherwood, T. K. (1929). The drying of solids 1. *Industrial and engineering chemistry*, 21(1).
- Silva, J. S. (2008). Drying and storage of agricultural products.
- Spiegel, M. (1968). *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. USA: McGraw-Hil.
- Srikiatden, J. & Roberts, J. (2008). Predicting moisture profiles in potato and carrot during convective hot air drying using isothermally measured effective diffusivity. *Journal of Food Process Engineering*, 84, 516–525.
- Teixeira, M. B. F. & Tobinaga, S. (1998). A diffusion model for describing water transport in round squid mantle during drying with a moisture-dependent effective diffusivity. *Journal of Food Engineering*, 36, 169–181.
- Vega-Mercado, H., Góngora-Nieto, M. M., & Barbosa-Cánovas, G. V. (2001). Advances in dehydration of foods. *Journal of Food Engineering*, 49(4), 271–289.
- Zlatev, Z., Dimov, I., Faragó, I., Georgiev, K., & Ágnes Havasi (2017). Stability of the richardson extrapolation combined with some implicit runge-kutta methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 310, 224–240.
- Zlatev, Z., Georgiev, K., & Dimov, I. (2014). Studying absolute stability properties of the richardson extrapolation combined with explicit runge-kutta methods. *Computers and Mathematics with Applications*, 67, 2294–2307.