



# *Benemerita Universidad Autónoma de Puebla*

---

*Facultad de Ciencias  
Físico-Matemáticas*

*Modelación del sensor de frente  
de onda Shack Hartmann*

Tesis Presentada al  
*Colegio de Física*

como requisito para la obtención del grado de  
*Licenciado en Física Aplicada*

Presenta:  
*Faustino Moises Amador Garcia*

Asesor de Tesis:  
*Dr. Juan Castillo Mixcóatl*

*Heróica Puebla de Zaragoza, 24 de Enero de 2020*





# *Benemerita Universidad Autónoma de Puebla*

---

## *Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas*

### *Modelación del sensor de frente de onda Shack Hartmann*

Tesis Presentada al  
*Colegio de Física*

como requisito para la obtención del grado de  
*Licenciado en Física Aplicada*

Presenta:  
*Faustino Moises Amador Garcia*

Asesor de Tesis:  
*Dr. Juan Castillo Mixcóatl*

*Heróica Puebla de Zaragoza, 24 de Enero de 2020*





**Título:** Modelación del sensor de frente de onda Shack Hartmann.

**Estudiante:** Faustino Moises Amador Garcia

## COMITÉ

---

**Dr. Severino Muñoz Aguirre**

**Presidente**

---

**Dra. Georgina Beltrán Pérez**

**Secretario**

---

**Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez**

**Vocal**

---

**Dr. María Inés Teresa Pinto Rafael**

**Suplente**

---

**Dr. Juan Castillo Mixcóatl**

**Asesor**



# *Dedicatoria*

---

A mi padre † J. Moisés M. Amador Arce

A mi madre Josefina Amador Arce



# *Agradecimientos*

---

A mi asesor el Dr. Juan Castillo Mixcóatl, por todo el apoyo brindado y por enseñarme hacer posible lo imposible.

A mi madre por todo el apoyo que me ha dado todos estos años y a pesar de dificultades me enseñó a seguir adelante aunque la situación pareciera imposible

A mi padre † en donde quiera que esté por todo su apoyo y que a pesar de dudar de mí, no me dejó solo.

A mi abuelita Beatriz que siempre ha estado al pendiente de mí, por todo el cariño que me ha demostrado.

A don Carlos Reyes que siempre ha apoyado a la familia a salir de situaciones difíciles y complicadas, siempre firme sin importar la situación por más difícil que esta sea.

A la M. C. María Inés Teresa Pinto Rafael por todo el tiempo y enseñanza que compartió conmigo en todo el tiempo que estuve trabajando con ella.

A la M. C. Irma R. Merchand Arroyo quien me brindó su apoyo en tiempos difíciles, apoyo moral, sobre todo por haber sido parte primordial en mi desempeño académico e inculcar el amor por las ciencias.

A Uriel A. Ortiz † donde quiera que esté por enseñarme la grandeza de la vida y sentir confianza en mí, sobretodo en un mundo tan mezquino y ruin que en ese tiempo tuvimos que enfrentar.

A mis amigos Imelda Araceli Martínez Martínez, Anabel Martínez Correa y Luis Ángel Muñoz Martínez (los tres Martínez) que a pesar de dificultades siempre estuvimos unidos y sobretodo apoyándonos.

A mi amiga Paola Razo Martínez, (si es Martínez de seguro va a ser mi buen amigo) mi gran amiga por el gran apoyo que me ha brindado desde que la conocí y sigue con esa actitud tan humana que la caracteriza.

Al M. C. Marcos Rodríguez Torres y M. C. Rafael Zaca Morán, que a pesar de tener diferencias y dificultades he sentido apoyo.

A Kitzia y a Kevin, con quienes he compartido grandes momentos en el corto tiempo que los he conocido, ambos, aunque crueles, muy humanos.

A David Silva Apango que de forma indirecta me enseñó que no hay que confiar en todas la personas a pesar de que todo se vea bien.

A Uriel Z. Ortiz por enseñarme el otro lado de la moneda y en ocasiones ser duro, con el corazón frío y la mente caliente al momento de tomar decisiones.

Al Dr. Severino Muñoz Aguirre y la Dra. Georgina Beltrán Pérez por sus enseñanzas.

A José Pérez García y su esposa Ana por su apoyo en los comienzos de la licenciatura que era muy difícil sobrellevarla.

A todos mis compañeros de trabajo de la U. P. V. A. por todos estos años de fraternidad y apoyo incluso en momentos difíciles y de carencia.

A Jesús Reyes Alcalá por haber compartido una etapa muy importante y decisiva en mi vida; gracias Jesús por ese tiempo tan grandioso y generoso.



# Índice

---

<b>Dedicatoria</b>	<b>7</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>9</b>
<b>Índice</b>	<b>12</b>
<b>Capítulo 1</b>	<b>14</b>
Resumen	14
Introducción	15
<b>Capítulo 2</b>	<b>18</b>
<b>Sensor de Shack Hartmann: Fundamentos</b>	<b>18</b>
2.1 Sensor de Shack Hartman	18
2.2 Análisis del sensor de Shack Hartmann con óptica de Fourier	22
<b>Capítulo 3</b>	<b>26</b>
<b>Simulación del sensor Shack Hartman</b>	<b>26</b>
3.1 Transformada de Fourier Discreta	26
3.2 Simulación del sensor de Shack Hartmann	29
3.2.1 Intervalos espaciales de simulación	29
3.2.2 Función de transmitancia del arreglo de microlentes	31
3.2.3 Determinación del campo óptico en el plano de la CCD	33
3.2.4 Cálculo de los centroides	34
<b>Capítulo 4</b>	<b>36</b>
<b>Análisis y discusión de resultados</b>	<b>36</b>
4.1 Condiciones de simulación	36
4.2 Patrón de intensidad simulado (Imagen en la CCD)	37
4.3 Desempeño del sensor en la estimación de las pendientes del frente de onda	39
<b>Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>



# *Capítulo 1*

---

## *Resumen*

A lo largo de este trabajo se explica el funcionamiento de un sensor de frente de onda tipo Shack Hartmann, explicando mediante óptica geométrica su principio básico de funcionamiento, pero como es de esperarse, no es la mejor forma de explicar debido a algunas inconsistencias planteadas en esta teoría, así que se recurre a la óptica de Fourier para dar explicación a los fenómenos presentes en el sensor.

Con la teoría de la óptica de Fourier se modela el sensor de frente de onda, dando como resultado las pendientes de los frentes de onda medidos a partir de ondas entregadas al sensor, a parte de las pendientes se estima el error propio que genera el sensor de Shack Hartmann.

## *Introducción*

Las aberraciones de las lentes y la difracción, generados por el tamaño del ojo humano son los principales limitantes para una resolución fina en la retina, la difracción y las aberraciones limitan la agudeza visual que se encuentra por debajo de la amplitud de la banda espacial impuesta por el sistema visual. Los métodos correctivos convencionales como gafas, lentes de contacto y cirugía refractiva proporcionan una mejora en la corrección de aberraciones de grado inferior (inclinación tip/tilt, desenfoque, y astigmatismo), la calidad de la imagen aumenta considerablemente, dilatando la pupila para minimizar los efectos de difracción. En la astronomía se tiene el problema de las turbulencias atmosféricas provocando que la imagen de estrellas, galaxias o planetas no tengan una óptima resolución, para evitar estos efectos se recurre a la óptica adaptativa para generar mejoras en la corrección de aberraciones de frentes de onda [6]



**Fig. 1. 1. a) Imagen con aberraciones introducidas debido a las turbulencias atmosféricas. b) Al utilizar óptica adaptativa en el procesamiento de imágenes, es claro que hay una mejor resolución de la imagen.**

La óptica Adaptativa es una técnica que permite mejorar la calidad de un sistema óptico reduciendo en tiempo real las perturbaciones sobre un frente de onda. Este tipo de sistemas estiman muy rápidamente la deformación del frente de onda y lo corrigen mediante el uso de elementos ópticos, por lo general espejos deformables, la mayoría de

los sistemas de óptica adaptativa funcionan de un modo parecido, su funcionamiento se basa en tres principales componentes [4]:

1. Corrector de frente de onda: compensa las aberraciones medidas generando una forma superficial que es idealmente conjugada al perfil de aberración.
2. Sistema de control computacional: convierte la salida natural del sensor de frente de onda en órdenes de voltaje que son enviadas al corrector de frente de onda.
3. Sensor de frente de onda: mide las aberraciones ópticas en el plano de salida

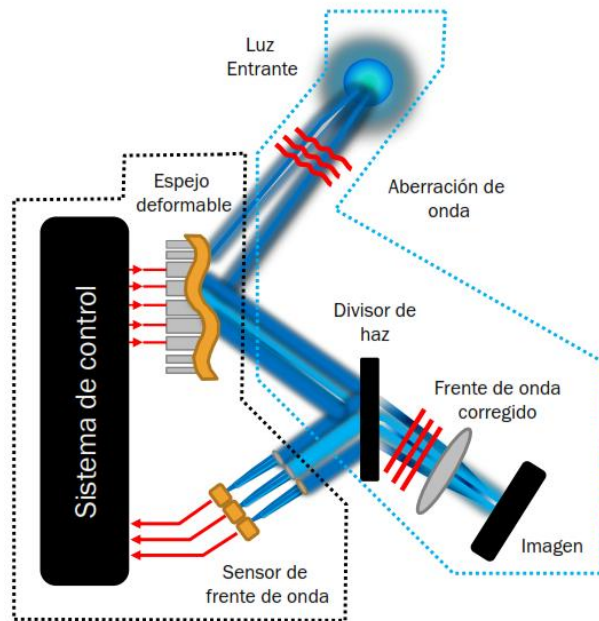


Fig. 1. 2. Imagen esquemática que muestra el funcionamiento de un sistema de óptica adaptativa (AO), en líneas punteadas de color negro se muestra el bloque de control, contenido el sensor de frente de onda, el espejo deformable y el sistema de control, la correspondiente línea punteada azul contiene el bloque óptico, formado por arreglos ópticos para la formación de imágenes [1]

A lo largo de este trabajo el sensor de frente de onda de interés para su estudio y modelación es el sensor de Shack Hartmann, explicando su funcionamiento básico mediante la teoría de óptica geométrica. Para la modelación se tiene que hacer algunas consideraciones necesarias debido a inconsistencias en esta teoría, por lo cual se hace uso de la óptica de Fourier para modelar el sensor de frente de onda deseado.

# Capítulo 2

---

## *Sensor de Shack Hartmann: Fundamentos*

En este capítulo se describirán los fundamentos físicos en los cuales se basan el funcionamiento del sensor de Shack Hartmann. Este dispositivo es piezas clave en el desarrollo de sistemas de óptica adaptativa los cuales hoy en día tienen numerosas aplicaciones que van desde sistemas observación astronómica hasta aplicaciones de tipo oftalmológico.

### *2.1 Sensor de Shack Hartman*

El sensor de Shack Hartmann es un dispositivo que nos permite determinar el frente de onda de una onda de luz. El funcionamiento de este sensor es usualmente explicado a través de principios de óptica geométrica. En la Fig. 2. 1a se muestra una onda plana que incide sobre una lente convergente. Como el frente de onda es plano, la lente simplemente enfoca el haz en un punto en el plano focal. El punto de luz se encuentra en la parte central que coincide con el eje de la lente. Cuando el frente de onda está inclinado lo que sucede es que el punto simplemente se desplaza a lo largo del plano focal por una distancia  $\Delta y$ . Como puede observarse de la Fig. 2. 1b el ángulo de inclinación del frente de onda está relacionado con el desplazamiento del punto y puede escribirse como

$$S_x = \frac{\Delta x}{f} \quad \text{Ec. 2. 1a}$$

$$S_y = \frac{\Delta y}{f} \quad \text{Ec. 2.1b}$$

donde  $f$  es la distancia focal y  $S_y$  es la pendiente de la onda plana.

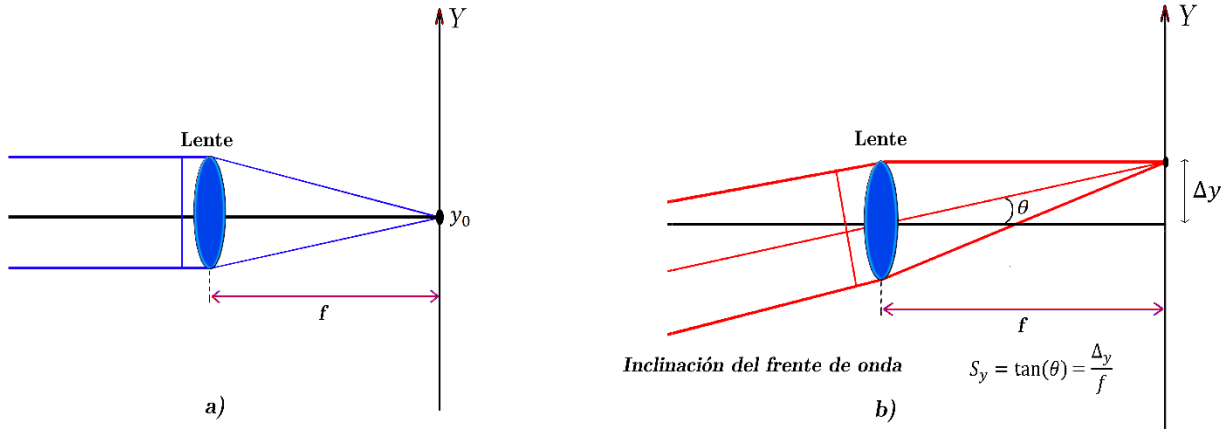


Fig. 2. 1. a) Cuando un frente de onda plano incide directamente sobre la lente esta enfoca los rayos en un punto. b) Si el frente de onda está inclinado el punto en el plano focal simplemente se desplaza a lo largo del plano por una distancia  $\Delta y$  [7].

De esta manera es posible determinar la inclinación del frente de onda a partir de sus pendientes. Una vez entendido este principio resulta sencillo determinar el intervalo dinámico del sensor, que en este caso es simplemente:

$$S_{max} = \frac{a/2}{f} \quad \text{Ec. 2. 2}$$

donde  $a$  es diámetro de la lente.

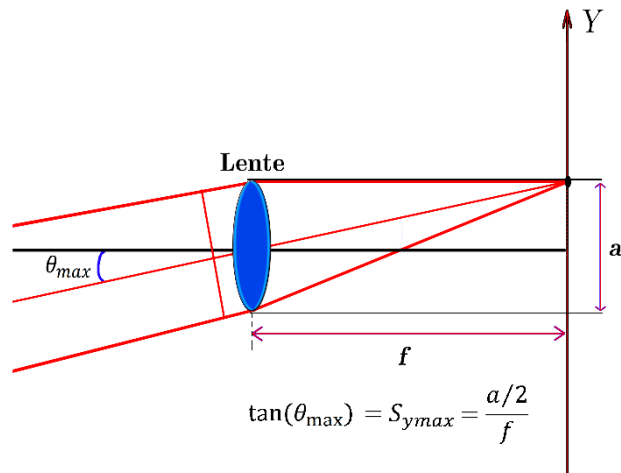
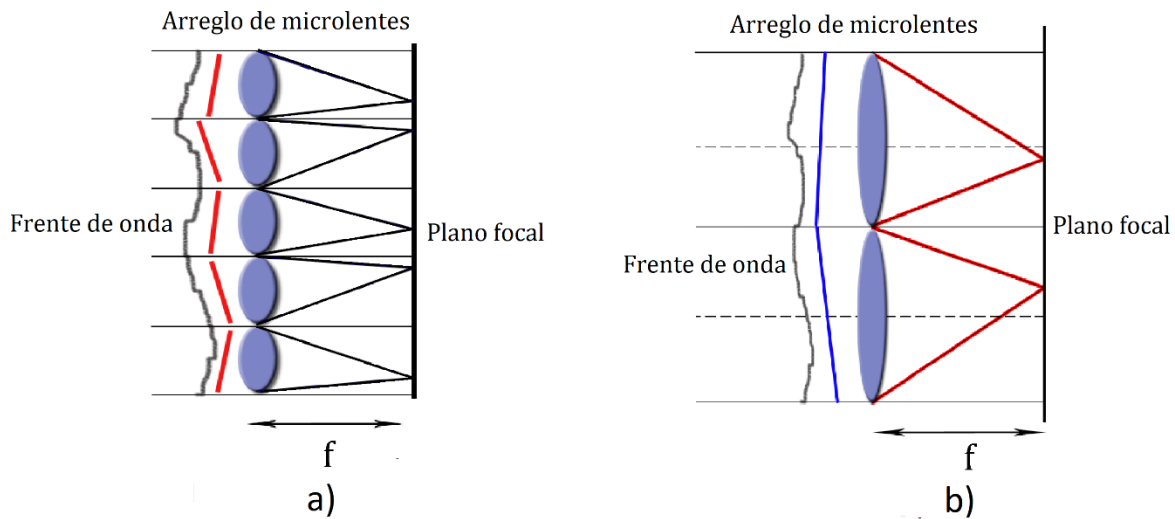


Fig. 2. 2. El ángulo máximo que puede ser determinado mediante el uso de una lente es  $S_{max} = \frac{a/2}{f}$  [7].

Es claro que cuando uno desea medir un frente de onda este no necesariamente es plano. En este caso aún es posible medir este frente de onda irregular si simplemente se coloca un arreglo de lentes tal y como se observa en la Fig. 2. 3. En este caso cada lente analiza una pequeña porción del frente de onda total. De aquí puede observarse un compromiso de este sistema. Para tener una mejor resolución en la estimación del frente de onda es necesario colocar un número mayor de lentes tal y como se observa en la Fig. 2. 3a. Esto significa básicamente que el diámetro de las lentes debe disminuir pero esto disminuye a su vez el intervalo dinámico, Ec. 2. 2. De aquí que uno debe sacrificar intervalo dinámico si se desea aumentar la resolución de las medidas de la pendiente del frente de onda y viceversa.



**Fig. 2. 3.** Para medir un frente de onda irregular puede utilizarse un arreglo de lentes. En este caso cada lente determina la pendiente de una porción del frente de onda que puede ser determinada por el correspondiente desplazamiento del punto focal dentro de cada región asignada a cada lente. a) Un mayor número de lentes aumenta la resolución en la medida de la pendiente. b) Un menor número de lentes disminuye la resolución pero aumenta el intervalo dinámico [7].

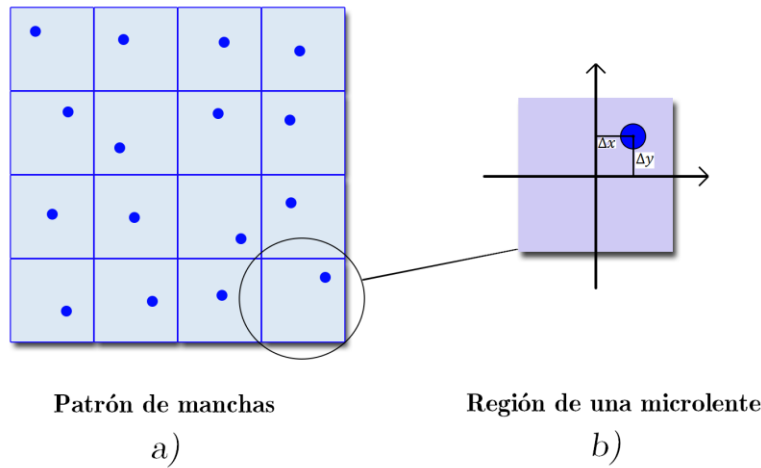
Como ya se mencionó la medición del frente de onda puede ser determinada a partir de la medición de sus pendientes las lentes en el sensor Shack Hartman permiten evaluar

estas pendientes a través del desplazamiento de los puntos focales en plano focal. Para determinar estas pendientes es necesario calcular la posición de los puntos en su región correspondiente. Esto usualmente se realiza mediante el uso de una cámara CCD que se coloca en el plano focal para tener una imagen del patrón de manchas generado por el arreglo de lentes. A partir de esta imagen el siguiente paso es determinar los desplazamientos de los puntos en el plano  $xy$ . Esta operación usualmente se realiza mediante el cálculo del centro de masa que está definido mediante las siguientes ecuaciones:

$$\Delta x = \frac{\int \int_S xI(x, y) dx dy}{\int \int_S I(x, y) dx dy} \quad \text{Ec. 2. 3a}$$

$$\Delta y = \frac{\int \int_S yI(x, y) dx dy}{\int \int_S I(x, y) dx dy} \quad \text{Ec. 2.3b}$$

donde  $I(x, y)$  es la intensidad en el pixel  $(x, y)$  y  $S$  es la región correspondiente a cada lente, ver Fig. 2. 4.



**Fig. 2. 4:** a) El arreglo de lentes del sensor de Shack Hartmann produce un patrón de manchas. b) cada mancha tienen asignada una región con igual dimensión que la lente correspondiente. Con las Ec. 2. 3 puede calcularse la posición del centro de masas para determinar la pendiente del frente de onda con la Ec. 2. 1.

Esta es la teoría convencional para explicar el funcionamiento de un sensor de Shack Hartmann, sin embargo esta teoría no permite explicar algunos fenómenos presentes en el sensor. Una manera más completa de explicar el funcionamiento de este sensor es a través de la llamada óptica de Fourier la cual permite analizar los fenómenos ópticos a través del uso de las transformadas de Fourier. A continuación se realiza una breve revisión de esta teoría.

## 2.2 Análisis del sensor de Shack Hartmann con óptica de Fourier

Es bien sabido que cualquier señal  $f(t)$  puede ser analizada mediante la transformada de Fourier. La transformada de Fourier básicamente permite expresar esta señal  $f(t)$  como una suma infinita de señales armónicas, ver Fig. 2. 5.



Fig. 2. 5. Una función cualquiera  $f(t)$  puede ser analizada como la suma de funciones armónicas con distintas frecuencias y amplitudes [2].

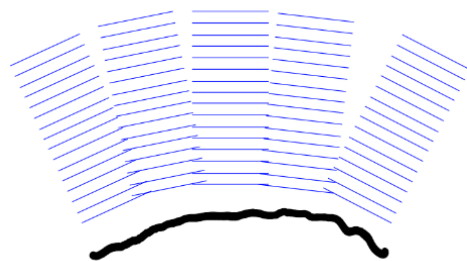


Fig. 2. 6. El principio de la óptica de Fourier se basa en que cualquier onda arbitraria puede ser expresada como la superposición de ondas armónicas planas [2].

Una solución de la ecuación de onda son precisamente ondas armónicas por lo cual parece natural esperar que cualquier otra onda pueda ser expresada como una suma de

estas ondas armónicas debido a los resultados obtenidos con transformadas de Fourier, ver Fig. 2. 6. Estas ideas han sido utilizadas ampliamente y pueden expresarse múltiples fenómenos ópticos a partir de operaciones que implican la transformada de Fourier en dos dimensiones [2].

Uno de los resultados de esta teoría es la difracción en la aproximación de Fresnel. La cual básicamente determina como debe ser el campo eléctrico cuando se ha propagado desde un plano de entrada hasta un plano de salida a una distancia  $z$ . La expresión que determina este campo es [7]

$$U_z(x_z, y_z) = \frac{1}{j\lambda z} e^{\frac{jk}{2z}(x_z^2 + y_z^2)} FF \left\{ U_0(x, y) e^{\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)} \right\} \quad \text{Ec. 2. 4}$$

donde  $U_z(x_z, y_z)$  es el campo en el plano de salida,  $\lambda$  es la longitud de onda,  $z$  la distancia desde el plano de entrada al plano de salida,  $U_0(x, y)$  es el campo en el plano de entrada y finalmente  $k$  es el número de onda igual a  $2\pi/\lambda$ .

Es posible utilizar la Ec. 2. 4 para determinar el campo eléctrico sobre la cámara CCD en un sensor de Shack Hartmann. Para esto podemos ver el arreglo de lentes básicamente como una rejilla de difracción que está conformada por un arreglo de microlentes las cuales permiten analizar el frente de onda de interés. De esta manera podemos escribir la función de transmitancia de este arreglo de microlentes como:

$$t_r(x, y) = t_s(x, y) \otimes \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \delta(y - y_m) \quad \text{Ec. 2. 5}$$

donde  $t_s(x, y)$  es la función de transmitancia de cada microlente,  $\otimes$  denota la operación de convolución y las sumatorias generan el desplazamiento de la función de transmitancia en las coordenadas  $(x_m, y_n)$ . La función de transmitancia de cada microlente se define como:

$$t_s(x, y) = t_l(x, y) \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right) \quad \text{Ec. 2.6}$$

donde  $\text{rect}()$  es la función que genera un pulso cuadrado de ancho  $a$  y  $b$  que determinan las dimensiones de cada microlente en los ejes  $x$ ,  $y$ , respectivamente, mientras que  $t_l(x, y)$  es la función de transmitancia de una sola lente la cual está definida por

$$t_l(x, y) = e^{jkn_0\Delta_0} e^{-j\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} \quad \text{Ec. 2.7}$$

donde  $n_0$  es el índice de refracción del material de la lente,  $\Delta_0$  es el ancho de la lente y  $f$  su distancia focal. De esta manera podemos finalmente reescribir la aproximación de Fresnel, Ec. 2.4, para este caso particular como:

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{1}{j\lambda f} e^{j\frac{k}{2f}(x_f^2+y_f^2)} FF \left\{ U_i(x, y) e^{j\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} \right\} \quad \text{Ec. 2.8}$$

donde  $U_i(x, y)$  es el campo eléctrico inmediatamente después del arreglo de microlentes y  $U_f(x_f, y_f)$  es el campo eléctrico en el plano de salida colocado a una distancia  $f$  que es la distancia focal de las microlentes.  $U_i(x, y)$  está definido como:

$$U_i(x, y) = U_{wf}(x, y) t_r(x, y) \quad \text{Ec. 2.9}$$

donde  $U_{wf}(x, y)$  es el campo eléctrico al cual se le desea evaluar su frente de onda. Finalmente la cámara CCD lo que detecta es la intensidad de esta onda la cual está definida por:

$$I_f(x_f, y_f) = U_f(x, y) U_f^*(x, y) \quad \text{Ec. 2.10}$$

donde  $U_f^*$  es el complejo conjugado del campo en el plano focal (plano de salida).

De esta manera podemos entonces modelar el funcionamiento del sensor de Shack Hartman de la siguiente forma:

1. Generamos el frente de onda a analizar.

2. Generamos la función de transmitancia de la rejilla de microlentes, Ec. 2. 7.
3. Calculamos la transformada de Fourier del producto de  $e^{\frac{jk}{2f}(x^2+y^2)}$  con las funciones en el punto uno y dos, Ec. 2. 8.
4. Finalmente se determina el patrón de manchas con la ecuación Ec. 2. 10.
5. A partir del patrón de manchas para cada región de las microlentes simuladas, se determina el desplazamiento de la mancha mediante las Ec. 2. 3.
6. Finalmente se determinan las matrices con las pendientes en la dirección  $x$  y  $y$  con la Ec. 2. 1.

Queremos realizar la simulación de este dispositivo en la computadora, para esto es necesario desarrollar un programa que lleve a cabo todos los pasos descritos anteriormente. A continuación se describen los pormenores de esta implementación.

# Capítulo 3

---

## *Simulación del sensor Shack Hartman*

En este capítulo se describen los pasos necesarios para llevar a cabo la simulación de un sensor de Shack Hartmann con las ideas descritas en el capítulo anterior. Esta implementación consiste básicamente del uso de la transformada de Fourier en su versión discreta. Particularmente se hará uso del algoritmo *FFT* (Fast Fourier Transform) por lo que se presentaran algunas relaciones importantes entre el dominio original de la función bajo análisis y la función en el dominio de Fourier.

### *3.1 Transformada de Fourier Discreta*

La transformada de Fourier de una función en 2D se define como:

$$F(v_x, v_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(v_x x + v_y y)} dx dy \quad \text{Ec. 3. 1}$$

con  $F(v_x, v_y)$  la transformada de Fourier de  $f(x, y)$ .

Dado que estamos interesados en la simulación computacional del sensor de Shack Hartmann es necesario utilizar la versión discreta de Ec. 3. 1. Se podría derivar la versión discreta de la Ec. 3. 1, sin embargo es una herramienta de análisis matemático tan útil que aparece prácticamente en cualquier lenguaje de programación. Particularmente el algoritmo llamado de la *FFT* (Fast Fourier Transform) es un algoritmo optimizado para eficientar los tiempos de ejecución de esta función. En este trabajo utilizaremos este algoritmo para determinar la transformada de Fourier.

El algoritmo de la *FFT* solo realiza la transformada de Fourier discreta de una lista de números. Esto significa que es necesario determinar aparte el intervalo de frecuencias.

Para realizar esto deben recordarse las siguientes relaciones entre la función en el dominio original y la función en el dominio de Fourier. Por sencillez se explican en 1D pero pueden ser fácilmente generalizadas al caso 2D.

Si tenemos una función discreta  $f(m\Delta x)$ , con  $m$  un entero y  $m \in [0, M]$ , podemos definir el intervalo de medición como  $X_l = M\Delta x - 0\Delta x = M\Delta x$ . El intervalo de frecuencias para la transformada de Fourier de esta función puede ser determinado de la siguiente forma:

$$\Delta v = \frac{1}{X_l} \quad \text{Ec. 3.2}$$

Lo que define la resolución espectral de la transformada, mientras que si el número de datos de  $f(m\Delta t)$  es par, entonces los valores máximos del intervalo de frecuencias se definen por:

$$v_{max}^+ = \left(\frac{M+1}{2} - 1\right) \Delta v \quad \text{Ec. 3.3a}$$

$$v_{max}^- = -\left(\frac{M+1}{2}\right) \Delta v \quad \text{Ec. 3.3b}$$

mientras que, si el número de datos es impar entonces:

$$v_{max}^+ = \left(\frac{M}{2}\right) \Delta v \quad \text{Ec. 3.4a}$$

$$v_{max}^- = -\left(\frac{M}{2}\right) \Delta v \quad \text{Ec. 3.4b}$$

Estos resultados se ejemplifican de manera gráfica en la Fig. 3.1.

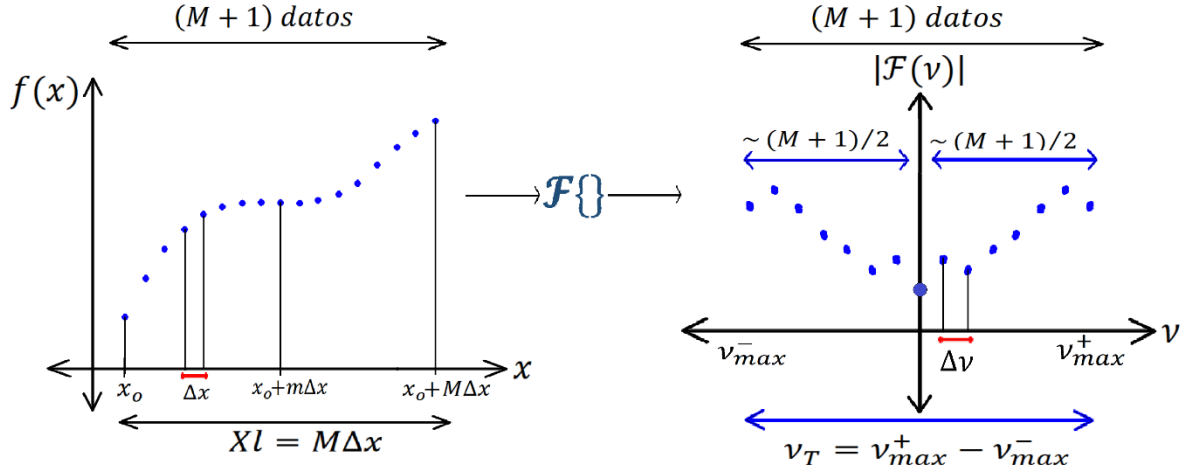


Fig. 3. 1. El algoritmo de la FFT solo determina la transformada de Fourier de una lista de números, por lo que es necesario determinar aparte el intervalo de frecuencias. a) Función discreta en el dominio original. b) Transformada de Fourier de la función en a.

Estas relaciones son importantes, porque para la simulación que se desea realizar, el patrón de manchas sobre la cámara CCD es obtenido básicamente mediante una transformada de Fourier. Esto significa que las unidades que debemos utilizar para expresar los resultados de las Ec. 2. 8 y Ec. 2. 10 deben ser frecuencias espaciales. Sin embargo de la teoría de la óptica de Fourier sabemos que cada frecuencia espacial obtenida con la transformada está relacionada con sus respectivas coordenadas espaciales mediante el factor  $\lambda f$ , en otras palabras sabemos que las coordenadas en plano de salida son [3]

$$x_f = v_x f \lambda \quad \text{Ec. 3. 5a}$$

$$y_f = v_y f \lambda \quad \text{Ec. 3.5b}$$

A continuación se describe como se utilizó el algoritmo de la *FFT* para hacer la simulación del sensor de Shack Hartmann.

### ***3.2 Simulación del sensor de Shack Hartmann***

Para realizar la simulación del sensor de Shack Hartmann es necesario realizar cuatro pasos fundamentales:

1. Determinación de los intervalos espaciales para simular el plano focal que contiene las manchas generadas por las microlentes. La idea que proponemos es que las manchas cubran por completo el área de la simulación.
2. El algoritmo que permite crear la función de transmitancia del arreglo de microlentes, Ec. 2. 5.
3. Cálculo del campo eléctrico en el plano focal y a partir del campo la intensidad, Ec. 2. 8 y Ec. 2. 10.
4. Finalmente el cálculo de los centroides de cada mancha en el plano focal en su región correspondiente para determinar la pendiente del frente de onda, Ec. 2. 1 y Ec. 2. 3.

A continuación se describen los detalles de cada uno de estos puntos.

#### **3.2.1 Intervalos espaciales de simulación**

Dado que estamos interesados en simular el patrón de manchas que se genera por la rejilla de microlentes a través de la Ec. 2. 8 sabemos entonces que si tenemos una rejilla de  $N \times N$  microlentes cuadradas con arista  $a$  entonces la región espacial que se desea simular debe ser de  $Na \times Na$ . Esto significa que la arista de la región a simular es  $X_f$ :

$$X_f = aN = \lambda f \nu_T \quad \text{Ec. 3. 6}$$

donde  $\nu_T$  es intervalo total de frecuencias obtenido en la transformada de Fourier que es igual a:

$$v_T = v_{max}^+ - v_{max}^- = M\Delta v \quad \text{Ec. 3.7}$$

en donde no importa si se utiliza la Ec. 3.3 o la Ec. 3.4, por lo tanto la Ec. 3.6 puede escribirse como:

$$X_f = M\lambda f \Delta v \quad \text{Ec. 3.8}$$

Esta última ecuación puede ser escrita como:

$$X_f = \frac{M\lambda f}{X_l} \quad \text{Ec. 3.9}$$

Si despejamos  $X_l$  de la Ec. 3.9 llegamos entonces a:

$$X_l = \frac{M\lambda f}{aN} \quad \text{Ec. 3.10}$$

En donde se ha utilizado el hecho de que  $X_f = aN$ . La Ec. 3.10 es muy importante, porque define la relación que existe entre las dimensiones del plano de entrada ( $X_l$ ) y el plano de salida ( $X_f$ ) de manera tal que en el plano de salida se aproveche toda el área de simulación para la representación de las manchas producidas por la rejilla de microlentes. Todas estas ideas se representan gráficamente en la Fig. 3.2. De esta manera se garantiza que la rejilla computacional del plano de salida (plano focal) es cubierto enteramente por el patrón de manchas simulado que se genera por la interacción del frente de onda bajo análisis y la rejilla de microlentes del sensor de Shack Hartmann.

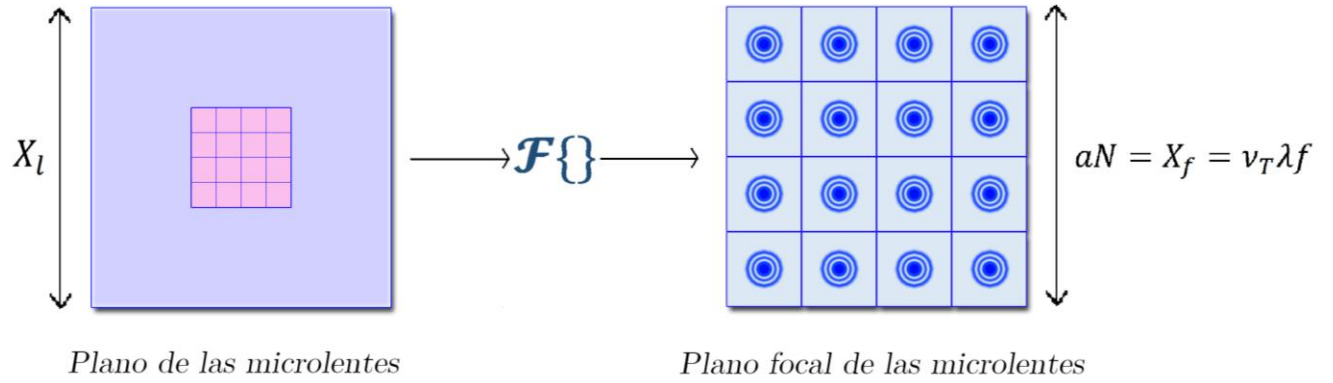
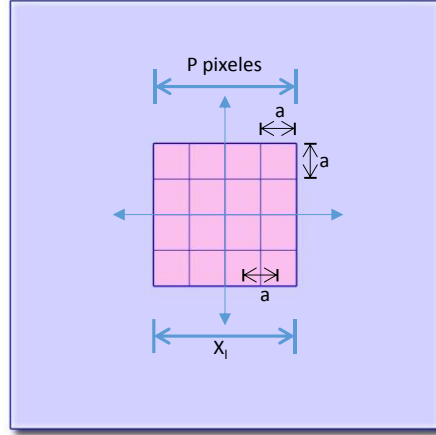


Fig. 3. 2. La relación de las dimensiones de los planos de entrada y de salida en nuestro programa se ha establecido de tal manera que la matriz computacional abarca por completo el plano de salida (patrón de manchas), para lograr esto debe cumplirse la relación descrita por la Ec. 3. 10.

Describamos ahora la relación matemática que describe la posición de las  $N \times N$  microlentes que componen la rejilla de difracción.

### 3.2.2 Función de transmitancia del arreglo de microlentes

Como ya se mencionó la función de transmitancia de la rejilla de microlentes está definida por la Ec. 2. 5. Esta expresión básicamente lo que expresa es que existen lentes con una geometría rectangular de  $axb$  unidades de longitud (funciones  $rect()$ ) cuyos centros están desplazados en las coordenadas  $(x_m, y_n)$ . Por sencillez vamos a suponer que las lentes son cuadradas con arista  $a$ , y que no existe separación entre ellas por lo que la distancia entre sus centros es también  $a$ , ver Fig. 3. 3.



**Fig. 3. 3.** Para simular el arreglo de microlentes se propone utilizar una malla cuadrada de  $P \times P$  píxeles. En esta malla se simulará un área de  $X_l \times X_l$  unidades cuadradas de longitud.

Como se observa a partir de la Fig. 3. 4, si tenemos una rejilla cuadrada de microlentes con  $N$  (impar) lentes por lado, entonces las coordenadas de la lente superior izquierda debe ser  $(-a(N-1)/2, a(N-1)/2)$ . Y por lo tanto la lente  $(n, m)$  debe tener coordenadas  $(-a(N-1)/2 + na), a(N-1)/2 + ma)$  donde  $n$  y  $m$  son enteros en el intervalo  $[0, N-1]$ . Lo cual puede ser implementado fácilmente con un ciclo *for* en el programa a desarrollar. De esta manera podemos decir que las lentes deben estar centradas en las coordenadas  $(x_n, y_m)$  definidas por:

$$x_n = -\frac{a(N-1)}{2} + na \quad \text{Ec. 3. 11a}$$

$$y_m = \frac{a(N-1)}{2} + ma \quad \text{Ec. 3. 11b}$$

con  $n, m$  números enteros que cambian desde 0 hasta  $N-1$

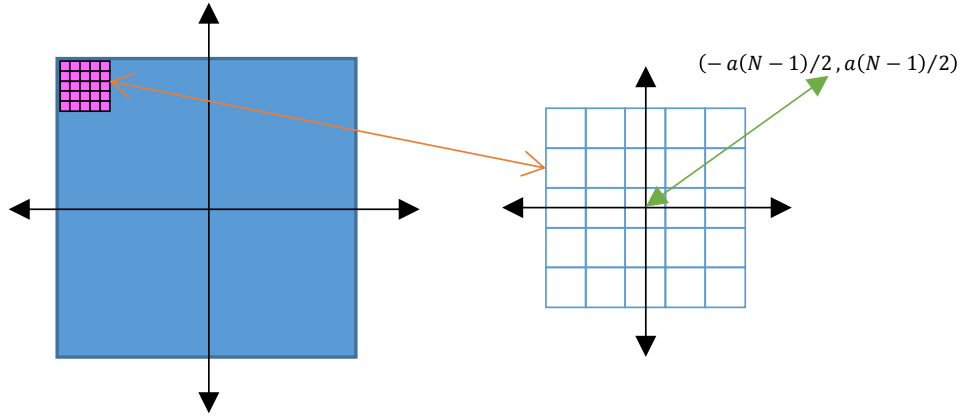


Fig. 3. 4. Si la rejilla de microlentes tiene un número impar de microlentes por arista y este número es  $N$  entonces las coordenadas del centro de la microlente en la esquina superior izquierda debe ser  $(-a(N-1)/2, a(N-1)/2)$ .

De esta manera podemos calcular la función de transmitancia de la rejilla de microlentes, Ec. 2. 5, como:

$$t_r(x, y) = e^{jkn_0\Delta_0} e^{-j\frac{k}{2f}((x-x_n)^2+(y-y_m)^2)} \text{rect}\left(\frac{x-x_n}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y-y_m}{a}\right) \quad \text{Ec. 3. 12}$$

Con  $x_n, y_m$  definidas por las Ec. 3. 11.

A continuación se describe como se determina el campo eléctrico en el plano focal, plano de la CCD.

### 3.2.3 Determinación del campo óptico en el plano de la CCD

Una vez que ya hemos determinado las dimensiones de las regiones espaciales que van a ser simuladas en la malla computacional de  $PXP$  pixeles y la función de transmitancia de la rejilla de microlentes debemos determinar el campo eléctrico que observaría la cámara CCD, el cual corresponde al campo óptico del plano focal de la rejilla de microlentes. Para esto, debemos evaluar la Ec. 2. 8. Antes de poder evaluar esta ecuación es necesario determinar el valor del frente de onda que se desea analizar. Esto

básicamente significa que definimos el frente de onda como una superficie, digamos  $WF(x, y)$  y por lo tanto la onda que se desea analizar puede expresarse como:

$$U_i(x, y) = A_i e^{jkWF(x, y)} \quad \text{Ec. 3. 13}$$

donde  $A_i$  es la amplitud de la onda que se quiere analizar y  $k$  es el número de onda.

De esta manera para determinar el campo eléctrico en el campo focal calculamos la siguiente expresión:

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{1}{j\lambda f} e^{\frac{jk}{2f}(x_f^2 + y_f^2)} FFT2 \left\{ U_i(x, y) e^{\frac{jk}{2f}(x^2 + y^2)} \right\} \quad \text{Ec. 3. 14}$$

donde  $FFT2\{\}$  es el algoritmo de la transformada de Fourier rápida en dos dimensiones,  $(x_f, y_f)$  son las coordenadas en el plano focal determinadas por los intervalos de las ecuaciones Ec. 3. 3 o Ec. 3. 4. Una vez determinado el campo eléctrico la intensidad del patrón d manchas es simplemente  $I_f(x_f, y_f) = U_f(x_f, y_f)U_f^*(x, y)$ .

A continuación se describe ahora como se realizó el cálculo de los centroides da cada mancha.

### 3.2.4 Cálculo de los centroides

Para determinar el cálculo de los centroides como ya fue mencionado, se utilizará la definición del centro de masas. La integración necesaria presente en las Ec. 2. 3 puede ser estimada con su versión discreta como:

$$\int \int f(x, y) dx dy \approx \sum_n \sum_m f(x_n, y_m) \Delta x \Delta y \quad \text{Ec. 3. 15}$$

Por lo tanto las Ec. 2. 3 en su versión discreta pueden ser evaluados como:

$$\Delta x_n = \frac{\sum_p \sum_q (x_{fp} - x_n) I_f(x_{fp} - x_n, y_{fq} - y_m)}{\sum_p \sum_q I_f(x_{fp} - x_n, y_{fq} - y_m)} \quad \text{Ec. 3. 16a}$$

$$\Delta y_m = \frac{\sum_p \sum_q (y_{fq} - y_m) I_f(x_{fp} - x_n, y_{fq} - y_m)}{\sum_p \sum_q I_f(x_{fp} - x_n, y_{fq} - y_m)} \quad \text{Ec. 3.16b}$$

donde  $p$  y  $q$  son índices que determinan el número de pixeles que están dentro de la región que corresponde a cada microlente de área  $axa$ . Una vez determinados cada uno de los desplazamientos, podemos calcular las pendientes simplemente evaluando las Ec. 2. 1 con los valores obtenidos en las Ec. 3. 16.

Con todas las ideas expuestas anteriormente podemos ahora escribir un programa que nos permite simular el funcionamiento de un sensor de Shack Hartmann. A continuación se presentan los resultados obtenidos con la implementación de dicho programa.

# Capítulo 4

## Análisis y discusión de resultados

En este capítulo se describen y analizan los resultados que se obtuvieron con el programa desarrollado con las ideas presentadas en el capítulo anterior.

### 4.1 Condiciones de simulación

Las simulaciones fueron realizadas bajo las siguientes condiciones:

1. Las regiones simuladas fueron cuadrangulares con una malla de  $512 \times 512$  pixeles.
2. Se ha utilizado que el diámetro de las microlentes fue de  $a = 300 \mu m$ , la distancia focal  $f = 2.5 cm$  y una longitud de onda de  $\lambda = 632 nm$ .
3. El número de lentes en la rejilla fue de  $5 \times 5$  lentes.

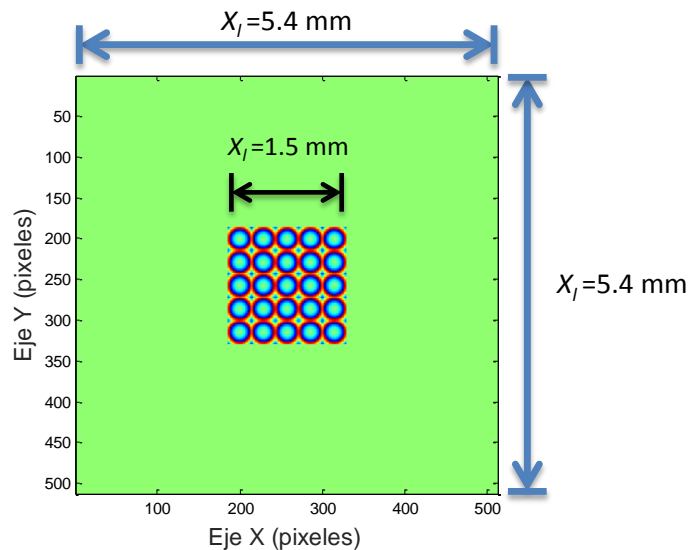
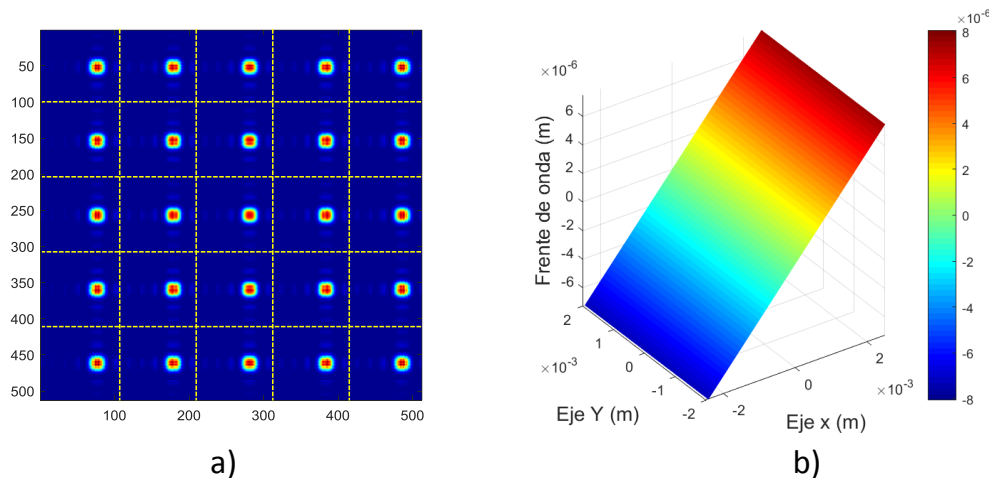


Fig. 4. 1. La malla computacional que se utilizó para simular el frente de onda fue de  $512 \times 512$  pixeles. Con esta rejilla se simuló un área de  $5.4 \times 5.4 \text{ mm}^2$ , lo que permite que el patrón de manchas provocado por la rejilla de microlentes fuese de  $1.5 \times 1.5 \text{ mm}^2$ .

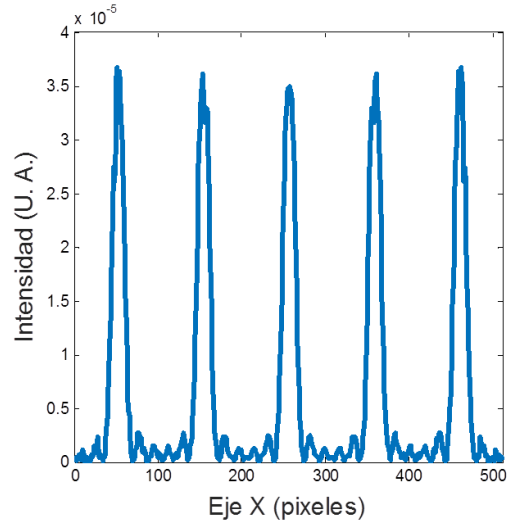
En la Fig. 4. 1 se muestra una imagen con el aspecto de la rejilla de microlentes que se simuló. Como se observa la malla computacional utilizada fue de  $512 \times 512$  pixeles que cubrieron una región de simulación de  $X_i=5.4mm$ , lo que es necesario para simular las manchas de las  $5 \times 5$  lentes de arista  $a = 300\mu m$ .

#### 4.2 Patrón de intensidad simulado (Imagen en la CCD)

Con la simulación de un frente de onda plano en una región de  $5.4 \times 5.4 mm^2$  el programa que simula al sensor de Shack Hartmann generó el patrón de manchas que se muestra en la Fig. 4. 2. Como era de esperarse debido a la inclinación del frente de onda plano todas las manchas están corridas hacia la derecha (el plano está inclinado alrededor del eje  $Y$ ). Contrario a lo que se dice con óptica geométrica, la rejilla de microlentes no produce puntos de luz sino manchas, y no solo eso además aparecen lóbulos laterales alrededor de estas manchas. Estos resultados son imposibles de explicarse mediante la óptica geométrica, y su presencia modifica dramáticamente el desempeño del sensor como se verá más adelante.

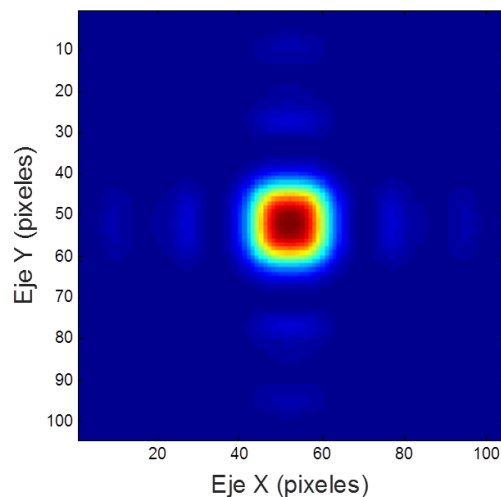


**Fig. 4. 2. Intensidad del patrón de manchas obtenido con el programa desarrollado. El frente de onda que se utilizó fue plano con una inclinación alrededor del eje  $y$ , como era de esperarse las manchas sufrieron un desplazamiento solamente el eje  $x$ . a) Patrón de manchas, b) Frente de onda utilizado (50% de  $S_{max}$ ).**



**Fig. 4. 3.** Distribución de intensidad a lo largo de un renglón en el patrón de manchas. Contrario a lo que pudiera esperarse cada microlente no forma un punto sino una mancha provocada por los efectos de difracción. Además de esta mancha aparecen pequeños lóbulos laterales que no pueden ser explicados a partir de la óptica geométrica.

Para observar con mejor detalle los lóbulos laterales de las manchas principales en la Fig. 4. 3 se muestra el perfil de intensidad en el renglón central de la Fig. 4. 2, en esta figura se observan claramente los lóbulos laterales.



**Fig. 4. 4.** Acercamiento en la región correspondiente a una sola de las manchas. En esta imagen puede notarse más claramente que la rejilla de difracción produce manchas en lugar de puntos y además aparecen lóbulos de intensidad alrededor de esta mancha principal.

### *4.3 Desempeño del sensor en la estimación de las pendientes del frente de onda*

En la Fig. 4. 4 se presenta un acercamiento a la región correspondiente de la lente central de la rejilla. Esta región es cuadrangular con un área de  $300 \times 300 \mu m^2$ . Para ilustrar cualitativamente el desempeño del cálculo de las pendientes de un frente de onda por parte del sensor de Shack Hartmann simulado en la Fig. 4. 5a se observa un frente de onda gaussiano con sus respectivas derivadas en  $X$  y  $Y$  mostradas en las Fig. 4. 5b y c, respectivamente. Como puede observarse los perfiles del frente de onda y de las pendientes están en concordancia en sus variaciones espaciales. La mala calidad de las matrices de las pendientes es debido a la poca cantidad de lentes presentes en la simulación, esto significa básicamente que si fuera necesario tener una mayor resolución en la estimación de las pendientes bastaría con incrementar el número de lentes, en nuestro caso no fue de nuestro interés incrementar esta resolución por lo cual no se hicieron simulaciones con un mayor número de lentes.

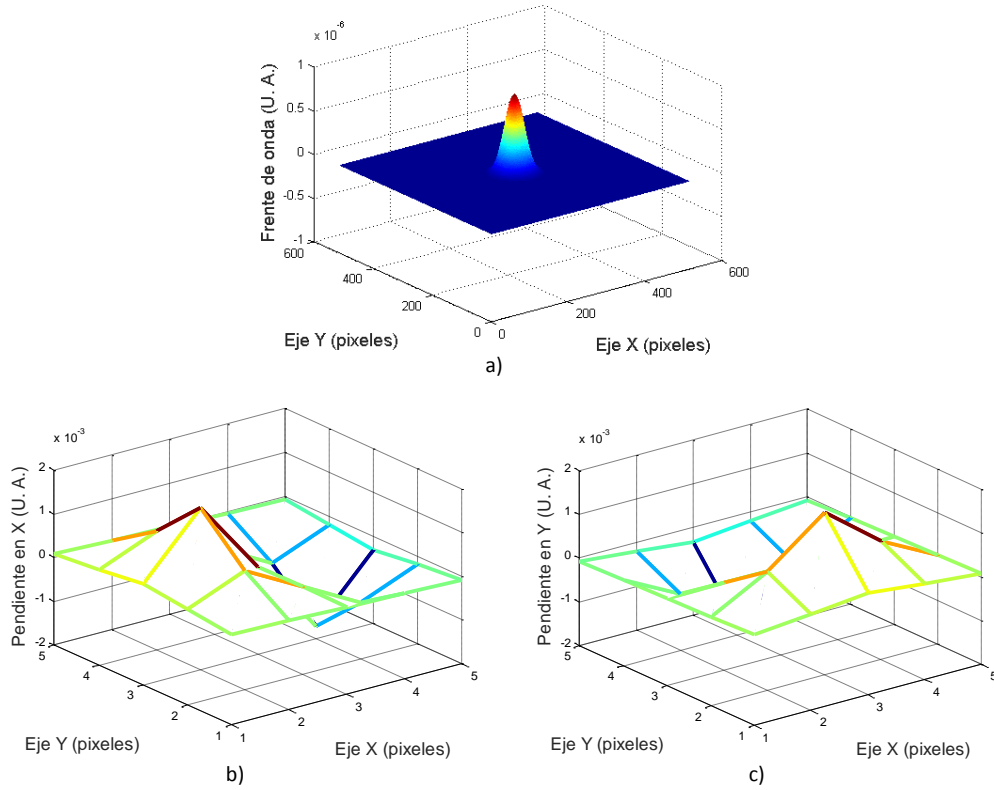
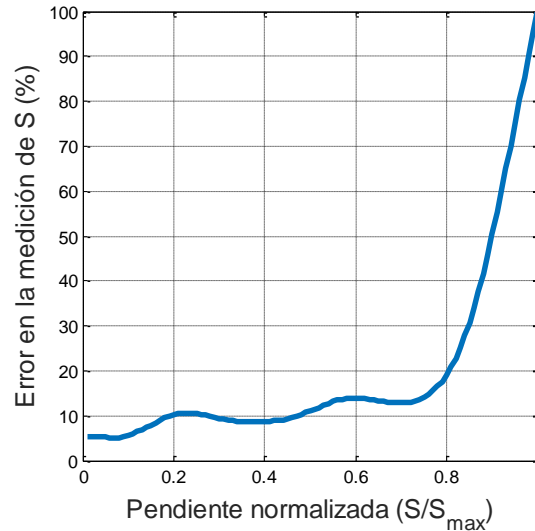


Fig. 4. 5. Desempeño del programa en la estimación de las pendientes del frente de onda. a) Frente de onda con un perfil gaussiano. b) y c) pendientes en  $x$  y  $y$  obtenidas con el programa desarrollado (Ec. 2. 1 y Ec. 3. 16).

Para ilustrar los problemas que son introducidos en el desempeño del sensor de Shack Hartmann debido a la presencia de las manchas y sus lóbulos laterales, se decidió hacer una estimación de la pendiente de un frente de onda plano cuya inclinación fue desde una pendiente igual a cero hasta un valor máximo de su pendiente determinado por la Ec. 2. 2.

En la Fig. 4. 6 se muestran los resultados del error en la estimación de la pendiente obtenida con el sensor de Shack Hartmann simulado comparado con la pendiente real en frente de onda plano, cuyo valor ha sido normalizada con  $S_{max}$ . Como se observa, el hecho de que la rejilla no produzca puntos sino manchas con lóbulos laterales, da como resultado grandes errores en la estimación del cálculo de las pendientes. Estos errores crecen

dramáticamente a medida que la pendiente del frente de onda se acerca a  $S_{max}$ , esto se debe a que la mancha principal empieza a invadir regiones vecinas y a su vez manchas vecinas invaden su región, dando como resultado errores muy grandes. Esto significa que contrario a lo que establece la óptica geométrica, no es posible alcanzar la medida de  $S_{max}$ .



**Fig. 4. 6.** Desempeño en la estimación de las pendientes del frente de onda por un sensor de Shack Hartmann real. Debido a que cada microlente produce una mancha la estimación de la pendiente del frente de onda es errónea. De hecho resulta imposible alcanzar el valor máximo teórico expresado por la Ec. 2. 2.

De hecho la presencia de los lóbulos laterales introduce a una mayor incertidumbre en la estimación de la pendiente, para mostrar esto en el programa se estableció un umbral para la intensidad de las manchas de manera tal que si intensidad se encuentra por debajo de este umbral su contribución de intensidad se considera cero. Como puede observarse a partir de la Fig. 4. 8, el hecho de introducir este umbral, mejora dramáticamente el desempeño del sensor de Shack Hartmann simulado.

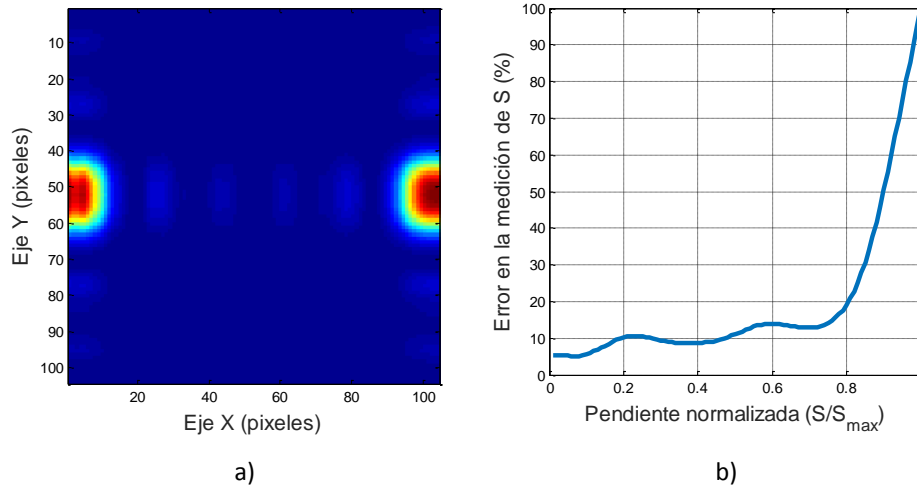


Fig. 4. 7. Dado que cada microlente genera una mancha es imposible alcanzar el valor máximo de pendiente porque cuando esto sucede, parte de la mancha de una lente cualquiera invade la región vecina lo que genera un error en la estimación en el centro de masa.

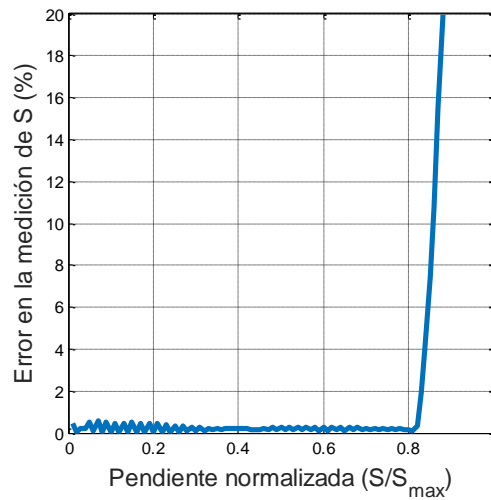
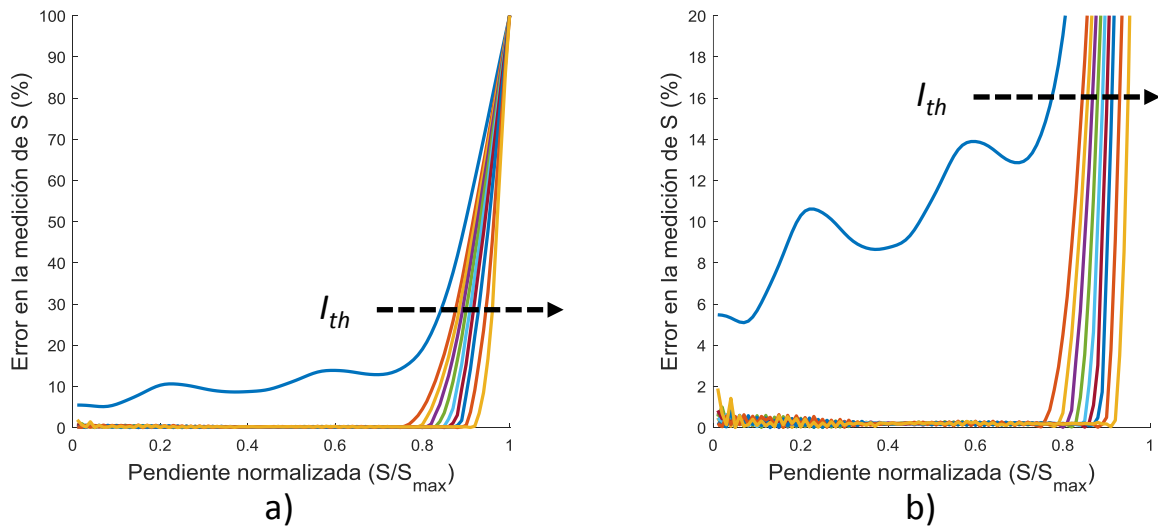


Fig. 4. 8. El error en la estimación de la pendiente puede ser minimizado si se coloca un nivel umbral de intensidad mínima de manera tal que no incluya las intensidades de los lóbulos laterales. En este caso se utilizó como nivel umbral  $I_{max}/3$ .

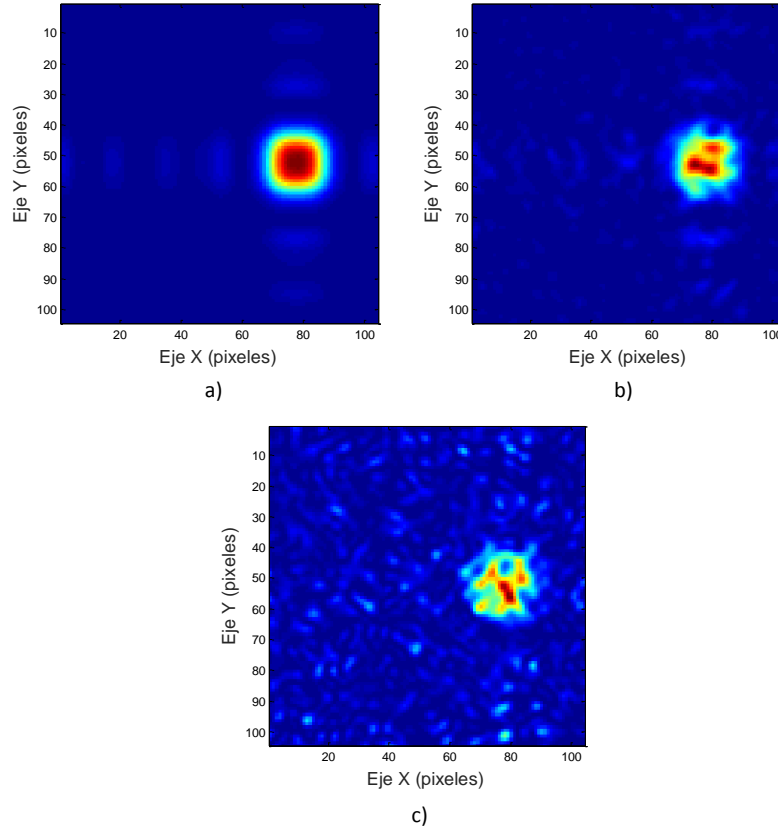
La supresión de los lóbulos hace que el error sea menor al 1%, en prácticamente todo el intervalo de medición real (cerca del 80% de  $S_{max}$ ). Por supuesto ahora surge la interrogante ¿cuál es el valor óptimo de la intensidad umbral? Para contestar esta

pregunta en la Fig. 4. 9 se graficaron los errores porcentuales en la estimación de la pendiente para distintos valores de la intensidad umbral. Estos fueron desde 0 hasta el 90% de intensidad máxima del pico de las manchas. Puede verse al aumentar el valor umbral puede ganarse un poco en el intervalo dinámico sin embargo empiezan a aparecer errores en valores bajos de las pendientes. Así que existe un compromiso entre el intervalo dinámico y el valor de error que uno desea permitirse.



**Fig. 4. 9.** Dependencia del error en la estimación de la pendiente del frente de onda para distintos valores de la intensidad umbral. a) La intensidad umbral cambió desde 0 hasta 90% de la intensidad máxima con saltos de 10%. b) un acercamiento de a).

Nuevamente, estos resultados no pueden ser explicados por la óptica geométrica. Por otra parte a pesar de que existe una minimización en la incertidumbre de la estimación de las pendientes sigue siendo inalcanzable el límite máximo establecido por la óptica geométrica, como puede observarse de la Fig. 4. 8, aún en la mejor de las condiciones uno aspira a medir hasta poco más del 80% de  $S_{max}$ , este límite se debe básicamente a el ancho de la mancha producida por la difracción de la rejilla de microlentes.



**Fig. 4. 10.** Cuando existe ruido en la onda bajo análisis éste deforma el perfil de las manchas haciendo que sea más complicada la estimación de las coordenadas del centroide. En la figura de muestran los efectos del ruido cuando: a) no hay ruido, b) la SNR=200 y c) SNR=100.

Por último este programa nos permite observar algunos otros efectos del ruido en las señales que procesa el sensor de Shack Hartmann. Por ejemplo cuando existe un ruido en la fase del frente de onda, el efecto neto de esta perturbación es una degradación en la calidad de las manchas formadas por la rejilla de microlentes. Esto puede observarse claramente en la Fig. 4. 10, en donde se nota que al aumentar el nivel de ruido la mancha principal se deforma de manera notable hasta el punto en que el patrón de intensidad parece más un patrón de moteado con un perfil prácticamente aleatorio. Esto tiene como consecuencia que sea más complicado determinar el desplazamiento de la mancha en su región correspondiente, y por lo tanto en un error adicional en la estimación de la pendiente del frente de onda.

# Conclusiones

---

Basados en los resultados obtenidos con el programa descrito en los capítulos anteriores podemos llegar a las siguientes conclusiones generales de este trabajo:

- Se tiene un programa completamente funcional que permite simular el desempeño de un sensor de Shack Hartmann formado por un arreglo de microlentes y una cámara CCD.
- El programa puede ser modificado para que entregue ya sea el patrón de intensidad de las manchas provocado por la rejilla de microlentes (imagen vista por la cámara CCD) o que simplemente entregue las matrices de la evaluación de las pendientes en la dirección de los ejes  $X$  y  $Y$ .
- El programa también puede entregar, de ser necesario, la función de transmitancia de la rejilla de microlentes.
- El programa desarrollado permitió observar los efectos de la difracción producida por la rejilla de microlentes, los cuales se traducen en una disminución del intervalo dinámico de medición que la teoría de la óptica geométrica establece. Particularmente encontramos que en el mejor de los casos solo puede alcanzarse un 80% del intervalo teórico basado en la óptica geométrica. Por otra parte los efectos de los lóbulos laterales pueden eliminarse mediante la utilización de un nivel de umbral en la intensidad dando como resultado que las incertidumbres en las mediciones de las pendientes

sean menores del 1% en prácticamente todo el intervalo útil de medición.

- Finalmente se mostraron de manera general que los efectos de ruido de fase en el frente de onda evaluado se traduce en una degradación del perfil de las manchas producidas por las microlentes, lo que introduce incertidumbres adicionales en la estimación de las pendientes del frente de onda.

Es importante recalcar que el programa funciona de manera automática en la elección del número de lentes en el sentido de que el patrón de manchas simulado abarca por completo la malla computacional que se haya elegido. Puede elegirse el número de lentes que se desee sin embargo, este parámetro no puede incrementarse de manera indiscriminada, porque actualmente en el programa escrito el número de pixeles utilizado en las simulaciones ha sido siempre un número constante (512x512 pixeles). Esto significa que a medida que se incrementa el número de microlentes la cantidad de pixeles por microlente (frecuencia de muestreo) disminuye lo que básicamente significa que en algún valor límite se violará el teorema del muestreo dando como consecuencia que los resultados sean erróneos. Esto puede resolverse fácilmente incrementando el número de pixeles, digamos en lugar de tener  $2^9 \times 2^9$  pixeles puede usarse  $2^{10} \times 2^{10}$  pixeles, dando así un nuevo intervalo de medición. Por supuesto que esta solución no es elegante y debe ser estudiada para tener un programa completamente automático, aspecto que se propone como un trabajo a futuro

# *Bibliografía*

---

- [1]. Antonio, B. T. (2019). Desarrollo de un Sistema de Óptica Adaptiva. Puebla, México: Tesis Doctoral.
- [2]. E. A. Saleh, C. T. (1991). Fundamentals of Photonics. New York: A JOHN WILEY & SONS, INC., PUBLICATION.
- [3]. Goodman, W. J. (1996). Introduction to Fourier Optics. United States: McGraw-Hill.
- [4]. Jesús, A. C. (mayo 2009). Prototipo de sistema de óptica adaptativa basado en un espejo deformable de membrana para aplicación astronómica. Granada: Editorial de la Universidad de Granada.
- [5]. M.A. Betanzos-Torres, J. C.-M.-A.-P. (2018). Adaptive optics system simulator. Optics and Laser Technology, 0030-3992.
- [6]. Porter Jason, M. Q. (2006). Adaptative Optics for Vision Science. Canada: A JOHN WILEY & SONS, INC., PUBLICATION.
- [7]. Yang Dai, F. L. (2007). Analysis on Shack-Hartmann wave-front sensor with Fourier optics. Optics & Laser Technology, 1374-1379.