BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

TÍTULO DE LA TESIS

Nuevo Método de Solución del Oscilador Isotónico Temporal

OCTUBRE 2019

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE
Licenciado en Física

PRESENTA
Miriam Arenas Alvarez

DIRECTOR DE TESIS
Dr. Mario Alberto Maya Mendieta

PUEBLA, PUE.

Dedicatoria

A mi hijo Stephan, a mis padres Benigno y Esther.

Agradecimientos

En el proceso de mi formación académica tuve la gran dicha de contar con grandes personas que me acompañaron y brindaron su apoyo para poder lograr mis metas y seguir adelante. Agradezco infinitamente al Dr. Mario Alberto Maya Mendieta por sus enseñanzas, tiempo, dedicación y motivación, que ayudo a encaminar mi gusto por la ciencia y por ello fue mi guía en este trabajo.

A mis padres Ma. Esther Alvarez y Benigno Arenas por su apoyo incondicional, amor, entrega y entusiasmo. Les agradezco por la gran labor que hicieron por estar siempre a mi lado y aconsejar en los momentos más difíciles de mi vida, por ser mis amigos y cómplices, los amo. A mis hermanos Ariana, Arturo y Areli por llenar de alegría mi vida, por su cariño y amor.

A mi hijo por que es la persona más importante de mí, por su amor, esfuerzo, compañía y por esa gran felicidad que me genera. A Gonzalo.

A mis amigos Jose Luis, Adriana, Viridiana y Angel por esa gran amistad y apoyo que me han brindado. Por supuesto a Carolina Moreno por ayudarme y guiarme en esta esta nueva etapa de mi vida.

A los académicos de la Facultad de Ciencias Físico - Matemáticas, quienes han participado con su entrega y compromiso compartiendo sus conocimientos. Gracias a mis sinodales por su tiempo y orientación en este trabajo.

A todas las personas que participaron de alguna manera en este camino y proyecto, a todas ellas Gracias.

Introducción

La ecuación central de la mecánica cuántica es la ecuación diferencial de Schrödinger, la cual es de segundo orden, lineal y homogénea, para sistemas en los que la partícula está confinada por el potencial dado. Como es conocido, sólo para estos sistemas aparece la cuantización de la energía. El método tradicional para resolver esta ecuación es el de series de potencias.

El método de factorización [9], llamado también método de Dirac, es alternativo al de series de potencias. Tiene varias ventajas, una de ellas es que sólo hay que resolver una ecuación diferencial de primer orden, en contraste con la ecuación de Schrödinger. Es esencialmente algebraico, pues utiliza los conceptos del álgebra lineal y de las transformaciones lineales de vectores. Como veremos a lo largo de este trabajo, el método algebraico como técnica de cálculo es muy sencillo. Sólo es aplicable a sistemas con confinamiento, es decir, que la partícula en cuestión esta atrapada por el potencial, y como se sabe, solo en este caso existe la cuantización de la energía. La factorización, basada en ciertos operadores llamados de ascenso y descenso u operadores de escalera, permite una interpretación física mas clara y directa de la cuantización. Casi desde el comienzo de la mecánica cuántica, el método ha sido usado continuamente como linea de investigación para encontrar soluciones exactas de la ecuación de Schrödinger. Es interesante el comentario de la Ref. [6] "El método basado en los operadores de escalera es diabólicamente inteligente y divertido"

En este trabajo de tesis utilizamos el método de factorización, pero con la novedad de que introducimos el tiempo en los operadores de escalera, partiendo de un hamiltoniano que depende del tiempo por medio de la frecuencia variable $\omega(t)$ de un oscilador armónico simple. A través de un riguroso análisis tanto matemático como físico, establecemos la manera en que el tiempo entra en los operadores por medio de una función $f(t)$.

Una vez obtenidos lo operadores de escalera, los aplicamos a tres tipos de osciladores:

1. El oscilador armónico simple pero ahora con frecuencia variable.
2. El oscilador isotónico, el cual tiene una barrera infinita en su centro de fuerzas, por lo que también es llamado oscilador armónico singular.
3. El oscilador que nosotros llamamos de tipo Mielnik, el cual es una generalización de los operadores de escalera y por lo tanto de todo tipo de osciladores.

Nuestra formulación es más general, pues consideramos que puede incluir a más osciladores, a través de la elección particular de la función $f(t)$.

Como ejemplos de aplicación de nuestros resultados, analizamos el caso de los sistemas 1 y 2 estacionarios, es decir, cuyo hamiltoniano no depende del tiempo, y finalmente la manera de usar nuestros resultado para establecer una transformación de operadores para analizar teóricamente el uso de frecuencia variable $\omega(t)$ para experimentos actuales de alta precisión sobre átomos, moléculas, espines y otros objetos, de manera individual [10].

Índice general

Nuevo Método de Solución del Oscilador Isotónico Temporal

Miriam Arenas Alvarez

Octubre 2019

Capítulo 1

Fundamentos de la mecánica cuántica

1.1. Introducción

En la mecánica clásica el movimiento de un objeto sujeto a una fuerza $\vec{F}$ está descrito por la ecuación de movimiento de Newton, cuya solución es la posición $\vec{r}(t)$. Conocida esta función y las condiciones iniciales del movimiento, es posible saber todo sobre ese movimiento en cualquier instante de tiempo y con toda precisión. Cuando se hace el experimento para comprobar lo que dice la ecuación de Newton, la confirmación de teoría y observación es total. En este sentido la ecuación de Newton permite una descripción determinista de los fenómenos físicos.

Necesitamos una teoría también con un propósito parecido, pero tomando en cuenta que ahora la acción de observar (medir) altera el objeto en estudio. En este sentido podemos decir lo que es un objeto pequeño: es aquel que al observarlo, se perturba, de manera que no es posible predecir con precisión en que estado estará después de esa observación.

Es claro que la ecuación de Newton no puede ser usada para estudiar objetos pequeños, como moléculas, átomos y otros mas.

Es entonces cuando surge la necesidad de una descripción teórica nueva para estudiar objetos pequeños: la mecánica cuántica. Ahora la ecuación de movimiento correcta es la ecuación de Schrödinger, la cual no solo toma en cuenta a la perturbación que produce la medición, sino otro factor que no se presenta en la mecánica clásica, el comportamiento ondulatorio de todo objeto, lo que dá lugar al principio de superposición: La combinación lineal de estados dinámicos también es un estado posible. Esto está contenido en la ecuación de Schrödinger, pues es una ecuación diferencial lineal, y la suma de soluciones, llamadas funciones de onda, también es una solución, otra función de onda. Es natural entonces que la herramienta matemática básica de la mecánica cuántica sea el álgebra lineal.

La mecánica cuántica tiene diferentes formulaciones en la manera de manejar el tiempo: se habla de la representación de Schrödinger en la que el tiempo aparece en la función de onda. También se tiene la representación de Heisenberg en la que el tiempo aparece en las observables. En la practica se usa una representación mixta, que es la que utilizamos en este trabajo de tesis.

A continuación revisamos los aspectos de la ecuación de Schrödinger que son necesarios para para lo que sigue.

1.2. Ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger es la base de una de las representaciones ampliamente utilizadas de la teoría cuántica. La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es

$$i\hbar\frac{\partial\Psi\left(x,y,z,t\right)}{\partial t}=\widehat{H}\left(x,y,z,t\right)\Psi\left(x,y,z,t\right) \tag{1.1}$$

donde la solución $\Psi\left(x,y,z,t\right)$ es llamada función de onda, depende de la posición $\left(x,y,z\right)$ y del tiempo t. $\widehat{H}\left(x,y,z,t\right)$ es el operador hamiltoniano; es decir, es el operador de energía en la representación de Schrödinger, ya que puede haber fuerzas dependientes del tiempo que actúen en el sistema.

El hamiltoniano clásico es la suma de la energía cinética y la energía potencial.

$$H_{clasico}=\frac{P^2}{2m}+V$$

donde P es el momento clásico y V es la energía potencial.

El operador hamiltoniano de la mecánica cuántica es obtenido reemplazando las variables dinámicas clásicas de los operadores cuánticos correspondientes. En particular, el operador asociado al momento lineal p es

$$\widehat{p}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \tag{1.2}$$

En una dimensión, el operador hamiltoniano es

$$\widehat{H}=\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V\left(x\right). \tag{1.3}$$

En tres dimensiones, el hamiltoniano es

$$\widehat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x, y, z), \tag{1.4}$$

donde el operador Laplaciano ∇^2 es

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1.5}$$

1.3. Solución estacionaria

Cuando el hamiltoniano es independiente del tiempo , es decir, $H(x, y, z)$, la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo se puede separar en partes independientes del tiempo haciendo la sustitución.

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) F(t). \tag{1.6}$$

La función de onda se toma como un producto de una función independiente del tiempo $\psi(x, y, z)$, y una función dependiente del tiempo, $F(t)$. Sustituyendo la ecuación (1.6) en la ecuación (1.1) tenemos

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, y, z) F(t) = \widehat{H}(x, y, z)\psi(x, y, z) F(t). \tag{1.7}$$

En el lado izquierdo, ψ no es una función del tiempo, por lo que no es afectada por la derivada. En el lado derecho, $\widehat{H}$ no depende de t, moviendo $F(t)$ al lado izquierdo de $\widehat{H}$. La ecuación (1.7) puede escribirse como

$$i\hbar\psi(x, y, z)\frac{\partial}{\partial t}F(t) = F(t)\widehat{H}(x, y, z)\psi(x, y, z), \tag{1.8}$$

dividiendo entre $\Psi = \psi F$, tenemos

$$\imath\hbar\frac{1}{F(t)}\frac{dF}{dt} = \frac{\widehat{H}(x, y, z)\psi(x, y, z)}{\psi(x, y, z)}. \tag{1.9}$$

El lado izquierdo de la ecuación (1.9) depende solo de t y el lado derecho depende de una coordenada espacial. Cada lado de la ecuación (1.9) es igual a una constante E:

$$\imath\hbar\frac{1}{F(t)}\frac{dF(t)}{dt} = E = \frac{\widehat{H}\psi}{\psi}. \tag{1.10}$$

La primera igualdad da lugar a la ecuación diferencial

$$i\hbar\frac{dF(t)}{dt} = EF(t) \tag{1.11}$$

cuya solución es

$$F(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \tag{1.12}$$

de manera que (1.6) es ahora

$$\Psi\left(x,y,z,t\right) = \psi\left(x,y,z\right)e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \tag{1.13}$$

donde $\psi\left(x,y,z\right)$ es solución de

$$\widehat{H}\psi = E\psi \tag{1.14}$$

que surge de la segunda igualdad de (1.10).La expresión (1.13) es conocida como la solución estacionaria. La parte temporal (1.12) es una función que indica el carácter ondulatorio de la ecuación de Schrödinger.

La Ec. (1.14) es llamada ecuación de Schrödinger estacionaria o independiente del tiempo. Representa un problema del valor propio o eigenvalor en la representación de Schrödinger. El operador hamiltoniano, el cual es el operador de energía, tiene como valor propio a la constante E, por lo que es la energía correspondiente a la función propia $\psi\left(x,y,z\right)$ que no depende del tiempo.

1.4. Evolución temporal de un sistema cuántico

En la Sección 1.3 tratamos el caso de los sistemas cuánticos en los que el hamiltoniano es independiente del tiempo. Físicamente esto significa que estos sistemas están aislados, es decir, el medio no interviene en la evolución temporal del sistema. Podemos decir Ref. [11] que la condición que establece los estados estacionarios es la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial\Psi_n}{\partial t} = \widehat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n$$

y entonces automáticamente la solución es la función de onda estacionaria (1.13). Esto lo utilizamos en el Capítulo 6 al reducir nuestros resultados generales sobre los osciladores armónico e isotónico dependientes del tiempo al caso estacionario.

Pasamos al caso más general en el que la interacción contenida en el hamiltoniano depende del tiempo. Ahora el sistema no está aislado. Se puede simbolizar la situación con el hamiltoniano

$$\widehat{H} = \widehat{H}\left(\vec{r}, t\right) = -\frac{1}{2}\nabla^2 + V\left(x, y, z, t\right).$$

En efecto, es una fuerza externa la que altera al sistema Ref. [11]. Como veremos, los niveles de energía también dependen del tiempo. Como es de esperarse, no se cumple la ley de conservación de la energía, lo cual también se manifiesta en nuestros resultados. Desde el inicio de la mecánica cuántica existe el interés sobre estos sistemas dependientes del tiempo. Teóricamente se ha analizado el tema y las consecuencias que se derivan, con algunos resultados experimentales que confirman la teoría. Pero algunos hechos teóricos se habían mantenido como meras curiosidades, debido a que su confirmación experimental era muy difícil de realizar debido a las dificultades técnicas de laboratorio. Pero actualmente ha cambiado la situación. Ahora con las sofisticadas técnicas de enfriamiento y de observación no destructiva, es decir, minimizando la inevitable perturbación del sistema al realizar las mediciones Ref. [10, 12], se han realizado experimentos muy finos directamente sobre átomos, moléculas, sobre el espín, y otros. Se ha encontrado que la modulación de frecuencia $\omega(t)$ en osciladores es un método ultrasensible para observar varios fenómenos cuánticos Ref. [10].

En este trabajo nos interesan dos tipos de osciladores dependientes del tiempo: el oscilador armónico simple, cuyo hamiltoniano es

$$\widehat{H}_{OA}\left(x, t\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}k(t)x^2 \tag{1.15}$$

y el oscilador isotónico, con hamiltoniano

$$\widehat{H}\left(x, t\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}k(t)x^2 + \frac{l(l+1)}{2x^2} \tag{1.16}$$

En ambos casos el tiempo aparece en la función $k(t)$, de la cual se deriva la frecuencia $\omega(t)$ mediante $\omega(t) = \sqrt{k(t)/m} = \sqrt{k(t)}$. Este es el punto de partida de este trabajo de tesis.

1.5. Factorización de Dirac

El problema del oscilador armónico cuántico se resolverá en el capitulo 2 utilizando la representación de Dirac la cual consiste en un tratamiento utilizando conceptos de algebra lineal: operadores $\widehat{A}$ actuando sobre kets $|a\rangle$ de un espacio vectorial. Los valores propios los cuales son observables, son independientes de la representación utilizada para resolver el problema. Sin embargo, los métodos para resolver el problema son fundamentalmente diferentes. La representación de Dirac proporciona un método matemáticamente atractivo para el cálculo de las propiedades asociadas en el oscilador armónico. La representación de Dirac en el problema del oscilador armónico sirve por ejemplo, como base para la teoría cuántica de la radiación.

Existe una diferencia fundamental entre variables dinámicas de mecánica clásica y mecánica cuántica. En teoría cuántica, los operadores lineales, los cuales representan las variables dinámicas, están sujetos a un álgebra en el cual la ley conmutativa de multiplicación no es valida en general. Con sistemas cuánticos, en particular para el oscilador armónico. Los eigenvalores de los operadores hermíticos son números reales. Esto es muy importante, pues como se dijo antes, estos son las cantidades físicas medibles.

Ya que las obsevables medidas en el laboratorio son siempre números reales, los operadores que representan observables deben ser hermíticos. En lo que se refiere a la notación, usaremos dos maneras de representar los estados los cuales son llamados representaciones:

1. Representacion de Schrödinger que consiste en que una función de onda $\Psi_n(x)$ representa el estado dinámico n.

2. La representación de Dirac, en la cual los estados están representados por "kets"$|n\rangle$.

Desde luego que son completamente equivalentes: $\Psi_n(x) \Leftrightarrow |n\rangle$. Usaremos cada representación según sea necesario.

El método de factorización de Dirac consiste en introducir dos operadores $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^+$, llamados operadores de escalera, que factorizan al hamiltoniano en las formas

$$\widehat{a}\widehat{a}^+ = \widehat{H}_{OA} + C \tag{1.17}$$

$$\widehat{a}^+\widehat{a} = \widehat{H}_{OA} - C \tag{1.18}$$

y con las propiedades

$$\widehat{a}\psi_n \sim \psi_{n-1} \tag{1.19}$$

$$\widehat{a}^+\psi_n \sim \psi_{n+1} \tag{1.20}$$

La factorización del hamiltoniano (1.17) y (1.18) no es la factorización algebraica ordinaria. En efecto, el álgebra de estos operadores no es conmutativa, pues el conmutador es

$$\left[\widehat{a},\widehat{a}^{+}\right]=1.$$

En los libros de texto de mecánica cuántica estos operadores de escalera son estáticos, es decir, independientes del tiempo. Nosotros introducimos el tiempo en precisamente en $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^{+}$ a través de la función $k(t)$, y mediante estricta aplicación de principios físicos, construimos los nuevos operadores, nombrados ahora $\widehat{a}(t)$ y $\widehat{a}^{+}(t)$.

Capítulo 2

Oscilador armónico

2.1. Introducción

En este Capítulo presentamos la solución del sistema cuántico conocido como oscilador armónico estacionario, por medio del método de factorización o método de Dirac. Este método es esencialmente algebraico, en el sentido de que el conjunto de estados dinámicos del oscilador determinados por la ecuación de Schrödinger, como se dijo en el Capítulo 1, forman una base del espacio vectorial de Hilbert, y que los operadores útiles en la descripción del comportamiento de las cantidades observables, son operadores lineales que solo transforman vectores de Hilbert en vectores del mismo espacio, es decir, se aplica las técnicas del álgebra lineal. El método de factorización es muy claro y elegante.

Presentamos entonces el método aplicado al oscilador estacionario, en el sentido de que el potencial no depende del tiempo. En el siguiente Capítulo haremos nuestra generalización del método de factorización del oscilador armónico pero ahora dependiente del tiempo.

2.2. Los operadores de escalera

Partimos de un operador hamiltoniano del oscilador armónico independiente del tiempo. El hamiltoniano es

$$\widehat{H}_{OA} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2. \tag{2.1}$$

Proponemos al operador diferencial

$$\widehat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + x\right). \tag{2.2}$$

Vamos a construir el adjunto de $\widehat{a}$. La definición de operador adjunto $\widehat{a}^+$ es, dados dos estados ψ_n y ψ_m, la siguiente

$$\langle n|\,\widehat{a}\,|m\rangle = \langle m|\,\widehat{a}^+\,|n\rangle^*$$

$$\begin{aligned} \langle n|\,\widehat{a}\,|m\rangle &= \int_a^b \psi_n^*\left(x\right)\widehat{a}\psi_m\left(x\right)dx = \left[\int_a^b \psi_m^*\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx}+x\right)\psi_n dx\right]^* \\ &= \left[\int_a^b \psi_m^*\widehat{a}^+\psi_n dx\right]^* = \langle m|\,\widehat{a}^+\,|n\rangle^*, \end{aligned}$$

así que el operador adjunto de (2.2) es

$$\widehat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + x\right). \tag{2.3}$$

Los operadores $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^+$ deben cumplir las condiciones de factorización del hamiltoniano

$$\widehat{a}\widehat{a}^+ = \widehat{H}_{OA} + \frac{1}{2}, \tag{2.4}$$

$$\widehat{a}^+\widehat{a} = \widehat{H}_{OA} - \frac{1}{2} \tag{2.5}$$

Esto se debe cumplir para que $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^+$ puedan ser operadores de escalera, como vamos a demostrar mas adelante. Para demostrar (2.4) calculamos el producto $\widehat{a}\widehat{a}^+$. Antes debemos recordar que el producto de operadores $\widehat{A}\widehat{B}$ consiste en la aplicación sucesiva sobre el vector $|\rangle$: primero $\widehat{B}$ y luego $\widehat{A}$. El orden debe ser respetado, pues el álgebra de operadores es no conmutativa.

Tomamos una función de prueba $u\left(x\right)$, y le aplicamos el operador $\widehat{a}\widehat{a}^+$ es;

$$\begin{aligned} \widehat{a}\widehat{a}^+ u\left(x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx}+x\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx}+x\right)u(x) \\ &= \left[\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)\right]u(x) \end{aligned}$$

por lo que

$$\widehat{a}\widehat{a}^{+} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = \widehat{H}_{OA} + \frac{1}{2}. \tag{2.6}$$

De la misma manera, para comprobar (2.5) se demuestra que $\widehat{a}^{+}\widehat{a}$ es

$$\widehat{a}^{+}\widehat{a} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \widehat{H}_{OA} - \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

Ahora calculamos el conmutador de $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^{+}$. Para esto restamos (2.4) y (2.5) llegando a

$$\left[\widehat{a}, \widehat{a}^{+}\right] = \widehat{a}\widehat{a}^{+} - \widehat{a}^{+}\widehat{a} = \widehat{H}_{OA} + \frac{1}{2} - \widehat{H}_{OA} + \frac{1}{2} = 1. \tag{2.8}$$

También calculamos los conmutadores de los operadores $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^{+}$ con el hamiltoniano (2.1) utilizando (2.4) y (2.5). Así

$$\left[\widehat{a}, \widehat{H}_{OA}\right] = \widehat{a}\widehat{H}_{OA} - \widehat{H}_{OA}\widehat{a} = \widehat{a}\left[\widehat{a}, \widehat{a}^{+}\right] = \widehat{a} \tag{2.9}$$

y así mismo

$$\left[\widehat{a}^{+}, \widehat{H}_{OA}\right] = -\widehat{a}^{+}. \tag{2.10}$$

2.3. El estado base

Empezamos con el estado propio $|E\rangle$ normalizado del hamiltoniano $\widehat{H}_{OA}$:

$$\widehat{H}_{OA} |E\rangle = E |E\rangle \tag{2.11}$$

y aplicamos el operador $\widehat{a}$. Llamamos $|Q\rangle$ al vector resultante

$$|Q\rangle = \widehat{a} |E\rangle .$$

Veremos las propiedades de $|Q\rangle$. Su dual es

$$\langle Q| = \langle E| \widehat{a}^{+},$$

y su norma es

$$\langle Q|Q\rangle = \langle E| \widehat{a}^{+}\widehat{a} |E\rangle = E - \frac{1}{2} \geq 0,$$

por lo que vemos que hay un límite inferior para la energía, que llamamos E_0,

$$E \geq E_0 = \frac{1}{2}. \tag{2.12}$$

Por otro lado, ya que la forma del potencial del oscilador armónico tiene la propiedad

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \geq 0,$$

entonces la energía de la partícula que está sujeta a este potencial también debe cumplir que

$$E \geq 0$$

lo cual confirma a la desigualdad (2.12). Ahora vamos a aplicar el operador $\widehat{a}$ a (2.11)

$$\widehat{a}\widehat{H}_{OA}|E\rangle = \widehat{a}E|E\rangle = E\widehat{a}|E\rangle$$

pues $\widehat{a}$ es lineal. Pero por (2.9)

$$\left[\widehat{a}, \widehat{H}_{OA}\right] = \widehat{a}\widehat{H}_{OA} - \widehat{H}_{OA}\widehat{a} = \widehat{a} \Rightarrow \widehat{a}\widehat{H}_{OA} = \widehat{H}_{OA}\widehat{a} + \widehat{a} = \left(\widehat{H}_{OA} + 1\right)\widehat{a},$$

así

$$\widehat{a}\widehat{H}_{OA}|E\rangle = \left(\widehat{H}_{OA} + 1\right)\widehat{a}|E\rangle = E\widehat{a}|E\rangle$$

o escrito de otra forma

$$\widehat{H}_{OA}\left(\widehat{a}|E\rangle\right) = (E-1)\left(\widehat{a}|E\rangle\right). \tag{2.13}$$

Por tanto el vector $|Q\rangle = \widehat{a}|E\rangle$ es un vector propio del hamiltoniano con valor propio $E-1$. Podemos decir que

$$\widehat{a}|E\rangle = |E-1\rangle. \tag{2.14}$$

Estrictamente debe ser $\widehat{a}|E\rangle = \alpha|E-1\rangle$ donde α es una constante, pero para lo que sigue es suficiente tomar $\alpha = 1$.

Así que la ecuación de Schrödinger para el estado (2.13) con energía $E-1$ es

$$\widehat{H}_{OA}|E-1\rangle = (E-1)|E-1\rangle, \tag{2.15}$$

es decir, si $|E\rangle$ es un estado propio del hamiltoniano, también lo es $\widehat{a}|E\rangle = |E-1\rangle$.

Aplicando sucesivamente $\widehat{a}$ tenemos

$$\widehat{a}|E\rangle = |E-1\rangle$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{a}^2 \left|E\right\rangle &= \left|E-2\right\rangle \\
\widehat{a}^3 \left|E\right\rangle &= \left|E-3\right\rangle \\
&\cdots \\
\widehat{a}^n \left|E\right\rangle &= \left|E-n\right\rangle .
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Pero como hemos visto hay un límite inferior en la energía. Si el estado de mínima energía es $\left|E_0\right\rangle$, entonces

$$
\widehat{a}\left|E_0\right\rangle = 0, \tag{2.17}
$$

pues no hay un estado de energía menor. Con la identificación mencionada en el Capítulo 1: $\left|E_0\right\rangle \iff \psi_0$ podemos trabajar indistintamente en las representaciones de Dirac y de Schrödinger. En la representación de Schrödinger (2.17) es la ecuación diferencial

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx}+x\right)\psi_0 = 0
$$

que tiene por solución

$$
\psi_0\left(x\right) = e^{-\frac{1}{2}x^2}. \tag{2.18}
$$

En el lenguaje acostumbrado de la mecánica cuántica, decimos que $\psi_0\left(x\right)$ representa al estado base del oscilador armónico.

Finalmente, las expresiones (2.16) implican la cuantización de la energía. También indican que el operador $\widehat{a}$ aniquila al estado $\left|E\right\rangle$ y crea el estado $\left|E-1\right\rangle$. Otra forma de decirlo es que el operador $\widehat{a}$ pasa del estado $\left|E\right\rangle$ de energía E al estado $\left|E-1\right\rangle$ de energía $E-1$. Por eso es llamado operador de aniquilación y también operador de descenso. Nosotros preferimos este último nombre.

Para el operador $\widehat{a}^+$ se puede demostrar por el mismo camino que nos llevó a (2.14) que se cumple la expresión

$$
\widehat{a}^+\left|E\right\rangle = \left|E+1\right\rangle \tag{2.19}
$$

y que el estado $\left|E+1\right\rangle$ es también estado propio del hamiltoniano, es decir, satisface la ecuación de Schrödinger

$$
\widehat{H}_{OA}\left|E+1\right\rangle = \left(E+1\right)\left|E+1\right\rangle . \tag{2.20}
$$

Podemos entonces construir la tabla

$$
\begin{aligned}
\widehat{a}^+\left|E\right\rangle &= \left|E+1\right\rangle \\
\left(\widehat{a}^+\right)^2\left|E\right\rangle &= \left|E+2\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$\left(\widehat{a}^{+}\right)^{3}|E\rangle = |E+3\rangle$$
$$\cdots$$
$$\left(\widehat{a}^{+}\right)^{n}|E\rangle = |E+n\rangle \tag{2.21}$$

Por las mismas razones que expusimos para el operador de descenso, podemos decir que $\widehat{a}^{+}$ es un operador de ascenso. Así $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^{+}$ producen todos los vectores propios del hamiltoniano.

2.4. Las funciones de onda y el espectro de energía

En la representación de Schrödinger los operadores $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^{+}$ son

$$\widehat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + x\right), \tag{2.22}$$

$$\widehat{a}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + x\right). \tag{2.23}$$

Aplicando el operador de ascenso $\widehat{a}^{+}$ al estado base (2.18) obtenemos la función de onda para los estados $1, 2, ..., n$, es decir,

$$\psi_1 = \widehat{a}^{+}\psi_0(x),$$
$$\psi_2 = \left(\widehat{a}^{+}\right)^{2}\psi_0(x),$$
$$\psi_3 = \left(\widehat{a}^{+}\right)^{3}\psi_0(x),$$
$$\cdots$$
$$\psi_n = \left(\widehat{a}^{+}\right)^{n}\psi_0(x). \tag{2.24}$$

Realizando los cálculos con el operador de ascenso $\widehat{a}^{+}$ en la forma diferencial (2.3) se puede demostrar que, por ejemplo, el primer estado excitado ψ_1 es

$$\psi_1 = \widehat{a}^{+}\psi_0(x) = 2xe^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{2.25}$$

y que el segundo estado excitado está representado por la función de onda

$$\psi_2 = \left(\widehat{a}^{+}\right)^{2}\psi_0(x) = \left(4x^2 - 2\right)e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{2.26}$$

y así sucesivamente, hasta llegar al estado n representado por $\psi_n(x)$. De acuerdo a la lista de los polinomios de Hermite de Ref. [4, 5], se llega a que la función de onda para cualquier n es

$$\psi_n(x) = C_n H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{2.27}$$

donde C_n es una constante que sirve para normalizar y $H_n(x)$ es el polinomio de Hermite de grado $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Finalmente, para determinar cómo es el espectro de energía, comenzamos con el valor mínimo

$$E_0 = \frac{1}{2},$$

y recordando que los incrementos son por una unidad, es decir

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 + 1, \\ E_2 &= E_1 + 1 = E_0 + 2, \\ E_3 &= E_2 + 1 = E_0 + 3, \\ &\ldots \end{aligned}$$

podemos concluir que al estado n le corresponde la energía

$$E_n = n + \frac{1}{2}. \tag{2.28}$$

Hemos resuelto el problema del oscilador armónico estacionario por métodos estrictamente algebraicos. Excepto la ecuación diferencial (2.7) que es de primer orden y por lo tanto fácil de resolver, no hemos tenido la necesidad de resolver directamente la ecuación de Schrödinger, la cual, entre otros aspectos, es de segundo orden y solo admite soluciones en forma de series de potencias, que por supuesto da los mismos resultados (2.27) y (2.28) que hemos obtenido mediante el método de factorización de Dirac.

La comparación entre el método tradicional de series y el de factorización de Dirac, que hemos expuesto, da una clara ventaja a la última en términos de claridad, elegancia y facilidad de cálculos, y solo requiere de una interpretación correcta de los resultados. La factorización es el método que seguiremos en el reto de este trabajo de tesis.

Capítulo 3

Oscilador armónico temporal

3.1. Introducción

En este Capítulo iniciamos el trabajo de tesis con el análisis del desarrollo temporal de un oscilador armónico. Como se mencionó en el Capitulo 1, en esta forma de manejar el tiempo, éste aparece en los operadores y no en las funciones de onda. Desde luego que al final de los cálculos el tiempo debe aparecer en las funciones de onda, pues a final de cuentas, estas funciones son las que tienen toda la información que la naturaleza nos permite conocer sobre el sistema cuántico que estamos estudiando. A diferencia de la mayoría de los trabajos que aparecen en la literatura, aquí introduciremos el tiempo en los operadores de escalera.

3.2. Construcción de los operadores de escalera

El hamiltoniano del oscilador armónico es el mismo que en el Capítulo 2:

$$\widehat{H}_{OA}(t) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}k(t)x^2, \qquad (2.1)$$

excepto que introducimos una k que vamos a especificar en lo siguiente.

El tiempo es incluido en los operadores de escalera

$$\widehat{a}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f\,(t)\,\frac{d}{dx} + g\,(t)\,x\right), \qquad (3.1)$$

$$\widehat{a}^{+}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-f^{*}\,(t)\,\frac{d}{dx} + g^{*}\,(t)\,x\right) \qquad (3.2)$$

a través de las funciones $f(t)$ y $g(t)$. Si $f(t) = g(t) = 1$ en (3.1), recobramos las formas (2.22) y (2.23) para $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^{+}$ respectivamente.

Se puede demostrar, como se hizo en la Sección 2.2, que efectivamente (3.2) es el adjunto de (3.1). A continuación analizaremos como deben ser las funciones $f(t)$ y $g(t)$ para que $\widehat{a}(t)$ y $\widehat{a}^{+}(t)$ cumplan su papel de operadores de escalera. La primera condición que imponemos a estos operadores es que factoricen al hamiltoniano (2.1) de la siguiente manera

$$\widehat{a}(t)\,\widehat{a}^{+}(t) = \widehat{H}_{OA}(t) + \frac{1}{2}K(t) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}k(t)x^2 + \frac{1}{2}K(t) \tag{3.3}$$

donde $K(t)$ es un número complejo, que puede depender del tiempo t, y que vamos a determinar. Vemos que (3.3) es equivalente a (2.4), pues ambas factorizaciones coinciden cuando $K(t) = 1$. Para saber cual es el valor de $K(t)$ en nuestro enfoque, seguimos desarrollando el álgebra necesaria. Ahora calculamos el producto $\widehat{a}(t)\,\widehat{a}^{+}(t)$ directamente. Haciendo las operaciones necesarias y tomando en cuenta que $f(t)$ y $g(t)$ no dependen de la posición x, encontramos que

$$\widehat{a}(t)\,\widehat{a}^{+}(t) = \frac{1}{2}\left[-\left|f\right|^2\frac{d^2}{dx^2} + \left|g\right|^2x^2 + (fg^* - gf^*)\,x\frac{d}{dx} + fg^*\right] \tag{3.4}$$

Comparando (3.4) con (3.3) deducimos que

$$\left|f\right|^2 = 1,\ \left|g\right|^2 = k \tag{3.5}$$

$$fg^* - gf^* = 0 \tag{3.6}$$

$$K = fg^* = gf^* \tag{3.7}$$

La última igualdad de (3.7) se deduce de (3.6). Hemos encontrado dos condiciones importantes de las funciones complejas $f(t)$ y $g(t)$. Su magnitud debe ser 1 y $\sqrt{k(t)}$ respectivamente, y además nos sirven para saber como debe ser la constante (independiente de x) $K(t)$ la cual evidentemente es real y depende del tiempo t.

Así que ahora (3.4) es

$$\widehat{a}(t)\,\widehat{a}^{+}(t) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}k(t)x^2 + \frac{1}{2}fg^* = \widehat{H}_{OA}(t) + \frac{1}{2}K(t) \tag{3.8}$$

entonces, la expresión equivalente a (2.5) es

$$\widehat{a}^{+}(t)\,\widehat{a}(t) = \widehat{H}_{OA}(t) - \frac{1}{2}K(t). \tag{3.9}$$

Haciendo explícitamente el producto $\widehat{a}^{+}(t)\,\widehat{a}(t)$ encontramos

$$\widehat{a}^{+}(t)\,\widehat{a}(t) = \frac{1}{2}\left[-\left|f\right|^{2}\frac{d^{2}}{dx^{2}} + \left|g\right|^{2}x^{2} + \left(g^{*}f - f^{*}g\right)x\frac{d}{dx} - f^{*}g\right],$$

y al comparar con (3.9) encontramos las mismas consecuencias que produce (3.4), es decir, las propiedades (3.5), (3.6) y (3.7).

Vamos a examinar mas de cerca estas propiedades (3.5), (3.6) y (3.7) de las funciones $f(t)$ y $g(t)$. Escribimos estas funciones en términos de sus partes reales e imaginarias

$$f = f_1 + if_2, \tag{3.10}$$

$$g = g_1 + ig_2. \tag{3.11}$$

Entonces

$$\begin{aligned} fg^{*} &= f_1g_1 + f_2g_2 + i\left(-f_1g_2 + f_2g_1\right), \\ gf^{*} &= f_1g_1 + f_2g_2 + i\left(-f_2g_1 + f_1g_2\right). \end{aligned}$$

Como $fg^{*} = gf^{*} = K$ encontramos que

$$-f_1g_2 + f_2g_1 = -f_2g_1 + f_1g_2 = -\left(-f_1g_2 + f_2g_1\right)$$

El número $-f_1g_2 + f_2g_1$ es igual a su negativo, por lo que debe ser cero: $-f_1g_2 + f_2g_1 = 0$. Esto significa que

$$f_1g_2 = f_2g_1. \tag{3.12}$$

Para poder interpretar (3.12) necesitamos mas información. Vamos ahora a usar el conmutador de $\widehat{a}(t)$, y $\widehat{a}^{+}(t)$ el cual, con (3.8) y (3.9), es

$$\left[\widehat{a}(t), \widehat{a}^{+}(t)\right] = \widehat{a}(t)\,\widehat{a}^{+}(t) - \widehat{a}^{+}(t)\,\widehat{a}(t) = fg^{*} = K(t). \tag{3.13}$$

En el caso estacionario tenemos $[\widehat{a}, \widehat{a}^{+}] = 1$; ver Ec. (2.8). Calculamos también los conmutadores $\left[\widehat{a}(t), \widehat{H}_{OA}(t)\right]$ y $\left[\widehat{a}^{+}(t), \widehat{H}_{OA}(t)\right]$:

$$\left[\widehat{a}(t), \widehat{H}_{OA}(t)\right] = \widehat{a}(t)\left[\widehat{a}(t), \widehat{a}^{+}(t)\right] = fg^{*}\widehat{a}(t) = K(t)\widehat{a}(t) \tag{3.14}$$

$$\left[\widehat{a}^{+}(t), \widehat{H}_{OA}(t)\right] = -\widehat{a}^{+}(t)\left[\widehat{a}(t), \widehat{a}^{+}(t)\right] = -fg^{*}\widehat{a}^{+}(t) = -K(t)\widehat{a}^{+}(t). \tag{3.15}$$

La comparación de (3.14) y (3.15) con (2.9) y (2.10) también sugiere que $K(t) = fg^{*} = f^{*}g$ debe ser 1, como caso particular. Ahora debemos comprobar que efectivamente $\widehat{a}(t)$ y $\widehat{a}^{+}(t)$ son operadores de escalera, como los son $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^{+}$ para el oscilador estacionario.

3.3. Álgebra de operadores. El estado base

Hemos tomado como punto de partida el hamiltoniano (2.1). Esto significa que la parte espacial de las funciones de onda de los estados cuánticos son las mismas que las del oscilador estacionario. Sin embargo no tomamos este hecho como hipótesis. Más bien debiera ser una consecuencia de la forma de los operadores de escalera dependientes del tiempo $\widehat{a}\,(t)$ y $\widehat{a}^{+}\,(t)$. Regresamos a este punto mas adelante.

Ahora tomamos un estado propio normalizado del hamiltoniano $\widehat{H}_{OA}(t)$:

$$\widehat{H}_{OA}(t)\left|E\right\rangle = E\left|E\right\rangle \tag{3.16}$$

y le aplicamos el operador $\widehat{a}\,(t)$; al vector resultante le llamamos $\left|Q\right\rangle$:

$$\left|Q\right\rangle = \widehat{a}\,(t)\left|E\right\rangle .$$

Vamos a investigar las propiedades de $\left|Q\right\rangle$. Su adjunto es

$$\left\langle Q\right| = \left\langle E\right|\widehat{a}^{+}\,(t)\,,$$

y su norma

$$\begin{aligned} \left\langle Q|Q\right\rangle &= \left\langle E\right|\widehat{a}^{+}\,(t)\,\widehat{a}\,(t)\left|E\right\rangle = \left\langle E\right|\left(\widehat{H}_{OA}(t)-\frac{1}{2}K(t)\right)\left|E\right\rangle \\ &= \left(E-\frac{1}{2}K(t)\right)\left\langle E|E\right\rangle = E-\frac{1}{2}K(t)\geq 0; \end{aligned}$$

por lo que hay un límite inferior para la energía

$$E\geq\frac{1}{2}K(t) \tag{3.17}$$

Este es el resultado equivalente al que se encontró para el oscilador estacionario en la Ec. (2.12).

Vamos a aplicar $\widehat{a}\,(t)$ a la expresión (3.16)

$$\widehat{a}\,(t)\,\widehat{H}_{OA}(t)\left|E\right\rangle = \widehat{a}\,(t)\,E\left|E\right\rangle = E\widehat{a}\,(t)\left|E\right\rangle .$$

Pero de (3.14) obtenemos

$$\widehat{a}\,(t)\,\widehat{H}_{OA}(t) = \widehat{H}_{OA}(t)\widehat{a}\,(t)+K(t)\widehat{a}\,(t) = \left(\widehat{H}_{OA}(t)+K(t)\right)\widehat{a}\,(t)\,,$$

así que

$$\widehat{a}\,(t)\,\widehat{H}_{OA}(t)\,|E\rangle = E\widehat{a}\,(t)\,|E\rangle = \left(\widehat{H}_{OA}(t) + K(t)\right)\widehat{a}\,(t)\,|E\rangle\,,$$

o puesto así

$$\widehat{H}_{OA}(t)\,(\widehat{a}\,(t)\,|E\rangle) = (E - K(t))\,\widehat{a}\,(t)\,|E\rangle\,. \tag{3.18}$$

Entonces (3.18) nos permita interpretar al vector $|Q\rangle = \widehat{a}\,(t)\,|E\rangle$ como vector propio del hamiltoniano con valor propio $E - K(t)$. Podemos escribir

$$\widehat{a}\,(t)\,|E\rangle = |E - K(t)\rangle\,, \tag{3.19}$$

donde hemos omitido un factor de normalización que recobraremos más adelante. Así que la ecuación de Schrödinger para el estado de energía $E - K(t)$ es

$$\widehat{H}_{OA}(t)\,|E - K(t)\rangle = (E - K(t))\,|E - K(t)\rangle\,. \tag{3.20}$$

Partiendo entonces de (3.19) y aplicando sucesivamente $\widehat{a}\,(t)$ al resultado, construimos la siguiente tabla

$$\begin{aligned}
\widehat{a}\,(t)\,|E\rangle &= |E - K(t)\rangle\,,\\
\widehat{a}\,(t)^2\,|E\rangle &= |E - 2K(t)\rangle\,,\\
\widehat{a}\,(t)^3\,|E\rangle &= |E - 3K(t)\rangle\,,\\
&\cdots\\
\widehat{a}\,(t)^n\,|E\rangle &= |E - nK(t)\rangle\,.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

La cual es el equivalente a (2.16) del Capítulo anterior, pero con $K(t) = 1$

$$E \geq \frac{1}{2}K(t).$$

De nuevo llamamos $|E_0\rangle \Leftrightarrow \psi_0\,(x)$ al estado de mínima energía. Si $|E_0\rangle$ es efectivamente el estado de mínima energía, se debe cumplir que

$$\widehat{a}\,(t)\,|E_0\rangle = 0.$$

En la representación de Schrödinger la igualdad anterior equivale a la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d\,|E_0\rangle}{dx} + \frac{g}{f}x\,|E_0\rangle = 0$$

cuya solución es, integrando directamente

$$|E_0\rangle = \exp\left(-\frac{g}{2f}x^2\right). \tag{3.22}$$

Para interpretar correctamente este resultado (3.22) vamos a analizar de nuevo las funciones complejas $f(t)$ y $g(t)$. Las propiedades que hemos encontrado son

$$|f|^2 = 1, \ |g|^2 = k, \qquad (3.5)$$

$$fg^* - gf^* = 0, \qquad (3.6)$$

$$K = fg^* = gf^*. \qquad (3.7)$$

y además, si usamos (3.10), (3.11) para $f(t)$ y $g(t)$, también hemos encontrado que

$$f_1 g_2 = f_2 g_1. \qquad (3.12)$$

que se puede escribir

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2}. \tag{3.23}$$

Ademas,

$$K = fg^* = gf^* = f_1 g_1 + f_2 g_2 + i\left(-f_1 g_2 + f_2 g_1\right) = f_1 g_1 + f_2 g_2. \tag{3.24}$$

Con lo anterior calculamos el cociente $\frac{g}{f}$:

$$\begin{aligned}\frac{g}{f} &= \frac{g_1 + ig_2}{f_1 + if_2} = \frac{f_1 g_1 + f_2 g_2 + i\left(f_1 g_2 - f_2 g_1\right)}{|f|^2} \\ &= f_1 g_1 + f_2 g_2 + i\left(f_1 g_2 - f_2 g_1\right) = f_1 g_1 + f_2 g_2. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Uniendo (3.24) y (3.25) llegamos a algo importante: la función $K(t)$, la cual ha aparecido con frecuencia en los cálculos que hemos realizado, es también

$$K(t) = \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{g^*(t)}{f^*(t)}. \tag{3.26}$$

En particular, la función de onda del estado base se escribe

$$\psi_0(x,t) = \exp\left(-\frac{1}{2}K(t)\,x^2\right). \tag{3.27}$$

Este resultado es relevante: se ha incorporado el tiempo a la función de onda del estado base. Este hecho está de acuerdo con la imagen de Heisenberg, pues el origen de la dependencia temporal está en las funciones $f(t)$ y $g(t)$ que aparecen en el operador de descenso $\widehat{a}$. Ahora la función de onda $\psi_0(x,t)$ depende de la posición x y del tiempo t, lo cual se pone de manifiesto en (3.27). Otra consecuencia importante de (3.27) es que $K(t)$ debe ser mayor que cero, para que se cumpla la condición de frontera

$$\lim_{x\to\pm\infty} \psi(x,t) = 0$$

Una vez conocido el estado $\psi_0(x,t)$ de mínima energía, demostramos que $\widehat{a}^+(t)$ es un operador de ascenso, como en la Sección 2.4 de oscilador armónico estacionario. Antes vamos a escribir a este operador de otra forma tomando en cuenta lo que ahora sabemos a cerca de las funciones $f(t)$ y $g(t)$. Hemos encontrado en (3.26) que

$$K(t) = \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{g^*(t)}{f^*(t)}$$

y

$$f^*(t) = \frac{|f(t)|^2}{f(t)} = \frac{1}{f(t)}.$$

Entonces tenemos que (3.1) y (3.2) son ahora

$$\widehat{a}(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + K(t)\,x\right). \tag{3.28}$$

$$\widehat{a}^+(t) = \frac{1}{\sqrt{2}f(t)}\left(-\frac{d}{dx} + K(t)x\right). \tag{3.29}$$

Ahora regresamos a la tarea de encontrar todas las funciones de onda. Aplicamos $\widehat{a}^+(t)$ a la ecuación de Schrödinger (3.16) y encontramos

$$\widehat{a}^+\widehat{H}_{OA}(t)\,|E\rangle = E\widehat{a}^+\,|E\rangle\,. \tag{3.30}$$

Utilizando el mismo mecanismo que sirvió para demostrar (3.18), ahora lo utilizamos para encontrar

$$\widehat{H}_{OA}(t)\widehat{a}^+(t)\,|E\rangle = (E+K)\,\widehat{a}^+(t)\,|E\rangle\,. \tag{3.31}$$

La interpretación ahora es que $\widehat{a}^+(t)\,|E\rangle$ es un estado propio del hamiltoniano $\widehat{H}_{OA}(t)$ con energía $E+K(t)$.

Entonces, omitiendo la constante de normalización, podemos hacer la cadena

$$\begin{aligned}
\widehat{a}^{+}(t)\,|E\rangle &= |E+K(t)\rangle\,,\\
\left[\widehat{a}^{+}(t)\right]^{2}|E\rangle &= |E+2K(t)\rangle\,,\\
\left[\widehat{a}^{+}(t)\right]^{3}|E\rangle &= |E+3K(t)\rangle\,,\\
&\cdots\\
\left[\widehat{a}^{+}(t)\right]^{n}|E\rangle &= |E+nK(t)\rangle\,. \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Vamos a demostrar que (3.31) se cumple para todos los estados (3.32). El valor mínimo de la energía es, de acuerdo a (3.17) $E_0 = \frac{1}{2}K(t)$, que le corresponde al estado $|E_0\rangle$:

$$\widehat{H}\,|E_0\rangle = \frac{1}{2}K(t)\,|E_0\rangle\,.$$

De acuerdo a (3.31) podemos establecer la cadena

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_{OA}(t)\widehat{a}^{+}\,|E_0\rangle &= (E_0+K(t))\,|E_0+K(t)\rangle\,,\\
\widehat{H}_{OA}(t)\widehat{a}^{+2}\,|E_0\rangle &= (E_0+2K(t))\,|E_0+2K(t)\rangle\,,\\
\widehat{H}_{OA}(t)\widehat{a}^{+3}\,|E_0\rangle &= (E_0+3K(t))\,|E_0+3K(t)\rangle\,,\\
&\cdots\\
\widehat{H}_{OA}(t)\widehat{a}^{+n}\,|E_0\rangle &= (E_0+nK(t))\,|E_0+nK(t)\rangle\,. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

El espectro de energías es entonces

$$E_n(t) = nK(t) + E_0 = K(t)\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad (3.34)$$

3.4. Los estados cuánticos del oscilador temporal

Con el operador de ascenso vamos a generar de manera explícita las funciones de onda del oscilador temporal. En este punto debemos recalcar el hecho de que nuestro enfoque debe dar, como resultado particular, las soluciones del oscilador estacionario, encontradas en el Capítulo 2. Esto se puede comprobar parcialmente con la única solución para el oscilador armónico dependiente del tiempo que tenemos hasta ahora: la del estado base Ec. (3.27). En efecto, si hacemos que $K(t) = 1$ entonces encontramos que efectivamente (3.27) se convierte en la Ec. (2.18)

$$\psi_0(x,t) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right). \tag{2.18}$$

Para calcular las demás funciones de onda del oscilador temporal escribimos de nuevo la del estado base (3.27) ahora en la representación de Schrödinger

$$|E_0\rangle \Leftrightarrow \psi_0(x,t) = \exp\left(-\frac{1}{2}K(t)\,x^2\right). \tag{3.35}$$

De acuerdo con (3.30) podemos escribir

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,t) &= \widehat{a}^+(t)\,\psi_0(x,t)\,, \\
\psi_2(x,t) &= \left[\widehat{a}^+(t)\right]^2\psi_0(x,t)\,, \\
\psi_3(x,t) &= \left[\widehat{a}^+(t)\right]^3\psi_0(x,t)\,, \\
&\dots \\
\psi_n(x,t) &= \left[\widehat{a}^+(t)\right]^n\psi_0(x,t)\,.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Para poder calcular con mayor facilidad estas funciones, hacemos unos cambios al operador $\widehat{a}^+(t)$ de (3.29). Hacemos las siguientes definiciones

$$\begin{aligned}
\xi &= \sqrt{K(t)}x, \\
M(t) &= \frac{\sqrt{K(t)}}{\sqrt{2}f(t)}.
\end{aligned}$$

Con estas nuevas cantidades el operador de ascenso (3.29) es ahora

$$\widehat{a}^+(t) = M\left(-\frac{d}{d\xi}+\xi\right) \tag{3.37}$$

y el estado base se escribe así

$$\psi_0(\xi,t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \tag{3.38}$$

de manera que la derivada de esta función es

$$\frac{d\psi_0}{d\xi} = -\xi\psi_0. \tag{3.39}$$

Vamos a calcular $[\widehat{a}^{+}(t)]^{n}\,\psi_0$ de manera iterativa. Empezamos con

$$\psi_1(x,t) \sim \widehat{a}^{+}(t)\,\psi_0 = M\left(-\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\psi_0 = M(2\xi)\,\psi_0 = MH_1(\xi)\,e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

donde hemos usado (3.39). Luego

$$\begin{aligned}
\psi_2(x,t) &\sim \left[\widehat{a}^{+}(t)\right]^2\psi_0 = M^2H_2(\xi)\,e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\\
\psi_3(x,t) &\sim \left[\widehat{a}^{+}(t)\right]^3\psi_0 = M^3H_3(\xi)\,e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\\
\psi_4(x,t) &\sim \left[\widehat{a}^{+}(t)\right]^4\psi_0 = M^4H_4(\xi)\,e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\\
&\quad \dots
\end{aligned}$$

donde $H_n(\xi)$ es el polinomio de Hermite de grado n con argumento $\xi = \sqrt{K}x$.

Podemos escribir la solución general así

$$\psi_n(x,t) = C_nH_n(\xi)\,e^{-\frac{1}{2}\xi^2x^2} = C_nH_n\left(\sqrt{K}x\right)e^{-\frac{1}{2}Kx^2}. \tag{3.40}$$

En resumen, (3.40) junto con (3.34) para el espectro de energía constituyen la solución completa para nuestro modelo de oscilador armónico dependiente del tiempo.

3.5. La función $S_n(x)$ y el espectro de energía

Esta función se define por

$$S_n(x) = 2V(x) - 2E_n \tag{3.41}$$

y por la ecuación estacionaria de Schrödinger

$$S_n(x) = \frac{d^2\psi_n}{dx^2}. \tag{3.42}$$

Vamos a calcular esta función derivando dos veces la función $\psi_n(x,t)$ de (3.40), por medio del cambio de variable $\xi = \sqrt{K(t)}x$ y de la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{d}{d\xi} = \sqrt{K(t)}\frac{d}{d\xi},$$

hacemos la primera derivada

$$\frac{d\psi_n}{dx} = \sqrt{K(t)} \left(-\xi H_n + \frac{dH_n}{d\xi} \right) e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

y la segunda derivada

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} = K(t) \left[\left(-\xi H_n + \frac{dH_n}{d\xi} \right) (-\xi) + \left(-\xi \frac{dH_n}{d\xi} - H_n + \frac{d^2 H_n}{d\xi^2} \right) \right] e^{-\frac{1}{2}\xi^2},$$

nos queda que la segunda derivada es

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} = K(t) \left[\frac{d^2 H_n}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH_n}{d\xi} + \left(\xi^2 - 1 \right) H_n \right] e^{-\frac{1}{2}\xi^2}. \tag{3.43}$$

Ahora usamos la ecuación de Hermite

$$\frac{d^2 H_n}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH_n}{d\xi} + 2nH_n = 0, \tag{3.44}$$

para escribir la segunda derivada así:

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} = K(t) \left[-2nH_n + \left(\xi^2 - 1 \right) H_n \right] e^{-\frac{1}{2}\xi^2} = K(t) \left(-2n + \xi^2 - 1 \right) H_n e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \tag{3.45}$$

tenemos ahora que la función S_n en términos de x es

$$S_n(x) = \frac{d^2\psi_n}{dx^2} = K(t) \left(-2n + \xi^2 - 1 \right) \psi_n = \left[K(t) (-2n - 1) + K^2(t) x^2 \right] \psi_n. \tag{3.46}$$

Por otro lado la función $S_n(x)$ es, en términos del potencial y la energía, Ec. (3.41):

$$S_n(x) = \left[2V_{OA}(x) - 2E_n \right] \psi_n = \left[2 \left(\frac{1}{2} k(t) x^2 \right) - 2E_n \right] \psi_n = \left(k(t) x^2 - 2E_n \right) \psi_n. \tag{3.47}$$

Igualando (3.46) y (3.47) obtenemos

$$k(t)x^2 - 2E_n = K(t)(-2n - 1) + K^2(t)x^2$$

$$-2E_n = K(t)(-2n-1) + K^2(t)x^2 - k(t)x^2 = K(t)(-2n-1) + \left(K^2(t) - k(t) \right) x^2.$$

En nuestro enfoque la energía no debe depender de la posición x, en consecuencia

$$K^2(t) - k(t) = 0,$$

$$-2E_n = K(t)\left(-2n - 1\right).$$

El espectro de energía del oscilador armónico temporal es

$$E_n = K(t)\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

lo cual confirma la ec. (3.34), con $K(t) = \sqrt{k(t)}$.

Si identificamos a $K(t)$ con la frecuencia asociada del oscilador tenemos

$$K(t) = \sqrt{k(t)} = \hbar\omega(t),$$

entonces el espectro de energia se escribe como

$$E_n = K\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega(t).$$

Capítulo 4

El oscilador isotónico de Dongpei

4.1. Introducción

En este Capítulo analizamos al oscilador isotónico de Dongpei [1]. Primero damos los principales resultados reportados en esa referencia, lo cual hacemos en esta Sección, y luego en las siguientes secciones de este Capítulo presentamos nuestra contribución a la solución de este sistema cuántico. Empezamos entonces con los resultados de Dongpei [1]. El hamiltoniano es

$$\widehat{H}_D(x) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{l\,(l+1)}{x^2}, \tag{4.1}$$

con $l > 0$. Este hamiltoniano es factorizado por los operadores (alteramos ligeramente la notación de Dongpei para hacerla más clara)

$$\begin{aligned} \widehat{b}_l &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + x - \frac{l}{x}\right), \\ \widehat{b}_l^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + x - \frac{l}{x}\right), \end{aligned}$$

de la siguiente manera

$$\widehat{H}_D(x) = \widehat{b}\widehat{b}^+ + l - \frac{1}{2}. \tag{4.2}$$

Sin embargo estos operadores no son de escalera, es decir, no funcionan como lo hacen $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^+$ para el oscilador armónico. Pero $\widehat{b}_l$ sirve para generar la función del estado $\psi_0\,(x)$ base por medio de

$$\widehat{b}_l\psi_0\,(x) = 0,$$

que es equivalente a la ecuación diferencial

$$\frac{d\psi_0}{dx} + (x - \frac{l}{x})\psi_0 = 0$$

dando como resultado

$$\psi_0(x) = x^{l+1} e^{-x^2/2}. \tag{4.3}$$

Dongpei introduce el operador

$$\widehat{A}^{+}(x) = \widehat{a}^{+}\widehat{a}^{+} - \frac{l(l+1)}{x^2}, \tag{4.4}$$

donde $\widehat{a}^{+}$ en el operador introducido en el capitulo 2.

Y afirma que este operador es de escalera y que genera todas las demás funciones de onda. Ademas establece que el espectro de energía es

$$E_n = 2n + l + \frac{3}{2}. \tag{4.5}$$

Hacemos algunas observaciones sobre este trabajo de Dongpei:

1. La expresión (4.4) para $\widehat{A}^{+}(x)$ es incorrecta. Nosotros encontramos que falta un factor 2 en el denominador del segundo término.

2. El autor afirma que (4.4) genera a todas las funciones de onda para los estados excitados, pero no presenta resultados parciales ni la forma general de esas funciones de onda.

3. La notación es vaga y da lugar a confusiones.

4. Mezcla sistemas cuánticos al hablar de hamiltonianos $\widehat{H}_l$ y $\widehat{H}_{l+1}$ como representativos de sistemas diferentes.

Por supuesto que los resultados finales y las conclusiones de Dongpei son correctas. Pero algo de esta observaciones fueron el origen de este trabajo de tesis: Aparte de subsanar estas faltas, como se ha mencionado en la introducción, nosotros hacemos dos aportaciones:

1. Hemos mejorado sustancialmente el método algebraico de solución, usando los mismos operadores de Dongpei pero construyendolos de una manera clara a partir de los operadores de escalera del oscilador armónico, y además la generación de las funciones de onda es muy fácil utilizando únicamente algunas propiedades de los polinomios asociado de Laguerre.

2. Hemos generalizado el oscilador de Dongpei introduciendo un análisis sobre el comportamiento temporal, pero con la novedad del tiempo, es incorporado en los operadores de escalera. Lo anterior lo exponemos en las siguientes secciones de este capítulo.

4.2. Operadores de escalera y el estado base

Empezamos poniendo el hamiltoniano

$$\widehat{H}_D(t) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}k(t)x^2 + \frac{l\,(l+1)}{2x^2} \tag{4.6}$$

la diferencia con el hamiltoniano de Dongpei $\widehat{H}_D(x)$, Ec. 4.1, está en el factor $k = k(t)$ del segundo término, el cual no aparece en (4.1).

Los operadores de escalera $\widehat{A}(t)$ y $\widehat{A}^{+}(t)$ que generan a las eigenfunciones de $\widehat{H}_D(t)$ deben tener una estructura de al menos de segundo orden en las derivadas [8]. Nosotros proponemos una forma que se basa en los operadores de escalera temporales del oscilador armónico dependiente del tiempo del Capítulo 3, $\widehat{a}\,(t)$ y $\widehat{a}^{+}\,(t)$, de la siguiente manera

$$\widehat{A}(t) = \left(\widehat{a}\,(t) - \frac{f\,(t)}{\sqrt{2}}\gamma_2\right)\left(\widehat{a}\,(t) - \frac{f\,(t)}{\sqrt{2}}\gamma_1\right), \tag{4.7}$$

$$\widehat{A}^{+}(t) = \left(\widehat{a}^{+}\,(t) - \frac{1}{\sqrt{2}f\,(t)}\gamma_2\right)\left(\widehat{a}^{+}\,(t) - \frac{1}{\sqrt{2}f\,(t)}\gamma_1\right), \tag{4.8}$$

γ_1 y γ_2 serán determinadas más adelante.

Los operadores $\widehat{a}\,(t)$ y $\widehat{a}^{+}\,(t)$ son los construidos en el capítulo anterior, es decir, incorporan el tiempo en la funciones $f\,(t)$ y $K\,(t)$:

$$\begin{aligned} \widehat{a}\,(t) &= \frac{f\,(t)}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + K\,(t)\,x\right), && (3.28) \\ \widehat{a}^{+}\,(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}f\,(t)}\left(-\frac{d}{dx} + K\,(t)\,x\right). && (3.29) \end{aligned}$$

Los operadores $\widehat{A}(t)$ y $\widehat{A}^{+}(t)$ deben cumplir las condiciones

$$\widehat{A}(t) = \widehat{a}\,(t)\,\widehat{a}\,(t) - f^2\,(t)\,\frac{l(l+1)}{2x^2}, \tag{4.9}$$

$$\widehat{A}^{+}(t) = \widehat{a}^{+}(t)\,\widehat{a}^{+}(t) - \frac{1}{f^2(t)}\frac{l(l+1)}{2x^2}. \tag{4.10}$$

Aunque Dongpei propone la misma dependencia en x que nosotros (ver Ec. (4.4)), él no incluye el tiempo. En este sentido (4.9) y (4.10) son nuevas. Las condiciones (4.9) y (4.10) determinan la forma explícita de las funciones γ_1 y γ_2 que aparecen en (4.7) y (4.8), las cuales dependen de x, pero no de t. Para saber como son, hacemos el producto de (4.7)

$$\widehat{A}(t)u = \left(\widehat{a}(t) + \frac{f(t)}{\sqrt{2}}\gamma_2\right)\left(\widehat{a}(t) + \frac{f(t)}{\sqrt{2}}\gamma_1\right)u$$

$$= \widehat{a}(t)\,\widehat{a}(t)\,u + \frac{f(t)}{\sqrt{2}}\widehat{a}(t)(\gamma_1 u) + \frac{f(t)}{\sqrt{2}}\gamma_2\widehat{a}(t)\,u + \frac{f^2(t)}{2}\gamma_2\gamma_1 u, \tag{4.11}$$

donde $u(x)$ es una función auxiliar. La suma de los tres últimos términos de (4.11) debe ser igual al último término de (4.9). Se puede demostrar que esos tres últimos términos de (4.11) dan lugar a

$$\frac{f(t)}{\sqrt{2}}\widehat{a}(t)(\gamma_1 u) + \frac{f(t)}{\sqrt{2}}\gamma_2\widehat{a}(t)\,u + \frac{f^2(t)}{2}\gamma_2\gamma_1 u$$

$$= \frac{f^2(t)}{2}\left(u\frac{d\gamma_1}{dx} + (\gamma_1+\gamma_2)\left(\frac{du}{dx} + Kxu\right) + \gamma_2\gamma_1 u\right).$$

La suma de estos tres últimos términos de (4.1) debe ser igual al último término de (4.9). La suma de estos tres últimos términos de (4.1) debe ser igual al último término de (4.9).

Por lo que

$$\frac{1}{2}\left(u\frac{d\gamma_1}{dx} + (\gamma_1+\gamma_2)\left(\frac{du}{dx} + xu\right) + \gamma_2\gamma_1 u\right) = -\frac{l(l+1)}{2x^2}u.$$

Vemos que en el lado derecho no hay ninguna derivada de la función $u(x)$, por lo que para que valga la igualdad debemos tener $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$; introducimos la variable γ por medio de

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma.$$

Así tenemos que la forma de $\widehat{A}(t)$ que se consigue sustituyendo a γ_1 y γ_2 por γ y $-\gamma$ respectivamente es

$$\widehat{A}(t) = \widehat{a}(t)\,\widehat{a}(t) + f^2(t)\frac{1}{2}\left(\frac{d\gamma}{dx} - \gamma^2\right) \tag{4.12}$$

o en la forma factorizada (4.7) es ahora

$$\widehat{A}(t) = \left(\widehat{a}\,(t) - \frac{f\,(t)}{\sqrt{2}}\gamma\right)\left(\widehat{a}\,(t) + \frac{f\,(t)}{\sqrt{2}}\gamma\right), \tag{4.13}$$

ahora debemos determinar a la función $\gamma\,(x)$. La comparación de (4.12) con (4.9) da lugar a una ecuación diferencial tipo Ricatti

$$\frac{d\gamma}{dx} - \gamma^2 = -\frac{l\,(l+1)}{x^2}. \tag{4.14}$$

Luego proponemos que la solución de (4.14) sea de la forma

$$\gamma = \frac{c}{x},$$

siendo c una constante a determinar. Entonces

$$\frac{d\gamma}{dx} - \gamma^2 = -\frac{c}{x^2} - \frac{c^2}{x^2} = -\frac{c\,(c+1)}{x^2}.$$

Como $\gamma\,(x)$ debe cumplir con (4.14) debemos tener

$$c(c+1) = l\,(l+1)\,, \tag{4.15}$$

cuyas soluciones son $c = -l-1,\ l$. Ahora debemos escoger la solución correcta. El método que usamos es el siguiente: por la forma del potencial de Dongpei, el cual es positivo definido para $l > 0$, la energía debe ser positiva. Esto significa que debe existir un estado de mínima energía, o estado base ϕ_0. Si $\widehat{A}(t)$ es un operador de descenso, entonces debe cumplirse que

$$\widehat{A}(t)\phi_0 = 0. \tag{4.16}$$

Usando (3.28) la expresión (4.16) es ahora

$$\left(\widehat{a}\,(t) + f(t)\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)\phi_0 = \left[\frac{f\,(t)}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + K\,(t)\,x\right) + f(t)\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right]\phi_0 = 0. \tag{4.17}$$

De (4.17) se obtienen las dos posibles formas para $\gamma\,(x)$:

$$\gamma\,(x) = \left\{\begin{array}{l} \frac{l}{x} \\ -\frac{l+1}{x} \end{array}\right. \tag{4.18}$$

La elección de la solución adecuada depende de las condiciones de frontera para este sistema:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \phi\left(x,t\right) = 0, \tag{4.19}$$

$$\lim_{x\to\pm 0} \phi\left(x,t\right) = 0. \tag{4.20}$$

La condición (4.20) es debido a la barrera infinita en $x = 0$ que tiene el potencial isotónico. Para el primer caso de (4.18) tenemos la ecuación diferencial

$$\left(\frac{d}{dx} + K(t)x + \frac{l}{x}\right)\phi_0 = 0,$$

cuya solución es

$$\phi_0\left(x,t\right) = e^{-K(t)x^2/2}x^{-l}. \tag{4.21}$$

Para la segunda solución de (4.18) la ecuación diferencial es

$$\left(\frac{d}{dx} + K(t)x - \frac{l+1}{x}\right)\phi_0 = 0$$

con solución

$$\phi_0\left(x,t\right) = e^{-Kx^2/2}x^{l+1}. \tag{4.22}$$

Sabemos que $K(t)$ es un número real debido a (3.7). Es claro que el límite (4.19) se cumple para ambas soluciones (4.21) y (4.22) siempre que $K\left(t\right) > 0$. Esta condición es también necesaria para que la energía mínima del sistema sea positiva, como lo indica (3.17).

Para la solución (4.21) vemos que cuando $x \to 0$ su limite es ∞ y físicamente no podemos aceptarla. Para (4.22) tenemos que cuando $x \to 0$ su limite es 0. Por tanto sí satisface la condición de frontera de la función de onda: $\lim_{x\to 0}\phi_0(x,t) \to 0$. Entonces descartamos (4.21) y nos quedamos con (4.22). En resumen la función de onda del estado base es (4.22), y notamos que además de depender de la posición x también depende del tiempo t a través de $K\left(t\right)$ y $f\left(t\right)$.

Así que nuestra propuesta de la forma del operador $\widehat{A}(t)$ es

$$\widehat{A}(t) = \left(\widehat{a}\left(t\right) - f\left(t\right)\frac{l+1}{\sqrt{2}x}\right)\left(\widehat{a}\left(t\right) - f\left(t\right)\frac{l+1}{\sqrt{2}x}\right), \tag{4.23}$$

y para $\widehat{A}^{+}(t)$ de (4.8) es

$$\widehat{A}^{+}(t) = \left(\widehat{a}^{+}\left(t\right) - \frac{1}{f\left(t\right)}\frac{l+1}{\sqrt{2}x}\right)\left(\widehat{a}^{+}\left(t\right) - \frac{1}{f\left(t\right)}\frac{l+1}{\sqrt{2}x}\right). \tag{4.24}$$

4.3. Propiedades de los operadores $\widehat{A}(t)$ y $\widehat{A}^{+}(t)$

Una vez conocidas las expresiones (4.9) y (4.23) para $\widehat{A}(t)$ y (4.10) y (4.24) para $\widehat{A}^{+}(t)$, vamos a demostrar algunas de sus propiedades.

Propiedad 1

$$\left[\widehat{A}(t), \widehat{A}^{+}(t)\right] = 4K\,(t)\,\widehat{H}_D(t). \tag{4.25}$$

Propiedad 2

$$\left[\widehat{A}^{+}(t), \widehat{A}(t)\right] = -4K\,(t)\,\widehat{H}_D(t). \tag{4.26}$$

Propiedad 3

$$\left[\widehat{H}_D(t), \widehat{A}^{+}(t)\right] = 2K\,(t)\,\widehat{A}(t).^{+} \tag{4.27}$$

Propiedad 4

$$\left[\widehat{H}_D(t), \widehat{A}(t)\right] = -2K\,(t)\,\widehat{A}(t). \tag{4.28}$$

Para demostrar las propiedades anteriores tomamos (4.10) y (4.11) para $\widehat{A}(t)$ y $\widehat{A}^{+}(t)$ respectivamente, pero con un ligero cambio de notación para mayor facilidad de los cálculos:

$$\widehat{A}(t) = \widehat{a}(t)\,(t)\,\widehat{a}(t)\,(t) - \frac{\lambda^*}{x^2}, \tag{4.29}$$

$$\widehat{A}^{+}(t) = \widehat{a}^{+}(t)\,(t)\,\widehat{a}^{+}(t)\,(t) - \frac{\lambda}{x^2}, \tag{4.30}$$

donde hemos puesto

$$\lambda = \frac{l(1+1)}{2f^2},$$

$$\lambda^* = \frac{f^2 l(l+1)}{2}.$$

Demostración de la Propiedad 1.

Vamos a calcular el conmutador $\left[\widehat{A}(t), \widehat{A}^{+}(t)\right]$. Después de algunos pasos algebraicos llegamos a

$$\left[\widehat{A}(t), \widehat{A}(t)^{+}\right] = \left[\widehat{a}\,(t)\,\widehat{a}\,(t)\,, \widehat{a}^{+}\,(t)\,\widehat{a}^{+}\,(t)\right] + \left[\widehat{a}\,(t)\,\widehat{a}\,(t)\,, \frac{\lambda}{x^2}\right] + \left[\frac{\lambda^*}{x^2}, \widehat{a}^{+}\,(t)\,\widehat{a}^{+}\right]. \tag{4.31}$$

Ahora del conmutador (3.13) obtenemos

$$\widehat{a}\,(t)\,\widehat{a}^{+}\,(t) = K + \widehat{a}^{+}\,(t)\,\widehat{a}\,(t)\,. \tag{4.32}$$

Esta relación nos permite transformar el primer término de (4.31), llegamos a que

$$[\widehat{a}\,(t)\,\widehat{a}\,(t)\,,\widehat{a}^{+}\,(t)\,\widehat{a}^{+}\,(t)] = 2K^2 + 4K\widehat{a}^{+}\,(t)\,\widehat{a}\,(t)\,, \tag{4.33}$$

introduciendo explícitamente a los operadores $\widehat{a}\,(t)$ y $\widehat{a}^{+}\,(t)$ en (4.33) de acuerdo a (3.28) y (3.29), obtenemos

$$[\widehat{a}\,(t)\,\widehat{a}\,(t)\,,\widehat{a}^{+}\,(t)\,\widehat{a}^{+}\,(t)] = 2K^2 + 4K\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K^2x^2\right). \tag{4.34}$$

Para el segundo término de (4.31) obtenemos,

$$\left[\widehat{a}\,(t)\,\widehat{a}\,(t)\,,\frac{\lambda}{x^2}\right] = -\lambda\left(\widehat{a}\,(t)\,\widehat{a}\,(t)\,\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\widehat{a}\,(t)\,\widehat{a}\,(t)\right), \tag{4.35}$$

mientras que para el tercero

$$\left[\frac{\lambda^*}{x^2},\widehat{a}^{+}\,(t)\,\widehat{a}^{+}(t)\right] = -\lambda^*\left(\frac{1}{x^2}\widehat{a}^{+}\,(t)\,\widehat{a}^{+}\,(t) - \widehat{a}^{+}\,(t)\,\widehat{a}^{+}\,(t)\,\frac{1}{x^2}\right), \tag{4.36}$$

sumando (4.35), (4.36) e introduciendo los operadores $\widehat{a}\,(t)$ y $\widehat{a}^{+}(t)\,(t)$ de acuerdo a (3.28) y (3.29) se tiene

$$\left[\widehat{a}\,(t)\,\widehat{a}\,(t)\,,\frac{\lambda}{x^2}\right] + \left[\frac{\lambda^*}{x^2},\widehat{a}^{+}\,(t)\,\widehat{a}^{+}(t)\right] = 4k(t)\frac{l\,(l+1)}{2x^2}. \tag{4.37}$$

Finalmente, sustituimos (4.34), y (4.37) en (4.31) encontramos el conmutador buscado

$$\left[\widehat{A}(t),\widehat{A}^{+}(t)\right] = 4K(t)\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}K^2(t)x^2 + \frac{l\,(l+1)}{2x^2}\right) = 2K(t)\widehat{H}_D(t). \tag{4.38}$$

Demostración de la Propiedad 2.
Sigue inmediatamente de la Propiedad 1 mediante

$$\left[\widehat{A}^{+}(t),\widehat{A}(t)\right] = -\left[\widehat{A}(t),\widehat{A}^{+}(t)\right].$$

Demostración de la Propiedad 3.
Escribimos al hamiltoniano como

$$\widehat{H}_D(t) = \widehat{H}_{OA}(t) + \frac{\lambda}{x^2}. \tag{4.1}$$

donde $\widehat{H}_{OA}(t)$ es el hamiltoniano del oscilador armónico (2.1). Con (3.3) escribimos

$$\widehat{H}_{OA}(t) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2 = \widehat{a}^{+}(t)\,\widehat{a}(t) + \frac{1}{2}K. \tag{4.39}$$

Desarrollamos el comutador

$$\left[\widehat{H}_D(t), \widehat{A}^{+}(t)\right] = \left[\widehat{H}_{OA}(t) + \frac{\lambda}{x^2}, \widehat{a}^{+}(t)\,\widehat{a}^{+}(t) - \frac{\lambda}{x^2}\right]$$

$$= \left[\widehat{H}_{OA}(t), \widehat{a}^{+}(t)\,\widehat{a}^{+}(t)\right] + \left[\widehat{H}_{OA}(t), -\frac{\lambda}{x^2}\right] + \left[\frac{\lambda}{x^2}, \widehat{a}^{+}(t)\,\widehat{a}^{+}(t)\right]. \tag{4.40}$$

Con las propiedades de $\widehat{a}(t)$ y $\widehat{a}^{+}(t)$ establecidas en el capitulo 3, se desarrollan los tres términos de (4.40). Los resultados son: primer término

$$\left[\widehat{H}_{OA}(t), \widehat{a}^{+}(t)\,\widehat{a}^{+}(t)\right] = 2K(t)\widehat{a}^{+}(t)\,\widehat{a}^{+}(t)\,. \tag{4.41}$$

Segundo término:

$$\left[\widehat{H}_{OA}(t), -\frac{\lambda}{x^2}\right] = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{4}{x^3}\frac{d}{dx} - \frac{6}{x^4}\right). \tag{4.42}$$

Tercer término:

$$\left[\frac{\lambda}{x^2}, \widehat{a}^{+}(t)\,\widehat{a}^{+}(t)\right] = \frac{\lambda}{2f^2}\left[\frac{4}{x^3}\frac{d}{dx} - \frac{4K(t)}{x^2} - \frac{6}{x^4}\right]. \tag{4.43}$$

Entonces, al introducir (4.41), (4.42) y (4.43) en (4.40) llegamos al resultado esperado

$$\left[\widehat{H}_D(t), \widehat{A}^{+}(t)\right] = 2K\,(t)\,\widehat{A}^{+}(t). \tag{4.44}$$

Demostración de la Propiedad 4.

La demostración de esta propiedad es muy similar a la de la Propiedad 3, por lo que la omitimos.

Las propiedades anteriores ponen de relieve lo que ya se había mencionado: Los operadores $\widehat{A}(t)$ y $\widehat{A}^{+}(t)$ son operadores de escalera, lo cual se refleja en las propiedades 3 y 4, las cuales serán usadas en la siguiente Sección en la que construimos todas las funciones de onda, es decir las eigenfunciones del hamiltoniano $\widehat{H}_D(t)$. Sin embargo $\widehat{A}(t)$ y $\widehat{A}^{+}(t)$ no factorizan al mismo hamiltoniano $\widehat{H}_D(t)$. Esto último se deduce de las propiedades 1 y 2. Entonces tenemos al menos un caso en el que los operadores de ascenso y descenso no factorizan al hamiltoniano.

Este resultado no debe sorprender, pues $\widehat{A}(t)$ y $\widehat{A}^{+}(t)$ son de segundo orden en la derivada $\frac{d}{dx}$, lo mismo que el hamiltoniano $\widehat{H}_D$. Por otro lado se tiene la idea de que si un hamiltoniano es factorizado por dos operadores diferenciales, estos mismos operadores son los que generan las soluciones de la ecuación de Schrödinger, esto no ocurre necesariamente como se demuestra en la ref. [8].

4.4. Generación de las funciones de onda

En la sección 4.2 demostramos que la solución de la ecuación diferencial

$$\widehat{A}(t)\phi_0\left(x,t\right)=0, \qquad (4.16)$$

es

$$\phi_0\left(x,t\right)=e^{-K(t)x^2/2}x^{l+1}. \qquad (4.22)$$

Vamos a analizar en mas detalle esta función. Por la condición de frontera

$$\lim_{x\to 0}\phi_0\left(x,t\right)=0,$$

debemos tomar en cuenta el factor $x^{(l+1)}$. Para que la condición de frontera se cumpla, es necesario que

$$\lim_{x\to 0}x^{(l+1)}=0,$$

pero para eso, el exponente $(l+1)$ debe ser un número real y positivo. Como $l>0$, se cumple que $l+1>0$.

La ecuación (4.16) tiene su origen en la suposición de que $\widehat{A}(t)$ es un operador de descenso. Esto dio como resultado la función de onda del estado base (4.22), la cual tiene un sólido fundamento físico al cumplir con las condiciones de frontera (4.19) y (4.20). Ahora vamos a justificar plenamente que $\widehat{A}(t)$ es efectivamente de descenso, por medio de la propiedad 4:

$$\left[\widehat{H}_D(t),\widehat{A}(t)\right]=-2K\left(t\right)\widehat{A}(t). \qquad (4.28)$$

de la que se encuentra que

$$\widehat{A}(t)\widehat{H}_D(t)=\widehat{H}_D(t)\widehat{A}(t)+2K(t)\widehat{A}(t)=\left(\widehat{H}_D(t)+2K(t)\right)\widehat{A}(t). \qquad (4.45)$$

Ahora, si $|n\rangle$ es un eigen estado del hamiltoniano $\widehat{H}_D(t)$ del oscilador isotónico

$$\widehat{H}_D(t)\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle \tag{4.46}$$

entonces, al aplicar $\widehat{A}(t)$ a la expresión anterior obtenemos

$$\widehat{A}(t)\widehat{H}_D(t)\,|n\rangle = E_n\widehat{A}(t)\,|n\rangle$$

que por (4.45) es equivalente a

$$\widehat{A}(t)\widehat{H}_D(t)\,|n\rangle = \left(\widehat{H}_D(t) + 2K(t)\right)\widehat{A}(t)\,|n\rangle = E_n\widehat{A}(t)\,|n\rangle\,,$$

que se puede escribir así

$$\widehat{H}_D(t)\left(\widehat{A}(t)\,|n\rangle\right) = (E_n - 2K(t))\left(\widehat{A}(t)\,|n\rangle\right). \tag{4.47}$$

Entonces: si $|n\rangle$ es un eigenvector propio del hamiltoniano $\widehat{H}_D(t)$ con eigenvalor E_n entonces $\widehat{A}(t)\,|n\rangle$ es también un eigenvector de $\widehat{H}_D(t)$ pero con eigenvalor $E_n - 2K(t)$. Entonces $\widehat{A}(t)$ ha descendido del estado de energía E_n al estado de energía $E_n - 2K(t)$. En el caso estacionario en el que $K(t) = 1$ el descenso ha sido de 2 unidades, lo cual coincide con Dongpei [1]. Entonces en el caso que estamos tratando el descenso ha sido de $2K\,(t)$ unidades. Simbólicamente escribimos

$$\widehat{A}(t)\,|n\rangle \sim |n - 2K(t)\rangle\,.$$

Todo lo anterior es una comprobación de que $\widehat{A}(t)$ es efectivamente un operador de descenso.

Ahora vamos a demostrar que $\widehat{A}^{+}(t)$ es un operador de ascenso. Aplicamos a (4.46) el operador $\widehat{A}^{+}(t)$:

$$\widehat{A}^{+}(t)\widehat{H}_D(t)\,|n\rangle = E_n\widehat{A}^{+}(t)\,|n\rangle$$

Pero tenemos por la propiedad 4 que

$$\widehat{A}^{+}(t)\widehat{H}_D(t) = \widehat{H}_D(t)\widehat{A}^{+}(t) - 2K\,(t)\,\widehat{A}^{+}(t) = \left(\widehat{H}_D(t) - 2K(t)\right)\widehat{A}^{+}(t),$$

así que

$$\widehat{A}^{+}(t)\widehat{H}_D(t)\,|n\rangle = \left(\widehat{H}_D - 2K(t)\right)\widehat{A}^{+}(t)\,|n\rangle = E_n\widehat{A}(t)^{+}\,|n\rangle\,,$$

o lo que es lo mismo

$$\widehat{H}_D(t)\left(\widehat{A}^{+}(t)\left|n\right\rangle\right) = \left(E_n + 2K(t)\right)\left(\widehat{A}^{+}(t)\left|n\right\rangle\right). \qquad (4.48)$$

El resultado anterior se interpreta de la siguiente manera: Si $|n\rangle$ es un eigenvector propio del hamiltoniano $\widehat{H}_D(t)$ con eigenvalor E_n entonces $\widehat{A}^{+}(t)\left|n\right\rangle$ es también un eigenvector de $\widehat{H}_D(t)$ pero con eigenvalor $E_n + 2K(t)$. Si estamos en el caso estacionario en el que $K(t) = 1$ entonces los niveles de energía del oscilador isotónico están igualmente separados pero por una distancia 2, en lugar de 1 como en oscilador armónico estacionario. Entonces hemos demostrado tres cosas:

1. $\widehat{A}$ es un operador de descenso.
2. $\widehat{A}^{+}$ es un operador de ascenso.
3. Empezando con la mínima energía E_0, todos los demás niveles de energía están igualmente separados por $2K(t)$. La forma exacta del espectro de energía la calculamos en la siguiente sección.

   Para generar la función de onda del estado $n = 1$ aplicamos el operador de ascenso al estado base y así sucesivamente para los siguientes estados

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &\sim \widehat{A}^{+}(t)\phi_0(x),\\
\phi_2(x) &\sim \left(\widehat{A}^{+}(t)\right)^2 \phi_0(x),\\
\phi_3(x) &\sim \left(\widehat{A}^{+}(t)\right)^3 \phi_0(x),\\
&\cdots\\
\phi_n(x) &\sim \left(\widehat{A}^{+}(t)\right)^n \phi_0(x).
\end{aligned} \qquad (4.49)$$

Ahora vamos a calcular explícitamente las funciones de onda. Se sustituye $\widehat{a}^{+}(t)\,\widehat{a}^{+}(t)$ en el operador de ascenso (4.11) $\widehat{A}^{+}(t)$, con

$$\widehat{a}^{+}(t) = M\left(-\frac{d}{d\xi} + \xi\right), \qquad (3.37)$$

donde hemos puesto $\xi = \sqrt{K(t)}x$ como en el Capítulo 3, donde

$$M(t) = \frac{\sqrt{K(t)}}{\sqrt{2}f(t)}.$$

Así, podemos escribir la forma del operador de ascenso (4.30) explícitamente como un operador de segundo orden en la derivada.

$$\widehat{A}^{+}(t)=\widehat{a}^{+}(t)\,\widehat{a}^{+}(t)-\frac{1}{f^{2}(t)}\frac{l\,(l+1)}{2x^{2}}=M^{2}\left[\left(-\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\left(-\frac{d}{d\xi}+\xi\right)-\frac{l\,(l+1)}{\xi^{2}}\right].$$

Con (3.37) y (4.30) encontramos la siguiente forma de $\widehat{A}^{+}(t)$. Realizando el álgebra necesaria, encontramos que el operador $\widehat{A}^{+}(t)$ tiene la forma

$$\widehat{A}^{+}(t)=M^{2}\left[\frac{d^{2}}{d\xi^{2}}-2\xi\frac{d}{d\xi}+\left(\xi^{2}-1\right)-\frac{l\,(l+1)}{\xi^{2}}\right]. \tag{4.50}$$

Ahora hacemos el cambio de variable $\xi=\sqrt{K(t)}x$ en el estado base (4.20), llegando a

$$\phi_{0}\,(\xi)\sim e^{-\xi^{2}/2}\xi^{l+1}. \tag{4.51}$$

Calculamos las dos primeras derivadas de $\phi_{0}\,(\xi)$:

$$\frac{d}{d\xi}\phi_{0}\,(\xi)=\left(-\xi+\frac{l+1}{\xi}\right)\phi_{0},$$

$$\frac{d^{2}}{d\xi^{2}}\phi_{0}\,(\xi)=\left(\frac{l^{2}+l}{\xi^{2}}-2l+\xi^{2}-3\right)\phi_{0},$$

Para encontrar el primer estado excitado aplicamos (4.50) a (4.5 1)

$$\phi_{1}\,(\xi)\sim\widehat{A}^{+}(t)\phi_{0}\,(\xi)\sim\left(\frac{d^{2}\phi_{0}}{d\xi^{2}}-2\xi\frac{d\phi_{0}}{d\xi}+\left(\xi^{2}-1\right)\phi_{0}\right)-\frac{l\,(l+1)}{\xi^{2}}\phi_{0}, \tag{4.52}$$

sustituimos las derivadas en (4.52). Se obtiene

$$\phi_{1}\,(\xi)\sim\left(-\xi^{2}+l+\frac{1}{2}+1\right)\phi_{0}\,(\xi)\,.$$

Ahora comparamos con el polinomio asociado de Laguerre de primer grado [4]

$$L_{1}^{\alpha}\,(u)=-u+\alpha+1$$

e identificamos $u=\xi^{2}$, $\alpha=l+\frac{1}{2}$. Por lo tanto la función de onda para el primer estado excitado es

$$\phi_{1}\,(\xi)=C_{1}L_{1}^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^{2}\right)\phi_{0}\,(\xi)\,, \tag{4.53}$$

donde C_{1} es una constante de normalización, independiente tanto de x como de t.

De la misma manera, y de acuerdo al segundo renglón de (4.49), podemos encontrar $\phi_1(\xi)$ por medio de

$$\phi_2(\xi) \sim \widehat{A}^{+}\phi_1(\xi) \sim \left(\frac{d^2\phi_1}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d\phi_1}{d\xi} + \left(\xi^2 - 1\right)\phi_1\right) - \frac{l(l+1)}{\xi^2}\phi_1,$$

calculamos las derivadas $\frac{d\phi_1}{d\xi}$ y $\frac{d^2\phi_1}{d\xi^2}$ y entonces

$$\phi_2(\xi) = C_2 L_2^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^2\right)\phi_0(\xi), \tag{4.54}$$

en general

$$\phi_n(\xi) = C_n L_n^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^2\right)\phi_0(\xi). \tag{4.55}$$

Para calcular $\phi_n(x)$ debemos hacer las derivadas primera y segunda de todas la anteriores funciones $\phi_m(\xi)$, $m = 0, 1, \cdots, n-1$, lo cual es muy engorroso. Se puede realizar en un programa, por ejemplo, el Mathematica, pero nosotros hemos encontrado un mecanismo que evita todo lo anterior, y lo describimos en la siguiente sección.

4.5. Nueva forma de calcular $\phi_n(\xi)$

Ahora vamos a exponer una manera de eliminar la derivada del operador de ascenso, el cual, de acuerdo a (4.50), es de segundo orden. Vamos a suponer que no sabemos de la solución general del oscilador isotónico, excepto el potencial y la forma del operador de ascenso. Hacemos primero algunas consideraciones generales sobre sistemas cuánticos: Para un sistema cuántico que consiste de una partícula atrapada por un potencial en una región o regiones bien determinadas, la función de onda tiene la forma típica

$$\phi(\xi) = h(\xi)\phi_0(\xi), \tag{4.56}$$

donde $\phi_0(\xi)$ es la función de onda del estado base y es la que garantiza que se cumplan las condiciones de frontera que impone el potencial. La función $h(\xi)$ es un polinomio ortogonal $h_n(\xi)$ en la que n indica el grado, se escoge que el polinomio de grado cero sea igual a 1: $h_0(\xi) = 1$ [7]. Aplicamos estas ideas al oscilador isotónico.

Hemos encontrado que la función de onda del estado base es

$$\phi_0(\xi) = \xi^{l+1}e^{-\xi^2/2} \tag{4.57}$$

la cual cumple las condiciones de frontera

$$\phi_0(\pm\infty) = 0, \qquad (4.19)$$

$$\phi_0(0) = 0. \qquad (4.20)$$

Ahora vamos a encontrar el polinomio $h_n(\xi)$ para el oscilador isotónico. Lo hacemos aplicando el operador $\widehat{A}^{+}(t)$ de ascenso a (4.46). Para ello necesitamos las siguientes derivadas

$$\frac{d}{d\xi}\phi_0(\xi) = \left(-\xi + \frac{l+1}{\xi}\right)\phi_0, \tag{4.58}$$

$$\frac{d}{d\xi}\phi(\xi) = \left[\frac{dh}{d\xi} + \left(-\xi + \frac{l+1}{\xi}\right)h\right]\phi_0(\xi), \tag{4.59}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\phi(\xi) = \left[\frac{d^2h}{d\xi^2} + \left(-2\xi + 2\frac{l+1}{\xi}\right)\frac{dh}{d\xi} + \left(\frac{l(l+1)}{\xi^2} + \xi^2 - 2l - 3\right)h\right]\phi_0(\xi). \tag{4.60}$$

Ahora aplicamos el operador de ascenso (4.50) a $\phi(\xi) = h(\xi)\phi_0(\xi)$. Usando (4.58), (4.59) y (4.60) y haciendo el álgebra necesaria llegamos a

$$\widehat{A}^{+}(t)\left[h(\xi)\phi_0(\xi)\right] = M^2\left[\frac{d^2h}{d\xi^2} + \left(-4\xi + 2\frac{l+1}{\xi}\right)\frac{dh}{d\xi} - 4L_1^{l+\frac{1}{2}}h\right]\phi_0(\xi). \tag{4.61}$$

En (4.61) aparece el polinomio asociado de Laguerre

$$L_1^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^2\right) = -\xi^2 + l + \frac{1}{2} + 1. \tag{4.62}$$

La expresión (4.61) es la mas importante en nuestro desarrollo. Es la clave para obtener cualquier polinomio $h(x)$. Vamos a aplicar (4.62) a los casos más sencillos, para tener una guía que nos indique el tipo de polinomio que es $h_n(\xi)$.

Empezamos con el polinomio de grado cero $h_0(\xi) = 1$. Obtenemos casi inmediatamente

$$\widehat{A}^{+}(t)\phi_0(\xi) = M^2\left(4\xi^2 - 4l - 6\right)\phi_0 = -4M^2L_1^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^2\right)\phi_0(\xi). \tag{4.63}$$

La comparación de (4.63) con (4.56) nos permite concluir que el polinomio $h_1(\xi)$ de grado $n = 1$ es

$$h_1(\xi) = L_1^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^2\right), \tag{4.64}$$

es decir, el polinomio de Laguerre de grado 1 en ξ^2 (o de grado 2 en ξ).

Para hallar $\phi_2(\xi)$ aplicamos $\widehat{A}^{+}(t)$ a (4.63)

$$\widehat{A}^{+}(t)\left(L_1^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^2\right)\phi_0\xi\right) = (-4)^2M^4\phi_0\left(l^2-2l\xi^2+4l+\xi^4-5\xi^2+\frac{15}{4}\right)$$

De Gradshtein encontramos el polinomio asociado de Laguerre de segundo grado en ξ^2

$$L_2^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^2\right)=\xi^4-5\xi^2-2l\xi^2+l^2+4l+\frac{15}{4}$$

por lo que

$$\widehat{A}^{+}(t)\left(L_1^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^2\right)\phi_0\left(\xi\right)\right)=(-4)^2M^4L_2^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^2\right)\phi_0\left(\xi\right).$$

Tomando en cuenta los dos resultado anteriores, se puede demostrar por inducción que la expresión (4.62) se puede escribir

$$\widehat{A}^{+}(t)\left(L_n^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^2\right)\phi_0\left(\xi\right)\right)=(-4)^nM^{2n}\left[\frac{d^2L_n^{l+\frac{1}{2}}}{d\xi^2}+\left(-4\xi+2\frac{l+1}{\xi}\right)\frac{dL_n^{l+\frac{1}{2}}}{d\xi}-4L_1^{l+\frac{1}{2}}L_n^{l+\frac{1}{2}}\right]\phi_0. \tag{4.65}$$

Con la suposición de que el polinomio $h(\xi)$ de (4.64) es el polinomio de Laguerre de grado uno $L_1^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^2\right)$, podemos deducir que en general la solución es de la forma

$$\phi_n(\xi)=L_n^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^2\right)\phi_0(\xi)$$

donde ahora

$$h_n(\xi)=L_n^{l+\frac{1}{2}}\left(\xi^2\right)$$

es el polinomio de Laguerre de grado n. Para comprobarlo hacemos lo siguiente. Primero bajamos el orden del operador diferencial $\widehat{A}^{+}(t)$ en (4.50) utilizando la ecuación de Laguerre

$$t\frac{d^2u}{dt^2}+(\alpha-t+1)\frac{du}{dt}+nu=0$$

cuya solución es $L_n^{\alpha}(t)$.

Para poder calcular la función de onda sabemos que es un poco engorroso derivar tantas veces según el orden de la función, usando el polinomio de Laguerre se obtiene para el caso general,

$$\phi_{n+1}(\xi)=\frac{C_n\phi_0}{2f(t)^2}\left[4\xi\frac{d^2L_n^a}{d\xi^2}+2\frac{dL_n^a}{d\xi}+(-8\xi+4(l+1))\frac{dL_n^a}{d\xi}-4L_1^aL_n^a\right] \tag{4.66}$$

cambiamos $l+1 = a + \frac{1}{2}$ y sustituimos en (4.66)

$$\phi_{n+1}(\xi) = \frac{4C_n\phi_0}{2f(t)^2}\left[\xi\frac{d^2L_n^a}{d\xi^2} + \left(\frac{3}{2} + l - 2\xi\right)\frac{dL_n^a}{d\xi} - L_1^a L_n^a\right]. \tag{4.67}$$

Ahora usamos la ecuación de Laguerre

$$\frac{d^2L_n^a}{d\xi^2} = \left(\frac{-a-1}{\xi} + 1\right)\frac{dL_n^a}{d\xi} - \frac{1}{\xi}nL_n^a, \tag{4.68}$$

sustituimos (4.68) en (4.67)

$$\phi_{n+1}(\xi) = \frac{4C_n\phi_0}{2f(t)^2}\left[\left(-a - 1 + \xi + \frac{3}{2} + l - 2\xi\right)\frac{dL_n^a}{d\xi} - \left(n + L_1^a\right)L_n^a\right] \tag{4.69}$$

y cambiamos $a = l + \frac{1}{2}$ en (4.69) es

$$\phi_{n+1}(\xi) = \frac{4C_n\phi_0}{2f(t)^2}\left[-\xi\frac{dL_n^a}{d\xi} - \left(n + L_1^a\right)L_n^a\right]. \tag{4.70}$$

La relación de recurrencia ([3], página 1001)

$$\xi\frac{dL_n^a}{d\xi} = (n+1)\,L_{n+1}^a - (n + a + 1 - \xi^2)L_n^a. \tag{4.71}$$

Ponemos $a = l + \frac{1}{2}$

$$\xi\frac{dL_n^a}{d\xi} = (n+1)\,L_{n+1}^a - \left(n + 1 + \frac{3}{2} - \xi^2\right)L_n^a. \tag{4.72}$$

Regresamos a (4.70) con (4.62)y (4.72) se tiene

$$\phi_{n+1}(\xi) = \frac{2C_n\phi_0}{f(t)^2}\left[-\left(n+1\right)L_{n+1}^a\right],$$

por lo tanto la función de onda para el caso general es

$$\phi_{n+1}(\xi) = \frac{C_n}{f^2(t)}L_{n+1}^a\phi_0(\xi). \tag{4.73}$$

Entonces hemos encontrado la solución general para el oscilador isotónico temporal sin necesidad de derivar, utilizando dos propiedades de los polinomios de Laguerre:

1. La ecuación diferencial de laguerre (4.68).
2. La relación de recurrencia (4.71).

4.6. La función $S_n(x,t)$ y el espectro de energía

De acuerdo a las expresiones generales para la función $S_n(x,t)$ del Capítulo 3. Ahora la calculamos con

$$S_n(x,t) = \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2}, \tag{4.74}$$

donde ϕ_n es la solución (4.55) para el oscilador isotónico

$$\phi_n(\xi,t) = C_n(t) L_n^{l+\frac{1}{2}}(\xi^2)\phi_0(x). \tag{4.55}$$

La segunda derivada de esta función ya fue calculada. El resultado está dado por (4.60), pero lo escribimos en la forma

$$\frac{d^2\phi_n}{dx^2} = D_n K \left[\frac{d^2 L_n^\alpha}{d\xi^2} - 2\left(\xi - \frac{l+1}{\xi}\right)\frac{dL_n^\alpha}{d\xi} + \left(\xi^2 + \frac{l(l+1)}{\xi^2} - 2l - 3\right) L_n^\alpha\right]\phi_0 \tag{4.75}$$

donde se uso la equivalencia entre derivadas

$$\frac{d^2}{dx^2} = K(t)\frac{d^2}{d\xi^2},$$

debido a que $\xi = \sqrt{K(t)}x$. Ahora utilizamos la ecuación asociada de Laguerre [4]

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(-1 + \frac{\alpha+1}{t}\right)\frac{du}{dt} + \frac{n}{t}u = 0,$$

donde la solución es

$$u(t) = L_n^a(\xi^2)$$

por lo que hacemos el cambio de variable

$$t = \xi^2.$$

Con este cambio y la ecuación de Laguerre encontramos que la segunda derivada de L_n^α que aparece en (4.75) es

$$\frac{d^2 L_n^\alpha}{d\xi^2} = 2\left(\xi - \frac{l+1}{\xi}\right)\frac{dL_n^\alpha}{d\xi} - 4nL_n^\alpha \tag{4.76}$$

Combinando (4.75) y (4.76) obtenemos la función S_n para el oscilador isotónico, ya en términos de x:

$$S_n(x,t) = \frac{d^2\phi_n}{dx^2} = \left[K^2(t)x^2 + \frac{l(l+1)}{x^2} + K(t)(-2l-3-4n)\right]\phi_0(x). \tag{4.77}$$

Ahora usamos la expresión (3.41) pero con el potencial $V(x,t)$ del oscilador isotónico

$$S_n(x,t) = 2V(x,t) - 2E_n = \left[2\left(\frac{1}{2}k(t)x^2 + \frac{l(l+1)}{2x^2} - 2E_n\right)\right]\phi_0, \tag{4.78}$$

la comparación de (4.77) y (4.78) de lugar a

$$k(t)x^2 + \frac{l(l+1)}{x^2} - 2E_n = K^2(t)x^2 + \frac{l(l+1)}{x^2} + K(t)(-2l-3-4n)$$

de donde se despeja E_n

$$E_n = \frac{1}{2}(k(t) - K^2(t))x^2 + K(t)\left(2n + \frac{3}{2} + l\right).$$

Al igual que en oscilador armónico temporal, debemos hacer que

$$k(t) - K^2(t) = 0, \tag{4.79}$$

pues la energía no puede depender de la posición x. En consecuencia el espectro de energía es

$$E_n = K(t)\left(2n + \frac{3}{2} + l\right), \tag{4.80}$$

cuando $K(t) = 1$ obtenemos la expresión Ec (20) de [1].

Capítulo 5

El nuevo sistema cuántico

5.1. Introducción

Una línea de investigación que se inició con el nacimiento de la mecánica cuántica y que continúa teniendo plena vigencia, es encontrar soluciones exactas de la ecuación de Schrödinger. Como se mencionó en el Capítulo 1 los métodos de solución actualmente son variados. Entre los mecanismos recientes tenemos el introducido por Mielnik [2] basado en la factorización del hamiltoniano por operadores de escalera. En la Sección 5.2 presentamos los aspectos más relevantes del trabajo de Mielnik, quien, partiendo de los operadores de escalera del oscilador armónico genera nuevos operadores de escalera de carácter mas general que llevan a un nuevo sistema cuántico, es decir, a un hamiltoniano que contiene a un potencial que tiene como caso particular al oscilador armónico. Pero lo mas importante es que encuentra también la solución exacta de este nuevo sistema y con el mismo espectro de energía que el del oscilador armónico. Posteriormente, Dongpei aplica el método de Mielnik al oscilador isotónico y efectivamente construye otro sistema de carácter más general que el isotónico, con solución exacta y con el mismo espectro de energía que calculamos en el Capítulo 4, Ec. (4.80). Nuestra contribución a este problema la presentamos en la Sección 5.3. Aunque encontramos los mismos resultados que Dongpei, consideramos que nuestro enfoque es mas claro y directo, pues se hace generalizando los operadores de escalera del oscilador armónico, lo cual no hace Dongpei.

5.2. Mielnik

5.2.1. Oscilador armónico

Para empezar recordamos que el hamiltoniano del oscilador armónico

$$\widehat{H}_{OA} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 \qquad (2.1)$$

es factorizado por los operadores

$$\widehat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + x\right), \qquad (2.2)$$

$$\widehat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + x\right), \qquad (2.3)$$

de la siguiente manera

$$\widehat{H}_{OA} = \widehat{a}\widehat{a}^+ - \frac{1}{2}, \qquad (2.4)$$

$$= \widehat{a}^+\widehat{a} + \frac{1}{2}. \qquad (2.5)$$

5.2.2. Oscilador de Mielnik

En la Ref [2] se propone una nueva factorización de (2.1) con los operadores

$$\widehat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + \beta(x)\right), \qquad (5.1)$$

$$\widehat{b}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + \beta(x)\right). \qquad (5.2)$$

Observamos que (5.1) coincide con (2.2) cuando la función desconocida $\beta(x)$ es

$$\beta(x) = x, \qquad (5.3)$$

y lo mismo ocurre comparando (5.2) y (2.3). Pero los operadores (5.1) y (5.2) no son totalmente arbitrarios. Se les impone la condición de factorización

$$\widehat{H}_{OA} = \widehat{b}\widehat{b}^+ - \frac{1}{2}, \qquad (5.4)$$

que es completamente equivalente a (2.4). Al hacer el producto $\widehat{b}\widehat{b}^{+}$ se encuentra que es

$$\widehat{b}\widehat{b}^{+} = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \beta' + \beta^2\right),$$

por lo que al sustituir en (5.4) encontramos

$$\widehat{H}_{OA} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\left(\beta' + \beta^2\right) - \frac{1}{2}. \tag{5.5}$$

La expresión (5.5) para $\widehat{H}_{OA}$ debe coincidir con la (2.1). Para que ocurra eso la función desconocida $\beta(x)$ debe cumplir la igualdad

$$\beta' + \beta^2 = 1 + x^2. \tag{5.6}$$

La ecuación (5.6) es una ecuación no lineal, llamada ecuación de Ricatti. Es claro que (5.3) es una solución particular de (5.6), por lo que en realidad debemos escribir

$$\beta_P(x) = x, \qquad (5.3)$$

la solución general de la ecuación de Ricatti (5.6) es de la forma

$$\beta(x) = \beta_P(x) + \phi(x) = x + \phi(x).$$

En la Ref. [2] se encuentra la solución general $\beta(x)$ de la ecuación de Ricatti (5.6):

$$\beta(x) = x + \frac{e^{-x^2}}{\gamma + \int_0^x e^{-t^2}dt} = x + \frac{e^{-x^2}}{\gamma + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\ (x)} \tag{5.7}$$

donde [3]

$$\mathrm{erf}\ (x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

es la función error, con la propiedad

$$\mathrm{erf}\ (\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Con este resultado, Mielnik construye un nuevo sistema cuántico, de la siguiente manera: el producto $\widehat{b}^{+}\widehat{b}$ es

$$\widehat{b}^{+}\widehat{b} = \widehat{H}_{OA} + \frac{1}{2} - \beta' = \widehat{H}_{OA} + \frac{1}{2} - \frac{d}{dx}\left[x + \frac{e^{-x^2}}{\gamma + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\ (x)}\right] = \widehat{H}_{OA} - \frac{d}{dx}\frac{e^{-x^2}}{\gamma + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\ (x)} - \frac{1}{2}.$$

Comparando con (2.5)

$$\widehat{a}^{+}\widehat{a} = \widehat{H}_{OA} - \frac{1}{2}, \qquad (2.5)$$

surge la idea de establecer un hamiltoniano $\widehat{H}$ tal que

$$\widehat{b}^{+}\widehat{b} = \widehat{H} - \frac{1}{2}, \tag{5.8}$$

este hamiltoniano debe ser

$$\widehat{H} = \widehat{H}_{OA} - \frac{d}{dx}\frac{e^{-x^2}}{\gamma + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{erf }(x)} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{d}{dx}\frac{e^{-x^2}}{\gamma + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{erf }(x)}$$

$$\widehat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x). \tag{5.9}$$

Se encuentra que [2] el nuevo sistema cuántico cuyo potencial es

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{d}{dx}\frac{e^{-x^2}}{\gamma + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{erf }(x)} \tag{5.10}$$

tiene solución exacta [2] y lo que es inesperado, tiene el mismo espectro de energía que el oscilador armónico.

5.3. Operadores de escalera generalizados

En esta Sección empleamos el mecanismo de Mielnik para ser aplicado al oscilador isotónico de Dongpei. En su artículo Dongpei presenta resultados sin casi explicar como los obtiene. Nosotros obtenemos los mismos resultados pero incorporando al tiempo, comenzando con los operadores de escalera del capitulo 3. Ahora hacemos una factorización del hamiltoniano del oscilador isotónico de Dongpei generalizado,

$$\widehat{H}_{DG}(t) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}k(t)x^2 + M^2\frac{l(l+1)}{x^2} \tag{5.11}$$

Nosotros ponemos una forma para los operadores semejantes a la de Mielnik (5.1) y (5.2), pero ahora, en lugar de la función $\beta(x)$, introducimos una función

$\rho(x,t)$, la cual será determinada con el mismo método, pero llevando el tiempo: el cual es factorizado por los operadores

$$\widehat{d}(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + \rho(x,t)\right), \tag{5.12}$$

$$\widehat{d}^{+}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}f(t)}\left(-\frac{d}{dx} + \rho(x,t)\right). \tag{5.13}$$

Estos operadores tiene también la función $f(t)$ del Capítulo anterior. De nuevo, como lo hace Mielnik con (5.4), la función $\rho(x,t)$ debe ser determinada a partir de la siguiente factorización

$$\widehat{H}_{DG}(t) = \widehat{d}\widehat{d}^{+} + l - \frac{1}{2}, \tag{5.14}$$

debemos indicar que esta factorización es la clave de la generalización que estamos realizando. Ahora comparamos (5.14) con (5.4). Efectuando el producto de (5.12) y (5.13) obtenemos

$$\widehat{d}\widehat{d}^{+} = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d\rho}{dx} + \rho^2\right), \tag{5.15}$$

$$\widehat{d}^{+}\widehat{d} = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d\rho}{dx} + \rho^2\right). \tag{5.16}$$

Así

$$\widehat{H}_{DG}(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d\rho}{dx} + \rho^2\right) + l - \frac{1}{2} \tag{5.17}$$

La comparación entre (5.15) y (4.1) da lugar a la siguiente ecuación para la función $\rho(x)$:

$$\frac{d\rho}{dx} + \rho^2 = k(t)x^2 + M^2\frac{l(l+1)}{x^2} - 2l + 1 \tag{5.18}$$

Esta ecuación es de nuevo de tipo Ricatti, como la (5.6), solo que mas compleja del lado derecho. Para resolverla proponemos la siguiente forma,

$$\frac{d\rho}{dx} + \rho^2 = A + \frac{B}{x^2} + \left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2 \tag{5.19}$$

donde A y B solo dependen de la posición x pero pueden depender del tiempo.

Comparando (5.18) y (5.19) encontramos para A y B las siguientes formas

$$A = \frac{2l-1}{\Delta - 2}, \tag{5.20}$$

$$B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Delta, \tag{5.21}$$

con

$$\Delta = \sqrt{4M^2l^2 + 4M^2l + 1}. \tag{5.22}$$

Definiendo la función

$$p(x,t) = Ax - \frac{B}{x} \tag{5.23}$$

y su derivada

$$\frac{dp}{dx} = A + \frac{B}{x^2},$$

La ecuación (5.19) se puede escribir así:

$$\frac{d\rho}{dx} + \rho^2 = \frac{dp}{dx} + p^2. \tag{5.24}$$

La ecuación de Ricatti en la forma (5.24) nos dice que la función $p\,(x,t)$ es una solución particular, por lo que la solución general debe ser así:

$$\rho\,(x) = p\,(x) + \phi\,(x,t)\,. \tag{5.25}$$

Para determinar cómo es la función desconocida $\phi\,(x)$ sustituimos (5.25) en (5.24) y encontramos

$$\rho^2 + \frac{d\rho}{dx} = (p+\phi)^2 + p' + \phi' = \phi^2 + \frac{d\phi}{dx} + 2\phi p + p^2 + \frac{dp}{dx}.$$

La comparación con (5.24) da lugar a una ecuación diferencial para $\phi\,(x)$, también de tipo Ricatti:

$$\phi^2 + \frac{d\phi}{dx} + 2p\phi = 0. \tag{5.26}$$

La solución de (5.26) es (Ver Apéndice X, Gradshtein pag 1099))

$$\phi = \frac{x^{2l}e^{-x^2}}{\gamma + \int_0^x u^{2l}e^{-u^2}du} = \frac{x^{2l}e^{-x^2}}{\eta\,(x,t)} \tag{5.27}$$

con

$$\eta\,(x,t) = \gamma + \int_0^x u^{2l}e^{-u^2}du \tag{5.28}$$

debemos suponer que esta función dependerá también del tiempo. Finalmente

$$\rho\,(x) = Ax - \frac{B}{x} + \phi. \tag{5.29}$$

Entonces hemos encontrado la función $\rho(x)$ que entra en los operadores de escalera (5.12) y (5.13). Sustituyendo (5.24) en (5.12) y (5.13), donde A y B están dadas por (5.20) y (5.21) tenemos

$$\widehat{d}(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + A(t)x - \frac{B(t)}{x} + \phi(x)\right), \tag{5.30}$$

$$\widehat{d}^{+}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}f(t)}\left(-\frac{d}{dx} + A(t)x - \frac{B(t)}{x} + \phi(x)\right). \tag{5.31}$$

En las expresiones anteriores hemos puesto la dependencia explícita respecto al tiempo de A y B que aparecen en la función $p(x)$ definida en (5.24). Para aclarar un poco estas expresiones, las ponemos en términos de los operadores $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^{+}$ del oscilador armónico:

$$\widehat{d}(t) = \widehat{a} + \frac{f(t)}{\sqrt{2}}\left(-\frac{l}{x} + \phi(x)\right) \tag{5.32}$$

$$\widehat{d}^{+}(t) = \widehat{a}^{+} + \frac{1}{\sqrt{2}f(t)}\left(-\frac{l}{x} + \phi(x)\right). \tag{5.33}$$

Ahora en términos de los operadores $\widehat{A}$ y $\widehat{A}^{+}$ del oscilador isotónico de Dongpei

$$\widehat{d}(t) = \widehat{A} + \frac{f(t)}{\sqrt{2}}\phi(x,t) \tag{5.34}$$

$$\widehat{d}^{+}(t) = \widehat{A}^{+} + \frac{1}{\sqrt{2}f(t)}\phi(x,t). \tag{5.35}$$

Esta forma de los operadores es nueva en el sentido de que no aparecen en la literatura. Ahora vamos a ver las consecuencias de la existencia de la función $\frac{f(t)}{\sqrt{2}}\phi(x,t)$ en los nuevos operadores.

5.4. El potencial isotónico generalizado

Una vez obtenidos los operadores de escalera apropiados, y siguiendo el método de Mielnik, vamos a construir el nuevo oscilador isotónico que llamamos generalizado. En este sistema ya está incluido el tiempo, lo cual es nuestra contribución. Para empezar hacemos uso del producto $\widehat{d}^{+}\widehat{d}$ que se encuentra en (5.16). El hamiltoniano $\widehat{H}_{DG}$ es también factorizado, según (5.16), por

$$\widehat{H}_{DG}(t) = \widehat{d}^{+}\widehat{d} - l + \frac{1}{2}, \tag{5.36}$$

$$\widehat{H}_{DG}(t) = \widehat{d}\widehat{d}^{+} + l - \frac{1}{2}\ . \qquad (5.14)$$

Entonces, de acuerdo con (5.14) y (5.36), el conmutador de los operadores generalizados $\widehat{d}$ y $\widehat{d}^{+}$ es

$$\left[\widehat{d}, \widehat{d}^{+}\right] = \widehat{d}\widehat{d}^{+} - \widehat{d}^{+}\widehat{d} = \frac{d\rho}{dx} \tag{5.37}$$

de donde

$$\widehat{d}^{+}\widehat{d} = \widehat{d}\widehat{d}^{+} - \left[\widehat{d}, \widehat{d}^{+}\right] = \widehat{H}_{DG}(t) - \left(l - \frac{1}{2}\right) - \frac{d\rho}{dx} = \widehat{H}_{DG}(t) - \frac{d\rho}{dx} - \left(l - \frac{1}{2}\right) = \widehat{H}'_{DG}(t) - l + \frac{1}{2}.$$

Siguiendo a Mielnik, hemos definido un nuevo hamiltoniano

$$\widehat{H}'_{DG}(t) = \widehat{H}_{DG}(t) - \frac{d\rho}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}k(t)x^2 + \frac{M^2 l\,(l+1)}{2x^2} - \frac{d\rho}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V'\,(x)$$

con el potencial

$$V'\,(x) = \frac{1}{2}k(t)x^2 + \frac{M^2 l\,(l+1)}{2x^2} - \frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{2}k(t)x^2 + \frac{M^2 l\,(l+1)}{2x^2} - \frac{d}{dx}\frac{x^{2l}e^{-x^2}}{\eta\,(x,t)}.$$

Esta es la versión más general del potencial, teniendo como casos particulares los siguientes:

1) Cuando $k(t) = M^2 = 1$, tenemos el potencial de Dongpei.

2) Ademas, cuando $\gamma \longrightarrow \infty$ tenemos el potencial isotónico estacionario.

Capítulo 6

Ejemplos

6.1. Introducción

Como una muestra de la utilidad práctica damos 4 ejemplos que se pueden derivar de nuestros resultados. Los dos primeros se refieren a los estados estacionarios, mientras que los dos siguientes se refieren a osciladores en los que la frecuencia depende del tiempo. Como vimos en el Capítulo 1, todo sistema cuántico cuyo potencial es independiente del tiempo tiene soluciones, llamadas soluciones estacionarias, de la forma

$$\Psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-iE_nt}.$$

En particular, el estado base estacionario es

$$\Psi_0(x,t) = \psi_0(x)e^{-iE_0t}.$$

En la Sección 6.1 de este Capítulo tratamos el caso del oscilador armónico estacionario, mientras que en la Sección 6.2 el del oscilador isotónico también estacionario. Posteriormente describimos cómo es aplicable nuestro método a los mismos sistemas pero cuya frecuencia varía de una manera específica. Es interesante el caso de sistemas con frecuencia variable cuyo comportamiento teórico ya era conocido desde el nacimiento de la mecánica cuántica pero que no podía ser comprobado experimentalmente debido a las dificultades técnicas. Ahora con los nuevos métodos de enfriamiento pero con un control muy fino de las condiciones experimentales, se ha encontrado que en particular una frecuencia dependiente del tiempo permite monitorear los estados del sistema cuántico en estudio minimizando el efecto perturbativo de las mediciones. En la Ref. [10] se hace una revisión del tema, y en particular del oscilador armónico de frecuencia variable. Como se dijo en la introducción, todo lo anterior justifica seguir la linea de investigación en la que se encuentra este trabajo de tesis: La descripción teórica de sistemas cuánticos dependientes del tiempo. En la Sección 6.3 justificamos un aspecto de la Ref. [10].

6.2. El oscilador armónico temporal

En el Capítulo 3 hemos encontrado que la función de onda del estado base es

$$\psi_0(x,t) = e^{-\frac{1}{2}K(t)x^2}. \qquad (3.27)$$

Por otro lado el estado base del oscilador estacionario es [6]

$$\Psi(x,t) = e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-iE_0t} = \psi_0(x)e^{-iE_0t} \tag{6.1}$$

$$\psi_0(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{6.2}$$

Para que (3.27) y (6.2) coincidan debemos tener $K(t) = 1$. Esta es la primera aproximación particular de nuestro resultado general. El siguiente paso es determinar las soluciones $\psi_n(x)$ para los estados excitados, $(n = 1, 2, ...)$. Para ello aplicamos el operador de ascenso

$$\widehat{a}^+(t) = \frac{1}{\sqrt{2}f(t)}\left(-\frac{d}{dx} + K(t)x\right) \qquad (3.29)$$

con $K(t) = 1$:

$$\widehat{a}^+(t) = \frac{1}{\sqrt{2}f(t)}\left(-\frac{d}{dx} + x\right) = \frac{1}{f(t)}\widehat{a}^+, \tag{6.3}$$

donde $\widehat{a}^+$ es el operador de ascenso ordinario (2.23). Ahora usamos (3.36) la cual sirve para calcular la función correspondiente al estado n, pero con el operador (6.3),

$$\psi_n(x,t) = [\widehat{a}^+(t)]^n\psi_0(x,t) = \left(\frac{1}{f(t)}\right)^n [\widehat{a}^+]^n\psi_0(x) = \left(\frac{1}{f(t)}\right)^n \psi_n(x) \tag{6.4}$$

pero de acuerdo a (2.27),

$$\left[\widehat{a}^+\right]^n \psi_0(x) = D_nH_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} = D_n\psi_n(x) \qquad (2.27)$$

podemos escribir

$$\psi_n(x,t) = D_n \psi_n(x), \tag{6.5}$$

así, con (6.3) y (6.4) obtenemos

$$D_n = \left(\frac{1}{f(t)}\right)^n, \tag{6.6}$$

D_n debe depender del tiempo. Calculamos explícitamente $D_n(t)$. Para este caso particular usamos la ecuación de Schrödinger en la forma

$$\widehat{H}\psi_n(x,t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi_n(x,t) = E_n \psi_n(x,t), \tag{6.7}$$

calculamos la derivada parcial respecto al tiempo t de (6.5)

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_n(x,t) = \left[n\left(\frac{1}{f(t)}\right)^{n-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f(t)}\right)\right]\psi_n(x), \tag{6.8}$$

con (6.7) y (6.8) tenemos

$$\left[in\left(\frac{1}{f(t)}\right)^{n-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f(t)}\right)\right]\psi_n(x) = E_n \left(\frac{1}{f(t)}\right)^n \psi_n(x).$$

Separando las variables x y t obtenemos la ecuación diferencial para $f(t)$

$$f(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f(t)}\right) = -\frac{1}{n}E_n, \tag{6.9}$$

cuya solución es

$$\left(\frac{1}{f(t)}\right)^n = e^{-iE_n t}, \tag{6.10}$$

y entonces la solución (6.5) para el estado n queda

$$\psi_n(x,t) = e^{-iE_n t}\psi_n(x), \tag{6.11}$$

la cual es la solución estacionaria para el oscilador armónico ordinario. Hemos comprobado entonces que el resultado general (6.29) para el operador de ascenso del oscilador armónico da el resultado correcto para el caso estacionario. Esto es una condición necesaria para cualquier generalización del método de factorización que incluya al tiempo.

6.3. El oscilador isotónico de Dongpei

También encontramos en el Capítulo 4, que la función de onda del estado base del oscilador isotónico de Dongpei es

$$\psi_0(x) = x^{l+1} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad (4.3)$$

mientras que nosotros encontramos que

$$\psi_0(x) = x^{l+1} e^{-\frac{1}{2}K(t)x^2}, \qquad (4.21)$$

para el mismo estado, pero incluyendo al tiempo. De nuevo, para que (4.21) se reduzca a (4.3) debemos tener $K(t) = 1$.

Ahora determinamos las soluciones $\psi_n(x)$ para los estados excitados ($n = 1, 2, ...$). Como vimos en el Capítulo 4 debemos aplicar el operador de ascenso $\widehat{A}(t)$ a $\psi_n(x)$. $\widehat{A}^+(t)$ es (4.50)

$$\widehat{A}^+(t) = M^2 \left[\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d}{d\xi} + \left(\xi^2 - 1\right) - \frac{l\,(l+1)}{\xi^2} \right], \qquad (4.50)$$

con

$$M(t) = \frac{\sqrt{K(t)}}{\sqrt{2} f(t)} = \frac{1}{\sqrt{2} f(t)}$$

y como $\xi = \sqrt{K(t)}x$, entonces $\xi = x$:

$$\widehat{A}^+(t) = \frac{1}{f^2(t)} \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \left(x^2 - 1\right) - \frac{l\,(l+1)}{x^2} \right].$$

Entonces en este caso particular ($K(t) = 1$), podemos escribir al operador de ascenso como

$$\widehat{A}^+(t) = \frac{1}{f^2(t)} \widehat{A}^+, \qquad (6.12)$$

donde hemos puesto el operador de ascenso estacionario $\widehat{A}^+$, Ec. (4.49). Así, usando (4.47) encontramos

$$\phi_n(x,t) = \left[\widehat{A}^+(t)\right]^n \phi_0(x,t)$$

pero de acuerdo con (6.12)

$$\left[\widehat{A}^+(t)\right]^n \phi_0(x) = \left[\frac{1}{f^2(t)}\right]^n \left[\widehat{A}^+\right]^n \phi_0(x) = \left[\frac{1}{f^2(t)}\right]^n \phi_n(x), \qquad (6.13)$$

donde $\alpha = l + \frac{1}{2}$ y con $\phi_0(x)$ dado por (4.3). Hemos usado también (4.55). Luego

$$\left[\widehat{A}^{+}(t)\right]^{n} \phi_0(x) = D_n L_n^{l+\frac{1}{2}}(x^2)\phi_0(x) = D_n\phi_n(x).$$

Entonces

$$\phi_n(x,t) = D_n\phi_n(x)$$

donde $D_n = [\frac{1}{f^2(t)}]^n$ depende del tiempo, al igual que en el oscilador armónico, por lo que seguimos el camino de la Sección anterior. Calculamos D_n, utilizando para ello la ecuación de Schrödinger (6.7), lo cual da lugar a la ecuación diferencial para $f^2(t)$

$$f^2(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f^2(t)}\right) = -\frac{i}{n}E_n, \tag{6.14}$$

se puede observar una diferencia entre (6.13) y (6.4). La solución de (3.13) es

$$\left(\frac{1}{f^2(t)}\right)^{n} = e^{-iE_nt}, \tag{6.15}$$

y entonces la solución general es

$$\phi_n(x,t) = e^{-iE_nt}\phi_n(x), \tag{6.16}$$

la cual también es una solución estacionaria. De nuevo comprobamos que nuestro enfoque da el resultado correcto para el caso estacionario del oscilador isotónico.

6.4. Frecuencia dependiente del tiempo en el oscilador armónico

En los ejemplos anteriores, aunque aparece el tiempo, éste no está en la interacción. De hecho, las soluciones estacionarias (6.11) y (6.16) tiene su origen no en el potencial, y aparece en las funciones de onda por la naturaleza ondulatoria de la ecuación de Schrödinger. Ahora vamos a dar una aplicación diferente a nuestros resultados. Tratamos el caso en el que la frecuencia de oscilación ω depende del tiempo. Esto ocurre generalmente porque existe una fuerza externa que influye en el movimiento y en los estados energéticos de la partícula. Vamos a tratar el caso analizado en la Ref. [10], Solo demostraremos que es un caso particular también de nuestros resultados. En el artículo de Silveri se trata de las consecuencias que se derivan cuando los niveles de energía del oscilador armónico son modulados en el tiempo. Esta modulación es una manera de decir que la interacción interna del sistema cuántico es alterada por una influencia externa, y una consecuencia es que los niveles de energía también dependen del tiempo, un resultado que aparece de manera natural en nuestra formulación, en la expresión (3.48). El hamiltoniano de Silveri et al es

$$\widehat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}k(t)x^2. \tag{6.17}$$

Se ha encontrado que la medición de los cambios temporales de frecuencia a través de $\omega(t) = \sqrt{(k(t)/m)}$, puede ser muy sensible para algunos experimentos actuales, como se menciona en la introducción de este trabajo de tesis. Esto se ve reflejado en nuestro resultado para la energía, como lo muestra la expresión (3.28). Para ver la equivalencia entre el trabajo de Silveri et al y el nuestro, tomamos como punto de partida de la Ec. (131) de ese artículo. Para mayor claridad usamos nuestra notación en ese resultado de Silveri et al:

$$\widehat{a}(t) = \widehat{a}\cosh r(t) - \widehat{a}^{+}\operatorname{senh} r(t), \tag{6.18}$$

donde $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^{+}$ son los operadores de escalera ordinario del oscilador armónico estacionario. La función $r(t)$ es solo función del tiempo.

Nuestro operador temporal de descenso (3.28) se escribe

$$\widehat{a}(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{2}}\left[\frac{d}{dx} + K(t)x\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}f(t) + \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{2}}g(t)x. \tag{6.19}$$

Queremos conocer como son $f(t)$ y $g(t)$ en términos de la función de Silveri $r(t)$. Para ello proponemos la combinación lineal

$$\widehat{a}(t) = A(t)\widehat{a} - B(t)\widehat{a}^{+}$$

haciendo unos cambios obtenemos

$$\widehat{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A-B)\frac{d}{dx} + \frac{1}{\sqrt{2}}(A+B)x. \tag{6.20}$$

Comparando (6.20) y (6.19)

$$A(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + g(t)\right],$$

$$B(t) = \frac{1}{2}\left[-f(t) + g(t)\right],$$

de manera que el operador temporal de descenso (3.28) también se puede escribir así

$$\widehat{a}(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + g(t)\right]\widehat{a} - \frac{1}{2}\left[-f(t) + g(t)\right]\widehat{a}^{+}. \tag{6.21}$$

Comparando con la forma (6.18) de Silveri et al, obtenemos

$$\cosh r(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + g(t)\right],$$

$$\operatorname{senh} r(t) = \frac{1}{2}\left[-f(t) + g(t)\right],$$

hemos demostrado que nuestros resultados tiene como caso particular a Silveri et al siempre y cuando $f(t)$ y $g(t)$ sean de la forma

$$f(t) = \cosh r(t) + \operatorname{senh} r(t), \tag{6.22}$$

$$g(t) = \cosh r(t) - \operatorname{senh} r(t). \tag{6.23}$$

Silveri no escribe al operador de ascenso, $\widehat{a}^{+}(t)$ pero nosotros lo hacemos; el operador adjunto de (6.18) es

$$\widehat{a}^{+}(t) = \widehat{a}^{+}\cosh r(t) - \widehat{a}\operatorname{senh} r(t)$$

también $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^{+}$ son los operadores de escalera ordinario del oscilador armónico. La función $r(t)$ es la misma que en (6.7).

De la Ec. (3.29) tenemos

$$\widehat{a}^{+}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}f^{*}(t)\frac{d}{dx} + \frac{1}{\sqrt{2}}g^{*}(t)x.$$

Con el mismo procedimiento que seguimos para deducir (6.21) y (6.22), encontramos que ahora $f^{*}(t)$ y $g^{*}(t)$ tienen que ser de la forma

$$f^{*}(t) = \cosh r(t) + \operatorname{senh} r(t), \tag{6.24}$$

$$g^{*}(t) = \cosh r(t) - \operatorname{senh} r(t), \tag{6.25}$$

Con las expresiones (6.22), (6.23), (6.24) y (6.25) concluimos esta aplicación de nuestros resultados a un caso ya publicado, el cual, como mencionamos en la introducción, trata de que la manipulación fina de la frecuencia permite mediciones de alta resolución del movimiento de átomos, moléculas y otras estructuras. Suponemos que se hace a través de transiciones donde la frecuencia es

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = K(t) = \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{\cosh r(t) + \operatorname{senh} r(t)}{\cosh r(t) - \operatorname{senh} r(t)}, \tag{6.26}$$

de acuerdo a (3.48).

6.5. Frecuencia dependiente del tiempo en el oscilador isotónico

Analizamos las consecuencias de aplicar la transformación (6.18) al oscilador isotónico. Esto no aparece en la literatura que consultamos, por lo que podemos decir que es un adelanto para un análisis futuro, por ejemplo, un experimento de un átomo o molécula oscilando, en el contexto del artículo de Silveri, pero ahora de manera amortiguada.

Ahora los operadores de escalera $\widehat{A}(t)$ y $\widehat{A}^+(t)$ son de segundo orden. El operador $\widehat{A}(t)$ es el (4.23)

$$\widehat{A}(t) = \left[\widehat{a}(t) - f(t)\frac{l+1}{\sqrt{2}x}\right]\left[\widehat{a}(t) - f(t)\frac{l+1}{\sqrt{2}x}\right]. \qquad (4.23)$$

La idea es utilizar la transformación (6.18), que pasa de los operadores de escalera del oscilador estacionario $\widehat{a}$ y $\widehat{a}^+$ al operador de descenso temporal $\widehat{a}(t)$.

$$\widehat{A}(t) = \left[\widehat{a}\cosh r(t) - \widehat{a}^+ \operatorname{senh} r(t) - \frac{l+1}{\sqrt{2}x}\left(\cosh r(t) + \operatorname{senh} r(t)\right)\right]$$
$$\cdot \left[\widehat{a}\cosh r(t) - \widehat{a}^+ \operatorname{senh} r(t) - \frac{l+1}{\sqrt{2}x}\left(\cosh r(t) + \operatorname{senh} r(t)\right)\right].$$

Entonces para utilizar nuestros resultados para aplicar la teoría de Silveri et al al oscilador isotónico se debe usar la expresión anterior para el operador de descenso.

Capítulo 7

Conclusiones

1. Resolvimos el problema del oscilador armónico por un método puramente algebraico, llamado método de factorización de Dirac, sin tener la necesidad de resolver la ecuación de Schrödinger, que es de segundo orden y solo admite soluciones en series de potencias obteniendo los mismos resultados con el método de Dirac. Si comparamos el método tradicional de series con el de factorización de Dirac, concluimos que éste facilita el cálculo. Debemos decir que lo expuesto en este punto es lo que aparece en casi todos los libros de mecánica cuántica.

2. Hicimos un análisis de un oscilador armónico temporal, en el que el tiempo aparece en la frecuencia $\omega(t)$. Utilizamos el método de factorización de Dirac, introduciendo el tiempo en los operadores de escalera para así poder encontrar las funciones de onda que también lo contienen, lo mismo que el espectro de energía. Los operadores propuestos son analizados con argumentos tanto físicos como matemáticos rigurosos. El resultado da operadores de escalera muy versátiles, los cuales son utilizados en lo que resta de la tesis. Con estos operadores generamos todas la funciones de onda y el espectro de energía, ambos dependientes del tiempo, dejando libre una función temporal $f(t)$, la cual depende del modelo que se quiera investigar.

3. Analizamos el artículo de Dongpei sobre el oscilador isotónico, el cual nos llevo a encontrar que la notación usada era confusa también con algunas faltas, pero cabe decir que sus resultados y conclusiones son correctos. Hacemos algunas aportaciones que fueron mejorando el método algebraico de solución. Construimos los operadores de escalera de una manera más clara y partiendo de los operadores de escalera temporales del oscilador armónico

del punto anterior. Encontramos que nuestros operadores temporales tienen como caso particular los estacionarios de Dongpei en el límite temporal adecuado. Generamos luego las funciones de onda utilizando algunas propiedades de los polinomios asociados de Laguerre lo cual facilita el cálculo. Por medio de una función auxiliar $S_n(x,t)$ determinamos el espectro de energía, el cual depende del tiempo, lo que comprueba el hecho de que este oscilador no es un sistema aislado. De nuevo queda la función $f(t)$ como función de entrada del modelo que se quiera investigar. También encontramos la solución general para el oscilador isotónico temporal sin tener que derivar, solo utilizando dos propiedades de los polinomios de Laguerre que son: la ecuación diferencial de Laguerre y una relación de recurrencia.

4. Generalizamos los operadores de escalera del oscilador armónico estacionario de Mielnik, para aplicarlos al oscilador isotónico tipo Mielnik, pero temporal, para construir otro sistema más general que el isotónico con solución exacta y con el mismo espectro de energía que calculamos en el capitulo 4.

5. Como ejemplos de la utilidad de nuestros resultados, consideramos primero las soluciones estacionarias de los osciladores armónico e isotónico como casos particulares de nuestros resultados. Luego, como una aplicación muy actual a la nanotecnología, consideramos la manera en que nuestros operadores pueden ser usados para modular la frecuencia de osciladores armónicos en experimentos de alta resolución en sistemas como: un solo átomo, una sola molécula o un espín, los cuales ya se pueden realizar con las técnica actuales de laboratorio. Finalmente, hacemos lo mismo pero para un oscilador isotónico, con aplicaciones en osciladores amortiguados. Esto último en el plano puramente teórico.

   Por último consideramos que los resultados de este trabajo pueden tener continuación o aplicación en las siguientes líneas:

   a) Ajustar nuestra función $f(t)$ para establecer diferentes modos de modulación de la frecuencia de osciladores armónico.

   b) Lo mismo pero para osciladores isotónicos, los cuales pueden ser usados para osciladores amortiguados o forzados.

   c) En el aspecto teórico, ver las consecuencias de los osciladores de tipo Mielnik.

   Lo anterior no agota las posibilidades, sólo se menciona las más visibles.

Bibliografía

[1] Zhu, Dongpei, A new potential with the spectrum of an isotonic oscillator, Journal of Physics 20 (1987) 4331-4336.

[2] B. Mielnik, Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum, Journal of Mathematical Physics 25 (1984) 3387.

[3] Miriam Arena Alvarez, Adriana Hernández Teniza y Mario Maya Mendieta, Función de distribución de probabilidad para una partícula en un potencial semi-isotónico, Aportaciones y Aplicaciones de la Probabilidad y la Estadística (2014) 81-90, Dirección General de Fomento Editorial, BUAP.

[4] I.S. Gradshtein and I.M. Ryzhik, Table, integral and series, Elsevier (2007) Amsterdam.

[5] Miriam Arenas Alvarez y Mario Maya Mendieta, Nueva generación algebraica de soluciones de la ecuación diferencial de Hermite, Matemáticas y sus Aplicaciones 2 (2013) 57-68, Textos Científicos, BUAP.

[6] D.J. Griffiths, Introduction to quantum Mechanics.

[7] H. Hochstadt, the Function of Mathematical Physics, Dover, New York.

[8] A. Pérez-Lorenzana, On the Factorization Method and Ladder Operator, Revista Mexicana de Física 42 (1996) 1060.

[9] S.H. Dong, Factorization Method in Quantum Mechanics, Springer (2007), Holanda.

[10] M.P. Silveri, J.A. Tuorila, E.V. Thuneberg, G.S. Paraoanu, Quantum systems under frequency modulation, Rep. Prog. Phys. 80(2017)056002.

[11] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Mecánica Cuántica No Relativista, Reverté, Barcelona.

[12] A. Schild, Time in quantum mechanics: A fresh look at the continuity equation, Physical Review A98(2018)052113.