



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Cuantificación de Enredamiento Cuántico entre Variables
Continuas y Discretas

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

DOCTORADO EN CIENCIAS

por

M. en C. Alma Elena Piceno Martínez

Asesorada por

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar

Puebla Pue.
Mayo 2021



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Cuantificación de Enredamiento Cuántico entre Variables
Continuas y Discretas

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

para obtener el grado de:

DOCTORADO EN CIENCIAS

Presenta:

M. en C. Alma Elena Piceno Martínez

Asesor de Tesis:

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar

Puebla Pue.
Mayo 2021

Título: Cuantificación de Enredamiento Cuántico entre Variables Continuas y Discretas

Estudiante: M. EN C. ALMA ELENA PICENO MARTÍNEZ

COMITÉ

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Presidente

Dr. Roberto Cartas Fuentesvilla
Secretario

Dr. Carlos Robledo Sánchez
Vocal

Dra. Rocío Jáuregui Renaud
Vocal

Dr. Fernando Rojas Íñiguez
Vocal

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero
Suplente

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar
Asesor

Agradecimientos

Agradezco afectuosamente la tutoría del Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar, quien como un verdadero mentor me ha impulsado a explorar mis intereses como científico y me ha ayudado a navegar las necesidades de esta carrera que inicia.

Agradezco el apoyo, la guía y los invaluable consejos de mis sinodales, Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco, Dr. Roberto Cartas Fuentevilla y Dr. Carlos Robledo Sánchez, que me han ayudado a formarme como físico y como persona. No ha sido desapercibida la atención altruista que han prestado a mi desarrollo en estos años de doctorado y previamente como su estudiante.

Es así también que agradezco al Dr. Manuel Ibarra Contreras, quien más que ser un maestro ha sido un amigo durante todo mi tiempo como estudiante.

Agradezco a mis amigos, por su compañía y todas las experiencias que compartimos durante estos años.

Agradezco el apoyo de mi familia, particularmente de Ernesto, que me han permitido la seguridad y el calor necesarios para la realización de la investigación que culmina en esta tesis.

Resumen

La presente tesis está dedicada a la investigación del enredamiento en sistemas cuánticos compuestos formados por un subsistema de variables continuas y un subsistema de variables discretas. Es de particular interés la posibilidad de determinar la cantidad de enredamiento presente en tales sistemas. El enredamiento entre variables discretas y continuas constituye un tipo particular de enredamiento, conocido como enredamiento híbrido. En esta tesis esto se lleva a cabo investigando al experimento de Stern-Gerlach como un caso de estudio. En el experimento de Stern-Gerlach se produce naturalmente enredamiento híbrido, más aún, las correlaciones teóricamente perfectas entre las variables de posición y espín por las que se reconoce este experimento lo hacen un modelo óptimo para encontrar enredamiento híbrido. La forma simple del estado resultante del experimento permite estudiar a fondo sus características no clásicas. El principal resultado de esta tesis es la aplicación de medidas de enredamiento discretas sobre el estado híbrido del experimento de Stern-Gerlach, con las que fue posible caracterizar completamente el enredamiento híbrido existente.

Esta tesis comienza con una introducción en la que se discute el enredamiento híbrido y se presenta al experimento de Stern-Gerlach como un modelo físico de interés para generarlo. En el Capítulo 1 se discute al enredamiento cuántico, incluyendo un estudio de la naturaleza no clásica de los sistemas cuánticos y un recuento histórico del descubrimiento y caracterización del enredamiento.

El Capítulo 2 contiene un análisis formal del enredamiento, presentando las distintas definiciones, que a la vez nos permiten analizar distintas facetas del fenómeno que definen, y finalizando con una revisión detallada de las medidas de enredamiento discretas. Esto nos permite a la vez apreciar el lugar singular que tiene el enredamiento discreto gracias a la completa caracterización del enredamiento discreto en una amplia variedad de estados que permiten las medidas existentes.

En el Capítulo 3 se trata específicamente al enredamiento híbrido. Aquí se hace un sumario de las aplicaciones del enredamiento híbrido y se revisa el estado actual de su estudio, centrándonos en las distintas posibilidades para perseguir una cuantificación adecuada. Por último, en este capítulo se presentan los dos posibles métodos que se aplicarán al cuantificar el enredamiento del experimento de Stern-Gerlach.

El tratamiento del experimento de Stern-Gerlach comienza en el Capítulo 4, en el que se describe comprensivamente al experimento y se discute el tratamiento que se ha realizado considerándolo

como un sistema completamente cuántico. Además, se deriva el estado cuántico evolucionado, y se analiza el estado obtenido, presentando sus propiedades no clásicas.

En el Capítulo 5 exploramos la no localidad del experimento de Stern-Gerlach, proponiendo una función de correlación para sistemas híbridos que permite examinar la violación de la desigualdad de Bell en este sistema. Finalmente, en el Capítulo 6 se encuentra el principal resultado de esta tesis, estudiando el enredamiento híbrido del experimento de Stern-Gerlach mediante medidas discretas. Para llevar a cabo esta cuantificación analizamos dos métodos distintos que permiten reducir el proceso de aplicación de las medidas de enredamiento a aquel propio del enredamiento discreto.

Publicaciones

El trabajo realizado para la escritura de esta tesis ha producido varios artículos. En el primero de éstos, publicado en 2017, estudiamos el experimento de Stern-Gerlach considerando la evolución cuántica completa a la que es sujeta la partícula que lo atraviesa a partir de la ecuación de Schrödinger, usando el método del operador de evolución. En este artículo obtenemos el estado final evolucionado del experimento, en el cual podemos observar el enredamiento entre la variable continua, que describe la posición de la partícula que atraviesa el dispositivo, y la variable discreta, que da su espín.

Benítez Rodríguez, E.; Piceno Martínez, E. y Arévalo Aguilar, L. M. A full quantum analysis of the Stern-Gerlach Experiment using the Evolution Operator method: Analysing current issues on the teaching quantum mechanics. *European Journal of Physics* **38**, 025403. doi:10.1088/1361-6404/aa51ad (2017).

Benítez Rodríguez, E.; Arévalo Aguilar, L. M. y Piceno Martínez, E. Corrigendum: ‘A full quantum analysis of the Stern-Gerlach experiment using the evolution operator method: Analysing current issues in teaching quantum mechanics’. *European Journal of Physics* **38**, 069501. doi:10.1088/1361-6404/aa80a3 (2017).

A continuación, discutimos en el siguiente artículo las características cuánticas del estado de una partícula en el experimento de Stern-Gerlach, evidenciadas en las correlaciones y la no localidad que aparecen en los resultados del experimento. Este artículo fue publicado en 2018.

Piceno Martínez, A. E.; Benítez Rodríguez, E.; Mendoza Fierro, J. A.; Méndez Otero, M. M. y Arévalo Aguilar, L. M. Quantum Nonlocality and Quantum Correlations in the Stern-Gerlach Experiment. *Entropy* **20**, **299**. doi:10.3390/e20040299 (2018).

Finalmente, se ha publicado el siguiente artículo en el que analizamos la cuantificación del enredamiento híbrido entre los grados de libertad de posición y espín de una partícula en el experimento de Stern-Gerlach, usando medidas discretas mediante la aplicación de dos distintos métodos de discretización en el proceso de aplicación de las medidas de enredamiento.

Piceno Martínez, A. E. y Arévalo Aguilar, L. M. Quantifying the hybrid entanglement of the Stern-Gerlach experiment using discrete reductions. *Physics Letters A* **394**, 127200. doi:10.1016/j.physleta.2021.127200 (2021).

Índice general

Agradecimientos	V
Resumen	VII
Publicaciones	XI
Índice general	XIII
Índice de figuras	XVII
Introducción	1
1.1. El Experimento de Stern-Gerlach	3
1. Enredamiento y no localidad: Correlaciones cuánticas	5
1.1. El enredamiento cuántico	5
1.1.1. La separación de los sistemas físicos	7
1.1.1.1. Los primeros años de la teoría cuántica	9
1.1.2. La incompletitud de la mecánica cuántica	12
1.1.2.1. El primer experimento pensado: Solvay 1927	13
1.1.2.2. Las cajas de fotones de Einstein (<i>Einstein's photon-box Gedanken-experiment</i>)	14
1.1.3. El argumento EPR	15
El Principio de Separación	15
Localidad y Realismo Físicos	16
El experimento pensado de Einstein, Podolsky y Rosen	17
1.1.3.1. Las cajas de Einstein	19
1.1.4. El enredamiento cuántico	21
1.2. El teorema de Bell	22
1.2.1. El problema de la medición y la realidad física	22
El problema de la medición	23
1.2.2. Correlaciones cuánticas y las teorías de variables ocultas	23
1.2.3. El teorema de Bell	24
El experimento pensado de Bohm	25
La desigualdad de Bell	25
La desigualdad CHSH	26
1.2.4. Pruebas experimentales	27
<i>Loopholes</i>	28
Experimentos libres de escapatorias	29
1.2.5. No localidad cuántica	29
1.3. Conclusiones	30

2. Detección y clasificación del enredamiento	31
2.1. Definiciones del enredamiento Cuántico	31
2.1.1. La separabilidad de los estados cuánticos	31
2.1.2. Operaciones Cuánticas	32
2.2. Criterios de Separabilidad	32
El teorema de Bell	32
2.2.1. La descomposición de Schmidt	33
2.2.2. El criterio PPT	33
2.2.2.1. <i>Bound Entanglement</i> y las definiciones de enredamiento	34
2.2.3. Testigos de enredamiento	34
2.3. Medidas de Enredamiento	35
2.3.1. Entropía de enredamiento	35
2.3.1.1. Definición	36
2.3.1.2. Propiedades	37
Propiedades de la entropía de von Neumann	37
2.3.1.3. La traza parcial	38
Propiedades de la traza	39
2.3.1.4. Otras medidas entrópicas	40
α -entropías de Rényi	40
q-entropías	41
2.3.2. Estados mixtos	41
Techos Convexos	41
2.3.3. Concurrencia	42
2.3.4. Negatividad	43
Negatividad Logarítmica	43
2.3.5. Enredamiento multipartita	44
2.3.6. Medidas continuas	44
2.4. Enredamiento y no localidad	45
2.5. Conclusiones	46
3. Enredamiento Híbrido	47
3.1. Aplicaciones del Enredamiento Híbrido	47
3.1.1. Teletransportación Cuántica	48
3.1.1.1. Intercambio de enredamiento (<i>Entanglement swapping</i>)	49
3.1.1.2. Repetidores Cuánticos	49
3.1.2. Bus cuántico	49
Preparación de estados	50
3.1.2.1. Generación de enredamiento híbrido	50
3.2. Cuantificación del Enredamiento Híbrido	50
3.2.1. Clasificación del enredamiento híbrido de Kreis y van Loock	51
3.2.1.1. Cuantificación	52
3.2.1.2. El <i>enredamiento híbrido genuino</i> y las medidas continuas	53
Medidas propiamente híbridas	53
3.2.2. La traza parcial	54
La entropía de enredamiento en estados híbridos	54
3.3. Conclusiones	55
4. El Experimento de Stern-Gerlach	57
4.1. La descripción del Experimento de Stern-Gerlach	57
4.1.1. El Stern-Gerlach Experimental	58
4.1.1.1. Una nueva propiedad de la materia: el espín	59
4.1.1.2. Más allá del SGE	59

El experimento de Rabi	59
4.1.2. Tratamiento semiclásico	60
4.1.3. El campo magnético del SGE	61
La componente en x del campo magnético del SGE	63
4.1.4. Tratamiento cuántico	65
4.1.4.1. Solución mediante fuerzas electromagnéticas	65
4.1.4.2. Soluciones espinoriales	67
4.1.4.3. Solución mediante funciones de Green	68
4.1.4.4. Solución por Eigenenergías	69
4.2. Descripción completamente cuántica del SGE	71
4.2.1. Evolución Cuántica	72
4.2.1.1. La Factorización del Operador de Evolución	72
4.2.1.2. El Estado Enredado del SGE	73
4.2.2. La distribución de probabilidad	75
4.3. Conclusiones	80
5. No Localidad del SGE	81
5.1. El teorema de Bell	82
5.2. La función de correlación	82
5.3. La no localidad del SGE	84
5.4. Resultados	86
5.5. Conclusiones	86
6. El Enredamiento Híbrido del SGE	89
6.1. El método de discretización	89
6.1.1. Descripción del estado híbrido	90
6.1.2. El estado discreto del SGE	91
6.2. Aplicación de medidas discretas	92
6.2.1. La concurrencia	92
6.2.2. La entropía de enredamiento	94
6.2.3. Comparación de las medidas de enredamiento	98
6.2.3.1. El dominio $k > 1$	99
6.3. La traza parcial del Experimento de Stern-Gerlach	102
6.3.1. Aplicación al SGE cuántico	103
6.3.2. Cuantificación del enredamiento usando el vector de Bloch	104
6.4. Resultados	106
6.5. Conclusiones	106
Conclusiones	109
Bibliografía	111

Índice de figuras

1.	Placa conmemorativa dedicada al experimento de Stern-Gerlach en su 80 aniversario en la Universidad de Frankfurt.	3
2.	Postal de Gerlach a Niels Bohr del 8 de Febrero de 1922; detalle del resultado observado en la pantalla del SGE.	4
1.1.	Representación esquemática del concepto de correlaciones cuánticas.	5
1.2.	Esquema del experimento pensado de Bohm.	6
1.3.	Esquema del experimento pensado presentado por Einstein en el congreso Solvay de 1927.	14
1.4.	Esquema del experimento pensado de las cajas de fotones de Einstein.	15
1.5.	Esquema del experimento pensado EPR	18
1.6.	Esquema del experimento pensado de las Cajas de Einstein	20
1.7.	Esquema del experimento pensado de Bohm para ejemplificar las correlaciones de EPR	25
2.1.	Diagrama con las distintas definiciones de enredamiento.	34
2.2.	Derivación de la entropía de enredamiento a partir de la concurrencia.	43
3.1.	Esquema de un protocolo de Bus cuántico.	49
3.2.	Descripción de un subplano generado por un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$	52
4.1.	Resultado del SGE original y distribución de probabilidad.	58
4.2.	Esquema del experimento de Stern-Gerlach, representando los dos posibles resultados en la pantalla debidos a la superposición en el estado cuántico. [1, 2].	58
4.3.	Esquema del SGE en el tratamiento semiclásico usual.	60
4.4.	El campo magnético completo del SGE.	62
4.5.	Esquema del resultado original del experimento de Stern-Gerlach, mostrando la geometría de los puntos de acumulación en la pantalla.	63
4.6.	Tratamiento cuántico de la evolución del SGE	70
4.7.	Densidad de probabilidad del estado evolucionado del SGE en el plano $x - z$ para $\tau = 2$ y $k = 1$	76
4.8.	Densidad de probabilidad del estado evolucionado del SGE en la dirección z para $k = 0.7$ y $\tau = 0, 1, \dots, 11$	77
4.9.	Densidad de probabilidad del SGE en el plano $x - z$ para $k = 0.5$ y $\tau = 0, 1, 2, 4, \dots, 12$	78
4.10.	Densidad de probabilidad del SGE en el plano $y - z$ para $k = 0.7$ y $\tau = 0, 1, \dots, 10$, con $k_y = 2/\sigma_0 = 2$	79
5.1.	Función de correlación de Banaszek-Wódkiewicz para el estado evolucionado del SGE.	84
5.2.	Valor esperado del operador de Bell para el SGE.	85
6.1.	Evolución temporal del subespacio finito del espacio continuo del SGE.	91

6.2. Dependencia temporal de la concurrencia de la forma discreta del estado del SGE para $k = 1, 0.5, 0.3, 0.2$	93
6.3. Dependencia temporal de la concurrencia para valores de $k \geq 1$	94
6.4. Dependencia temporal de la entropía de enredamiento para la forma discreta del estado del SGE para valores de $k \leq 1$, $k = 1, 0.5, 0.3, 0.2$	96
6.5. Dependencia temporal de la entropía de enredamiento para la forma discreta del estado del SGE en $k \geq 1$, con $k = 1, 1.5, 2, 2.5$	96
6.6. La entropía de enredamiento como función de la concurrencia.	97
6.7. Comparación de la dependencia temporal de la concurrencia y la entropía de enredamiento para el estado discreto del SGE con $k \leq 1$, $k = 1, 0.5, 0.3$	98
6.8. Comparación de la dependencia temporal de la concurrencia y la entropía de enredamiento para el estado discreto del SGE con $k \geq 1$, $k = 1, 1.5, 2$	99
6.9. Comparación de la dependencia temporal de la concurrencia y la entropía de enredamiento para el estado discreto del SGE con $k = 40$	99
6.10. Curvatura de la concurrencia para $k = 1.5$ comparada con la concurrencia	101
6.11. Curvatura absoluta de la entropía de enredamiento para $k = 2$ comparada con la entropía de enredamiento y la concurrencia.	101
6.12. La entropía de enredamiento del SGE, E_R , obtenida por el método de la traza parcial.	103
6.13. Dependencia temporal del parámetro a	105
6.14. La entropía en términos de la norma del vector de Bloch, Ec. (6.42).	105

Introducción

Los sistemas cuánticos presentan una variedad de propiedades que no se observan en los sistemas clásicos. Muchas propiedades cuánticas aparecen en sistemas de una sola partícula, así tenemos la superposición de estados cuánticos o la interferencia, pero también existen efectos que solamente se presentan en sistemas cuánticos formados por varios subsistemas, llamados compuestos. Entre estos, destaca por su significado el enredamiento cuántico.

El enredamiento cuántico es un fenómeno fundamental de la mecánica cuántica, según Schrödinger, el enredamiento cuántico representa la diferencia fundamental entre la mecánica cuántica y la física clásica [7]. Como tal ha sido objeto de amplio estudio y representa la frontera de la investigación, así como de las aplicaciones de la mecánica cuántica.

Existen una variedad de tareas cuánticas cuya realización depende cercanamente del enredamiento cuántico, definiendo ricas áreas de estudio y aplicación. De esta manera, las primeras aplicaciones de estos protocolos han dejado una marca distintiva en el desarrollo de la teoría cuántica. Entre estos podemos notar la computación cuántica, la teletransportación cuántica [8–10], codificación superdensa [11, 12], criptografía cuántica, preparación remota de estados [13, 14] e intercambio de enredamiento [15–18].

El enredamiento cuántico tiene un vínculo cercano con la existencia de correlaciones no clásicas entre sistemas cuánticos. De esta manera, la primera definición y la más intuitiva del enredamiento cuántico se hace mediante la no separabilidad de un estado. Un estado de un sistema cuántico compuesto se dice que es no separable, y equivalentemente, está enredado, si no se puede describir mediante una mezcla de estados definidos y factorizables para los subsistemas individuales. En cambio, es necesario realizar su descripción mediante un único estado global del sistema. Naturalmente, esto lleva a correlaciones entre las propiedades físicas observadas. Por otro lado, los estados que pueden ser representados mediante estados puros factorizables son llamados separables.

Con el avance en el estudio y entendimiento del enredamiento cuántico se ha llegado a la conclusión de que es un recurso similar a la energía, en el sentido de que nos permite realizar tareas no clásicas, como son, por ejemplo, la teletransportación cuántica, y diversas tareas que han llevado al desarrollo de la criptografía cuántica y la computación cuántica [15–18]. Al ser un recurso tan importante, es necesario el desarrollo de cantidades que nos permitan definirlo y cuantificarlo. Efectivamente, la utilidad del enredamiento en tareas de comunicación impulsó la investigación centrada en su cuantificación [15].

La separabilidad ofrece una definición directa del enredamiento cuántico, es por esto que la identificación de los estados separables es una tarea sumamente importante en el estudio del enredamiento cuántico, permitiéndonos averiguar si un estado cuántico es o no enredado. Las pruebas de separabilidad representan métodos para la identificación de estados enredados, que de esta manera permiten derivar naturalmente diversas medidas de enredamiento [15, 17–25].

A diferencia de los estados separables, los estados enredados no pueden ser preparados actuando individualmente en cada subsistema. Esta última propiedad inspira una definición distinta del enredamiento, que facilita la cuantificación operacional de sus propiedades. Debido a esto, existe una intensa actividad de investigación que permite establecer firmemente las características deseables para una medida de enredamiento [21, 26–29].

A pesar de que la cuantificación del enredamiento es un campo de investigación sumamente

activo, así como también de la investigación amplia motivada por el interés por entender y caracterizar las propiedades del enredamiento cuántico, siguen existiendo una cantidad considerable de preguntas abiertas y queda mucho por entender sobre la naturaleza del enredamiento y su cuantificación.

Como se mencionó anteriormente, el enredamiento cuántico es un fenómeno cuántico que existe en sistemas cuánticos compuestos. El enredamiento cuántico para sistemas bipartitas discretos, que consisten de dos subsistemas físicos descritos por una variable discreta, ha sido ampliamente estudiado debido a su simplicidad. En estos sistemas, el enredamiento cuántico se puede definir y cuantificar fácilmente haciendo uso de distintas medidas de enredamiento [17, 21–25]. Entre estas podemos destacar la descomposición de Schmidt, la medida geométrica del enredamiento [30], la entropía de enredamiento [31, 32] o la concurrencia [33–35].

Sin embargo, la cuantificación del enredamiento cuántico es mucho más complicada cuando se estudian otro tipo de sistemas, como lo son sistemas compuestos por más de dos subsistemas, sistemas con variables continuas, o en casos donde son de interés estados mixtos.

En este último caso, considerando estados mixtos, la pregunta de la separabilidad no tiene una respuesta categórica, inclusive con el desarrollo de diversos criterios de separabilidad que muestran su utilidad en una variedad de situaciones [17, 21–25, 36, 37]. Por otro lado, los criterios de separabilidad permiten el desarrollo de los llamados testigos de enredamiento (*entanglement witnesses*), observables que permiten detectar estados enredados independientemente. En el caso de sistemas bipartitas existen buenas medidas de enredamiento [17, 21, 22], como son el enredamiento de formación [27, 31, 32] y la concurrencia [33–35], sin embargo, su cálculo se complica significativamente al aumentar la dimensión de los subsistemas. Estas medidas incluso han permitido un buen acercamiento a la caracterización del enredamiento en sistemas multipartitas discretos [17, 21, 22, 38].

En la literatura existen propuestas para una cuantificación del enredamiento cuántico entre variables continuas. Por ejemplo, el criterio de separabilidad de la matriz transpuesta parcial [36, 37] es generalizado por Simon para variables continuas [39]. Por otra parte, otras propuestas usan definiciones de operadores tipo **EPR**. Así mismo existen propuestas de generalización de medidas discretas [17, 40–50].

Cuando consideramos el enredamiento en un sistema cuántico formado por un subsistema descrito por una variable discreta y otro descrito por una variable continua, decimos que se tiene enredamiento híbrido. El estudio del enredamiento híbrido es un área en crecimiento, encontrándose entre el área mejor establecida del enredamiento en sistemas discretos y el área más reciente del enredamiento entre sistemas continuos. La búsqueda de cantidades que nos permitan caracterizar este tipo de enredamiento es un área activa actualmente.

Notablemente, se ha hecho una propuesta de clasificación del enredamiento híbrido, que permite describir a este tipo de enredamiento usando medidas discretas en el caso de una clase determinada de estados [51]. Se ha dado así mismo una indicación hacia la posibilidad de trasladar las medidas usadas en el caso continuo para cuantificar el enredamiento híbrido presente en el resto de estados.

En este trabajo de tesis nos proponemos investigar la generación de enredamiento cuántico híbrido y su forma de cuantificarlo. Nos interesa en primer lugar encontrar modelos físicos donde pueda ser generado enredamiento cuántico híbrido, así como la forma de caracterizar y cuantificar este enredamiento. Se propone particularmente el uso de medidas de enredamiento discretas mediante técnicas de reducción de los estados híbridos propuestas en [51, 52]. El experimento de Stern-Gerlach produce naturalmente enredamiento híbrido, de esta manera, esta tesis se ocupa de caracterizar sus características cuánticas determinada por las correlaciones que corresponden a éste.

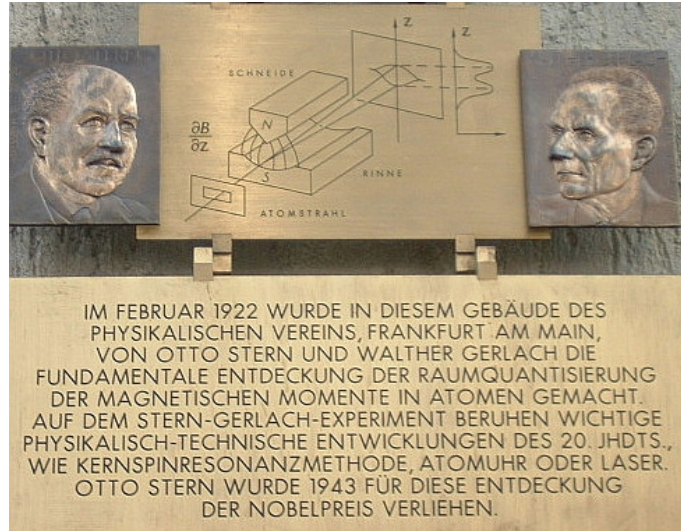


Figura 1: Placa conmemorativa dedicada al experimento de Stern-Gerlach en su 80 aniversario en la Universidad de Frankfurt, donde fue realizado el experimento en 1922. Además de los relieves representando a Otto Stern y Walter Gerlach, observamos un esquema detallado del experimento que incluye la distribución de probabilidad de la medición en el eje z .

I.1 El Experimento de Stern-Gerlach

El experimento de Stern-Gerlach (SGE por sus siglas en inglés) [53–55] tiene una importancia fundamental en el desarrollo de la mecánica cuántica, y ha sido a través de los años reconocido como tal (ver Fig. (1)), así como juega un papel imprescindible en su enseñanza. Este experimento se usa comúnmente para introducir el concepto del espín en los sistemas cuánticos, el cual no tiene una contraparte clásica [1, 56–63].

El SGE puede ser fácilmente usado para introducir el concepto de enredamiento en la enseñanza de la mecánica cuántica [1, 64–66], en particular debido a que es un ejemplo directo de la generación de enredamiento entre variables continuas y discretas, así como en estados puros y mixtos. En [1, 2] se exploran estas propiedades del SGE, usando el método del operador de evolución para estudiar la dinámica del SGE.

El SGE pertenece al tipo de experimentos de haces moleculares, estos consisten en hacer pasar un haz de partículas a través de campos eléctricos o magnéticos [67]. En particular, en el SGE original se utilizaron partículas de plata y un campo magnético inhomogéneo.

La razón por la que el SGE es fundamental para la ciencia es debido a que en la pantalla del experimento se observa que las partículas se concentran en dos diferentes áreas bien definidas y separadas, este es el conocido efecto del SGE que dio lugar a definir la propiedad de la materia conocida hoy en día como espín. Tal efecto se aprecia en la Fig. (2), donde se muestra el resultado en la pantalla del experimento, en la Fig. (1) se muestra la distribución de probabilidad relacionada a este efecto; así mismo, ver la Fig. (4.1).

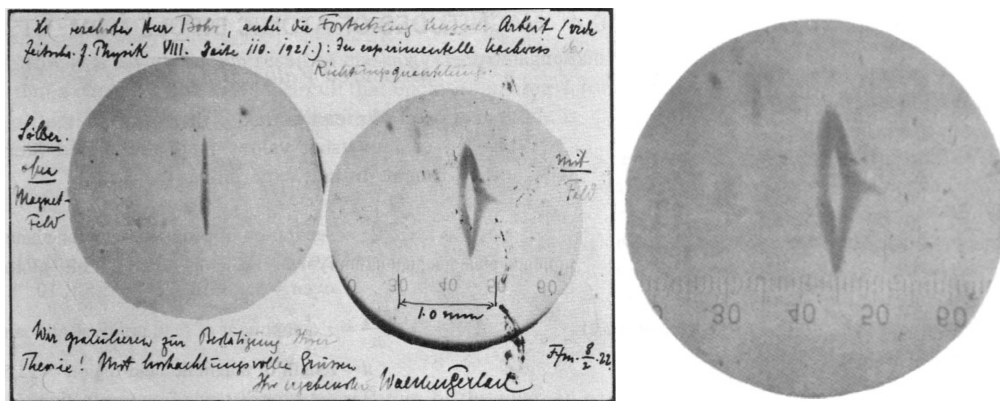


Figura 2: (Izquierda) Postal de Gerlach a Niels Bohr del 8 de Febrero de 1922. Muestra una fotografía de la pantalla del experimento y la apreciable separación del haz, con un mensaje congratulatorio a Bohr por la confirmación de la teoría de la cuantización espacial. (Derecha) Detalle de la observación en la pantalla del SGE.

Capítulo 1

Enredamiento y no localidad: Correlaciones cuánticas

Este primer capítulo se ocupa del enredamiento cuántico. Comenzaremos discutiendo la naturaleza del enredamiento cuántico, a la vez que hacemos un recuento histórico de su descubrimiento en el nacimiento de la mecánica cuántica y los esfuerzos que se hicieron por describirlo.

1.1. El enredamiento cuántico

Cuando consideramos sistemas cuánticos compuestos por dos o más subsistemas, una de las cosas más interesantes que podemos apreciar es la interacción entre ellos.

En las correlaciones entre estos subsistemas encontramos una separación fundamental de los sistemas cuánticos respecto a aquellos clásicos. Las correlaciones en los sistemas clásicos siempre se pueden describir en términos de probabilidades clásicas, mientras que esto no es necesariamente cierto para sistemas cuánticos.

Estas correlaciones son conocidas como correlaciones cuánticas, y su existencia y descripción tienen fuertes bases en el teorema de Bell [68]. De estas correlaciones surge la idea del enredamiento cuántico. Los estados que presentan tales correlaciones no clásicas se identificaron originalmente con el enredamiento cuántico.

Las correlaciones se manifiestan en los resultados esperados para las observables de los subsistemas, como podemos ver en la Fig. (1.1). Con la presencia de correlaciones cuánticas tenemos que éstos pasan a depender de las variables de los otros sistemas, no solo de la variable del sistema que está siendo observado.

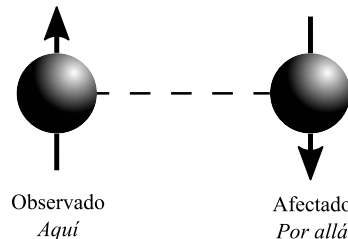


Figura 1.1: Representación esquemática del concepto de correlaciones cuánticas. En particular se muestra cómo el espín observado de una partícula es afectado por el estado de otra partícula separada e independiente. Usualmente se considera a este par de partículas con espín 1/2 como correlacionadas en su origen a partir de una partícula de espín 1 que decae.

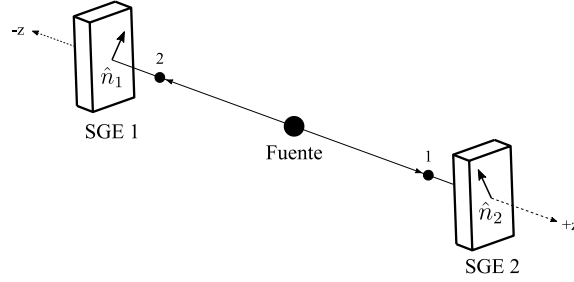


Figura 1.2: El experimento pensado de Bohm [56], discutido en [71]. Este experimento destaca las correlaciones cuánticas como una propiedad de los sistemas cuánticos. Las correlaciones entre el espín de dos partículas emitidas por la misma fuente, pero separadas y sujetas a procesos experimentales independientes, son observadas mediante aparatos de Stern-Gerlach.

Es interesante recordar la aparente paradoja que la existencia de estas correlaciones generó, al ser encontradas en el famoso escenario propuesto por Einstein, Podolski y Rosen (**EPR**) [69], lo que parecía sugerir la presencia de acción a distancia en la mecánica cuántica.

El experimento de Bohm [70, 71] demuestra excelentemente la presencia de estas correlaciones en un sistema relativamente sencillo y el efecto sobre las observables. Un esquema de este experimento presentado por [71] aparece en la Fig. (1.2).

Junto al experimento de Bohm, en los primeros años del estudio del enredamiento cuántico se exploraron diversos estados que presentan este tipo de correlaciones y ahora representan ejemplos notables del enredamiento cuántico. Cuando pensamos en los estados que presentan claramente correlaciones cuánticas se pueden notar por simple inspección características particulares de éstos, prominentemente, su no-separabilidad [7, 72–74]. Como un ejemplo directo consideremos el estado del experimento de Bohm [70, 71]:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2), \quad (1.1)$$

en el que es claro que no podemos factorizar la descripción de los sistemas 1 y 2.

Ahora podemos contrastar el teorema de Bell con lo que observamos de estos estados, llevando a la definición propia del enredamiento cuántico como la no-separabilidad de los estados. Esta propiedad entonces produce correlaciones cuánticas, que pueden ser consistentes con la representación de no localidad que da el teorema de Bell.

El enredamiento cuántico forma una parte central en los sistemas cuánticos y los efectos que presentan. De esta manera, encontramos que la presencia de enredamiento es fundamental para la realización de una amplia variedad de tareas cuánticas, en las que el objetivo es transformar y manipular estados cuánticos. Así, el enredamiento se define como un recurso cuántico. La capacidad de describir y definir un estado enredado así como cuantificar el enredamiento presente es una tarea necesaria no sólo para mejorar nuestra comprensión de los sistemas cuánticos, sino también para su continuada aplicación tecnológica y el desarrollo práctico de las tareas cuánticas [15–18, 29].

Es por esto que se ha partido de la definición del enredamiento mediante la separabilidad y la caracterización de las correlaciones por la no localidad buscando técnicas para la detección de enredamiento y herramientas que definen una cuantificación, considerando tipos de estados enredados que permiten descripciones similares para facilitar este proceso.

El caso de enredamiento más estudiado es justamente el que vemos en los estados considerados en los primeros días del enredamiento [7, 69–76], el enredamiento discreto bipartita. Ambas circunstancias se deben en gran parte a su simplicidad. Este tipo de enredamiento es nuevamente excelentemente ejemplificado por el estado de la Ec. (1.1); el enredamiento está distribuido entre dos partes, las partículas, cuyo espín, una variable discreta, se describe completamente en su subsistema individual mediante los estados $\{+, -\}_i$, etiquetados por $i = 1, 2$.

Identificamos el enredamiento mediante el número de partes del sistema diferenciables, descritas como subsistemas, que están involucradas, estando el enredamiento relacionándolas. Así tenemos enredamiento bipartita, en el que el enredamiento se establece entre dos subsistemas, tripartita, involucrando tres subsistemas, multipartita, etc. Por otro lado, podemos distinguir el tipo de subsistemas que comparten el enredamiento por el tipo de variables con el que las describimos. Llamamos enredamiento discreto a aquél existente entre subsistemas de variables discretas, como el espín, los estados de número en un espacio de Fock, etc. El enredamiento continuo es el que existe entre subsistemas de variables continuas, tales como la posición y el momento. Finalmente, el enredamiento entre subsistemas discretos y subsistemas continuos es denominado híbrido.

El enredamiento bipartita es significativamente más simple, independientemente del tipo de sistemas incluidos. Esta sencillez en su descripción permite facilitar operacionalmente el desarrollo y aplicación de herramientas con las que se caracteriza el enredamiento [15–18, 21–25, 29]. Naturalmente, este es el caso más ampliamente estudiado, cuando se trata de sistemas discretos, continuos e híbridos [17, 22]. En los sistemas multipartitas el enredamiento tiene la capacidad de distribuirse de múltiples distintas maneras entre los subsistemas, presentando comportamientos y una estructura no existente en el enredamiento bipartita, lo que introduce complicaciones y nuevas necesidades en su análisis.

Tempranamente se desarrolló una teoría comprensiva y extensiva del enredamiento discreto bipartita. En este caso existen importantes resultados que permiten detectar el enredamiento, como es el criterio de positividad de la transpuesta parcial (conocido como criterio PPT, por sus siglas en inglés) [36, 37], así como medidas de enredamiento bien establecidas, resaltando los casos básicos de la concurrencia [33, 34], negatividad [19], la entropía de enredamiento y otras medidas entrópicas [22, 37, 77].

Sin embargo, en los sistemas continuos e híbridos inclusive en el caso del enredamiento bipartita existe aún una gran necesidad de desarrollar herramientas adecuadas para la descripción de su enredamiento [16, 17, 25]. La descripción de la matriz de covarianza permite estudiar con relativa facilidad el enredamiento continuo para estados Gaussianos, para los que su descripción es finita. En este caso se tiene una variedad de medidas de enredamiento y criterios de separabilidad, de los que un porcentaje significativo han sido generalizados a partir de herramientas discretas [17, 40–50], como es el caso del criterio de separabilidad de Simon [39]. Cuando se trata de estados *no Gaussianos*, su descripción requiere de expresiones más complejas en forma y un mayor número de parámetros, en el caso en el que es posible una descripción finita [17]. Resalta así la generalización que hacen Schuhkin y Vogel del criterio de Simon [78]. En el Capítulo 2 discutiremos con detalle la cuatificación y caracterización del enredamiento cuántico.

El caso del enredamiento híbrido lo discutiremos posteriormente con más detalle, en el Capítulo 3, pero es necesario remarcar que para éste la generalización de medidas y criterios es significativamente menos directa, correspondiendo a la complejidad de la descripción de estos estados.

1.1.1. La separación de los sistemas físicos

Cuando se piensa en el origen del enredamiento, naturalmente se piensa en la paradoja **EPR** y en el experimento de Bohm [7, 69–76], con la aparente comunicación instantánea que se necesita para correlacionar de esta manera tan particular los resultados de dos experimentos, o más precisamente, resultados de mediciones separadas. Esto es en general lo que se mantiene en la mayor parte de las discusiones y revisiones actuales del enredamiento y el origen de la mecánica cuántica propiamente dicha [76, 79–85]. Así, parece que el concepto de enredamiento cuántico surge de este tipo de situaciones, en principio empíricas, consecuencia del desarrollo de la teoría cuántica formal y el análisis y búsqueda de caracterización de estados cuánticos específicos. Esta intuición parece provenir del hecho de que el experimento pensado de Bohm aterriza tan apropiadamente el problema filosófico de las correlaciones cuánticas, valiéndose de propiedades particulares del espín, y utilizando a la vez al SGE como base física para las reflexiones del público que piensa el

experimento [57, 58, 71, 76, 86, 87].

Sin embargo, existe una discusión filosófica previa, que cimienta al enredamiento en los propios orígenes de la teoría cuántica, surgiendo de la búsqueda por comprensión de la naturaleza de la cuantización de la luz [76, 80, 81, 84, 85]. Esta discusión culmina con el experimento pensado de las cajas de Einstein, y conlleva en sí el entendimiento de la inseparabilidad de la descripción del sistema compuesto, el propio espíritu del enredamiento. En esta discusión participan notablemente Einstein, Lorentz, Ehrenfest, Schrödinger, y, finalmente, Bohr [76, 79–85]. Las cajas de Einstein es finalmente la motivación directa de la exposición de los problemas de la mecánica cuántica que trata el artículo de Einstein, Podolski y Rosen [69, 80–83].

Schrödinger [72] en 1935 [73, 80] refiriéndose a esta discusión, identifica al enredamiento como la fuente de las discrepancias, y lo nombra, definiéndolo como la imposibilidad de conocer dos sistemas relacionados de una manera individual ¹:

« Si dos cuerpos separados, sobre los que, individualmente, tenemos conocimiento máximo, llegan a una situación en la que se influncian entre ellos y después se separan nuevamente, entonces regularmente surge aquello que apenas he llamado *enredamiento* de nuestro conocimiento de los dos cuerpos. En el comienzo, el catálogo conjunto de expectativas consiste de una suma lógica de los catálogos individuales; durante el proceso el catálogo conjunto se desarrolla necesariamente de acuerdo a la ley conocida [evolución unitaria].

»[...] Nuestro conocimiento permanece máximo, mas al final, si los cuerpos se han separado nuevamente, este conocimiento no se descompone nuevamente en una suma lógica de conocimiento de los cuerpos individuales. »

Antes de 1935, el enredamiento como un concepto ya formaba parte de los libros de texto tratando la nueva teoría cuántica. Weyl [88, 89] explica ²:

« *Las condiciones que aseguran un máximo de homogeneidad dentro de c* [sistemas compuestos con componentes a y b] *no necesitan requerir un máximo en este respecto dentro del sistema parcial a.* Más aún: *si el estado de a y el estado de b se conocen, el estado de c en general no es únicamente determinado*, para una forma Hermitiana definida positiva $||a_{ik,i'k'}||$ en el espacio producto, que describe un agregado estadístico de estados c, no es únicamente determinada por las formas Hermitianas

$$\sum_k a_{ik,i'k}, \quad \sum_k a_{ik,ik'} \quad (1.2)$$

a las que ésta da origen en los espacios $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$. En este sentido significativo, la teoría cuántica se suscribe al punto de vista de que “*el total es más grande que la suma de sus partes*” [...]. »

¹ *If two separated bodies, about which, individually, we have maximal knowledge, come into a situation in which they influence one another and then again separate themselves, then there regularly arises that which I just called entanglement of our knowledge of the two bodies. At the outset, the joint catalogue of expectations consists of a logical sum of the individual catalogues; during the process the joint catalogue develops necessarily according to the known law [linear Schrödinger evolution].:*

[...] *Our knowledge remains maximal, but at the end, if the bodies have again separated themselves, that knowledge does not again decompose into a logical sum of knowledge of the individual bodies.* [72, 73] Traducción al inglés de [80].

² *Conditions which insure a maximum of homogeneity within c* [composite systems with components a and b] *need not require a maximum in this respect within the partial system a.* Furthermore: *if the state of a and the state of b are known, the state of c is in general not uniquely specified*, for a positive definite Hermitian form $||a_{ik,i'k'}||$ in the product space, which describes a statistical aggregate of states c, is not uniquely determined by the Hermitian forms

$$\sum_k a_{ik,i'k}, \quad \sum_k a_{ik,ik'}$$

to which it gives rise in the spaces $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$. In this significant sense quantum theory subscribes to the view that “*the whole is greater than the sum of its parts,*” which has recently been raised to the status of philosophical creed by the Vitalists and the Gestalt Psychologists. [88, 89]

1.1.1.1. Los primeros años de la teoría cuántica

La teoría cuántica inició formalmente con la cuantización de la radiación electromagnética. El trabajo de Einstein sobre el efecto fotoeléctrico de 1905 [90, 91] fue el paso fundamental que asentó esta teoría de la luz. Por este descubrimiento Einstein ganó el premio Nobel de 1921 [92]. Este trabajo, naturalmente, comenzó una discusión larga sobre la teoría cuántica, centrándose en un principio en la naturaleza de la luz y el comportamiento de los cuantos de luz. Aquí podemos remarcar las preguntas presentadas por el propio Einstein, que llevarían finalmente a entrever el problema del enredamiento cuántico por primera vez.

En [90, 91] Einstein describe el comportamiento de la luz en términos de probabilidades independientes de cuantos de energía. Concluye que la radiación monocromática a bajas densidades, es decir, en el dominio de la fórmula de radiación de Wien [93], se puede describir termodinámicamente como si consistiera de cuantos de energía *mutuamente independientes*. Posteriormente Einstein reflexiona en una carta a Lorentz en 1909 [94] sobre la independencia de los cuantos de luz y la determinación de su posición espacial, presentando la situación que imagina respecto a la composición de la luz y su descripción adecuada. La exposición que hace Einstein en esta carta nos recuerda a la dualidad onda-partícula, la cual esta discusión ayudaría a formar poco después [80, 85, 95]. Sin embargo, podemos notar otro punto importante discutido aquí, aquel de la independencia y localización de los cuantos de luz. En esta misma carta, Einstein acepta que la composición de la luz por cuantos mutuamente independientes y localizados en relativamente pequeños espacios es la explicación más conveniente a las leyes derivadas en [90, 91].

Es esta independencia y la discusión sobre las reglas de la distribución que dan la entropía apropiada que se ajusta a la ley de Planck [96–102], descubierta empíricamente, las que dan paso a la relación de Planck-Einstein [103, 104] y finalmente a la relación de de Broglie [105, 106] entre el comportamiento ondulatorio y de partícula.

Wolfke en [107] trae a la luz explícitamente la independencia de los cuantos de luz en la teoría de Einstein, declarando la necesidad de que las probabilidades correspondientes sean de eventos mutuamente independientes. Consecuentemente, se habla de la determinación de la posición de los cuantos de luz como independientes:³

« Así vemos que, de acuerdo a la visión de Einstein, el hecho de que un cuanto de luz se sitúa en un subvolumen específico es independiente de la posición de los otros cuantos de luz. »

Ehrenfest y Onnes [108], en el apéndice de su artículo de 1914 [108], discuten la diferencia entre la teoría de Einstein [90, 91] y la de Planck [109–111] de la radiación en las distribuciones espaciales correspondientes a los niveles de energía de los cuantos de luz, que se reduce al problema de la distribución de cuantos en celdas espaciales. De esta manera, la teoría de Planck concluyen, no considera cuantos de luz separados e independientes, como lo hace la de Einstein, sino que son las diferentes distribuciones energéticas las que son los objetos a contarse. La independencia considerada en la teoría de Einstein lleva necesariamente a la fórmula de Wien, no a la correcta fórmula de Planck: [108]⁴

« La hipótesis de Einstein lleva necesariamente a la fórmula (χ) para la entropía y así necesariamente a la fórmula de radiación de Wien, no a la de Planck. El mecanismo formal de Planck (la distribución de P elementos de energía g sobre N resonadores) no puede ser interpretado en el sentido de los cuantos de luz de Einstein. »

En 1925 Einstein [112–114]⁵ responde a estas críticas, aceptando que, tanto en la teoría de la radiación como en la de los gases de Bose-Einstein [116], la distribución de probabilidad apropiada considera implícitamente cierta influencia mutua entre las *partículas*. Esto es mejor descrito en una

³ Thus we see that, according to Einstein's view, the fact that a light quantum lies in a specific subvolume is independent of the position of the other light quanta. Traducción al inglés de [80].

⁴ Einstein's hypothesis leads necessarily to formula (χ) for the entropy and thus necessarily to Wien's radiation formula, not Planck's. Planck's formal device (distribution of P energy-elements g over N resonators) cannot be interpreted in the sense of Einstein's light-quanta.[108]

⁵ Traducción al inglés en Document 385 Quantum Theory of Ideal Gas II pp. 371-383 Einstein [115]

Enredamiento y no localidad: Correlaciones cuánticas

1.1 El enredamiento cuántico

carta de Einstein dirigida a Schrödinger de Febrero de 1925 [117, 118].⁶

« En la estadística de Bose aplicada por mi, los cuantos, o moléculas, no son tratados como *independientes uno de otro*. [...] »

»La complexión es caracterizada indicando el número de moléculas que están presentes en cada celda individual. El número de las así definidas complexiones es supuesto crucial para la entropía. En este procedimiento las moléculas no están localizadas de manera mutuamente independiente; más bien, tienen una preferencia por localizarse con otra molécula dentro de la misma celda. Uno puede visualizar esto fácilmente con números bajos. E.g., 2 cuantos, 2 celdas: De acuerdo a Bose,

»

	Estadística de Bose		moléculas independientes	
	1a celda	2a celda	1a celda	2a celda
1er caso	•	-	I II	-
2o caso	•	•	I	II
3er caso	-	•	II	I
4o caso	-	-	-	I II

»

»Tabla 1.1: Diagrama de Einstein de [118].

las moléculas se localizan juntas relativamente más frecuentemente que de acuerdo a la hipótesis de las moléculas siendo estadísticamente independientes. Presenté este tema en un segundo artículo que desde entonces ha aparecido en los *proceedings* [S.Ber.], 2o artículo. [112–114] »

Schrödinger posteriormente [119] analiza el hecho de que esta dependencia debe estar implícita análogamente en la teoría de gases y la teoría de la radiación, proveyendo de una necesaria fundamentación a las estadísticas de ambas teorías. La otra opción, que invoca el conteo de estados de Planck para obtener la distribución adecuada, Schrödinger concluye, no permite pasar propiamente a la teoría cuántica:⁷

« Así uno debe simplemente dar forma a nuestro modelo del gas siguiendo el mismo modelo de la radiación de cavidad que corresponde a lo que no es aún la idea cuántica extrema de la luz; entonces la estadística natural-básicamente el método conveniente de Planck para sumar estados-llevará a la teoría del gas de Einstein. »

Finalmente, en un artículo de 1927 [120–122], Einstein describe a la perfección el problema de la independencia de los subsistemas, que podemos identificar fácilmente ahora con la propia definición de enredamiento:⁸

⁶In the Bose statistics applied by me, the quanta, or molecules, are not treated as *independent of one another*. [...]

The complexión is characterized by indicating the number of molecules that are present in each individual cell. The number of the thus defined complexions is supposed to be crucial for entropy. In this procedure the molecules are not mutually independently localized; rather, they have a preference for sitting together with another molecule inside the same cell. One can visualize this easily with low numbers. E.g., 2 quanta, 2 cells:

	Bose statistics		independent molecules	
	1st cell	2nd cell	1st cell	2nd cell
1st case	•	-	I II	-
2nd case	•	•	I	II
3rd case	-	•	II	I
4th case	-	-	-	I II

According to Bose, the molecules sit together relatively more frequently than according to the hypothesis of the molecules being statistically independent. I presented this subject in a second paper that has since appeared in the proceedings, [S.Ber.], 2nd paper. [[112–114]] Traducción al inglés en Document 446 February 1925 “To Erwin Schrödinger” pp.438-439 Einstein [115].

⁷Thus one must simply fashion our model of the gas after the same model of cavity radiation that corresponds to what is still not the extreme light quantum idea; then the natural statistics—basically the convenient Planck method for summing states—will lead to the Einstein gas theory. Traducción al inglés de [80]

⁸Stimulated by this, I found out that this schema does not properly take into account one general condition that must be set for a general law of motion of the systems.

« Incentivado por esto, encontré que este esquema no toma en consideración propiamente una condición general que debe ser establecida para una ley general de movimiento de los sistemas.

»Específicamente, un sistema Σ es considerado, el cual consiste de dos sistemas parciales mutuamente independientes energéticamente, Σ_1 y Σ_2 ; esto significa que la energía potencial, así como la energía cinética se componen aditivamente de dos partes, la primera de las cuales contiene sólo cantidades con referencia a Σ_1 , la segunda, sólo cantidades con referencia a Σ_2 . Entonces, como es conocido,

$$\Psi = \Psi_1 \cdot \Psi_2, \quad (1.3)$$

donde Ψ_1 depende sólo de las coordenadas de Σ_1 ; Ψ_2 depende sólo de las coordenadas de Σ_2 . En este caso, debe ser requerido que los movimientos del sistema total sean combinaciones de movimientos posibles de los sistemas parciales.^{[Nota 8 en el original [120–122]]}

»El esquema indicado no corresponde a esta condición. Es decir, sea μ un índice que pertenece a una de las coordenadas de Σ_1 , ν un índice que pertenece a una coordenada de Σ_2 . Entonces $\Psi_{\mu\nu}$ no desaparece. »

Simultáneamente a esto, estaba comenzando una larga discusión principalmente entre Einstein y Bohr sobre los fundamentos de la teoría cuántica. Aquí podemos remarcar que el principio de correspondencia, el cual jugó un papel central en los primeros años de esta discusión y aparecería no solo en los trabajos de Einstein sobre la radiación, sino también en la teoría atómica de Bohr de 1913 [124–126], traería en el fondo a la preocupación de Einstein sobre una interpretación realista de la teoría cuántica [85].

Por otro lado, desde el descubrimiento del efecto Ramsauer-Townsend en 1920 [127–134], Bohr sospechaba que la teoría cuántica dependía de, lo que llamaba, “fallos de la descripción ordinaria del espacio-tiempo”, lo que es que una variedad de fenómenos se explicarían al violar la suposición clásica de la independencia de los sistemas [80]. Esta apreciación lo llevaba a dudar de la teoría de los cuantos de luz de Einstein, debido a su aparente independencia. En 1925, refiriéndose a un experimento [135] que profundizaría la refutación [136–139] de la teoría de la absorción y emisión propuesta por Bohr, Kramers y Slater (conocida como teoría BKS) [140, 141], Bohr reconoce el fallo de ésta en la suposición de independencia de tales procesos en un par de cartas: [142]⁹

« Estaba bastante preparado para enterarme de que nuestro punto de vista propuesto acerca de la independencia de los procesos cuánticos en átomos separados resultaría incorrecta... No sólo fueron las objeciones de Einstein muy inquietantes, sino que recientemente también he sentido que una explicación de los fenómenos de colisión, especialmente los resultados de Ramsauer de la penetración de átomos lentos a través de átomos, presenta dificultades para nuestra descripción espacio-temporal ordinaria de la naturaleza similar en tipo a aquellas presentadas por el entendimiento simultáneo de los fenómenos de interferencia y un acoplamiento de cambios de estado de

Specifically, a system Σ is considered, which consists of two energetically mutually independent partial systems Σ_1 and Σ_2 ; this means that the potential energy as well as the kinetic energy are composed additively of two parts, the first of which contains only quantities with reference to Σ_1 , the second, only quantities with reference to Σ_2 . Then, as is known,

$$\Psi = \Psi_1 \cdot \Psi_2,$$

where Ψ_1 depends only on the coordinates of Σ_1 ; Ψ_2 depends only on the coordinates of Σ_2 . In this case it must be required that the motions of the total system be combinations of possible motions of the partial systems.^[8]

*The indicated schema does not correspond to this condition. Namely, let μ be an index that belongs to one of the coordinates of Σ_1 , ν be an index belonging to a coordinate of Σ_2 . Then $\Psi_{\mu\nu}$ does not vanish. Traducción al inglés en “Postscript to the correction.” Document 516 *Schrödinger’s Wave Mechanics*: “Does Schrödinger’s Wave Mechanics Completely Determine the Motion of a System, or Only Statistically?” pp. 514–515 Einstein *et al.* [123].*

⁹*I was quite prepared to learn that our proposed point of view about the independence of the quantum processes in separated atoms would turn out to be wrong. . . . Not only were Einstein’s objections very disquieting; but recently I have also felt that an explanation of collision phenomena, especially Ramsauer’s results on the penetration of slow electrons through atoms, presents difficulties to our ordinary space-time description of nature similar in kind to the those presented by the simultaneous understanding of interference phenomena and a coupling of changes of state of separated atoms by radiation. In general, I believe that these difficulties exclude the retention of the ordinary space-time description of phenomena to such an extent that, in spite of the existence of coupling, conclusions about a possible corpuscular nature of radiation lack a sufficient basis. (Bohr to Geiger, 21 April 1925 [142])*

átomos separados por radiación. En general, creo que estas dificultades excluyen la retención de la descripción espacio-temporal ordinaria de los fenómenos a un grado tal que, a pesar de la existencia de acoplamiento, las consecuencias sobre una posible naturaleza corpuscular de la radiación carecen de una base suficiente. » (Bohr a Geiger, 21 de abril de 1925 [142]); y:¹⁰

« Son, en particular, los resultados de Ramsauer concernientes a la penetración de electrones lentos a través de átomos los que aparentemente no encajan con el punto de vista asumido. De hecho, estos resultados pueden plantear dificultades para nuestra descripción espacio-temporal acostumbrada de la naturaleza que son similares en tipo a un acoplamiento de cambios de estado en átomos separados a través de radiación. Pero no hay mayor razón para dudar de tal acoplamiento y de las leyes de conservación generalmente. » (Bohr a Franck, 21 de abril de 1925 [142])

Similarmente a Einstein, Bohr consideraba que la teoría de cuantos requería la independencia estadística de los cuantos de luz.

1.1.2. La incompletitud de la mecánica cuántica

Famosamente, Einstein se sentía inconforme con la naturaleza indeterminada de la mecánica cuántica. La interpretación de Copenhague, en la que la descripción de la realidad se da probabilísticamente a través de la función de onda, y a la vez de las mediciones que conllevan el llamado *colapso*, como mecanismo que permite dar un resultado específico, es difícil de asimilar y hacer coincidir desde un punto de vista filosófico con las propiedades deterministas de la mecánica clásica. En esto se fijarían las discusiones famosas que Einstein mantuvo por años con Bohr [76, 79–85].

El problema que preocupaba a Einstein lo definió incisivamente como la *incompletitud* de la teoría. Según esta, el estado de un sistema cuántico no da una descripción completa, en el sentido de que los valores de las propiedades del sistema no son únicamente determinados [143]. La determinación de la mecánica cuántica está relacionada con las condiciones que impone el principio de incertidumbre, sin embargo, Einstein consideraba esto simplemente otra característica de la teoría [80, 81]. En lugar de fijarse en demostrar la imposibilidad del principio de incertidumbre, a Einstein le preocupaba buscar una teoría cuántica *adecuada* en su descripción de los sistemas físicos, completa, como el mismo Einstein mencionaría a Ehrenfest:¹¹[81, 144]

« [Einstein] me dijo que, ya por un largo tiempo, él no dudaba en absoluto de las relaciones de incertidumbre, y que él en consecuencia, *e.g.*, no había de ninguna manera inventado la “caja de destellos de luz pesable”¹² “contra la relación de incertidumbre”, sino para un propósito totalmente diferente. »

Como veremos, esta discusión tiene sus raíces en la inseparabilidad de la descripción de los sistemas cuánticos, que se discutió en la Sec. (1.1.1) previa, y, finalmente, llevaría al enredamiento cuántico. El argumento que mejor expresa esto es presentado en 1936 por Einstein [145]:¹³

¹⁰ *It is, in particular, the results of Ramsauer concerning the penetration of slow electrons through atoms that apparently do not fit in with the assumed viewpoint. In fact, these results may pose difficulties for our customary spatio-temporal description of nature that are similar in kind to a coupling of changes of state in separated atoms through radiation. But then there is no more reason to doubt such a coupling and the conservation laws generally.* (Bohr to Geiger, 21 April 1925 [142])

¹¹ *He [Einstein] said to me that, for a very long time already, he absolutely no longer doubted the uncertainty relations, and that he thus, e.g., had BY NO MEANS invented the “weighable light-flash box” (let us call it simply L-F-box) “contra uncertainty relation,” but for a totally different purpose.* [144] Traducción al inglés en [81].

» ¹² “weighable light-flash box” [144] Traducción al inglés en [81]

¹³ Consider a mechanical system constituted of two partial systems *A* and *B* which have interaction with each other only during limited time. Let the ψ function before their interaction be given. Then the Schrödinger equation will furnish the ψ function after the interaction has taken place. Let us now determine the physical condition of the partial system *A* as completely as possible by measurements. Then the quantum mechanics allows us to determine the ψ function of the partial system *B* from the measurements made, and from the ψ function of the total system. This determination, however, gives a result which depends upon *which* of the determining magnitudes specifying the condition of *A* has been measured (for instance coördinates *or* momenta). Since there can be only *one* physical condition of *B* after the interaction and which can reasonably not be considered as dependent on the particular measurement we perform on the system *A* separated from *B* it may be concluded that the ψ function is

« Considere un sistema mecánico constituido de dos sistemas parciales A y B que tienen interacción el uno con el otro sólo por un tiempo limitado. Sea dada la función ψ previa a su interacción. Entonces, la ecuación de Schrödinger proporcionará la función ψ después de que la interacción ha tomado lugar. Permítasenos determinar la condición física del sistema parcial A tan completamente como es posible mediante mediciones. Entonces la mecánica cuántica nos permite determinar la función ψ del sistema parcial B a partir de las mediciones hechas y de la función ψ del sistema total. Esta determinación, sin embargo, da un resultado que depende de *cuál* de las magnitudes determinantes que especifican la condición de A ha sido medida (por ejemplo coordenadas o momentos). Debido a que solo puede haber *una* condición física de B después de la interacción, y ésta puede razonablemente no ser considerada como dependiente de la medición particular que hacemos en el sistema A separado de B , puede concluirse que la función ψ no está unambiguamente coordinada con la condición física. Esta coordinación de varias funciones ψ con la misma condición física del sistema B muestra nuevamente que la función ψ no puede ser interpretada como una descripción (completa) de la condición física de un sistema unitario.»

Sin embargo, le llevaría a Einstein años de discusiones con prominentes físicos el llegar a esta exposición de los problemas de la mecánica cuántica. A continuación revisaremos los argumentos más notorios de esta discusión, pasando por la paradoja **EPR**, para finalmente llegar a la definición del enredamiento y la prueba de la mecánica cuántica que representa el teorema de Bell.

1.1.2.1. El primer experimento pensado: Solvay 1927

de Broglie recuerda [82, 146–149] en [150] un experimento pensado propuesto por Einstein durante el congreso Solvay de 1927. En [146] además discute los problemas presentados por Einstein: con este experimento Einstein quería llamar la atención a la idea de que la teoría cuántica, a través de las *ecuaciones de campo* (ecuaciones de onda), no es capaz de describir *la totalidad de la realidad física* [146].

El experimento consiste de un electrón incidente en una pantalla con una abertura que difractará al electrón de manera que posteriormente a ésta se describirá como ondas *de Schrödinger*, correspondiendo a la función de onda de la posición del electrón, esféricas. El electrón finalmente será detectado en una pantalla hemisférica [82, 146–148]. Un esquema del experimento pensado se puede ver en la Fig. (1.3).

Las situaciones que surgen de este experimento las expone Einstein como sigue: [82, 146–150]

1. «Las ondas de de Broglie-Schrödinger no corresponden a un solo electrón, sino a una nube de electrones extendida en el espacio. La teoría no da ninguna información sobre los procesos individuales, sino sólo sobre el arreglo de un infinito de procesos elementales.¹⁴»
2. «La teoría tiene la pretensión de ser una teoría completa de procesos individuales.¹⁵»

De acuerdo a la primera interpretación, la descripción probabilística de la función de onda es incompleta, ya que no describe el camino tomado por ninguno de los electrones en el ensamble (el cual no necesita ser real, sino puede existir simplemente como un concepto) para llegar a la distribución final. En la segunda interpretación, de acuerdo a la propia comprensión de Schrödinger en ese momento de la función de onda, un electrón no tiene una trayectoria definida, sino que se asume que está esparcido en el espacio como describe la función de onda. La objeción de Einstein con esta interpretación es que, al detectarse el electrón en una posición particular de la pantalla, éste se localiza con una particular *acción a distancia* que elimina todas las posibilidades existentes

not unambiguously coordinated with the physical condition. This coordination of several ψ functions with the same physical condition of system B shows again that the ψ function cannot be interpreted as a (complete) description of a physical condition of a unit system. [145]

» ¹⁴ *The de Broglie-Schrödinger waves do not correspond to a single electron, but to a cloud of electrons extended in space. The theory does not give any information about the individual processes, but only about the ensemble of an infinity of elementary processes.* Traducción al inglés en [149]

» ¹⁵ *The theory has the pretension to be a complete theory of individual processes.* Traducción al inglés en [149]

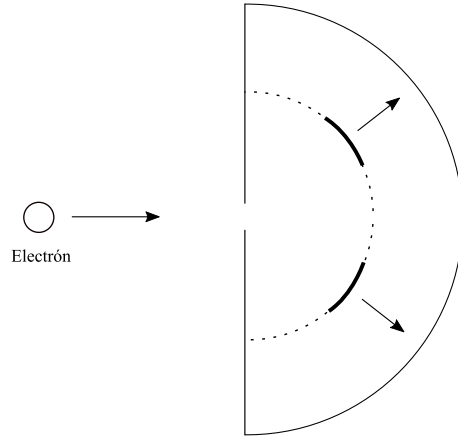


Figura 1.3: Esquema del experimento pensado presentado por Einstein en el congreso Solvay de 1927 para exponer la incompletitud de la teoría cuántica. Un electrón es difractado por una rendija, con lo cual su posición se describe posteriormente por ondas esféricas. El electrón puede ser potencialmente detectado en distintos puntos de la pantalla. Se representan dos posibles trayectorias esperadas, correspondiendo a distintas posiciones de la detección.

anteriormente de que estuviese presente en cualquier otro lugar de la pantalla. De la imposibilidad de tal acción a distancia se concluye necesariamente que la primera interpretación se debe mantener, y por tanto, la teoría cuántica es incompleta. [82, 146–150]

1.1.2.2. Las cajas de fotones de Einstein (*Einstein's photon-box Gedanken-experiment*)

Este experimento pensado surgiría en las discusiones con Bohr en el congreso Solvay de 1930. Notablemente, Bohr recordaría este experimento [151, 152] como un intento de refutar el principio de incertidumbre, con una respuesta irónica por parte de Bohr en la que la relatividad general evita tal refutación. Sin embargo, en la carta de Ehrenfest citada arriba en la Sec. (1.1.2) [81, 144], vemos que esta no es la intención de Einstein [81]. En esta misma carta, Ehrenfest explica el experimento pensado y la consecuencia en la incompletitud de la teoría cuántica en la que resulta.

En la explicación de Ehrenfest [81, 144], este experimento consiste de un proyectil que viaja espacialmente y posee dos propiedades, A y B , que no se pueden conocer simultáneamente, y una “máquina” que lo emite. Después de la emisión y cuando el proyectil ha viajado una distancia considerable, la cual asegura una separación espacial entre el proyectil y la máquina, se puede predecir ya sea el valor de la propiedad A o de la propiedad B inspeccionando la máquina. Einstein ejemplificó esta distancia como $1/2$ año luz [80, 81, 144]. En este momento el proyectil es reflejado, y, en su regreso, la predicción hecha es corroborada midiéndola en el proyectil.

El experimentador entonces es capaz de decidir la propiedad que será medida una vez que el proyectil se encuentra separado de la máquina. Ehrenfest explica¹⁶:

« Es interesante tener claridad sobre el hecho de que el proyectil, el cual ya se encuentra volando aislado ‘por sí mismo’, debe estar preparado para satisfacer predicciones ‘no-conmutativas’ muy diferentes, ‘sin saber todavía’ cuál de estas predicciones uno hará (y pondrá a prueba). »

Con esto vemos que la versión original del experimento de las cajas de fotones recordada por Bohr en [151, 152] cumple con las condiciones del experimento que pretendía Einstein según Ehrenfest [81]. Este experimento se describe como sigue (Fig. (1.4)):

¹⁶ *It is interesting to get clear about the fact that the projectile, which is already flying around isolated ‘for itself,’ must be prepared to satisfy very different ‘non-commutative’ predictions, ‘without knowing as yet’ which of these predictions one will make (and test).*[144] Traducción al inglés de [81]

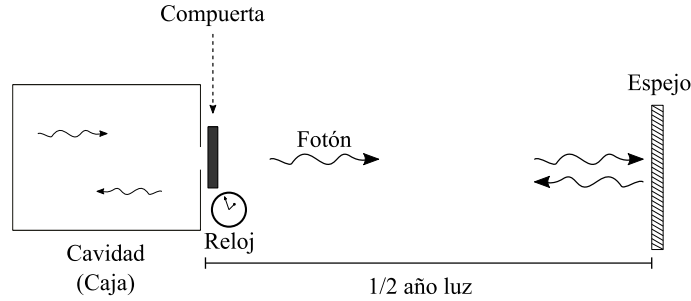


Figura 1.4: Esquema del experimento pensado de las cajas de fotones de Einstein. La liberación de un fotón por parte de una cavidad (caja) es controlada con un reloj. La caja es pesada antes y después de la liberación para determinar la energía del fotón. En el tiempo en el que el fotón se traslada y regresa, reflejado en el espejo, se realiza una medición sobre la caja. Si revisamos el reloj para determinar la hora de partida podemos determinar el momento del regreso del fotón, pero no se podrá conocer su energía; mas si pesamos la cavidad podemos predecir la energía que tendrá el fotón a su regreso, pero el tiempo del regreso será indeterminado. El estado del fotón depende de lo que se decide medir en la caja.

Se tiene una cavidad (caja) que contiene radiación, con una compuerta controlada por un reloj. Esta compuerta se abre un instante a una hora definida, permitiendo que un fotón salga de la cavidad. La energía del fotón liberado se determina pesando la cavidad antes y después de la emisión. Combinando la información de la hora de apertura de la compuerta con la determinación de la energía del fotón se tiene una violación a la relación de incertidumbre de energía-tiempo.

Bohr entonces defiende el principio de incertidumbre [81, 151, 152]. Sin embargo, al considerar el regreso del fotón y la corroboración de la cantidad medida, dando por hecho el principio de incertidumbre, como hacía Einstein [80, 144], vemos que el problema tiene que ver con la inseparabilidad de los sistemas en la teoría cuántica. La separación espacial del fotón y la caja al momento de medir el tiempo o la energía en la caja define una realidad independiente para cada uno, así el estado del fotón no se puede afectar por la medición realizada en la caja. Sin embargo, según la teoría cuántica, y gracias al principio de incertidumbre, si revisamos el reloj para determinar la hora de partida podemos determinar el momento del regreso del fotón, pero no se podrá conocer su energía. Por otro lado, si pesamos la cavidad podemos predecir perfectamente la energía del fotón, que mediremos a su regreso, pero el tiempo del regreso será indeterminado. Así el estado específico del fotón, visto como la indeterminación de sus propiedades, depende de lo que se decide medir en la caja, cuando el fotón es independiente de ésta.

1.1.3. El argumento EPR

Einstein deseaba que la exposición formal de la incompletitud de la teoría cuántica, conclusión de las discusiones anteriores, quedara asentada en el artículo **EPR** [69]. La importancia de este artículo en el desarrollo mecánica cuántica, la descripción de las correlaciones cuánticas y la definición del enredamiento cuántico no puede ser subestimada. Aquí se discutirán los ingredientes esenciales del argumento presentado por Einstein, Podolsky y Rosen, y describiremos con detalle el experimento pensado con el que trata este artículo. Esto nos abrirá paso a la discusión de la investigación de la teoría de **EPR** del teorema de Bell, y así a la definición de *no localidad*, y finalmente a la formalización del enredamiento cuántico.

El Principio de Separación El ingrediente esencial para definir la incompletitud de la teoría cuántica que necesitaba Einstein es el *Principio de Separación*. Einstein presentaba el presente problema en los experimentos pensados como un intercambio entre completitud y localización. En la ahora famosa carta respondiendo a la felicitación de Schrödinger [72, 73, 80, 153] por el artículo

EPR [80, 85, 154], Einstein escribe:¹⁷

« Mi manera de pensar es ahora esta: propiamente considerado, uno no puede [refutar la completitud, escenario **(2)** de la discusión en el artículo **EPR** [69]] si uno no hace uso de un principio suplementario: el ‘principio de separación’. Esto es: ‘la segunda caja, junto con todo lo relativo a sus contenidos, es independiente de lo que sucede con respecto a la primera caja (sistemas parciales separados).’ Si uno se adhiere al principio de separación, entonces uno de esta manera excluye el segundo [...] punto de vista, y solo el [primer] punto de vista permanece, de acuerdo al cual la descripción del estado de arriba es una descripción incompleta de la realidad, o de los estados reales. »

Definición 1.1.1 (Principio de Separación) *Lo que sucede en una parte del sistema es necesariamente independiente de lo que sucede en la otra parte, la cual está separada espacialmente de la primera.*

Este principio está basado en las ideas de qué conlleva una descripción adecuada de la realidad física. La exposición en el artículo **EPR** [69] finalmente decidiría el significado de este concepto. Sin embargo, la discusión de Einstein de la incompletitud de la teoría es completamente independiente del significado de realidad física, o de la descripción que se hace de un estado físico, simplemente asume la existencia de tal realidad [82, 150]. Así mismo sucede con la naturaleza de la separación requerida. Más aún, la naturaleza probabilística Einstein la aceptaba como parte necesaria de la teoría [85]. Como Bell haría obvio posteriormente [68], la existencia de resultados correlacionados depende en su lugar de la *no localización*, como aparece en el *Principio de Separación*. Esto es lo que buscaba expresar Einstein en la exposición del argumento **EPR** [80, 82, 85, 147], como expresaría en la carta a Schrödinger siguiendo al artículo de **EPR** [80, 85, 154].

Localidad y Realismo Físicos El artículo de Einstein, Podolsky y Rosen [69] comienza con definiciones importantes, que han ayudado a determinar las propiedades del formalismo de la mecánica cuántica desde entonces. Estas definiciones permiten traducir apropiadamente la experiencia de conocer los fenómenos físicos a un formalismo ontológico de la teoría. Para proceder con la discusión se revisarán estas definiciones. La primera de éstas se refiere a la completitud de la teoría.

Definición 1.1.2 (Completitud) *Cada elemento de la realidad física debe tener una contraparte en la teoría física.*¹⁸ [69]

La pregunta de la completitud es así presentada en este artículo como referente a la definición que hace de realidad física. Sin embargo el artículo **EPR** resalta las correlaciones propias de la mecánica cuántica que se venían observando en las discusiones anteriores usando los experimentos pensados, y que resultan en las aparentes paradojas ejemplificadas por la *acción a distancia* que discutía Einstein. Como hemos visto, estas correlaciones se relacionan más apropiadamente con el *Principio de Separación*, y así con la localización y la separación espacial de los subsistemas. Como sabemos, el trabajo de Bell llevó esta pregunta correctamente a la localidad de la teoría. Por ahora, veamos la definición de realidad física que se hace en el artículo **EPR**.

Definición 1.1.3 (Realidad Física) *Si, sin perturbar de alguna manera un sistema, podemos predecir con certidumbre (i.e., con probabilidad igual a uno) el valor de una cantidad física, entonces*

¹⁷ *My way of thinking is now this: properly considered, one cannot [refute the completeness doctrine, Interpretation [(2), [69]]] if one does not make use of a supplementary principle: the ‘separation principle.’ That is to say: ‘the second box, along with everything having to do with its contents is independent of what happens with regard to the first box (separated partial systems).’ If one adheres to the separation principle, then one thereby excludes the second . . . point of view, and only the [first] point of view remains, according to which the above state description is an incomplete description of reality, or of the real states. [154] Traducción al inglés de [80, 85].*

¹⁸ *[E]very element of the physical reality must have a counter part in the physical theory. [69]*

existe un elemento de la realidad física que corresponde a esta cantidad física.¹⁹ [69]

Finalmente, la localidad se puede entender como sigue [155]:

Definición 1.1.4 (Principio de Localidad) *Los objetos que se encuentran en posiciones espaciales distantes no pueden tener una influencia directa entre sí (uno sobre el otro); un objeto es influenciado únicamente por su entorno inmediato.*

Podemos comprender mejor el significado de este principio, y su relación con la *Realidad Física* por la exposición que hace Einstein en 1948 [156]:

« Una característica de estos objetos físicos es además que deben ser ordenados en un continuo espacio-temporal. Es esencial para este orden introducido en la física más aún el que, a un tiempo dado, estos objetos tienen una existencia independiente, de manera que estos objetos (están ubicados en distintas posiciones del espacio). Sin la suposición de tal independencia de la existencia (del (ser así)) propia de los objetos distantes espacialmente uno de otro, la cual proviene de la experiencia de todos los días, lo que se piensa en el sentido físico no es posible en nuestro sentido común. Uno no ve sin tal separación definida cómo se pueden formular y probar las leyes físicas. La teoría de campo ha tomado este principio al extremo, considerando los elementos básicos que existen independientemente en los que se basa, así como las leyes elementales postuladas para ellos, localizados en elementos espaciales (cuatro-dimensionales) infinitesimales.

» Para la independencia relativa de objetos espacialmente distantes (A y B), esta idea es característica: la influencia que ejerce A en su exterior no contiene una influencia inmediata sobre B ; esto es conocido como el (principio de efecto de proximidad), el cual es sólo consistentemente aplicado en la teoría de campo. La supresión completa de este principio haría la idea de la existencia de sistemas (cuasi-) cerrados, y así el establecimiento de leyes empíricamente verificables, imposible.

»²⁰

El experimento pensado de Einstein, Podolsky y Rosen Con el argumento de este artículo [69], Einstein, Podolsky y Rosen buscan demostrar que la teoría cuántica no puede ser completa, atendiendo a la definición de *Realidad Física* que presentan, Definición (1.1.3). En este caso, como sucedió con las definiciones iniciales, el problema de la realidad física previene poner en el foco la separación de los sistemas que interesaba a Einstein. El ejemplo presentado lo refinaría Einstein posteriormente en el experimento pensado que discutimos en la Sec. (1.1.2), lo que permitiría llegar finalmente al concepto de enredamiento cuántico.

El argumento presentado en **EPR** comienza con una discusión de la posibilidad de la completitud de la teoría cuántica. La situación que establecen es como sigue: ya sea

(1) « la descripción de la mecánica cuántica de la realidad dada por la función de onda no es completa o »

¹⁹ If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity. [69]

²⁰ Charakteristisch für diese physikalischen Dinge ist ferner, dass sie in ein raum-zeitliches Kontinuum eingeordnet gedacht sind. Wesentlich für diese Einordnung der in der Physik eingeführten Dinge erscheint ferner, dass zu einer bestimmten Zeit diese Dinge eine voneinander unabhängige Existenz beanspruchen, soweit diese Dinge (in verschiedenen Teilen des Raumes liegen). Ohne die Annahme einer solchen Unabhängigkeit der Existenz (des (So-Seins)) der räumlich distanten Dinge voneinander, die zunächst dem Alltags-Denken entstammt, wäre physikalisches Denken in dem uns geläufigen Sinne nicht möglich. Man sieht ohne solche saubere Sonderung auch nicht, wie physikalische Gesetze formuliert und geprüft werden könnten. Die Feldtheorie hat dieses Prinzip zum Extrem durchgeführt, indem sie die ihr zugrunde gelegten voneinander unabhängig existierenden elementaren Dinge sowie die für sie postulierten Elementargesetze in den unendlichkleinen Raum-Elementen (vierdimensional) lokalisiert.

Für die relative Unabhängigkeit räumlich distanter Dinge (A und B) ist die Idee charakteristisch: äussere Beeinflussung von A hat keinen unmittelbaren Einfluss auf B ; dies ist als (Prinzip der Nahewirkung) bekannt, das nur in der Feld-Theorie konsequent angewendet ist. Völlige Aufhebung dieses Grundsatzes würde die Idee von der Existenz (quasi-) abgeschlossener Systeme und damit die Aufstellung empirisch prüfbarer Gesetze in dem uns geläufigen Sinne unmöglich machen. [156]

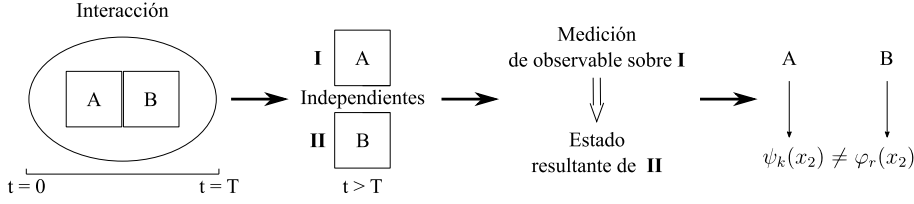


Figura 1.5: Esquema del experimento pensado **EPR**, presentado en [69]. Dos sistemas que interactúan, **I** y **II**, son separados; una medición posterior ocasiona un colapso en la función de onda del sistema compuesto, resultando en un estado diferente para el subsistema **II** dependiendo de la observable que se elige medir en el subsistema **I**, Ecs. (1.4) y (1.5).

- (2) « cuando los operadores correspondientes a dos cantidades físicas no conmutan las dos cantidades no pueden poseer realidad simultáneamente.²¹ » [69]

Para probar que ocurre el escenario (1), el argumento comienza con el siguiente experimento pensado [69] (Fig. (1.5)):

« Permítasenos suponer que tenemos dos sistemas, **I** y **II**, los que dejamos interactuar desde un tiempo $t = 0$ a $t = T$, después del cual suponemos que no existe ya ninguna interacción entre las dos partes. Suponemos además que los estados de los dos sistemas antes de $t = 0$ se conocían. Podemos entonces calcular con la ayuda de la ecuación de Schrödinger el estado del sistema combinado, **I+II**, en cualquier tiempo posterior, para cualquier $t > T$. Permítasenos designar la función de onda correspondiente por Ψ . No podemos, sin embargo, calcular el estado en el que cualquiera de los dos sistemas se queda después de la interacción. Esto, de acuerdo a la mecánica cuántica, se puede realizar sólo con la ayuda de mediciones adicionales, por un proceso conocido como la *reducción del paquete de ondas*. »²²

Después de la interacción, en $t > T$, el estado del sistema formado por **I** y **II** se describe conjuntamente. Así, el colapso (*reducción*) de la función de onda resulta en un estado diferente para el subsistema **II** dependiendo de la observable que se elige medir en el subsistema **I**. Si consideramos una observable para **I**, A , con eigenvalores a_n y eigenestados u_n , el estado del sistema completo es [69]:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \quad (1.4)$$

donde x_1 son las variables que describen al sistema **I**, y x_2 aquellas del sistema **II**. Al realizar la medición de A y obtenerse el resultado a_k , el estado de **II** estará dado por $\psi_k(x_2)$. Sin embargo, si elegimos medir la observable B , con eigenvalores b_n y eigenestados v_n , el estado de la Ec. (1.4) es, en su lugar,

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_2) v_n(x_1). \quad (1.5)$$

Al medir B y obtener b_r , ahora el estado de **II** será $\varphi_r(x_2)$.

« Vemos por lo tanto que, como una consecuencia de dos mediciones diferentes realizadas sobre el primer sistema, el segundo sistema puede quedar en estados con dos funciones de onda diferentes.

» ²¹[...] [E]ither: (1) *the quantum mechanical description of reality given by the wave function is not complete* or (2) *when the operators corresponding to two physical quantities do not commute the two quantities cannot have simultaneous reality*. [69]

²²Let us suppose that we have two systems, **I** and **II**, which we permit to interact from the time $t = 0$ to $t = T$, after which time we suppose that there is no longer any interaction between the two parts. We suppose further that the states of the two systems before $t = 0$ were known. We can then calculate with the help of Schrödinger's equation the state of the combined system **I+II** at any subsequent time; in particular, for any $t > T$. Let us designate the corresponding wave function by Ψ . We cannot, however, calculate the state in which either one of the two systems is left after the interaction. This, according to quantum mechanics, can be done only with the help of further measurements, by a process known as the *reduction of the wave packet*. [69]

Por otro lado, debido a que en el momento en el que se realiza la medición los dos sistemas ya no interactúan, no puede tomar lugar algún cambio en el segundo sistema en consecuencia a cualquier cosa que se pueda hacer al primer sistema. [...] Así, *es posible asignar dos funciones de onda diferentes* (en nuestro ejemplo ψ_k y φ_r) *a la misma realidad* (el segundo sistema después de la interacción con el primero). » ²³[69]

Más aún, se puede tener que las funciones ψ_n y φ_n corresponden a los eigenvalores de dos operadores que no conmutan, P y Q , respectivamente. La prueba de esta aseveración se da en [69]. Así, midiendo ya sea A o B en el sistema **I**, se puede predecir *con certidumbre, y sin perturbar al segundo sistema* ya sea el valor de la cantidad P o Q . De esta manera, por el criterio de realidad, Definición (1.1.3), en cada uno de estos casos, una cantidad es un elemento de realidad, P o Q , respectivamente. Sin embargo, esto sucede a la vez que por las Ecs. (1.4) y (1.5), las funciones de onda ψ_k y φ_r *pertenecen a la misma realidad*. Concluyendo que ambas cantidades, perteneciendo a operadores que no conmutan pueden tener realidades simultáneas, esto se contradice con la suposición inicial de que la teoría cuántica es completa según la Definición (1.1.2). De esta manera, el único escenario que se puede tener es el **(1)**, *la teoría cuántica no es completa*. [69]

Einstein, Podolsky y Rosen concluyen este artículo con la declaración de que creen posible la existencia de una teoría cuántica que provea una descripción completa de la realidad física. Como un resultado de estos argumentos, surge la proposición de las conocidas como **teorías de variables ocultas**, para hacer completa la teoría cuántica. En estas teorías un conjunto de variables, que no son posibles de conocerse por la función de onda de la teoría cuántica, cargan la información correspondiente al sistema no medido (el sistema **II** en el escenario anterior), de manera que su estado se determina desde la interacción inicial entre los dos sistemas, y la situación que lleva a la incompletitud de la mecánica cuántica no se presenta. El teorema de Bell [68] decidiría finalmente la incompatibilidad de estas teorías con la mecánica cuántica.

Se revisarán las teorías de variables ocultas y la formalización de las correlaciones cuánticas que son preeminentes en el artículo **EPR** más adelante en la Sec. (1.2) cuando se hable del teorema de Bell y la definición de *no localidad*.

1.1.3.1. Las cajas de Einstein

El experimento pensado de las cajas de Einstein es un refinamiento del argumento **EPR**, en el que se remueve el problema de la realidad para llevar al foco a la incompletitud de la teoría. Este experimento fue esbozado por primera vez en la carta respondiendo a Schrödinger sobre el artículo **EPR** [80, 85, 154], y formalizado posteriormente con la ayuda de de Broglie [82, 150] en la versión simple que presentamos aquí. En la Fig. (1.6) aparece un esquema y descripción breve del experimento.

Se tiene una partícula encerrada en una caja B , de esta manera, su función de onda, Ψ también está confinada a la caja, y no existe fuera. La caja es entonces dividida en dos partes B_1 y B_2 , que se separan una de otra y se trasladan a dos lugares distantes, usualmente París y Tokio, respectivamente [150]. La función de onda que en un inicio se localizaba en toda la caja ahora se compone de dos partes, Ψ_1 , localizada en B_1 , y Ψ_2 , localizada en B_2 . Si, a continuación, se realiza un experimento en B_1 , que se encuentra en París, para determinar si la partícula está presente en ella, se tiene una cierta probabilidad de que el resultado del experimento sea positivo. Esta probabilidad proviene del coeficiente con el que aparece Ψ_1 en la función de onda completa, $\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$, y es $|c_1|^2$. Por otro lado, se tiene una probabilidad $|c_2|^2$ de que el resultado sea negativo.

de Broglie discute que, en la interpretación *estándar* de la mecánica cuántica, esto significaría que,

²³We see therefore that, as a consequence of two different measurements performed upon the first system, the second system may be left in states with two different wave functions. On the other hand, since at the time of measurement the two systems no longer interact, no real change can take place in the second system in consequence of anything that may be done to the first system. [...] Thus, *it is possible to assign two different wave functions* (in our example ψ_k and φ_r) *to the same reality* (the second system after the interaction with the first). [69]

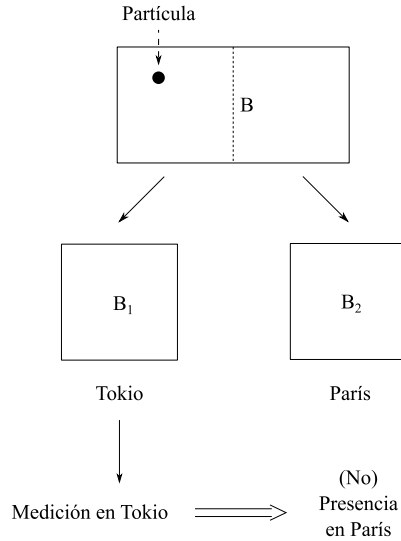


Figura 1.6: Esquema del experimento pensado de las Cajas de Einstein. Una partícula se encuentra en una caja B , la cual es dividida en dos partes B_1 y B_2 . Estas dos cajas son posteriormente trasladadas a Tokio y París, respectivamente. El resultado de la medición para determinar si la partícula se encuentra en la caja B_1 afecta a la presencia de la partícula en B_2 .

« debido a que la partícula está presente en el arreglo de las dos cajas previamente a la localización observable, sería inmediatamente localizada en la caja B_1 en el caso de un resultado positivo en París.²⁴ »

Sin embargo, esto resulta antinatural, y de Broglie ofrece entonces la interpretación que está de acuerdo con los principios de localidad y realismo, coincidiendo con el pensamiento de Einstein: [82, 146, 150]

« Esto no me parece que sea aceptable. La única interpretación razonable me parece ser que previamente a la localización observable en B_1 , sabemos que la partícula estaba en una de las dos cajas, B_1 y B_2 , pero no sabemos en cuál, y las probabilidades consideradas en la mecánica ondulatoria usual son la consecuencia de esta ignorancia parcial. Si mostramos que la partícula está en la caja B_1 , esto implica simplemente que ya se encontraba allí previamente a la localización. Así, ahora regresamos al concepto clásico claro de probabilidad, el que brota de nuestra ignorancia parcial de la situación verdadera.²⁵ »

Claramente, esta interpretación lleva directamente a la incompletitud de la mecánica cuántica: *la partícula estaba localizada antes de observarse en cualquier caja, sin que la función de onda contenga información al respecto.*

Por último, aparece una “paradoja” (en las palabras de de Broglie [150]) al considerar el caso de un resultado negativo. Si al realizar el experimento en B_1 encontramos que la partícula *no* está en B_1 , entonces ésta está en B_2 . de Broglie se pregunta [150]

« ¿Cómo podemos imaginar que el simple hecho de no haber observado algo en Tokio ha sido capaz de promover la localización de la partícula lejana a una distancia de muchas miles de millas?

» ²⁴ because the particle is present in the assembly of the two boxes prior to the observable localization, it would be immediately localized in box B_1 in the case of a positive result in Paris.[150]

» ²⁵ This does not seem to me to be acceptable. The only reasonable interpretation appears to me to be that prior to the observable localization in B_1 , we know that the particle was in one of the two boxes B_1 and B_2 , but we do not know in which one, and the probabilities considered in the usual wave mechanics are the consequence of this partial ignorance. If we show that the particle is in box B_1 , it implies simply that it was already there prior to localization. Thus, we now return to the clear classical concept of probability, which springs from our partial ignorance of the true situation. [150]

»²⁶

En la explicación que da de Broglie al experimento pensado podemos apreciar la idea de las variables ocultas como las presentamos en la Sec. (1.1.3) anterior, y más aún, la aparición del concepto de información jugando un papel importante en los resultados posibles del experimento. Así puede formarse una idea intuitiva de la relación entre información y las correlaciones cuánticas, que será posteriormente central en el concepto de enredamiento cuántico.

1.1.4. El enredamiento cuántico

Después de la publicación del artículo **EPR**, habría un pánico generalizado debido a la aparente refutación que hacía Einstein de la aptitud de la teoría cuántica [80, 82, 85]. Finalmente Bohr respondería [157] argumentando que la *separación* de los dos sistemas [80] no es asegurada debido a la interacción con el aparato de medición. Para realizar una medición es necesario que existan correlaciones cuánticas entre el instrumento de medición, lo cual limita la posibilidad de hablar independientemente de los sistemas bajo observación. Esto implica que un experimento que se encuentre fuera de la aplicabilidad de la experiencia clásica no puede entenderse como que provea información sobre propiedades independientes de los objetos [158–160]. En este caso, esta experiencia clásica está definida por la ausencia de enredamiento, con lo que la situación expuesta por Einstein, Podolsky y Rosen (en la que un sistema representa el instrumento de medición) no tendría problemas respecto a la influencia sobre los sistemas [80, 158–161].

El enredamiento quedaría entonces así establecido. Einstein explicaría exactamente el punto en el que el enredamiento se define en estas discusiones con Bohr recordando en 1949 [161]:

« De los teóricos cuánticos “ortodoxos” cuya posición conozco, Niels Bohr me parece que se acerca más a hacerle justicia al problema. Traducido a mi propia manera de ponerlo, él argumenta como sigue:

» Si los sistemas parciales A y B forman un sistema total que es descrito por su función- Ψ , $\Psi(AB)$, no hay razón por la cual cualesquiera existencias mutuamente independientes (estado de la realidad) debería ser atribuida a los sistemas parciales A y B vistos separadamente, *ni siquiera si los sistemas parciales están separados espacialmente uno del otro en el momento particular bajo consideración*. La aseveración de que, en este último caso, la situación real de B no podría ser (directamente) influenciada por ninguna medición tomada en A es, por lo tanto, dentro del marco de la teoría cuántica, infundado y (como muestra la paradoja **EPR**) inaceptable.²⁷ »

Finalmente, el enredamiento cuántico tenía un lugar especial en las preocupaciones que tenía Einstein en estos años. Su postura se puede definir por el lugar fundamental que tenía para él el *Principio de Separación*, Definición (1.1.1) [80]. Por otro lado, Bohr consideraba el enredamiento cuántico como una característica inherente de la teoría cuántica, viendo una posibilidad de dilucidar preguntas filosóficas en los fundamentos de la teoría usando al enredamiento, como en el caso del *principio de complementariedad* [80]. De esta manera, desde el surgimiento del enredamiento cuántico, éste ha formado parte de los fundamentos de la mecánica cuántica, como expresaría poco después Schrödinger respondiendo al artículo **EPR** [7]:

« No llamaría a esto [enredamiento] *un* sino más bien *el* rasgo característico de la mecánica cuántica, aquel que impone la totalidad de su alejamiento de las líneas de pensamiento clásicas.²⁸

²⁶ How can we imagine that the simple fact of having observed nothing in Tokyo has been able to promote the localization of the particle at a distance of many thousands of miles away? [150]

» ²⁷ Of the “orthodox” quantum theoreticians whose position I know, Niels Bohr’s seems to me to come nearest to doing justice to the problem. Translated into my own way of putting it, he argues as follows:

» If the partial systems A and B form a total system which is described by its Ψ -function $\Psi(AB)$, there is no reason why any mutually independent existence (state of reality) should be ascribed to the partial systems A and B viewed separately, *not even if the partial systems are spatially separated from each other at the particular time under consideration*. The assertion that, in this latter case, the real situation of B could not be (directly) influenced by any measurement taken on A is, therefore, within the framework of quantum theory, unfounded and (as the **[EPR]** paradox shows) unacceptable. [161]

» ²⁸ I would not call [entanglement] *one* but rather *the* characteristic trait of quantum mechanics, the one that enforces its entire departure from classical lines of thought. [7]

»

Sin embargo, como bien entendía Einstein, la teoría cuántica predecía apropiadamente los resultados de experimentos reales (que no pudieron hasta 1950 [162] observar enredamiento cuántico [84]). Así, el debate sobre el enredamiento cuántico fue generalmente ignorado entre los físicos, estando presente solo en las cavilaciones de Bohr y Schrödinger [163]. El enredamiento cuántico se relegó a una posición filosófica personal, que no tenía consecuencias en la aplicación de la mecánica cuántica, la cual se realizó por años sin prestar atención a tales preguntas filosóficas y al enredamiento [84, 163].

En 1957, Bohm y Aharonov [70] reconocieron en el experimento de Wu y Shaknov [162] de 1950 una observación directa del enredamiento cuántico. Además, relacionan el efecto observado con las correlaciones cuánticas en la discusión de Einstein, Podolsky y Rosen. Siguiendo este punto de vista, Bell [68] en 1964, traduce los dos escenarios discutidos en el artículo **EPR** a relaciones matemáticas con la intención de probarlas experimentalmente para discernir la realidad de ambas.

Con el teorema de Bell y las subsecuentes pruebas experimentales, la interpretación que da la mecánica cuántica de los sistemas físicos quedó asentada como la descripción correcta. Con esto, la indeterminación inherente de la descripción probabilística de la función de onda y el colapso que conlleva la medición forman una parte fundamental de la teoría cuántica, y se conocen en conjunto como la *indeterminación de la teoría cuántica*.

Así mismo, esta comprobación hizo efectiva la existencia de *correlaciones cuánticas*, que no se comportan como las correlaciones causales en los resultados experimentales de la mecánica clásica, como buscaba Einstein y hemos explorado en esta Sec. (1.1). En un principio, estas correlaciones eran sinónimo con la no localidad definida por Bell, abriendo paso a la propia definición de enredamiento como un concepto independiente al analizarse otros sistemas físicos más complejos.

Estas correlaciones tenían el espíritu de la no-separabilidad como aparecería en las primeras discusiones de Einstein, y finalmente como definiría Schrödinger el enredamiento en sus artículos de 1935 [72, 73, 80]. Una vez establecido el enredamiento cuántico, éste se empezó a caracterizar y explotar, pasando a la historia de su definición y usos actuales.

1.2. El teorema de Bell

1.2.1. El problema de la medición y la realidad física

El éxito de la mecánica cuántica en la predicción de los resultados experimentales y la cantidad de trabajo existente en la aplicación de los resultados comprobados de la teoría llevaría al aplazamiento de la discusión sobre las correlaciones cuánticas, y el debate entre Einstein y Bohr a ser relegado a *posiciones personales* [85, 143, 146–148, 150, 163, 164]. A pesar de las reflexiones de físicos destacados, como Schrödinger [7, 72–74], deBroglie [146, 150], Bohm [165–167], Ehrenfest y Heisenberg [147], sobre el enredamiento cuántico y la filosofía de la teoría cuántica, el argumento **EPR** no sería retomado hasta 30 años después, con el trabajo de Bell [68].

El trabajo de 1964 de Bell [68] se preocupaba nuevamente de la filosofía de la teoría cuántica, y, consecuentemente, de la *incompletitud*, como se definió arriba en la Definición (1.1.2). El mismo Bell resume posteriormente [168] el que, a pesar de que la visión práctica de la teoría cuántica prefería una interpretación sobre otra, el problema permanecía en los fundamentos. Bell se preocupaba [168–170] por lo que describía como “el límite entre lo que debe ser descrito por la mecánica ondulatoria y, por otro lado, aquello que debe ser descrito mediante los ‘términos clásicos’ a los que se refería Bohr”²⁹ [168]. Bell veía necesaria la eliminación de tal límite para la existencia de una teoría del mundo físico coherente, lo que le llevó a la investigación de las ondas piloto [168].

Como se vió en la Sec. (1.1.3), las variables ocultas se ocupan directamente de la incompletitud resultante en el escenario que Einstein, Podolsky y Rosen [69] presentaron. Estos escenarios que

²⁹[...] the boundary between what must be described by wavy quantum states on the one hand, and in Bohr's ‘classical terms’ on the other. [168]

completan la teoría, serían discutidos posteriormente por Bell [68, 75, 167, 171–178], y Bohm, quien completaría con este objetivo la teoría de *ondas-piloto* [165, 166] de de Broglie [105, 106, 149, 179]. Esta teoría tomaría un papel central en los trabajos de Bell [75, 167, 171, 177, 178], así como las pruebas de imposibilidad [180], pero serían las teorías de variables ocultas en general a las que se dedica el famoso artículo de 1964 [68, 172].

Bell investigaría la posibilidad de estas teorías, buscando una belleza conceptual de la teoría cuántica, discutiendo las teorías propiamente, así como las pruebas de imposibilidad que se harían de ellas. Finalmente, Bell encontrará que las pruebas de imposibilidad *válidas* [181–184] de las teorías de *ondas-piloto* se reducen a la demostración de su *no localidad* [167, 185] en 1982, basado en el trabajo de Hermann [186]. Tal investigación llevó directamente al escenario presentado por Einstein, Podolsky y Rosen y la *acción a distancia* [168].

El problema de la medición El problema de la medición se puede entender como la discrepancia en la evolución cuántica de la función de onda que da la ecuación de onda de Schrödinger, conocida como evolución unitaria, y es la evolución determinista que sufre un sistema físico al estar bajo la influencia de un potencial; con el proceso de la medición. Este proceso se compone de lo que se conoce como el colapso de la función de onda.

El problema de la medición es un problema de la filosofía de la mecánica cuántica, y se encuentra en el centro de la *indeterminación de la mecánica cuántica* [187], así como de su naturaleza probabilística, y surge de la imposibilidad de observar el colapso de la función de onda. Como tal, a este problema se dedicó Bell [75, 169, 171, 173, 178, 188] junto con la investigación sobre las variables ocultas al preguntarse por las cuestiones filosóficas y la consistencia lógica (realismo) de la teoría cuántica [163, 167, 168]. Como consecuencia del colapso de la función de onda, la función de onda no puede conocerse completamente mediante una medición, siendo inferida únicamente a través de la reconstrucción probabilística de numerosas mediciones realizadas sobre un sistema [164]. Así mismo, Bohr avanzaba el argumento desde las discusiones con Einstein [157] que el acto de medición no puede separarse del resultado de la medición.

1.2.2. Correlaciones cuánticas y las teorías de variables ocultas

El artículo **EPR** [69] presentaba un problema fundamental del formalismo de la mecánica cuántica, evidente en las correlaciones existentes entre sistemas cuánticos. La situación que detallaron se describió en la Sec. (1.1.3). El argumento que se presenta se puede reducir a las inexplicables correlaciones en los resultados de mediciones realizadas sobre sistemas independientes que interactuaron en el pasado.

Una solución inmediata [69, 82, 150] es la posibilidad de que ambos sistemas poseyeran desde un inicio propiedades bien determinadas, que, debido a la imposibilidad de su existencia *simultánea* en el formalismo de la teoría cuántica, debían ser *complementadas* en la teoría. Tales propiedades se proponen como contenidas en las llamadas *variables ocultas* [68, 75, 167], que no se pueden apreciar en el marco de la teoría cuántica, pero determinan completamente el resultado de cualquier experimento realizado en un sistema cuántico. De esta manera, las correlaciones problemáticas ahora se comportarían como las correlaciones clásicas *deterministas* tan bien conocidas.

Las variables ocultas así conllevarían una nueva discusión, quizá inapreciada, sobre la realidad física. Bell, entre otros [76, 83, 150, 163, 167, 170], argumentaría que las que llamamos variables ocultas (se denotarán como λ_i) no son ocultas en absoluto, ya que se pueden detectar directamente al determinar los resultados de los experimentos. Por otro lado, sin embargo, la función de onda permanece indeterminada, al ser el problema de la medición el que evita que ésta se pueda conocer en su totalidad.

1.2.3. El teorema de Bell

Las correlaciones entre los resultados de las dos mediciones en el experimento **EPR**, de acuerdo a Bell [167], al no tener una explicación *causal* en la teoría cuántica, señalan la posibilidad de que la realidad física del mundo cuántico haya sido descartada apresuradamente. El hecho de que el resultado de la medición en una partícula se pueda predecir del resultado obtenido para la medición de la otra partícula indica en un primer lugar a la existencia de una influencia entre las dos posiciones espaciales separadas. Para evitar esto, las variables ocultas dotan a los escenarios de ambas mediciones de propiedades reales existentes previamente a la observación, que determinan los resultados, y así, las correlaciones. Esto lleva a la incompletitud de la teoría cuántica, Sec. (1.1.3).

Bell identificó tempranamente [163] en su trabajo [68, 75, 173] el hecho de que en este tipo de escenarios no es el concepto de *determinismo* el que presenta problemas con las correlaciones existentes, sino el principio de *causalidad local*, Definición (1.1.4), el cual prohíbe las correlaciones entre las partículas que alcanzan los dos aparatos separados específicamente [172]; de esta manera, sólo la propia partícula puede determinar el resultado del experimento. Bell argumenta que el indeterminismo eliminaría las correlaciones perfectas del experimento de Bohm [172]. Sin embargo, son las correlaciones entre las partículas que se observarán las que indican una influencia a distancia. Más aún, el teorema de Bell permite encontrar explícitamente que existen correlaciones predichas por la teoría cuántica que no obedecen este principio, y no se pueden explicar mediante acciones locales únicamente [167].

Bell [68] así investiga las propiedades de las correlaciones posibles en las teorías de variables ocultas, buscando determinar la posibilidad de que tales teorías expliquen las correlaciones que aparecen en la teoría cuántica. El teorema de Bell caracteriza finalmente estas correlaciones, y provee de una manera explícita de discernir entre las predicciones de las teorías de variables ocultas y de la teoría cuántica. Esto lo logra la conocida como desigualdad de Bell.

Finalmente, existen diversas causas que podrían explicar la disparidad entre las correlaciones que predice la teoría cuántica y aquellas con un comportamiento clásico (local) explicable con teorías de variables ocultas. Bell [167] da un resumen de estas:

1. La mecánica cuántica es incorrecta en situaciones *críticas*. Sin embargo, los experimentos que se han realizado probando el teorema de Bell señalan hacia la imposibilidad de este escenario, como se verá en la Sec. (1.2.4) a continuación. Bell remarca que una posibilidad es que la mecánica cuántica funcione en los casos no-ideales que se pueden observar, mas no cuando se tenga un mejor acercamiento a la idealidad, lo cual considera “difícil de creer”, incluso con las limitaciones de los experimentos en aquella época [163, 167, 181, 182, 189]. Una mejor posibilidad es el refinamiento de las teorías de variables ocultas que puedan explicar las correlaciones observadas experimentalmente y cuya existencia se permite en la dificultad de los experimentos de emular las condiciones del teorema de Bell. Esto lleva a los llamados *loopholes* (o *escapatorias*) de las pruebas de Bell, que se discutirán también con más detalle en la Sec. (1.2.4).
2. No es adecuado considerar los arreglos experimentales como independientes. Existe la posibilidad de que existan variables ocultas que influyeran ambos experimentos [173, 176, 181, 190, 191]. En este punto podemos ver surgir la posibilidad del enredamiento nuevamente, en su análisis de esta posibilidad Bell regresa al espíritu de la paradoja **EPR** [167]:³⁰ « Pero, esta manera de arreglar las correlaciones mecánico-cuánticas sería incluso más sobrecogedora que una en la que las influencias causales se propagan más rápido que la luz. Partes del mundo aparentemente separadas estarían profundamente y conspiratoriamente enredadas, y nuestro aparente libre albedrío estaría enredado con ellos. »

³⁰But this way of arranging quantum mechanical correlations would be even more mind boggling than one in which causal chains go faster than light. Apparently separate parts of the world would be deeply and conspiratorially entangled, and our apparent free will would be entangled with them. [167]

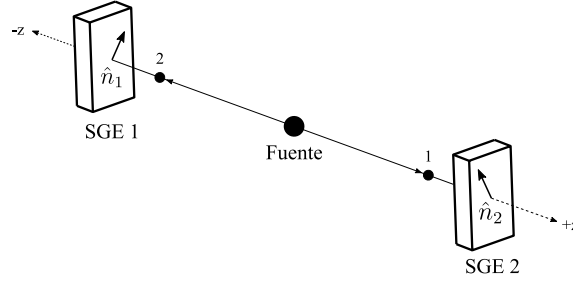


Figura 1.7: Esquema del experimento pensado de Bohm. Un par de partículas de espín 1/2 generadas por una fuente viajan en direcciones opuestas. Al final de su trayectoria su espín es medido por un aparato de Stern-Gerlach y los resultados registrados por detectores.

3. Las influencias causales viajan más rápido que la luz. Bell señala una dificultad conceptual con la idea de la comunicación en este escenario [167].
4. No existe una realidad más allá de un nivel *macroscópico clásico*. Para Bell, la preocupación en este caso es la vaguedad en los fundamentos de la teoría [167].

El experimento pensado de Bohm Bohm propone el siguiente experimento para ejemplificar las correlaciones que presentan Einstein, Podolsky y Rosen en su artículo [68, 70, 71] (Fig. (1.7)):

Consideremos un par de partículas de espín un medio que se producen en un mismo evento por una fuente *con espín inicial cero*, y viajan libremente por el espacio en direcciones opuestas. El espín de las partículas es entonces medido independientemente por aparatos de Stern-Gerlach, con campos orientados en direcciones $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$, respectivamente, con resultado $+1$ si la componente del espín de la partícula en la dirección correspondiente es *arriba*, y -1 en el caso contrario.

Ahora, si se realizan mediciones en la misma dirección, se encontrará que los resultados siempre son opuestos, lo que se espera de la manera en que se producen los pares de partículas por la conservación de espín. Es decir, estos pares de partículas presentan correlaciones perfectas. Debido a que estas correlaciones son entre resultados opuestos, se dice que estas son *anticorrelaciones*.

La desigualdad de Bell En su artículo de 1964 [68], Bell demuestra que las correlaciones del experimento de Bohm se pueden explicar fácilmente al permitir que el resultado de la medición realizada en una partícula dependa únicamente de los parámetros suplementarios (variables ocultas) que ésta posee, y las propiedades del aparato que lleva a cabo la medición. Sin embargo, también encuentra que este escenario presenta contradicciones con la teoría cuántica. Debido a que esta desigualdad se basa en el experimento de Bohm, la validez del teorema resultante solo se mantiene en el caso de anticorrelaciones perfectas.

La derivación de la desigualdad de Bell comienza con la exposición de las variables ocultas para mantener el principio de Localidad y Realismo Físicos, Definición (1.1.4). El resultado de la medición del parámetro a en el aparato 1, A , depende sólo de a y del conjunto de variables ocultas λ ; y aquél del parámetro b en 2, B , depende sólo de b y λ . De esta manera, el valor esperado de las mediciones simultáneas es el siguiente

$$E(a, b) = \int \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda, \quad (1.6)$$

con las variables ocultas λ caracterizando el estado de la fuente, que es λ con densidad de probabilidad $\rho(\lambda)$, de manera que el valor esperado se calcula sobre los posibles estados de la fuente al momento de generar el par de partículas. $E(a, b)$ cuantifica las correlaciones entre las mediciones dadas por a y b , correspondiendo a la probabilidad de las coincidencias menos la probabilidad de

no-coincidencia (resultados opuestos) determinadas por las variables ocultas; $\bar{A}$ es el valor promedio de A y $\bar{B}$ de B .

La desigualdad de Bell resulta equivalente a la relación de Boole-Fréchet [192–194], en teoría de probabilidad, de la probabilidad conjunta [79, 167, 195, 196]; mientras que la derivación original del artículo de 1964 [68] se basa en relaciones entre las probabilidades para diversos parámetros del tipo de la Ec. (1.6).

Consideremos tres configuraciones de los detectores, a , b y c . Si el aparato 1 realiza una medición con el parámetro a y el aparato 2 con b , la probabilidad de que se obtenga el mismo resultado, es decir, los resultados estén correlacionados, es $E(a, b)$, la probabilidad de que los resultados estén anticorrelacionados es $1 - E(a, b)$. Estas probabilidades serán $E(b, c)$ y $1 - E(b, c)$, respectivamente, cuando los parámetros de los aparatos sean b y c . En este caso, a y b presentan anticorrelaciones entre sí, así como b y c . Debido a esto, la probabilidad de no tener coincidencias (equivalente a tener anticorrelaciones) entre a y c no es mayor que la probabilidad de no tener coincidencias entre a y b más aquella de no tener coincidencias entre b y c . Esto es,

$$\begin{aligned} [1 - E(a, b)] + [1 - E(b, c)] &\geq 1 - E(a, c), \\ \Rightarrow E(a, b) - E(a, c) &\leq 1 - E(b, c). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Además, la otra parte de la relación de Boole-Fréchet dice que $\max(1 - E(a, b), 1 - E(b, c)) \leq 1 - E(a, c)$, lo que es equivalente a $E(a, c) \leq \min(E(a, b), E(b, c))$, por lo que

$$|E(a, b) - E(a, c)| \leq 1 - E(b, c). \quad (1.8)$$

Esta es la desigualdad de Bell de [68].

La desigualdad CHSH En 1969 Clauser, Horne, Shimony y Holt [197] publicaron una versión de la desigualdad de Bell adaptada para ser probada en experimentos reales, conocida como la *desigualdad CHSH*. Esta desigualdad considera exitosamente ineficiencias en los aparatos de medición y correlaciones experimentales no necesariamente perfectas. Con esto se aclaró la posibilidad de que existan experimentos conclusivos [163, 197, 198].

Bell posteriormente presentaría esta desigualdad como la versión definitiva de su propio teorema, usándola en sus investigaciones y discusiones posteriores [168, 172]. A continuación se presenta la derivación que Bell daría en sus artículos posteriores [172, 174, 175], siguiendo a [171].

A partir del escenario presentado en la Ec. (1.6), se tiene que

$$|\bar{A}| \leq 1, \quad |\bar{B}| \leq 1. \quad (1.9)$$

Sean a' y b' parámetros experimentales alternativos para 1 y 2, respectivamente, entonces, de Ec. (1.6)

$$\begin{aligned} E(a, b) - E(a, b') &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda) - \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b', \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda) - \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b', \lambda) \\ &\quad \pm \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda) \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b', \lambda) \mp \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda) \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b', \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda) [1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b', \lambda)] \\ &\quad - \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b', \lambda) [1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b, \lambda)]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
 |E(a, b) - E(a, b')| &\leq \left| \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda) [1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b', \lambda)] \right| \\
 &\quad + \left| \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b', \lambda) [1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b, \lambda)] \right| \\
 &= \int |\bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda)| |1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b', \lambda)| d\lambda \rho(\lambda) \\
 &\quad + \int |\bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b', \lambda)| |1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b, \lambda)| d\lambda \rho(\lambda) \\
 &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b', \lambda)] + \int d\lambda \rho(\lambda) [1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b, \lambda)], \quad (1.11)
 \end{aligned}$$

debido a que $|[1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b', \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda|$, $|[1 \pm \bar{A}(a', \lambda) \bar{B}(b, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda| \geq 0$ y usando Ec. (1.9). Se tiene que, $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$, con lo que el lado derecho de esta Ec. (1.11) resulta en

$$\begin{aligned}
 |E(a, b) - E(a, b')| &\leq 2 \pm E(a', b') \pm E(a', b) \\
 \Rightarrow |E(a, b) - E(a, b')| &\leq 2 - |E(a', b') + E(a', b)| \\
 \Rightarrow |E(a, b) - E(a, b')| + |E(a', b') + E(a', b)| &\leq 2. \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$|E(a, b) - E(a, b') + E(a', b') + E(a', b)| \leq |E(a, b) - E(a, b')| + |E(a', b') + E(a', b)|, \quad (1.13)$$

con lo que se obtiene la desigualdad de CHSH [197],

$$|E(a, b) + E(a', b') + E(a', b) - E(a, b')| \leq 2. \quad (1.14)$$

1.2.4. Pruebas experimentales

La mayor parte de los experimentos investigando las correlaciones cuánticas y la violación de la desigualdad de Bell son experimentos *ópticos*, usando fotones y, generalmente, observando su polarización [163, 181].

El experimento llevado a cabo por Freedman y Clauser [199] en 1972 fue la primer prueba del teorema de Bell, realizado con fotones provenientes de *cascadas de colisiones*³¹ y midiendo su polarización lineal. Este experimento es de un canal, usando una variante de la desigualdad de CHSH para un canal derivada por Clauser y Horne [198] en 1974.

Otros primeros experimentos [182, 200, 201] usaban fotones Gamma producidos en aniquilación de positrones, así como protones [163, 181]. En los primeros años de la década de los 80's los primeros experimentos capaces de cumplir las condiciones del teorema de Bell y descartar claramente las teorías de variables ocultas se llevaron a cabo. Estos experimentos fueron realizados gracias a la preocupación de Aspect por eliminar la posibilidad de comunicación previa entre los arreglos experimentales [163, 202, 203], usando polarizadores que se configuraban en el tiempo de vuelo [87, 204]. Uno de los experimentos realizados en [87] es además el primer experimento que usa la desigualdad de CHSH, midiendo en dos canales [203, 205, 206].

Experimentos posteriores confirmarían estos resultados [163, 203, 207–210]. Estos experimentos generaban fotones mediante conversión paramétrica descendente espontánea [203, 205, 206]. El experimento de Tittel *et al.* [208, 209] mostraría que las correlaciones son estables en grandes distancias, usando fibras ópticas para transportar los fotones por varios kilómetros.

³¹ *collision cascade, atomic cascade*

Pan *et al.* [211] realizan la primera prueba del teorema de Bell con más de dos partículas, usando el estado de GHZ [212] de tres partículas.

Finalmente, Gröblacher *et al.* [213] en 2007 realizan un experimento que les permite concluir la inexistencia de la realidad física como se entiende, y no simplemente la localidad en las correlaciones cuánticas [214], probando las teorías de variables ocultas de Leggett [215]. En 2010 [216] y 2016 [217] estos mismos resultados fueron encontrados.

Las pruebas experimentales siguientes y hasta la actualidad se han dedicado a cerrar la brecha en la que la no idealidad de los experimentos al emular las condiciones del teorema de Bell permiten la existencia de ciertas formas de las teorías de variables ocultas. Antes de hablar de los experimentos más modernos y su significado, se presentarán éstas posibilidades.

Loopholes Los problemas en las pruebas experimentales, y por lo tanto, el grado en el que las conclusiones de violación son aplicables, se derivan de las suposiciones teóricas necesarias. La desigualdad de CHSH considera las restricciones experimentales de distintas maneras. La primera es la posibilidad de que las correlaciones detectadas no sean perfectas. En segundo lugar, CHSH proponen un experimento óptico de un solo canal, para el cual derivan una desigualdad a partir de la desigualdad de CHSH que considera bajas eficiencias experimentales a partir de la suposición del muestreo justo.

Las escapatorias para las teorías de variables ocultas (*loopholes*) que se derivan de las suposiciones en el teorema de Bell y de las limitaciones experimentales son los siguientes:

Eficiencia de la detección. Los aparatos de medición no detectan todos los eventos generalmente, siendo que su eficiencia es menor al 100 %. La desigualdad de Bell depende del hecho de que existan coincidencias en los resultados detectados en los dos aparatos, es decir, que se detecten ambas partículas de los pares provenientes del mismo evento en la fuente. Considerando una menor eficiencia, las desigualdades de Bell que se aplican al experimento cambian [218]. La suposición de muestreo justo, según la que los pares detectados exitosamente representan perfectamente los pares de partículas emitidas, evita este problema.

Comunicación o Localidad. Como hemos visto, las teorías de variables ocultas se basan en el principio de Localidad y Realismo Físicos, Definición (1.1.4). Para asegurar la violación de este principio es necesario garantizar que se mantiene la otra parte de El Principio de Separación Definición (1.1.1), es decir, que no exista la posibilidad de comunicación entre las partículas que forman un par correlacionado la cual pueda explicar las correlaciones, o comunicación entre una de ellas y la fuente. Idealmente, además, los parámetros de las mediciones en los aparatos no dependen de eventos anteriores. Este problema se resuelve generalmente cambiando (decidiendo) los parámetros de los aparatos durante el vuelo de las partículas, de manera que no pueda haber comunicación *a la velocidad de la luz* entre las partículas o los detectores entre el arreglo y la detección, así como asegurando un tiempo de medición corto para que no haya comunicación entre ambas partes entre la emisión y la detección.

Coincidencias. La existencia de correlaciones en los resultados experimentales dependen de la identificación de los pares de partículas que provienen de un mismo evento, estos pares son generalmente identificados por el tiempo en que se da la detección. La posibilidad de que las variables ocultas afecten a esta identificación puede explicar la existencia de correlaciones locales que violen la desigualdad de Bell [219, 220]. Para evitar esta escapatoria la ventana temporal de identificación se debe predeterminar apropiadamente.

Invariancia Rotacional. Si las variables ocultas posibles no tienen la misma probabilidad de ocurrir, la dependencia de los parámetros experimentales en éstas puede ser oscurecida.

Memoria. La memoria guardada de mediciones previas en ambos sitios experimentales tiene la posibilidad de afectar la distribución estadística de los resultados siguientes. Este problema se corrige cambiando los parámetros experimentales aleatoriamente entre cada medición [221, 222].

Superdeterminismo. Si la elección de los parámetros de las mediciones no es libre, las correlaciones se pueden explicar por la necesidad de elegir arreglos predeterminados [223]. Esta escapatoria puede estar en algunos escenarios relacionada con la posibilidad del Punto 2 arriba.

Errores. Este problema se refiere a la existencia de fuentes de error, las cuales no han sido consideradas en las correcciones a los resultados, que puedan favorecer la violación de las desigualdades de Bell, en experimentos *ópticos*.

Experimentos libres de escapatorias Los experimentos ópticos generalmente tienen problemas de eficiencia, lo que no es necesariamente cierto para experimentos con otros tipos de sistemas, los cuales han podido cerrar la **Escapatoria de la Eficiencia** [224–226]. Esta escapatoria fue cerrada exitosamente en experimentos ópticos en 2013 [227–229].

La **Escapatoria de la Comunicación** ha tenido propuestas de solución desde las primeras pruebas, con el trabajo de Aspect [87, 163, 202–206]. Las soluciones se enfocan en aumentar la separación entre los sitios donde se realizan las mediciones para que sea más fácil y haya más confianza en decidir los parámetros de la medición en un tiempo en el que no hay posibilidad de comunicación a la velocidad de la luz. Aspect además fue el primero en decidir estos parámetros aleatoriamente [204]. En el experimento de Aspect *et al.* [87] la separación era de 12 metros, una distancia considerable para el sistema [163, 203]. El experimento de Weihs *et al.* [207] tendría una separación del orden de cientos de metros, con la posibilidad de cambiar los parámetros aleatoriamente durante el viaje de los fotones, mientras que el de Scheidl *et al.* [230] en 2010 tuvo una distancia entre sitios de 144 km.

En 2015 un experimento usando el espín de los electrones a grandes distancias ha podido cerrar tanto la **Escapatoria de la Eficiencia** como la **Escapatoria de la Comunicación** [231]. Estos resultados se produjeron poco después en 2015 para fotones [232, 233]. En 2017 se efectuó un experimento con espines atómicos que, además de las dos anteriores, cerró la **Escapatoria dada por la Memoria** [234].

Experimentos en los que se observa luz de las estrellas de la Vía Láctea [235] restringen considerablemente la posibilidad de que existan influencias sobre los resultados y los parámetros de la medición previas a las mediciones [235, 236]. Un experimento posterior similar usando luz de las estrellas cierra además la **Escapatoria de la Eficiencia** [237]. Luz de quásares ha permitido un experimento con tiempos mucho mayores, con un viaje de 7.8 mil millones de años luz [238].

Finalmente, la **Escapatoria del Superdeterminismo** se cerró en un experimento de 2018 [239], probando el carácter humano de la medición involucrado en el teorema de Bell.

1.2.5. No localidad cuántica

Asumiendo la validez de la mecánica cuántica, la desigualdad de Bell se puede usar como una prueba para detectar correlaciones no clásicas en un sistema cuántico. La propiedad cuántica que detecta es conocida como no localidad, ya que es la localidad la característica clásica que no poseen tales correlaciones. Por otro lado, las pruebas experimentales que cierran las escapatorias anteriores además demuestran la existencia de no localidad resultante de esta violación [231]. En un inicio, la no localidad de esta manera se identificaba con el enredamiento cuántico, es decir, la inseparabilidad que definió Schrödinger [72, 73], debido a la relación de este concepto con la discusión que proponía Einstein y de la que hemos hablado en esta sección, y por lo tanto, con las correlaciones que prueba el teorema de Bell. Sin embargo, se ha encontrado que la no localidad y el enredamiento cuántico difieren fundamentalmente [240].

Esto último se puede entender como que la no localidad no representa todas las correlaciones no clásicas de un sistema. Un ejemplo significativo por su impacto en el uso de estados enredados y porque fue uno de los primeros escenarios propuestos en los que aparece esta cualidad, son los estados descritos por Popescu [241]. Con estos se puede ver una realización muy directa de la teletransportación cuántica, un protocolo de información cuántica de gran relevancia actualmente y que representa una aplicación sumamente interesante y novedosa en el momento de su desarrollo.

Debido a la relación que tienen tanto el enredamiento como la no localidad con las correlaciones cuánticas, se tiene que el teorema de Bell es una buena herramienta para encontrar enredamiento cuántico en un sistema, siendo que en una cantidad significativa de casos el enredamiento y la no

localidad coinciden en los sistemas, y es un importante precursor de los criterios posteriores que caracterizan el enredamiento cuántico.

1.3. Conclusiones

En este capítulo se revisó el concepto de enredamiento cuántico, partiendo de su origen histórico, su definición y el papel que juega en aquello que reconocemos como comportamiento cuántico de los sistemas físicos. En particular, el análisis del enredamiento en sistemas discretos bipartitas nos ayuda a comprender la naturaleza del enredamiento cuántico como recurso físico. Se discutió el surgimiento del enredamiento a partir de las correlaciones que surgen de la temprana teoría cuántica, y la identificación de la inseparabilidad de los sistemas cuánticos, notado en las discusiones tempranas sobre la filosofía de la teoría guiadas por Einstein, que a la vez posteriormente inspirarían a Bell y otros.

En la historia del enredamiento cuántico las correlaciones cuánticas y la no localidad se encuentran íntimamente relacionadas entre sí y con el enredamiento cuántico. Hacemos aquí un recuento y descripción de la no localidad, así como también hablamos de su detección, comparándola con la del enredamiento, lo que da una perspectiva a la manera en que se discute el enredamiento cuántico. Este prólogo nos será de utilidad cuando estudiemos la no localidad del estado híbrido del SGE en el Capítulo 5.

Capítulo 2

Detección y clasificación del enredamiento

En este capítulo se tratará la definición formal del enredamiento cuántico, se revisan sus características y las maneras en que se detecta y se cuantifica la presencia de enredamiento en los sistemas físicos. Con esto tenemos un punto de partida para estudiar el estado actual de la investigación del enredamiento en estados que involucran variables continuas y discretas. Terminaremos revisando en detalle las diversas medidas de enredamiento que se han desarrollado para tratar el enredamiento discreto, que nos serán de utilidad en el análisis del enredamiento que haremos posteriormente.

2.1. Definiciones del enredamiento Cuántico

En el Capítulo 1 revisamos el origen del concepto de enredamiento cuántico a partir de las correlaciones presentes en determinados sistemas cuánticos. Con la aplicación de la teoría cuántica que siguió en décadas posteriores a la formalización de la teoría surgió un gran interés por la posibilidad de utilizar el enredamiento cuántico [163] a partir de la demostración de su existencia por Bohm y Aharonov [70], Wu y Shalnov [162], y, más aún, después de la demostración experimental de las predicciones cuánticas respecto a estas correlaciones gracias al teorema de Bell [68] en la década de los 70 [181, 182, 199–201]. Así, el uso del enredamiento cuántico en tareas cuánticas requiere una manera de determinar si está presente en los sistemas cuánticos así como calcular la cantidad de éste disponible para su aplicación. El primer paso para esto es una definición precisa del enredamiento.

2.1.1. La separabilidad de los estados cuánticos

En los primeros ejemplos en los que se encuentran correlaciones cuánticas una característica particular llama la atención. Al describir cuánticamente estos estados tenemos que la forma de escribirlos es sumamente similar. En estos estados, ejemplificados en las Ecs. (1.1), (1.3) y (1.4) y Sec. (1.1.4), la incapacidad de separar la descripción de las dos variables indica la presencia de correlaciones cuánticas entre ellas. Por ejemplo, en el estado que analiza Bohm [56, 71], Ec. (1.1), al estudiar la paradoja **EPR** esta inseparabilidad tiene un papel central en la descripción de las correlaciones (ver Fig. (1.2)). Así la separabilidad define al enredamiento cuántico.

Esta definición la presentó Schrödinger por primera vez, en su serie de artículos de 1935, dilucidando el problema de las correlaciones cuánticas [72], Sec. (1.1.1). Finalmente, las correlaciones cuánticas se entendería que surgen de la imposibilidad de describir a los sistemas interactuantes

en general de una manera individual, una característica propia de la mecánica cuántica. Einstein resume la discusión sobre las correlaciones cuánticas con este punto, Sec. (1.1.4).

La separabilidad se define mediante la existencia de una descomposición en estados productos de un estado de un sistema compuesto. Pero probar la existencia/no existencia es un problema complejo. A pesar de que existen criterios operacionalmente simples no existen herramientas que permitan distinguir inequívocamente y completamente estados enredados con esta definición sin requerir una búsqueda explícita.

Adicionalmente, el concepto de separabilidad al usarse como definición del enredamiento cuántico provee únicamente una descripción cualitativa. Para poder medir el enredamiento cuántico y comparar el enredamiento contenido en los diversos sistemas es necesaria una definición cuantitativa del enredamiento.

2.1.2. Operaciones Cuánticas

La caracterización de las correlaciones cuánticas provee de otra manera de definir al enredamiento cuántico, que es completamente consistente con la separabilidad. De esta manera, si la correlación entre las variables de un sistema se puede crear realizando únicamente *operaciones locales* y con el uso de *comunicaciones clásicas*, en esquemas conocidos como *operaciones locales y comunicación clásica* (LOCC, por sus siglas en inglés), entonces tal correlación no corresponde a enredamiento cuántico [21, 26–29].

Por lo tanto, las LOCCs solamente pueden crear correlaciones clásicas, no pueden generar correlaciones cuánticas, además cuando consideramos todas las LOCC tenemos que existirán las que disminuirán el enredamiento de un estado determinado. Así, una cantidad que bajo la acción de las LOCC disminuye siempre, corresponde al enredamiento cuántico [21, 28]. Notablemente, la definición del enredamiento mediante LOCC permite la descripción de cantidades que determinan cuantitativamente al enredamiento, gracias a la transformación de estados enredados y el consecuente orden que esta propiedad permite [26, 27]. Tales cantidades se conocen como *monotónicos de enredamiento* (*entanglement monotones*) [27].

2.2. Criterios de Separabilidad

Una pregunta importante que podemos hacernos es cómo saber si un estado presenta enredamiento cuántico. Para esto es necesario desarrollar una serie de herramientas que permitan distinguir estados enredados de aquellos que no lo están. Como vimos anteriormente, esta pregunta está cercanamente relacionada con la manera en la que se da una definición del enredamiento cuántico.

De una forma natural, la definición del enredamiento cuántico permite diferenciar los estados enredados, sin embargo, es necesario buscar métodos operacionales que permitan identificar si un estado es enredado mediante el cálculo de una cantidad adecuada. De esta manera, cuando consideramos el enredamiento cuántico determinado por la inseparabilidad de un estado, tenemos que solo podemos identificar un estado enredado cuando podemos demostrar la no existencia de una descomposición, lo que es sumamente complicado.

Por lo tanto, es deseable la derivación de criterios operacionales para la detección de enredamiento cuántico, con los que el valor calculable de una determinada cantidad nos dice si un estado es enredado o separable. Estos los conocemos como criterios de separabilidad. A continuación revisaremos algunos criterios importantes.

El teorema de Bell Como se discutió en la Sec. (1.2.5), al considerar la validez de la teoría cuántica como tal, el teorema de Bell provee un criterio claro para determinar si las correlaciones resultantes en un sistema cuántico corresponden a correlaciones clásicas, y deterministas, en el sentido del artículo **EPR**, o, por el contrario, si se está tratando de *correlaciones cuánticas*.

Anteriormente a la demostración de la inequivalencia de la no localidad, la propiedad detectada por el teorema de Bell, y la inseparabilidad, que se revisa en la Sec. (2.4), el teorema de Bell se consideraba una prueba de la existencia de enredamiento cuántico, y se usó exitosamente como tal durante los inicios del estudio formal del enredamiento cuántico.

2.2.1. La descomposición de Schmidt

El caso más simple de un estado cuántico es el de un estado puro de un sistema discreto bipartita. En este caso la descomposición de Schmidt del estado como vector del espacio producto total permite determinar inequívocamente la separabilidad del estado a partir del rango de Schmidt. La descomposición de Schmidt corresponde a la construcción de coeficientes con los que el estado compuesto se puede describir mediante productos tensoriales de estados de los subsistemas [21].

Para un estado $|\psi\rangle^{AB}$, el teorema de Schmidt asegura la existencia de bases $\{|u_i\rangle_A\}_i$ y $\{|v_j\rangle_B\}_j$ de A y B tales que

$$|\psi\rangle^{AB} = \sum_{k=1}^{\min(d_A, d_B)} \alpha_k |u_k\rangle_A \otimes |v_k\rangle_B. \quad (2.1)$$

Los coeficientes de Schmidt, α_k , son las raíces cuadradas de los eigenvalores de los dos estados reducidos mediante la traza parcial sobre cada uno de los subsistemas, $\rho_A = \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|$ y $\rho_B = \text{Tr}_A |\psi\rangle\langle\psi|$. El rango de Schmidt es el número de coeficientes distintos de cero en la Ec. (2.1). Un estado es enredado sí y sólo sí hay más de un coeficiente de Schmidt distinto de cero.

2.2.2. El criterio PPT

El desarrollo en 1996 del *criterio de positividad de la transposición parcial* (criterio PPT, por sus siglas en inglés) por Peres [36] y Horodecki et. al. [37] representa un avance importante en la detección del enredamiento cuántico, ya que este es un criterio operacional, basado en la prueba de una cantidad determinada, y permite una nueva manera de determinar la presencia de enredamiento cuántico en un sistema.

El criterio PPT fue originalmente derivado para detectar el enredamiento en sistemas discretos bipartitas. Se tiene que en estos sistemas, cuando un estado es separable, su matriz transpuesta parcial es positiva. De esta manera, si al investigar un estado encontramos que aplicando la transposición parcial obtenemos una matriz negativa, podemos asegurar que tal estado es enredado. Sin embargo, no es posible asegurar que todo estado cuya transpuesta parcial es positiva sea separable. Es decir, la condición del criterio PPT no es una condición suficiente para la separabilidad.

En el caso de estados discretos mixtos el criterio de separabilidad dado por la descomposición de Schmidt no se puede aplicar, y, a pesar de que en general la positividad de la transposición parcial es solamente una condición necesaria para la separabilidad del estado, el criterio PPT es ampliamente usado para determinar el enredamiento en estos sistemas debido a la sencillez de su aplicación. En el caso de sistemas 2x2 y 2x3, la condición de separabilidad es también suficiente. En concreto, el criterio PPT es un criterio de separabilidad particularmente poderoso y útil.

Con el paso de los años, este criterio fue generalizado a sistemas de variables continuas. En 2000 Simon [39] formuló este criterio usando los momentos de segundo orden de los operadores canónicos (ver Sec. (2.3.6)), que es necesario y suficiente para estados Gaussianos de $1 \times n$ modos. Esta propuesta fue expandida por Shchukin y Vogel en 2005 [78] usando momentos de mayor orden, con lo que tenemos una condición necesaria para la separabilidad de estados bipartitas generales continuos. Más aún, el criterio de Shchukin y Vogel fue generalizado gracias a restricciones sobre uno de espacios continuos para ser usado en sistemas híbridos por Kreis y van Loock [51], siendo una de las primeras herramientas híbridas.

Además de estos criterios, se pueden derivar diversos criterios de separabilidad a partir de distintos principios. Muchos de estos permiten investigar la separabilidad de estados para los que el



Figura 2.1: Diagrama con los distintos tipos de enredamiento cuántico, derivados de las definiciones provistas por los criterios de separabilidad. Se muestran el criterio de reducción y la condición de mayorización, que no se discuten aquí. El criterio de Peres-Horodecki (PPT) define al *bound entanglement*. * Se desconoce si el conjunto de mayorización contiene al conjunto de estados PPT o al de estados reducibles [23].

criterio PPT no da un juicio decisivo. Sin embargo, no existe un criterio que detecte confiablemente el enredamiento cuántico en casos generales [242].

2.2.2.1. *Bound Entanglement* y las definiciones de enredamiento

Las tareas de destilación de enredamiento y discriminación de estados nos dejan ver las relaciones entre las distintas propuestas para definir al enredamiento cuántico y las correlaciones [28, 243–249]. Hemos revisado el caso de la inseparabilidad, que es la propia definición de enredamiento cuántico, la no localidad, el comportamiento ante LOCC, y finalmente los estados definidos por el criterio PPT. Se ha probado que todas estas propiedades definen estados cuánticos relacionados, primariamente a través de sus correlaciones cuánticas, pero identificablemente distintos. Estas tareas también han permitido la definición de medidas de enredamiento a través de su formalismo [24, 31, 243, 250].

Un estado es destilable si a partir de este se puede obtener un estado puro máximamente enredado usando LOCC [31, 251]; el enredamiento cuántico no puede ser destilado de estados separables por definición. Más aún, los estados PPT no pueden ser destilados. Debido a que existen estados enredados que son PPT [37, 252], existen estados enredados que no pueden ser destilados. Este caso es llamado *bound entanglement* [253]. En la Fig. (2.1) se muestra un diagrama de los tipos de enredamiento que se determinan a partir de las definiciones permitidas por los distintos criterios de separabilidad.

Se ha encontrado que existen estados no PPT que no pueden ser destilados [254–259]. Sin embargo, más que la no-positividad, Peres conjeturaba que la destilabilidad es equivalente a la no localidad, lo que fue refutado en 2014 [259, 260].

2.2.3. Testigos de enredamiento

Una desventaja que no se puede ignorar de los criterios de separabilidad basados en el criterio PPT, es que solamente representan condiciones necesarias para la separabilidad. Para investigar el enredamiento en casos en los que un criterio de separabilidad no determina el enredamiento de un sistema es posible usar otro tipo de pruebas.

Los testigos de enredamiento (*entanglement witnesses*) usan las observables cuánticas para detectar el enredamiento cuántico. Una observable es un testigo de enredamiento si distingue a al menos un estado enredado de todos los estados separables. Esto se formula a través de una condición operacional específica general que caracteriza estados separables, permitiendo detectar el enredamiento [261]. Los testigos de enredamiento son operadores cuánticos hermitianos que

actúan sobre el espacio de Hilbert de un sistema compuesto, y no son definidos positivos, es decir, pueden tener eigenvalores negativos, pero siempre tienen valores esperados positivos para todos los estados separables puros,

$$\langle \psi_s | W | \psi_s \rangle \geq 0. \quad (2.2)$$

Así, detectan a un estado enredado si con este tienen un valor esperado negativo.

Una clara desventaja de los entanglement witnesses es que no son globales, es decir, un solo operador no puede determinar el enredamiento de estados generales. Más bien, para cada estado enredado tenemos una variedad de operadores que potencialmente son capaces de diferenciarlo del conjunto de estados separables. Adicionalmente existen estados enredados que no se pueden detectar con testigos de enredamiento [21]. Los testigos de enredamiento se definen geoméricamente a partir de la convexidad del conjunto de los estados separables [21, 22], lo que lleva directamente a las propiedades mencionadas aquí.

2.3. Medidas de Enredamiento

Se ha mencionado anteriormente que la definición del enredamiento cuántico como la no existencia de una descomposición del estado en un producto solamente permite una descripción cualitativa del enredamiento, y, a pesar de que con esto podemos (con dificultades, como se vio en la Sec. (2.2) anterior) determinar la presencia de enredamiento en un estado, no es posible comparar la cantidad de enredamiento que existe en dos estados distintos.

Para este propósito necesitamos una definición que nos permita describir al enredamiento cuantitativamente.

La definición de enredamiento a través de las LOCCs nos deja derivar criterios con los que construir medidas de enredamiento apropiadas [21, 26–29]. Como ya se ha discutido, esta definición se deriva al considerar el enredamiento cuántico como la presencia de correlaciones no clásicas en un estado, y su comportamiento bajo operaciones cuánticas. De esta manera, podemos mantener en esta definición información sobre la intensidad de las correlaciones existentes, y por lo tanto lleva finalmente a determinación de las diferentes cantidades de enredamiento.

Aún se discute la posibilidad de la existencia de una medida de enredamiento única [21, 28, 29]. Una consecuencia importante es que existen y se pueden derivar medidas de enredamiento no equivalentes, con las que la relación entre la cantidad de enredamiento de dos sistemas no necesariamente coincide. Más aún, el hecho de que los estados puedan presentar propiedades de enredamiento inequivalentes lleva a que no todas las medidas de enredamiento sean capaces de comparar el enredamiento que tienen ciertos estados.

Esto se puede entender como que las distintas medidas de enredamiento no caracterizan necesariamente de la misma manera a las distintas propiedades del enredamiento cuántico, y nos deja ver que las medidas de enredamiento nos permiten explorar al enredamiento cuántico más allá de asignarle un valor al total del enredamiento contenido en un estado.

2.3.1. Entropía de enredamiento

Al definir el enredamiento cuántico, Sec. (1.1.1), Schrödinger [72] remarca la imposibilidad de conocer el sistema únicamente conociendo los subsistemas que lo componen. De aquí podemos ver al enredamiento cuántico necesariamente como información sobre los sistemas cuánticos, en que un estado enredado nos da más información sobre el sistema completo que aquella que nos da sobre los sistemas individuales. Es decir, el enredamiento conlleva información.

En el inicio del estudio del enredamiento cuántico podemos destacar las tareas cuánticas cuya realización permite el enredamiento cuántico. La transmisión de información es una de éstas, notable por aparecer en las discusiones iniciales de Einstein y Bohm. Por otro lado, tenemos la propia caracterización del enredamiento cuántico. Se encuentra que la perfecta correlación aparente en el estado de Bohm [70, 71] (ver Fig. (1.2)) es la unidad básica de enredamiento. Así podemos apreciar

el origen de la entropía de enredamiento como una medida de la cualidad del enredamiento de un estado, en un contexto predominantemente informacional.

Con el trabajo de von Neumann [180] termina de establecerse el formalismo de la mecánica cuántica, al desarrollarse conceptos fundamentales que incluyen a la matriz densidad, la teoría de la medición (con la definición de las mediciones proyectivas) y la entropía de von Neumann. El contenido de información por parte del enredamiento en un sistema que teorizó Schrödinger fue probado y cuantificado usando la entropía de von Neumann [262].

La entropía de von Neumann permitió el paso de la teoría de la información al mundo cuántico. En la teoría de la información, la información mutua es una medida de la dependencia entre dos variables. Este tipo de dependencia tiene un gran parecido con las correlaciones que tenían lugar en los experimentos cuánticos. La información mutua se define como la discrepancia entre la información de las distribuciones marginales y la de la distribución completa (compuesta). La información además se calcula por medio de las entropías, principalmente la entropía de Shannon, obtenida en [263]. La entropía de von Neumann [180] es una generalización de la entropía de Gibbs. Con esto es posible obtener las propiedades de un sistema cuántico a partir de su matriz densidad, generalizando el formalismo de la termodinámica. Pero, además, es la generalización de la entropía de Shannon a la mecánica cuántica.

De esta manera, la entropía marginal, que conocemos como reducida, de un sistema compuesto, es naturalmente un candidato excelente para cuantificar la dependencia entre los resultados de las mediciones cuánticas, es decir, las correlaciones, y por tanto, conceptualmente, el enredamiento cuántico. Esta es justamente la entropía de enredamiento.

Esta cantidad fue usada ampliamente en las primeras investigaciones sobre el enredamiento como un sinónimo del propio enredamiento. Cabe resaltar que en el caso de sistemas discretos bipartitas y estados puros de éstos, como son aquellos con los que se trataba en estos primeros días del enredamiento cuántico, el enredamiento es equivalente a la no localidad, de manera que las correlaciones cuánticas son la presentación del enredamiento cuántico, y la entropía de enredamiento es una medida perfecta.

2.3.1.1. Definición

La entropía de von Neumann de un sistema cuántico en el estado ρ es

$$S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho). \quad (2.3)$$

La matriz densidad ρ la podemos escribir en términos de sus eigenvectores, $\{|i\rangle\}_i$, y eigenvalores, $\{\lambda_i\}_i$:

$$\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|, \quad (2.4)$$

con lo que la entropía de von Neumann queda

$$S = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i. \quad (2.5)$$

Esta es la expresión de la entropía de Shannon, pero aplicada al estado cuántico ρ .

Consideremos un sistema cuántico compuesto, con los subsistemas discretos A y B , el estado del sistema completo se describe por su matriz densidad ρ_{AB} . La entropía de enredamiento se define como la entropía de von Neumann de los estados reducidos. En este caso elijamos el subsistema A , cuyo estado está descrito por la matriz densidad reducida ρ_A , que a su vez la encontramos usando la traza parcial para dejar de lado el estado del subsistema B ,

$$\rho^A = \text{Tr}_B \rho \quad (2.6)$$

La entropía de enredamiento es entonces

$$E = S(\rho_A) = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A). \quad (2.7)$$

La entropía de enredamiento tiene una expresión bastante conveniente en términos de los coeficientes de Schmidt para un estado puro $\rho = |\psi\rangle^{AB}\langle\psi|$. Usando la descomposición de Schmidt, Ec. (2.1), del estado $|\psi\rangle^{AB}$ podemos escribir

$$|\psi\rangle^{AB} = \sum_i \alpha_i |u_i\rangle_A \otimes |v_i\rangle_B; \quad (2.8)$$

entonces

$$E = -\sum_i |a_i|^2 \ln(|a_i|^2). \quad (2.9)$$

2.3.1.2. Propiedades

Las propiedades más significativas de la entropía de enredamiento son aquellas que permitieron definirla como una medida de enredamiento, y ahora conocemos como las características básicas que deben poseer las medidas de enredamiento. En particular en el caso de sistemas bipartitas, una medida de enredamiento es requerida a tener el mismo valor independientemente del subsistema sobre el que se apliquen.

Cuando escribimos la entropía de enredamiento en términos de los coeficientes de Schmidt Ec. (2.9) notamos, de la forma de la descomposición de Schmidt, Ec. (2.1), que la entropía de enredamiento tiene el mismo valor independientemente del subsistema que se use para calcularla. Las matrices densidad reducidas ρ^A , calculada como en Ec. (2.6), y ρ_B , tienen los mismos eigenvalores, por lo que al calcular la entropía de von Neumann, Ec. (2.5), de estos dos estados reducidos obtenemos siempre el mismo valor.

Adicionalmente, la entropía de enredamiento toma los valores 0 para estados separables, y $\ln N$ para estados máximamente enredados, donde N es la dimensión de los subsistemas.

Propiedades de la entropía de von Neumann Por otro lado, la entropía de enredamiento hereda propiedades importantes de la entropía de von Neumann. La entropía de von Neumann satisface:

1. Invariante bajo cambios de base. Si U es una transformación unitaria

$$S(\rho) = S(U\rho U^\dagger). \quad (2.10)$$

2. Cóncava. Dados $\nu_i > 0$, $\sum_i \nu_i = 1$,

$$S\left(\sum_i \nu_i \rho_i\right) \geq \sum_i \nu_i S(\rho_i). \quad (2.11)$$

- 3.

$$S\left(\sum_i \nu_i \rho_i\right) \leq \sum_i \nu_i S(\rho_i) - \sum_i \nu_i \ln \nu_i. \quad (2.12)$$

4. Aditiva para sistemas independientes.

$$S(\rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B). \quad (2.13)$$

5. Subaditividad fuerte.

$$S(\rho_{ABC}) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AB}) + S(\rho_{BC}). \quad (2.14)$$

6. Subaditividad.

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B). \quad (2.15)$$

Además de los resultados correspondientes para los valores mínimos y máximos, equivalentes a aquellos de la entropía de enredamiento discutidos anteriormente.

2.3.1.3. La traza parcial

Por otro lado, la traza parcial es a la vez esencial en la definición de la entropía de enredamiento. Esta operación tiene importantes propiedades, que mencionaremos brevemente a continuación. Este recuento será de utilidad además en la discusión de la traza parcial que haremos en esta tesis respecto a la cuantificación del enredamiento híbrido.

La traza parcial es un mapeo del espacio de operadores de un espacio compuesto $V \otimes W$ a aquel de uno de los espacios que lo componen:

$$\text{Tr}_W : L(V \otimes W) \rightarrow L(V) \quad (2.16)$$

con $L(V)$ el espacio de operadores lineales del espacio V . Para cualquier par de operadores S y T en los espacios V y W el resultado de la traza parcial es un operador en V llamado también la traza parcial (de S y T , o de $R = S \otimes T$), y es el operador único que cumple

$$\text{Tr}_W(S \otimes T) = \text{Tr}(T)S \quad (2.17)$$

con $\text{Tr}(T)$ la traza usual de T .

Como mencionamos anteriormente, la traza parcial nos permite definir un estado reducido correspondiente a un estado de un sistema compuesto, en el caso en el que en la definición de la traza parcial arriba, Ecs. (2.16) y (2.17), en el que los operadores relevantes son matrices densidad y estamos tratando con espacios de Hilbert. Sean A y B dos sistemas cuánticos con espacios de Hilbert H_A , H_B , y un estado ρ mixto del sistema compuesto, en el espacio compuesto $H_A \otimes H_B$. La traza parcial respecto al subsistema B es el estado

$$\rho^A \doteq \text{Tr}_B \rho \doteq \text{Tr}_{H_B} \rho \quad (2.18)$$

definiendo Tr_{H_B} según Ecs. (2.16) y (2.17), y se conoce como el estado reducido del estado ρ en el subsistema A . Este es un estado en A apropiadamente definido de acuerdo al estado ρ .

Considerando una observable M del sistema A , la observable correspondiente del subsistema compuesto por A y B es $M \otimes I$. De esta manera, vemos que si se tiene Ecs. (2.17) y (2.18), el resultado de M cuando el estado del sistema A es ρ^A es igual al resultado de $M \otimes I$ cuando el estado del sistema compuesto $A \times B$ es ρ , según

$$\text{Tr}(M\rho^A) = \text{Tr}(M \otimes I\rho). \quad (2.19)$$

Cuando tratamos con estados en un espacio de Hilbert, la traza parcial es un mapeo entre los espacios de Banach cuyos elementos son operadores de traza finita, $T(H)$,

$$\text{Tr}_B : T(H_A \otimes H_B) \rightarrow T(H_A) \quad (2.20)$$

Este mapeo conserva la traza y es completamente positivo.

En espacios de Hilbert infinitos, esto es, cuando tenemos sistemas cuánticos de variable continua, podemos extender la definición de la traza parcial, de manera que es aplicable a este tipo de estados. Consideremos dos sistemas C_A , C_B continuos, con espacios de Hilbert H_A y H_B respectivamente. Considerando una base ortonormal $\{e_i\}_i$ de H_B , tenemos que existe un isomorfismo $\oplus_i (H_A \otimes \mathbb{C}e_i) \rightarrow H_A \otimes H_B$, donde $\mathbb{C}e_i$ es el espacio (complejo) generado por e_i . Con esto podemos escribir cualquier operador en el espacio compuesto $H_A \otimes H_B$ en representación matricial como una matriz infinita

en ambas dimensiones cuyos elementos son operadores en el espacio H_A . Para $\rho \in H_A \otimes H_B$ esta matriz la escribimos como

$$T \in L(H_A \otimes H_B) : T_{ij} \in L(H_A). \quad (2.21)$$

Entonces definimos a la traza parcial con respecto a C_B como el operador al que converge en la topología fuerte de operadores de $L(H_A)$ la suma de los elementos diagonales de T

$$\sum_i T_{ii}. \quad (2.22)$$

Como se requiere para la definición de la traza parcial, este operador es independiente de la base $\{e_i\}_i$ de H_B usada.

Propiedades de la traza La traza parcial hereda propiedades importantes de la traza. Para dos matrices A y B :

1. La traza es un mapeo lineal

$$\text{Tr}(c(A + B)) = c(\text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)). \quad (2.23)$$

- 2.

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^T). \quad (2.24)$$

- 3.

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA). \quad (2.25)$$

4. Es invariante bajo permutaciones cíclicas

$$\text{Tr}(\mathbf{ABCD}) = \text{tr}(\mathbf{BCDA}) = \text{tr}(\mathbf{CDAB}) = \text{tr}(\mathbf{DABC}) \quad (2.26)$$

- 5.

$$\text{Tr}(A^\dagger A) \geq 0. \quad (2.27)$$

Lo que define la norma de Frobenius,

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B). \quad (2.28)$$

- 6.

$$\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A). \quad (2.29)$$

7. Para $a, b \in \mathbb{R}^n$

$$\text{Tr}(b \times a) = \text{Tr}(ba^T) = a^T b = a \cdot b. \quad (2.30)$$

- 8.

$$\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A) \text{Tr}(B). \quad (2.31)$$

- 9.

$$\text{Tr}(\mathbb{I}_n) = n. \quad (2.32)$$

10. Si los eigenvalores de A son $\{\lambda_i\}_i$, con multiplicidades d_i , respectivamente

$$\text{Tr}(A) = \sum_i d_i \lambda_i. \quad (2.33)$$

11. La traza de una matriz Hermitiana es real.

La traza se puede generalizar a operadores en espacios de Hilbert, para $\rho \in H$ y una base $\{e_i\}_i$ la traza es el mapeo

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_i \langle e_i | \rho | e_i \rangle. \quad (2.34)$$

La norma que define pasa a ser la norma de Hilbert-Schmidt.

2.3.1.4. Otras medidas entrópicas

A pesar de que para estados puros de sistemas discretos bipartitas la entropía de enredamiento caracteriza completamente el enredamiento cuántico, esto no sucede para otros tipos de estados [15, 21, 22, 31, 32]. La entropía de enredamiento no se puede generalizar de una manera finita a estados continuos [17, 21, 43–47]. Así mismo se necesitan de otras medidas para cuantificar el enredamiento en sistemas discretos multipartitas. Es la necesidad de cuantificar el enredamiento en estos otros casos la que a su vez ha incentivado el desarrollo de distintas medidas de enredamiento para sistemas discretos bipartitas que permitan una generalización a otros sistemas.

Para estados mixtos, la entropía de enredamiento no es una buena medida para cuantificar el enredamiento existente [31]. Para estudiar el enredamiento en otros tipos de estados se han propuesto distintas generalizaciones de la entropía de enredamiento, que se reducen a ésta en el caso de estados puros.

Tratándose de estados mixtos, se pueden definir dos medidas que se refieren a la cantidad de enredamiento como un recurso en la preparación de estados, de esta manera se define el enredamiento contenido en algún estado mixto. El recurso usado es cuantificado como el enredamiento puro en sistemas bipartitas de dos niveles a través de la entropía de enredamiento. La primera es el *enredamiento (entrelazamiento) de formación* (EoF, por sus siglas en inglés), el cual se refiere a la cantidad de enredamiento necesaria (mínima) para preparar un estado enredado dado usando LOCC [32]. Éste cuantifica el enredamiento necesario para construir el estado mixto ρ . La cantidad de enredamiento se puede entender como el número de singletes máximamente enredados tipo **EPR**, Sec. (2.3.1), necesarios para crear el estado mixto. Un estado bipartita mixto enredado se construye entre dos sistemas, A y B , si ambos comparten una cantidad de enredamiento igual a $E_F(\rho)$ en singletes pueden construir el estado ρ . El EoF es además el mínimo costo de ρ .

En [31] se prueba la monotonización bajo LOCC del EoF, así como se establece también al enredamiento destilable como una medida de enredamiento.

De cierta manera conversamente, el *entrelazamiento destilable* (distillable entanglement) [32] es la cantidad de enredamiento que se puede obtener a partir de un cierto estado modificándolo mediante LOCC.

En [32] se establece una transformación del enredamiento entre estados puros generales y singletes máximamente enredados, lo que permite definir al enredamiento creado y obtenible de un estado mixto, y así obtener el EoF y el enredamiento destilable.

Para estados mixtos generales, no es posible destilar la misma cantidad de enredamiento en forma de singletes máximamente enredados como se requirió en su preparación. El enredamiento destilable es la cantidad de enredamiento que se puede obtener de la destilación de un estado mixto. Se puede de esta manera entender como la cantidad de enredamiento contenida (usable) en un estado mixto.

α -entropías de Rényi Otra generalización de la entropía de enredamiento son las α -entropías de Rényi (*Rényi α -entropies*, en inglés) [264]. Éstas medidas son generalizaciones de la entropía de enredamiento en cuanto a que la entropía de Rényi informacional es la generalización de las entropías en la teoría de información. En la teoría de información clásica generalizan en particular la entropía de Shannon, a la que corresponde el caso $\alpha = 1$. Así mismo, para este valor se obtiene la Divergencia de Kullback-Leibler [265, 266]. Al tratarse de la teoría cuántica, las α -entropías de Rényi generalizan la entropía de von Neumann, y, como ésta, se usan sobre el estado reducido de un

sistema discreto bipartita para definir la medida de enredamiento conocida como las α -entropías de Rényi. En el límite $\alpha \rightarrow 1$ se aproximan a la entropía de enredamiento.

q-entropías La entropía de Shannon clásica, y, por tanto, la entropía de von Neumann representan información existente en situaciones ideales [263]. Generalizaciones útiles pueden realizarse a partir de la definición mediante axiomas de las medidas informacionales de Khinchin [267], dado lugar a medidas entrópicas de enredamiento al considerar a estas generalizaciones como medidas de la misma manera que se hace con la entropía de von Neumann [76, 268].

De esta manera se pueden encontrar las entropías de Rényi, que no satisfacen la condición de convexidad, Propiedad 2, así como la familia parametrizada de las entropías de Tsallis [269, 270], al relajar el axioma de positividad, Propiedad 4 de Sec. (2.3.1.2). Ambas familias recuperan la entropía de von Neumann en el límite del parámetro $q \rightarrow 1$. Estas generalizaciones se conocen como las *q-entropías* [23, 77, 271].

Estas medidas entrópicas generalizadas se pueden así mismo obtener como familias parametrizadas gracias a la p -norma de Schatten [272], para diversos valores de p se obtienen las entropías de Tsallis y de Rényi [269, 273]. Esta definición está relacionada con la *pureza* [274], una medida de la información como el conocimiento que se posee del estado cuántico; una menor pureza corresponde a un mayor grado de enredamiento [17].

2.3.2. Estados mixtos

Los estados puros son el tipo de estados enredados más sencillos. Las correlaciones que presentan los estados puros corresponden en su totalidad a enredamiento cuántico; más aún, existe una medida de enredamiento que permite caracterizar perfectamente al enredamiento cuántico de estados puros, la entropía de enredamiento. Esto no es así para estados mixtos. La definición de medidas de enredamiento para este tipos de estados es mucho más complicada. El resto de las medidas discutidas a continuación, entre muchas otras, se han derivado en la búsqueda de cantidades que permitan la caracterización de estados mixtos.

Techos Convexos Las medidas de *techo convexo* (*convex roof entanglement measures*) [275] representan una solución al problema de la caracterización del enredamiento en estados mixtos, al proveer una manera de generalizar las medidas de enredamiento de estados puros. Estas medidas se basan en la posibilidad de descomponer a un estado mixto en una mezcla estadística de estados puros,

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (2.35)$$

Así, una generalización de una medida M de estados puros puede ser el valor promedio de esta para los estados que forman la descomposición, sin embargo, la descomposición no es única. Considerando esto, el ínfimo del valor promedio sobre todas las descomposiciones posibles,

$$M(\rho) = \inf_{p_i; |\psi_i\rangle} \sum_i p_i M(\psi_i), \quad (2.36)$$

es una cantidad monótonamente decreciente bajo LOCC [27], y por lo tanto una medida para el estado mixto ρ , llamada el techo convexo de M .

El enredamiento de formación, Sec. (2.3.1.4), fue la primera medida construida así [31].

2.3.3. Concurrencia

La concurrencia se propuso en 1997 por Hill y Wootters [33] para estados bipartitas discretos de dos niveles. Se define mediante la transformación antiunitaria θ [22, 276],

$$\theta\psi = \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi^*\rangle, \quad (2.37)$$

con σ_y la matriz de Pauli. La concurrencia es entonces [33]

$$C = \langle \psi | \overleftarrow{\theta} | \psi \rangle. \quad (2.38)$$

Esta definición permite calcular el techo convexo de la concurrencia como [34]

$$C(\rho) = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4), \quad (2.39)$$

con λ_i las raíces cuadradas de los eigenvalores de la matriz $R = \sqrt{\rho}\sqrt{\tilde{\rho}}$ en orden decreciente, $\tilde{\rho} = \theta\rho\theta$. Esta expresión de la concurrencia permite calcular el enredamiento de formación [34], Sec. (2.3.1.4). En el caso de sistemas de mayor dimensión y multipartitas [277], se pueden obtener cotas inferiores de la concurrencia [278] y del enredamiento de formación [279], lo que permite detectar *bound entanglement* [280, 281], Sec. (2.2.2.1).

Otra expresión de la concurrencia de estados puros bipartitas,

$$C = \sqrt{2(1 - \text{Tr } \rho^2)}, \quad (2.40)$$

es particularmente útil para extender la concurrencia a estados puros de sistemas multipartitas [282, 283].

Una forma extremadamente sencilla de calcular la concurrencia se da en [33], donde se usa la *base de estados mágicos* (*magic states basis*). Para un sistema bipartita de dos niveles esta última es una base del sistema 4-dimensional resultante, relacionada con la base natural de los subsistemas, $\{|+\rangle, |-\rangle\}^{A,B}$, [31, 33],

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_A |+\rangle_B + |-\rangle_A |-\rangle_B), \\ |2\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(|+\rangle_A |+\rangle_B - |-\rangle_A |-\rangle_B), \\ |3\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(|+\rangle_A |-\rangle_B + |-\rangle_A |+\rangle_B), \\ |4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_A |-\rangle_B - |-\rangle_A |+\rangle_B). \end{aligned} \quad (2.41)$$

El estado del sistema completo en esta base determina los coeficientes α_i ,

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^4 \alpha_i |i\rangle, \quad (2.42)$$

con los que la concurrencia es

$$C = \left| \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 \right|. \quad (2.43)$$

Por otro lado, en [34] se deriva la entropía de enredamiento en términos de la concurrencia,

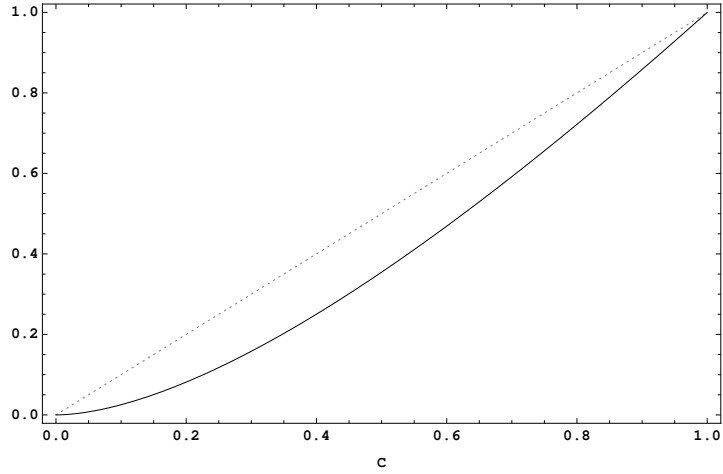


Figura 2.2: Derivación de la entropía de enredamiento a partir de la concurrencia de [34], Ec. (2.44).

según [35]

$$\begin{aligned} E(\psi) &= \mathcal{E}(C(\psi)); \\ \mathcal{E}(C) &= h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right), \\ h(x) &= -x \log_2(x) - (1 - x) \log_2(1 - x). \end{aligned} \quad (2.44)$$

En la Fig. (2.2) se puede apreciar la forma de esta relación. Estas expresiones de la concurrencia, Ec. (2.43), y entropía de enredamiento, Ec. (2.44), nos serán de utilidad al estudiar el enredamiento del SGE.

2.3.4. Negatividad

La negatividad es una medida de enredamiento derivada del criterio PPT, Sec. (2.2.2). Según este criterio, un estado es enredado si su transpuesta parcial es negativa, es decir, si tiene al menos un eigenvalor negativo. Por lo tanto, podemos cuantificar el enredamiento de tal estado a través de la magnitud de estos eigenvalores negativos. La negatividad se define como [19]

$$N = \sum_{\lambda_i < 0} |\lambda_i|, \quad (2.45)$$

donde λ_i son los eigenvalores de la transpuesta parcial de ρ , ρ^Γ ; y es monótonica bajo LOCC [48]. Como el propio criterio PPT, la evaluación de esta medida es sencilla, incluso en el caso de estados mixtos, sin embargo, solo cuantifica el enredamiento de estados que el criterio PPT detecta [21, 22].

Negatividad Logarítmica La negatividad logarítmica [48, 284, 285] es una versión de la negatividad, dada como

$$E_N(\rho) = \log_2 \|\rho^\Gamma\|_1 = \log_2[1 + 2N(\rho)]. \quad (2.46)$$

$\|\cdot\|_1$ es la 1-norma de Schatten, o norma de traza (*trace norm*). La negatividad logarítmica corresponde al costo de crear un estado enredado mediante operaciones que preservan la positividad de la transpuesta parcial [286], de manera análoga a la definición del enredamiento de formación, Sec. (2.3.1.4). Además la negatividad logarítmica es una cota superior para el enredamiento destilable [48], Sec. (2.3.1.4).

2.3.5. Enredamiento multipartita

El caso más simple de enredamiento discreto es aquel de sistemas bipartitas. La cuantificación de enredamiento cuántico en sistemas de tres o más subsistemas es considerablemente más complicada, sin embargo, se han desarrollado una variedad de generalizaciones de las medidas discretas de enredamiento como las presentadas aquí. Una manera de realizar tales generalizaciones es cambiando los estados a diferenciar, es decir, no diferenciando únicamente de los estados separables, sino de aquellos que contengan enredamiento entre un menor número de sistemas [22, 287, 288]. Esto define a los estados de m subsistemas que contengan enredamiento entre todos los subsistemas, llamándose *enredamiento m -partita genuino*.

En el caso de estados puros, se tiene que en los sistemas multipartitas generales no existe una generalización de la descomposición de Schmidt [15], Sec. (2.2.1), sin embargo, para casos específicos, como el de enredamiento tripartita de dos niveles [289], se han desarrollado descomposiciones generalizadas [290, 291]. En la Sec. (6.2.1) se discute la generalización de la concurrencia a sistemas multipartitas. La detección de enredamiento mediante testigos, Sec. (2.2.3), se puede generalizar al caso de enredamiento multipartita genuino [24]. Existen generalizaciones a diversas medidas [22], como la entropía de enredamiento y la *robustez* [292]. Otras medidas multipartitas son funciones de sumas de medidas bipartitas [22]. Las medidas para estados puros multipartitas encontradas además se pueden generalizar a estados mixtos usando los techos convexos, Sec. (2.3.2).

El *tangle*¹ [38] es la primera medida propiamente multipartita, derivada para sistemas tripartitas. Se define a partir de la concurrencia de distintas particiones de los tres sistemas. Una característica importante de esta medida es su capacidad de identificar y describir la distribución de enredamiento entre los sistemas involucrados. Existen propuestas para generalizar al *tangle* a sistemas de cualquier número de partes [293].

El artículo de Miyake [293] también demuestra que medidas existentes pertenecen a familias de medidas multipartitas, definiendo la clase de medidas de hiperdeterminantes. Otras medidas multipartitas son las de Linden *et al.* [294], la medida de Schmidt [295], y la clase de Verstraete *et al.* [296].

2.3.6. Medidas continuas

El estudio del enredamiento en sistemas continuos difiere significativamente del enredamiento discreto, debido a la distinta dimensionalidad de los sistemas involucrados. El mayor obstáculo es el hecho de que la dimensión infinita de los sistemas no permite una descripción concisa de los estados, como es el caso de los sistemas discretos y la matriz densidad. Los estados Gaussinos, sin embargo, pueden ser descritos con una importante simpleza, debido a su estructura. Adicionalmente estos estados son ampliamente usados en las aplicaciones del enredamiento cuántico en la información cuántica y en la óptica cuántica [297]. Debido a esto, la mayor parte de las medidas continuas desarrolladas se han encontrado para estados Gaussianos [17].

La distribución de probabilidad de una variable continua se puede describir completamente por sus momentos estadísticos, estos momentos en el caso de estados cuánticos forman matrices de momentos. Dada una observable descrita por un conjunto de operadores $\hat{M}_i$, su distribución de probabilidad se define completamente por la matriz de momentos $\mathcal{M}^{ij} = \langle \hat{M}_i^\dagger \hat{M}_j \rangle$. En un sistema compuesto los operadores son de la forma $\hat{M}_i = \hat{A}_i \otimes \hat{B}_i$, por lo que la separabilidad de los estados se transfiere a la matriz de momentos [78].

La característica principal de los estados Gaussianos es que su descripción en términos de los operadores canónicos, la posición y el momento², requiere solamente de los dos primeros momentos, siendo que los demás son nulos. El enredamiento cuántico de estos estados sin embargo se maneja

¹Podría traducirse como *enredo*.

²es decir, estos son estados continuos de la posición, generalmente realizables con campos electromagnéticos, o estados ópticos

únicamente con la matriz de covarianza, es decir, el segundo momento de la distribución, ya que el primer momento corresponde a una traslación [17].

La matriz de covarianza permite una definición de la separabilidad de los estados cuánticos a partir de la separabilidad de su matriz de covarianza [298], de manera similar a la relación que se tiene con matrices densidad. Una matriz de covarianza σ corresponde a un estado separable si y solo si existen σ_A y σ_B relativas a los subsistemas A y B para las que

$$\sigma \geq \sigma_A \oplus \sigma_B. \quad (2.47)$$

La generalización de medidas discretas para el estudio de estados Gaussianos es posible gracias a la descripción finita que provee la matriz de covarianza. De esta manera se puede generalizar la descomposición de Schmidt [40–43], las medidas entrópicas [43–47], negatividad [48], y el tangle [49, 50], entre otras.

Los techos convexos, Sec. (2.3.2), suponen, adicionalmente, una generalización de las medidas continuas para estados puros al caso de estados mixtos. Sin embargo, nuevamente, la manera práctica de realizar esta generalización es sobre las posibles descomposiciones en términos de estados Gaussianos [17]. El resultado de tal operación se conoce como *techo convexo Gaussiano*. El formalismo de la matriz de covarianza permite además generalizar las medidas bipartitas al caso multipartita [15].

Finalmente, los estados no Gaussianos, son considerablemente difíciles de caracterizar, más aún si se busca una forma general en la que la descripción con la matriz de momentos es necesariamente infinita. Sin embargo, el estudio de este tipo de estados es actualmente de gran interés [17] debido a su gran contenido de enredamiento [299] y a la necesidad de su utilización para la realización de protocolos de la información cuántica [300–304]. Las medidas creadas para estados Gaussianos, al basarse en segundos momentos únicamente, fallan al detectar el enredamiento de estados no Gaussianos [17].

El criterio de separabilidad de Shchukin-Vogel [78] es un resultado importante en el estudio del enredamiento no Gaussiano [17]. Este criterio es un criterio PPT, Sec. (2.2.2), en la forma de una generalización del criterio de Simon usando una jerarquía de condiciones a partir de las componentes no-nulas de la matriz de momentos y su transposición parcial.

El enredamiento de estados Gaussianos nos interesa particularmente en el contexto del enredamiento híbrido debido a que los estados híbridos en general se pueden describir como estados no Gaussianos [51]. Además, en este mismo artículo se propone una generalización del criterio de Shchukin-Vogel para estados híbridos, proponiendo con esto una manera de abordar estos estados a partir de restricciones sobre la acción de una parte de las medidas continuas.

2.4. Enredamiento y no localidad

En la actualidad existe una clara diferencia entre enredamiento y no localidad en mecánica cuántica gracias al trabajo de Wiseman *et al.* [240] de 2007, el cual le dio una definición a cada uno de estos fenómenos en términos del procesamiento de información cuántica [305]. Además, Wiseman y colaboradores demostraron que la no localidad es un subconjunto propio del enredamiento, hecho que ha sido comprobado por diferentes autores [305, 306], lo que quiere decir que existen sistemas que poseen enredamiento pero carecen de no localidad y, de una forma similar, si un sistema posee no localidad entonces es un sistema con enredamiento.

De la siguiente forma tenemos la definición de no localidad,

$$p(a, b|A, B) = \int d\lambda p(\lambda) p(a|A, \lambda) p(b|B, \lambda). \quad (2.48)$$

Tal definición se encuentra en el contexto de un experimento de Bell general, cuando dos mediciones A y B se realizan sobre dos partículas, las probabilidades de tales mediciones se expresan por la

Ec. (2.48), que se conoce como un modelo de variables ocultas. Si la probabilidad de las mediciones no se puede expresar como en la Ec. (2.48) entonces se dice que tal experimento es no local.

De igual forma existe una definición del enredamiento en términos del procesamiento de información cuántica, pero primero recordemos que, en general, un estado separable es aquel que se puede escribir como una combinación convexa de estados producto, es decir,

$$\zeta_{AB} = \sum_j p_j \zeta_j^A \otimes \zeta_j^B, \quad (2.49)$$

así, un estado enredado es aquel que no puede escribirse de la forma de la Ec. (2.49). Ahora consideremos una medición general dada por un POVM,³ (vea [18]), que tiene elementos $E_{a|x}$, los cuales son operadores positivos y que suman la identidad, de esta forma para un estado ζ la probabilidad de encontrar el resultado a se encuentra dado por $p(a) = \text{Tr}(\zeta E_{a|x})$. Entonces si tomamos en cuenta un estado separable y se realizan dos mediciones x e y , la probabilidad de hallar los resultados a y b dadas tales mediciones es

$$p(a, b|x, y) = \sum_j p_j \text{Tr}(E_{a|x} \zeta_j^A) \text{Tr}(E_{b|y} \zeta_j^B), \quad (2.50)$$

y de esta forma se dice que un estado es enredado si la probabilidad de las mediciones de dos partes diferentes no se puede escribir de la forma de la Ec. (2.50).

De esta forma es clara la diferencia que existe entre la no localidad y el enredamiento, mientras que para definir a un sistema no local es suficiente con tomar en cuenta la estadística de las mediciones, para el enredamiento se necesita también tomar en cuenta un modelo de medición general para obtener las probabilidades.

2.5. Conclusiones

En este capítulo se da la definición formal de enredamiento cuántico, así como se introducen las distintas herramientas para su detección y su cuantificación. Se hace un breve recuento de los diversos criterios de enredamiento y medidas de enredamiento existentes.

Serán de particular utilidad en esta tesis las distintas medidas de enredamiento discretas. Al llevar a cabo esta breve introducción a las herramientas existentes para la caracterización del enredamiento cuántico, hacemos una descripción con especial detalle de la entropía de enredamiento y la concurrencia. Estas son las medidas con las que estudiaremos el enredamiento del SGE en esta tesis. La caracterización del enredamiento discreto a llevado a nuestra atención el enredamiento presente en otros sistemas, en particular sistemas híbridos, como veremos en el siguiente capítulo. El enredamiento híbrido está cercanamente relacionado a la concepción del enredamiento como una característica propiamente cuántica, a través del experimento de Stern-Gerlach, el cual se halla firmemente asentado en los fundamentos de la mecánica cuántica. En esta tesis encontramos que las medidas de enredamiento revisadas en este capítulo nos pueden ayudar a cuantificar el enredamiento híbrido.

³ *Positive Operator Valued Measure* por sus siglas en inglés

Capítulo 3

Enredamiento Híbrido

Junto con el enredamiento entre sistemas discretos y el enredamiento entre sistemas continuos, el enredamiento híbrido es uno de los tipos básicos del enredamiento que distinguimos por el tipo de sistemas involucrados. Se llama enredamiento híbrido a aquel entre variables continuas y discretas. Cuando hablamos de enredamiento cuántico nos referimos a una relación entre los valores para las observables para un estado determinado de un sistema cuántico compuesto. De esta manera, dependiendo del tipo de subsistemas que se tenga, podemos distinguir distintas clases de enredamiento. Debido a que trata con ambas clases de sistemas, la descripción del enredamiento híbrido es consistentemente más complicada. Como consecuencia, el área que busca estudiar al enredamiento híbrido es considerablemente reciente y aún se requiere desarrollar una variedad de herramientas que permitan su descripción. En este capítulo se discute al enredamiento híbrido, su definición y algunas propuestas para su detección y cuantificación. Así mismo se revisarán las herramientas que se usarán en los siguientes capítulos para caracterizar al enredamiento híbrido del SGE.

Debido a la naturaleza fundamentalmente distinta de los dos tipos de subsistemas que conforman un estado híbrido, su tratamiento generalizado tanto para su cuantificación como para la implementación experimental de protocolos híbridos [16] requiere una aplicación generalizada y homogénea que permita tratar simultáneamente ambos sistemas. Tratándose el enredamiento híbrido resaltan estudios sobre las características cuánticas de este tipo de sistemas y su papel en la información cuántica [16], particularmente en la teletransportación [16, 307], así como el desarrollo de criterios de separabilidad [308] y *testigos* para estados híbridos [309, 310], los que permiten detectar la presencia de enredamiento híbrido, mas no su cuantificación. En años recientes se han resuelto implementaciones experimentales de protocolos para la generación de enredamiento híbrido [311]. Por otro lado, la cuantificación del enredamiento híbrido se ha visto avanzada particularmente gracias a distintas técnicas para aplicar medidas existentes, como en [52], donde se formula la posible aplicación de la entropía de enredamiento, y en el trabajo de [51], en donde adicionalmente se propone la aplicación de medidas continuas.

3.1. Aplicaciones del Enredamiento Híbrido

En la actualidad conocemos numerosas aplicaciones en las que el enredamiento híbrido permite una mejora en la eficiencia de protocolos y tareas de información cuántica tanto continuos como discretos [16, 312–317], así como la realización de nuevas tareas no posibles de existir con estados únicamente discretos o continuos [314, 316, 318–320]. La aplicación del enredamiento híbrido es posible inclusive sin tenerse un formalismo que permita tratarlos operacionalmente con la facilidad con la que ahora se manejan el enredamiento continuo y discreto, aplicando estados híbridos particulares desarrollados a partir de los estados continuos y discretos generalmente usados. Así mismo

y como resultado estas aplicaciones se realizan sin disponer de herramientas que permitan una caracterización completa de los estados enredados, de una manera que refleje el desarrollo pasado del enredamiento cuántico.

El enredamiento híbrido permite realizar las tareas de la información y la computación cuántica con un mejor desempeño que los protocolos que usan exclusivamente variables continuas o discretas [16, 25], permitiendo sortear las restricciones propias de estas variables que limitan la eficacia de los protocolos, o eliminar problemas como la interacción entre modos electromagnéticos [321, 322]. El enredamiento híbrido presenta importantes aplicaciones en el campo de la información cuántica, que surgen de la mejoría a las tareas básicas mediante los protocolos que revisaremos a continuación.

En el caso de la computación cuántica, más allá de las aplicaciones de estas tareas, el enredamiento híbrido es de particular utilidad en el problema de la *universalidad*, la posibilidad de simular computacionalmente cualquier hamiltoniano, dando paso a la generación de nuevos protocolos, como el protocolo *GKP* [323]. La criptografía cuántica aprovecha el enredamiento híbrido principalmente en mejoras a los métodos de *intercambio de claves cuánticas* (QKD, quantum key distribution) basados en enredamiento [324], como en los protocolos presentados en [325, 326]. Una mejor discriminación de estados permitida usando enredamiento híbrido [312, 327] tiene importantes consecuencias en la criptografía cuántica.

3.1.1. Teletransportación Cuántica

La teletransportación cuántica es una tarea en la que se transfiere información cuántica en forma de estados cuánticos hacia un receptor separado espacialmente. La no localidad es el recurso básico usado en este protocolo [8], resultando la teletransportación cuántica de mediciones realizadas sobre pares con correlaciones tipo **EPR** que influyen el estado de la otra parte del sistema, como en la Sec. (1.1.3). Sin embargo, la teletransportación se realiza comúnmente con estados enredados compartidos y comunicación clásica. La importancia que posee la teletransportación cuántica como un protocolo de información cuántica se debe a que permite replicar estados cuánticos arbitrarios cuyas propiedades son en su mayor parte desconocidas.

La teletransportación cuántica es una tarea esencial en muchos protocolos de comunicación cuántica y computación cuántica [328–331]. En la comunicación cuántica [332] la teletransportación se requiere para realizar comunicación a largas distancias [324, 333] y comunicación entre redes cuánticas [334–336].

La cantidad de información transmitida en un protocolo de teletransportación [337, 338], así como el tipo de información que se recibe [339, 340] y la variedad de los sistemas receptores [341, 342], han aumentado significativamente, recientemente permitiendo agregar información a un estado receptor que ya contenía información [343]. Esto incrementa los posibles usos de la teletransportación en las tareas de información cuántica, así como su poder y complejidad.

La cantidad de información que se transmite exitosamente depende de la capacidad del receptor de distinguir bases completas de estados enredados, lo que se realiza mediante conjuntos de mediciones. Esto se conoce como eficiencia de la teletransportación; en una teletransportación ineficiente el estado es transmitido únicamente con una cierta probabilidad. Sin embargo, la teletransportación de variables discretas en su forma general de estados de polarización de fotones (*qubits* fotónicos) tiene un límite de eficiencia del 50 % [344–346]. Existen procesos que permiten incrementar esta eficiencia [329, 347–350], como el post-procesamiento, en el que los resultados del protocolo son filtrados [10, 351], y las técnicas de *feed-forward* [333], en las que los resultados de las mediciones realizadas por el receptor se usan para manipular el estado resultante.

Por otro lado, la teletransportación de variables continuas no permite transmitir la totalidad de la información del estado original, debido a que un estado máximamente enredado de un sistema continuo no puede ser preparado con recursos finitos, como se requiere para usar eficientemente el enredamiento del estado inicial compartido. La tasa de transferencia se denomina fidelidad.

El enredamiento híbrido permite enfrentar ambos problemas simultáneamente al ser el recurso usado en la teletransportación cuántica [16, 313, 352–354]. El enredamiento híbrido es capaz de

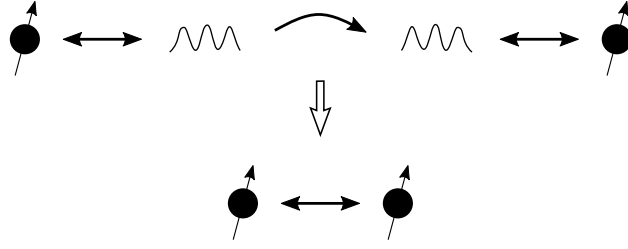


Figura 3.1: Esquema de un protocolo de Bus cuántico. El modo del campo electromagnético (Bus) se enreda con el primer qubit, posteriormente se traslada e interactúa con el segundo qubit. Como consecuencia de una medición conveniente se establece el enredamiento entre los qubits [316].

incrementar la fidelidad en la preparación usando el subsistema discreto y realizar las mediciones en la recepción eficientemente sobre la variable continua. En [313] se teletransporta un qubit fotónico preparándolo en un estado enredado con un modo electromagnético.

Como resultado de la aplicación del enredamiento híbrido en la teletransportación cuántica, se abren una gran variedad de tareas de información y computación cuántica para las cuales el enredamiento híbrido representa ventajas importantes [16]; a continuación veremos un par de ellas.

3.1.1.1. Intercambio de enredamiento (*Entanglement swapping*)

La teletransportación puede realizarse sobre un estado enredado. Si inicialmente se tenía un estado enredado compartido por *Alice* y *Bob*, y *Bob* teletransporta su estado a *Carol*, *Alice* y *Carol* comparten enredamiento sin necesidad de haber interactuado. Esto se conoce como *intercambio de enredamiento*. Takeda *et al.* [313] realizaron una teletransportación eficiente usando enredamiento híbrido, teletransportando un estado enredado de un qubit fotónico resultante de una división fotónica en un divisor de haz usando estados coherentes comprimidos de luz, el estado final contiene un alto enredamiento discreto.

Adicionalmente, el intercambio de enredamiento es de interés en la criptografía cuántica [355].

3.1.1.2. Repetidores Cuánticos

De especial importancia para la computación cuántica son los repetidores cuánticos, debido a que permiten la transmisión de estados enredados de qubits como recurso. Los repetidores usan el intercambio de enredamiento y la teletransportación para transmitir sin pérdidas, así como incrementar a través de la destilación [32], el enredamiento cuántico a través de largas distancias [10].

El enredamiento híbrido también se ha usado exitosamente en la creación de protocolos de repetidores cuánticos, por ejemplo en [315–317, 356–358]. Los repetidores que usan enredamiento híbrido permiten una menor pérdida del enredamiento, en forma de qubits, transferido en las distintas fases del protocolo [358]. Como en los protocolos híbridos de teletransportación, el enredamiento es transferido usando modos continuos.

3.1.2. Bus cuántico

Los buses cuánticos son un protocolo que explota las propiedades de los protocolos cuánticos discretos y continuos en las tareas en que sobresalen. Los buses cuánticos se desarrollaron para crear enredamiento máximo entre qubits [314, 316, 318–320, 359], aunque así mismo permiten almacenar y transferir información cuántica. Este enredamiento se crea permitiendo el establecimiento de enredamiento híbrido independiente entre cada uno de los qubits y un modo óptico, el cual se colapsa en enredamiento discreto mediante una medición conveniente [316], ver Fig. (3.1). Nuevamente, el uso de variables continuas incrementa la eficiencia de las mediciones requeridas en

los protocolos de creación de enredamiento mediante mediciones. Por otro lado, el uso de qubits permite crear estados altamente enredados. En [25] se da una exposición de los protocolos de buses cuánticos presentados en [316, 360] donde se discute la creación de enredamiento entre qubits y modos electromagnéticos en interacción libre, así como la propagación en canales de información cuántica; ambos pasos son esenciales para el establecimiento de un bus cuántico.

Preparación de estados Relacionado al concepto de buses cuánticos, el enredamiento híbrido permite generar estados cuánticos para su uso en las tareas de información cuántica. Estados *gato de Schrödinger* ópticos se pueden crear [360, 361] a partir de la generación de enredamiento entre modos del campo electromagnético y estados atómicos (espines atómicos en [361]) y una medición final del qubit. Una técnica similar se puede realizar creando enredamiento entre estados coherentes comprimidos de luz y estados de número de fotones, el colapso necesario final se realiza mediante substracción de fotones [362, 363]. Particularmente, los estados de un solo fotón permiten crear estados gato pares, mientras que los de dos fotones dan como resultado estados impares. Los estados gato resultantes se obtienen con alta fidelidad [362] y un mayor tamaño [363–366], encontrando un potencial amplio uso especialmente en la computación cuántica [363, 367].

3.1.2.1. Generación de enredamiento híbrido

Por otro lado, ambos protocolos anteriores representan una manera de crear enredamiento híbrido para su uso en las distintas aplicaciones revisadas [25, 360]. Otro tipo de protocolos para la generación de enredamiento híbrido se han propuesto, como en [368, 369], donde los qubits usados proveen de un mejor control sobre la interacción que genera el enredamiento.

En [311] en 2014 se logró por primera vez la generación experimental de enredamiento híbrido. En este experimento se enredan qubits ópticos con modos del campo electromagnético en forma de estados gato de Schrödinger, tales estados inicialmente se superponen mediante un divisor de haz y posteriormente el estado enredado se prepara basado en una medición de un sólo fotón. Posteriormente se han derivado esquemas de producción de enredamiento híbrido a partir de éste [370–372].

3.2. Cuantificación del Enredamiento Híbrido

Los sistemas híbridos son aquellos que incluyen al menos un subsistema discreto y uno continuo. Naturalmente en su descripción necesitamos tratar con ambas partes del sistema y sus características particulares. Esto ha supuesto un problema intrincado, particularmente debido a la disparidad en dimensiones y por tanto entre las descripciones que necesitan.

Consecuentemente surge una dificultad para definir y aplicar medidas de enredamiento que permitan caracterizar el enredamiento híbrido. Como hemos visto en el Capítulo 2, las medidas de enredamiento son operadores que se aplican sobre los estados de los sistemas cuánticos, dando como resultado observables de las que se pueden inferir las características de enredamiento. Por lo tanto, un operador tal debe ser aplicable a los estados híbridos en su totalidad.

Cuando se analiza un caso de enredamiento cuyo estudio está en sus inicios, es conveniente basar el tratamiento en aquel que se hace para otros casos, cuya descripción es mucho más completa. Esto nos permite apoyarnos en los métodos existentes para desarrollar herramientas que permiten investigar el nuevo caso así como considerar la aplicabilidad de herramientas previamente establecidas directamente, incluyendo la posibilidad de encontrar generalizaciones, lo que remueve la necesidad de construir las herramientas necesarias desde cero. Al hablar de enredamiento híbrido, con este propósito es altamente deseable homogeneizar la descripción de los estados completos, así pudiendo tratar el estado global como uno puramente discreto, o puramente continuo [16, 51, 52, 373]. En [373] la descripción de un qubit fotónico mediante información continua contenida en su estado permite la detección de enredamiento usando el criterio de Simon [39]. En esta tesis es de interés

el caso contrario: aquel de la descripción de los estados híbridos por sus características discretas, o *discretización*.

Tratando de sistemas cuánticos, la descripción de estados discretos es la más sencilla y con la que se está mejor familiarizado normalmente. Esto es principalmente debido a que con los sistemas discretos manejamos dimensiones finitas únicamente, y probablemente también debe bastante al hecho de que el espín provee un ejemplo remarcable de sistemas cuánticos en los que se pueden encontrar una variedad de efectos cuánticos, los estados de espín son fundamentales en la mecánica cuántica. Es por esto que las descripciones de sistemas cuánticos de una manera discreta son provechosas, siendo ejemplos particulares de sistemas continuos descritos discretamente el caso de los estados *squeezed*, los estados coherentes, y el uso del espacio de Fock en óptica cuántica, donde la descripción discreta permite una mejor comprensión del sistema y el uso en aplicaciones prácticas.

Una descripción del enredamiento híbrido en términos discretos hace posible la aplicación de criterios de separabilidad y medidas de enredamiento existentes y en general, de analizar el enredamiento híbrido con herramientas bien comprendidas y cuya utilidad y características han sido demostradas. Como ejemplo, es posible cuantificar el enredamiento híbrido de un estado formado por un qubit de polarización fotónica y un modo del campo electromagnético usando la negatividad al representar a este estado en subespacios dos dimensionales [16]. De incluso mayor utilidad resulta la descripción general de los propios estados y sistemas híbridos en un formalismo discreto. En la siguiente sección veremos cómo el trabajo de Kreis y van Loock [51] permite distinguir claramente una clase de estados híbridos en los que esto último es posible.

Para finalizar esta discusión, existe en la literatura otro método que hace posible la aplicación de medidas de enredamiento discretas al enredamiento híbrido, es el que llamamos el método de la traza parcial [52]. En este aplicamos la traza parcial a un sistema híbrido, trazando las variables continuas, e incluso discretas, según convenga, de manera que nos quedamos únicamente con una de estas partes tal que la descripción sea completamente discreta o continua, que ahora condensa la información sobre el sistema completo. Si trazamos la parte continua, sobre la parte remanente podemos entonces estudiar el enredamiento con métodos discretos.

Sin embargo, en el caso de sistemas bipartitas, debido a que el enredamiento es una propiedad de sistemas compuestos, las medidas se aplican en los dos subsistemas. Así, sólo sería posible usar medidas entrópicas en este método, siendo que en su definición incluyen la aplicación de la traza parcial. Esto último nos hace conjeturar mejores condiciones para la aplicación de este método en el caso multipartita, particularmente con varios sistemas discretos y uno continuo. Como argumentamos en el Capítulo 6, el caso particular de la traza parcial senta un precedente para la aplicabilidad de medidas discretas al enredamiento híbrido, e incluso continuas para estados híbridos que no se pueden describir de una manera discreta.

3.2.1. Clasificación del enredamiento híbrido de Kreis y van Loock

En esta sección revisaremos la propuesta de [51] en la que se define al enredamiento híbrido bipartita a partir de la descripción matemática de un estado híbrido. Se propone describir a un estado híbrido bipartita general mixto como

$$\hat{\rho}^{AB} = \sum_{n=1}^N p_n |\psi_n\rangle_{AB} \langle \psi_n|_{AB}, \quad p_n > 0 \quad \forall n; \quad \sum_{n=1}^N p_n = 1, \quad (3.1)$$

donde tenemos al estado mixto descrito por la matriz densidad de una superposición probabilística de estados puros del sistema completo,

$$|\psi_n\rangle_{AB} = \sum_{m=0}^{d-1} c_{nm} |m\rangle^A |\psi_{nm}\rangle^B, \quad c_{nm} \in \mathbb{C} \quad \forall n, m; \quad \sum_{m=0}^{d-1} |c_{nm}|^2 = 1, \quad (3.2)$$

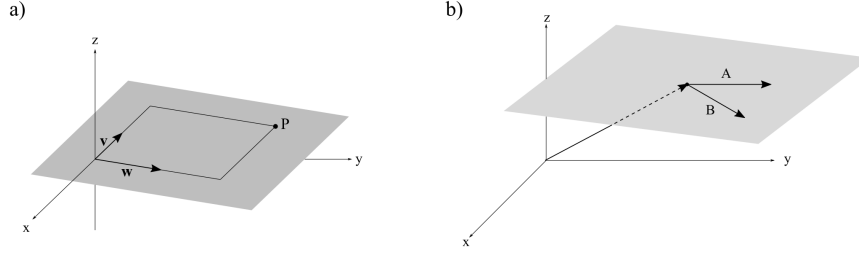


Figura 3.2: Descripción de un subplano [374]. El espacio tres dimensional puede representar un espacio de dimensión infinita con vectores base $\{x, y, z, \dots\}$, en el que encontramos el plano definido por los vectores de interés, $\mathbf{v}, \mathbf{w}; A, B$.

formados a su vez por productos de estados de los subsistemas discreto, A , y continuo, B ; d es la dimensión de A .

El enredamiento híbrido corresponde así a la inseparabilidad de los estados de los dos subsistemas en esta descripción. De esta manera, podemos distinguir diferentes casos de enredamiento híbrido. Cuando $N = 1$, el estado claramente será puro,

$$\hat{\rho}^{AB} = |\psi\rangle_{AB}\langle\psi|_{AB}. \quad (3.3)$$

Por otro lado, en las ocasiones en que podemos describir al estado híbrido con únicamente un número finito de estados puros en la superposición de la Ec. (3.1), $N < \infty$, tenemos nuestro segundo caso. El tercer caso, que es fundamentalmente distinto a estos primeros dos es en el que requerimos un número infinito de términos para expresar al estado en la forma de la Ec. (3.1), $N = \infty$. Por razones que revisaremos a continuación, estos autores denominan a este último *enredamiento híbrido genuino* (*true hybrid entanglement*).

3.2.1.1. Cuantificación

Bajo este esquema, es posible estudiar la cuantificación del enredamiento híbrido independientemente para estos casos. Se comenzará considerando los dos primeros casos.

Claramente, cuando tenemos un estado puro, a lo más necesitamos para su descripción d estados continuos distintos y linealmente independientes. Similarmente sucede con el caso de estados mixtos que sólo requieren un N finito, ya que cada estado puro que los compone requiere de un número finito de estados continuos, el número total de estados continuos diferentes involucrados será finito. En estas ocasiones se puede hablar de un subespacio del subsistema continuo relevante en el que encontramos a todos los estados continuos $|\psi_{nm}\rangle$ que aparecen en la descripción del estado.

Recíprocamente, este espacio es el mismo que el espacio generado por éstos estados continuos. Por consiguiente, estamos tratando con un subespacio finito imbuído en el espacio infinito continuo. Consecuentemente, localizándose en este subespacio se puede describir al estado híbrido como un estado discreto, que tendrá propiedades completamente equivalentes a nuestro estado original.

En particular, respecto al enredamiento cuántico, esta manera de tratar los estados híbridos presenta importantes ventajas, ya que gracias al avanzado estado de la descripción del enredamiento discreto disponemos automáticamente de muchas nuevas herramientas para caracterizar al enredamiento en estos tipos de estados híbridos.

Kreis y van Loock demuestran [51] que usando el proceso de Gram-Schmidt inverso esta descripción siempre se puede determinar para estos dos casos, y nos dan en su prueba un método explícito para encontrar una base ortogonal y los coeficientes que describen al estado híbrido con

ésta. Este método lo veremos en detalle cuando lo apliquemos al caso del SGE en el Capítulo 6.

3.2.1.2. El enredamiento híbrido genuino y las medidas continuas

En el caso en el que la descripción del estado híbrido requiera de un número infinito de términos en la superposición, no es posible efectuar el proceso discutido anteriormente, y, como resultado, no podemos aplicar las medidas de enredamiento discretas. Debido a la inexistencia de esta discretización, al enredamiento existente en estos estados se le denominó en [51] *enredamiento híbrido genuino (true hybrid entanglement)*.

La caracterización del enredamiento híbrido genuino sigue siendo sumamente interesante, y en este caso podemos avistar el problema original de la cuantificación del enredamiento híbrido en la disparidad de las descripciones de los subsistemas. El análisis anterior nos lleva a enfocarnos en un caso particular, el de medidas para sistemas continuos no Gaussianos. En [51] es probado que los estados híbridos bipartitas no son Gaussianos, en tanto que su función de cuasiprobabilidad, dada por la función de Wigner, es no Gaussiana, por lo que, además de que las medidas discretas no son de utilidad, también sería improductivo tratar de generalizar medidas continuas para estados Gaussianos.

En esta ocasión es necesario tratar al sistema compuesto completo, por lo que el problema se reduce a la búsqueda de operadores que actúen en los dos sistemas. En particular, en [51] se analiza esta situación considerando operadores continuos y proponiendo dos cuadros en los que podemos ver la generalización de estos operadores para tratar a los sistemas híbridos. Una vez hecho esto, podemos generalizar medidas de enredamiento continuas no Gaussianas. Así es que en este mismo artículo se propone una generalización del criterio de Schuhkin-Vogel, aplicado a un ejemplo de enredamiento híbrido genuino. El criterio de Schuhkin-Vogel [78] es la extensión del criterio de Simon [39] a estados no Gaussianos, siendo así un criterio de separabilidad basado en la positividad de la transposición parcial.

Sin embargo, la cuantificación del enredamiento en estados no Gaussianos está aún lejos de tener una respuesta categórica y de alcanzar el nivel de formalidad del enredamiento discreto. Una revisión breve del estado del estudio del enredamiento no Gaussiano se puede encontrar en [17].

Medidas propiamente híbridas En el Capítulo 4 se estudiará el estado de una partícula de espín un medio que atraviesa el experimento de Stern-Gerlach, y se encuentra que este estado presenta enredamiento híbrido bipartita. Lo que es más importante en la discusión actual es que en este estado sólo tenemos dos estados continuos significativos. Como consecuencia, el enredamiento del SGE lo podremos caracterizar con medidas discretas usando el método de Kreis y van Loock descrito arriba, Sec. (3.2.1.1) [51]; y, *este estado no pertenece a la clase de estados con enredamiento híbrido genuino*. Sin embargo, este último hecho no prohíbe la detección, caracterización o cuantificación del enredamiento híbrido de estados fuera de esta categoría con herramientas *propiamente* híbridas, siendo aquellas que son diseñadas para manejar de un modo general los dos tipos de subsistemas simultáneamente. Así mismo, el enredamiento de estos estados aún se puede describir como enredamiento híbrido. Sin embargo, dado que la caracterización del enredamiento de estos estados mediante herramientas discretas puede realizarse sin mayores complicaciones, la aplicación de medidas de enredamiento híbridas puede dar pocas ventajas, y presenta la significativa desventaja de que no se encuentran herramientas híbridas disponibles para su aplicación en estados híbridos generales.

El método de discretización anterior permite así la descripción del enredamiento híbrido de una amplia variedad de estados híbridos con una relativa facilidad. Más aún, la mayor parte de los estados híbridos con una utilidad remarcable en la actualidad, y aquellos que son más fácilmente producidos y manipulados, como los revisados en la Sec. (3.1), no presentan enredamiento híbrido genuino. Así, la investigación de las capacidades de cuantificación del método de Kreis y van Loock [51] es provechoso.

3.2.2. La traza parcial

En la Sec. (2.3.1) revisamos la entropía de enredamiento y sus propiedades, en particular revisando a la traza parcial que forma parte esencial de su definición. La traza parcial es una herramienta importante que nos permite trabajar únicamente con una parte de un sistema compuesto, mas de una manera que conserva toda la información de la interacción entre los subsistemas, como se evidencia en la observación del enredamiento que hace la entropía de enredamiento.

Tratándose del enredamiento híbrido, la traza parcial permitiría remover una parte del sistema compuesto de manera que nos quedáramos únicamente con sistemas continuos o con sistemas discretos. De esta manera, se puede realizar un tratamiento mucho más simple del enredamiento cuántico presente en el estado, usando herramientas desarrolladas para tratar el caso continuo o discreto, respectivamente.

Las medidas de enredamiento son operadores cuánticos que actúan sobre todos los subsistemas que conforman a un sistema compuesto simultáneamente. Esto tiene consecuencias importantes en este método. En primer lugar, cuando el sistema híbrido considerado es bipartita, no es posible estudiar directamente el enredamiento usando la traza parcial, ya que no podemos aplicar medidas sobre un único sistema. Sin embargo, la entropía de enredamiento incluye en su definición a la traza parcial, así, cuando calculamos la entropía sobre el sistema reducido, podemos considerar los dos pasos en su definición como independientes. Es decir, podemos considerar a la entropía de enredamiento como una medida sobre la *reducción discreta* obtenida de aplicar la traza parcial sobre el subsistema continuo. Roston *et al.* [52] proponen este método para tratar el enredamiento de sistemas híbridos sencillos, incluido el SGE.

Sin embargo, existe un gran número de sistemas híbridos más complicados que un sistema de un qubit y posición, que particularmente pueden prometer futuras aplicaciones del enredamiento híbrido en protocolos más poderosos, como aquellos ya usados en los buses cuánticos [16, 51, 316, 360]. La descripción discreta de un sistema híbrido que contenga un subsistema discreto de mayor dimensión se complica exponencialmente, así como en el caso de estados multipartitas híbridos. En estos casos, el trazar sobre los sistemas continuos como se presenta aquí tiene la capacidad de permitir una caracterización completa del enredamiento híbrido. Particularmente, el empleo de la entropía de enredamiento para sistemas puros permite la descripción discreta del enredamiento híbrido en sistemas que contienen tan solo un subsistema discreto. El método de la traza parcial puede así mismo permitir la aplicación de medidas continuas en sistemas híbridos con varios subsistemas continuos. Más aún, este método no hace ninguna distinción respecto al enredamiento híbrido genuino definido en la Sec. (3.2.1.2), permitiendo la cuantificación de enredamiento híbrido en estados de mayor complejidad.

Antes de discutir el método propiamente, debemos remarcar un par de dificultades. Como consecuencia de los dos pasos anteriores, esta aplicación de la entropía de enredamiento es extremadamente asimétrica, a diferencia de lo que se ve en la definición de la Sec. (2.3.1.1), con lo que no se puede definir propiamente como una medida de enredamiento híbrido, sin embargo, se está aplicando la entropía de enredamiento de la manera usual sobre el subsistema discreto. Finalmente, a pesar de que se mantiene la información de la interacción con el sistema removido, potencialmente se pierde, o más precisamente, oculta, una cantidad de información importante comparando con la aplicación de medidas de enredamiento sobre el sistema híbrido completo. En el caso de sistemas con un mayor número de partes se observaría principalmente el enredamiento sobre las partes no removidas del sistema, en analogía con lo que sucede en los casos discretos y continuos [38, 375].

La entropía de enredamiento en estados híbridos Consideremos un estado híbrido puro de un sistema compuesto por un sistema discreto de dos niveles, $|+\rangle, |-\rangle$, A , y un sistema continuo B con una observable $\hat{x}$. Podemos escribir tal estado de una forma general, Ec. (3.2), como

$$|\psi\rangle_{AB} = c_+|+\rangle^A|\psi_+\rangle^B + c_-|-\rangle^A|\psi_-\rangle^B, \quad (3.4)$$

con lo que la matrix densidad es

$$\begin{aligned} \rho = |\psi\rangle_{AB}\langle\psi|_{AB} = & c_+^2 |+\rangle\langle+|^A |\psi_+\rangle\langle\psi_+|^B + c_+ c_-^* |+\rangle\langle-|^A |\psi_+\rangle\langle\psi_-|^B \\ & + c_+^* c_- |-\rangle\langle+|^A |\psi_-\rangle\langle\psi_+|^B + c_-^2 |-\rangle\langle-|^A |\psi_-\rangle\langle\psi_-|^B. \end{aligned} \quad (3.5)$$

La traza parcial de la Ec. (2.18), trazando sobre el sistema continuo, es

$$\begin{aligned} \rho^{(A)} &= \text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x|\psi\rangle\langle\psi|x\rangle dx, \\ \rho_{ij}^{(A)} &= c_i c_j^* \int_{-\infty}^{\infty} \langle x|\psi_i\rangle\langle\psi_j|x\rangle dx = c_i c_j^* \langle\psi_j|\psi_i\rangle, \end{aligned} \quad (3.6)$$

con $i, j = +, -$. En particular, $\rho_{++}^{(A)} = c_+^2$, $\rho_{--}^{(A)} = c_-^2$, y

$$\rho_{+-}^{(A)} = c_+ c_-^* \langle\psi_-|\psi_+\rangle = \rho_{-+}^{(A)*}. \quad (3.7)$$

La matrix densidad en el espacio A de dos niveles es entonces

$$\rho^{(A)} = \begin{pmatrix} c_+^2 & c_- c_+^* \langle\psi_+|\psi_-\rangle \\ c_+ c_-^* \langle\psi_-|\psi_+\rangle & c_-^2 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Los eigenvalores de esta matrix, $\lambda_{1,2}$, se pueden usar en la Ec. (2.5) para obtener la entropía de enredamiento de $|\psi\rangle_{AB}$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-c_+^2 - c_-^2 \pm \sqrt{(c_+^2 - c_-^2)^2 - 4c_+^2 c_-^2 \langle\psi_-|\psi_+\rangle^2} \right]; \quad (3.9)$$

$$S = -\lambda_1 \ln \lambda_1 - \lambda_2 \ln \lambda_2. \quad (3.10)$$

3.3. Conclusiones

En este capítulo se estudia al enredamiento cuántico híbrido, partiendo de su definición basada en los tipos de sistemas involucrados. Se discutió el origen histórico de este tipo de enredamiento así como la manera en que se ha procedido a su detección y cuantificación. El enredamiento híbrido juega un papel central en una variedad de tareas en el campo de la información cuántica. También se analizó la posibilidad que tiene este tipo de enredamiento de mejorar el desempeño en diversas aplicaciones que usan al enredamiento continuo o discreto como un recurso.

La parte central de este capítulo consiste en la caracterización matemática formal de los estados híbridos bipartitas, y la descripción de las posibilidades para su cuantificación usando medidas de enredamiento existentes. Estas representaciones se usarán más adelante en esta tesis para caracterizar al enredamiento del experimento de Stern-Gerlach. En particular, se discuten las bases de los métodos principales que se usarán respecto a la aplicación de medidas discretas: la discretización del estado híbrido a partir de su descripción en el espacio de estados; y la reducción discreta aplicada al usar la traza parcial en el cálculo de las medidas de enredamiento. Con esto se tienen preparadas las bases para la examinación que haremos de las características de los estados híbridos que nos ocupan en los siguientes capítulos.

Capítulo 4

El Experimento de Stern-Gerlach

En este capítulo se revisan las características cuánticas del SGE. Se comenzará describiendo al SGE, en su arreglo original y la descripción usual con la que se trabaja; así como las versiones experimentales que existen. Posteriormente, se revisará el tratamiento semiclásico usual del SGE, así como las propuestas para su descripción cuántica. El punto central de este capítulo es la presentación del tratamiento cuántico que hacemos de la evolución del SGE en [1, 2], obteniendo como resultado el estado de una partícula que viaja a través del experimento. En este estado es evidente el enredamiento entre la posición de la partícula y su estado de espín, así como consecuentemente la presencia de correlaciones cuánticas y propiedades cuánticas relacionadas con estas últimas. Antes de revisar el enredamiento híbrido del SGE en el Capítulo 6, analizamos aquí estas propiedades, comenzando con una discusión del estado final y su distribución de probabilidad, relacionada con las correlaciones y las reconocidas observaciones que resultan del experimento. En el Capítulo 5 analizamos a fondo la naturaleza cuántica de las correlaciones del SGE y presentamos resultados donde establecemos la no localidad del experimento [3].

4.1. La descripción del Experimento de Stern-Gerlach

El experimento de Stern-Gerlach consiste de un haz de partículas de cierto espín, generalmente $1/2$, que viajan en el espacio a través de una región con un campo magnético fuertemente inhomogéneo. Tal inhomogeneidad usualmente se toma como una inhomogeneidad lineal, sin embargo en distintos lugares se ha realizado un análisis del experimento con una inhomogeneidad general [57, 376–379], Sec. (4.1.3). Al final de su viaje este haz de partículas impacta en una pantalla que reacciona con la presencia de las partículas, permitiendo observar la distribución de posiciones en el plano transversal a la dirección primaria de movimiento del haz, Fig. (4.1).

En el experimento original de Stern y Gerlach [53–55, 380], el haz se compone de partículas de plata, que adquieren efectivamente el espín del electrón de valencia, $1/2$. Este haz se produce a partir de un gas de plata sujeto a temperaturas altas (1000 K en el experimento original [380–382]) en un horno con una abertura. Las partículas que son eyectadas del horno son colimadas mediante una placa con un agujero circular (*pin-hole*), el cual selecciona las partículas por la dirección de su velocidad. Posteriormente, estas partículas atraviezan la región del campo magnético inhomogéneo, originalmente al pasar entre dos polos de un imán con una geometría particular. El resultado del experimento es observado como una medición de la posición transversal en una pantalla ubicada fuera de la región con el campo. Un esquema del experimento se presenta en la Fig. (4.2).

Posteriormente, el campo magnético se ha realizado de distintas maneras con tal inhomogeneidad lineal, principalmente en sus concepciones como interferómetro [377, 383–385], así como en el experimento de Rabbi [386] con campos magnéticos oscilantes. En [387] se propone una configuración de corrientes eléctricas paralelas al haz, la cual produce el campo del SGE.

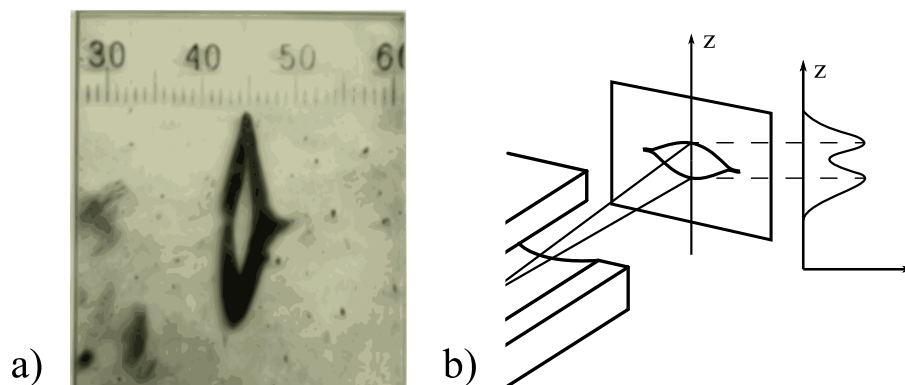


Figura 4.1: a) El resultado original del SGE visto en la placa reactiva del experimento [53]. Se notan las dos regiones diferenciadas de acumulación en el eje z . b) La distribución de probabilidad inferida del resultado del SGE [53].

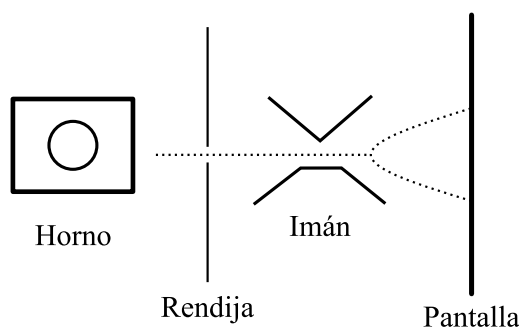


Figura 4.2: Esquema del experimento de Stern-Gerlach, tomado de [1, 2]. Un haz de partículas de espín $1/2$ es producido y arrojado desde un horno. Posteriormente, este haz es colimado mediante un obstáculo con un pequeño agujero. El haz entonces atraviesa una región con un campo magnético con una fuerte inhomogeneidad lineal en la dirección transversa a la velocidad del haz, históricamente producido por un imán con una geometría específica. Las líneas punteadas posteriores al imán del SGE representan la inexistencia de trayectorias definidas, comunes al tratar el SGE y sus resultados, en favor de los dos posibles resultados obtenidos en la medición de la posición. Estos resultados son producto de la superposición en el estado cuántico de las partículas resultante de la evolución en el SGE [1].

4.1.1. El Stern-Gerlach Experimental

Originalmente el SGE se concibió como un experimento cuya meta principal era corroborar la teoría atómica de Sommerfeld y Debye [53, 54, 86, 388, 389], es decir que su objetivo principal era hallar pruebas que apoyaran o negaran la cuantización direccional de objetos cuánticos dentro de campos eléctricos y magnéticos.

El experimento fue ideado por Otto Stern a partir de 1919, pues su conocimiento acerca de haces moleculares era amplio y además era una gran oportunidad para poner a prueba la cuantización espacial. En 1920 Walther Gerlach se unió a Stern para realizar el experimento, que sin embargo no obtuvo resultados exitosos hasta el 8 de Febrero de 1922 [389, 390].

La realización del experimento a lo largo del par de años de preparación no estuvo exenta de complicaciones, especialmente de índole económica, pues el experimento estaba financiado principalmente por Otto Stern y Max Born durante una etapa de posguerra, pero estas condiciones, a pesar de ser adversas, no impidieron que el experimento tuviera resultados [390].

4.1.1.1. Una nueva propiedad de la materia: el espín

Una vez que el SGE tuvo resultados exitosos, aunque no los esperados para muchos, incluido el propio Stern, se trató de explicar cual era la razón por la que los átomos se concentraban en dos áreas diferentes y alejadas en la pantalla. En principio no existía razón por la que esta separación estuviera presente según la teoría electromagnética clásica [53, 54, 86, 388].

De esta manera, el efecto del SGE permaneció sin una explicación teórica clara hasta el año de 1925 en el que Uhlenbeck y Goudsmit, e independientemente Kronig, propusieron la existencia de una nueva propiedad de la materia que llamaron espín [391–393], el cual es el equivalente cuántico del momento angular clásico y se considera como una propiedad intrínseca de la materia. Solamente tomando en cuenta la existencia de este momento angular orbital es posible explicar satisfactoriamente el conocido efecto del SGE.

De esta forma se consiguió una explicación de la visible separación de grupos de partículas en la pantalla del SGE gracias a un concepto nuevo que se propuso años después, mostrando que no siempre la teoría que respalda a un experimento es completa.

4.1.1.2. Más allá del SGE

Una vez que el SGE se consagró como un experimento fundamental para la física, los científicos de mediados de los años 20 siguieron investigando alrededor de él y por tanto buscaron aplicaciones para este. Por supuesto, unos de los principales investigadores en desarrollar aplicaciones para el SGE fueron Stern y su grupo. Una de las aplicaciones que el SGE tuvo desde sus inicios fue que se podía utilizar como un medio para medir momentos magnéticos de partículas o moléculas [389]. La búsqueda de una mayor precisión en la obtención de momentos magnéticos naturalmente llevó a la implementación de campos auxiliares que pudieran mejorar la estabilidad de los haces moleculares, por lo que los campos magnéticos consecutivos se convirtieron en una forma de mejorar dicho proceso. Como ejemplo de esto tenemos al experimento de Phipps-Stern [394] y el de Frisch-Segrè [395] de 1932 y 1933 respectivamente, que se consideran de los primeros experimentos de Stern Gerlach consecutivos.

El experimento de Rabi Un discípulo de Stern, Isidor Rabi, perfeccionó la técnica de obtención de momentos magnéticos de haces moleculares. En 1939 Rabi publicó su renombrado artículo acerca del método de resonancia para medir momentos magnéticos con gran resolución [386], Rabi utilizó las técnicas de Stern para desviar moléculas utilizando campos inhomogéneos para de esta forma determinar el momento en que las moléculas realizan transiciones desde una orientación a otra, induciendo este cambio usando un campo oscilatorio. El experimento de Rabi tiene una aplicación directa en el método de resonancia magnética de hoy en día [67], cuyo principal uso es el de obtener imágenes internas del cuerpo.

Es clara la influencia del experimento de Stern Gerlach en la física y su legado ha sido vasto. No debemos olvidar que el método de haces moleculares es la base del SGE y por tanto las aplicaciones de este método son incontables, entre estas aplicaciones podemos mencionar el experimento del corrimiento Lamb de 1947 [396] que utilizó un esquema similar al de SGE, la creación de los primeros máseres en 1953 [397–399], que eran parecidos al experimento de Rabi debido a su caja de resonancia, los relojes atómicos [400] que tienen como precedente los experimentos de resonancia de haces moleculares, y las trampas de iones [67, 401, 402], donde se inducen cambios de momentos en los iones como en el experimento de Rabi.

Otra rama de estudio que está íntimamente ligada al SGE es la interferometría. Muchos han sido los trabajos que utilizan al SGE como un aparato para estudiar la interferencia que podría existir en diversas clases de partículas [377, 383–385, 403, 404]. De particular interés es el hecho de que la interferencia entre las dos ramas del SGE prueba la existencia de superposición cuántica [86, 377, 384, 385, 405].

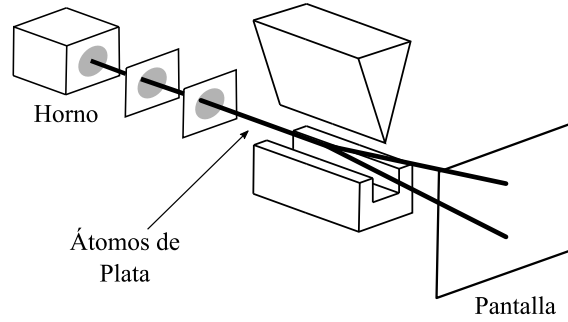


Figura 4.3: Esquema del SGE en el tratamiento semiclásico usual mostrado en libros de texto como [58, 60]. El haz de partículas se muestra como dividiéndose en dos haces con trayectorias definidas debido a su paso por la región de campo magnético. La división es gradual desde que se encuentra entre los imanes, correspondiendo a la dinámica de cambio lineal del momento clásico [57]. Se muestran los dos puntos de acumulación en la pantalla como resultado de esta dinámica semiclásica.

4.1.2. Tratamiento semiclásico

El SGE ha sido históricamente tratado de una manera semiclásica, debido al comportamiento particular de su resultado. En este sentido, la observación en la pantalla de dos puntos de acumulación parece señalar a una división temprana del haz al pasar por el campo electromagnético. De esto podemos inferir fácilmente, al considerar la posibilidad de este resultado en cualquier punto en el viaje del haz, que éste ya no se trata de un solo haz, sino de uno formado por partículas con un espín positivo y de otro haz con partículas de espín negativo, viajando juntos de manera que se separan en la dirección de la inhomogeneidad del campo. Esto es evidente por ejemplo, en la Fig. (4.3), a partir de la exposición en el libro de Sakurai [58] [60], el cual coincide con la mayoría de los libros de texto clásicos de mecánica cuántica en el tratamiento presentado del SGE, que es puramente semiclásico como se discute aquí, y en la introducción de las propiedades del espín.

Resulta interesante que tales conclusiones detalladas se derivasen en los principios de la mecánica cuántica a partir de los limitados resultados experimentales. Esto posiblemente tiene que ver con las características fundamentales del experimento, cuyo resultado además cabe ser explicado en una manera de pensar clásica o causal. En este caso, las fuerzas electromagnéticas actuando sobre un momento de espín definido aceleran a las partículas de una manera consistente con las observaciones del experimento. Tales discusiones del SGE abundan en estos primeros años, y son las que permitieron inferir la cuantización espacial del espín Sec. (4.1.1.1) [86].

A partir de estas discusiones clásicas en términos de trayectorias se han podido producir los notables experimentos pensados, como los que vimos en la Introducción y Capítulo 1, así como aquellos basados en los SGE consecutivos que revelan la naturaleza anticonmutativa del espín [394, 395], y la teoría de la medición [56–64].

A continuación se presenta el tratamiento semiclásico dado al SGE en estos términos. Las partículas de espín un medio que forman el haz sujeto al SGE se consideran con cierto momento magnético, $\vec{\mu} = -\mu\vec{\sigma}$, determinado por su espín [376]. Al atravesar el SGE están expuestas a la interacción del campo magnético, superpuesta con la acción del vuelo libre. Suponiendo que la dirección inicial de su movimiento es perpendicular al campo magnético, correspondiendo al eje y , la acción de campo acelerará a la partícula en las otras direcciones, x y z , de manera que el haz se dividirá y las dos componentes se separarán como resultado de esta interacción mientras sigue avanzando.

En el tratamiento clásico del experimento, se considera un campo magnético idealizado, consistiendo en una inhomogeneidad lineal en la dirección z del espín de las partículas. El campo magnético usado comúnmente es

$$\vec{B} = B_z \hat{k} = (B_0 + bz) \hat{k}. \quad (4.1)$$

De esta manera, existe una fuerza que acelera a las partículas en dirección z al interactuar con su momento magnético:

$$\vec{F} = F_z \hat{\mathbf{k}} = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} = \mu_z b \hat{\mathbf{k}}. \quad (4.2)$$

Esta fuerza acelera a las partículas con un estado de espín correspondiendo a los dos diferentes eigenestados en direcciones opuestas, consecuentemente separando el haz en z .

El hecho de que las partículas con el mismo espín poseen valores idénticos de su posición significa que las partículas del mismo espín se mueven juntas. Como en este caso existen sólo dos valores de espín posibles, se forman dos haces que se separan espacialmente a partir de la configuración inicial de un solo haz, como se imagina en la Fig. (4.3).

Por otro lado, como efecto de la fuerza en dirección de la inhomogeneidad del campo las partículas del haz, originalmente moviéndose en dirección y únicamente, adquirirán un momento en dirección z . De esta manera podemos hablar de cada partícula como poseyendo una posición y velocidad determinadas a cada instante temporal, con una evolución clásica y una trayectoria definida en condición de su espín. El tratamiento del experimento de una manera fenomenológica con estas trayectorias parece tener sentido cuando consideramos el propio resultado del experimento. Así se puede decir que la existencia en toda la región de vuelo libre de las partículas de puntos de acumulación en la pantalla en posiciones consistentes con las predichas por las acciones de las fuerzas semiclásicas permite inferir la existencia de una trayectoria especificada para cada partícula. Como se verá después en la Sec. (4.2) esta inferencia no sigue el espíritu de la teoría cuántica, en cuanto al principio de superposición y al colapso de la función de onda, ambos conceptos tomando un lugar primordial en el estado cuántico resultante de la dinámica de los dos posibles valores de espín en el SGE y la medición inherente al resultado del experimento.

4.1.3. El campo magnético del SGE

El campo magnético que se considera generalmente al tratar al SGE es el siguiente

$$\vec{B} = (B_0 + bz)\hat{\mathbf{k}}, \quad (4.3)$$

y es el que consideraremos en esta tesis. Este campo captura las propiedades básicas del experimento; la componente inhomogénea, compuesta por el gradiente en dirección z es la responsable de la división del haz en dirección z [53–55], y su intensidad está parametrizada por b . B_0 , por el otro lado, es el parámetro de una componente homogénea en z , que hace posible una forma *general* del campo unidimensional, pero principalmente nos permite describir la evolución del haz visto como inicialmente ubicado en el origen en z [406]. En la descripción unidimensional que desde el origen del experimento se usa como una forma simplificada del SGE, este campo magnético es suficiente para demostrar los efectos del experimento.

Sin embargo, este campo no es más que una aproximación útil. Más aún, presenta un importante problema, ya que no es irrotacional, como requieren las leyes de Maxwell. A falta de una descripción cuántica del campo magnético del SGE y de la transferencia de energía requerida para la separación de los espines, más allá de las dimensiones macroscópicas del experimento, el campo del SGE se necesita considerar como un campo magnético clásico. Como tal, debe obedecer la ley de Gauss para el campo magnético, la cual indica que el campo magnético es adivergente

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.4)$$

Sin embargo, para el campo de Ec. (4.3),

$$\nabla \cdot \vec{B} = b. \quad (4.5)$$

Si queremos que el campo magnético del SGE no tenga una componente en la dirección y , que es

El Experimento de Stern-Gerlach

4.1 La descripción del Experimento de Stern-Gerlach

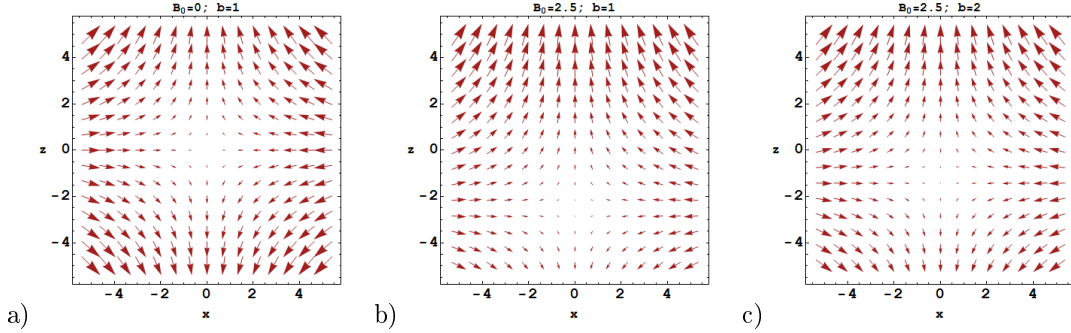


Figura 4.4: El campo magnético completo del SGE, Ec. (4.7). La condición de adivergencia del campo, Ec. (4.4), requiere una inhomogeneidad lineal igual y opuesta en dirección x , Ec. (4.6). El efecto de Stern-Gerlach depende de la ubicación espacial del haz en el campo, equivalentemente, de los valores de B_0 y b [406]. Se grafica el campo para valores de a) $B_0 = 0$, $b = 1$, b) $B_0 = 2.5$, $b = 1$, c) $B_0 = 2.5$, $b = 2$.

la dirección del movimiento del haz, sino únicamente en el plano transversal, necesitamos que

$$\partial_x B_x = -\partial_z B_z = -b, \quad (4.6)$$

para satisfacer la Ec. (4.4), considerando la Ec. (4.5), con lo que el campo completo a considerar es Fig. (4.4)

$$\vec{B} = -bx\hat{i} + (B_0 + bz)\hat{k}. \quad (4.7)$$

Singh y Sharma [407] apropiadamente señalan que en los casos en los que la componente homogénea del campo en dirección z , B_0 , es *mucho mayor* que la homogeneidad del campo, que, al menos, satisface Ec. (4.6), el momento magnético en dirección x oscila tan rápidamente que no genera un cambio en el momento de los átomos en el SGE, y por tanto, puede aproximarse por la expresión Ec. (4.3). Böhm [57], especifica¹ [407]:

El promedio temporal de la fuerza, así como el momento, en la dirección x es cero. En un experimento, que siempre mide el valor promedio del valor de expectación sobre un intervalo temporal finito, una desviación de cero en la dirección x no será observada.

El tratamiento cuántico del SGE sigue típicamente este resultado, como en [408–410]. Singh y Sharma [407] argumentan la aplicación de tal aproximación respecto a la localización del haz alrededor del origen, así como su geometría plana típica. Hsu *et al.* [406] revisan los efectos en la evolución del SGE con la ubicación del haz respecto al campo magnético, equivalentemente a cambiar los valores de B_0 y b en la descripción del experimento dada por la Ec. (4.7).

Por otro lado, en [57] el modelo semiclásico del experimento permite analizar los efectos de tal inhomogeneidad de forma general, así como la aproximación lineal. Así mismo, en [376–379] se discuten los efectos en el modelo semiclásico que tienen las aproximaciones usadas en la forma del campo magnético. Englert *et al.* [377] consideran la idealidad del SGE analizando el efecto de las sucesivas aproximaciones a la dependencia del campo en x , z , así como y , que llevan al resultado de la Ec. (4.6), sobre la evolución del haz y la medición realizada en la pantalla.

Finalmente, la forma peculiar del resultado obtenido originalmente por Stern y Gerlach [53] en la que el haz aparece *cerrado* en los extremos, Figs. (4.1) y (4.5), surge de la no idealidad del campo magnético, siendo que el campo sólo presenta la forma de la Ec. (4.3) en el plano $y-z$ en condiciones reales [377, 406], y debido a la geometría de los imanes original [53, 377], Fig. (4.4). Así mismo, la mayor anchura de la acumulación en la región positiva sobre el eje z se debe tanto

¹The time average of the force as well as the momentum in the x -direction is zero. In an experiment, which always measures the average value of the expectation value over a finite time interval, a deviation from zero in the x -direction will not be observed. [407]

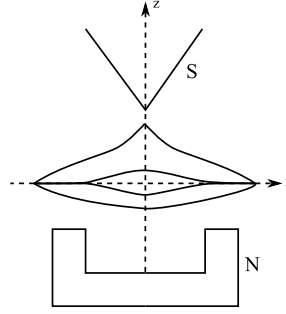


Figura 4.5: Esquema del resultado original del experimento de Stern-Gerlach, Fig. (4.1) [53]. Los puntos de acumulación en dirección z para distintos valores de x se acercan mientras nos alejamos del eje z , hasta aparecer cerrados. Esto se debe a que la geometría de los imanes sólo permite un campo como el de la Ec. (4.7) sobre el eje z [53, 377, 406], Fig. (4.4).

a efectos de mayor orden en el campo magnético en direcciones z y x , como a la necesidad de describir el estado inicial del SGE como un estado mixto general [406].

La componente en x del campo magnético del SGE A continuación revisaremos la derivación usual de la aproximación Ec. (4.3), según es presentada en [57].

Además de la ley de Gauss, Ec. (4.4), tenemos que un campo magnético obedece la ley de Ampère-Maxwell, que en un vacío sin corriente ni campo eléctrico indica que el campo magnético es irrotacional

$$\nabla \times \vec{B} = (\partial_y B_z - \partial_z B_y)\hat{i} - (\partial_x B_z - \partial_z B_x)\hat{j} + (\partial_x B_y - \partial_y B_x)\hat{k} = 0. \quad (4.8)$$

Una inhomogeneidad fuerte en la dirección z requerirá así mismo una inhomogeneidad de la misma magnitud en la dirección x , de acuerdo a la Ec. (4.6). Las variaciones en y del campo magnético del SGE se conocen como *efectos de borde*, debido a que el campo tiene una forma ideal en el interior del imán, y al salir de este se va diluyendo con efectos difíciles de predecir y considerar. Ignorando estas variaciones se toma $B_y = 0$ dentro y fuera del imán, y podemos escribir el campo con las componentes

$$\begin{aligned} B_z &= bz + \phi(x), \\ B_x &= bx + \varphi(z), \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $\phi(x)$ y $\varphi(z)$ son funciones arbitrarias para las que el campo cumple Ecs. (4.4) y (4.8). De la Ec. (4.8) requerimos que

$$\begin{aligned} \partial_z B_y &= \partial_y B_z = 0, \\ \partial_z B_y &= \partial_y B_z = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\partial_z B_y = \partial_y B_z = 0. \quad (4.11)$$

La condición $\vec{B}$ independiente de y ocasiona que la Ec. (4.10) se satisfaga automáticamente. Las condiciones Ecs. (4.9) y (4.11) se satisfacen escogiendo

$$\phi(x) = B_0, \quad \varphi(z) = 0. \quad (4.12)$$

Por lo tanto, el campo más simple que cumple las condiciones Ecs. (4.4) y (4.8) es el de la Ec. (4.7),

$$\vec{B} = -bx\hat{i} + (B_0 + bz)\hat{k}. \quad (4.13)$$

El Experimento de Stern-Gerlach

4.1 La descripción del Experimento de Stern-Gerlach

El torque en el momento magnético $\vec{\mu}$ generado por el campo magnético ocasiona un cambio en el momento angular, que en este caso se traduce a un cambio en el espín del electrón,

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (4.14)$$

Ahora, el momento magnético está relacionado con el espín,

$$\vec{\mu} = -2\mu_c/\hbar \vec{S}, \quad (4.15)$$

con $\mu_c = g \frac{q\hbar}{4m} = g \frac{\mu_B}{2}$, μ_B el magnetón de Bohr, de manera que

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\frac{2\mu_c}{\hbar} \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (4.16)$$

Considerando $\vec{B}$ de la Ec. (4.13) con

$$B_0 \gg |bx| \approx |bz|, \quad (4.17)$$

tenemos

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} \approx -\frac{2\mu_c}{\hbar} \vec{\mu} \times B_0 \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.18)$$

lo que corresponde a una precesión alrededor del eje z . La frecuencia de la precesión es

$$\omega = 2\mu_c B_0 / \hbar \quad (4.19)$$

Podemos encontrar el momento magnético a partir de la Ec. (4.18)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mu_x}{dt^2} &= -\omega^2 \mu_x, \\ \frac{d^2 \mu_y}{dt^2} &= -\omega^2 \mu_y, \\ \frac{d^2 \mu_z}{dt^2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

y

$$\mu_{x,y}(t) = \mu_{x,y}(0) e^{-i\omega t}. \quad (4.21)$$

El Hamiltoniano que describe la interacción del campo magnético con el momento magnético es [57]

$$H_I = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_x(t)bx - \mu_z B_0 - \mu_z bz. \quad (4.22)$$

De esta manera, la fuerza en la dirección x es

$$F_x = \frac{dp_x(t)}{dt} = \mu_x(t)b = \mu_x(0)b e^{-i\omega t}, \quad (4.23)$$

la que oscila con la frecuencia Ec. (4.19). A pesar de que sea del mismo orden que $F_z = \mu_z b$, la fuerza en x oscila rápidamente según la condición Ec. (4.17), así como el momento en x . Por lo tanto, el promedio temporal de la fuerza, y del momento en x , es nulo. Así, la acción del campo del SGE se puede describir adecuadamente con el campo

$$\vec{B} = B_z \hat{\mathbf{k}} = (B_0 + bz) \hat{\mathbf{k}}. \quad (4.24)$$

4.1.4. Tratamiento cuántico

El SGE ha sido sujeto de numerosos intentos por ser tratado de una manera cuántica, con el objetivo de describir el resultado observado, que al depender del espín es inherentemente cuántico, como resultado de procesos cuánticos sobre el estado cuántico que representa a las partículas. Así mismo, una descripción completamente cuántica del campo magnético del SGE y su acción sobre el estado de las partículas contiene la promesa de iluminar la naturaleza del proceso por el cual la interacción con el espín toma esta forma.

Debido a que el efecto del SGE demuestra una naturaleza cuántica de la interacción entre átomos y campo magnético [86], y fue de hecho ideado para demostrar tal cualidad, un tratamiento cuántico con el que describir lo que sucede en el experimento ha sido altamente deseado, especialmente como resultado de la formulación actual de la mecánica cuántica. Como discutimos en la Sec. (4.1.1), el descubrimiento y formalización del espín, ayudado por el SGE, fue uno de los fenómenos que impulsó el establecimiento del formalismo de la mecánica cuántica. Sin embargo, la forma que toma la ecuación de Schrödinger bajo la acción del campo del SGE es especialmente complicada, y dificulta la obtención de la evolución a la que están sujetas las partículas en el SGE. Considerando el campo del SGE como en la Ec. (4.3), tenemos que su hamiltoniano es

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mu_c (B_0 + bz) \sigma_z. \quad (4.25)$$

La ecuación de Schrödinger resultante de este hamiltoniano,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\vec{r}, t), \quad (4.26)$$

presenta evolución unitaria en las coordenadas x y y , sin embargo la separación de variables no permite resolver la ecuación diferencial resultante en la coordenada z . El hamiltoniano de la Ec. (4.25) es independiente del tiempo, sin embargo, la no-conmutatividad de p_z y z no permite encontrar explícitamente de la manera usual la solución general mediante el operador de evolución,

$$\psi(\vec{r}, t) = \exp\left(\frac{-it}{\hbar} \hat{H}\right) \psi(\vec{r}, 0), \quad (4.27)$$

a partir de la función de onda inicial, $\psi(\vec{r}, 0)$. En la Sec. (4.2.1) se resolverá este problema, permitiendo encontrar la evolución del SGE con la solución usual de la ecuación de Schrödinger. Este método admite, por su naturaleza conteniendo el operador de evolución, una forma general del campo magnético, como vimos en la Sec. (4.1.3), e idealmente, una expresión cuántica del campo del SGE. A continuación se expondrán las diversas técnicas propuestas en la literatura para encontrar la evolución cuántica de las partículas en el SGE, que buscan circunventar las dificultades para resolver la ecuación de Schrödinger.

4.1.4.1. Solución mediante fuerzas electromagnéticas

En esta sección revisaremos la descripción de la evolución del SGE mediante una aceleración clásica proveniente del campo electromagnético sobre la función de onda que describe el estado cuántico de las partículas. Esta es la descripción semiclásica que comúnmente se da al hablar del estado cuántico del SGE.

Las fuerzas electromagnéticas han sido una herramienta usada ampliamente en la descripción de la dinámica del SGE, comenzando con su tratamiento semiclásico, como se trató en la Sec. (4.1.2). El SGE demostró que la interacción entre los campos electromagnéticos y los átomos tienen propiedades que no se pueden explicar en la teoría del electromagnetismo clásico, siendo que el comportamiento cualitativamente cuántico de los átomos que modelan a los electrones en el SGE es completamente consistente con la teoría del espín, ayudando así mismo en su desarrollo

[86]. De esta manera, podemos explicar la interacción de los átomos con el campo como una acción distinta de éste último dependiendo del espín, como se hace también en el tratamiento semiclásico de la Sec. (4.1.2).

Un paso a la cuantización del experimento desde este tratamiento semiclásico es la descripción cuántica de la posición de las partículas, mediante un paquete de ondas. Así, las dos componentes del estado, posición y espín, estarán dadas de una manera cuántica. Sin embargo, la evolución se describe a partir de un tratamiento cualitativo. En éste se argumenta la distinta aceleración de cada componente, dependiendo del momento magnético de espín, y describiendo la dinámica de la posición por el movimiento clásico del centro del paquete de ondas, bajo la acción de las fuerzas clásicas, en el sentido expresado en [411].

Aquí seguiremos el tratamiento de Roston *et al.* [52], en el que esta solución de la ecuación de Schrödinger se aplica a la separación de la ecuación espinorial, Sec. (4.1.4.2), para encontrar la evolución del SGE. Asumiendo la forma del campo electromagnético de la Ec. (4.24), solo la componente z se ve afectada por el campo, estando sujeta a una fuerza electromagnética para cada componente con espín $\pm \frac{\hbar}{2}$, Ec. (4.2), de

$$F_{\pm} = m a_{c\pm} = \pm \mu_c b. \quad (4.28)$$

μ_c es el momento magnético de espín, Ec. (4.15). En la solución espinorial del SGE, tenemos que la evolución para cada componente según la ecuación de Schrödinger se desacopla gracias a la forma del campo sin componente x de Ec. (4.24). Esto lo veremos en más detalle en la siguiente Sec. (4.1.4.2).

Según el método de [411], en [52] se propone una solución independiente para cada componente de espín de la forma

$$\Psi_{\pm}(z, t) = \exp\left(\mp \frac{i\mu_c B_0 t}{\hbar}\right) \bar{\Psi}_{\pm}(z, t), \quad (4.29)$$

con

$$\bar{\Psi}_{\pm}(z, t) = \phi_{\pm}\left(z - z_0 - v_0 t - \frac{1}{2} a_{c\pm} t^2, t\right) e^{iS_{\pm}(z, t)}, \quad (4.30)$$

donde z_0 es el valor esperado del paquete de ondas inicial y v_0 la velocidad clásica que correspondería al momento inicial, dando así los parámetros clásicos iniciales de la evolución por la fuerzas electromagnéticas constantes de la Ec. (4.28), y la dependencia en z de la función $\phi_{\pm}$ por esta evolución. Llevando a cabo las derivaciones de la ecuación de Schrödinger, Ec. (4.26), se encuentran condiciones para la función S , que llevan a

$$S_{\pm}(z, t) = \frac{m}{\hbar} \left(v_0 z + a_{c\pm} z t - \frac{1}{2} a_{c\pm} v_0 t^2 - \frac{1}{6} a_{c\pm}^2 t^3 - \frac{1}{2} v_0^2 t + \text{cte.} \right). \quad (4.31)$$

Finalmente, con un paquete de ondas Gaussiano inicial en la componente z para cada estado de espín, de ancho $\sigma_{\pm}$ y velocidad de grupo $k_{\pm}$, respectivamente, se obtienen las soluciones

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm}(z, t) = & \left(\frac{\sigma_{\pm}}{2\sqrt{2\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sigma_{\pm}^2 + \frac{i\hbar}{2m} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(z - z_{\pm})^2}{4(\sigma_{\pm}^2 + \frac{i\hbar}{2m})} \right) \\ & \times \exp \frac{i\sigma_{\pm}^2 k_{\pm} \left(z - z_{\pm} - \frac{\hbar k_{\pm} t}{2m} \right)}{\sigma_{\pm}^2 + \frac{i\hbar}{2m}} \exp(iT_{\pm}(z, t)) \end{aligned} \quad (4.32)$$

con

$$z_{\pm}(t) = z_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} \frac{\mu_c b}{m} t^2, \quad (4.33)$$

$$T_{\pm}(z, t) = S_{\pm}(z, t) \mp \frac{\mu_c B_0 t}{\hbar}. \quad (4.34)$$

4.1.4.2. Soluciones espinoriales

El método de espinores permite desacoplar la ecuación de Schrödinger según el espín involucrado para ciertas condiciones del campo magnético del SGE, según se vió en la Sec. (4.1.3). El operador de Pauli en el hamiltoniano del SGE, Ec. (4.25), indica una acción diferenciada sobre los distintos estados de espín.

El Hamiltoniano que se obtiene del campo magnético del SGE es el de la Ec. (4.25), con éste la ecuación de Schrödinger, Ec. (4.26), toma la forma

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(\vec{r}, t)\rangle}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mu_c (B_0 + bz) \sigma_z \right) |\psi(\vec{r}, t)\rangle. \quad (4.35)$$

Considerando el resultado del SGE y la distinta acción del Hamiltoniano sobre cada estado de espín, justifica tomar a la función de onda como una función espinorial,

$$\langle \vec{r} | \Psi \rangle = \begin{pmatrix} \Psi_+(\vec{r}, t) \\ \Psi_-(\vec{r}, t) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

con los espinores de Pauli Ψ_+ y Ψ_- relacionados con σ_z .

En 1992, Platt [412] describió al SGE partiendo de la condición general de que la parte espacial de la función de onda se escriba como un espinor, dependiendo del espín en la dirección de la inhomogeneidad de campo, como en la Ec. (4.36). Las ecuaciones espinoriales que surgen de la ecuación de Schrödinger son

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi_+ + i\mu_c bx \Psi_- + \mu_c (B_0 + bz) \Psi_+ &= i\hbar \frac{\partial \Psi_+}{\partial t} \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi_- - i\mu_c bx \Psi_+ - \mu_c (B_0 + bz) \Psi_- &= i\hbar \frac{\partial \Psi_-}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

acopladas por el operador de espín en la dirección transversal, x . Esta acción se puede remover considerando las oscilaciones del momento magnético, como en la Sec. (4.1.3), con lo que las ecuaciones espinoriales quedan desacopladas

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi_+ + \mu_c (B_0 + bz) \Psi_+ &= i\hbar \frac{\partial \Psi_+}{\partial t} \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi_- - \mu_c (B_0 + bz) \Psi_- &= i\hbar \frac{\partial \Psi_-}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde $\bar{\Psi}_\pm$ es la función de onda con la contribución de la parte homogénea del campo, B_0 , removida, definida como

$$\Psi_\pm(\vec{r}, t) = \exp\left(\mp \frac{i\mu_c B_0 t}{\hbar}\right) \bar{\Psi}_\pm(\vec{r}, t), \quad (4.39)$$

que corresponde con la función de la Ec. (4.30).

En [412] no se resuelven estas ecuaciones, sino que se observa de aquí el argumento semiclásico de las fuerzas efectivas independientes acelerando a las partículas según un valor predefinido de espín. El teorema de Ehrenfest, con los hamiltonianos efectivos que pueden ser inferidos de la Ec. (4.38), lleva a un movimiento determinado para los promedios de cada grupo de partículas con un espín definido, de lo que en [412] el autor concluye la existencia de trayectorias definidas y la separación del haz en dos en el SGE.

Las ecuaciones Ec. (4.38) se obtienen igualmente en [408]. De estas se declara una solución para

la evolución de la posición en términos de $\Psi_{\pm}$ como un paquete de ondas Gaussiano,

$$\Psi_{\pm}(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi s_t^2} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left[-\frac{x^2 + (y - v_y t)^2 + \left(z \mp \frac{v_z t}{2} \right)^2}{4\sigma_0 s_t} \right] \exp \left\{ i \left[-\Delta_{\pm} + \left(y - \frac{v_y t}{2} \right) k_y \pm k_z z \right] \right\} \quad (4.40)$$

aquí $\Delta_{\pm} = \pm \frac{\mu_c B_0 t}{\hbar} + \frac{m^2 v_z^2 t^2}{6\hbar^2}$, $v_z = \frac{\mu_c b t}{m}$, $k_z = \frac{m v_z}{\hbar}$ y $s_t = \sigma_0 \left(1 + \frac{i\hbar t}{2m\sigma_0^2} \right)$. A partir de estas funciones, las partículas se consideran en una superposición con los distintos eigenestados de espín,

$$\Psi(\vec{r}, t) = \alpha \Psi_+(\vec{r}, t) \otimes |\uparrow\rangle_z + \beta \Psi_-(\vec{r}, t) \otimes |\downarrow\rangle_z, \quad (4.41)$$

como la evolución del estado inicial

$$\Psi(\vec{r}, t = 0) = \Psi_0(\vec{r}) \otimes (\alpha |\uparrow\rangle_z + \beta |\downarrow\rangle_z). \quad (4.42)$$

Sin embargo, aún se habla de la evolución independiente de las partículas dependiendo de su estado de espín y resultando en aceleraciones distintas. Tal enfoque se observa de la inclusión de aceleraciones en la solución de $\Psi_{\pm}$, Ec. (4.40), de manera reminiscente a la evolución de paquetes de onda de [411]. Sin embargo, no se describe la obtención de este resultado, por lo que no se puede considerar como una solución general a la ecuación de Schrödinger del SGE. Es interesante que estos autores determinan la evolución tanto en la región con el campo electromagnético como en la región libre posterior. Adicionalmente, el artículo de Home *et al.* [408] se dedica a estudiar la idealidad del SGE, considerada como la separación de los resultados en la pantalla, en términos de las fracciones de las distribuciones de probabilidad resultantes de la Ec. (4.41) en las regiones positiva y negativa del plano $x - z$, así como la idealidad dada por la ausencia de superposición de las dos funciones de onda espinoriales.

Numerosos autores han usado el método espinorial de [412] y las ecuaciones desacopladas de las Ec. (4.38) para investigar la evolución del SGE. A continuación, en lo que resta de esta sección, se resumen algunas soluciones propuestas, adicionalmente a la de [52] de la Sec. (4.1.4.1), y la de [408] discutida arriba, antes de revisar la solución completa cuántica que damos de la ecuación de Schrödinger en [1, 2] en la siguiente Sec. (4.2.1).

4.1.4.3. Solución mediante funciones de Green

Patil [413] considera también un enfoque espinorial para encontrar la evolución del SGE usando funciones de Green. Aquí se toma como estado inicial un espinor, como la Ec. (4.36), cuyas funciones de onda componentes dependen de los dos distintos eigenestados de espín. La evolución es dada por la acción de funciones de Green, que se derivan del efecto del campo magnético sobre cada espín.

La interpretación de las evoluciones independientes de las componentes espinoriales es nuevamente la evolución distinta generada por la acción del operador de Pauli sobre los estados de espín, que, como discute Platt [412], genera un Hamiltoniano efectivo para cada componente espinorial,

$$\hat{H}_z = \frac{p_z^2}{2m} + bz\sigma_z, \quad (4.43)$$

de manera que los estados espinoriales de la Ec. (4.36) corresponden a

$$|\Psi_{\pm}(t)\rangle = \exp \left[-\frac{it}{\hbar} \left(\frac{p_z^2}{2m} \pm bz \right) \right] |\Psi_{\pm}(0)\rangle. \quad (4.44)$$

La evolución determinada por la función de Green es

$$\Psi_{\pm}(z, t) = \int G_{\pm}(z, t; z_0) \Psi_{\pm}(z_0, 0) dz_0, \quad (4.45)$$

con la función de Green correspondiente

$$G_{\pm}(z, t; z_0) = \left\langle z \left| \exp \left[-\frac{it}{\hbar} \left(\frac{p_z^2}{2m} \pm bz \right) \right] \right| z_0 \right\rangle. \quad (4.46)$$

Esta función es evaluada mediante integrales sucesivas obtenidas al expresar la exponencial correspondiente al operador de evolución como una factorización infinita

$$\exp \left[-\frac{it}{\hbar} \left(\frac{p_z^2}{2m} \pm bz \right) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\exp \left(-\frac{itp_z^2}{2m\hbar N} \right) \exp \left(\mp \frac{itbz}{\hbar N} \right) \right]^N. \quad (4.47)$$

Considerando paquetes de onda iniciales Gaussianos,

$$\Psi_{\pm}(0) = \langle z | \Psi_{\pm}(0) \rangle = A_{\pm} e^{-\frac{z^2}{\sigma^2}}, \quad (4.48)$$

el estado evolucionado obtenido con la función de Green encontrada en [413] es

$$\Psi_{\pm}(z, t) = A_{\pm} \left(1 + \frac{2it\hbar}{m\sigma^2} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{i\phi_{\pm}} \exp \left[-\frac{\left(z \pm \frac{bt^2}{2m} \right)^2}{\sigma^2 + \frac{4t^2\hbar^2}{m^2\sigma^2}} \right], \quad (4.49)$$

con $\phi_{\pm}$ una fase,

$$\phi_{\pm} = -\frac{b^2 t^3}{6m\hbar} + \frac{m}{2t\hbar} \left[\left(z \mp \frac{bt^2}{2m} \right)^2 - \frac{m^2 \sigma^4}{4t^2 \hbar^2} \frac{\left(z \pm \frac{bt^2}{2m} \right)^2}{1 + \frac{m^2 \sigma^4}{4t^2 \hbar^2}} \right]. \quad (4.50)$$

Adicionalmente, en Patil [413] se remarca la inexistencia de las trayectorias supuestas para el SGE, argumentando que el colapso de la función de onda no sucede hasta la medición en la pantalla, sino que es la distribución de probabilidad la que desarrolla picos distinguibles como resultado de la interacción con el campo magnético, ver Figs. (4.1) y (4.6). Aquí también vemos como debido a la naturaleza del espinor inicial, Ec. (4.36), el colapso espacial es acompañado por un colapso en el estado de espín.

4.1.4.4. Solución por Eigenenergías

Finalmente, para concluir esta sección, en [1, 2] analizamos las ecuaciones desacopladas de la Ec. (4.38), de manera que podemos obtener de manera explícita la solución por eigenvalores de la ecuación de Schrödinger inicial, Ec. (4.35).

Comenzamos tomando únicamente la Ec. (4.38) para Ψ_+ . Usando el método de separación de variables, consideraremos funciones separadas para $\vec{r}$ y t ,

$$\Psi_+(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) \varphi(t), \quad (4.51)$$

con

$$\varphi(t) = \exp \left(-\frac{iEt}{\hbar} \right), \quad (4.52)$$

El Experimento de Stern-Gerlach

4.1 La descripción del Experimento de Stern-Gerlach

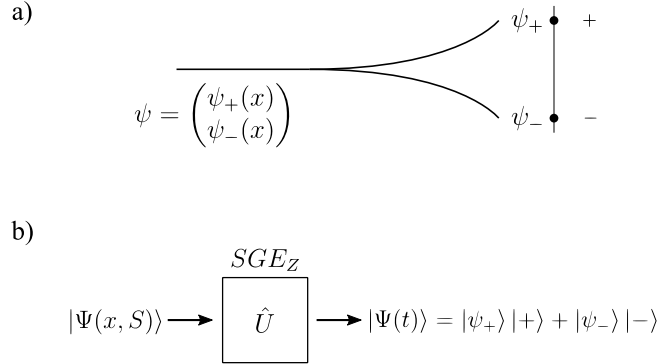


Figura 4.6: Tratamiento cuántico de la evolución del SGE. a) El estado espinorial representa trayectorias diferenciadas para cada componente del espinor independientemente, Ecs. (4.36) y (4.38). b) En la evolución completamente cuántica del SGE, Sec. (4.2), el estado cuántico de espín evoluciona en una superposición, debido al potencial del SGE.

la componente temporal, y la ecuación independiente del tiempo

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} \mu_c b z \phi(\vec{r}) = -\frac{2mE}{\hbar} \phi(\vec{r}). \quad (4.53)$$

Ahora, definimos

$$\phi(\vec{r}) = \Psi_x(x) \Psi_y(y) \Psi_z(z). \quad (4.54)$$

Con esto, la Ec. (4.53) da las siguientes ecuaciones separadas para cada componente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_x(x)}{\partial x^2} &= -\frac{2mE_x}{\hbar} \Psi_x(x), \\ \frac{\partial^2 \Psi_y(y)}{\partial y^2} &= -\frac{2mE_y}{\hbar} \Psi_y(y), \\ \frac{\partial^2 \Psi_z(z)}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar} \mu_c b z \Psi_z(z) &= -\frac{2mE_z}{\hbar} \Psi_z(z). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Aquí hacemos los eigenvalores de las ecuaciones separadas E_x , E_y , E_z , correspondiendo a las energías efectivas en cada componente espacial. La solución general a las ecuaciones libres para x y y de la Ec. (4.55) las construimos como paquetes de onda a partir de las soluciones particulares $e^{ik_x x}$ y $e^{ik_y y}$, considerando la componente correspondiente a las energías E_x y E_z de $\varphi(t)$, Ec. (4.52). Esto nos lleva a

$$\begin{aligned} \Psi_x(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k_x) \exp \left(i k_x x - i \frac{\hbar k_x^2}{2m} t \right) dk_x, \\ \Psi_y(y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k_y) \exp \left(i k_y y - i \frac{\hbar k_y^2}{2m} t \right) dk_y. \end{aligned} \quad (4.56)$$

La ecuación para z de la Ec. (4.55) no es tan simple de resolver, y como vemos, es esta la ecuación cuya solución ha guiado los estudios modernos del SGE. En [1, 2] notamos que esta es una ecuación de Airy, y delineamos una solución siguiendo un procedimiento similar al de [414].

Definiendo $\xi(z)$ de manera conveniente podemos convertir la Ec. (4.55) para $\Psi(z)$ a la ecuación de Airy. Hacemos

$$\xi = \left(z + \frac{E_z}{F_z} \right) \frac{2mF_z}{\hbar}, \quad (4.57)$$

con $F_z = \mu_c b$, que corresponde a la fuerza electromagnética clásica del campo del SGE, y obtenemos la ecuación de Airy para $\Psi_\xi(\xi) = \Psi_z(z(\xi))$

$$\frac{\partial^2 \Psi_\xi(\xi)}{\partial \xi^2} + \xi \Psi_\xi(\xi) = 0. \quad (4.58)$$

La solución a la ecuación de Airy está dada por [415]

$$\Psi_\xi(\xi) = N \text{Ai}(-\xi) + M \text{Bi}(-\xi), \quad (4.59)$$

con condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\xi^*(\xi) \Psi_\xi(\xi') d\xi = \delta(E_z - E'_z), \quad (4.60)$$

y $E'_z = E_z(z(\xi'))$, Ai y Bi son funciones de Airy. A partir de esta solución podemos, de la misma manera que para x y y , construir una solución física a la evolución de la ecuación de Schrödinger como un paquete de onda

$$\Psi_\xi(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(E_z) \Psi_\xi(\xi) e^{-\frac{iE_z t}{\hbar}} dE_z. \quad (4.61)$$

La solución final depende entonces de los eigenvalores de la energía de los hamiltonianos efectivos. En este artículo [1, 2] no se procede a la solución final por este camino, siendo también bastante complejo encontrar una expresión analítica a la función que resuelve la ecuación, Ec. (4.61). Sin embargo, mostramos cómo a partir del método de espinores presentado por Platt [412] podemos llegar a una solución para la evolución del SGE dada por funciones separadas de x , y , z y t para cada función espinorial que depende de la solución de la ecuación de eigenvalores, que es la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

4.2. Descripción completamente cuántica del SGE

El experimento de Stern-Gerlach es comúnmente en la literatura tratado de una manera semiclásica [1, 2]. Resalta su papel en la enseñanza de la física y la común aparición de la descripción semiclásica en libros de texto [1, 2], como por ejemplo [57, 59, 61, 62, 62–64]. La prevalencia de este enfoque se puede asignar a la suposición de que el imán divide al haz en dos partes, que tomarán dos caminos distinguibles. En este caso, podría tratarse a estas dos componentes como haces evolucionando clásicamente, mientras que la única componente cuántica en la descripción del experimento es la separación que resulta de los distintos estados de espín.

Sin embargo, argüimos que esta aparente separación es debida al colapso de la función de onda, la cual incluye dos términos en superposición. Por lo tanto, así como el colapso, la separación del haz no toma lugar hasta la medición del haz en la pantalla. De esta manera, no se puede justificar el tratamiento semiclásico del SGE.

Lo anterior lo podemos decir de una manera cualitativa. Sin embargo, es de esperar que un haz general, con componentes de espín homogéneas, tenga a sus partículas descritas por una superposición de eigenestados de espín, es decir, estas partículas no poseen un espín definido, sino que se determina por el operador que realizará la medición, presentando una mezcla de estos eigenestados. Adicionalmente, una evolución unitaria cuántica no colapsará esta superposición, por lo que el estado evolucionado también estará en una superposición de los eigenestados de espín. Esto corresponde a lo discutido anteriormente. De esta manera, la dinámica cuántica del SGE es consistente en concepto con las observaciones experimentales.

A pesar de esto, la evolución cuántica del SGE, definida por la interacción con el campo magnético, no es simple de encontrar como una solución a la ecuación de Schrödinger. Por otro lado,

la ecuación de Schrödinger rige la dinámica del mundo cuántico, y es una herramienta sumamente poderosa. De esta manera, es deseable resolverla con el potencial correspondiente a la evolución en el SGE. Esto lo hemos hecho en [1, 2].

4.2.1. Evolución Cuántica

Para encontrar el potencial del SGE tomamos un campo magnético clásico con una inhomogeneidad lineal en la dirección z :

$$\vec{B} = (B_0 + bz)\hat{\mathbf{k}} - bx\hat{\mathbf{i}} \quad (4.62)$$

El campo anterior satisface las ecuaciones de Maxwell, como es requerido. Sin embargo, notamos que podemos ignorar la componente en dirección x , debido a que al tomar el valor esperado del momento de espín encontramos que las rápidas oscilaciones en esta dirección no contribuyen significativamente en la evolución [57, 407, 408], Sec. (4.1.3). De esta manera consideramos el siguiente campo

$$\vec{B} = (B_0 + bz)\hat{\mathbf{k}} \quad (4.63)$$

El acoplamiento con el espín se da mediante el operador de espín de Pauli, con lo que tenemos el potencial del SGE

$$\mu_c (\sigma \cdot \vec{B}) \quad (4.64)$$

con $\mu_c = g \frac{q\hbar}{4m}$ el momento magnético, Ec. (4.15), q es la carga eléctrica, g la razón giromagnética, y σ es el vector de Pauli. De esta manera, el Hamiltoniano del SGE es

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mu_c (\sigma \cdot \vec{B}). \quad (4.65)$$

Y la evolución determinada por la solución a la ecuación de Schrödinger la tenemos como

$$\psi(\vec{r}, t) = \hat{U} \psi(\vec{r}, 0) = \exp^{-\frac{it}{\hbar} \hat{H}} \psi(\vec{r}, 0) \quad (4.66)$$

4.2.1.1. La Factorización del Operador de Evolución

La dinámica del sistema está dada mediante el operador de evolución

$$\hat{U}(t) = \exp \left[-\frac{it\hat{H}}{\hbar} \right] = \exp \left\{ -\frac{it}{\hbar} \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mu_c (\sigma \cdot \mathbf{B}) \right] \right\}. \quad (4.67)$$

Sin embargo, para aplicarlo al estado inicial del SGE requerimos realizar una factorización. Notando que $\hat{H}$ es de la forma $\exp^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})}$, podemos aplicar el método de factorización derivado en [416], como hacemos en [1, 2]. Comenzamos proponiendo una factorización de la forma

$$e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})} = e^{f_0(\lambda)} e^{f_1(\lambda)\hat{B}} e^{f_2(\lambda)\hat{C}} e^{f_3(\lambda)\hat{A}}, \quad (4.68)$$

identificando $\hat{A} = -\frac{it}{2m\hbar}p_z^2$ y $\hat{B} = (B_0 + bz)\sigma_z$. Las funciones $f_i(\lambda)$ deben satisfacer $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0$ [416, 417]. Se cumplen así las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}] &= \frac{it^2\mu_c b}{m\hbar} p_z \sigma_z = \hat{C}, \\ [\hat{A}, \hat{C}] &= 0, \\ [\hat{C}, \hat{B}] &= -\frac{it^3\mu_c^2 b^2}{m\hbar} = -\kappa. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Haciendo $F(\lambda) = e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})}$, nuestra función de interés, la siguiente relación,

$$\begin{aligned} \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} &= (\hat{A} + \hat{B})F(\lambda) \\ &= \frac{df_0(\lambda)}{d\lambda} F(\lambda) + \hat{B} \frac{df_1(\lambda)}{d\lambda} F(\lambda) + \frac{df_2(\lambda)}{d\lambda} [\hat{C} + f_1(\lambda)\kappa] F(\lambda) \\ &\quad + \frac{df_3(\lambda)}{d\lambda} \left[\hat{A} - f_1(\lambda)\hat{C} - \frac{f_1^2(\lambda)}{2}\kappa \right] F(\lambda), \end{aligned} \quad (4.70)$$

nos da un sistema de ecuaciones para las funciones $f_i(\lambda)$,

$$\begin{aligned} \frac{df_1(\lambda)}{d\lambda} &= 1 \\ \frac{df_3(\lambda)}{d\lambda} &= 1 \\ \frac{df_2(\lambda)}{d\lambda} - \frac{df_3(\lambda)}{d\lambda} f_1(\lambda) &= 0 \\ \frac{df_0(\lambda)}{d\lambda} + \frac{df_2(\lambda)}{d\lambda} f_1(\lambda)\kappa - \frac{df_3(\lambda)}{d\lambda} \frac{f_1^2(\lambda)}{2}\kappa &= 0, \end{aligned} \quad (4.71)$$

con soluciones

$$\begin{aligned} f_0(\lambda) &= -\frac{\lambda^3}{6}\kappa \\ f_1(\lambda) &= f_3(\lambda) = \lambda \\ f_2(\lambda) &= \frac{\lambda^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Tomando $\lambda = 1$ obtenemos la función inicial, $F(\lambda = 1) = \hat{U}$ de la Ec. (4.67).

Con esto obtenemos finalmente el operador de evolución como

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= \exp\left(-\frac{\kappa}{6}\right) \exp\left[-\frac{it\mu_c}{2m\hbar} (p_x^2 + p_y^2)\right] \exp\left[-\frac{it\mu_c}{\hbar} (B_0 + bz)\right] \\ &\quad \exp\left[\frac{it^2\mu_c b}{2m\hbar} p_z \sigma_z\right] \exp\left[-\frac{it}{2m\hbar} p_z^2\right], \end{aligned} \quad (4.73)$$

donde $\kappa = \frac{it^3\mu_c^2 b^2}{m\hbar}$, Ec. (4.69).

4.2.1.2. El Estado Enredado del SGE

El estado inicial que será evolucionado representando a las partículas sujetas a la acción del SGE corresponde a un estado puro del sistema compuesto formado por los subsistemas de posición y de espín. Este estado puro es definido como un producto de un paquete de ondas Gaussiano y

una superposición de los eigenestados de espín en la dirección de la inhomogeneidad del campo, z , definidos como $|+\rangle, |-\rangle$, de manera que

$$|\Psi(0)\rangle = \psi_0(\vec{r}) (\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle), \quad (4.74)$$

y

$$\psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{3/4}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma_0^2} + i\vec{k} \cdot \vec{r}\right) \quad (4.75)$$

es un paquete de ondas Gaussiano con anchura dada por σ_0 . En lo siguiente hacemos el vector de onda inicial $\vec{k} = k_y \hat{j}$. Para el análisis que se llevará a cabo en este trabajo de tesis se considera al estado inicial en una superposición homogénea de espín, es decir, tomando $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$, con lo que el estado inicial de la Ec. (4.74) es

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_0(\vec{r}) (|+\rangle + |-\rangle). \quad (4.76)$$

Encontramos el estado saliente del aparato de Stern-Gerlach, obtenido de este estado, Ec. (4.76), por la evolución anterior de la Ec. (4.66), con el operador de la Ec. (4.73), dado por la siguiente expresión [1, 2]

$$|\Psi(\vec{x}; t)\rangle = |\psi_x(x; t)\rangle |\psi_y(y; t)\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_+(z; t)\rangle |+\rangle + |\psi_-(z; t)\rangle |-\rangle], \quad (4.77)$$

con

$$\psi_x(x; t) := \langle x | \psi_x(x; t) \rangle = \left[\frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar t}{2m} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{-x^2}{4(\sigma_0^2 + i\hbar t/2m)} \right], \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} \psi_y(y; t) &:= \langle y | \psi_y(y; t) \rangle \\ &= \left[\frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar t}{2m} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\sigma_0^2 k_y^2} \exp \left[\frac{4iy\sigma_0^2 k_y}{4(\sigma_0^2 + i\hbar t/2m)} \right] \exp \left[\frac{-(y^2 - 4\sigma_0^4 k_y^2)}{4(\sigma_0^2 + i\hbar t/2m)} \right], \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(z; t) &:= \langle z | \psi_{\pm}(z; t) \rangle \\ &= e^{-\frac{\kappa}{6}} \left[\frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar t}{2m} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{\left(z \pm \frac{t^2 \mu_c b}{2m} \right)^2}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar t}{2m})} \right] \exp \left[\mp \frac{it\mu_c}{\hbar} (B_0 + bz) \right]. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Así, el punto inicial de este trabajo se hace evidente, que es la presencia de enredamiento entre la posición y el espín como resultado de su viaje a través del campo magnético del SGE. En este estado, el estado del subsistema de posición, expresado mediante las funciones $\psi_{\pm}$, no se puede separar de aquel del subsistema de espín, lo que es evidente de la forma en la expresión anterior. Así mismo, encontramos que naturalmente este estado enredado hace manifestas las características cuánticas del SGE en tanto a sus correlaciones cuánticas. Se revisarán tales correlaciones en las siguientes secciones. Posteriormente, en esta tesis se analizarán las propiedades de las correlaciones cuánticas del SGE contenidas en este estado, y que corresponden a su enredamiento híbrido.

4.2.2. La distribución de probabilidad

En la Ec. (4.77) tenemos la evolución temporal de una partícula que atraviesa el SGE dada por un estado cuántico. Cuando observamos el haz en la pantalla del experimento, tenemos una multitud de partículas colisionando en esta. La densidad de probabilidad del estado anterior nos muestra la distribución de los resultados de la medición de la posición que tiene lugar en la pantalla. En la placa conmemorativa al experimento de Stern-Gerlach en la Universidad de Frankfurt de la Fig. (1) se muestra de forma esquemática la relación entre la distribución de probabilidad y la acumulación de partículas en la pantalla, Fig. (4.1). En esta sección se analizan la densidad de probabilidad del estado del SGE de la Ec. (4.77); al graficarla podemos observar la división del haz en tiempos de interacción incrementantes dados por el parámetro temporal t de nuestra solución.

La densidad de probabilidad para la función de onda del SGE, Ec. (4.77), se tiene como

$$\begin{aligned} p(x, y, z; t) &= |\Psi|^2 \\ &= \frac{1}{2} [\langle \psi_x | \langle \psi_y | (\langle \psi_+ | \langle + | + \langle \psi_- | \langle - |) [| \psi_x \rangle | \psi_y \rangle (| \psi_+ \rangle | + \rangle + | \psi_- \rangle | - \rangle)] \\ &= \psi_x^2 \psi_y^2 \left[\frac{1}{2} (\psi_+^2 + \psi_-^2) \right] \\ &:= p_x(x; t) p_y(y; t) p_z(z; t). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Definanse los siguientes parámetros adimensionales

$$\begin{aligned} \tau &:= \frac{\hbar t}{2\sigma_0^2 m}, \\ k &:= \sqrt{2}\sigma_0 \left(\frac{\mu_c b m}{2\hbar^2} \right)^{1/3}, \end{aligned} \quad (4.82)$$

estas definiciones serán convenientes en todo el análisis del SGE hecho en esta tesis. Podemos escribir explícitamente

$$p_z(z; t) = \frac{1}{2\sigma_0 \sqrt{\pi(1+\tau^2)}} \left[e^{-\frac{(z/\sigma_0 + \sqrt{2}k^3\tau^2)^2}{2(1+\tau^2)}} + e^{-\frac{(z/\sigma_0 - \sqrt{2}k^3\tau^2)^2}{2(1+\tau^2)}} \right], \quad (4.83)$$

y tenemos

$$\begin{aligned} p_{xz}(x, z; t) &:= p_x(x; t) p_z(z; t) \\ &= \frac{1}{4\sigma_0^2 \pi (1+\tau^2)} e^{-\frac{x^2/\sigma_0^2}{2(1+\tau^2)}} \left[e^{-\frac{(z/\sigma_0 + \sqrt{2}k^3\tau^2)^2}{2(1+\tau^2)}} + e^{-\frac{(z/\sigma_0 - \sqrt{2}k^3\tau^2)^2}{2(1+\tau^2)}} \right] \end{aligned} \quad (4.84)$$

para la distribución de probabilidad en el plano $x - z$. Similarmente, en el plano $y - z$,

$$\begin{aligned} p_{yz}(y, z; t) &:= p_y(y; t) p_z(z; t) \\ &= \frac{e^{-2\sigma_0^2 k_y^2}}{4\sigma_0^2 \pi (1+\tau^2)} e^{-\frac{(y/\sigma_0)^2 - 4\tau k_y y/\sigma_0 + 4\sigma_0^2 k_y^2}{2(1+\tau^2)}} \left[e^{-\frac{(z/\sigma_0 + \sqrt{2}k^3\tau^2)^2}{2(1+\tau^2)}} + e^{-\frac{(z/\sigma_0 - \sqrt{2}k^3\tau^2)^2}{2(1+\tau^2)}} \right]. \end{aligned} \quad (4.85)$$

En la Fig. (4.7) graficamos p_{xz} de la Ec. (4.84) para valores de $k = 1$ y a un tiempo de interacción $\tau = 2$. En las Figs. (4.8) a (4.10) graficamos p_z , p_{xz} y p_{yz} , respectivamente, para τ de 0 a 12 en la Fig. (4.8), $\tau = 0, 1, 2, 4, \dots, 12$ en la Fig. (4.9) y de 0 a 11 en la última Fig. (4.10), incrementando en 1 por cada cuadro. También en estas figuras $k = 0.7$, excepto en la Fig. (4.9),

donde $k = 0.5$; $\sigma_0 = 1$, y $k_y = 2/\sigma_0$. Con estas gráficas podemos apreciar la dinámica de la densidad de probabilidad con el tiempo de interacción. En base a estos resultados se han creado videos donde se puede visualizar el comportamiento apreciado aquí con más detalle según crece el parámetro temporal [418].

Específicamente para calcular p_{yz} suponemos que el tiempo de vuelo es el mismo que el tiempo de interacción τ . El tiempo de vuelo está directamente involucrado en p_y gracias a la inclusión del término de momento que depende de k_y en las Ec. (4.75) y Ec. (4.79), sin embargo no separamos éste del tiempo de interacción al aplicar la evolución de la Ec. (4.73).

Mientras más tiempo pasa la partícula en el interior del aparato, interactuando con el campo magnético, mayor es la separación entre las distribuciones de probabilidad correspondientes a cada uno de los estados de espín, y mejor podemos distinguir el valor correspondiente al espín al medir la posición de las partículas en la pantalla. Esto indica hacia la existencia de correlaciones entre las dos propiedades, que proviene del enredamiento entre la posición en z y el espín de la Ec. (4.77). Estas correlaciones se hacen más fuertes conforme el tiempo incrementa. Las figuras presentadas aquí permiten visualizar el efecto que tiene lugar en el SGE, que es a la vez cuántico en naturaleza y surge de la descripción explícita de la evolución de una partícula en el aparato, por lo tanto, permitiendo un vistazo a las propiedades cuánticas del experimento.

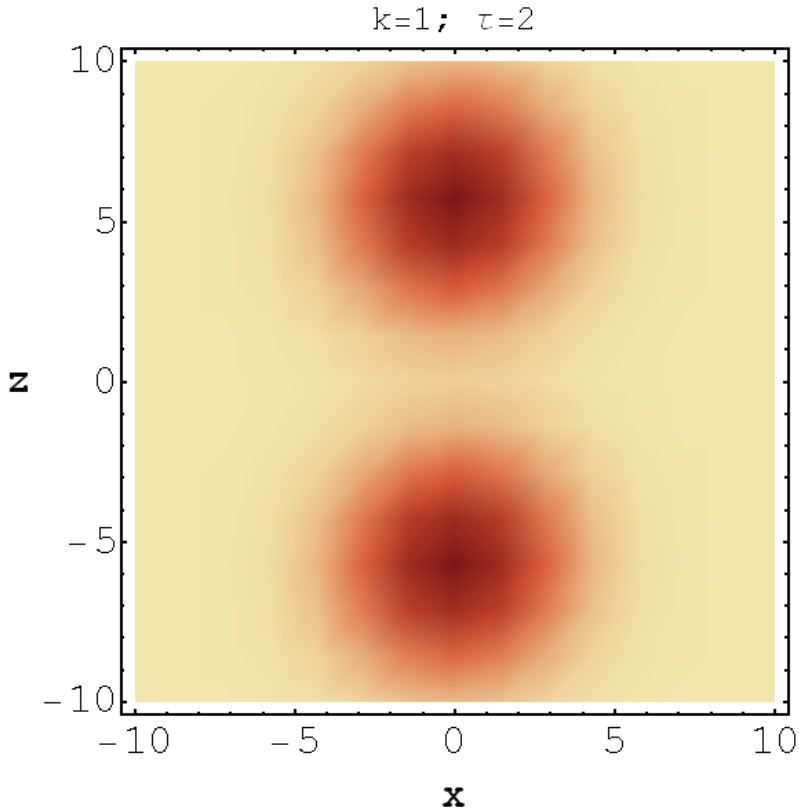


Figura 4.7: Densidad de probabilidad para el estado evolucionado del SGE en el plano $x-z$ de la Ec. (4.84) para $\tau = 2$ y $k = 1$. El punto superior consiste de resultados con espín $+$, y el inferior de aquellos con espín $-$. La división de las distribuciones para cada valor del espín es característica del SGE y está íntimamente relacionada con sus propiedades de creación de enredamiento.

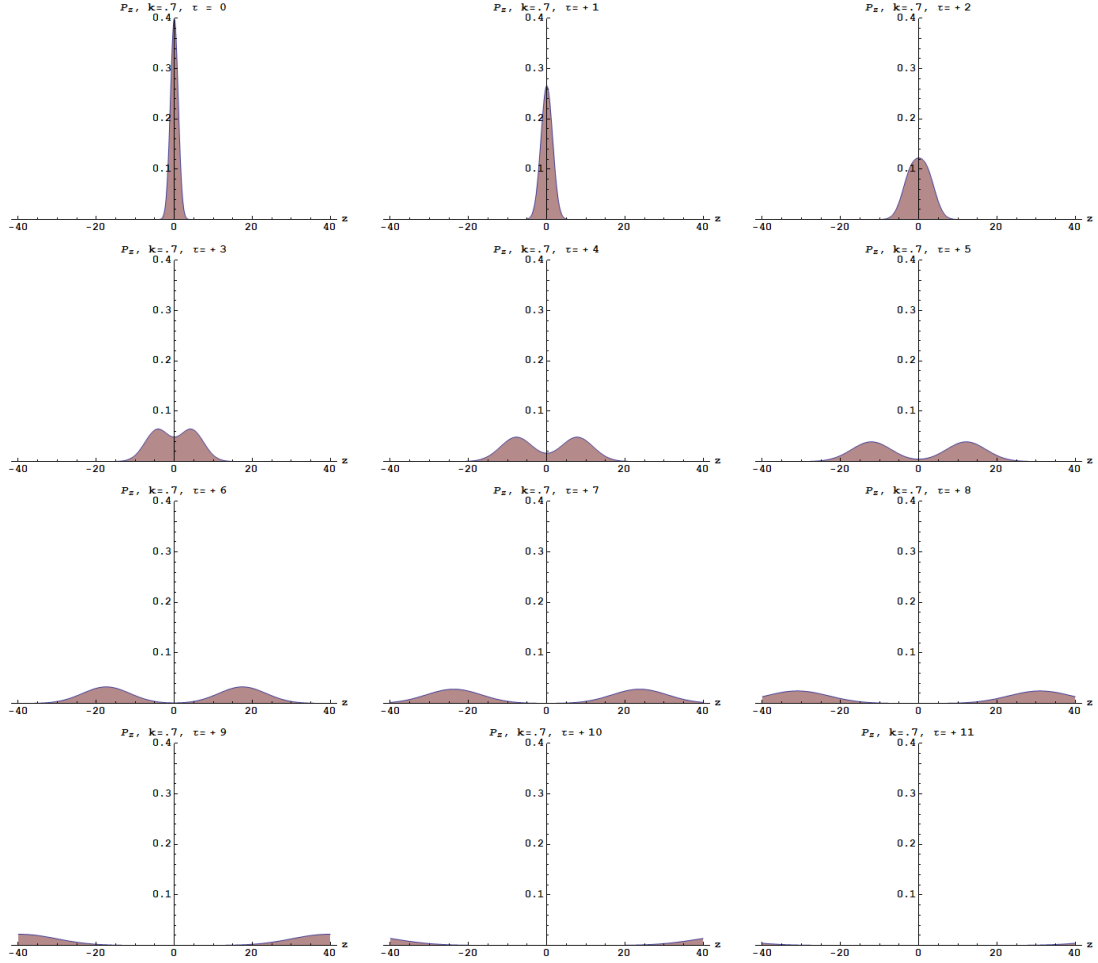


Figura 4.8: Densidad de probabilidad del estado evolucionado del SGE en z , descrita por la Ec. (4.83), para $k = 0.7$ y $\tau = 0, 1, \dots, 11$ (incrementando de arriba a abajo y de izquierda a derecha). La separación de las dos distintas contribuciones correspondientes a los diferentes estados de espín es generada por la interacción con el campo del SGE. Se observa claramente cómo esta incrementa con el tiempo de interacción τ . Así mismo, podemos ver el cambio en la forma de la distribución de probabilidad debido al incremento del ancho efectivo del paquete de ondas con la evolución, aparente en las Ecs. (4.78) a (4.80).

El Experimento de Stern-Gerlach

4.2 Descripción completamente cuántica del SGE

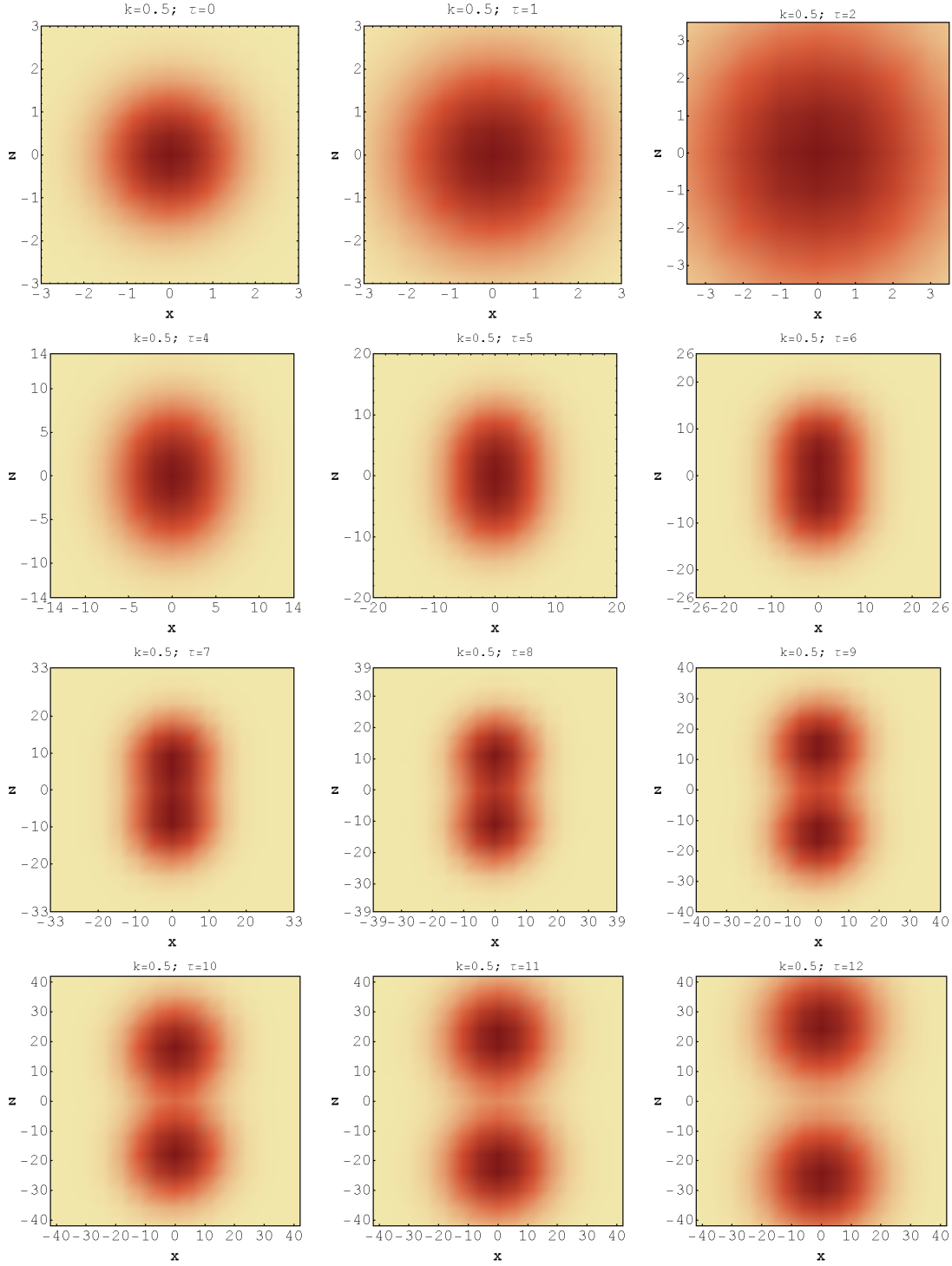


Figura 4.9: Densidad de probabilidad del SGE en el plano $x-z$, Ec. (4.84), para $k = 0.5$ y $\tau = 0, 1, 2, 4, \dots, 12$ (incrementando de arriba a abajo y de izquierda a derecha). Nótese el cambio de escala en el gradiente. Podemos observar el mismo comportamiento de la densidad de probabilidad en z , Fig(Fig. (4.8)), pero ahora en el plano $x - z$. La densidad de probabilidad en dirección x sólo cambia con el tiempo de interacción en la dispersión que experimenta el paquete de ondas.

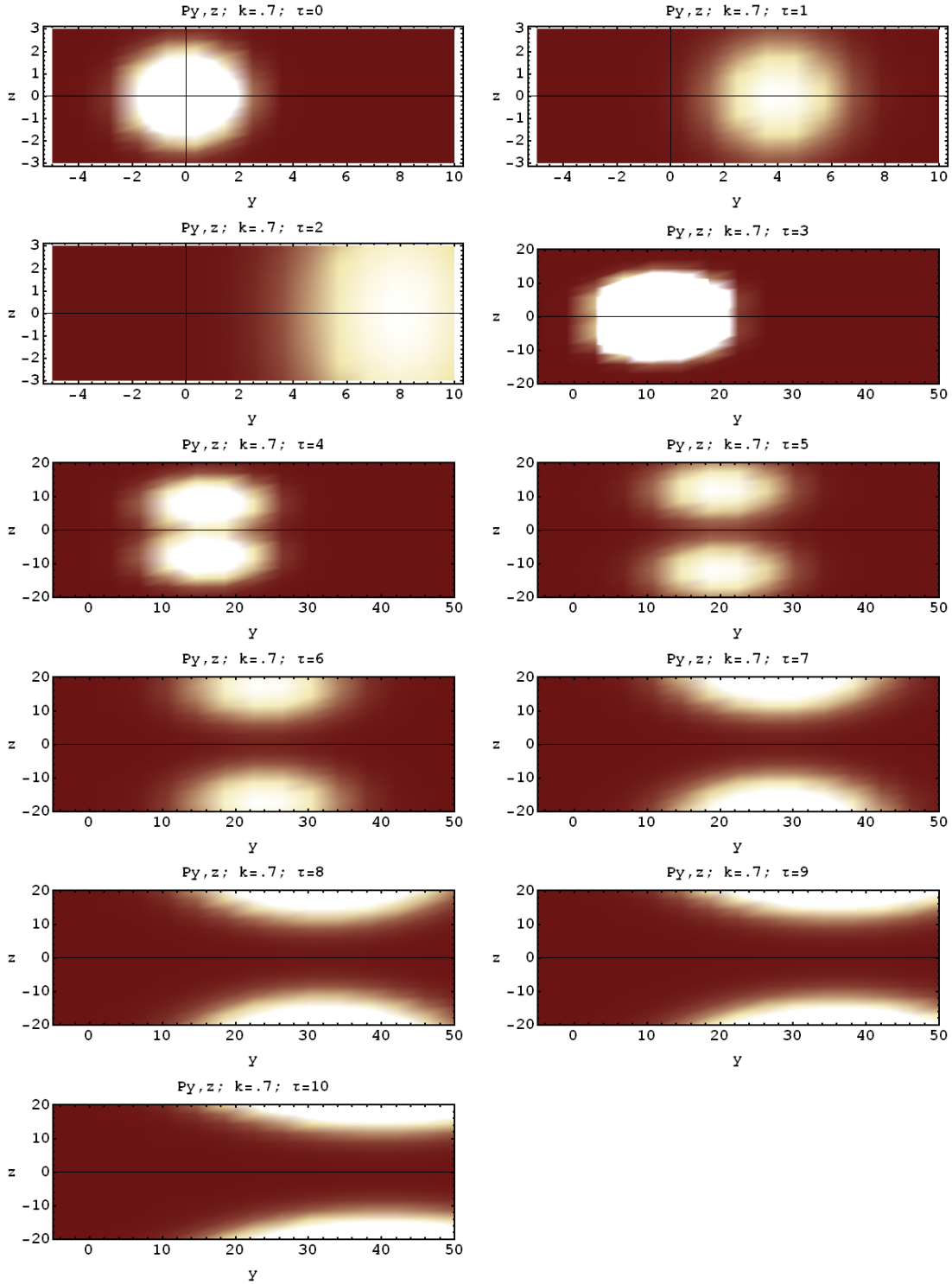


Figura 4.10: Densidad de probabilidad del SGE en el plano $y - z$, Ec. (4.85), con $k_y = 2/\sigma_0 = 2$ y para $k = 0.7$ y $\tau = 0, 1, \dots, 10$ (incrementando de arriba a abajo y de izquierda a derecha). Nótese el cambio de escala en el gradiente. A diferencia de las figuras anteriores, aquí podemos apreciar la velocidad de grupo en y , y los efectos que ésta tiene en el paquete de ondas inicial debidos a la parte libre de la evolución, Ec. (4.73).

4.3. Conclusiones

En este capítulo se ha revisado al experimento de Stern-Gerlach. La descripción semiclásica del SGE ha sido históricamente usada para explorar temas diversos, como son la medición cuántica y la no-conmutatividad del espín, además de estar entre las bases de la discusión referente a la existencia y propiedades del espín. Se presentó esta descripción semiclásica y se analizó su consistencia con los resultados experimentales del SGE, presentando así también las discusiones de la naturaleza de la mecánica cuántica que surgieron con el experimento.

Como preámbulo a la derivación se discute el campo magnético considerado usualmente al tratar el SGE, el cual determina el Hamiltoniano del cual se desprende la evolución anterior. Discutimos las aproximaciones realizadas que permiten observar el efecto del SGE en nuestra evolución, así como los efectos que tiene la geometría del campo magnético en los resultados experimentales, explicando las observaciones experimentales. También aquí se presentan los diversos métodos existentes para obtener la evolución del SGE a partir de considerar los estados de espín independientes, haciendo al mismo tiempo una comparación con el estado que obtenemos al resolver la evolución cuántica del experimento.

El resto de este capítulo concierne al estudio de la evolución cuántica en el SGE. En primer lugar nos ocupamos de derivar tal evolución. El método del operador de evolución nos permite encontrar el estado evolucionado del SGE a partir de un estado inicial puro del sistema compuesto de espín y posición gracias al método de factorización. Este es el estado que usaremos para el estudio de las propiedades cuánticas del SGE en el resto de esta tesis. En particular, podemos ya apreciar el enredamiento híbrido presente entre el estado del subsistema de posición y el de espín en la no-separabilidad del estado evolucionado.

Para cerrar este capítulo, se obtiene la densidad de probabilidad del estado evolucionado encontrado en los diferentes planos de interés, con lo que podemos apreciar la separación de los puntos de acumulación en la pantalla. El efecto de la interacción en el aparato de Stern-Gerlach sobre el resultado observado lo podemos visualizar al graficar esta densidad de probabilidad como función del tiempo de interacción. Por otro lado, esto permite apreciar las características del paquete de ondas en su evolución, como son su forma Gaussiana, la dispersión ocasionada por la evolución, y también el efecto de la evolución libre en la componente y . Por último, remarcamos que la existencia de dos puntos de acumulación discernibles señala al establecimiento de enredamiento y la existencia de correlaciones perfectas en el SGE, lo que será el tópico principal de la discusión en los capítulos siguientes.

Capítulo 5

No Localidad del SGE

Las correlaciones cuánticas de los sistemas se relacionan cercanamente con una variedad de propiedades cuánticas. Es importante tener una idea de qué tan no clásico es un sistema cuántico, ya que estas propiedades permiten realizar tareas cuánticas, centrales en los campos de información cuántica y comunicación cuántica, además de su importante rol en el desarrollo de los fundamentos de la mecánica cuántica. Es relevante entre estas propiedades la no localidad, tanto como un recurso cuántico en su propio derecho como una propiedad que señala a la no-clasicidad de los sistemas cuánticos. Son las extraordinarias capacidades que presenta el SGE para generar correlaciones cuánticas lo que permite observar la separación en la medición de la posición.

Históricamente, al tratar de las características cuánticas de los sistemas en un principio nos encontramos con la paradoja **EPR** [69] y la idea de la llamada “acción a distancia” que se manifiesta de la presencia de correlaciones cuánticas, como discutimos en el Capítulo 1. Gracias a la propuesta de teorías de variables ocultas hecha en [69], es decir, la caracterización de las propias correlaciones posibles en un sistema clásico, y las propiedades requeridas de un sistema clásico, tenemos la primera característica definitoria de las correlaciones cuánticas. Esta fue desarrollada por Bell en [68, 75], aquí encontramos que las ideas de determinismo y realismo clásico corresponden a la localidad. Por lo tanto, la no localidad define un tipo de correlaciones cuánticas. Más recientemente, encontramos que la no localidad representa un recurso cuántico, de manera similar al enredamiento, permitiendo la realización de tareas propiamente no clásicas [29, 40, 419–422]. Además, la no localidad no es equivalente al propio enredamiento [305, 306]. De esta manera, la no localidad representa una importante característica y propiedad que señala a la naturaleza propiamente cuántica, distinguible de las propiedades clásicas, de los sistemas cuánticos.

El trabajo presentado aquí ha sido publicado en [3], donde nos ocupamos precisamente con el estudio de las correlaciones entre los grados de libertad internos y externos presentes en el experimento de Stern-Gerlach. La naturaleza cuántica de estas correlaciones es preeminente. De esta manera, la no localidad cuántica del experimento de Stern-Gerlach, no presentada anteriormente, es revelada.

Basándonos en el resultado de la Ec. (4.77), obtenemos una expresión analítica de la función de correlación cuántica en el espacio fase, que es, a la vez, obtenida redefiniendo la función de correlación de Banaszek-Wódkiewicz [423, 424]. Estudiamos esta función de correlación usando el teorema de Bell, visualizando la violación de la desigualdad de Bell de parte de las correlaciones del experimento, que es la manifestación inequívoca de la no localidad. Así investigamos la creación de correlaciones cuánticas del experimento de Stern-Gerlach, y por tanto su propia naturaleza cuántica.

5.1. El teorema de Bell

La llamada paradoja **EPR** fue presentada por Einstein, Podolsky y Rosen en 1935 [69]. En este artículo se argumenta que bajo los conceptos de realismo y determinismo clásicos la teoría cuántica no es una teoría completa, en el sentido de que cada elemento de la realidad física tenga una contraparte en la teoría. El experimento pensado que proponen aquí ha sido ampliamente discutido en la literatura. Como solución, en [69] proponen suplementar la teoría cuántica mediante la inclusión de variables ocultas, que no se pueden conocer pero predeterminan el resultado de las mediciones que se realizan sobre el sistema.

En 1964 Bell analiza las teorías de variables ocultas [68, 75], y muestra que las teorías de variables ocultas locales no pueden reproducir las correlaciones que se encuentran en la teoría cuántica. La desigualdad que presentó en [68], conocida como desigualdad de Bell, nos permite probar las teorías de variables ocultas locales mediante las correlaciones que predicen, contra aquellas predichas en la teoría cuántica. De esta manera, si las correlaciones presentes en una teoría cuántica no cumplen con esta desigualdad, no es posible describirlas con una teoría de variables ocultas local y se dice que es *no local*.

En 1969, Clauser, Horne, Shimony y Holt generalizaron esta desigualdad en el *teorema de CHSH* [197], Sec. (1.2.3), haciéndola susceptible de ser probada experimentalmente. Particularmente, consideran la suposición de muestreo justo y la posibilidad de tener correlaciones que no son perfectas. La desigualdad generalizada es

$$|P(a, b) - P(a, b')| + P(a', b) + P(a', b') \leq 2 \quad (5.1)$$

donde P es la función de correlación con la que se cuantifican las correlaciones, que son propiamente clásicas, presentes entre las dos variables del sistema, y las dos observables del sistema, $\hat{A}$ y $\hat{B}$, pueden tener dos resultados, a y a' , y b y b' , respectivamente. De esta manera, las funciones de correlación P de una teoría que cumple con los requerimientos clásicos, y por tanto predice únicamente correlaciones clásicas, necesariamente cumple con la Ec. (5.1). Esta es la desigualdad que usaremos para analizar el SGE. El resultado de [197] fue generalizado para sistemas compuestos por un número general de subsistemas, independientemente en [425–427] y [428], el teorema resultante es llamado de *Bell-Klyshko*.

El teorema de Bell, además de definir la existencia de la no localidad y relacionarla directamente con las correlaciones de un sistema, nos indica cómo encontrarla y caracterizarla en un sistema. Con esto se ha definido el operador de Bell, $\mathbf{B}$, cuyo valor esperado es función de la llamada función de correlación, C , que cuantifica las correlaciones en los resultados de las observables locales:

$$B = \langle \mathbf{B} \rangle = C(a', b') + C_z(a', b) + C(a, b') - C(a, b). \quad (5.2)$$

La función de correlación entonces permite caracterizar la no localidad de un sistema. La desigualdad de Bell, Ec. (5.1), indica que para una teoría con correlaciones clásicas, las correlaciones deben cumplir $|B| \leq 2$, por lo que un operador $\mathbf{B}$ que viole tal límite necesariamente indica la presencia de no localidad en un sistema cuántico.

5.2. La función de correlación

El teorema de Bell, como aparece en la Ec. (5.1), fue desarrollado para variables discretas, en particular para sistemas de espín. Su aplicación por lo tanto requiere que las observaciones locales de cada operador, $\hat{A}$ y $\hat{B}$, tengan únicamente dos posibles resultados, es decir, sean dicotómicas.

Cuando consideramos estados continuos, tenemos que se han desarrollado importantes resultados permitiendo la dicotomización de las observables locales y por lo tanto la aplicación del teorema de Bell [423, 424, 429, 430]. En particular, la función de correlación de Banaszek-Wódkiewicz usa al operador de Wigner como el operador que da la medición local de la posición, siendo que esta

corresponde con una representación del operador de paridad [431–434]. Esta función de correlación fue usada para la descripción de estados comprimidos de dos modos (*two-mode squeezed states*) [423, 435] y estados gatos de Schrödinger, que son descritos como estados híbridos [424].

Por otro lado, en [429, 430] definen un operador de Bell usando operadores de pseudo-espín en lugar de operadores de paridad para dar la dicotomización del espacio continuo. Estos operadores son complicados de realizar experimentalmente, pero permiten una violación máxima de la desigualdad de Bell para estados tipo **EPR**, que corresponde a un estado máximamente enredado similar al del experimento de Bohm, Sec. (1.2.3).

Proponemos mediciones locales de la posición y el espín, con las que se harían patentes las correlaciones existentes entre estas observables al comparar los resultados obtenidos. Tal medición la describimos por el operador

$$\hat{C}(z, p, \theta) = \hat{W}(z, p) \otimes \hat{\sigma}(\theta), \quad (5.3)$$

donde tenemos el operador de Pauli, $\hat{\sigma}$, en una dirección arbitraria, θ , actuando sobre el espín; y el operador de Wigner, $\hat{W}$, que nos da la medición dicotómica sobre la posición. El operador de Wigner lo definimos según [434, 436], como

$$W(z, p) = \langle \Psi | \hat{W}(z, p) | \Psi \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \Psi^* \left(z + \frac{1}{2}q \right) \exp \left(-\frac{iqp}{\hbar} \right) \Psi \left(z - \frac{1}{2}q \right) dq \quad (5.4)$$

El factor de 1/2 lo derivamos del operador de paridad definido en [434],

$$\Pi_{rp} = \int e^{-\frac{2ips}{\hbar}} |r - s\rangle \langle r + s| ds, \quad (5.5)$$

lo que con la definición de la Ec. (5.4) lleva a $\hat{W}^2(z, p_z) = 1$.

Finalmente, proponemos una función de correlación que nos cuantifica las correlaciones entre posición y espín como el valor esperado del operador $\hat{C}$,

$$C(z, \theta) = \langle \Psi | \hat{C}(z, p, \theta) | \Psi \rangle. \quad (5.6)$$

Para el estado final del SGE de la Ec. (4.77), tenemos que esta función de correlación toma la forma

$$\begin{aligned} C(z, \theta) = & \frac{\cos \theta}{2} \left(\exp \left\{ -\frac{\sigma_0^2 \left(z + \frac{t^2 \mu_c b}{2m} \right)^2}{2 \left(\sigma_0^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \right)} - \frac{2 \left(\sigma_0^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \right)}{\sigma_0^2} \left[\frac{p_z}{\hbar} + \frac{t \mu_c b}{\hbar} - \frac{\hbar t}{4m} \frac{\left(z + \frac{t^2 \mu_c b}{2m} \right)^2}{\left(\sigma_0^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \right)} \right]^2 \right\} \right. \\ & \left. - \exp \left\{ -\frac{\sigma_0^2 \left(z - \frac{t^2 \mu_c b}{2m} \right)^2}{2 \left(\sigma_0^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \right)} - \frac{2 \left(\sigma_0^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \right)}{\sigma_0^2} \left[\frac{p_z}{\hbar} - \frac{t \mu_c b}{\hbar} - \frac{\hbar t}{4m} \frac{\left(z - \frac{t^2 \mu_c b}{2m} \right)^2}{\left(\sigma_0^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \right)} \right]^2 \right\} \right) \\ & + \sin \theta \exp \left[-\frac{\sigma_0^2 z^2}{2 \left(\sigma_0^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \right)} - \frac{2 \left(\sigma_0^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \right)}{\sigma_0^2} \left(\frac{p_z}{\hbar} - \frac{\hbar t z}{4m \left(\sigma_0^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \right)} \right)^2 \right] \\ & \cos \left[-\frac{2t \mu_c}{\hbar} (B_0 + bz) + \frac{\hbar t^3 \mu_c b z}{4m^2 \left(\sigma_0^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \right)} + \frac{t^2 \mu_c b}{m} \left(\frac{p_z}{\hbar} - \frac{\hbar t z}{4m \left(\sigma_0^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \right)} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

La Ec. (5.7) depende de seis parámetros: el tiempo, t , la posición z , la intensidad de la inhomogeneidad del campo magnético, b , el momento p_z , la anchura inicial del paquete de ondas, σ_0 , y el ángulo de la medición del espín, θ .

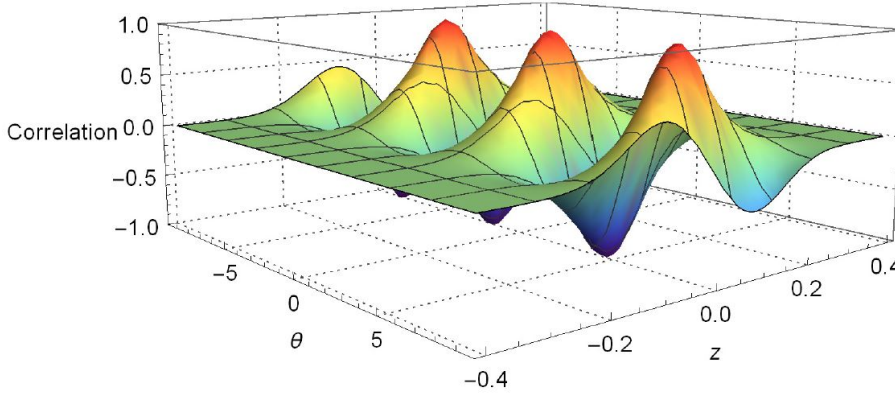


Figura 5.1: Función de correlación de Banaszek-Wódkiewicz para el estado evolucionado del SGE obtenido en la Ec. (5.7). Para graficar la función de correlación consideramos p_z como una constante, tomando aquí $p_z = 0.01$, y fijamos los parámetros $\pi\hbar = 1$ y $m = 1$. Para esta figura hacemos $\sigma_0 = 0.005$, $\mu_c b/2 = 2.2$ y $t = 0.2$ [3]. Esta función cuantifica las correlaciones entre z y θ existentes en el estado evolucionado del SGE, Ec. (4.77). Podemos apreciar su comportamiento oscilatorio tanto en θ como en z , así como el decaimiento que sufre conforme z aumenta.

Notamos que esta función tiene un comportamiento oscilatorio, tanto en la posición y el momento, como en el espín, determinado por θ . Además, esta es una función amortiguada en la posición y el momento, siendo que las oscilaciones respecto a z decaen cuando aumenta z . La función de correlación tiene un comportamiento similar respecto a p_z . Esta ecuación nos da la evolución temporal de las correlaciones en el SGE, dependiendo del tiempo de interacción con el campo magnético, t . En la Fig. (5.1) graficamos la función de correlación, Ec. (5.7), y podemos apreciar el comportamiento discutido. En esta Fig. (5.1) consideramos p_z como una constante, escogiendo $p_z = 0.01$. Así mismo, fijamos $\pi\hbar = 1$, $m = 1$, similar a como se considera en [406, 437]. Los valores del resto de los parámetros usados para graficar la correlación son $\sigma_0 = 0.005$, $\mu_c b/2 = 2.2$ y $t = 0.2$.

Más aún, la Ec. (5.7) tiene dos términos con estructuras distintas. El primer término contiene dos funciones de Wigner, hasta un factor multiplicativo de $\pi\hbar$, desplazadas por un parámetro $D = \frac{t^2 \mu_c b}{2m}$. Estas funciones se mueven en direcciones opuestas en el espacio de posición, con velocidad proporcional a $\mu_c b/\hbar$. Por otro lado, el segundo término incluye un factor coseno, el que es responsable por las oscilaciones que observamos. La función de correlación, Ec. (5.7), puede ser escrita de una manera similar a la función de correlación del estado *gato de Schrödinger* de [424], de manera que se mantienen las mismas conclusiones presentadas allí sobre el desplazamiento D .

La negatividad de la función de Wigner para este estado es aparente, lo que se asocia comúnmente con el comportamiento no clásico de los sistemas. Es interesante preguntarnos si tal interpretación es consistente con la presencia del espín en los sistemas híbridos. Este problema está asociado con aquel de la definición de la función de Wigner para espacios de Hilbert finitos [438–441].

5.3. La no localidad del SGE

Una vez que tenemos la función de correlación cuantificando las correlaciones en el SGE, podemos analizar estas correlaciones usando la desigualdad de Bell para investigar la no localidad. Recordemos que una violación a la desigualdad de Bell indica que un modelo de variables ocultas local no puede describir las correlaciones predichas por la mecánica cuántica para este experimento. Para esto definimos una función de correlación que nos cuantifica únicamente las correlaciones entre z y θ , fijando p a un valor de 0.01 en la Ec. (5.7). De esta manera nos interesa analizar si

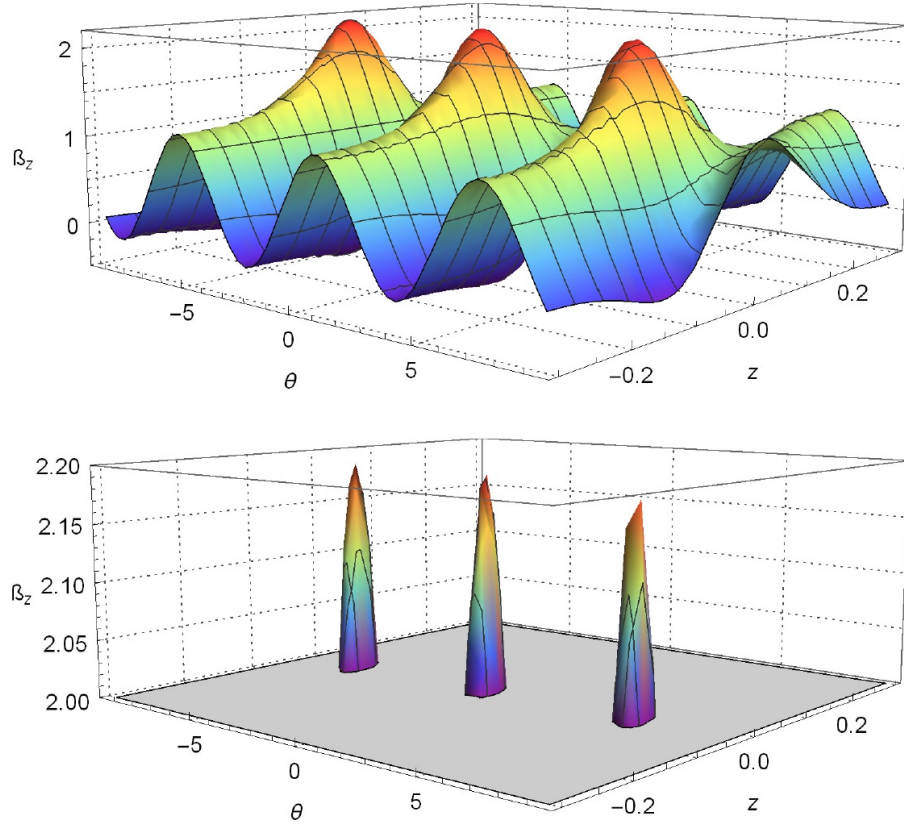


Figura 5.2: **Arriba:** Valor esperado del operador de Bell para el SGE de la Ec. (5.10) con $z' = 0.08$ y $\theta' = \pi/2$; tomando nuevamente para encontrar las correlaciones entre z y θ , $p_z = 0.01$, y fijamos los parámetros $\pi\hbar = 1$ y $m = 1$. Para esta figura hacemos $\sigma_0 = 0.005$, $\mu_c b/2 = 2.2$ y $t = 0.2$ [3]. **Abajo:** Acercamiento a la violación de la desigualdad de Bell. Los puntos donde B_z toma valores superiores a 2 indican violación de la desigualdad de Bell, Ec. (5.9), y señalan la presencia de no localidad en el SGE. [3]

la función B_z de la Ec. (5.2) cumple con la desigualdad de Bell, es decir, si toma siempre valores menores que 2.

Así, consideremos nuevamente las correlaciones entre z y θ , dadas como

$$C_z(z, \theta) = C(z, p = cte, \theta), \quad (5.8)$$

con $C(z, \theta)$ de la Ec. (5.7). De esta manera tenemos la desigualdad de Bell,

$$-2 \leq C_z(z', \theta') + C_z(z', \theta) + C_z(z, \theta') - C_z(z, \theta) \leq 2, \quad (5.9)$$

y el valor esperado del operador de Bell es

$$B_z = \langle \mathbf{B}_z \rangle = C_z(z', \theta') + C_z(z', \theta) + C_z(z, \theta') - C_z(z, \theta). \quad (5.10)$$

Graficando la función B_z que aparece en la ecuación anterior, Ec. (5.10), con las correlaciones del SGE, Ec. (5.7), encontramos regiones donde se presenta violación de la desigualdad de Bell. En la Fig. (5.2) graficamos esta función B_z con $p = 0.01$ en Ec. (5.8) y $\pi\hbar = 1$ y $m = 1$; $\sigma_0 = 0.005$, $\mu_c b/2 = 2.2$ y $t = 0.2$ [3]. Podemos apreciar las regiones donde existe violación de la desigualdad de Bell de la Ec. (5.9), en las que B_z toma valores mayores que 2. De aquí concluimos la presencia

de no localidad en el SGE.

5.4. Resultados

Aplicamos una redefinición a la función de correlación Banaszek-Wódkiewicz al estado obtenido para la evolución completamente cuántica del SGE de [1, 2] que incluye una variable discreta y una continua. La función obtenida es $C(z, \theta) = \langle \hat{W}(z, p_z) \hat{\sigma}(\theta) \rangle$, Ecs. (5.6) y (5.7). De esta manera, podemos caracterizar las correlaciones creadas por el SGE. Gracias al teorema de Bell, podemos encontrar que estas correlaciones son cuánticas, presentando no localidad. Graficando la función B_z de la Ec. (5.10), Fig. (5.2), podemos visualizar la violación de la desigualdad de Bell en términos de los parámetros de las mediciones.

Además, se puede estudiar el comportamiento del operador de Bell indicando la dependencia de la no localidad en los parámetros del experimento, así mismo podemos estudiar el comportamiento de las correlaciones gracias a la función de correlación C , de manera que vemos cómo el SGE crea las correlaciones cuánticas. En este trabajo visualizamos ambos comportamientos.

5.5. Conclusiones

En este capítulo se analizaron las correlaciones cuánticas del Experimento de Stern-Gerlach, y probamos la existencia de no localidad en el experimento usando el teorema de Bell.

Los resultados presentados anteriormente en este capítulo fueron publicados en Piceno Martínez *et al.* [3].

En el Capítulo 1 se discutió la naturaleza cuántica y las propiedades cuánticas de las correlaciones existentes en los sistemas cuánticos. El enredamiento cuántico fue inicialmente identificado como la presencia de correlaciones con comportamientos contradictorios a la teoría clásica. Sin embargo, es la no localidad la que se deriva directamente de la presencia de correlaciones cuánticas, del tipo que son incompatibles con la descripción clásica propuesta por Einstein, Podolsky y Rosen [69]. La propiedad cuántica que estamos observando en estas correlaciones es la no localidad. Esta característica, al estar relacionada con correlaciones, representa un recurso cuántico de la misma manera que el enredamiento. La no localidad puede ser usada al estar presente en un sistema para hacer posible la realización de ciertas tareas en sistemas cuánticos.

El teorema de Bell permite discernir la existencia de no localidad en el estado de un sistema cuántico como la violación de la desigualdad de Bell por parte de las correlaciones presentes entre las observables del sistema. En este capítulo usamos la acepción usual de la desigualdad de Bell, que es la desigualdad de CHSH [197], la cual es adaptada para probar la presencia de no localidad en el SGE. La desigualdad de CHSH fue derivada para su uso en variables dicotómicas, propias de sistemas discretos. El operador de paridad permite definir funciones de correlación, las cuales caracterizan las correlaciones en un sistema cuántico, para sistemas continuos que son dicotómicas, dividiendo el espacio de tales variables de una manera natural. Con esto se puede definir una función híbrida de correlación en la que el operador de paridad define la medición de la variable continua. En la función de correlación de Banaszek-Wódkiewicz [423, 424] tenemos la otra observable del sistema híbrido como un operador de espín, dando la medición del grado de libertad interno del sistema.

La función de correlación definida de esta manera es usada para cuantificar las correlaciones presentes en la evolución cuántica del estado del SGE. Se analizan las propiedades de la función de correlación obtenida así, particularmente su comportamiento con las variables z , p_z y θ , donde θ es la dirección de la medición del espín.

Con esta función de correlación se construye el operador de Bell del estado del SGE, para el cual se busca analizar la relación que ocurre en la desigualdad de Bell. De esta manera se encontró violación de la desigualdad de Bell, demostrando la existencia de no localidad en el SGE. También es posible visualizar el comportamiento del operador de Bell, y, por lo tanto, de la no localidad del

experimento, en el espacio de variables y con los parámetros de la evolución en el SGE dictados por la interacción con el campo.

En el Capítulo 6 a continuación se seguirán tratando las correlaciones del SGE con las que ya nos hemos podido familiarizar y se estudiará su carácter cuántico al describir el enredamiento presente en la evolución del SGE.

Capítulo 6

El Enredamiento Híbrido del SGE

Este capítulo está dedicado a la cuantificación y análisis del enredamiento híbrido presente en el estado evolucionado del SGE. Aquí se aplicarán los dos métodos de discretización que hemos estudiado en el Capítulo 3 a la inseparabilidad del estado cuántico del átomo que viaja a través del SGE, la cual fue observada al describir el experimento cuánticamente en el Capítulo 4. Con esto es posible la utilización de medidas de enredamiento discretas para la cuantificación del enredamiento híbrido, en particular, se aplican la entropía de enredamiento y la concurrencia, revisadas en el Capítulo 2. Se continuará explorando las características cuánticas del experimento de Stern-Gerlach; el enredamiento atestiguado por estas medidas muestra un completo acuerdo con las propiedades fenomenológicas del experimento, así como las propiedades altamente no clásicas descritas en el Capítulo 5. La entropía de enredamiento y la concurrencia permiten además analizar a fondo las características del enredamiento del SGE, lo que en particular permite analizar los límites físicos de la descripción del experimento y de la cuantificación del enredamiento. Se concluye con una comparación de los dos métodos de discretización, que nos dejan asentar su validez como herramientas para la cuantificación del enredamiento híbrido.

6.1. El método de discretización

En el caso en el que es posible escribir un estado híbrido como una superposición finita de estados producto (entre un estado discreto y uno continuo), el enredamiento presente puede describirse usando herramientas puramente discretas [51].

El espacio en el que viven tales estados se puede ver como un subespacio de dimensión finita del espacio de Hilbert original híbrido, generado por los modos continuos del espacio híbrido [51], Sec. (3.2.1). Este espacio es $H_{(N \times d)}$, con N el número de términos en la superposición de la Ec. (3.1) y d la dimensión del subsistema discreto. De esta manera, podemos escribir al estado híbrido usando vectores base del espacio efectivo (finito), con lo que obtenemos la forma discreta efectiva del estado híbrido. En [51], Kreis y van Loock presentan un método que permite aplicar el proceso de Gram-Schmidt inverso con el que podemos encontrar una base ortonormal del espacio efectivo a partir de los modos continuos del estado híbrido y así escribir a este último usando una base discreta. Así mismo, presentan la expresión explícita de un estado tal general expresado con la base resultante. Esta descripción del estado es equivalente a su forma usual.

El teorema 2 en [51], en su prueba, nos dice cómo encontrar explícitamente los coeficientes de esta forma discreta efectiva para un número general de estados continuos relevantes usando los solapamientos entre éstos. Considérese un estado híbrido definido como en [51], de los subsistemas

discreto A , de dimensión d , y continuo B , Ecs. (3.1) y (3.2):

$$\rho^{AB} = \sum_{n=1}^N p_n |\psi_n\rangle_{AB} \langle \psi_n|, \quad p_n > 0 \quad \forall n; \quad \sum_{n=1}^N p_n = 1, \quad (6.1)$$

$$|\psi_n\rangle = \sum_{m=0}^{d-1} c_{nm} |m\rangle^A |\psi_{nm}\rangle^B, \quad (6.2)$$

$$c_{nm} \in \mathbb{C} \quad \forall n, m; \quad \sum_{m=0}^{d-1} |c_{nm}|^2 = 1.$$

Cuando N es finito se tiene un número finito, l , de estados continuos $|\psi_{nm}^B\rangle$, con un cambio de índices llámenseles $|\psi_i\rangle$. Usando el método de Gram-Schmidt inverso estos estados se pueden expresar como

$$|\psi_i\rangle = \sum_{j=i}^l a_{ij} |e_j\rangle, \quad (6.3)$$

donde $\{|e_i\rangle : i = 1, \dots, l\}$ es una base ortonormal del subespacio generado por $|\psi_i\rangle$. Según [51], se encuentran estos coeficientes, que serán una parte fundamental de la descripción discreta del estado híbrido, calculando los solapamientos:

$$\langle \psi_i | \psi_n \rangle = \sum_{j=1}^l a_{ij}^* a_{nj},$$

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle = \sum_{j=1}^l |a_{nj}|^2. \quad (6.4)$$

6.1.1. Descripción del estado híbrido

El estado final enredado en el SGE se puede escribir como una superposición de dos estados híbridos, como se vió en la Ec. (4.77). En [3] expresamos el estado final cuántico puro evolucionando en el SGE de una manera que permite apreciar el enredamiento presente entre el espín y la posición en dirección z . El estado de las Ecs. (4.77) a (4.80) se escribe así como

$$|\psi(t)\rangle = c_0(x, y, t) \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_+(t)\rangle|+\rangle + |\psi_-(t)\rangle|-\rangle), \quad (6.5)$$

con

$$c_0(x, y, t) = \exp\left(\frac{5it^3\mu_c^2b^2}{6m\hbar}\right) \left[\frac{\sigma_0}{(2\pi)^{1/2}}\right] \left(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar t}{2m}\right)^{-1} \exp(-\sigma_0^2 k_y^2)$$

$$\exp\left[\frac{4iy\sigma_0^2 k_y}{4(\sigma_0^2 + i\hbar/2m)}\right] \exp\left[-\frac{x^2 + y^2 - 4\sigma_0^4 k_y^2}{4(\sigma_0^2 + i\hbar/2m)}\right]. \quad (6.6)$$

En el resto de este capítulo se usarán los parámetros adimensionales de la Ec. (4.82), que nos dan un reescalamiento apropiado del tiempo y de la intensidad de la inhomogeneidad del campo,

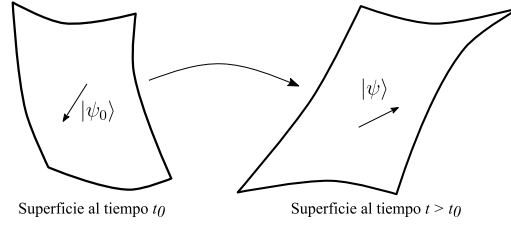


Figura 6.1: El subespacio del espacio continuo al estar determinado por ψ_+, ψ_- cambia con el tiempo, evolucionando así al estado del SGE que está completamente contenido en esta superficie, descrito por la Ec. (6.8).

y por tanto, una parametrización de la interacción:

$$\begin{aligned} \tau &:= \frac{\hbar t}{2\sigma_0^2 m}, \\ k &:= \sqrt{2}\sigma_0 \left(\frac{\mu_c b m}{2\hbar^2} \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

6.1.2. El estado discreto del SGE

En el caso del SGE, los estados continuos que intervienen en la descripción del estado son dos, $|\psi_{\pm}\rangle$ de la Ec. (4.80), siendo la Ec. (6.5) una superposición de dos estados híbridos puros. De esta manera el estado del SGE lo describimos por la Ec. (6.1) con $N = 2$ y $d = 2$ la dimensión del subsistema de espín, y los estados discretos $|m\rangle \rightarrow |+\rangle, |-\rangle$ de arriba, Ec. (6.5).

Aplicando el método descrito en esta sección, encontramos que el estado del SGE, Ec. (6.5), es equivalente a

$$|\psi(t)\rangle = c(x, y, t) \frac{1}{\sqrt{2}} [|e_+\rangle |+\rangle + (a_{21}(t) |e_+\rangle + a_{22}(t) |e_-\rangle) |-\rangle], \quad (6.8)$$

que corresponde a su forma discreta efectiva. En esta Ec. (6.8), el subespacio discreto efectivo correspondiente a la posición es de dimensión 2, con la base $\{|e_+\rangle = |\psi_+(t)\rangle, |e_-\rangle\}$,

$$|e_-\rangle = |\psi_-(t)\rangle - a_{21} |\psi_+(t)\rangle. \quad (6.9)$$

$|e_+\rangle$ y $|e_-\rangle$ son efectivamente los eigenestados de un subsistema discreto de dos niveles; estos dependen del tiempo gracias a su dependencia de $\psi_{\pm}(t)$, Ec. (4.80) y Fig. (6.1). Por último, los coeficientes que determinan el estado en la Ec. (6.3) son determinados por los solapamientos, Ec. (6.4),

$$a := a_{21} = \langle \psi_+ | \psi_- \rangle = \int \psi_+^*(z, t) \psi_-(z, t) dz = \exp \left[2\sqrt{2}ik^3 \tau \frac{B_0}{\sigma_0 b} \right] \exp \left[-k^6 (\tau^4 + 4\tau^2) \right], \quad (6.10)$$

$$a_- := a_{22} = \sqrt{1 - |a_{12}|^2}; \quad (6.11)$$

con, nuevamente, τ y k de la Ec. (6.7). Por conveniencia renombramos a estos coeficientes como a y a_- , respectivamente.

6.2. Aplicación de medidas discretas

En esta sección se utilizan los resultados de la discretización del estado híbrido del SGE de la Sec. (6.1) anterior, Ecs. (6.8) a (6.11), para analizar el enredamiento del SGE. Debido a que se obtiene un estado discreto el enredamiento que presenta este estado será discreto, pero efectivamente igual al enredamiento del estado original híbrido.

Particularmente, se aplican medidas de enredamiento discretas al estado de la Ec. (6.8). En el siguiente apartado, Sec. (6.2.1), se verá la aplicación de la concurrencia, y posteriormente, en la Sec. (6.2.2), de la entropía de enredamiento. Así mismo, se analizan las propiedades del enredamiento que estas medidas evidencian, una vez que se obtuvieron resultados para expresiones explícitas de estas medidas y su dependencia con la evolución del estado.

6.2.1. La concurrencia

Comenzaremos el estudio del enredamiento del SGE aplicando la concurrencia al estado de la Ec. (6.8). El estado que se obtuvo con el método de discretización es de un sistema bipartita de dos niveles. Para estos la base de los estados mágicos da una expresión compacta para la concurrencia [31, 33], Sec. (6.2.1),

$$C = \left| \sum_i \alpha_i \right|. \quad (6.12)$$

Los coeficientes α_i determinan al estado que nos ocupa en la base de estados mágicos $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$,

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^4 \alpha_i |i\rangle. \quad (6.13)$$

En el sistema de dos qubits resultante la base de los estados mágicos es una base para el sistema 4-dimensional completo, que se relaciona con las bases naturales de los subsistemas, $\{|e_+\rangle, |e_-\rangle\}$, $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, como sigue [31, 33]:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_+\rangle + |e_-\rangle) \\ |2\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(|e_+\rangle - |e_-\rangle) \\ |3\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(|e_+ - \rangle + |e_- + \rangle) \\ |4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_+ - \rangle - |e_- + \rangle). \end{aligned} \quad (6.14)$$

El estado del SGE, Ec. (6.8), se escribe en esta base

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(1 + a_-)|1\rangle + \frac{i}{2}(a_- - 1)|2\rangle - i\frac{a}{2}|3\rangle + \frac{a}{2}|4\rangle. \quad (6.15)$$

Así, la concurrencia está dada por

$$C = |a_-| = \left| \sqrt{1 - |a|^2} \right| \quad (6.16)$$

y tenemos

$$|a|^2 = \exp \left[-2k^6 (\tau^4 + 4\tau^2) \right]. \quad (6.17)$$

Este resultado, Ec. (6.16), es graficado para $k \leq 1$ en la Fig. (6.2). Así es posible ver cómo cambia la concurrencia con el tiempo que la partícula evoluciona con el campo del SGE, dado

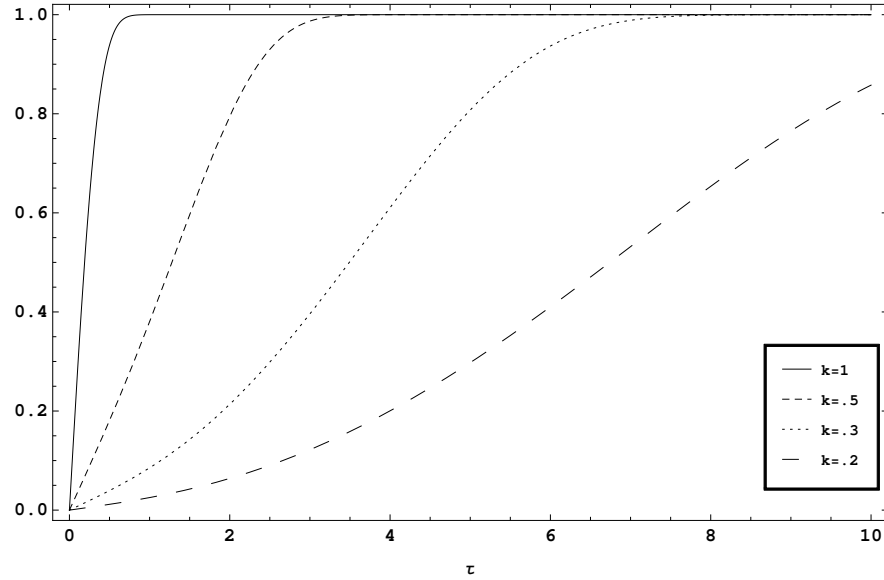


Figura 6.2: Dependencia temporal de la concurrencia, Ec. (6.16), para la forma discreta del estado del SGE de la Ec. (6.8), para $k = 1, 0.5, 0.3, 0.2$. La constante $k = \sqrt{2}\sigma_0 \left(\frac{\mu_c b m}{2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, Ec. (4.82), captura los parámetros experimentales. La dinámica de la concurrencia según la evolución en el SGE está de acuerdo con la creación y saturación del enredamiento esperada del experimento, lo que es evidenciado por la forma de las curvas. Para tiempos suficientemente grandes se creará un estado máximamente enredado, correspondiendo a la separación de los puntos de acumulación en la pantalla. Además, podemos ver en detalle cómo la interacción con el aparato crea el enredamiento, distinguiendo tres regiones definidas por la concavidad de las curvas: la *creación*, definida por la construcción acelerada de enredamiento, el *establecimiento*, donde el incremento se ha estabilizado, y la *saturación* en el máximo, en donde es cada vez más difícil acercarse al enredamiento máximo.

por τ , para valores de los parámetros experimentales correspondientes a $k = 1, 0.5, 0.3, 0.2$. En la Fig. (6.3) se hace lo mismo para $k \geq 1$, específicamente $k = 1, 1.5, 2, 2.5$. Ambos conjuntos de curvas, pertenecientes a cada figura, presentan comportamientos similares entre sí una vez que escalamos a la ventana del tiempo de interés, lo que se evidencia en las formas de las curvas.

En la Fig. (6.2) se puede notar que para este intervalo de valores de k , la concurrencia presenta tres regiones con comportamientos discernibles según el tiempo de interacción, τ . Cuando la partícula solo ha podido interactuar con el campo un corto tiempo, correspondiendo a valores pequeños de τ , tenemos que el enredamiento apenas se ha comenzado a crear, y la concurrencia incrementa de una manera muy lenta con τ , siendo este incremento cada vez más rápido. De esta manera la curva presenta una forma identificablemente convexa.

A continuación, acercándose a la mitad de la curva, se encuentra un punto de inflexión de la concurrencia. En estos tiempos la creación de enredamiento en el SGE ya está bien establecida y por un momento es aproximadamente constante, lo que se observa como una tendencia a la linealidad en esta región intermedia. La duración de esta región es mayor conforme aumenta k , así como se establece en tiempos más tempranos, considerando el escalamiento temporal de las curvas.

Finalmente, en la última región la concurrencia se satura en $C = 1$, el valor de enredamiento máximo. Este comportamiento corresponde a un incremento en la concurrencia cada vez más lento, que llega al máximo asintóticamente, siendo que en estos valores es cada vez más difícil aumentar el enredamiento. El tiempo que el estado requiere para alcanzar la saturación disminuye con k , así como la velocidad con la que se aproxima a este punto, correspondiendo a la inclinación de la curva en esta última región. El comportamiento asintótico así como la concavidad en esta última parte resalta en estas curvas y define a la creación del enredamiento en el SGE.

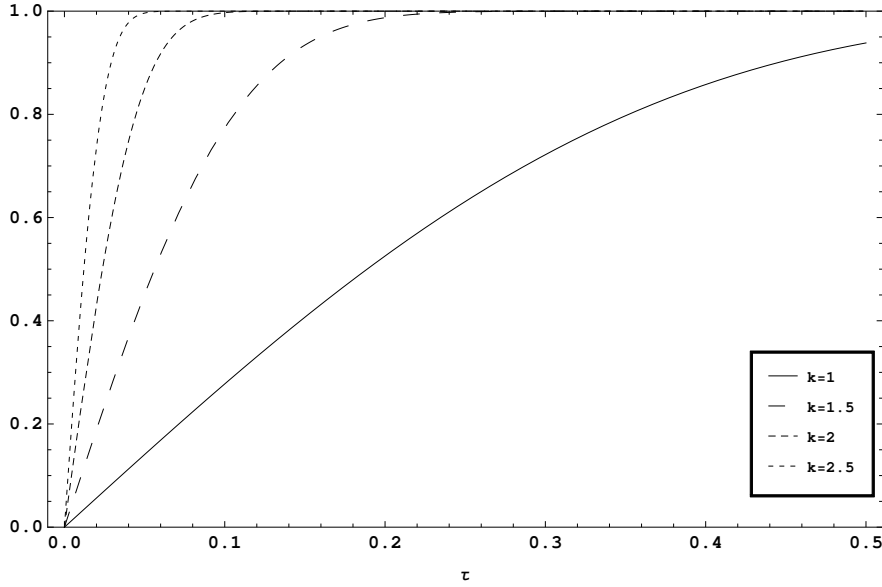


Figura 6.3: Dependencia temporal de la concurrencia, Ec. (6.16), como en la Fig. (6.2), para $k \geq 1$. Se consideran los valores $k = 1, 1.5, 2, 2.5$. Se puede llegar a conclusiones similares al caso de $k \leq 1$. Sin embargo, encontramos una diferencia importante en el comportamiento, ya que no existe el cambio de concavidad que distingue a las primeras dos regiones. Esto lo analizaremos en detalle en la Sec. (6.2.3.1).

De esta manera, los resultados obtenidos están de acuerdo con las observaciones del enredamiento en el SGE. Comenzando con el estado separable inicial, la partícula mientras atraviesa el SGE interactúa con el campo magnético inhomogéneo, lo que construye el enredamiento entre los dos subsistemas, la posición y el espín de la partícula. Así, el enredamiento se crea según el tiempo de interacción en el aparato. La famosa separación de los resultados de la medición de la pantalla en dos regiones distinguibles, como en la Fig. (4.1), corresponde a un estado máximamente enredado.

Así mismo, la creación de enredamiento depende también de los parámetros experimentales, definidos en conjunto por la constante k de acuerdo con sus efectos en la evolución del estado en la Ec. (4.77). En particular, la velocidad global con la que se crea el enredamiento aumenta con k , como se puede ver por ejemplo al comparar los tiempos de saturación correspondientes a distintos valores de k . Un valor mayor para k corresponde, para partículas de la misma masa, a una mayor anchura del paquete Gaussiano inicial, así como a una inhomogeneidad del campo más fuerte. Esto último puede entenderse como la manifestación de la idea de que un campo magnético más fuerte interactúa más intensamente con la partícula, acelerando el proceso con el que se crea el enredamiento.

Este comportamiento es característico de la creación del enredamiento en el SGE para $k \leq 1$, y se seguirá discutiendo al analizar el resto de las medidas de enredamiento estudiadas en esta tesis. Sin embargo, sigue presentándose cualitativamente en el régimen de $k > 1$, considerando las condiciones de validez del modelo y la solución de la Ec. (4.77). Esto lo se analiza más adelante en la Sec. (6.2.3.1).

6.2.2. La entropía de enredamiento

De la misma manera, es posible aplicar al estado discretizado del SGE, Ec. (6.8), cualquier medida de enredamiento que cuantifique al enredamiento discreto bipartita. A continuación se analiza el enredamiento del SGE usando la entropía de enredamiento, lo que además permitirá comparar estos resultados con aquellos del método de la traza parcial, Sec. (3.2.2), y por tanto,

ambos métodos para la aplicación de medidas discretas.

La entropía de enredamiento se define como la entropía de von Neumann sobre la matriz densidad reducida de uno de los subsistemas, aquí A , Ecs. (2.6) y (2.7),

$$E = S(\rho^A) = - \sum_{i=1}^d \lambda_i \ln \lambda_i, \quad (6.18)$$

$$\rho^A = \text{Tr}_B(\rho^{AB}). \quad (6.19)$$

Para el estado del SGE, Ec. (6.8), podemos escribir la matriz densidad como

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^* & a_-^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a^2 & aa_-^* \\ a_- & 0 & a_- a^* & a_-^2 \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Calculando la traza parcial sobre el subsistema de la posición con la base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$, obtenemos la matriz densidad reducida del subsistema de espín

$$\rho^S = \sum_{j=+,-} \langle e_j | \rho | e_j \rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a^* \\ a & a^2 + a_-^2 \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Sus eigenvalores son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (1 \pm |a|), \quad (6.22)$$

con lo que se tiene la entropía de enredamiento de la Ec. (6.18) como

$$E = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1 - |a|^2) - \frac{|a|}{2} \ln \left(\frac{1 + |a|}{1 - |a|} \right). \quad (6.23)$$

Graficamos esta expresión con τ en las Figs. (Fig. (6.4), Fig. (6.5)), lo que nuevamente nos da el comportamiento de esta medida de enredamiento con el tiempo de interacción de la partícula con el campo del SGE. En la Fig. (6.4) graficamos E para $k \leq 1$, considerando $k = 1, 0.5, 0.3, 0.2$; y en la Fig. (6.5) graficamos para $k \geq 1$, $k = 1, 1.5, 2, 2.5$.

El comportamiento que se aprecia de la entropía de enredamiento en estas gráficas es muy similar a aquel descrito por la concurrencia. Por lo tanto, todas las conclusiones cualitativas obtenidas en la Sec. (6.2.1) siguen aplicando al caso de la entropía de enredamiento, y de la misma manera, la función E de la Ec. (6.23), describe una creación de enredamiento en el SGE consistente con las observaciones del experimento. En estas curvas igualmente se pueden identificar las regiones de creación, establecimiento y saturación del enredamiento con el tiempo de interacción. Finalmente, la velocidad de creación del enredamiento en este caso también aumenta con k , y las distintas curvas mantienen a grandes rasgos la misma forma con un escalamiento adecuado según el tiempo de saturación.

Para terminar el análisis del comportamiento de la entropía de enredamiento se discutirá el resultado de Wootters [34, 35], donde se establece una relación entre la entropía de enredamiento y la concurrencia, de manera que la una determina a la otra completamente. De acuerdo con

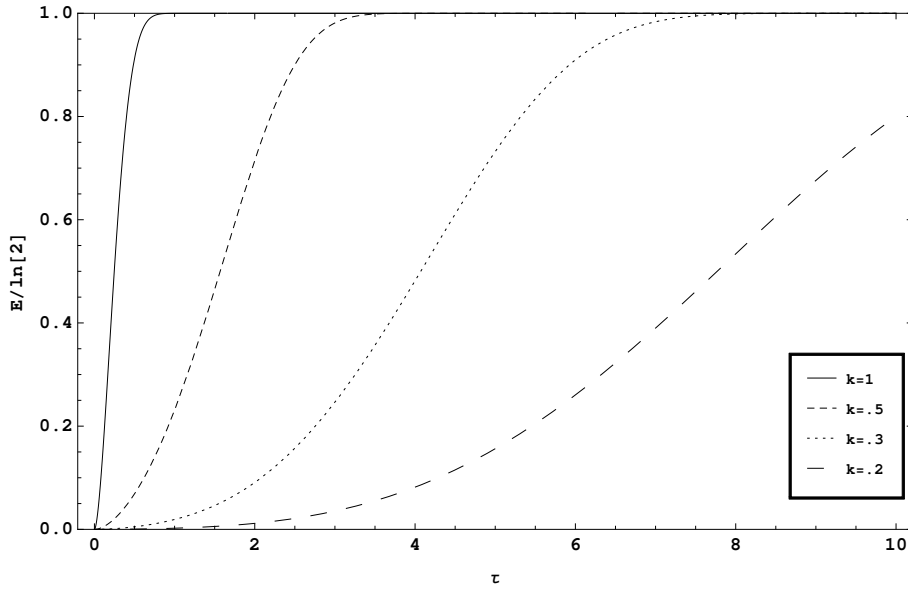


Figura 6.4: Dependencia temporal de la entropía de enredamiento para la forma discreta del estado del SGE, Ec. (6.23), para valores de $k \leq 1$, $k = 1, 0.5, 0.3, 0.2$. Esta medida de enredamiento demuestra para la creación de enredamiento en el SGE un comportamiento similar al evidenciado por la concurrencia. Nuevamente podemos identificar las mismas tres regiones definidas por la curvatura de las gráficas, y por lo tanto la velocidad de la creación del enredamiento en el SGE. Estas regiones son la *creación*, *establecimiento* y *saturación*. De esta manera, este resultado está así mismo en línea con lo esperado de las observaciones del SGE.

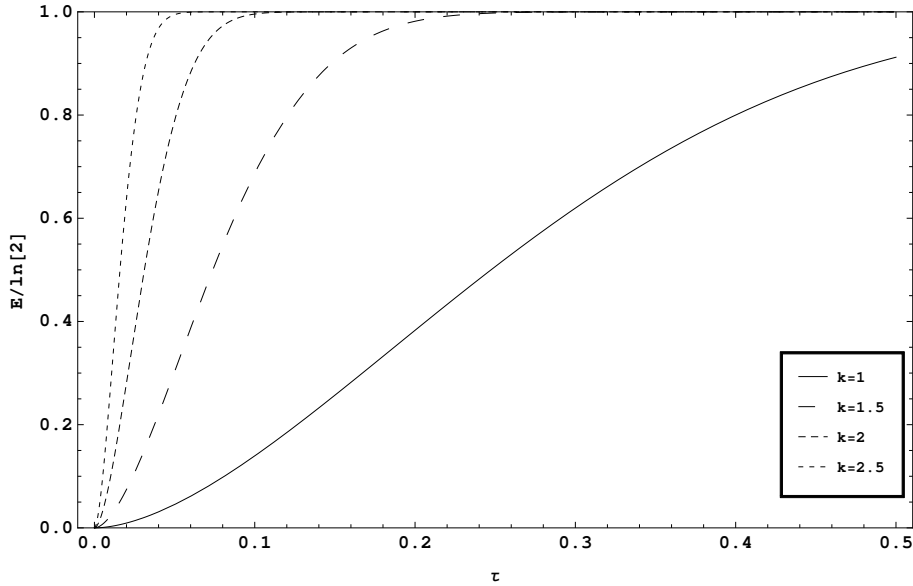


Figura 6.5: Dependencia temporal de la entropía de enredamiento para la forma discreta del estado del SGE, Ec. (6.23), en $k \geq 1$, con $k = 1, 1.5, 2, 2.5$. El comportamiento que presenta es muy similar a aquel que se tiene para $k \leq 1$ en la Fig. (6.4). A diferencia de lo que ocurre con la concurrencia en la Fig. (6.3), el cambio de comportamiento no es tan significativo y no se pierden las dos primeras regiones. Este régimen de k se analiza con detalle en la Sec. (6.2.3.1).

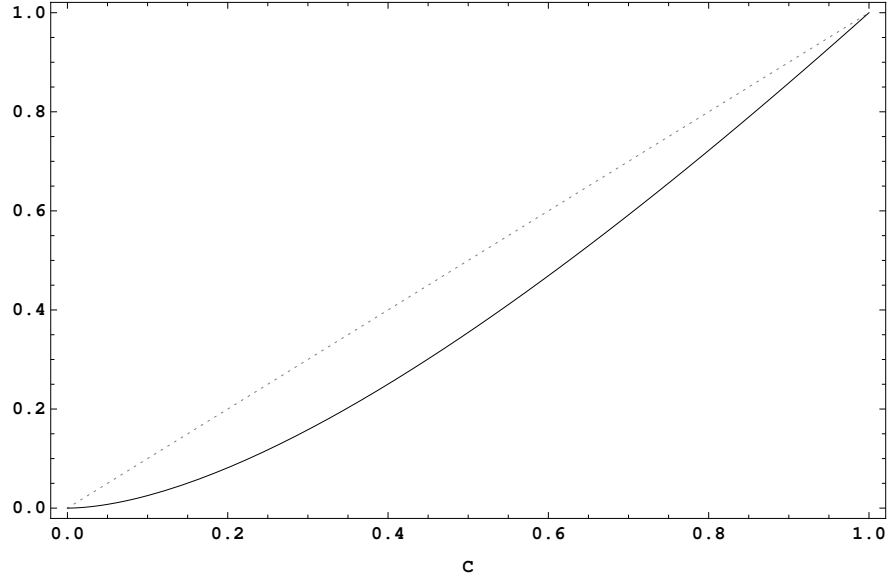


Figura 6.6: La entropía de enredamiento como función de la concurrencia, de la Ec. (6.24), [34]. Las diferencias entre las dos medidas apreciadas en las figuras Figs. (6.7), (6.8) y (6.11) se explican con esta relación.

Wootters [34] se tiene a la entropía de enredamiento dada por

$$\begin{aligned}
 E(\psi) &= \mathcal{E}(C(\psi)); \\
 \mathcal{E}(C) &= h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right), \\
 h(x) &= -x \log_2(x) - (1 - x) \log_2(1 - x);
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

donde C es la concurrencia del estado ψ . El resultado para la entropía de enredamiento, Ec. (6.23), coincide exactamente con el dictado por esta Ec. (6.24), considerando la concurrencia que aparece en la Ec. (6.16).

De esta manera, las diferencias apreciadas entre el enredamiento evidenciado por ambas medidas en las Figs. (6.2) a (6.5), y que se analizan en detalle en la siguiente sección, son explicadas con la relación anterior. La entropía de enredamiento en función de la concurrencia es graficada en la Fig. (6.6), donde la línea punteada representa la igualdad entre las medidas. En esta figura se puede apreciar la diferencia entre las dos medidas; tal diferencia es mayor en tiempos intermedios, cuando la creación de enredamiento se ha establecido y disminuye al acercarnos a la saturación. Así mismo, se ve claramente a la concurrencia como cota superior de la entropía de enredamiento.

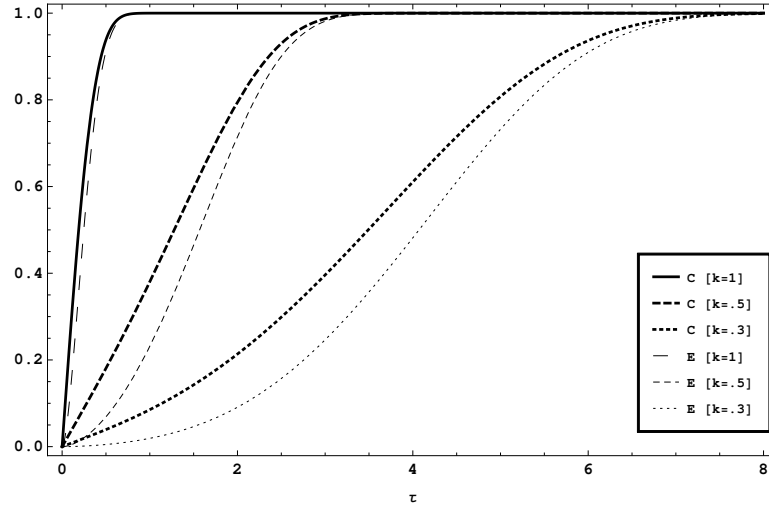


Figura 6.7: Comparación de la dependencia temporal de la concurrencia y la entropía de enredamiento para el estado discreto del SGE, Ecs. (6.16) y (6.23), para $k \leq 1$, $k = 1, 0.5, 0.3$. A pesar de alcanzar la saturación en el máximo de enredamiento a tiempos similares, la concurrencia siempre demuestra una mayor cantidad de enredamiento para tiempos iguales. La diferencia entre las distintas regiones es más grande para la entropía de enredamiento, lo que se puede observar de la concavidad en estas. Como consecuencia, la entropía de enredamiento tiene una mayor separación respecto a la curva de la concurrencia en las regiones correspondientes a tiempos tempranos.

6.2.3. Comparación de las medidas de enredamiento

Con esto, procedemos a comparar los resultados para la concurrencia, Ec. (6.16), y la entropía de enredamiento, Ec. (6.23), del estado discretizado del SGE que se obtuvo en la Ec. (6.8). En la Fig. (6.7) se consideran valores $k \leq 1$, graficando la concurrencia y la entropía de enredamiento para valores $k = 1, 0.5, 0.3$; en la Fig. (6.8) tomamos $k \geq 1$, $k = 1, 1.5, 2$; y en la Fig. (6.9) graficamos ambas medidas para $k = 40$.

En todas las curvas se distinguen las distintas regiones presentadas al analizar la concurrencia. Debido a las similitudes entre las curvas, es apropiado agrupar las curvas en pares con las gráficas de la concurrencia y la entropía de enredamiento para valores iguales de k , y compararlas entre sí.

Lo primero que se puede notar es que para valores iguales de k los tiempos de saturación de la concurrencia y la entropía de enredamiento son muy cercanos. Sin embargo, la concurrencia es consistentemente mayor, inclusive al llegar a la saturación. En tiempos de interacción pequeños encontramos que muy pronto la concurrencia detecta un enredamiento importante, lo que significa un inicio en el régimen de creación con una creación de enredamiento con mayor aceleración. En la región intermedia la entropía de enredamiento predice una creación considerablemente más rápida, lo que la lleva a alcanzar a la concurrencia en la saturación.

Se aprecia que la entropía de enredamiento pasa más tiempo en la región de creación, y menos tiempo en el segundo régimen, aunque esto no alcanza a evitar un retraso en la entrada a la saturación. La creación de enredamiento en la región intermedia es más rápida, así como la saturación. Sin embargo, la entropía de enredamiento es siempre menor que la concurrencia.

Por último, esta diferencia se cierra conforme k aumenta y el enredamiento se produce más rápido, pero los comportamientos relativos de estas medidas siguen presentando características similares.

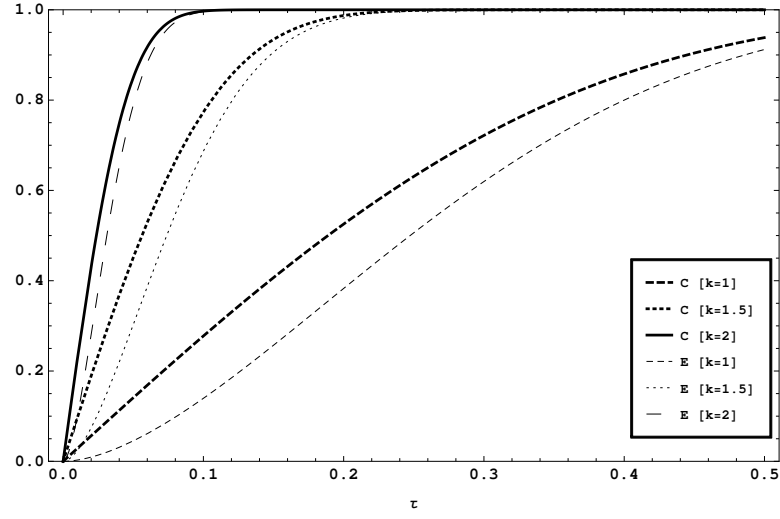


Figura 6.8: Comparación de la dependencia temporal de la concurrencia y la entropía de enredamiento para el estado discreto del SGE, Ecs. (6.16) y (6.23), para $k \geq 1$, $k = 1, 1.5, 2$. La forma general de estas curvas y sus diferencias son cualitativamente similares a aquellas del caso $k \leq 1$ en la Fig. (6.8).

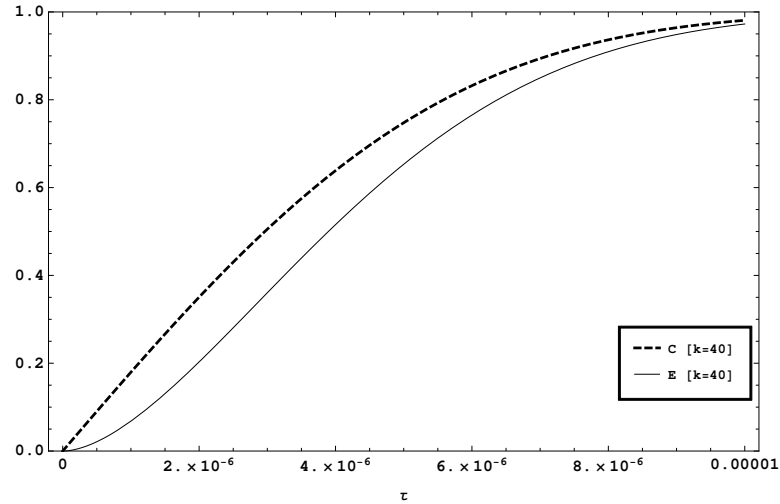


Figura 6.9: Comparación de la dependencia temporal de la concurrencia y la entropía de enredamiento para el estado discreto del SGE, Ecs. (6.16) y (6.23), para $k = 40$. Ambas gráficas presentan una forma y relación entre ellas muy similares a las vistas en la Fig. (6.8).

6.2.3.1. El dominio $k > 1$

En esta sección nos ocupamos de lo que ocurre en el régimen $k > 1$. Este es caracterizada por las distintas condiciones al modelo, y por tanto, a los parámetros que aparecen en la evolución de la Ec. (4.77). De esta manera, en la región de parámetros permitida, en este dominio se tiende rápidamente a límites semiclásicos.

La condición $k > 1$ es equivalente a

$$\sqrt{2}\sigma_0^3\mu_c b m > \hbar^2. \quad (6.25)$$

La localización del paquete de ondas determina la validez de la solución, con σ_0 adecuadamente

pequeño, por lo que los cambios en esta región están dominados por la interacción con el campo magnético. Con los parámetros m y μ_c , que describen a las partículas, fijos, esto equivale al incremento en b , la intensidad de la componente inhomogénea del campo magnético. De manera que la Ec. (6.25) indica una tendencia al límite clásico en la energía conforme $k > 1$ aumenta.

Por otro lado, los resultados para ambas medidas de enredamiento dependen de las superposiciones entre los estados continuos $|\psi_+\rangle$ y $|\psi_-\rangle$, y de esta manera por la integrabilidad de a , Ec. (6.10), lo que lleva a la condición $\sigma_0 < \frac{1}{2\sqrt{2}(1+\tau^2)}$, requiriendo nuevamente de un ancho del paquete de ondas suficientemente pequeño.

Sin embargo, el incremento de la parte inhomogénea del campo posee una cota inevitable, proveniente de las condiciones sobre la parte en dirección x del campo magnético, requerida para que el campo total sea arrotacional Sec. (4.1.3). En el caso cuántico, la componente inhomogénea del campo en esta dirección se puede ignorar debido a que la precesión del momento magnético es rápida alrededor del eje x , lo que lleva a que el promedio temporal de la fuerza en esta dirección sea cero; se ha encontrado que la condición necesaria para que esta componente no sea relevante se reduce a $B \gg b\sigma_0$ [407, 409, 410]. Con esto podemos caracterizar la contribución del campo en esta región por

$$\sqrt{2}\mu_cm\frac{B^3}{b^2} \gg \sqrt{2}\sigma_0^3\mu_cbm > \hbar^2. \quad (6.26)$$

De esta manera, la modelación de la interacción con el hamiltoniano de la Ec. (4.25) es cada vez menos clara según incrementa k .

Estas condiciones permiten aún así explorar un área importante de esta región sin aproximarnos al límite semiclásico. Es de interés particularmente el caso de $k \approx 1$.

Se puede notar de las Figs. (6.8) y (6.9) que para valores grandes de k el comportamiento de ambas medidas no cambia significativamente, más que en escala temporal, como previamente se ha discutido. Para estos valores de k se mantiene una creación de enredamiento cada vez más rápida según aumenta k , prontamente obteniendo enredamiento máximo desde el momento que la partícula interactúa con el campo.

Sin embargo, alrededor de $k = 1$ el comportamiento de estas medidas presenta cambios importantes que podemos apreciar en las figuras. A partir de este punto el aplanamiento que sufren las curvas con incrementos en k es mucho más relevante. Comparando las gráficas para $k = .3$ en la Fig. (6.7) y $k = 1$ en la Fig. (6.8), a pesar de estar escaladas similarmente, se ve una gran diferencia en la concavidad de las curvas. Este efecto está presente también en las curvas para $k < 1$, como se observa al comparar las Figs. (6.2), (6.4) y (6.7); aún así todas estas curvas presentan una forma muy similar cuando se escalan los ejes apropiadamente, y no hay un cambio significativo en el comportamiento que describen. Por otro lado, al pasar a la región de $k > 1$, todas las curvas presentan un aplanamiento importante, que se puede apreciar en la Fig. (6.8), considerando el escalamiento necesario, mientras que nuevamente mantienen una forma muy similar entre sí.

En el caso de la concurrencia, tenemos que en $k \approx .93$ se pierde la concavidad de la primera parte de la curva, e inclusive ya no se tiene un cambio de concavidad, perdiéndose también el punto de inflexión. Con esto ya no podemos distinguir entre los primeros dos regímenes discutidos anteriormente. La concurrencia tiene adicionalmente un comportamiento significativamente lineal antes de que tienda a la saturación, como se observa en la Fig. (6.10), donde aparece la curva de la concurrencia para $k = 1.5$ y su curvatura. En este caso el enredamiento experimenta una creación tan rápida en tiempos pequeños que se puede decir que se tiende a la saturación desde el inicio. Aún así se distinguen dos regiones, la creación del enredamiento, y la saturación, diferenciadas por la velocidad en que se crea el enredamiento y evidenciadas por la curvatura al final de las curvas.

Tratándose de la entropía de enredamiento no se pierde la concavidad de las distintas regiones, tampoco se pierde la inflexión, mas la región media se ve incrementada en duración mientras que la primera disminuye considerablemente. Como consecuencia, la curva en su totalidad tiene un comportamiento notoriamente lineal también en este caso. Esto lo podemos ver en la Fig. (6.11)

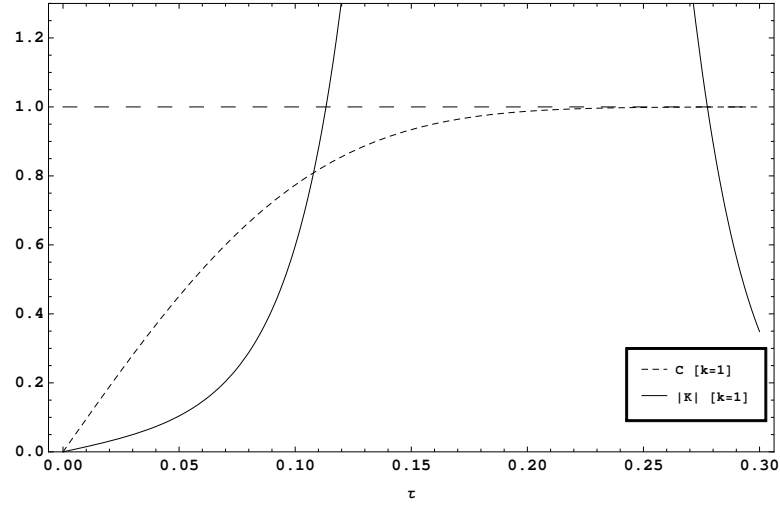


Figura 6.10: Curvatura absoluta, $|K|$, de la concurrencia para $k = 1.5$ con el tiempo de interacción τ , comparada con la concurrencia, C . Se hace evidente el cambio en el comportamiento en las regiones anteriores a la saturación, donde la concurrencia tiene un comportamiento lineal constante. La curvatura no muestra ningún cambio de signo, significando la pérdida del punto de inflexión que denota el paso de la creación a la saturación del enredamiento.

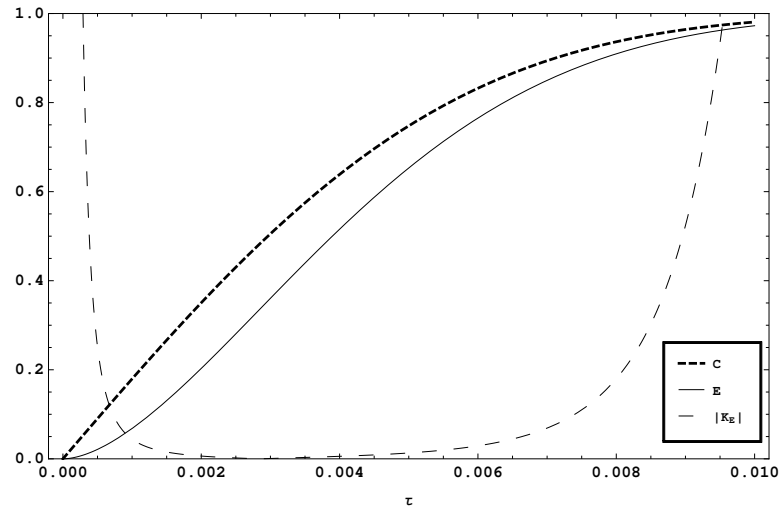


Figura 6.11: Curvatura absoluta de la entropía de enredamiento, $|K_{\text{FigE}}|$, para $k = 2$ con el tiempo de interacción τ , comparada con la entropía de enredamiento y la concurrencia. En este caso el aplanamiento que sufren las curvas no llega a eliminar su concavidad.

donde se grafican ambas medidas para $k = 2$ junto con la curvatura absoluta de la entropía de enredamiento. La primera rama de la curvatura presenta un signo negativo, correspondiente a la convexidad de la gráfica en esta primera región, lo cual no se puede apreciar directamente al considerar únicamente la curvatura absoluta. La forma de la entropía de enredamiento en la Fig. (6.6) y su relación con la concurrencia en la Ec. (6.24) hacen imposible el cambio en concavidad frente al aplanamiento de la concurrencia.

6.3. La traza parcial del Experimento de Stern-Gerlach

Debido a la dificultad de caracterizar el enredamiento en sistemas híbridos, un acercamiento natural es aquel permitido por la traza parcial, en el que la idea es la de trazar las partes complicadas del sistema y reducirlo a uno que se pueda manejar con herramientas conocidas. Así, podemos en principio reducir, por ejemplo, las componentes continuas y trabajar únicamente con los subsistemas discretos cuando nos proponemos cuantificar el enredamiento.

Ya que estamos tratando con un sistema bipartita, requerimos de una medida de enredamiento que contenga en su cálculo la traza parcial, debido a que no se puede calcular directamente el enredamiento de un sistema no compuesto (equivalentemente, de un solo grado de libertad).

La entropía de enredamiento, Sec. (2.3.1), mide el enredamiento como la cantidad de información existente compartida entre dos sistemas. Esta es definida como la entropía de von Neumann de los subsistemas reducidos con la traza parcial. En sistemas bipartitos discretos, para los que fue definida esta medida, la entropía de enredamiento es independiente del sistema reducido para el cual se calcula. La entropía de von Neumann es una generalización de la entropía de Shannon al caso cuántico. La entropía de enredamiento del estado ρ es

$$E(\rho) = S(\rho_A) = -\text{Tr}[\rho_A \log \rho_A] \quad (6.27)$$

para el estado reducido ρ_A

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho. \quad (6.28)$$

La naturaleza de la entropía de enredamiento nos indica que debemos conservar con la parte discreta de nuestro sistema híbrido al tomar la traza parcial, Sec. (3.2.2).

Este método fue llevado a cabo por [52] para el SGE con una evolución semiclásica, Sec. (4.1.4.1). Este resultado se revisará antes de aplicar este procedimiento a la evolución cuántica del SGE en la Sec. (6.3.1). Sin embargo, el estado final reportado en esta referencia se puede llevar a la forma del estado encontrado en el Capítulo 4, Ec. (4.77), reemplazando los parámetros semiclásicos adimensionales temporal, $T = \frac{\hbar a^2 t}{m}$, y de interacción, $K = \frac{1}{a} \left[\frac{m^2 a_c}{2\hbar} \right]^{1/3}$, definidos como en [52], por aquellos de la evolución cuántica, $\tau = \frac{\hbar t}{2\sigma_0^2 m}$ y $k = \sqrt{2}\sigma_0 \left(\frac{\mu_c b m}{2\hbar^2} \right)^{1/3}$ de la Ec. (6.7). Por lo tanto, los resultados referentes a la entropía de enredamiento en el SGE de [52] son aplicables a nuestro estudio del enredamiento en el SGE cuántico.

En [52] se estudia el comportamiento temporal de la entropía de enredamiento, así como su dependencia con el parámetro K , que contiene los parámetros del aparato del SGE en la evolución semiclásica. Nos referimos a este resultado como $E_R(\Psi)$, que depende de T y K .

$$E_R(\Psi) = - \sum_i \Lambda_i \ln \Lambda_i; \quad (6.29)$$

con los eigenvalores de la matriz densidad Λ_i ,

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \left| \int \psi_+^* \psi_- dz \right| = \frac{1}{2} \pm \exp \eta(T), \quad (6.30)$$

$$\eta(T) = -K^6 T^2 (4 + T^2). \quad (6.31)$$

En la Fig. (6.12) reproducimos el resultado de [52], para E_R de las Ecs. (6.29) a (6.31). Podemos ver la creación de enredamiento en el SGE y la posibilidad de obtener un estado máximamente enredado.

Analizando esta gráfica tenemos que el enredamiento se construye según transcurre el tiempo

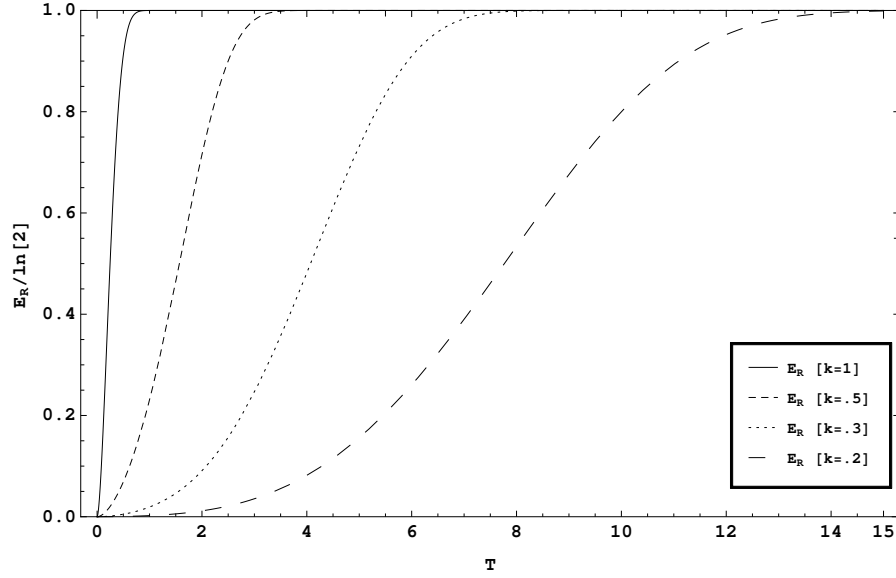


Figura 6.12: Reproducimos el resultado de [52] para la entropía de enredamiento del SGE, E_R , Fig. (6.12), para los parámetros semiclásicos K , T de [52]. Esta función presenta las mismas características que el resultado encontrado en Sec. (6.2.2), a pesar de ser obtenido para una evolución semiclásica de los paquetes de onda del SGE.

de interacción con el campo magnético, y lo hace más lentamente acercándose a la saturación, donde alcanza el valor máximo para la entropía de enredamiento de $\ln 2$. Este incremento es más rápido mientras aumenta K , lo que corresponde a una inhomogeneidad más fuerte o a un mayor ancho del paquete de onda.

Finalmente, notamos que el resultado de la Ec. (6.31) para la entropía de enredamiento es el mismo que aquel que obtenemos en la Ec. (6.23), una vez cambiamos los parámetros de la evolución semiclásica K , T , por los que aparecen en la evolución cuántica del SGE, Ec. (4.77), k y τ , Ec. (4.82). De esta manera podemos ver como estos dos métodos cuantifican apropiadamente el enredamiento híbrido.

Esta conclusión la veremos desde otro ángulo en la Sec. (6.3.1) donde a continuación usaremos este método con nuestra descripción completamente cuántica del SGE, aplicando la técnica descrita en [52] al estado evolucionado del SGE, Ec. (4.77).

6.3.1. Aplicación al SGE cuántico

Al tomar la traza parcial sobre el subsistema continuo se puede calcular la entropía de von Neumann sobre la matriz densidad reducida de la manera usual. Particularmente, la aplicación de la traza parcial es de interés al permitirnos trabajar con una parte del sistema, potencialmente únicamente discreta o continua, simplificando la descripción de los estados híbridos.

En esta sección aplicaremos la entropía de enredamiento directamente sobre el estado híbrido del SGE de la Ec. (4.77), calculando en primer lugar la matriz densidad reducida que describe al subsistema discreto, y posteriormente obteniendo la entropía de enredamiento sobre esta. Es necesario en este caso calcular esta reducción en primer lugar debido a la naturaleza de la entropía de enredamiento como una medida discreta. Este método difiere de como obtuvimos el resultado de la entropía de enredamiento en la Sec. (6.2.2), ya que en este caso trabajamos con un estado propiamente discreto. Sin embargo veremos que estos resultados son compatibles.

Si trazamos el operador densidad del sistema del SGE usando una base del subsistema continuo,

en este caso los eigenestados del operador de posición, $|\vec{r}\rangle$, tendremos la siguiente integral [52],

$$\rho^{(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \vec{r} | \rho | \vec{r} \rangle d\vec{r}. \quad (6.32)$$

Considerando únicamente la dependencia en z del estado evolucionado del SGE de la Ec. (6.5), obtenemos la matriz densidad reducida para el subsistema de espín trazando sobre la posición en z como sigue:

$$\rho^{(s)} = \text{Tr}_z |\psi\rangle\langle\psi| = \int_{-\infty}^{\infty} \langle z | \psi \rangle \langle \psi | z \rangle dz. \quad (6.33)$$

En nuestro sistema podemos dividir la matriz densidad resultante del sistema de espín de dos niveles en sus cuatro componentes al tomar el producto interno con los eigenestados de espín [52],

$$\rho_{i,j}^{(s)} = \langle i | \rho^{(s)} | j \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle z | \psi_i \rangle \langle \psi_j | z \rangle dz = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^*(z, t) \psi_j(z, t) dz. \quad (6.34)$$

donde $i, j = +, -$, y $\psi_{\pm}$ son los de la Ec. (4.80). En particular,

$$\rho_{+-}^{(S)} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_+^*(z) \psi_-(z) dz = a. \quad (6.35)$$

Esto nos permite escribir explícitamente la matriz densidad reducida

$$\rho^{(s)} = \begin{pmatrix} \int \frac{1}{2} \psi_+^* \psi_+ dz & \int \frac{1}{2} \psi_+^* \psi_- dz \\ \int \frac{1}{2} \psi_-^* \psi_+ dz & \int \frac{1}{2} \psi_-^* \psi_- dz \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a^* \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

La matriz de la primera igualdad corresponde con la reportada en [52], mientras que el término de la derecha es idénticamente igual a aquella matriz de la Ec. (6.21) para el estado discreto del SGE, con los eigenvalores de la Ec. (6.22);

$$E = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1 - |a|^2) - \frac{|a|}{2} \ln \left(\frac{1 + |a|}{1 - |a|} \right). \quad (6.37)$$

Así se obtiene la entropía de enredamiento como la de la Ec. (6.23), y más aún se trasladan al caso presente todas las conclusiones derivadas de esta en la Sec. (6.2).

Esta aplicación de la entropía de enredamiento, una medida discreta, al enredamiento híbrido del SGE, resulta completamente equivalente a la realizada mediante la discretización del estado de la Sec. (6.2.2). Esto permite asentar la validez de este método, y como consecuencia considerar a la traza parcial como una herramienta útil en la descripción del enredamiento híbrido.

6.3.2. Cuantificación del enredamiento usando el vector de Bloch

El vector de Bloch de un subsistema se puede usar para determinar el enredamiento en un sistema discreto bipartita. El método de la traza parcial nos permite encontrar la matriz densidad reducida del subsistema de espín, como en la Ec. (6.36), con lo que se obtiene su vector de Bloch como sigue

$$\vec{r} = (\text{Re}(a), \text{Im}(a), 0); \quad (6.38)$$

$$r_i = \langle \sigma_i \rangle = \text{Tr}(\rho^{(S)} \sigma_i), \quad (6.39)$$

$$\rho^{(S)} = \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} (a^* + a) \sigma_x + i \frac{1}{2} (a^* - a) \sigma_y. \quad (6.40)$$

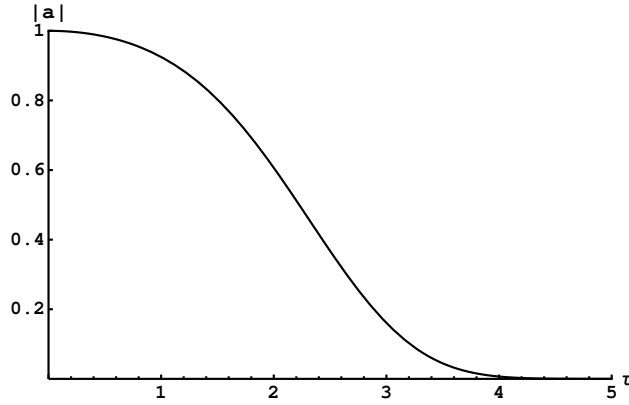


Figura 6.13: Dependencia temporal del parámetro $a = \langle \psi_+ | \psi_- \rangle$, Ec. (6.10); se muestra su valor absoluto. a decae asintóticamente con el tiempo de interacción τ para un valor determinado de k , aquí $k = 0.5$.

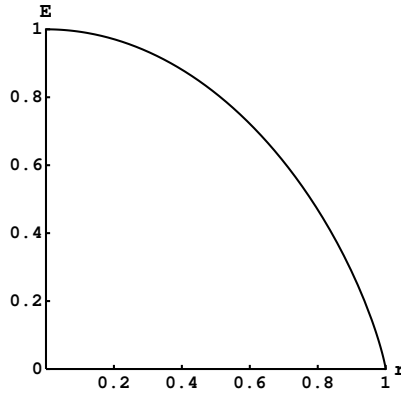


Figura 6.14: La entropía en términos de la norma del vector de Bloch, Ec. (6.42).

En el caso de sistemas discretos bipartitas, estos presentan un enredamiento máximo cuando el vector de Bloch de los subsistemas reducidos es idénticamente cero, es decir, cuando los estados de los subsistemas son máximamente mixtos [442–444]. De esta manera, el método de la traza parcial nos permite trasladar el uso de este método al caso de enredamiento híbrido. Para el SGE, el vector de Bloch del subsistema reducido de espín es nulo cuando $|a| = 0$, debido al comportamiento oscilatorio de la otra componente en $\text{Re}(a)$ e $\text{Im}(a)$, Ec. (6.10),

$$a = \exp \left[i 2 \sqrt{2} k^3 \tau \frac{B_0}{\sigma_0 b} \right] \exp \left[-k^6 (\tau^4 + t \tau^2) \right]. \quad (6.41)$$

Ahora, $a \rightarrow 0$ según τ y k incrementan, Fig. (6.13); de esta manera, el enredamiento existente en el estado híbrido del SGE de la Ec. (6.5) tiende al enredamiento máximo con un mayor tiempo de interacción τ , Fig. (6.13).

El vector de Bloch cuantifica el enredamiento de una manera equivalente a la entropía de enredamiento. La entropía de enredamiento, definida según la Ec. (6.27), se puede escribir en términos de la norma del vector de Bloch [442, 445], $|\vec{r}| \equiv r$:

$$E = -\frac{1+r}{2} \log_2 \frac{1+r}{2} - \frac{1-r}{2} \log_2 \frac{1-r}{2}, \quad (6.42)$$

según la Fig. (6.14). Con esto, el enredamiento del estado híbrido del SGE depende nuevamente

de una manera directa de $|a|$, como se tiene en la Ec. (6.37).

Con esto podemos decir que el enredamiento del estado del SGE se puede ligar a la medición de las componentes espaciales de espín, siendo las matrices de Pauli observables del subsistema de espín. En particular, $r_i = \langle \sigma_i \rangle$, de manera que la existencia de enredamiento máximo se puede concluir de obtener un resultado nulo para la medición del espín en dirección x , o, equivalentemente en dirección y . Nuevamente, en el caso del SGE estos resultados se obtienen de una manera asintótica, dependiendo de la superposición entre los estados continuos, $a = \langle \psi_+ | \psi_- \rangle$, Ec. (6.10); cuando existe una separación en los puntos de acumulación y la superposición de las funciones Gaussianas en z respectivas es mínima, como se explora en la Sec. (4.2.2), la probabilidad de hallar $\langle \sigma_x \rangle = 0$ es considerable.

6.4. Resultados

La forma discreta efectiva del estado evolucionado del SGE, obtenida a partir del resultado de [1, 2] con el método de discretización de [51], permite estudiar el enredamiento híbrido presente en el resultado del experimento, Ec. (4.77), usando medidas de enredamiento discretas. Se calcularon la concurrencia y la entropía de enredamiento para la evolución del SGE.

Con estos resultados se comparó la creación de enredamiento, manifestada en el comportamiento de ambas medidas, con la interacción entre la partícula y el aparato, que tiene por consecuencia la evolución que se hace presente en este estado. La fuerza de la interacción se puede caracterizar en nuestro modelo capturada por el parámetro k , Ec. (4.82). A pesar de que ambas medidas consideradas presentan un comportamiento consistente con lo que se espera de las observaciones del SGE, podemos notar diferencias en la manera en que el experimento genera enredamiento en tres regiones distinguibles: la creación de enredamiento, el establecimiento del enredamiento y la saturación en el enredamiento máximo. Particularmente, con un mismo valor de k la concurrencia es más grande que la entropía de enredamiento para cualquier tiempo de interacción. Ambas medidas alcanzan la saturación a tiempos similares.

Se analizó el comportamiento de ambas medidas en la región $k \geq 1$, en la que se tiende a los límites de aplicación de la evolución obtenida para el SGE, así como nos aproximamos rápidamente a un límite semiclásico. Sin embargo, para valores relativamente pequeños, alrededor de $k = 1$, el comportamiento de la concurrencia presenta una inflexión importante. La consecuencia más notable de esta inflexión es la incapacidad de distinguir un primer régimen de creación del comportamiento característico del régimen intermedio. Esta transformación fue discutida en detalle y comparado con el cambio que experimenta la entropía de enredamiento. Esta última a pesar de presentar un comportamiento distintivo en este rango, no cambia la naturaleza de la creación de enredamiento que predice.

Se calculó la entropía de enredamiento del estado evolucionado del SGE, Ec. (4.77), mediante la traza parcial sobre el subsistema de la posición, según propone [52]. Comparando el resultado obtenido con aquel de la entropía de enredamiento para la forma discreta del estado encontramos que estos son idénticamente iguales, concluyendo que para este tipo de estados híbridos ambos métodos son completamente equivalentes.

6.5. Conclusiones

Las correlaciones en los resultados del SGE entre la posición y el espín son las responsables de la separación observada. El SGE presenta importantes características cuánticas, y, junto con su tratamiento del espín, el enredamiento cuántico existente en su resultado es la más prominente.

Gracias a la evolución cuántica del SGE que se presentó en el Capítulo 4, sabemos que es el enredamiento cuántico el responsable de la separación observada en la pantalla. Sin embargo, el estado evolucionado del SGE se distingue por su inclusión de variables continuas y discretas. Por lo

tanto, este estado presenta enredamiento híbrido. Debido a esto, la cuantificación del enredamiento en el SGE es particularmente compleja.

En el caso de la evolución de un estado puro, que se describe aquí, la forma simple del estado resultante permite manejar el enredamiento híbrido encontrado. En particular, permite usar las herramientas desarrolladas para el análisis del enredamiento cuántico que han sido las mejor establecidas y estudiadas, aquellas que tratan con sistemas discretos bipartitas.

En este capítulo se aplican tales medidas de enredamiento a la evolución del SGE. Se usa en primer lugar la propuesta de Kreis y van Loock [51] para la descripción del estado híbrido en un espacio reducido, efectivamente discreto. Con esto se aplica sobre el estado efectivo del SGE la concurrencia y la entropía de enredamiento. Por otro lado, se realiza una aplicación directa de la entropía de enredamiento, la que, al trazar sobre el espacio continuo, permite estudiar el enredamiento como en la manera usual sobre sistemas discretos con esta medida. Esta segunda aplicación de la entropía de enredamiento nos permite proponer el uso de la traza parcial como herramienta para tratar el enredamiento en sistemas híbridos con la aplicación conveniente de medidas de enredamiento existentes, continuas o discretas, sobre el estado reducido que se encuentra.

Ambos resultados obtenidos para la entropía de enredamiento coinciden exactamente de una manera analítica, lo que asienta la validez de ambos procedimientos, permitiendo una caracterización completa del enredamiento en un sistema híbrido.

Con estas medidas de enredamiento analizamos la dinámica del enredamiento en el SGE, caracterizando exitosamente el establecimiento del enredamiento en este importante experimento. De este resultado podemos asegurar que la creación del enredamiento en el SGE se debe a la interacción de la partícula con el campo magnético, dependiendo directamente de la intensidad de esta, la cual está dada por la inhomogeneidad del campo magnético y el momento magnético de la partícula, así como también dependiendo del tiempo de interacción.

Reconocemos tres etapas en la creación del enredamiento en el SGE, distinguidas por la cantidad de enredamiento presente y la velocidad a la que se continúa creando el enredamiento. Es importante notar así mismo que el enredamiento en el SGE se satura con un tiempo de interacción suficiente en el máximo posible para un sistema discreto bipartita de dos niveles. En tiempos para los que el comienzo de la interacción es reciente, el enredamiento incrementa lentamente. Es en tiempos de interacción intermedios que la creación del enredamiento ha tomado velocidad y se establece momentáneamente en una tasa constante, antes de volverse a lentificar al tender a la saturación. La congruencia de la creación de enredamiento y la dependencia de ésta en la evolución del estado encontrado con los resultados esperados y observados del SGE demuestran la validez y utilidad de los dos métodos discutidos.

Analizamos además el límite semiclásico de nuestra caracterización del enredamiento en el SGE, determinando la aplicabilidad y el comportamiento de las medidas discretas en el rango de los parámetros en los que se aproxima al límite la descripción de la evolución del SGE. Al dirigir la atención al régimen de intensidades de interacción altas se puede observar que el comportamiento de la concurrencia señala a la desaparición del primer régimen, que corresponde a la creación lenta y acelerada de enredamiento en tiempos pequeños, a favor de una creación constante del enredamiento, antes de aproximarse a la saturación.

La caracterización del enredamiento del SGE ayuda a asentar a este experimento como un método de generación de enredamiento híbrido, así ampliando su posible utilidad en el campo de la información cuántica. Lo mismo puede ocurrir para otros sistemas que pueden ser descritos similarmente al SGE, como son los estados gato de Schrödinger híbridos, así como el caso básico de qubit-modo, revisado en la Sec. (3.1). Más aún, las expresiones encontradas en este capítulo pueden aplicarse directamente a cualquier sistema híbrido de dos niveles, una vez que las expresiones particulares para los coeficientes del estado de dos-qubits, Sec. (6.1.2), y los estados continuos, Sec. (6.3), se han considerado en la Ec. (6.5) inicial.

Conclusiones

En esta tesis se ha cuantificado exitosamente el enredamiento híbrido del estado evolucionado del SGE usando medidas de enredamiento discretas ya existentes. Se consideraron dos métodos distintos para reducir el estado híbrido a una forma discreta, que se probaron equivalentes para el estudio del enredamiento en el SGE.

En el primer método se obtuvo explícitamente un estado bipartita discreto enredado equivalente al estado híbrido del SGE, a partir de una descripción del subsistema continuo en un subespacio finito del espacio continuo completo infinito. Este subespacio es generado por los dos estados continuos relevantes que forman al estado del SGE. La equivalencia en el enredamiento de estos dos estados permite extraer conclusiones sobre el enredamiento híbrido del SGE aplicando herramientas discretas. Usando este método se obtuvieron expresiones para la concurrencia y la entropía de enredamiento.

El segundo método consiste en el uso de la traza parcial para reducir la descripción del estado a sólo aquella del estado discreto. La información de la interacción se mantiene con esta reducción, como se hace patente en la composición de la entropía de enredamiento por la traza parcial y la entropía de von Neumann. En el caso de estados híbridos bipartitas, sólo la entropía de enredamiento se puede aplicar con este método, como se realizó para el estado del SGE. Sin embargo, podemos conjeturar que en sistemas híbridos multipartitas la traza parcial permita la aplicación de otras medidas de enredamiento discretas, e inclusive continuas.

La comparación de los resultados obtenidos indica que, en el caso de estados híbridos bipartitas de baja dimensionalidad, en los que es posible usar la entropía de enredamiento, ambos métodos de discretización de las medidas híbridas son completamente equivalentes, y caracterizan correctamente el enredamiento híbrido.

Las medidas aplicadas, particularmente la entropía de enredamiento, caracterizan completamente el enredamiento del estado evolucionado del SGE. Podemos observar de esta manera la generación de enredamiento en el SGE. Es de singular importancia el que con este análisis podemos concluir que un mayor tiempo en el aparato de Stern-Gerlach, y por tanto, mayor tiempo para interactuar con el campo magnético, lleva a un mayor enredamiento en el estado de la partícula. Se identifican tiempos de interacción prominentes, correspondientes al grado de enredamiento del estado resultante. Es así que podemos comenzar a apreciar la naturaleza de la creación de enredamiento en el SGE y el establecimiento de las correlaciones que distinguen a los resultados del experimento. La diferencia observada entre la descripción que hacen del enredamiento del SGE la entropía de enredamiento y la concurrencia pueden permitir comparaciones experimentales referentes a las distintas propiedades de enredamiento que detectan las diferentes medidas.

Complementando el análisis de las propiedades cuánticas del SGE, estudiamos las características no clásicas de las correlaciones presentes en el estado evolucionado. Tales correlaciones son sinónimo del efecto de Stern-Gerlach, dictando la perfecta separación del haz de acuerdo al espín de las partículas al realizarse una medición de la posición en la pantalla del experimento. El SGE es un experimento manifiestamente cuántico, lo que es evidente de la naturaleza de tales correlaciones, las cuales corresponden con la presencia de no localidad en el estado evolucionado. Se propone aquí una función de correlación que es capaz de cuantificar las correlaciones en el estado híbrido compuesto por la posición y el espín. Esta función nos permite analizar las características de las

correlaciones, considerando la dependencia de estas respecto a los parámetros experimentales y la medición en el espacio de variables. Así además es posible observar la no localidad del SGE como una violación del teorema de Bell por parte de esta función de correlación.

El estado que describe la evolución de una partícula sujeta al potencial del campo magnético del SGE, que se usó para analizar las propiedades no clásicas del SGE y su enredamiento híbrido, se obtuvo en esta tesis mediante el método del operador de evolución. Para obtener la evolución que actúa sobre el estado de la partícula factorizamos el operador de evolución que surge de la descripción de la evolución cuántica dictada por la ecuación de Schrödinger. El estado evolucionado de un estado puro inicial es en este caso puro también y presenta claramente no-separabilidad entre las variables continua, de posición, y discreta, de espín. El estado obtenido demuestra excelentemente las propiedades del SGE, en particular haciendo evidentes sus reconocidas correlaciones, lo que notamos al analizar la distribución de probabilidad del estado.

Con este trabajo, se ha caracterizado completamente el enredamiento híbrido presente en el experimento de Stern-Gerlach, el cual es un ejemplo experimental de la generación de enredamiento híbrido. Usando el SGE podemos comparar tanto la aplicación de medidas discretas para el estudio del enredamiento híbrido, como el uso de medidas de enredamiento existentes y la necesidad de encontrar nuevas medidas híbridas. Así mismo, se ha explorado la relación entre el enredamiento y las propiedades no clásicas de sistemas compuestos híbridos. De esta manera podemos comprender mucho mejor la naturaleza del enredamiento entre variables continuas y discretas, lo que a la vez permite mejorar las aplicaciones de este tipo de estados y afinar el uso del enredamiento híbrido como recurso.

Bibliografía

- [1] Benítez Rodríguez, E., Piceno Martínez, E. y Arévalo Aguilar, L. M. “A full quantum analysis of the Stern-Gerlach Experiment using the Evolution Operator method: Analising current issues on the teaching quantum mechanics”. *European Journal of Physics*, 38: 025403 (2017). doi:10.1088/1361-6404/aa51ad.
- [2] Benítez Rodríguez, E., Arévalo Aguilar, L. M. y Piceno Martínez, E. “Corrigendum: ‘A full quantum analysis of the Stern–Gerlach experiment using the evolution operator method: Analysing current issues in teaching quantum mechanics’”. *European Journal of Physics*, 38 (6): 069501 (2017). doi:10.1088/1361-6404/aa80a3.
- [3] Piceno Martínez, A. E., Benítez Rodríguez, E., Mendoza Fierro, J. A., Méndez Otero, M. M. y Arévalo Aguilar, L. M. “Quantum nonlocality and quantum correlations in the Stern-Gerlach experiment”. *Entropy*, 20: 299 (2018). doi:10.3390/e20040299.
- [4] Piceno Martínez, A. E. y Arévalo Aguilar, L. M. “Quantifying the hybrid entanglement of the Stern-Gerlach experiment using discrete reductions”. *Physics Letters A*, 394: 127200 (2021). doi:10.1016/j.physleta.2021.127200.
- [5] Benítez Rodríguez, E., Piceno Martínez, E. y Arévalo Aguilar, L. M. “Single-particle steering and nonlocality: The consecutive Stern-Gerlach experiments”. *Manuscrito Enviado para Publicación* (2020). arXiv: 2011.11797 [quant-ph].
- [6] Piceno, E., Rosado, A. y Sadurní, E. “Fundamental constraints on two-time physics”. *The European Physical Journal Plus*, 131 (10) (2016). doi:10.1140/epjp/i2016-16352-7.
- [7] Schrödinger, E. “Discussion of probability relations between separated systems”. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31 (4): 555–563 (1935). doi:10.1017/s0305004100013554.
- [8] Bennett, C. H., Brassard, G., Crépeau, C., Jozsa, R., Peres, A. y Wootters, W. K. “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels”. *Physical Review Letters*, 70 (13): 1895–1899 (1993). doi:10.1103/physrevlett.70.1895.
- [9] Boschi, D., Branca, S., Martini, F. D., Hardy, L. y Popescu, S. “Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels”. *Physical Review Letters*, 80 (6): 1121–1125 (1998). doi:10.1103/physrevlett.80.1121.

- [10] Bouwmeester, D., Pan, J.-W., Mattle, K., Eibl, M., Weinfurter, H. y Zeilinger, A. “Experimental quantum teleportation”. *Nature*, 390 (6660): 575–579 (1997). doi:10.1038/37539.
- [11] Bennett, C. H. y Wiesner, S. J. “Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states”. *Physical Review Letters*, 69 (20): 2881–2884 (1992). doi:10.1103/physrevlett.69.2881.
- [12] Mattle, K., Weinfurter, H., Kwiat, P. G. y Zeilinger, A. “Dense coding in experimental quantum communication”. *Physical Review Letters*, 76 (25): 4656–4659 (1996). doi:10.1103/physrevlett.76.4656.
- [13] Pati, A. K. “Minimum classical bit for remote preparation and measurement of a qubit”. *Physical Review A*, 63 (1): 014302 (2000). doi:10.1103/physreva.63.014302.
- [14] Lo, H.-K. “Classical-communication cost in distributed quantum-information processing: A generalization of quantum-communication complexity”. *Physical Review A*, 62 (1): 012313 (2000). doi:10.1103/physreva.62.012313.
- [15] Li, M., Fei, S.-M. y Li-Jost, X. “Quantum entanglement: Separability, measure, fidelity of teleportation, and distillation. advances in mathematical physics.” *Advances in Mathematical Physics*, 2010: 301072 (2010). doi:10.1155/2010/301072.
- [16] Furusawa, A. y van Loock, P. *Quantum Teleportation and Entanglement: A Hybrid Approach to Optical Quantum Information Processing*. Wiley-VCH, 1^a ed^{ón}. (2011). ISBN 3527409300, 9783527409303.
- [17] Adesso, G. y Illuminati, F. “Entanglement in continuous-variable systems: recent advances and current perspectives”. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40 (28): 7821–7880 (2007). doi:10.1088/1751-8113/40/28/s01.
- [18] Nielsen, M. A. y Chuang, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge (2011). ISBN 1107002176.
- [19] Życzkowski, K., Horodecki, P., Sanpera, A. y Lewenstein, M. “Volume of the set of separable states”. *Physical Review A*, 58 (2): 883–892 (1998). doi:10.1103/physreva.58.883.
- [20] Nielsen, M. A. y Kempe, J. “Separable states are more disordered globally than locally”. *Physical Review Letters*, 86 (22): 5184–5187 (2001). doi:10.1103/physrevlett.86.5184.
- [21] Mintert, F., Viviescas, C. y Buchleitner, A. tomo 768 de *Lecture Notes in Physics*, cap. Basic Concepts of Entangled States, págs. 61–86. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin (2009). ISBN 978-3642099922. doi:10.1007/978-3-540-88169-8_2.
- [22] Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M. y Horodecki, K. “Quantum entanglement”. *Reviews of Modern Physics*, 81 (2): 865–942 (2009). doi:10.1103/revmodphys.81.865.
- [23] Terhal, B. M. “Detecting quantum entanglement”. *Theoretical Computer Science*, 287 (1): 313–335 (2002). doi:10.1016/s0304-3975(02)00139-1.

- [24] Horodecki, M. “Entanglement measures”. *Quantum Information and Computation*, 1 (1): 3–26 (2001). doi:10.26421/QIC1.1.
- [25] Kreis, K. “Characterizing and exploiting hybrid entanglement”. *Ph.D. Thesis* (2012). arXiv: 1211.2880 [quant-ph].
- [26] Nielsen, M. A. “Conditions for a class of entanglement transformations”. *Physical Review Letters*, 83 (2): 436–439 (1999). doi:10.1103/physrevlett.83.436.
- [27] Vidal, G. “Entanglement monotones”. *Journal of Modern Optics*, 47 (2-3): 355–376 (2000). doi:10.1080/09500340008244048.
- [28] Chitambar, E., Leung, D., Mančinska, L., Ozols, M. y Winter, A. “Everything you always wanted to know about LOCC (but were afraid to ask)”. *Communications in Mathematical Physics*, 328 (1): 303–326 (2014). doi:10.1007/s00220-014-1953-9.
- [29] Chitambar, E. y Gour, G. “Quantum resource theories”. *Reviews of Modern Physics*, 91 (2): 025001 (2019). doi:10.1103/revmodphys.91.025001.
- [30] Wei, T.-C. y Goldbart, P. M. “Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states”. *Physical Review A*, 68 (4): 042307 (2003). doi:10.1103/physreva.68.042307.
- [31] Bennett, C. H., DiVincenzo, D. P., Smolin, J. A. y Wootters, W. K. “Mixed-state entanglement and quantum error correction”. *Physical Review A*, 54 (5): 3824–3851 (1996). doi:10.1103/physreva.54.3824.
- [32] Bennett, C. H., Bernstein, H. J., Popescu, S. y Schumacher, B. “Concentrating partial entanglement by local operations”. *Physical Review A*, 53 (4): 2046–2052 (1996). doi:10.1103/physreva.53.2046.
- [33] Hill, S. y Wootters, W. K. “Entanglement of a pair of quantum bits”. *Physical Review Letters*, 78 (26): 5022–5025 (1997). doi:10.1103/physrevlett.78.5022.
- [34] Wootters, W. K. “Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits”. *Physical Review Letters*, 80 (10): 2245–2248 (1998). doi:10.1103/physrevlett.80.2245.
- [35] Wootters, W. K. “Entanglement of formation and concurrence”. *Quantum Information and Computation*, 1 (1): 27–44 (2001). doi:10.26421/QIC1.1. URL <http://www.rintonpress.com/journals/qic-1-1/eof2.pdf>.
- [36] Peres, A. “Separability criterion for density matrices”. *Physical Review Letters*, 77 (8): 1413 (1996). doi:10.1103/physrevlett.77.1413.
- [37] Horodecki, M., Horodecki, P. y Horodecki, R. “Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions”. *Physics Letters A*, 223 (1): 1–8 (1996). doi:10.1016/s0375-9601(96)00706-2.
- [38] Coffman, V., Kundu, J. y Wootters, W. K. “Distributed entanglement”. *Physical Review A*, 61 (5): 052306 (2000). doi:10.1103/physreva.61.052306.

- [39] Simon, R. “Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems”. *Physical Review Letters*, 84 (12): 2726 (2000). doi:10.1103/PhysRevLett.84.2726.
- [40] Werner, R. F. “Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model”. *Physical Review A*, 40 (8): 4277–4281 (1989). doi:10.1103/physreva.40.4277.
- [41] Holevo, A. y Werner, R. “Evaluating capacities of bosonic Gaussian channels”. *Physical Review A*, 63 (3): 032312 (2001). doi:10.1103/physreva.63.032312.
- [42] Botero, A. y Reznik, B. “Modewise entanglement of Gaussian states”. *Physical Review A*, 67 (5): 052311 (2003). doi:10.1103/physreva.67.052311.
- [43] Giedke, G., Eisert, J., Cirac, J. I. y Plenio, M. B. “Entanglement transformations of pure Gaussian states”. *Quantum Information and Computation*, 3: 211 (2003). arXiv: 0510052 [quant-ph].
- [44] Adesso, G., Serafini, A. y Illuminati, F. “Extremal entanglement and mixedness in continuous variable systems”. *Physical Review A*, 70 (2): 022318 (2004). doi:10.1103/physreva.70.022318.
- [45] Serafini, A., Illuminati, F. y Siena, S. D. “Symplectic invariants, entropic measures and correlations of Gaussian states”. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 37 (2): L21–L28 (2003). doi:10.1088/0953-4075/37/2/102.
- [46] Agarwal, G. S. “Entropy, the Wigner distribution function, and the approach to equilibrium of a system of coupled harmonic oscillators”. *Physical Review A*, 3 (2): 828–831 (1971). doi:10.1103/physreva.3.828.
- [47] Holevo, A. S., Shohma, M. y Hirota, O. “Capacity of quantum Gaussian channels”. *Physical Review A*, 59 (3): 1820–1828 (1999). doi:10.1103/physreva.59.1820.
- [48] Vidal, G. y Werner, R. F. “Computable measure of entanglement”. *Physical Review A*, 65 (3): 032314 (2002). doi:10.1103/physreva.65.032314.
- [49] Adesso, G. y Illuminati, F. “Continuous variable tangle, monogamy inequality, and entanglement sharing in Gaussian states of continuous variable systems”. *New Journal of Physics*, 8: 15–15 (2006). doi:10.1088/1367-2630/8/1/015.
- [50] Hiroshima, T., Adesso, G. y Illuminati, F. “Monogamy inequality for distributed Gaussian entanglement”. *Physical Review Letters*, 98 (5): 050503 (2007). doi:10.1103/physrevlett.98.050503.
- [51] Kreis, K. y van Loock, P. “Classifying, quantifying and witnessing qudit-qumode hybrid entanglement”. *Physical Review A*, 85 (3): 032307 (2012). doi:10.1103/PhysRevA.85.032307.
- [52] Roston, G. B., Casas, M., Plastino, A. y Plastino, A. R. “Quantum entanglement, spin 1/2 and the Stern-Gerlach experiment”. *European Journal of Physics*, 26: 657–672 (2005). doi:10.1088/0143-0807/26/4/012.

- [53] Gerlach, W. y Stern, O. “Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld”. *Zeitschrift für Physik*, 9 (1): 349–352 (1922). doi:10.1007/bf01326983.
- [54] Gerlach, W. y Stern, O. “Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms”. *Zeitschrift für Physik*, 8 (1): 110–111 (1922). doi:10.1007/bf01329580.
- [55] Gerlach, W. y Stern, O. “Das magnetische Moment des Silberatoms”. *Zeitschrift für Physik*, 9 (1): 353–355 (1922). doi:10.1007/bf01326984.
- [56] Bohm, D. *Quantum Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1951).
- [57] Böhm, A. *Quantum mechanics*. Springer-Verlag, New York (1979). ISBN 9780387088624.
- [58] Sakurai, J. J. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley Pub. Co (1994). ISBN 0201539292.
- [59] Sakurai, J. J. y Napolitano, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley, 2^a ed^{ón}. (2010). ISBN 9780805382914.
- [60] Sakurai, J. J. y Napolitano, J. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 3^a ed^{ón}. (2020). ISBN 978-1-108-47322-4. doi:10.1017/9781108587280.
- [61] Townsend, J. S. *A Modern Approach to Quantum Mechanics*. University Science Books, U.S., 2^a ed^{ón}. (2012). ISBN 1891389785. URL https://www.ebook.de/de/product/18529736/john_s_townsend_a_modern_approach_to_quantum_mechanics_second_edition.html.
- [62] Griffiths, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson Prentice Hall, 2^a ed^{ón}. (2004). ISBN 0131118927.
- [63] Griffiths, D. J. y Schroeter, D. F. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 3^a ed^{ón}. (2018). ISBN 1107189632. URL https://www.ebook.de/de/product/31794885/david_j_reed_college_oregon_griffiths_darrell_f_reed_college_oregon_schroeter_introduction_to_quantum_mechanics.html.
- [64] McIntyre, D. *Quantum mechanics : a paradigms approach*. Pearson, Boston (2012). ISBN 9780321765796.
- [65] Kohnle, A., Bozhinova, I., Browne, D., Everitt, M., Fomins, A., Kok, P., Kulaitis, G., Prokopas, M., Raine, D. y Swinbank, E. “A new introductory quantum mechanics curriculum”. *European Journal of Physics*, 35 (1): 015001 (2013). doi:10.1088/0143-0807/35/1/015001.
- [66] Zhu, G. y Singh, C. “Improving students’ understanding of quantum mechanics via the Stern–Gerlach experiment”. *American Journal of Physics*, 79 (5): 499–507 (2011). doi:10.1119/1.3546093.
- [67] Ramsey, N. F. “Molecular beams: our legacy from Otto Stern”. *Zeitschrift für Physik D Atoms, Molecules and Clusters*, 10 (2-3): 121–125 (1988). doi:10.1007/bf01384845.
- [68] Bell, J. S. “On the Einstein Podolsky Rosen paradox”. *Physics-Physique-Fizika*, 1 (3): 195–200 (1964). doi:10.1103/physicsphysiquefizika.1.195.

- [69] Einstein, A., Podolsky, B. y Rosen, N. “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” *Physical Review*, 47: 777 (1935). doi:10.1103/PhysRev.47.777.
- [70] Bohm, D. y Aharonov, Y. “Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky”. *Physical Review*, 108 (4): 1070–1076 (1957). doi:10.1103/physrev.108.1070.
- [71] Greenberg, D. M., Horne, M. A., Shimony, A. y Zeilinger, A. “Bell’s theorem without inequalities”. *American Journal of Physics*, 58 (12): 1131 (1990). ISSN 1943-2909. doi:10.1119/1.16243.
- [72] Schrödinger, E. “Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik”. *Die Naturwissenschaften*, 23: 807–812; 823–828; 844–849 (1935).
- [73] Baumann, K. y Sexl, R. U. *Erwin Schrödinger Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik (1935)*, pág. 98. Facetten der Physik 11. Vieweg+Teubner Verlag (1984). doi:10.1007/978-3-663-14179-2.
- [74] Schrödinger, E. “Probability relations between separated systems”. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 32 (3): 446–452 (1936). doi:10.1017/s0305004100019137.
- [75] Bell, J. S. “On the problem of hidden variables in quantum mechanics”. *Reviews of Modern Physics*, 38 (3): 447–452 (1966). doi:10.1103/revmodphys.38.447.
- [76] Batle-Vallespir, J. “Characterization of quantum entangled states and information measures”. *Ph.D. Thesis (University of Balearic Islands)*. (2006). arXiv: 0603124 [quant-ph].
- [77] Horodecki, R. y Horodecki, M. “Information-theoretic aspects of inseparability of mixed states”. *Physical Review A*, 54 (3): 1838–1843 (1996). doi:10.1103/physreva.54.1838.
- [78] Shchukin, E. V. y Vogel, W. “Nonclassical moments and their measurement”. *Physical Review A*, 72 (4): 043808 (2005). doi:10.1103/physreva.72.043808.
- [79] Mermin, N. D. “What’s wrong with this temptation?” *Physics Today*, 47 (6): 9–11 (1994). doi:10.1063/1.2808514.
- [80] Howard, D. “Revisiting the Einstein–Bohr dialogue”. *Iyyun: The Jerusalem Philosophical Quarterly*, 56: 57–90 (2007). doi:10.2307/23354465.
- [81] Howard, D. *‘Nicht sein kann was nicht sein darf,’ or the Prehistory of EPR, 1909-1935: Einstein’s Early Worries about the Quantum Mechanics of Composite Systems*. Springer US (1990). ISBN 9781468487718.
- [82] Norsen, T. “Einstein’s boxes”. *American Journal of Physics* (2005). doi:10.1119/1.1811620. arXiv: 0404016 [quant-ph].
- [83] Norsen, T. “John S. Bell’s concept of local causality”. *American Journal of Physics*, 79 (12): 1261–1275 (2011). doi:10.1119/1.3630940.

- [84] Arianrhod, R. “Einstein, Bohr and the origins of entanglement” (2017). URL <https://cosmosmagazine.com/physics/einstein-bohr-and-the-origins-of-entanglement>.
- [85] Fine, A. *The shaky game: Einstein, realism, and the quantum theory*. University of Chicago Press (1986). ISBN 0226249468.
- [86] Weinert, F. “Wrong theory-right experiment: The significance of the Stern-Gerlach experiments”. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 26 (1): 75–86 (1995). doi:10.1016/1355-2198(95)00002-b.
- [87] Aspect, A., Grangier, P. y Roger, G. “Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequalities”. *Physical Review Letters*, 49 (2): 91–94 (1982). doi:10.1103/physrevlett.49.91.
- [88] Weyl, H. *The Problem of Several Bodies. Product Space.*, cap. II. S. Hirzel, 2^a ed^{ón}. (1931). ISBN 3534066685.
- [89] Weyl, H. *The Problem of Several Bodies. Product Space*, cap. II. Quantum Theory. Dover Publications, Inc., 2^a ed^{ón}. (1931).
- [90] Einstein, A. “Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt”. *Annalen der Physik*, 322 (6): 132–148 (1905). doi:10.1002/andp.19053220607.
- [91] Arons, A. B. y Peppard, M. B. “Einstein's proposal of the photon concept—a translation of the annalen der physik paper of 1905”. *American Journal of Physics*, 33 (5): 367–374 (1965). doi:10.1119/1.1971542.
- [92] NobelPrize.org. Nobel Media AB. “The Nobel Prize in Physics 1921” (2020). URL <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1921/summary/>.
- [93] Wien, W. “XXX. on the division of energy in the emission-spectrum of a black body”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43 (262): 214–220 (1897). doi:10.1080/14786449708620983.
- [94] Einstein, A. “a H. A. Lorentz, 23 mayo 1909 (ea 16-419)” (1909).
- [95] Walker, E. *The physics of consciousness : the quantum minds and the meaning of life*. Perseus Books, Cambridge, Mass (2000). ISBN 0738204366.
- [96] Planck, M. “Über eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung”. *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 2: 202–204 (1900).
- [97] Planck, M. “Über eine Verbesserung der Wienschen Spektralgleichung”. En “Von Kirchhoff bis Planck”, págs. 175–178. Vieweg+Teubner Verlag (1978). doi:10.1007/978-3-663-13885-3_15.
- [98] Planck, M. “On an improvement of Wien's equation for the spectrum”. En “The Old Quantum Theory”, págs. 79–81. Elsevier (1967). ISBN 978-0-08-012102-4. doi:10.1016/b978-0-08-012102-4.50012-7.

- [99] Planck, M. “Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum”. *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 2: 237–245 (1900).
- [100] Planck, M. “Faksimile aus den Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 2 (1900) S. 237: Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum, von M. Planck”. *Physik Journal*, 4 (4): 146–151 (1948). doi:10.1002/phbl.19480040404.
- [101] Planck, M. “On the theory of the energy distribution law of the normal spectrum”. En “The Old Quantum Theory”, págs. 82–90. Elsevier (1967). ISBN 978-0-08-012102-4. doi:10.1016/b978-0-08-012102-4.50013-9.
- [102] Planck, M. “Entropie und Temperatur strahlender Wärme”. *Annalen der Physik*, 306 (4): 719–737 (1900). doi:10.1002/andp.19003060410.
- [103] Tannoudji, C., Diu, B. y Laloë, F. *Quantum mechanics*. Wiley, 2^a ed^{ón}. (1977). ISBN 0471164321.
- [104] French, A. P. y Taylor, E. F. *An introduction to quantum physics*. Van Nostrand Reinhold (1979). ISBN 0442307705.
- [105] Broglie, L. D. “Recherches sur la théorie des Quanta”. *Annales de Physique*, 10 (3): 22–128 (1925). doi:10.1051/anphys/192510030022.
- [106] of Louis de Broglie, F. “On the theory of quanta” (2004). Translated by A.F. Kracklauer, URL https://aflb.minesparis.psl.eu/LDB-oeuvres/De_Broglie_Kracklauer.pdf.
- [107] Wolfke, M. “Antwort auf die Bemerkung Herrn Krutkows zu meiner Note: ‘Welche Strahlungsformel folgt aus den Annahme der Lichtatome?’”. *Physikalische Zeitschrift*, 15: 463–464 (1914).
- [108] Ehrenfest, P. y Onnes, H. K. “XXXIII. Simplified deduction of the formula from the theory of combinations which Planck uses as the basis of his radiation theory. Appendix: ‘The contrast between Planck’s hypothesis of the energy-grades and Einstein’s hypothesis of energy-quanta.’”. *Amsterdam Academy of Sciences Proceedings*, 17 (170): 870–873 (1914). doi:10.1080/14786440208635308.
- [109] Kuhn, T. *Black-body theory and the quantum discontinuity, 1894-1912*. Clarendon Press Oxford University Press (1978). ISBN 9780195023831.
- [110] Planck, M. *The Theory of Heat Radiation*. P. Blakiston’s Son & Co., 2^a ed^{ón}. (1914).
- [111] Planck, M. *Eight Lectures on Theoretical Physics, delivered at Columbia University in 1909*. Columbia University Press (1915). ISBN 978-0342838431.
- [112] Einstein, A. “Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung.” *Preußischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse. Sitzungsberichte*, págs. 3–14 (1925).
- [113] Einstein, A. *Quantentheorie des Einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung.*, tomo Volume 14: The Berlin Years: Writings & Correspondence, April 1923-May 1925, págs. 581–594. Princeton University Press (1987). ISBN 9780691164106.

- [114] Einstein, A. *Quantum Theory of Ideal Gas II*, tomo Volume 14: The Berlin Years: Writings & Correspondence, April 1923-May 1925 (English Translation Supplement), págs. 371–383. Princeton University Press (1987). ISBN 9780691164229.
- [115] Einstein, A. *The collected papers of Albert Einstein*, tomo Volume 14: The Berlin Years: Writings & Correspondence, April 1923-May 1925 (English Translation Supplement). Princeton University Press (1987). ISBN 9780691164229.
- [116] Bose, S. N. “Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese”. *Zeitschrift für Physik*, 26 (1): 178–181 (1924). doi:10.1007/bf01327326.
- [117] Einstein, A. “a Erwin Schrödinger, 28 febrero 1925 (EA 22-002)” (1925). URL <http://alberteinstein.info/vufind1/Record/EAR000023973>.
- [118] Einstein, A. *To Erwin Schrödinger*, tomo Volume 14: The Berlin Years: Writings & Correspondence, April 1923-May 1925 (English Translation Supplement), págs. 438–439. Princeton University Press (1987). ISBN 9780691164229.
- [119] Schrödinger, E. “Zur Einsteinschen Gastheorie”. *Physikalische Zeitschrift*, 27: 95–101 (1926).
- [120] Einstein, A. “Bestimmt Schrödinger’s Wellenmechanik die Bewegung eines Systems vollständig oder nur im Sinne der Statistik? Nachtrag zur Korrektur”. *Prussian Academy of Sciences* (1927).
- [121] Einstein, A. *Bestimmt Schrödinger’s Wellenmechanik die Bewegung eines Systems vollständig oder nur im Sinne der Statistik? Nachtrag zur Korrektur*, tomo Volume 15 (Translation Supplement): The Berlin Years: Writings & Correspondence, June 1925–May 1927, págs. 810–814. Princeton Univers. Press (2018). ISBN 9780691178813.
- [122] Einstein, A. *Document 516 Schrödinger Wave Mechanics*, tomo Volume 15 (Translation Supplement): The Berlin Years: Writings & Correspondence, June 1925–May 1927, págs. 514–515. Princeton Univers. Press (2018). ISBN 0691178828.
- [123] Einstein, A., Aebi, A., Hentschel, K., Buchwald, D. K. y Illy, J. *Collected Papers of Albert Einstein*, tomo Volume 15 (Translation Supplement): The Berlin Years: Writings & Correspondence, June 1925–May 1927. Princeton Univers. Press (2018). ISBN 0691178828.
- [124] Bohr, N. “I. on the constitution of atoms and molecules”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26 (151): 1–25 (1913). doi:10.1080/14786441308634955.
- [125] Bohr, N. “XXXVII. on the constitution of atoms and molecules”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26 (153): 476–502 (1913). doi:10.1080/14786441308634993.
- [126] Bohr, N. “LXXIII. on the constitution of atoms and molecules”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26 (155): 857–875 (1913). doi:10.1080/14786441308635031.

- [127] Ramsauer, C. “Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen”. *Physikalische Zeitschrift*, 21: 576–578 (1920).
- [128] Ramsauer, C. “Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen”. *Annalen der Physik*, 369 (6): 513–540 (1921). doi:10.1002/andp.19213690603.
- [129] Ramsauer, C. “Über den Wirkungsquerschnitt der Edelgase gegenüber langsamen Elektronen”. *Physikalische Zeitschrift*, 22: 613–615 (1921).
- [130] Townsend, J. S. y Bailey, V. A. “XCVII. the motion of electrons in gases”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 42 (252): 873–891 (1921). doi:10.1080/14786442108633831.
- [131] Townsend, J. S. y Bailey, V. A. “LXX. the motion of electrons in argon”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43 (255): 593–600 (1922). doi:10.1080/14786442208633916.
- [132] Townsend, J. S. y Bailey, V. A. “CXIX. the abnormally long free paths of electrons in argon”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43 (258): 1127–1128 (1922). doi:10.1080/14786442208633968.
- [133] Townsend, J. S. y Bailey, V. A. “XCIV. the motion of electrons in argon and in hydrogen”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 44 (263): 1033–1052 (1922). doi:10.1080/14786441208562581.
- [134] Townsend, J. S. y Bailey, V. A. “LXXIII. motion of electrons in helium”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 46 (274): 657–664 (1923). doi:10.1080/14786442308634293.
- [135] Bothe, W. “Über die Kopplung zwischen elementaren Strahlungsvorgängen”. *Zeitschrift für Physik*, 37: 547–567 (1926).
- [136] Bothe, W. y Geiger, H. “Ein Weg zur experimentellen Nachprüfung der Theorie von Bohr, Kramers und Slater”. *Zeitschrift für Physik*, 26: 44 (1924).
- [137] Bothe, W. “Experimentelles zur Theorie von Bohr, Kramers und Slater”. *Die Naturwissenschaften*, 13: 440–441 (1925).
- [138] Compton, A. H. y Simon, A. W. “Measurements of β -rays associated with scattered X-rays”. *Physical Review*, 25 (3): 306–313 (1925). doi:10.1103/physrev.25.306.
- [139] Compton, A. H. y Simon, A. W. “Directed quanta of scattered X-rays”. *Physical Review*, 26 (3): 289–299 (1925). doi:10.1103/physrev.26.289.
- [140] Bohr, N., Kramers, H. A. y Slater, J. C. “LXXVI. the quantum theory of radiation”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 47 (281): 785–802 (1924). doi:10.1080/14786442408565262.
- [141] Bohr, N., Kramers, H. A. y Slater, J. C. “Über die Quantentheorie der Strahlung”. *Zeitschrift für Physik*, 24 (1): 69–87 (1924). doi:10.1007/bf01327235.

- [142] Bohr, N. *Collected works*, tomo V. The emergence of quantum mechanics (mainly 1924-1926). North-Holland Publishing Company (1984). ISBN 9780444865014.
- [143] Wikimedia Foundation. “Incompleteness of quantum physics” (2010). URL <https://enacademic.com/dic.nsf/enwiki/1392666#>.
- [144] Ehrenfest, P. “to N. Bohr, 9 july 1931”. *Bohr Scientific Correspondence, Archive for the History of Quantum Physics* (1931).
- [145] Einstein, A. “Physics and reality”. *Journal of the Franklin Institute*, 221 (3): 349–382 (1936). doi:10.1016/s0016-0032(36)91047-5.
- [146] de Broglie, L. “L'interprétation de la mécanique ondulatoire”. *Journal de Physique et le Radium*, 20 (12): 963–979 (1959). doi:10.1051/jphysrad:019590020012096300.
- [147] Jammer, M. *The philosophy of quantum mechanics; the interpretations of quantum mechanics in historical perspective*. Wiley (1974). ISBN 9780471439585.
- [148] Ballentine, L. E. “Einstein's interpretation of quantum mechanics”. *American Journal of Physics*, 40 (12): 1763–1771 (1972). doi:10.1119/1.1987060.
- [149] *Électrons et photons: Rapports et Discussions du Cinquieme Conseil de Physique tenu a Bruxelles du 24 au 29 Octobre 1927 sous les auspices de L'Institut International de Physique Solvay*. Gauthier-Villars et Cie (1928).
- [150] de Broglie, L. *The Current Interpretation of Wave Mechanics: A Critical Study*. Elsevier Publishing Company (1964). ISBN 044440158X, 9780444401588.
- [151] Bohr, N. *Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics*, pág. 201–241. La Salle: Open Court (1949).
- [152] Bohr, N. *Foundations of Quantum Physics I*, tomo 6 de *Niels Bohr Collected Works*, cap. Space-Time Continuity and Atomic Physics, lecture, University of Bristol, England, 5 October 1931, pág. 363. North-Holland Publishing Company (1985). ISBN 9780444867124.
- [153] Schrödinger, E. “a Albert Einstein, 7 junio 1935 (EA 22-044)” (1935). URL <http://alberteinstein.info/vufind1/Record/EAR000023973>.
- [154] Einstein, A. “a Erwin Schrödinger, 19 junio 1935 (EA 22-047)” (1935).
- [155] Wikimedia Foundation. “Principle of locality” (2010). URL <https://enacademic.com/dic.nsf/enwiki/240911>.
- [156] Einstein, A. “Quanten-Mechanik und Wirklichkeit”. *Dialectica*, 2 (3-4): 320–324 (1948). doi:10.1111/j.1746-8361.1948.tb00704.x.
- [157] Bohr, N. “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” *Physical Review*, 48 (8): 696–702 (1935). doi:10.1103/physrev.48.696.
- [158] Bohr, N. *Natural Philosophy and Human Cultures* (1938).

- [159] Bohr, N. "Natural philosophy and human cultures*". *Nature*, 143 (3616): 268–272 (1939). doi:10.1038/143268a0.
- [160] Bohr, N. *Natural Philosophy and Human Cultures*, págs. 23–31. John Wiley & Sons, 2^a ed^{ón}. (2010). ISBN 0486479285. URL https://www.ebook.de/de/product/11440742/niels_bohr_atomic_physics_and_human_knowledge.html.
- [161] Einstein, A. *Remarks Concerning the Essays Brought together in this Co-operative Volume*. The Library of Living Philosophers. Evanston (1949). ISBN 9781567314328, 1567314325.
- [162] Wu, C. S. y Shaknov, I. "The angular correlation of scattered annihilation radiation". *Physical Review*, 77 (1): 136–136 (1950). doi:10.1103/physrev.77.136.
- [163] Aspect, A. "Introduction: John Bell and the second quantum revolution". En "Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics", págs. xvii–xl. Cambridge University Press (2004). doi:10.1017/cbo9780511815676.002.
- [164] Horne, M., Shimony, A. y Zeilinger, A. "Down-conversion photon pairs: A new chapter in the history of quantum mechanical entanglement". En "Quantum Coherence", World Scientific (1991). doi:10.1142/9789814439251_0031.
- [165] Bohm, D. "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden"variables. I". *Physical Review*, 85 (2): 166–179 (1952). doi:10.1103/physrev.85.166.
- [166] Bohm, D. "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden"variables. II". *Physical Review*, 85 (2): 180–193 (1952). doi:10.1103/physrev.85.180.
- [167] Bell, J. S. "On the impossible pilot wave". *Foundations of Physics*, 12 (10): 989–999 (1982). doi:10.1007/bf01889272.
- [168] Bell, J. S. "Preface to the first edition". En "Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics", págs. xi–xiii. Cambridge University Press (2004). doi:10.1017/cbo9780511815676.001.
- [169] Bell, J. S. "On wave packet reduction in the Coleman-Hepp model". *Helvetica Physica Acta*, 48: 93–98 (1975).
- [170] Bell, J. S. *Quantum Gravity 2. A second Oxford symposium*, cap. Quantum mechanics for cosmologists. Oxford University Press (1981).
- [171] Bell, J. S. "Introduction to the Hidden-Variable question. lecture notes for the international school of physics 'enrico fermi', il course foundations of quantum mechanics, 1970". *CERN-TH*, 1220 (1970). doi:10.0000/cds.cern.ch/CM-P00058691.
- [172] Bell, J. S. "Bertlmann's socks and the nature of reality". *Le Journal de Physique Colloques*, 42 (C2): C2–41–C2–62 (1981). doi:10.1051/jphyscol:1981202.
- [173] Bell, J. S. "The theory of local beables". En "TH-2053-CERN", (1975). URL <https://cds.cern.ch/record/980036/files/197508125.pdf>.
- [174] Bell, J. S. "EPR correlations and EPW distributions". *Annals of the New York Academy of Sciences*, 480 (1 New Technique): 263–266 (1986). doi:10.1111/j.1749-6632.1986.tb12429.x.

- [175] Bell, J. S. “The measurement theory of Everett and de Broglie’s pilot wave”. En “Quantum Mechanics, Determinism, Causality, and Particles”, págs. 11–17. Springer Netherlands (1976). doi:10.1007/978-94-010-1440-3_2.
- [176] Bell, J. S. “Free variables and local causality”. *Epistemological Letters = Lettres épistémologiques = Epistemologische Briefe*, págs. 2–6 (1977).
- [177] Bell, J. S. “De Broglie-Bohm, delayed-choice, double-slit experiment, and density matrix”. *International Journal of Quantum Chemistry*, 18 (S14): 155–159 (1980). doi:10.1002/qua.560180819.
- [178] Bell, J. S. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics : collected papers on quantum philosophy*. Cambridge University Press (1987). ISBN 0521368693.
- [179] de Broglie, L. “La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement”. *Journal de Physique et le Radium*, 8 (5): 225–241 (1927). doi:10.1051/jphysrad:0192700805022500.
- [180] von Neumann, J. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer (1932).
- [181] Clauser, J. F. y Shimony, A. “Bell’s theorem. experimental tests and implications”. *Reports on Progress in Physics*, 41 (12): 1881–1927 (1978). doi:10.1088/0034-4885/41/12/002.
- [182] Pipkin, F. M. “Atomic physics tests of the basic concepts in quantum mechanics”. En “Advances in Atomic and Molecular Physics”, págs. 281–340. Elsevier (1979). doi:10.1016/s0065-2199(08)60130-x.
- [183] Selleri, F. y Tarozzi, G. “Quantum mechanics reality and separability”. *La Rivista del Nuovo Cimento*, 4 (2): 1–53 (1981). doi:10.1007/bf02740737.
- [184] d’Espagnat, B. *À la recherche du réel*. Gauthier Villars (1979).
- [185] Bell, J. S. “Beables for quantum field theory”. En “CERN-TH. 4035/84”, (1984).
- [186] Hermann, G. “Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale”. *Mathematische Annalen*, 95 (1): 736–788 (1926). doi:10.1007/bf01206635.
- [187] Wikimedia Foundation. “Quantum Indeterminacy” (2010). URL <https://enacademic.com/dic.nsf/enwiki/125906>.
- [188] Bell, J. S. “Subject and object”. En “Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics”, págs. 40–44. Cambridge University Press (2004). doi:10.1017/cbo9780511815676.007.
- [189] Aspect, A. “Proposed experiment to test the nonseparability of quantum mechanics”. *Physical Review D*, 14 (8): 1944–1951 (1976). doi:10.1103/physrevd.14.1944.
- [190] Shimony, A., Horne, M. A. y Clauser, J. F. “Comment on “The Theory of Local Beables””. *Epistemological Letters = Lettres épistémologiques = Epistemologische Briefe*, 13: 1 (1976). URL <https://curate.nd.edu/show/cv43nv96424>.

- [191] Shimony, A. “Reply to Bell 17.3”. *Epistemological Letters = Lettres épistémologiques = Epistemologische Briefe*, 18: 1 (1978). URL <https://curate.nd.edu/show/d791sf2976t>.
- [192] Boole, G. *An Investigation of the Laws of Thought, On Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability*. Walton and Maberly (1854).
- [193] Fréchet, M. “Généralisations du théorème des probabilités totales”. *Fundamenta Mathematicae*, 25: 379–387 (1935).
- [194] Fréchet, M. “Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données”. *Annales de l’Université de Lyon. Section A: Sciences mathématiques et astronomie*, 9: 53–77 (1951).
- [195] Mermin, N. D. “Quantum mysteries refined”. *American Journal of Physics*, 62 (10): 880–887 (1994). doi:10.1119/1.17733.
- [196] Mermin, N. D. “The best version of Bell’s theorem”. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 755 (1): 616–623 (1995). doi:10.1111/j.1749-6632.1995.tb39001.x.
- [197] Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A. y Holt, R. A. “Proposed experiment to test local hidden-variable theories”. *Physical Review Letters*, 23 (15): 880–884 (1969). doi:10.1103/physrevlett.23.880.
- [198] Clauser, J. F. y Horne, M. A. “Experimental consequences of objective local theories”. *Physical Review D*, 10 (2): 526–535 (1974). doi:10.1103/physrevd.10.526.
- [199] Freedman, S. J. y Clauser, J. F. “Experimental test of local hidden-variable theories”. *Physical Review Letters*, 28 (14): 938–941 (1972). doi:10.1103/physrevlett.28.938.
- [200] Clauser, J. F. “Experimental investigation of a polarization correlation anomaly”. *Physical Review Letters*, 36 (21): 1223–1226 (1976). doi:10.1103/physrevlett.36.1223.
- [201] Fry, E. S. y Thompson, R. C. “Experimental test of local hidden-variable theories”. *Physical Review Letters*, 37 (8): 465–468 (1976). doi:10.1103/physrevlett.37.465.
- [202] Bell, J. S. “Atomic-cascade photons and quantum-mechanical nonlocality”. *Comments on Atomic and Molecular Physics*, 9: 121–126 (1980).
- [203] Aspect, A. “Bell’s theorem : The naive view of an experimentalist” (2004). arXiv: 0402001 [quant-ph].
- [204] Aspect, A., Dalibard, J. y Roger, G. “Experimental test of Bell’s inequalities using time-varying analyzers”. *Physical Review Letters*, 49 (25): 1804–1807 (1982). doi:10.1103/physrevlett.49.1804.
- [205] Aspect, A. En “Waves, Information and Foundation of Physics”, tomo 60. Conf. Proc. Italian Phys. Soc. (1998).
- [206] Aspect, A. “Bell’s inequality test: more ideal than ever”. *Nature*, 398 (6724): 189–190 (1999). doi:10.1038/18296.

- [207] Weihs, G., Jennewein, T., Simon, C., Weinfurter, H. y Zeilinger, A. “Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality conditions”. *Physical Review Letters*, 81 (23): 5039–5043 (1998). doi:10.1103/physrevlett.81.5039.
- [208] Tittel, W., Brendel, J., Gisin, B., Herzog, T., Zbinden, H. y Gisin, N. “Experimental demonstration of quantum correlations over more than 10 km”. *Physical Review A*, 57 (5): 3229–3232 (1998). doi:10.1103/physreva.57.3229.
- [209] Tittel, W., Brendel, J., Zbinden, H. y Gisin, N. “Violation of Bell inequalities by photons more than 10 km apart”. *Physical Review Letters*, 81 (17): 3563–3566 (1998). doi:10.1103/physrevlett.81.3563.
- [210] Tapster, P. R., Rarity, J. G. y Owens, P. C. M. “Violation of Bell's inequality over 4 km of optical fiber”. *Physical Review Letters*, 73 (14): 1923–1926 (1994). doi:10.1103/physrevlett.73.1923.
- [211] Pan, J.-W., Bouwmeester, D., Daniell, M., Weinfurter, H. y Zeilinger, A. “Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger–Horne–Zeilinger entanglement”. *Nature*, 403 (6769): 515–519 (2000). doi:10.1038/35000514.
- [212] Greenberger, D. M., Horne, M. A., Shimony, A. y Zeilinger, A. “Bell's theorem without inequalities”. *American Journal of Physics*, 58 (12): 1131–1143 (1990). doi:10.1119/1.16243.
- [213] Gröblacher, S., Paterek, T., Kaltenbaek, R., Brukner, Č., Żukowski, M., Aspelmeyer, M. y Zeilinger, A. “An experimental test of non-local realism”. *Nature*, 446 (7138): 871–875 (2007). doi:10.1038/nature05677.
- [214] Cartwright, J. “Quantum physics says goodbye to reality. archivado del original el 20 de abril de 2007.” (2007). URL <https://web.archive.org/web/20071019231848/https://physicsworld.com/cws/article/news/27640>.
- [215] Leggett, A. J. “Nonlocal hidden-variable theories and quantum mechanics: An incompatibility theorem”. *Foundations of Physics*, 33 (10): 1469–1493 (2003). doi:10.1023/a:1026096313729.
- [216] Romero, J., Leach, J., Jack, B., Barnett, S. M., Padgett, M. J. y Franke-Arnold, S. “Violation of Leggett inequalities in orbital angular momentum subspaces”. *New Journal of Physics*, 12 (12): 123007 (2010). doi:10.1088/1367-2630/12/12/123007.
- [217] Formaggio, J. A., Kaiser, D. I., Murskyj, M. M. y Weiss, T. E. “Violation of the Leggett-Garg inequality in neutrino oscillations”. *Physical Review Letters*, 117 (5): 050402 (2016). doi:10.1103/physrevlett.117.050402.
- [218] Larsson, J.-Å. “Bell's inequality and detector inefficiency”. *Physical Review A*, 57 (5): 3304–3308 (1998). doi:10.1103/physreva.57.3304.
- [219] Pascasio, S. “Time and Bell-type inequalities”. *Physics Letters A*, 118 (2): 47–53 (1986). doi:10.1016/0375-9601(86)90645-6.
- [220] Larsson, J.-Å. y Gill, R. D. “Bell's inequality and the coincidence-time loophole”. *Europhysics Letters (EPL)*, 67 (5): 707–713 (2004). doi:10.1209/epl/i2004-10124-7.

- [221] Barrett, J., Collins, D., Hardy, L., Kent, A. y Popescu, S. “Quantum nonlocality, Bell inequalities, and the memory loophole”. *Physical Review A*, 66 (4): 042111 (2002). doi:10.1103/physreva.66.042111.
- [222] Gill, R. D. *Accardi contra Bell (cum mundi): The Impossible Coupling*, tomo 42 de *IMS Lecture Notes – Monograph Series*, págs. 133–154. Institute of Mathematical Statistics (2003). arXiv: 0110137 [quant-ph].
- [223] Kaiser, D. “Is quantum entanglement real?” (2014). URL <https://www.nytimes.com/2014/11/16/opinion/sunday/is-quantum-entanglement-real.html>.
- [224] Rowe, M. A., Kielpinski, D., Meyer, V., Sackett, C. A., Itano, W. M., Monroe, C. y Wineland, D. J. “Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection”. *Nature*, 409 (6822): 791–794 (2001). doi:10.1038/35057215.
- [225] Ansmann, M., Wang, H., Bialczak, R. C., Hofheinz, M., Lucero, E., Neeley, M., O'Connell, A. D., Sank, D., Weides, M., Wenner, J., Cleland, A. N. y Martinis, J. M. “Violation of Bell's inequality in Josephson phase qubits”. *Nature*, 461 (7263): 504–506 (2009). doi:10.1038/nature08363.
- [226] Pfaff, W., Taminiau, T. H., Robledo, L., Bernien, H., Markham, M., Twitchen, D. J. y Hanson, R. “Demonstration of entanglement-by-measurement of solid-state qubits”. *Nature Physics*, 9 (1): 29–33 (2012). doi:10.1038/nphys2444.
- [227] Giustina, M., Mech, A., Ramelow, S., Wittmann, B., Kofler, J., Beyer, J., Lita, A., Calkins, B., Gerrits, T., Nam, S. W., Ursin, R. y Zeilinger, A. “Bell violation using entangled photons without the fair-sampling assumption”. *Nature*, 497 (7448): 227–230 (2013). doi:10.1038/nature12012.
- [228] Christensen, B. G., McCusker, K. T., Altepeter, J. B., Calkins, B., Gerrits, T., Lita, A. E., Miller, A., Shalm, L. K., Zhang, Y., Nam, S. W., Brunner, N., Lim, C. C. W., Gisin, N. y Kwiat, P. G. “Detection-loophole-free test of quantum nonlocality, and applications”. *Physical Review Letters*, 111 (13): 130406 (2013). doi:10.1103/physrevlett.111.130406.
- [229] Larsson, J.-Å., Giustina, M., Kofler, J., Wittmann, B., Ursin, R. y Ramelow, S. “Bell-inequality violation with entangled photons, free of the coincidence-time loophole”. *Physical Review A*, 90 (3): 032107 (2014). doi:10.1103/physreva.90.032107.
- [230] Scheidl, T., Ursin, R., Kofler, J., Ramelow, S., Ma, X.-S., Herbst, T., Ratschbacher, L., Fedrizzi, A., Langford, N. K., Jennewein, T. y Zeilinger, A. “Violation of local realism with freedom of choice”. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107 (46): 19708–19713 (2010). doi:10.1073/pnas.1002780107.
- [231] Hensen, B., Bernien, H., Dréau, A. E., Reiserer, A., Kalb, N., Blok, M. S., Ruitenberg, J., Vermeulen, R. F. L., Schouten, R. N., Abellán, C., Amaya, W., Pruneri, V., Mitchell, M. W., Markham, M., Twitchen, D. J., Elkouss, D., Wehner, S., Taminiau, T. H. y Hanson, R. “Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres”. *Nature*, 526 (7575): 682–686 (2015). doi:10.1038/nature15759.

- [232] Giustina, M., Versteegh, M. A. M., Wengerowsky, S., Handsteiner, J., Hochtainer, A., Phelan, K., Steinlechner, F., Kofler, J., Larsson, J.-Å., Abellán, C., Amaya, W., Pruneri, V., Mitchell, M. W., Beyer, J., Gerrits, T., Lita, A. E., Shalm, L. K., Nam, S. W., Scheidl, T., Ursin, R., Wittmann, B. y Zeilinger, A. “Significant-loophole-free test of Bell’s theorem with entangled photons”. *Physical Review Letters*, 115 (25): 250401 (2015). doi:10.1103/physrevlett.115.250401.
- [233] Shalm, L. K., Meyer-Scott, E., Christensen, B. G., Bierhorst, P., Wayne, M. A., Stevens, M. J., Gerrits, T., Glancy, S., Hamel, D. R., Allman, M. S., Coakley, K. J., Dyer, S. D., Hodge, C., Lita, A. E., Verma, V. B., Lambrocco, C., Tortorici, E., Migdall, A. L., Zhang, Y., Kumor, D. R., Farr, W. H., Marsili, F., Shaw, M. D., Stern, J. A., Abellán, C., Amaya, W., Pruneri, V., Jennewein, T., Mitchell, M. W., Kwiat, P. G., Bienfang, J. C., Mirin, R. P., Knill, E. y Nam, S. W. “Strong loophole-free test of local realism”. *Physical Review Letters*, 115 (25): 250402 (2015). doi:10.1103/physrevlett.115.250402.
- [234] Rosenfeld, W., Burchardt, D., Garthoff, R., Redeker, K., Ortegel, N., Rau, M. y Weinfurter, H. “Event-ready Bell test using entangled atoms simultaneously closing detection and locality loopholes”. *Physical Review Letters*, 119 (1): 010402 (2017). doi:10.1103/physrevlett.119.010402.
- [235] Handsteiner, J., Friedman, A. S., Rauch, D., Gallicchio, J., Liu, B., Hosp, H., Kofler, J., Bricher, D., Fink, M., Leung, C., Mark, A., Nguyen, H. T., Sanders, I., Steinlechner, F., Ursin, R., Wengerowsky, S., Guth, A. H., Kaiser, D. I., Scheidl, T. y Zeilinger, A. “Cosmic Bell test: Measurement settings from Milky Way stars”. *Physical Review Letters*, 118 (6): 060401 (2017). doi:10.1103/physrevlett.118.060401.
- [236] Johnston, H. “Cosmic bell test uses light from ancient quasars” (2018). URL <https://physicsworld.com/a/cosmic-bell-test-uses-light-from-ancient-quasars/>.
- [237] Li, M.-H., Wu, C., Zhang, Y., Liu, W.-Z., Bai, B., Liu, Y., Zhang, W., Zhao, Q., Li, H., Wang, Z., You, L., Munro, W., Yin, J., Zhang, J., Peng, C.-Z., Ma, X., Zhang, Q., Fan, J. y Pan, J.-W. “Test of local realism into the past without detection and locality loopholes”. *Physical Review Letters*, 121 (8): 080404 (2018). doi:10.1103/physrevlett.121.080404.
- [238] Rauch, D., Handsteiner, J., Hochtainer, A., Gallicchio, J., Friedman, A. S., Leung, C., Liu, B., Bulla, L., Ecker, S., Steinlechner, F., Ursin, R., Hu, B., Leon, D., Benn, C., Ghedina, A., Cecconi, M., Guth, A. H., Kaiser, D. I., Scheidl, T. y Zeilinger, A. “Cosmic Bell test using random measurement settings from high-redshift quasars”. *Physical Review Letters*, 121 (8): 080403 (2018). doi:10.1103/physrevlett.121.080403.
- [239] The BIG Bell Test Collaboration. “Challenging local realism with human choices”. *Nature*, 557 (7704): 212–216 (2018). doi:10.1038/s41586-018-0085-3.
- [240] Wiseman, H. M., Jones, S. J. y Doherty, A. C. “Steering, entanglement, nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox”. *Physical Review Letters*, 98 (14): 140402 (2007). doi:10.1103/physrevlett.98.140402.

- [241] Popescu, S. “Bell’s inequalities versus teleportation: What is nonlocality?” *Physical Review Letters*, 72 (6): 797–799 (1994). doi:10.1103/physrevlett.72.797.
- [242] Gühne, O. y Tóth, G. “Entanglement detection”. *Physics Reports*, 474 (1-6): 1–75 (2009). doi:10.1016/j.physrep.2009.02.004.
- [243] Horodecki, P. “Bound entanglement”. En “Lectures on Quantum Information”, págs. 209–235. Wiley-VCH Verlag GmbH (2006). doi:10.1002/9783527618637.ch12.
- [244] Bennett, C. H., DiVincenzo, D. P., Mor, T., Shor, P. W., Smolin, J. A. y Terhal, B. M. “Unextendible product bases and bound entanglement”. *Physical Review Letters*, 82 (26): 5385–5388 (1999). doi:10.1103/physrevlett.82.5385.
- [245] Cohen, S. M. “Local distinguishability with preservation of entanglement”. *Physical Review A*, 75 (5): 052313 (2007). doi:10.1103/physreva.75.052313.
- [246] Duan, R., Feng, Y., Xin, Y. y Ying, M. “Distinguishability of quantum states by separable operations”. *IEEE Transactions on Information Theory*, 55 (3): 1320–1330 (2009). doi:10.1109/tit.2008.2011524.
- [247] Chitambar, E., Duan, R. y Shi, Y. “Tripartite entanglement transformations and tensor rank”. *Physical Review Letters*, 101 (14): 140502 (2008). doi:10.1103/physrevlett.101.140502.
- [248] Koashi, M., Takenaga, F., Yamamoto, T. y Imoto, N. “Quantum nonlocality without entanglement in a pair of qubits” (2007). arXiv: 0709.3196 [quant-ph], 0709.3196.
- [249] Childs, A. M., Leung, D., Mančinska, L. y Ozols, M. “A framework for bounding nonlocality of state discrimination”. *Communications in Mathematical Physics*, 323 (3): 1121–1153 (2013). ISSN 1432-0916. doi:10.1007/s00220-013-1784-0.
- [250] Størmer, E. “Decomposable positive maps on C^* -algebras”. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 86 (3): 402–402 (1982). doi:10.1090/s0002-9939-1982-0671203-5.
- [251] Bennett, C. H., Brassard, G., Popescu, S., Schumacher, B., Smolin, J. A. y Wootters, W. K. “Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels”. *Physical Review Letters*, 76 (5): 722–725 (1996). doi:10.1103/physrevlett.76.722.
- [252] Horodecki, P. “Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition”. *Physics Letters A*, 232 (5): 333–339 (1997). doi:10.1016/s0375-9601(97)00416-7.
- [253] Horodecki, M., Horodecki, P. y Horodecki, R. “Mixed-state entanglement and distillation: Is there a “bound” entanglement in nature?” *Physical Review Letters*, 80 (24): 5239–5242 (1998). doi:10.1103/physrevlett.80.5239.
- [254] Dür, W. “Multipartite bound entangled states that violate bell’s inequality”. *Physical Review Letters*, 87 (23): 230402 (2001). doi:10.1103/physrevlett.87.230402.
- [255] Augusiak, R. y Horodecki, P. “Bound entanglement maximally violating Bell inequalities: Quantum entanglement is not fully equivalent to cryptographic security”. *Physical Review A*, 74 (1): 010305 (2006). doi:10.1103/physreva.74.010305.

- [256] Moroder, T., Gittsovich, O., Huber, M. y Gühne, O. “Steering bound entangled states: A counterexample to the stronger peres conjecture”. *Physical Review Letters*, 113 (5): 050404 (2014). doi:10.1103/physrevlett.113.050404.
- [257] Pusey, M. F. “Negativity and steering: A stronger Peres conjecture”. *Physical Review A*, 88 (3): 032313 (2013). doi:10.1103/physreva.88.032313.
- [258] Skrzypczyk, P., Navascués, M. y Cavalcanti, D. “Quantifying Einstein-Podolsky-Rosen steering”. *Physical Review Letters*, 112 (18): 180404 (2014). doi:10.1103/physrevlett.112.180404.
- [259] Vértesi, T. y Brunner, N. “Quantum nonlocality does not imply entanglement distillability”. *Physical Review Letters*, 108 (3): 030403 (2012). doi:10.1103/physrevlett.108.030403.
- [260] Vértesi, T. y Brunner, N. “Disproving the Peres conjecture by showing Bell nonlocality from bound entanglement”. *Nature Communications*, 5: 5297 (2014). doi:10.1038/ncomms6297.
- [261] Terhal, B. M. “Bell inequalities and the separability criterion”. *Physics Letters A*, 271 (5-6): 319–326 (2000). doi:10.1016/s0375-9601(00)00401-1.
- [262] Horodecki, R. y Horodecki, P. “Quantum redundancies and local realism”. *Physics Letters A*, 194 (3): 147–152 (1994). doi:10.1016/0375-9601(94)91275-0.
- [263] Shannon, C. E. “A mathematical theory of communication”. *Bell System Technical Journal*, 27 (3): 379–423 (1948). doi:10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x.
- [264] Rényi, A. *Probability Theory*. North-Holland (1970).
- [265] Kullback, S. y Leibler, R. A. “On information and sufficiency”. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22 (1): 79–86 (1951). doi:10.1214/aoms/1177729694.
- [266] Kullback, S. *Information theory and statistics*. Peter Smith (1978). ISBN 0844656259.
- [267] Khinchin, A. I. *Mathematical Foundations of Information Theory*. Dover (1957). ISBN 0486604349. URL https://www.ebook.de/de/product/3303039/a_i_khinchin_mathematical_foundations_of_information_theory.html.
- [268] Jizba, P. y Arimitsu, T. “Generalized statistics: yet another generalization”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 340 (1-3): 110–116 (2004). doi:10.1016/j.physa.2004.03.085.
- [269] Tsallis, C. “Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics”. *Journal of Statistical Physics*, 52 (1-2): 479–487 (1988). doi:10.1007/bf01016429.
- [270] Landsberg, P. T. y Vedral, V. “Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics”. *Physics Letters A*, 247 (3): 211–217 (1998). doi:10.1016/s0375-9601(98)00500-3.
- [271] Vollbrecht, K. G. H. y Wolf, M. M. “Conditional entropies and their relation to entanglement criteria”. *Journal of Mathematical Physics*, 43 (9): 4299–4306 (2002). doi:10.1063/1.1498490.
- [272] Bhatia, R. “Springer science & business media”. En “Matrix analysis”, tomo 169. Springer (1997).

- [273] Bastiaans, M. J. “New class of uncertainty relations for partially coherent light”. *Journal of the Optical Society of America A*, 1 (7): 711 (1984). doi:10.1364/josaa.1.000711.
- [274] Peres, A. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Kluwer (1993).
- [275] Uhlmann, A. “Entropy and optimal decompositions of states relative to a maximal commutative subalgebra”. *Open Systems & Information Dynamics*, 5 (3): 209–228 (1998). doi:10.1023/a:1009664331611.
- [276] Uhlmann, A. “On concurrence and entanglement of rank two channels”. *Open Systems & Information Dynamics*, 12 (01): 93–106 (2005). doi:10.1007/s11080-005-0490-6.
- [277] Gao, X.-H., Fei, S.-M. y Wu, K. “Lower bounds of concurrence for tripartite quantum systems”. *Physical Review A*, 74 (5): 050303 (2006). doi:10.1103/physreva.74.050303.
- [278] Mintert, F., Kuś, M. y Buchleitner, A. “Concurrence of mixed bipartite quantum states in arbitrary dimensions”. *Physical Review Letters*, 92 (16): 167902 (2004). doi:10.1103/physrevlett.92.167902.
- [279] Gerjuoy, E. “Lower bound on entanglement of formation for the qubit-qudit system”. *Physical Review A*, 67 (5): 052308 (2003). doi:10.1103/physreva.67.052308.
- [280] Mintert, F., Carvalho, A., Kuś, M. y Buchleitner, A. “Measures and dynamics of entangled states”. *Physics Reports*, 415 (4): 207–259 (2005). doi:10.1016/j.physrep.2005.04.006.
- [281] Bae, J., Tiersch, M., Sauer, S., de Melo, F., Mintert, F., Hiesmayr, B. y Buchleitner, A. “Detection and typicality of bound entangled states”. *Physical Review A*, 80 (2): 022317 (2009). doi:10.1103/physreva.80.022317.
- [282] Audenaert, K., Verstraete, F. y Moor, B. D. “Variational characterizations of separability and entanglement of formation”. *Physical Review A*, 64 (5): 052304 (2001). doi:10.1103/physreva.64.052304.
- [283] Rungta, P., Bužek, V., Caves, C. M., Hillery, M. y Milburn, G. J. “Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions”. *Physical Review A*, 64 (4): 042315 (2001). doi:10.1103/physreva.64.042315.
- [284] Eisert, J. “Entanglement in quantum information theory”. *Ph.D. thesis, University of Potsdam* (2001). arXiv: 0610253 [quant-ph].
- [285] Plenio, M. B. “Logarithmic negativity: A full entanglement monotone that is not convex”. *Physical Review Letters*, 95 (9): 090503 (2005). doi:10.1103/physrevlett.95.090503.
- [286] Audenaert, K., Plenio, M. B. y Eisert, J. “Entanglement cost under positive-partial-transpose-preserving operations”. *Physical Review Letters*, 90 (2): 027901 (2003). doi:10.1103/physrevlett.90.027901.
- [287] Vedral, V., Plenio, M. B., Jacobs, K. y Knight, P. L. “Statistical inference, distinguishability of quantum states, and quantum entanglement”. *Physical Review A*, 56 (6): 4452–4455 (1997). doi:10.1103/physreva.56.4452.

- [288] Plenio, M. B. y Vedral, V. “Bounds on relative entropy of entanglement for multi-party systems”. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34 (35): 6997–7002 (2001). doi:10.1088/0305-4470/34/35/325.
- [289] Acín, A., Andrianov, A., Costa, L., Jané, E., Latorre, J. I. y Tarrach, R. “Generalized Schmidt decomposition and classification of three-quantum-bit states”. *Physical Review Letters*, 85 (7): 1560–1563 (2000). doi:10.1103/physrevlett.85.1560.
- [290] Peres, A. “Higher order Schmidt decompositions”. *Physics Letters A*, 202 (1): 16–17 (1995). doi:10.1016/0375-9601(95)00315-t.
- [291] Thapliyal, A. V. “Multipartite pure-state entanglement”. *Physical Review A*, 59 (5): 3336–3342 (1999). doi:10.1103/physreva.59.3336.
- [292] Vidal, G. “Entanglement of pure states for a single copy”. *Physical Review Letters*, 83 (5): 1046–1049 (1999). doi:10.1103/physrevlett.83.1046.
- [293] Miyake, A. “Classification of multipartite entangled states by multidimensional determinants”. *Physical Review A*, 67 (1): 012108 (2003). doi:10.1103/physreva.67.012108.
- [294] Linden, N., Popescu, S. y Sudbery, A. “Nonlocal parameters for multiparticle density matrices”. *Physical Review Letters*, 83 (2): 243–247 (1999). doi:10.1103/physrevlett.83.243.
- [295] Eisert, J. y Briegel, H. J. “Schmidt measure as a tool for quantifying multiparticle entanglement”. *Physical Review A*, 64 (2): 022306 (2001). doi:10.1103/physreva.64.022306.
- [296] Verstraete, F., Dehaene, J. y Moor, B. D. “Normal forms and entanglement measures for multipartite quantum states”. *Physical Review A*, 68 (1): 012103 (2003). doi:10.1103/physreva.68.012103.
- [297] Adesso, G. y Illuminati, F. *Quantum Information with Continuous Variables of Atoms and Light*, cap. Bipartite and Multipartite Entanglement of Gaussian States, págs. 1–21. Imperial College Press (2007). doi:10.1142/9781860948169_0001. arXiv: 0510052 [quant-ph].
- [298] Werner, R. F. y Wolf, M. M. “Bound entangled gaussian states”. *Physical Review Letters*, 86 (16): 3658–3661 (2001). doi:10.1103/physrevlett.86.3658.
- [299] Wolf, M. M., Giedke, G. y Cirac, J. I. “Extremality of Gaussian quantum states”. *Physical Review Letters*, 96 (8): 080502 (2006). doi:10.1103/physrevlett.96.080502.
- [300] Eisert, J., Scheel, S. y Plenio, M. B. “Distilling Gaussian states with Gaussian operations is impossible”. *Physical Review Letters*, 89 (13): 137903 (2002). doi:10.1103/physrevlett.89.137903.
- [301] Fiurášek, J. “Gaussian transformations and distillation of entangled Gaussian states”. *Physical Review Letters*, 89 (13): 137904 (2002). doi:10.1103/physrevlett.89.137904.
- [302] Giedke, G. y Cirac, J. I. “Characterization of Gaussian operations and distillation of Gaussian states”. *Physical Review A*, 66 (3): 032316 (2002). doi:10.1103/physreva.66.032316.

- [303] Menicucci, N. C., van Loock, P., Gu, M., Weedbrook, C., Ralph, T. C. y Nielsen, M. A. “Universal quantum computation with continuous-variable cluster states”. *Physical Review Letters*, 97 (11): 110501 (2006). doi:10.1103/physrevlett.97.110501.
- [304] Ourjoumtsev, A., Dantan, A., Tualle-Brouiri, R. y Grangier, P. “Increasing entanglement between Gaussian states by coherent photon subtraction”. *Physical Review Letters*, 98 (3): 030502 (2007). doi:10.1103/physrevlett.98.030502.
- [305] Uola, R., Costa, A. C., Nguyen, H. C. y Gühne, O. “Quantum steering”. *Reviews of Modern Physics*, 92 (1): 015001 (2020). doi:10.1103/revmodphys.92.015001.
- [306] Abramsky, S. y Brandenburger, A. “The sheaf-theoretic structure of non-locality and contextuality”. *New Journal of Physics*, 13 (11): 113036 (2011). doi:10.1088/1367-2630/13/11/113036.
- [307] Podoshvedov, S. A. “Efficient quantum teleportation of unknown qubit based on DV-CV interaction mechanism”. *Entropy*, 21 (2): 150 (2019). doi:10.3390/e21020150.
- [308] Gessner, M., Pezzè, L. y Smerzi, A. “Efficient entanglement criteria for discrete, continuous, and hybrid variables”. *Physical Review A*, 94 (2): 020101 (2016). doi:10.1103/physreva.94.020101.
- [309] Borrelli, M., Rossi, M., Macchiavello, C. y Maniscalco, S. “Witnessing entanglement in hybrid systems”. *Physical Review A*, 90 (2): 020301 (2014). doi:10.1103/physreva.90.020301.
- [310] Arkhipov, I. I., Barasiński, A. y Svozilik, J. “Negativity volume of the generalized Wigner function as an entanglement witness for hybrid bipartite states”. *Scientific Reports*, 8 (1): 16955 (2018). doi:10.1038/s41598-018-35330-6.
- [311] Morin, O., Huang, K., Liu, J., Jeannic, H. L., Fabre, C. y Laurat, J. “Remote creation of hybrid entanglement between particle-like and wave-like optical qubits”. *Nature Photonics*, 8 (7): 570–574 (2014). doi:10.1038/nphoton.2014.137.
- [312] Banaszek, K. “Optimal receiver for quantum cryptography with two coherent states”. *Physics Letters A*, 253 (1-2): 12–15 (1999). doi:10.1016/s0375-9601(99)00015-8.
- [313] Takeda, S., Mizuta, T., Fuwa, M., van Loock, P. y Furusawa, A. “Deterministic quantum teleportation of photonic quantum bits by a hybrid technique”. *Nature*, 500 (7462): 315–318 (2013). doi:10.1038/nature12366.
- [314] van Loock, P., Munro, W. J., Nemoto, K., Spiller, T. P., Ladd, T. D., Braunstein, S. L. y Milburn, G. J. “Hybrid quantum computation in quantum optics”. *Physical Review A*, 78 (2): 022303 (2008). doi:10.1103/physreva.78.022303.
- [315] van Loock, P., Ladd, T. D., Sanaka, K., Yamaguchi, F., Nemoto, K., Munro, W. J. y Yamamoto, Y. “Hybrid quantum repeater using bright coherent light”. *Physical Review Letters*, 96 (24) (2006). doi:10.1103/physrevlett.96.240501.

- [316] van Loock, P., Lütkenhaus, N., Munro, W. J. y Nemoto, K. “Quantum repeaters using coherent-state communication”. *Physical Review A*, 78 (6): 062319 (2008). doi:10.1103/physreva.78.062319.
- [317] Ladd, T. D., van Loock, P., Nemoto, K., Munro, W. J. y Yamamoto, Y. “Hybrid quantum repeater based on dispersive CQED interactions between matter qubits and bright coherent light”. *New Journal of Physics*, 8 (9): 184–184 (2006). doi:10.1088/1367-2630/8/9/184.
- [318] Spiller, T. P., Nemoto, K., Braunstein, S. L., Munro, W. J., van Loock, P. y Milburn, G. J. “Quantum computation by communication”. *New Journal of Physics*, 8 (2): 30–30 (2006). doi:10.1088/1367-2630/8/2/030.
- [319] Majer, J., Chow, J. M., Gambetta, J. M., Koch, J., Johnson, B. R., Schreier, J. A., Frunzio, L., Schuster, D. I., Houck, A. A., Wallraff, A., Blais, A., Devoret, M. H., Girvin, S. M. y Schoelkopf, R. J. “Coupling superconducting qubits via a cavity bus”. *Nature*, 449 (7161): 443–447 (2007). doi:10.1038/nature06184.
- [320] Simon, J., Tanji, H., Ghosh, S. y Vuletić, V. “Single-photon bus connecting spin-wave quantum memories”. *Nature Physics*, 3 (11): 765–769 (2007). doi:10.1038/nphys726.
- [321] Wittmann, C., Fürst, J., Wiechers, C., Elser, D., Häseler, H., Lütkenhaus, N. y Leuchs, G. “Witnessing effective entanglement over a 2km fiber channel”. *Optics Express*, 18 (5): 4499 (2010). doi:10.1364/oe.18.004499.
- [322] Beugnot, J.-C., Sylvestre, T., Maillotte, H., Mélin, G. y Laude, V. “Guided acoustic wave Brillouin scattering in photonic crystal fibers”. *Optics Letters*, 32 (1): 17 (2006). doi:10.1364/ol.32.000017.
- [323] Gottesman, D., Kitaev, A. y Preskill, J. “Encoding a qubit in an oscillator”. *Physical Review A*, 64 (1): 012310 (2001). doi:10.1103/physreva.64.012310.
- [324] Ekert, A. K. “Quantum cryptography based on Bell’s theorem”. *Physical Review Letters*, 67 (6): 661–663 (1991). doi:10.1103/physrevlett.67.661.
- [325] Lorenz, S., Korolkova, N. y Leuchs, G. “Continuous-variable quantum key distribution using polarization encoding and post selection”. *Applied Physics B*, 79 (3): 273–277 (2004). doi:10.1007/s00340-004-1574-7.
- [326] Rigas, J., Gühne, O. y Lütkenhaus, N. “Entanglement verification for quantum-key-distribution systems with an underlying bipartite qubit-mode structure”. *Physical Review A*, 73 (1) (2006). doi:10.1103/physreva.73.012341.
- [327] Wittmann, C., Takeoka, M., Cassemiro, K. N., Sasaki, M., Leuchs, G. y Andersen, U. L. “Demonstration of near-optimal discrimination of optical coherent states”. *Physical Review Letters*, 101 (21): 210501 (2008). doi:10.1103/physrevlett.101.210501.
- [328] Gottesman, D. y Chuang, I. L. “Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations”. *Nature*, 402 (6760): 390–393 (1999). doi:10.1038/46503.

- [329] Knill, E., Laflamme, R. y Milburn, G. J. “A scheme for efficient quantum computation with linear optics”. *Nature*, 409 (6816): 46–52 (2001). doi:10.1038/35051009.
- [330] Raussendorf, R. y Briegel, H. J. “A one-way quantum computer”. *Physical Review Letters*, 86 (22): 5188–5191 (2001). doi:10.1103/physrevlett.86.5188.
- [331] Raussendorf, R., Browne, D. E. y Briegel, H. J. “Measurement-based quantum computation on cluster states”. *Physical Review A*, 68 (2): 022312 (2003). doi:10.1103/physreva.68.022312.
- [332] Briegel, H.-J., Dür, W., Cirac, J. I. y Zoller, P. “Quantum repeaters: The role of imperfect local operations in quantum communication”. *Physical Review Letters*, 81 (26): 5932–5935 (1998). doi:10.1103/physrevlett.81.5932.
- [333] Ma, X.-S., Herbst, T., Scheidl, T., Wang, D., Kropatschek, S., Naylor, W., Wittmann, B., Mech, A., Kofler, J., Anisimova, E., Makarov, V., Jennewein, T., Ursin, R. y Zeilinger, A. “Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward”. *Nature*, 489 (7415): 269–273 (2012). doi:10.1038/nature11472.
- [334] Elliott, C. “Building the quantum network*”. *New Journal of Physics*, 4: 46–46 (2002). doi:10.1088/1367-2630/4/1/346.
- [335] Kimble, H. J. “The quantum internet”. *Nature*, 453 (7198): 1023–1030 (2008). doi:10.1038/nature07127.
- [336] Meter, R. *Quantum Networking*. Wiley (2014). ISBN 9781118648926.
- [337] Zhang, Q., Goebel, A., Wagenknecht, C., Chen, Y.-A., Zhao, B., Yang, T., Mair, A., Schmiedmayer, J. y Pan, J.-W. “Experimental quantum teleportation of a two-qubit composite system”. *Nature Physics*, 2 (10): 678–682 (2006). doi:10.1038/nphys417.
- [338] Wang, X.-L., Cai, X.-D., Su, Z.-E., Chen, M.-C., Wu, D., Li, L., Liu, N.-L., Lu, C.-Y. y Pan, J.-W. “Quantum teleportation of multiple degrees of freedom of a single photon”. *Nature*, 518 (7540): 516–519 (2015). doi:10.1038/nature14246.
- [339] Hu, X.-M., Zhang, C., Liu, B.-H., Cai, Y., Ye, X.-J., Guo, Y., Xing, W.-B., Huang, C.-X., Huang, Y.-F., Li, C.-F. y Guo, G.-C. “Experimental high-dimensional quantum teleportation”. *Physical Review Letters*, 125 (23): 230501 (2020). doi:10.1103/physrevlett.125.230501.
- [340] Luo, Y.-H., Zhong, H.-S., Erhard, M., Wang, X.-L., Peng, L.-C., Krenn, M., Jiang, X., Li, L., Liu, N.-L., Lu, C.-Y., Zeilinger, A. y Pan, J.-W. “Quantum teleportation in high dimensions”. *Physical Review Letters*, 123 (7): 070505 (2019). doi:10.1103/physrevlett.123.070505.
- [341] Zhao, Z., Chen, Y.-A., Zhang, A.-N., Yang, T., Briegel, H. J. y Pan, J.-W. “Experimental demonstration of five-photon entanglement and open-destination teleportation”. *Nature*, 430 (6995): 54–58 (2004). doi:10.1038/nature02643.
- [342] Barasiński, A., Černoč, A. y Lemr, K. “Demonstration of controlled quantum teleportation for discrete variables on linear optical devices”. *Physical Review Letters*, 122 (17): 170501 (2019). doi:10.1103/physrevlett.122.170501.

- [343] Feng, T., Xu, Q., Zhou, L., Luo, M., Zhang, W. y Zhou, X. “Teleporting an unknown quantum state to a photon with prior quantum information” (2020). arXiv: 2009.09421 [quant-ph].
- [344] Weinfurter, H. “Experimental Bell-state analysis”. *Europhysics Letters (EPL)*, 25 (8): 559–564 (1994). doi:10.1209/0295-5075/25/8/001.
- [345] Braunstein, S. L. y Mann, A. “Measurement of the Bell operator and quantum teleportation”. *Physical Review A*, 51 (3): R1727–R1730 (1995). doi:10.1103/physreva.51.r1727.
- [346] Calsamiglia, J. y Lütkenhaus, N. “Maximum efficiency of a linear-optical Bell-state analyzer”. *Applied Physics B*, 72 (1): 67–71 (2001). doi:10.1007/s003400000484.
- [347] Zhang, J. y Braunstein, S. L. “Continuous-variable Gaussian analog of cluster states”. *Physical Review A*, 73 (3): 032318 (2006). doi:10.1103/physreva.73.032318.
- [348] Zaidi, H. A. y van Loock, P. “Beating the one-half limit of ancilla-free linear optics bell measurements”. *Physical Review Letters*, 110 (26): 260501 (2013). doi:10.1103/physrevlett.110.260501.
- [349] Ewert, F. y van Loock, P. “3/4-efficient Bell measurement with passive linear optics and unentangled ancillae”. *Physical Review Letters*, 113 (14): 140403 (2014). doi:10.1103/physrevlett.113.140403.
- [350] Pirandola, S., Eisert, J., Weedbrook, C., Furusawa, A. y Braunstein, S. L. “Advances in quantum teleportation”. *Nature Photonics*, 9 (10): 641–652 (2015). doi:10.1038/nphoton.2015.154.
- [351] Ursin, R., Jennewein, T., Aspelmeyer, M., Kaltenbaek, R., Lindenthal, M., Walther, P. y Zeilinger, A. “Quantum teleportation across the Danube”. *Nature*, 430 (7002): 849–849 (2004). doi:10.1038/430849a.
- [352] Andersen, U. L. y Ralph, T. C. “High-fidelity teleportation of continuous-variable quantum states using delocalized single photons”. *Physical Review Letters*, 111 (5): 050504 (2013). doi:10.1103/physrevlett.111.050504.
- [353] Kogias, I., Ragy, S. y Adesso, G. “Continuous-variable versus hybrid schemes for quantum teleportation of Gaussian states”. *Physical Review A*, 89 (5) (2014). doi:10.1103/physreva.89.052324.
- [354] Jeong, H., Bae, S. y Choi, S. “Quantum teleportation between a single-rail single-photon qubit and a coherent-state qubit using hybrid entanglement under decoherence effects.” *Quantum Inf Process*, 15: 913–927 (2016). doi:https://doi.org/10.1007/s11128-015-1191-x.
- [355] Braunstein, S. L. y Pirandola, S. “Side-channel-free quantum key distribution”. *Physical Review Letters*, 108 (13): 130502 (2012). doi:10.1103/physrevlett.108.130502.
- [356] Bernád, J. Z. “Hybrid quantum repeater based on resonant qubit-field interactions”. *Physical Review A*, 96 (5) (2017). doi:10.1103/physreva.96.052329.
- [357] Dias, J. y Ralph, T. C. “Quantum repeaters using continuous-variable teleportation”. *Physical Review A*, 95 (2) (2017). doi:10.1103/physreva.95.022312.

- [358] Bergmann, M. y van Loock, P. “Hybrid quantum repeater for qudits”. *Physical Review A*, 99 (3) (2019). doi:10.1103/physreva.99.032349.
- [359] Han, J.-X., Wu, J.-L., Wang, Y., Jiang, Y.-Y., Xia, Y. y Song, J. “Multi-qubit phase gate on multiple resonators mediated by a superconducting bus”. *Optics Express*, 28 (2): 1954 (2020). doi:10.1364/oe.384352.
- [360] van Loock, P. “Optical hybrid approaches to quantum information”. *Laser & Photonics Reviews*, 5 (2): 167–200 (2011). doi:10.1002/lpor.201000005.
- [361] Savage, C. M., Braunstein, S. L. y Walls, D. F. “Macroscopic quantum superpositions by means of single-atom dispersion”. *Optics Letters*, 15 (11): 628 (1990). doi:10.1364/ol.15.000628.
- [362] Lance, A. M., Jeong, H., Grosse, N. B., Symul, T., Ralph, T. C. y Lam, P. K. “Quantum-state engineering with continuous-variable postselection”. *Physical Review A*, 73 (4): 041801 (2006). doi:10.1103/physreva.73.041801.
- [363] Ourjoumtsev, A., Jeong, H., Tualle-Brouiri, R. y Grangier, P. “Generation of optical ‘Schrödinger cats’ from photon number states”. *Nature*, 448 (7155): 784–786 (2007). doi:10.1038/nature06054.
- [364] Ourjoumtsev, A. “Generating optical Schrödinger kittens for quantum information processing”. *Science*, 312 (5770): 83–86 (2006). doi:10.1126/science.1122858.
- [365] Neergaard-Nielsen, J. S., Nielsen, B. M., Hettich, C., Mølmer, K. y Polzik, E. S. “Generation of a superposition of odd photon number states for quantum information networks”. *Physical Review Letters*, 97 (8): 083604 (2006). doi:10.1103/physrevlett.97.083604.
- [366] Wakui, K., Takahashi, H., Furusawa, A. y Sasaki, M. “Photon subtracted squeezed states generated with periodically poled KTiOPO₄”. *Optics Express*, 15 (6): 3568 (2007). doi:10.1364/oe.15.003568.
- [367] Ralph, T. C., Gilchrist, A., Milburn, G. J., Munro, W. J. y Glancy, S. “Quantum computation with optical coherent states”. *Physical Review A*, 68 (4): 042319 (2003). doi:10.1103/physreva.68.042319.
- [368] Tufarelli, T., Girolami, D., Vasile, R., Bose, S. y Adesso, G. “Quantum resources for hybrid communication via qubit-oscillator states”. *Physical Review A*, 86 (5) (2012). doi:10.1103/physreva.86.052326.
- [369] Tufarelli, T. “Qubit-controlled displacements in Markovian environments” (2012). arXiv: 1209.1837 [quant-ph].
- [370] Jeannic, H. L., Cavallès, A., Raskop, J., Huang, K. y Laurat, J. “Remote preparation of continuous-variable qubits using loss-tolerant hybrid entanglement of light”. *Optica*, 5 (8): 1012 (2018). doi:10.1364/optica.5.001012.

- [371] Huang, K., Jeannic, H. L., Morin, O., Darras, T., Guccione, G., Cavaillès, A. y Laurat, J. “Engineering optical hybrid entanglement between discrete- and continuous-variable states”. *New Journal of Physics*, 21 (8): 083033 (2019). doi:10.1088/1367-2630/ab34e7.
- [372] Domínguez-Serna, F. A., Rojas, F. y Garay-Palmett, K. “Quantum teleportation with hybrid entangled resources prepared from heralded quantum states”. *Journal of the Optical Society of America B*, 37 (3): 695 (2020). doi:10.1364/josab.377687.
- [373] Gomes, R. M., Salles, A., Toscano, F., Ribeiro, P. H. S. y Walborn, S. P. “Quantum entanglement beyond Gaussian criteria”. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106 (51): 21517–21520 (2009). doi:10.1073/pnas.0908329106.
- [374] Marsden, J. E. y Tromba, A. *Vector Calculus*. W. H. Freeman, 5^a ed^{ón}. (2003). ISBN 978-0716749929.
- [375] Gittsovich, O., Hyllus, P. y Gühne, O. “Multiparticle covariance matrices and the impossibility of detecting graph-state entanglement with two-particle correlations”. *Physical Review A*, 82 (3): 032306 (2010). doi:10.1103/physreva.82.032306.
- [376] Scully, M. O., Lamb, W. E. y Barut, A. “On the theory of the Stern-Gerlach apparatus”. *Foundations of Physics*, 17 (6): 575–583 (2003). doi:10.1007/bf01882788.
- [377] Englert, B.-G., Schwinger, J. y Scully, M. O. “Is spin coherence like Humpty-Dumpty? I. Simplified treatment”. *Foundations of Physics*, 18 (10): 1045–1056 (1988). doi:10.1007/bf01909939.
- [378] Schwinger, J., Scully, M. O. y Englert, B. G. “Is spin coherence like Humpty-Dumpty?” *Zeitschrift für Physik D Atoms, Molecules and Clusters*, 10 (2-3): 135–144 (1988). doi:10.1007/bf01384847.
- [379] Scully, M. O., Englert, B.-G. y Schwinger, J. “Spin coherence and Humpty-Dumpty. III. the effects of observation”. *Physical Review A*, 40 (4): 1775–1784 (1989). doi:10.1103/physreva.40.1775.
- [380] Taylor, J. B. “Magnetic moments of the alkali metal atoms”. *Physical Review*, 28 (3): 576–583 (1926). doi:10.1103/physrev.28.576.
- [381] Ramsey, N. F. *Molecular Beams*. Clarendon (1956).
- [382] Bloom, M. y Erdman, K. “THE TRANSVERSE STERN–GERLACH EXPERIMENT”. *Canadian Journal of Physics*, 40 (2): 179–193 (1962). doi:10.1139/p62-016.
- [383] Miniatura, C., Robert, J., Gorceix, O., Lorent, V., Boiteux, S. L., Reinhardt, J. y Baudon, J. “Atomic interferences and the topological phase”. *Physical Review Letters*, 69 (2): 261–264 (1992). doi:10.1103/physrevlett.69.261.
- [384] Robert, J., Gorceix, O., Lawson-Daku, J., Chormaïc, S. N., Miniatura, C., Baudon, J., Perales, F., Eminyan, M. y Rubin, K. “Stern-Gerlach atomic interferometry with space- and time-dependent magnetic fields”. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 755 (1): 173–181 (1995). doi:10.1111/j.1749-6632.1995.tb38965.x.

- [385] de Oliveira, T. R. y Caldeira, A. O. “Dissipative Stern-Gerlach recombination experiment”. *Physical Review A*, 73 (4): 042502 (2006). doi:10.1103/physreva.73.042502.
- [386] Rabi, I. I., Millman, S., Kusch, P. y Zacharias, J. R. “The molecular beam resonance method for measuring nuclear magnetic moments. the magnetic moments of Li63, Li73 and F199”. *Physical Review*, 55 (6): 526–535 (1939). doi:10.1103/physrev.55.526.
- [387] Boustimi, M., Bocvarski, V., de Lesegno, B. V., Brodsky, K., Perales, F., Baudon, J. y Robert, J. “Atomic interference patterns in the transverse plane”. *Physical Review A*, 61 (3): 033602 (2000). doi:10.1103/physreva.61.033602.
- [388] Einstein, A. y Ehrenfest, P. “Quantentheoretische Bemerkungen zum Experiment von Stern und Gerlach”. *Zeitschrift für Physik*, 11 (1): 31–34 (1922). doi:10.1007/bf01328398.
- [389] Schmidt-Böcking, H., Schmidt, L., Lüdde, H. J., Trageser, W., Templeton, A. y Sauer, T. “The Stern-Gerlach experiment revisited”. *The European Physical Journal H*, 41 (4-5): 327–364 (2016). doi:10.1140/epjh/e2016-70053-2.
- [390] Friedrich, B. y Herschbach, D. “Stern and Gerlach: How a bad cigar helped reorient atomic physics”. *Physics Today*, 56 (12): 53–59 (2003). doi:10.1063/1.1650229.
- [391] Goudsmit, S. A. “FIFTY YEARS OF SPIN: It might as well be spin”. *Physics Today*, 29 (6): 40–43 (1976). doi:10.1063/1.3023518.
- [392] Uhlenbeck, G. E. y Goudsmit, S. “Spinning electrons and the structure of spectra”. *Nature*, 117 (2938): 264–265 (1926). doi:10.1038/117264a0.
- [393] Kronig, R. *Box 59 Folder 48 Spin history correspondence* (1925).
- [394] Phipps, T. E. y Stern, O. “Über die Einstellung der Richtungsquantelung”. *Zeitschrift für Physik*, 73 (3-4): 185–191 (1932). doi:10.1007/bf01351212.
- [395] Frisch, R. y Segrè, E. “Über die Einstellung der Richtungsquantelung. II”. *Zeitschrift für Physik*, 80 (9-10): 610–616 (1933). doi:10.1007/bf01335699.
- [396] Lamb, W. E. y Retherford, R. C. “Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method”. *Physical Review*, 72 (3): 241–243 (1947). doi:10.1103/physrev.72.241.
- [397] Gordon, J. P., Zeiger, H. J. y Townes, C. H. “The maser—new type of microwave amplifier, frequency standard, and spectrometer”. *Physical Review*, 99 (4): 1264–1274 (1955). doi:10.1103/physrev.99.1264.
- [398] Townes, C. H. “Production of coherent radiation by atoms and molecules - Nobel Lecture”. En “The Nobel Prize”, pág. 58 (1964). URL <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/townes-lecture.pdf>.
- [399] NobelPrize.org. Nobel Media AB. “The Nobel Prize in Physics 1964” (2020). URL <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1964/summary/>.
- [400] Essen, L. y Parry, J. V. L. “An atomic standard of frequency and time interval: A caesium resonator”. *Nature*, 176 (4476): 280–282 (1955). doi:10.1038/176280a0.

- [401] Ramsey, N. F. “History of early atomic clocks”. *Metrologia*, 42 (3): S1–S3 (2005). doi:10.1088/0026-1394/42/3/s01.
- [402] Figger, H., Zimmermann, C. y Meschede, D., eds. *Laser Physics at the Limits*. Springer Berlin Heidelberg (2002). doi:10.1007/978-3-662-04897-9.
- [403] Amit, O., Margalit, Y., Dobkowski, O., Zhou, Z., Japha, Y., Zimmermann, M., Efremov, M., Narducci, F., Rasel, E., Schleich, W. y Folman, R. “T3 Stern-Gerlach Matter-Wave Interferometer”. *Physical Review Letters*, 123 (8): 083601 (2019). doi:10.1103/physrevlett.123.083601.
- [404] Margalit, Y., Dobkowski, O., Zhou, Z., Amit, O., Japha, Y., Moukouri, S., Rohrlach, D., Mazumdar, A., Bose, S., Henkel, C. y Folman, R. “Realization of a complete Stern-Gerlach interferometer: Towards a test of quantum gravity” (2020). arXiv: 2011.10928 [quant-ph].
- [405] Reinisch, G. “Stern–gerlach experiment as the pioneer – and probably the simplest – quantum entanglement test?” *Physics Letters A*, 259 (6): 427–430 (1999). doi:10.1016/s0375-9601(99)00472-7.
- [406] Hsu, B. C., Berrondo, M. y Huele, J.-F. S. V. “Stern-Gerlach dynamics with quantum propagators”. *Physical Review A*, 83 (1): 012109 (2011). doi:10.1103/physreva.83.012109.
- [407] Singh, S. y Sharma, N. K. “Comment on “Paradox in the classical treatment of the Stern–Gerlach experiment””. *American Journal of Physics*, 52 (3): 274–275 (1984). doi:10.1119/1.13710.
- [408] Home, D., Pan, A. K., Ali, M. M. y Majumdar, A. S. “Aspects of nonideal Stern–Gerlach experiment and testable ramifications”. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40 (46): 13975–13988 (2007). doi:10.1088/1751-8113/40/46/010.
- [409] Potel, G., Barranco, F., Cruz-Barrios, S. y Gómez-Camacho, J. “Quantum mechanical description of Stern–Gerlach experiments”. *Physical Review A*, 71 (5): 052106 (2005). doi:10.1103/physreva.71.052106.
- [410] Cruz-Barrios, S. y Gómez-Camacho, J. “Semiclassical description of Stern-Gerlach experiments”. *Physical Review A*, 63 (1): 012101 (2000). doi:10.1103/physreva.63.012101.
- [411] Vandegrift, G. “Accelerating wave packet solution to Schrödinger’s equation”. *American Journal of Physics*, 68 (6): 576–577 (2000). doi:10.1119/1.19492.
- [412] Platt, D. E. “A modern analysis of the Stern–Gerlach experiment”. *American Journal of Physics*, 60 (4): 306–308 (1992). doi:10.1119/1.17136.
- [413] Patil, S. H. “Quantum mechanical description of the Stern-Gerlach experiment”. *European Journal of Physics*, 19 (1): 25–30 (1998). doi:10.1088/0143-0807/19/1/005.
- [414] Churchill, J. N. “Motion of an electron wave packet in a uniform electric field”. *American Journal of Physics*, 46 (5): 537–542 (1978). doi:10.1119/1.11256.
- [415] Vallée, O. y Soares, M. *Airy Functions and Applications to Physics*. IMPERIAL COLLEGE PRESS (2010). doi:10.1142/p709.

- [416] García Quijas, P. C. y Arévalo Aguilar, L. M. “Factorizing the time evolution operator”. *Physica Scripta*, 75 (2): 185–194 (2007). doi:10.1088/0031-8949/75/2/012.
- [417] García Quijas, P. C. y Arévalo Aguilar, L. M. “Overcoming misconceptions in quantum mechanics with the time evolution operator”. *European Journal of Physics*, 28 (2): 147–159 (2007). doi:10.1088/0143-0807/28/2/001.
- [418] Piceno, E. “Visualizations of the Stern-Gerlach probability density for the completely quantum evolution of Benítez, et. al. [Eur. J. Phys. 38, 025403 (2017)] of a pure state.” Self-published (2021). URL <https://elenapiceno.wordpress.com/SGEProbabilityDensity/#Videos/>.
- [419] Barrett, J., Linden, N., Massar, S., Pironio, S., Popescu, S. y Roberts, D. “Nonlocal correlations as an information-theoretic resource”. *Physical Review A*, 71 (2): 022101 (2005). doi:10.1103/physreva.71.022101.
- [420] Junge, M. y Palazuelos, C. “Large violation of Bell inequalities with low entanglement”. *Communications in Mathematical Physics*, 306 (3): 695–746 (2011). doi:10.1007/s00220-011-1296-8.
- [421] Vidick, T. y Wehner, S. “More nonlocality with less entanglement”. *Physical Review A*, 83 (5): 052310 (2011). doi:10.1103/physreva.83.052310.
- [422] Liang, Y.-C., Vértesi, T. y Brunner, N. “Semi-device-independent bounds on entanglement”. *Physical Review A*, 83 (2): 022108 (2011). doi:10.1103/physreva.83.022108.
- [423] Banaszek, K. y Wódkiewicz, K. “Testing quantum nonlocality in phase space”. *Physical Review Letters*, 82 (10): 2009–2013 (1999). doi:10.1103/physrevlett.82.2009.
- [424] Wódkiewicz, K. “Nonlocality of the Schrödinger cat”. *New Journal of Physics*, 2: 21–21 (2000). doi:10.1088/1367-2630/2/1/321.
- [425] Klyshko, D. N. “The Bell and GHZ theorems: a possible three-photon interference experiment and the question of nonlocality”. *Physics Letters A*, 172 (6): 399–403 (1993). doi:10.1016/0375-9601(93)90228-r.
- [426] Belinsky, A. V. y Klyshko, D. N. “A modified N-particle Bell theorem, the corresponding optical experiment and its classical model”. *Physics Letters A*, 176 (6): 415–420 (1993). doi:10.1016/0375-9601(93)90471-b.
- [427] Belinskiĭ, A. V. y Klyshko, D. N. “Interference of light and Bell's theorem”. *Physics-Uspekhi*, 36 (8): 653–693 (1993). doi:10.1070/pu1993v036n08abeh002299.
- [428] Mermin, N. D. “Simple unified form for the major no-hidden-variables theorems”. *Physical Review Letters*, 65 (27): 3373–3376 (1990). doi:10.1103/physrevlett.65.3373.
- [429] Chen, Z.-B., Hou, G. y Zhang, Y.-D. “Quantum nonlocality and applications in quantum-information processing of hybrid entangled states”. *Physical Review A*, 65 (3): 032317 (2002). doi:10.1103/physreva.65.032317.

- [430] Chen, Z.-B., Pan, J.-W., Hou, G. y Zhang, Y.-D. “Maximal violation of Bell’s inequalities for continuous variable systems”. *Physical Review Letters*, 88 (4): 040406 (2002). doi:10.1103/physrevlett.88.040406.
- [431] Wigner, E. “On the quantum correction for thermodynamic equilibrium”. *Physical Review*, 40 (5): 749–759 (1932). doi:10.1103/physrev.40.749.
- [432] Tatarskiĭ, V. I. “The Wigner representation of quantum mechanics”. *Soviet Physics Uspekhi*, 26 (4): 311–327 (1983). doi:10.1070/pu1983v026n04abeh004345.
- [433] Hillery, M., O’Connell, R. F., Scully, M. O. y Wigner, E. P. “Distribution functions in physics: Fundamentals”. *Physics Reports*, 106 (3): 121–167 (1984). doi:10.1016/0370-1573(84)90160-1.
- [434] Royer, A. “Wigner function as the expectation value of a parity operator”. *Physical Review A*, 15 (2): 449–450 (1977). doi:10.1103/physreva.15.449.
- [435] Jeong, H., Son, W., Kim, M. S., Ahn, D. y Brukner, Č. “Quantum nonlocality test for continuous-variable states with dichotomic observables”. *Physical Review A*, 67 (1): 012106 (2003). doi:10.1103/physreva.67.012106.
- [436] Ben-Benjamin, J. S., Kim, M. B., Schleich, W. P., Case, W. B. y Cohen, L. “Working in phase-space with Wigner and Weyl”. *Fortschritte der Physik*, 65 (6-8): 1600092 (2016). doi:10.1002/prop.201600092.
- [437] Haug, F., Freyberger, M. y Wódkiewicz, K. “Nonlocality of a free atomic wave packet”. *Physics Letters A*, 321 (1): 6–13 (2004). doi:10.1016/j.physleta.2003.12.007.
- [438] Gomis, P. y Pérez, A. “Decoherence effects in the Stern-Gerlach experiment using matrix Wigner functions”. *Physical Review A*, 94 (1): 012103 (2016). doi:10.1103/physreva.94.012103.
- [439] Ferrie, C. “Quasi-probability representations of quantum theory with applications to quantum information science”. *Reports on Progress in Physics*, 74 (11): 116001 (2011). doi:10.1088/0034-4885/74/11/116001.
- [440] Vourdas, A. “Quantum systems with finite Hilbert space”. *Reports on Progress in Physics*, 67 (3): 267–320 (2004). doi:10.1088/0034-4885/67/3/r03.
- [441] Hinarejos, M., Bañuls, M. C. y Pérez, A. “Wigner formalism for a particle on an infinite lattice: dynamics and spin”. *New Journal of Physics*, 17 (1): 013037 (2015). doi:10.1088/1367-2630/17/1/013037.
- [442] LibreTexts: Chemistry 92. “Density Matrix, Bloch Vector and Entropy” (2020). URL <https://chem.libretexts.org/@go/page/160266>.
- [443] Blum, K. *Density Matrix Theory and Applications*. Springer Berlin Heidelberg (2012). doi:10.1007/978-3-642-20561-3.
- [444] Gamel, O. “Entangled Bloch spheres: Bloch matrix and two-qubit state space”. *Physical Review A*, 93 (6): 062320 (2016). doi:10.1103/physreva.93.062320.

- [445] Serge Haroche, J.-M. R. *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons*. Oxford University Press (2006). ISBN 0198509146. URL https://www.ebook.de/de/product/5873268/serge_haroche_jean_michel_raimond_exploring_the_quantum_atoms_cavities_and_photons.html.