



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Dicotomía de la dinámica de funciones
trascendentes enteras de tipo finito

Tesis presentada al

Posgrado en Ciencias Matemáticas

como requisito para la obtención del grado de

MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

por

Karla Hernández Reyes

Directora de tesis

Dra. Patricia Domínguez Soto

Puebla, Pue.
Agosto de 2025



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Dicotomía de la dinámica de funciones
trascendentes enteras de tipo finito

Tesis presentada al

Posgrado en Ciencias Matemáticas

como requisito para la obtención del grado de

MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

por

Karla Hernández Reyes

Directora de tesis

Dra. Patricia Domínguez Soto

Puebla, Pue.
Agosto de 2025

Título: Dicotomía de la dinámica de funciones
trascendentes enteras de tipo finito

Estudiante: KARLA HERNÁNDEZ REYES

COMITÉ

Dr. Agustín Contreras Carreto
Presidente

Dra. Laura Angélica Cano Cordero
Secretaria

M. C. Wendy Rodríguez Díaz
Vocal

Dra. Patricia Domínguez Soto
Directora

Agradecimientos

Concluyendo este trabajo, en mi ser solo existe gratitud para cada de las personas que hicieron posible este gran logro para mí, aquellas que junto a mí caminaron en todo momento, siempre siendo mi inspiración, apoyo y fortaleza.

Primeramente, doy gracias a Dios porque siempre ha sido mi guía, mi pastor y nunca abandonó a esta pequeña oveja.

Con gran estima y reconocimiento, agradezco a mi directora de tesis, Dra. Patricia Domínguez Soto, por guiarme, enseñarme y adentrarme en el fascinante mundo de la Dinámica Holomorfa, le doy las gracias por su paciencia y todo el apoyo que me brindó durante la maestría, sus consejos y todo el cariño que siempre la ha caracterizado.

Agradezco profundamente a mis padres, Luis y Jaqueline Yadira, por ser mis pilares e inculcar en mí valores tan preciados como la responsabilidad y la disciplina, por fomentar en mí el amor por el estudio, pero sobretudo el coraje para perseguir siempre todos mis sueños, abriéndome sus brazos para seguir mi camino, pero dejándolos abiertos por si necesito su refugio. Los amo con todo mi corazón y este es un logro dedicado para ustedes.

Le doy las gracias a mis hermanos, Jaqueline, Luis Efraín y Leonardo Ivan, siempre han sido mi gran apoyo y motivo de inspiración de la persona que quiero llegar a ser, mi vida no sería la misma sin sus consejos y su cariño. Los amo demasiado.

Con mucho amor, quiero darle las gracias a Rodolfo, gracias por ser también mi compañía en este arduo camino, por siempre motivarme a afrontar mis miedos e incertidumbres, por confiar en mí y apoyarme en todos mis proyectos profesionales, pero sobretudo, gracias por todo el amor que me demuestras. Te amo mucho.

Agradezco con mucho cariño a mis grandes amigos, Adriana, Saúl y Andrea, han sido 7 años de conocerlos y compartir con ustedes esta travesía, desde la licenciatura y hasta la maestría, créanme que lo han sido todo para mí, hemos sufrido juntos, pero también salido adelante. Les agradezco su gran amistad, sus consejos y toda la felicidad que me han brindado.

Agradezco al antes Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), ahora Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por la beca otorgada durante mis estudios de maestría para poder llevar a cabo este trabajo de manera satisfactoria.

Finalmente, le doy las gracias a mi familia, a mis amigos, a mis profesores y a mis compañeros, de todo corazón les agradezco que me hayan acompañado en este camino y comparto este gran logro con todos ustedes.

Índice general

Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. Números complejos y proyección estereográfica	1
1.2. Funciones de variable compleja	5
1.3. Singularidades de funciones de variable compleja	8
1.3.1. Singularidades de la función inversa	10
1.4. Teoremas de Picard	11
1.5. Superficies de Riemann	12
2. Normalidad	15
2.1. Sucesiones de funciones complejas	15
2.2. Familias normales	16
3. Dicotomía en la dinámica de funciones trascendentes enteras	21
3.1. Puntos fijos	21
3.2. Los conjuntos de Fatou y Julia	24
3.3. Propiedades básicas de los conjuntos de Fatou y Julia	24
3.4. Componentes del conjunto de Fatou	28
3.5. Algunos resultados de los conjuntos de Fatou y Julia	30
3.6. Movimiento holomorfo	32
3.7. Plano de parámetros y plano dinámico de una familia de funciones . .	33
4. Función senoidal elevada al cuadrado	37
4.1. Función $\sin^2 x$ y algunas propiedades	37
4.2. Función $\sin^2 z$ y algunas propiedades	41
5. La familia $F_\lambda(z) = \lambda \sin^2 z$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	45
5.1. Dinámica de la familia F_λ	47
6. La familia $G_\lambda(z) = \sin^2 z + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$	53
6.1. Dinámica de la familia G_λ	57
7. Conclusiones y trabajo a futuro	61

Introducción

Los sistemas dinámicos son modelos matemáticos de fenómenos que cambian con el tiempo, por ejemplo: la distribución de la población, el tipo de cambio y el clima, entre otros. Estos sistemas se clasifican en dos tipos: sistemas dinámicos continuos y sistemas dinámicos discretos. Los primeros son modelados por ecuaciones diferenciales y los segundos están relacionados con métodos iterativos, que consisten en repetir un proceso dado una y otra vez.

Un ejemplo de un sistema dinámico discreto, propuesto por R. Devaney en [13], es el siguiente: si en una calculadora científica se ingresa un número cualquiera y después se presiona una tecla de función una y otra vez, ese es un procedimiento iterativo. Así, por ejemplo: presionando repetidamente la tecla “EXP” para un valor inicial x , se obtiene la siguiente sucesión de números:

$$x, e^x, e^{e^x}, e^{e^{e^x}}, e^{e^{e^{e^x}}}, \dots,$$

es decir, estamos “iterando” la función exponencial. Las siguientes preguntas obligatorias son: ¿qué le ocurre a la sucesión de iteradas de una función? ¿en qué momento surge la motivación por estudiar estos procesos de iteración? El método de Newton, es considerado como el más antiguo y famoso proceso iterativo en matemáticas, el cual es utilizado para aproximar las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, véase [2] y [3]. Diversos matemáticos como Alexandr Korkine, Jules Farkas y Gabriel Koenigs, entre otros, trabajaron con procesos iterativos de funciones, véase [2] y [3].

El matemático francés Paul Montel, trabajó principalmente la teoría de sucesiones de funciones, tuvo como principal aporte la teoría de familias normales, en la cual se estudia la relación entre familias equicontinuas, familias acotadas y familias normales, véase [30]. Montel consideró que los estudios de Charles Émile Picard fueron una de las más importantes aplicaciones para su teoría, la cual llegó a tener una gran aplicación en el estudio de la iteración de funciones complejas.

Pierre Fatou y Gaston Julia, motivados por la French Academy of Sciences que anunció en 1918 el *Grand Prix des Sciences mathématiques* para realizar estudios de iteración de funciones, publicaron los artículos: *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles* [26], y *Sur les équations fonctionnelles* [21] (en tres partes

en 1919 y 1920). Los matemáticos G. Julia y P. Fatou fueron los pioneros en la aplicación de la teoría de familias normales de P. Montel a la iteración de funciones racionales complejas. P. Montel se mostró asombrado por el importante rol que tuvo su teoría en los estudios realizados por estos matemáticos, véase [2].

P. Fatou y G. Julia observaron que al estudiar la dinámica de una función racional existía una dicotomía en la esfera de Riemann en dos conjuntos: el estable y el inestable. El conjunto estable estaba relacionado con el concepto de normalidad de P. Montel, actualmente es llamado el conjunto de Fatou, y su complemento relacionado con la no normalidad, actualmente llamado el conjunto de Julia. Algunas propiedades importantes de los conjuntos de Fatou y Julia son las siguientes:

1. El conjunto de Fatou es abierto, por ende el conjunto de Julia es cerrado.
2. Los conjuntos de Fatou y Julia son completamente invariantes.
3. El conjunto de Julia es no vacío y perfecto.

A partir de los trabajos de P. Fatou y G. Julia se desarrolló una nueva área de las matemáticas, centrada en analizar las propiedades y la dinámica de familias de funciones complejas, esto es, analizar sus planos de parámetros y sus planos dinámicos de alguna familia para un parámetro dado.

En esta tesis, nos centraremos en el estudio de la dicotomía, antes mencionada, para familias de funciones trascendentes enteras de tipo finito, es decir, funciones que son analíticas en el plano complejo y que no están definidas en infinito, donde el conjunto de valores singulares de la función es finito. La teoría de iteración de funciones trascendentes enteras fue inicialmente estudiada en 1926 por P. Fatou en [22] y más adelante por I. N. Baker en [4]. Resultados importantes para este tipo de funciones han sido realizados por A. Eremenko y M. Y. Lyubich en [19] y R. Devaney en [13], entre otros matemáticos.

A lo largo de este trabajo aplicaremos algunos conceptos y resultados en el estudio de dos familias de funciones trascendentes enteras de tipo finito, que son resultado de una homotecia y una traslación compleja de la función $\sin^2 z$, esto es, investigaremos las siguientes familias de funciones:

$$F_\lambda(z) = \lambda \sin^2 z, \text{ con } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{y} \quad G_\lambda(z) = \sin^2 z + \lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Utilizando teoremas en la teoría de la dinámica para la clase de funciones trascendentes enteras de tipo finito se llevará a cabo el estudio de las principales propiedades de las familias $F_\lambda(z)$ y $G_\lambda(z)$. Estudiaremos los planos de parámetros y los planos dinámicos para cada una de las familias antes mencionadas. Se encontrarán las condiciones necesarias sobre el parámetro λ para obtener alguna de las componentes en el conjunto de Fatou para cada una de las familias de

funciones. Al final de la tesis se enunciarán conjeturas importantes relacionadas con las familias de funciones estudiadas, $F_\lambda(z)$ y $G_\lambda(z)$. También se comentará la posibilidad de trabajar a futuro en el conjunto residual del conjunto de Julia.

La estructura de la tesis consta de siete capítulos: El capítulo 1 contiene los preliminares necesarios para el desarrollo del trabajo. El capítulo 2 está relacionado con la teoría de familias normales. El capítulo 3 contiene la teoría de los conjuntos de Fatou y Julia para funciones trascendentes enteras. En el capítulo 4 se estudian las propiedades de las funciones $\sin^2 x$ y $\sin^2 z$. En los capítulos 5 y 6 se investigan las familias de funciones

$$F_\lambda(z) = \lambda \sin^2 z, \text{ con } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{y} \quad G_\lambda(z) = \sin^2 z + \lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Finalmente, en el capítulo 7 se enuncian las conclusiones de la tesis y el posible trabajo a futuro.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos definiciones y resultados que se utilizarán a lo largo del presente documento, como referencias para el lector véase [1], [12], [15], [33], [34] y [38]. Establecemos la siguiente notación: $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, $\mathbb{Q}$ es el conjunto de números racionales, $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros y $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales.

1.1. Números complejos y proyección estereográfica

Ante la necesidad por encontrar soluciones a ecuaciones de la forma:

$$x^2 + a = 0, \tag{1.1}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, surgen los *números complejos*, que son de la forma $z = x + i y$, con $x, y \in \mathbb{R}$, donde $i = \sqrt{-1}$ es llamada la *unidad imaginaria*. El conjunto de los números complejos se denota por $\mathbb{C}$. Este conjunto no solo permite resolver ecuaciones cuadráticas planteadas en los números reales, véase Ecuación (1.1), sino que se utiliza en otras teorías.

En el conjunto de los números complejos, se definen las operaciones de suma y producto: sean $z_1 = x_1 + i y_1, z_2 = x_2 + i y_2 \in \mathbb{C}$, donde las operaciones son:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \quad (\text{suma}) & * : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \quad (\text{producto}) \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) & (z_1, z_2) &\longmapsto (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

El conjunto de los números complejos con las operaciones antes definidas forman un campo, donde el inverso aditivo para $z = x + i y$ es $-z = -x - i y$ y el inverso multiplicativo para $z = x + i y \neq 0$ es $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$.

A través del isomorfismo $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por:

$$\phi(z) = \phi(x + i y) = (x, y),$$

cada número complejo puede ser representado en el plano cartesiano, donde x es llamada la *Parte Real* de z , denotada como $Re\ z$, mientras que y es llamada la *Parte Imaginaria* de z , denotada como $Im\ z$. El plano cartesiano es llamado el *Plano Complejo*.

Debido a la correspondencia entre el plano y los números complejos, podemos definir el *módulo*, denotado como $|z|$, y el *argumento* de un número complejo, denotado como $arg(z)$. El primero, está definido como la longitud del vector determinado por el punto z , es decir, la distancia euclídea del origen $0 + i0$ al punto $z = x + iy$, esto es:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

El segundo es el ángulo formado por la parte positiva del eje de la parte real de z y el vector determinado por el punto, medido al contrario de las manecillas del reloj. De igual forma, dado un número complejo z , se define el *conjugado* de z , denotado por $\bar{z}$, como la reflexión del punto sobre el eje real, es decir, si $z = x + iy$, el conjugado es $\bar{z} = x - iy$. El módulo, el argumento y el conjugado de un número complejo z se representan en la Figura 1.1.

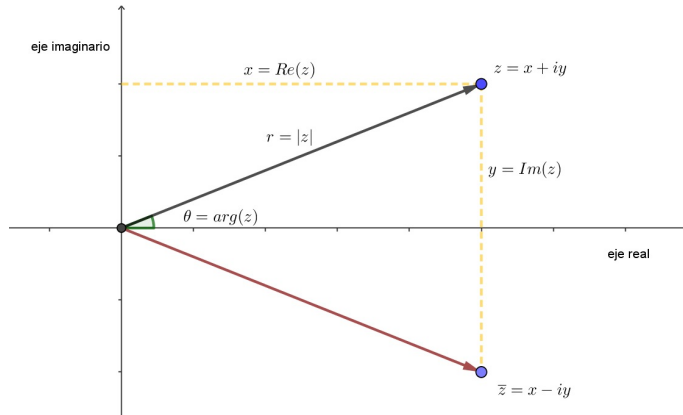


Figura 1.1: Módulo, argumento y conjugado de un número complejo.

El conjunto de los números complejos, está dotado de una métrica, que está definida en términos del módulo, es decir,

$$\begin{aligned} d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow [0, \infty) \\ (z, w) &\longmapsto |w - z|. \end{aligned}$$

Definimos el disco con centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$ como:

$$D(z_0, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z, w| < r\}.$$

Definición 1.1. Una *topología* sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$ y X están en τ .

2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ .
3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ .

Un conjunto X para el que se ha definido una topología τ se llama *espacio topológico*, denotado como (X, τ) .

Definición 1.2. Un espacio topológico (X, τ) es *compacto* si para cualquier cubierta abierta de X , existe una subcubierta finita de X .

Definición 1.3. Un espacio topológico (X, τ) es *localmente compacto* si todo punto admite una base de entornos compactos.

El conjunto de los números complejos es localmente compacto, porque los entornos cerrados centrados en un punto son cerrados y acotados, por tanto compactos.

Definición 1.4. Un espacio topológico (X, τ) es un *espacio de Hausdorff* si para cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$, existen dos entornos U_x y U_y de x y y , respectivamente, tales que $U_x \cap U_y = \emptyset$.

El conjunto $\mathbb{C}$ con la métrica d es un espacio métrico completo y con la topología inducida por d , digamos τ_d , es localmente compacto, además es un espacio de Hausdorff, por lo que podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1.1 (Compactificación de Alexandroff). *Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff. Sea ∞ un objeto matemático tal que $\infty \notin X$. Se define $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ y $\tau_0 = \{\tau\} \cup \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ es compacto}\}$. Entonces*

1. (X_∞, τ_0) es un espacio topológico compacto y de Hausdorff.
2. La topología inducida en X por X_∞ es τ .

Aplicando el Teorema a $(\mathbb{C}, \tau_d)$ se obtiene lo que conocemos como el plano complejo extendido $(\mathbb{C}_\infty, \tau_0)$, donde $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Otra manera de obtener el plano complejo extendido surge a partir del análisis del comportamiento de una de las funciones básicas complejas que es la inversión

$$z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Por el Teorema de Heine-Borel, un subconjunto de $\mathbb{C}$ que es cerrado y acotado es compacto, pero $\mathbb{C}$ no es compacto. Observemos que la inversión compleja no tiene puntos en la imagen asociados a $z = 0$, ni el cero se encuentra en la imagen. Para intentar resolver estos problemas, será de utilidad tener un subconjunto compacto que contenga a $\mathbb{C}$ y tal que el $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z}$ esté definido. Con esto en mente, surge el concepto de la *esfera de Riemann*, véase [1], [12], [15], [33] y [34].

Tomemos la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$, esto es,

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Identificamos a $\mathbb{C}$ con $\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ a través de la correspondencia:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ z = x + iy &\longmapsto (x, y, 0). \end{aligned}$$

El punto $N = (0, 0, 1) \in \mathcal{S}$ es llamado el *polo norte* y $S = (0, 0, -1) \in \mathcal{S}$ el *polo sur*. Ahora, para cada $z \in \mathbb{C}$ consideramos la línea recta en $\mathbb{R}^3$ que une z con N . Dicha línea interseca a la esfera unitaria en exactamente un punto, digamos $Z \neq N$, esta correspondencia es la *Proyección estereográfica*, véase Figura 1.2.

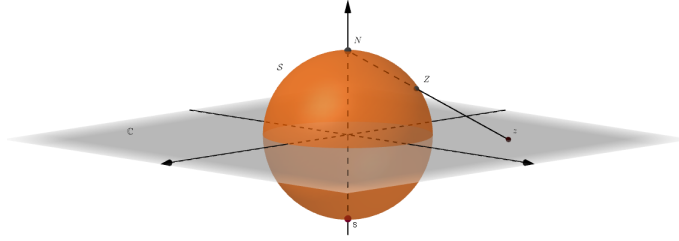


Figura 1.2: Proyección estereográfica.

Dependiendo el valor del módulo de z se tiene lo siguiente:

1. Si $|z| > 1$, entonces el punto Z está en el hemisferio norte.
2. Si $|z| < 1$, entonces el punto Z está en el hemisferio sur.
3. Si $|z| = 1$, entonces el punto $Z = z$.

Así, cuando $|z| \rightarrow \infty$, se tiene que $Z \rightarrow N$, por lo que identificamos a N con el ∞ en $\mathbb{C}_\infty$. Por tanto, $\mathbb{C}_\infty$ es representado en la esfera $\mathcal{S}$, que es la *esfera de Riemann*.

De forma analítica, tenemos que $(\mathcal{S}, d_{\mathcal{S}})$, con $d_{\mathcal{S}}$ la métrica inducida por la métrica usual o euclídea en $\mathbb{R}^3$, es un subespacio métrico de $\mathbb{R}^3$. Así, para $\Phi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ dada por

$$\Phi((x_1, x_2, x_3)) = \begin{cases} \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3}, & \text{si } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1) \\ \infty, & \text{si } (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1). \end{cases}$$

La inversa de Φ , denotada por $\Phi^{-1} : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathcal{S}$, está dada de la siguiente forma:

$$\Phi^{-1}(z) = \begin{cases} \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right), & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ (0, 0, 1), & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Obteniendo que $(\mathcal{S}, d_{\mathcal{S}})$ y $(\mathbb{C}_\infty, \tau_0)$ son isomorfos como espacios de Hausdorff compactos. Además, para $z, w \in \mathbb{C}_\infty$, la distancia esférica está definida como:

$$d_{\mathbb{C}_\infty}(z, w) = d_{\mathcal{S}}(\Phi^{-1}(z), \Phi^{-1}(w)) = \begin{cases} \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}}, & \text{si } z, w \in \mathbb{C}, \\ \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}, & \text{si } z \in \mathbb{C}, w = \infty, \\ 0, & \text{si } z = w = \infty. \end{cases}$$

1.2. Funciones de variable compleja

Dado $A \subseteq \mathbb{C}$, una *función de variable compleja* $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, es una regla de correspondencia que a cada número complejo $z \in A$ le corresponde un número complejo w , que es llamado el *valor* de f en z y se denota por $f(z) = w$.

Una función de variable compleja tiene parte real y parte imaginaria que se denotan como: $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$, donde u y v son funciones de dos variables. Una función de variable compleja tiene cuatro variables: x, y, u y v , así su gráfica se encuentra en $\mathbb{R}^4$.

Ejemplo 1.1. La función $f(z) = e^z$, para $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, tiene parte real y parte imaginaria $u(x, y) = e^x \cos y$ y $v(x, y) = e^x \sin y$, respectivamente. En efecto:

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= e^x \cos y + i e^x \sin y \\ &= u(x, y) + i v(x, y). \end{aligned}$$

Definición 1.5. Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Un punto z_0 es *punto de acumulación* de A si para cualquier $\varepsilon > 0$

$$(D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Definición 1.6. Sean $A \subseteq \mathbb{C}$, z_0 un punto de acumulación de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$. Un elemento $\alpha \in \mathbb{C}$ es llamado *límite* de f en z_0 , si para cualquier vecindad V de α

existe una vecindad U de z_0 tal que si $z \in U \cap A$ y $z \neq z_0$, entonces $f(z) \in V$. En este caso se escribe

$$\alpha = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

También se denota como $f(z) \rightarrow \alpha$ cuando $z \rightarrow z_0$.

Definición 1.7. Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. La función f es *continua* en $z_0 \in A$ si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Se denota por

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

La función f es continua en A si f es continua en todo punto de A .

Definición 1.8. Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. La función f es *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - w| < \delta$, entonces

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

La diferencia entre una función continua y una función uniformemente continua es que en la primera, la $\delta > 0$ depende del valor de ε y el punto z_0 , mientras que en la segunda, el valor de δ solo depende de ε .

En el análisis real, se puede visualizar la derivada f' de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la pendiente de la gráfica $y = f(x)$. Desafortunadamente, esa idea no se puede generalizar al análisis complejo, véase [33].

Definición 1.9. Sean $D \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. La función f es *compleja diferenciable* en un punto $z_0 \in D$ si

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Donde $f'(z_0)$ denota la derivada compleja de f en z_0 .

Definición 1.10. Sean $D \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. Se dice que f es *holomorfa* si f es compleja diferenciable en cada punto de D .

Sea $z = x + iy$ y consideremos la función f como una función $f(x, y)$, entonces

$$f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y),$$

con $u(x, y)$ y $v(x, y)$ diferenciables con derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.5)$$

Las ecuaciones en (1.5) son llamadas las *Ecuaciones de Cauchy-Riemann*.

Teorema 1.2. [12]. Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ funciones de variable real definidas en una región $G \subseteq \mathbb{C}$ y supóngase que u y v tienen derivadas parciales continuas. Entonces $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ es holomorfa si y solo si u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Teorema 1.3. [34]. La composición $h = g \circ f$ (donde h esté definida) de dos funciones holomorfas f y g es una función holomorfa y se tiene la regla de la cadena:

$$h'(z) = (g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

A continuación, definiremos las funciones analíticas y su relación con las funciones holomorfas.

Dada una sucesión de números complejos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y fijando un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, para cada número $z \in \mathbb{C}$ queda determinada la sucesión $\{a_n(z - z_0)^n\}_{n=1}^{\infty}$, cuya serie asociada es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

la serie es llamada *serie de potencias* con coeficientes complejos a_n y centrada en z_0 , con $n \in \mathbb{N}$.

Observación 1.1. Por el Criterio del cociente para series tenemos que si D es el disco abierto con centro z_0 y radio $R > 0$, donde $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, la serie de potencias tiene los siguientes comportamientos:

1. Converge (absolutamente) para todo punto en D .
2. La serie diverge en los puntos exteriores de D , es decir, para $|z - z_0| > R$.
3. No se puede decir nada sobre la convergencia de la serie en la frontera de D .

R es llamado el *radio de convergencia* de la serie de potencias. Los siguientes resultados son relacionados con series de potencias y funciones complejas.

Teorema 1.4. [24]. Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en un entorno $\{z : |z - z_0| < R\}$. Supongamos que existen constantes $N, M > 0$ tales que

$$|f^{(n)}(z)| \leq NM^n, \quad \text{con } |z - z_0| < R.$$

Entonces para cada z , con $|z - z_0| < R$, se cumple que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Cuando lo anterior se cumple, se dice que la función f tiene un desarrollo en serie de potencias alrededor de z_0 , con radio de convergencia $R > 0$.

Proposición 1.1. [12]. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ con radio de convergencia $R > 0$. Entonces:

1. Para cada $k \geq 1$ la serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k} \quad (1.6)$$

tiene radio de convergencia R .

2. La función f es infinitamente diferenciable en $\{z : |z - z_0| < R\}$, más aún, $f^{(k)}(z)$ está dada por la serie (1.6) para cada $k \geq 1$ y $|z - z_0| < R$.

3. Para $n \geq 0$,

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Definición 1.11. [38]. Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. Se dice que f es *analítica* en A si f tiene un desarrollo en series de potencias alrededor de un punto $z_0 \in A$.

Un resultado que relaciona función holomorfa y función analítica es el siguiente.

Teorema 1.5. [34]. Una función de variable compleja es analítica si y solo si es holomorfa.

De aquí y en adelante, estaremos interesados en las funciones analíticas (holomorfas), además utilizaremos la equivalencia establecida en el Teorema 1.5 para referirnos indistintamente a las funciones analíticas u holomorfas.

1.3. Singularidades de funciones de variable compleja

Hemos visto en la Sección 1.2 las condiciones para que una función sea analítica u holomorfa en el plano complejo (o una región del plano), pero no siempre se pueden tener en todos los puntos del plano. En este apartado definiremos singularidades de una función compleja.

Dado $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja. Un punto $z \in A$ donde la función no es analítica es llamado un *punto singular* o *singularidad* de f .

Definición 1.12. Una función f tiene una *singularidad aislada* en un punto z_0 si existe un número $R > 0$ tal que f es analítica en

$$\{z : 0 < |z - z_0| < R\} = B(z_0, R) \setminus \{z_0\}.$$

La clasificación de singularidades aisladas de una función compleja es la siguiente, véase [27]. Tomemos $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, con $A \subseteq$ un abierto y z_0 una singularidad aislada de f .

1. El punto z_0 es una *singularidad removible* si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0,$$

esto es, si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.

2. El punto z_0 es un *polo de orden m* , si existe un entero positivo m tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m+1} f(z) = 0,$$

esto es, si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$ existe.

3. Si z_0 no es singularidad removible ni polo de algún orden, z_0 es llamado *singularidad esencial*.

A continuación, enunciamos algunos ejemplos de funciones complejas y el tipo de singularidad aislada que poseen.

Ejemplo 1.2. La función $f(z) = \frac{z^2 \sin z}{z}$ tiene una singularidad removible en $z_0 = 0$.

En efecto, veamos que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} (z - 0) \frac{z^2 \sin z}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z^2 \sin z}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \sin z \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3. La función $g(z) = \frac{e^z}{z^2}$ tiene un polo de segundo orden en $z_0 = 0$.

En efecto, consideremos el entero positivo $m = 2$,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m+1} g(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} (z - 0)^3 \frac{e^z}{z^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} z e^z \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4. La función $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ tiene una singularidad esencial en $z_0 = 0$. Debido a que en $z_0 = 0$ la función no está definida y no cumple las condiciones para ser singularidad removible o polo de algún orden.

Definición 1.13. Una función f definida y analítica en una región $A \subseteq \mathbb{C}$, excepto en polos, es llamada *función meromorfa* en A .

Ejemplo 1.5. La función $f(z) = \frac{\cos z}{(z-1)^2}$ es una función definida en el plano complejo a excepción del punto $z_0 = 1$ que es un polo de segundo orden, por lo tanto f es una función meromorfa.

Ejemplo 1.6. La función $g(z) = \frac{1}{\sin z}$ es meromorfa en el plano complejo, porque $\sin z_k = 0$ cuando $z_k = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, los cuales son polos simples. A pesar de tener una cantidad infinita numerable de polos, la función no está definida en dichos polos, por tanto es una función meromorfa.

Definición 1.14. Una función f definida en el plano complejo la cual no es un polinomio, es llamada *función trascendente entera*. Al conjunto de las funciones trascendentes enteras lo denotamos por $\mathcal{E}$.

Se hace énfasis en la diferencia entre los polinomios y las funciones trascendentes enteras, debido a que las primeras están bien definidas en el infinito, mientras que las segundas no.

Ejemplo 1.7. La función $f(z) = \sin z$ es trascendente entera, porque está definida en el plano complejo, pero $\sin(\infty)$ no está definido.

De acuerdo a la clasificación de singularidades observamos que para las funciones trascendentes enteras el infinito es una singularidad esencial.

1.3.1. Singularidades de la función inversa

Definición 1.15. Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función trascendente entera. Un *punto crítico* de f es un cero de f' y un *valor crítico* es $f(z)$ donde z es un punto crítico de f . El conjunto de valores críticos se denota por $\mathcal{VC}$.

Definición 1.16. Un punto $w \in \mathbb{C}$ es llamado *valor asintótico* si existe una curva $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) \rightarrow \infty$ y $f(\gamma(t)) \rightarrow w$ cuando $t \rightarrow \infty$. El conjunto de valores asintóticos se denota por $\mathcal{VA}$.

Analicemos algunos ejemplos para ilustrar las Definiciones 1.15 y 1.16.

Ejemplo 1.8. Tomemos la función $f(z) = \cos z$. Observar que $f'(z) = -\sin z$. Resolviendo la ecuación $f'(z) = 0$, obtenemos que los puntos críticos de f son de la forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Luego, los valores críticos de f son $w = f(k\pi) = \cos(k\pi)$, es decir, el conjunto $\{-1, 1\}$. Para esta función hay infinitos puntos críticos y una cantidad finita de valores críticos.

Ejemplo 1.9. Tomemos la función $g(z) = e^z$ y consideremos la curva $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = -t$. Cuando $t \rightarrow \infty$, se tiene que $f(\gamma(t)) = e^{-t} \rightarrow 0$. Así, cero es un valor asintótico de la función e^z .

Definición 1.17. El conjunto de los *valores singulares* de f , denotado por $\mathcal{VS}$, está definido como la clausura de la unión de los valores críticos $\mathcal{VC}$ y los valores asintóticos $\mathcal{VA}$ de f , esto es:

$$\mathcal{VS} = \overline{\mathcal{VC} \cup \mathcal{VA}}.$$

A. Eremenko y M. Y. Lyubich en [19] definen una clase de funciones que a continuación enunciamos.

Definición 1.18. Una función holomorfa $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pertenece a la *clase* S o es de *tipo finito*, si el conjunto de valores singulares de la función f contiene un número finito de elementos.

Observación 1.2. Las funciones trascendentes enteras que pertenecen a la clase S se denominan *funciones trascendentes enteras de tipo finito*. El conjunto de las funciones trascendentes enteras de tipo finito se denotará por $\mathcal{E} \cap S$.

1.4. Teoremas de Picard

Sabemos que para funciones racionales no constantes, la ecuación $f(z) = \alpha$, para $\alpha \in \mathbb{C}_\infty$, siempre tiene solución. Esto no sucede en general para otro tipo de funciones, por ejemplo, consideremos la función $f(z) = e^z$, observemos que f no toma los valores cero e infinito, así el número de puntos que la función f “omite” son dos. La teoría propuesta por C. E. Picard se centra en el comportamiento de la función relacionada a esos valores; como referencias para el lector véase [1], [15], [25] y [34].

Definición 1.19. Un número complejo z_0 es *valor omitido* o *valor excepcional de Picard* de una función f si $f(z) \neq z_0$ para cada z en la región donde f está definida. El conjunto de valores excepcionales de Picard se denota por $PV(f)$.

Ejemplo 1.10. La función $f(z) = e^z$ tiene a cero e ∞ como valores omitidos o valores excepcionales de Picard.

Teorema 1.6 ([34]. Pequeño de Picard). *El número de valores excepcionales de una función meromorfa no constante f en $\mathbb{C}$ es a lo más dos.*

Para funciones holomorfas con una singularidad esencial aislada, se enuncia el siguiente resultado.

Teorema 1.7 ([34]. Grande de Picard). *Si una función analítica $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene una singularidad esencial aislada en z_0 , entonces la función toma cualquier valor finito, a excepción de a lo más un valor, para cada entorno arbitrario de z_0 .*

Ejemplo 1.11. La función e^z tiene una singularidad esencial en ∞ . Los valores omitidos son cero e infinito.

1.5. Superficies de Riemann

La teoría de superficies de Riemann está relacionada con esta tesis porque los espacios donde estudiamos las funciones holomorfas son superficies de Riemann. En esta sección se definirá el concepto de superficie de Riemann desde un punto vista algebraico y algunas de sus propiedades importantes, como referencias para el lector véase [17], [20] y [23].

Una *variedad* de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff X tal que cada punto $a \in X$ tiene una vecindad abierta, la cual es homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.20. Sea X una variedad de dimensión dos. Una *carta compleja* en X es un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ de un abierto $U \subseteq X$ hacia un abierto $V \subseteq \mathbb{C}$. Dos cartas complejas $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, $i = 1, 2$ se dicen *holomórficamente compatibles* si la aplicación

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

es biholomorfa, véase Figura 1.3.

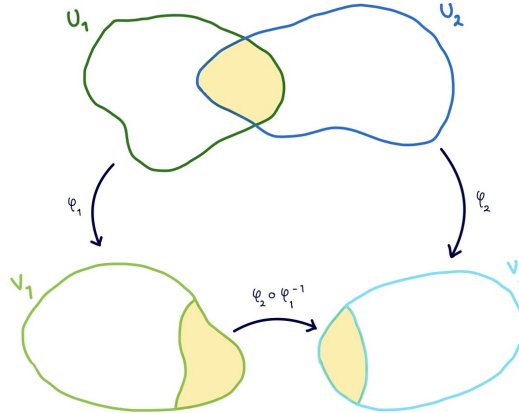


Figura 1.3: Aplicación biholomorfa $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$.

Un *atlas complejo* en X es un sistema $\mathfrak{U} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i, i \in I\}$ de cartas las cuales son holomórficamente compatibles y cubren a X , esto es, $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

Dos atlas complejos $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{U}'$ en X son *holomórficamente (analíticamente) equivalentes* si cada carta de $\mathfrak{U}$ es holomórficamente compatible con toda carta de $\mathfrak{U}'$.

Como la composición de aplicaciones biholomorfas es una aplicación biholomorfa, la noción de la equivalencia holomorfa entre atlas es una relación de equivalencia.

Definición 1.21. La *estructura compleja* en una variedad de dimensión dos X es la clase de equivalencia de atlas holomórficamente (analíticamente) equivalentes en X .

Así, se puede obtener una estructura compleja Σ en X mediante la elección de un atlas $\mathfrak{U}$ y se sigue del Lema de Zorn que el atlas $\mathfrak{U}$ en X puede ser extendido a un atlas maximal $\mathfrak{U}^*$ en X .

Definición 1.22. Una *superficie de Riemann* es un par (X, Σ) , donde X es una variedad conexa de dimensión dos y Σ es una estructura compleja en X .

Usualmente se escribe X en lugar de (X, Σ) cuando se tiene clara la estructura compleja y, algunas veces se escribe $(X, \mathfrak{U})$ donde $\mathfrak{U}$ es un representante de Σ .

Observación 1.3. Una superficie de Riemann compacta es llamada *cerrada*, mientras que una superficie que no es compacta se dice *abierta*.

A continuación, presentamos ejemplos de superficies de Riemann.

- Ejemplos 1.1.**
1. El *plano complejo* $\mathbb{C}$ es una superficie de Riemann abierta. Su estructura compleja está definida por el atlas que tiene como única carta la función identidad $id : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
 2. Dada una superficie de Riemann M , entonces un *dominio* D (subconjunto abierto conexo) en M es también una superficie de Riemann, tomando como atlas en D el obtenido de la restricción de todas las cartas complejas de M a D .
 3. La *esfera de Riemann* $\mathbb{C}_\infty$ es una superficie de Riemann cerrada. Introducimos la topología del Teorema 1.1, obteniendo que $\mathbb{C}_\infty$ es un espacio topológico de Hausdorff. Para definir las cartas complejas, sean

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{C}, \\ U_2 &= (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

Definimos $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, como: φ_1 es la identidad y

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{para } z = \infty. \end{cases}$$

Así, φ_i son homeomorfismos y $\mathbb{C}_\infty$ es una variedad de dimensión dos. Ya que U_1 y U_2 son conexos y tienen intersección no vacía, $\mathbb{C}_\infty$ es también conexo.

La estructura compleja en $\mathbb{C}_\infty$ está definida por el atlas que consiste de todas las cartas $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$. Se debe probar que dos cartas son holomórficamente compatibles, pero $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\mapsto \frac{1}{z}, \end{aligned}$$

es biholomorfa.

Definición 1.23. Dos superficies de Riemann U y V son *conformemente equivalentes* si existe una función holomorfa e inyectiva $f : U \rightarrow V$ con inversa holomorfa.

De acuerdo al Teorema de Uniformización de Riemann-Koebe, véase [20], se tiene que toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a uno de los siguientes espacios:

1. la esfera $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,
2. el plano $\mathbb{C}$,
3. el disco $\Delta = \{z : |z| < 1\}$.

La superficie de Riemann M es llamada:

1. Elíptica, para la esfera.
2. Parabólica, para el plano.
3. Hiperbólica, para el disco.

Las siguientes métricas Riemannianas se trabajan en superficies de Riemann simplemente conexas. Sea M una superficie de Riemann simplemente conexa, la métrica en M es de la forma

$$\lambda(z)|dz|, \quad z \in M.$$

Se establece lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= \frac{2}{1 + |z|^2}, \quad \text{para } M = \mathbb{C}_\infty, \\ \lambda(z) &= 1, \quad \text{para } M = \mathbb{C}, \\ \lambda(z) &= \frac{2}{1 - |z|^2}, \quad \text{para } M = \Delta = \{z : |z| < 1\}. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Normalidad

En este capítulo, enunciaremos algunas definiciones y resultados relacionados con sucesiones de funciones de variable compleja, para enunciar resultados de la teoría de familias normales, como referencias para el lector véase [1], [2], [8], [15] y [34].

2.1. Sucesiones de funciones complejas

Dado $A \subseteq \mathbb{C}$, si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función compleja $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una *sucesión de funciones complejas* sobre A . De igual forma, para $z \in A$ fijo la sucesión de funciones nos define $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos.

Cuando nos referimos a sucesiones es natural preguntarnos sobre el comportamiento que tienen o hacia dónde se aproximan los elementos de la sucesión, para ello veamos las siguientes definiciones.

Definición 2.1. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas sobre $A \subseteq \mathbb{C}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. La sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge* a f en $z \in A$, si la sucesión $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(z)$, es decir, si dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

La sucesión de funciones converge en A si converge para cada punto en el conjunto A y la función

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z),$$

es llamada la *función límite* de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $z \in A$ y se denota como:

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{o} \quad f_n \rightarrow f \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Definición 2.2. Dada $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas sobre $A \subseteq \mathbb{C}$, la sucesión *converge uniformemente* en A a una función compleja f si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ y $z \in A$, entonces

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

En el contexto de sucesión de funciones nos encontramos con dos tipos de convergencia. En la convergencia de la Definición 2.1 el número natural N depende de ε y del punto $z \in A$, mientras que para la convergencia uniforme, el número N solo depende de ε . De igual forma, se sigue que la convergencia uniforme implica la convergencia en el sentido de la Definición 2.1, el recíproco en general, no se satisface.

Definición 2.3. Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A y $z \in A$, la sucesión $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ es una *sucesión de Cauchy* si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$, entonces

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Teorema 2.1. [34].

1. Una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones complejas en A converge uniformemente si y solo si la sucesión $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.
2. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas continuas en A converge uniformemente, entonces la función límite $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ es continua.

Definición 2.4. Una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones complejas en A es *uniformemente acotada* si existe $M > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ y $z \in A$

$$|f_n(z)| \leq M.$$

Recordemos que para una sucesión de números complejos, si la sucesión es acotada, entonces existe una subsucesión convergente, la prueba se realiza utilizando la correspondencia del Teorema de Weierstrass para números reales y por propiedades de los números complejos y sucesiones de los mismos. Entonces, se esperaría que para sucesiones de funciones uniformemente acotadas ocurriera lo mismo, pero en general, no es así. Para garantizarlo necesitamos de otras condiciones que enunciaremos en la siguiente sección.

2.2. Familias normales

Paul Montel nació en Nice en 1876 y murió en París en 1975. Realizó sus estudios en la École Normale Supérieure en 1897 y no trabajó en su doctorado hasta años después. Sin embargo, utilizó su tiempo viajando, en la literatura y enseñando matemáticas. Fue hasta 1907 que recibió su doctorado en la Universidad de París. Montel perteneció a la nueva generación de matemáticos franceses junto con P. Fatou, R. L. Baire, E. Borel y H. L. Lebesgue. La principal aportación de P. Montel se refería a las sucesiones infinitas de funciones tanto reales como complejas y a pesar de que explícitamente no utilizó el concepto de “familias normales”, él lo manejó a lo largo de su tesis en [30].

P. Montel trabajó principalmente en la teoría de funciones complejas y su teoría de familias normales fue la que tuvo relevancia, aplicándola a convergencia de sucesiones y series, la teoría de Picard y funciones conformes.

En esta sección incluiremos las definiciones y resultados más relevantes sobre la teoría de familias normales de P. Montel que usaremos en esta tesis. Como referencias para el lector véase [1], [2], [8], [25] y [34].

Definición 2.5. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones complejas es *equicontinua* en $A \subseteq \mathbb{C}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$

$$z, w \in A, \quad |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

Con la notación de la definición anterior tenemos que toda f en una familia equicontinua $\mathcal{F}$ es uniformemente continua.

Teorema 2.2. [34]. Si una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones complejas en un conjunto compacto A es uniformemente acotada y equicontinua, entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente.

Definición 2.6. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones complejas es *normal* en A si cada sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$ contiene una subsucesión la cual converge uniformemente en cada subconjunto compacto de A .

De la definición anterior se puede observar que no se requiere que la función límite de las subsucesiones convergentes pertenezca a la familia $\mathcal{F}$. Para $z_0 \in A$, si existe una vecindad $V_0 \subseteq A$ de z_0 tal que $\mathcal{F}$ es normal en V_0 , entonces $\mathcal{F}$ es normal en z_0 .

Teorema 2.3 ([1]. Propiedad de Bolzano-Weierstrass). *Un espacio métrico es compacto si y solo si toda sucesión infinita tiene una subsucesión convergente.*

Hay una gran similitud entre la normalidad de una familia de funciones y la propiedad de Bolzano-Weierstrass [1]. Como hacemos referencia a espacios métricos, debemos definir una métrica en el espacio de las funciones complejas continuas sobre $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto, a $\Omega = \mathbb{C}, \mathbb{C}_{\infty}$, para la cual la convergencia con respecto a dicha métrica coincida con la convergencia uniforme en conjuntos compactos.

Proposición 2.1. Sea $C(A, \Omega)$ el conjunto de todas las funciones complejas continuas sobre $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto, entonces $(C(A, \Omega), \rho)$ es un espacio métrico, donde

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)} 2^{-n}, \quad \rho_n(f, g) = \sup_{z \in E_n} \{d(f(z), g(z))\}, \quad (2.1)$$

con cada E_n compacto.

La métrica $\rho(f, g)$ de la Proposición 2.1 tiene la propiedad que buscamos, véase [1]. Además, si (Ω, d) es un espacio métrico completo, es decir, toda sucesión de Cauchy converge a un elemento del espacio, entonces se sigue el siguiente resultado.

Proposición 2.2. *Sean (Ω, d) un espacio métrico completo y $C(A, \Omega)$ el conjunto de todas las funciones complejas continuas sobre $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto, entonces $(C(A, \Omega), \rho)$ es un espacio métrico completo.*

Aplicando el Teorema 2.3 a una familia de funciones complejas $\mathcal{F}$, equipada con la métrica ρ , definida en la Ecuación (2.1), se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.3. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones complejas continuas. $(\mathcal{F}, \rho)$ es un espacio métrico compacto si y solo si $\mathcal{F}$ es normal.*

El siguiente teorema es una caracterización de familias normales.

Teorema 2.4. *Una familia $\mathcal{F} \subseteq C(A, \Omega)$ es normal si y solo si su clausura $\overline{\mathcal{F}}$, con respecto a la métrica ρ (Ecuación (2.1)), es compacto.*

Recordemos que conjuntos compactos en cualquier espacio métrico son completos y totalmente acotados. La siguiente relación entre familias normales y conjuntos totalmente acotados se enuncia como sigue.

Proposición 2.4. *Si (Ω, d) es un espacio métrico completo, entonces $\mathcal{F} \subseteq C(A, \Omega)$ es normal si y solo si es totalmente acotado.*

El siguiente resultado relaciona las Definiciones 2.5 y 2.6.

Teorema 2.5 ([1]. Arzelà-Ascoli). *Una familia $\mathcal{F} \subseteq C(A, \Omega)$ es normal si y solo si*

1. *$\mathcal{F}$ es equicontinua en cada subconjunto compacto E de A ;*
2. *para cualquier $z \in A$ los valores $f(z)$, para $f \in \mathcal{F}$, se encuentran en un subconjunto compacto de Ω .*

Si consideramos $\Omega = \mathbb{C}$ con la distancia euclídea, entonces sabemos que los subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ son cerrados y acotados, así la condición 2 del Teorema 2.5 se cumple si y solo si los valores de $f(z)$ están acotados para cada $z \in A$, donde la cota puede depender del punto, véase [1].

Teorema 2.6. *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones analíticas que van de $A \subseteq \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ es normal si y solo si las funciones en $\mathcal{F}$ son uniformemente acotadas en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.*

En particular, la normalidad es una propiedad local. Basado en el Teorema de Arzelà-Ascoli, P. Montel en 1907 observó que para una familia de funciones holomorfas que sean localmente acotadas se implica la equicontinuidad. Obteniendo los siguientes resultados.

Teorema 2.7 ([25]. Montel). *Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones holomorfas localmente acotadas en un dominio A , entonces $\mathcal{F}$ es normal en A . Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es normal en A y es acotada en un subconjunto de A , entonces $\mathcal{F}$ es localmente acotada.*

Uno de los resultados importantes de P. Montel es su *Criterio de normalidad*. Para enunciar el criterio, necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.7. Un número complejo w_0 es un *valor excepcional* de una familia de funciones analíticas o meromorfas $\mathcal{F}$ definidas en un dominio A si

$$w_0 \notin \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(A).$$

Teorema 2.8 ([2]. Criterio de normalidad de Montel). *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones analíticas en un dominio A . Si $\mathcal{F}$ tiene al menos dos valores excepcionales en A , entonces es normal. Si $\mathcal{F}$ consiste de funciones meromorfas, entonces un criterio de normalidad suficiente es que haya al menos tres valores excepcionales.*

A continuación, se muestran algunos ejemplos de normalidad.

Ejemplo 2.1. La familia $\mathcal{F} = \{f(z) = z^n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1\}$, ya que la sucesión converge uniformemente a cero dentro del círculo unitario y converge uniformemente a ∞ fuera del círculo unitario.

Ejemplo 2.2. La familia $\mathcal{F} = \{f(z) = nz : n \in \mathbb{N}\}$ no es normal en ningún conjunto que contenga al origen, ya que si consideramos el disco unitario $D(0, 1)$, entonces para $z \neq 0$, nz converge puntualmente a ∞ y, para $z = 0$, nz converge puntualmente a cero.

Capítulo 3

Dicotomía en la dinámica de funciones trascendentes enteras

La teoría de iteración de funciones complejas fue estudiada para funciones racionales definidas en $\mathbb{C}_\infty$ por P. Fatou y G. Julia. Posteriormente con los estudios realizados por P. Fatou en 1926, se introdujo la iteración de funciones trascendentes enteras definidas en $\mathbb{C}$, donde la principal diferencia entre estos dos estudios es la presencia de singularidades esenciales. El estudio de funciones trascendentes enteras fue retomado posteriormente por I. N. Baker en 1959. Más tarde por A. Eremenko y M. Y. Lyubich, entre otros, véase [36]. En este capítulo el objeto de estudio son las funciones trascendentes enteras de tipo finito, sus propiedades y algunos resultados importantes. Para algunas demostraciones referimos al lector a [4], [10], [19], [25], [32] y [36]. Las superficies de Riemann utilizadas en este capítulo son la esfera y el plano complejo.

Dada una función holomorfa f , la *sucesión de iteradas* de f se denota por

$$\{f^n\}_{n=1}^\infty, \quad \text{donde } f^1 = f, f^2 = f \circ f, \dots, f^{k+1} = f^k \circ f.$$

No se debe confundir f^n con la potenciación, la cual dado $z \in \mathbb{C}$, explícitamente se escribe como $(f(z))^n$. Observemos que dada una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, la n -ésima iterada de f para cada $z \in \mathbb{C}$, esto es $f^n(z)$, está bien definida. De aquí y en adelante, dada una función f denotaremos a la sucesión de iteradas $\{f^n\}_{n=1}^\infty$ como $\{f^n\}$.

3.1. Puntos fijos

El estudio de la dinámica holomorfa inicia con la descripción del comportamiento local de una función cerca de sus puntos fijos. En esta sección estaremos interesados en la existencia y distribución de los puntos fijos.

Recordemos la equivalencia entre función holomorfa y función analítica del Teorema 1.5.

Definición 3.1. Sean una función holomorfa $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$, se consideran los siguientes conjuntos:

1. La *órbita hacia adelante* de z_0 se define como el conjunto

$$O^+(z_0) = \{z_n = f^n(z_0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

2. La *órbita hacia atrás* de z_0 se define como el conjunto

$$O^-(z_0) = \{z : f^n(z) = z_0, n \in \mathbb{N}\}.$$

3. La *gran órbita* de z_0 se define como

$$O(z_0) = O^+(z_0) \cup O^-(z_0).$$

Observe que para $z_0 \in \mathbb{C}$, la órbita hacia adelante es la colección de las imágenes de z_0 bajo $f, f^2, \dots$, mientras que la órbita hacia atrás es la colección de las pre-imágenes de z_0 bajo $f, f^2, \dots$.

La notación del conjunto de funciones trascendentes enteras está dado por $\mathcal{E}$ y el conjunto de funciones trascendentes enteras de tipo finito por $\mathcal{E} \cap S$ (revisar el Capítulo 1: Definición 1.14 y Observación 1.2).

Definición 3.2. Sean una función $f \in \mathcal{E}$ y un punto $z_0 \in \mathbb{C}$.

1. z_0 es llamado *punto periódico* si $f^n(z_0) = z_0$, para algún $n \in \mathbb{N}$. El menor n que lo cumple es llamado *período*.
2. Como caso particular de 1, si $n = 1$, entonces z_0 es llamado *punto fijo* de f , esto es, $f(z_0) = z_0$.
3. z_0 es llamado *punto pre-periódico* si $f^k(z_0)$ es punto periódico para algún entero $k > 0$.

Definición 3.3. Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Un punto $z_0 \in A$ es un *punto excepcional* de f si la órbita hacia atrás $O^-(z_0)$ tiene una cantidad finita de elementos. Al conjunto de puntos excepcionales de f se le denota por $E(f)$.

En general, $O^-(z)$ contiene infinitos puntos, pero en algunos casos $O^-(z)$ puede constar de un número finito de puntos, por ejemplo: para $f(z) = z^2$ y $z_0 = 0$, se tiene que $O^-(z_0) = \{0\}$.

Teorema 3.1. [32]. Si $f \in \mathcal{E}$, entonces

(a) *Existen a lo más dos puntos excepcionales para f .*

(b) *f tiene a ∞ como un punto excepcional.*

(c) *Si f tiene la forma*

$$f(z) = z^m e^{g(z)},$$

con m un entero no negativo y g es una función entera, entonces f tiene dos puntos excepcionales: ∞ y cero.

Un ejemplo del Teorema 3.1 es la función $f(z) = e^z$, la cual tiene dos puntos excepcionales: cero e infinito.

Definición 3.4. Dado z_0 un punto periódico de período n , la órbita

$$O^+(z_0) = \{z_0, \dots, z_n = z_{n-1}\}$$

es llamada *ciclo*.

El *multiplicador* λ en z_0 de f está definido por:

$$\lambda = (f^n)'(z_0).$$

Dependiendo el valor del módulo del multiplicador se tiene la siguiente clasificación de un punto fijo (o periódico) z_0 de la función $f \in \mathcal{E}$ (análogo para ciclos):

1. z_0 es *súper atractor*, si $|\lambda| = 0$.
2. z_0 es *atractor*, si $0 < |\lambda| < 1$.
3. z_0 es *repulsor*, si $|\lambda| > 1$.
4. z_0 es *indiferente*, si $|\lambda| = 1$. Dentro de este caso encontramos que se subdividen en dos situaciones:
 - (a) *Racional indiferente* o *punto parabólico*, si $\lambda^m = 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$.
 - (b) *Irracional indiferente*, si $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Observación 3.1. El multiplicador en z_0 es el mismo que en cualquier otro punto en el ciclo de z_0 .

P. C. Rosenbloom en [35], fue el primero en utilizar el método de la teoría de Nevanlinna para estudiar la existencia y número de puntos fijos de funciones trascendentes enteras. Demostró que cualquier función trascendente entera tiene infinitos puntos periódicos de período 1 o 2, véase [39]. Posteriormente, I. N. Baker en [4], generalizó el resultado demostrando el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Cualquier función $f \in \mathcal{E}$ tiene infinitos puntos periódicos de exactamente período n ($n \geq 2$), con excepción de a lo más un valor de n .*

De igual manera, I. N. Baker en [4] planteó la siguiente conjetura.

Conjetura 1. Para toda $n \geq 2$ y $f \in \mathcal{E}$, f^n siempre tiene infinitos puntos fijos.

Observación 3.2. La Conjetura 1, en general no se cumple, para $n = 1$, por ejemplo al considerar la función $f(z) = e^z + z$, observemos que f no tiene puntos fijos, porque la ecuación $e^z = 0$ no tiene solución.

W. Bergweiler en [9] demostró la Conjetura 1 y además probó el siguiente resultado.

Teorema 3.3. Si $f \in \mathcal{E}$ y $n \geq 2$, entonces f^n tiene infinitos puntos fijos repulsivos.

3.2. Los conjuntos de Fatou y Julia

La teoría desarrollada por P. Fatou y G. Julia respecto a la iteración de funciones complejas, estuvo apoyada principalmente en la teoría de familias normales de P. Montel, donde para una función de variable compleja resulta útil particionar la esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$ en dos conjuntos: el primero donde la familia de iteradas es normal y el segundo donde no. Estos conjuntos fueron denominadas como el conjunto estable e inestable, respectivamente. El estudio de dicha dicotomía se encontró en el centro de los trabajos realizados por P. Fatou en [21, 22] y G. Julia en [26].

Las regiones de normalidad y no normalidad en la que se particiona a $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{C}_\infty$), son los principales objetos de estudio en la teoría de iteración de funciones, llamados el conjunto de Fatou y el conjunto de Julia. El conjunto de Fatou es donde el comportamiento iterativo de la función es relativamente “bonito”, en el sentido de que los puntos cercanos se comportan de forma similar; mientras que el conjunto de Julia es donde ocurren los fenómenos caóticos. Las definiciones formales son las siguientes.

Dada una función $f \in \mathcal{E}$, el conjunto de Fatou está definido como:

$$\mathfrak{F}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \{f^n\} \text{ está bien definida y es normal en alguna vecindad de } z\}.$$

El conjunto de Julia se define como el complemento del conjunto de Fatou, esto es,

$$\mathfrak{J}(f) = \mathbb{C} \setminus \mathfrak{F}(f).$$

3.3. Propiedades básicas de los conjuntos de Fatou y Julia

En esta subsección demostraremos algunas propiedades importantes de los conjuntos de Fatou y Julia para el conjunto de funciones trascendentes enteras, denotado por $\mathcal{E}$. Un primer resultado que podemos enunciar es el siguiente.

Dicotomía en la dinámica de funciones trascendentes enteras

3.3 Propiedades básicas de los conjuntos de Fatou y Julia

Proposición 3.1. *Si $f \in \mathcal{E}$, entonces*

$$\mathfrak{F}(f) = \bigcup_{z \in \mathfrak{F}(f)} V_z,$$

donde V_z es una vecindad de z y $\{f^n\}$ está bien definida y es normal en V_z .

Demostración. Por la definición del conjunto de Fatou, se tiene que $\mathfrak{F}(f) \subseteq \bigcup_{z \in \mathfrak{F}(f)} V_z$.

Por otro lado, sean $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$ y V_{z_0} una vecindad de z_0 , la cual es abierta, por tanto para cada punto $z \in V_{z_0}$ existe una vecindad V_z tal que $V_z \subseteq V_{z_0}$. Además, como $\{f^n\}$ está bien definida y es normal en V_{z_0} , entonces también lo será en V_z . Por lo tanto, $\bigcup_{z \in \mathfrak{F}(f)} V_z \subseteq \mathfrak{F}(f)$. Finalmente, se concluye que $\mathfrak{F}(f) = \bigcup_{z \in \mathfrak{F}(f)} V_z$. $\square$

A continuación, presentamos cinco propiedades básicas de los conjuntos de Fatou y Julia, con sus respectivas demostraciones para $f \in \mathcal{E}$.

I. $\mathfrak{F}(f)$ es abierto y $\mathfrak{J}(f)$ es cerrado.

Demostración. De acuerdo a la Proposición 3.1, se tiene que $\mathfrak{F}(f)$ es unión arbitraria de conjuntos abiertos, por lo tanto $\mathfrak{F}(f)$ es abierto y así, $\mathfrak{J}(f)$ es cerrado. $\square$

II. $\mathfrak{F}(f)$ y $\mathfrak{J}(f)$ son completamente invariantes.

Demostración. Primero, probaremos que $\mathfrak{F}(f)$ es completamente invariante, es decir, $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$ si y solo si $f(z_0) \in \mathfrak{F}(f)$.

[$\implies$] Sea $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$, entonces existe $V_0 = \{z : |z - z_0| < r_0\}$ vecindad de z_0 donde la familia $\{f^n\}$ es normal.

Sea $V_1 = \{z : |z - f(z_0)| < r_1\}$ tal que $V_1 \subseteq f(\{z : |z - z_0| < \frac{r_0}{2}\})$, entonces la familia $\{f^{n-1}\}$ es normal en V_1 , esto es, $f(z_0) \in \mathfrak{F}(f)$.

[$\impliedby$] Sea $f(z_0) \in \mathfrak{F}(f)$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$. Como $\mathfrak{F}(f)$ es abierto, existe un abierto W de $\mathfrak{F}(f)$ tal que $f(z_0) \in W$. De igual forma, como W es abierto, existe $r_0 > 0$ tal que $V = \{z : |z - f(z_0)| < r_0\} \subseteq W$, entonces la familia $\{f^n\}$ es normal en V .

Elijamos $U = \{z : |z - z_0| < r\}$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \frac{r_0}{2}$ para $z \in U$, entonces la familia $\{f^{n+1}\}$ es normal en U , es decir, $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$.

Por lo tanto, $\mathfrak{F}(f)$ es completamente invariante y como $\mathfrak{J}(f) = \mathbb{C} \setminus \mathfrak{F}(f)$, se sigue que $\mathfrak{J}(f)$ es también completamente invariante. $\square$

Dicotomía en la dinámica de funciones trascendentes enteras

3.3 Propiedades básicas de los conjuntos de Fatou y Julia

III. Para toda $q \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}(f^q) = \mathfrak{F}(f)$ y $\mathfrak{J}(f^q) = \mathfrak{J}(f)$.

Demostración. Observemos que la familia $\{(f^q)^n\} \subseteq \{f^n\}$, porque $\{(f^q)^n\}$ es normal donde $\{f^n\}$ lo sea, es decir, $\mathfrak{F}(f) \subseteq \mathfrak{F}(f^q)$ y así, $\mathfrak{J}(f^q) \subseteq \mathfrak{J}(f)$.

Ahora, sea $z_0 \in \mathfrak{J}(f)$ y supongamos que $z_0 \notin \mathfrak{J}(f^q)$, entonces existe una vecindad de z_0 , digamos $V_0 = \{z : |z - z_0| < r\}$, en la cual la familia $\{(f^q)^n\}$ es normal. Como $\{f^n\}$ no es normal en V_0 , entonces por la Conjetura 1 y Teorema 2.8, existe un punto $w \in V_0$, un punto fijo α de f^2 y una función $f^p \in \{f^n\}$ tales que

$$f^p(w) = \alpha = f^2(\alpha).$$

Para cualquier entero n con $nq \geq p$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $nq = p + 2m$ o $np = p + 2m + 1$.

- Si $nq = p + 2m$, entonces

$$f^{nq}(w) = f^{2m} \circ f^p(w) = f^{2m}(\alpha) = \alpha.$$

- Si $np = p + 2m + 1$, entonces

$$f^{nq}(w) = f \circ f^{2m} \circ f^p(w) = f \circ f^{2m}(\alpha) = f(\alpha).$$

En cualquier caso, la sucesión $\{f^{nq}(w)\}$ es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que es localmente uniformemente acotada en V_0 . Entonces existe una constante $M > 0$ tal que para $z \in U = \{z : |z - z_0| < \frac{r}{2}\}$,

$$|f^{nq}(z)| \leq M. \tag{3.1}$$

Para cualquier $n \geq 1$, tenemos que $n = mq + k$, con $m \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k < q$. Así,

$$f^n(z) = f^k \circ f^{mq}(z) = f^k(f^{mq}(z)). \tag{3.2}$$

De la Ecuación (3.1) se sigue que $\{f^n\}$ es uniformemente acotada en U y por el Teorema 2.7 se tiene que $z_0 \in \mathfrak{F}(f)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se concluye que $\mathfrak{J}(f^q) = \mathfrak{J}(f)$.

Luego, $\mathfrak{F}(f^q) = \mathbb{C} \setminus \mathfrak{J}(f^q) = \mathbb{C} \setminus \mathfrak{J}(f) = \mathfrak{F}(f)$. □

IV. Si $z_0 \in \mathfrak{J}(f)$ no es punto excepcional, entonces $\mathfrak{J}(f) = \overline{O^-(z_0)}$.

Demostración. Tomemos $z_0 \in \mathfrak{J}(f)$ que no es punto excepcional. Observemos que $\overline{O^-(z_0)} \subseteq \mathfrak{J}(f)$, como $\mathfrak{J}(f)$ es completamente invariante y es cerrado entonces, se cumple la primera contención a demostrar.

Dicotomía en la dinámica de funciones trascendentes enteras

3.3 Propiedades básicas de los conjuntos de Fatou y Julia

Sea $z_1 \in \mathfrak{J}(f)$ y U una vecindad de z_1 . Por hipótesis, como z_0 no es punto excepcional, tenemos que $O^-(z_0)$ contiene infinitos puntos y, por el Teorema 2.8 obtenemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ interseca a $O^-(z_0)$. Así,

$$U \cap O^-(z_0) \neq \emptyset,$$

entonces $z_1 \in \overline{O^-(z_0)}$. Por lo tanto, $\mathfrak{J}(f) \subseteq \overline{O^-(z_0)}$. □

V. $\mathfrak{J}(f)$ es perfecto.

El conjunto de Julia $\mathfrak{J}(f)$ es perfecto si cumple lo siguiente:

- (a) $\mathfrak{J}(f)$ es cerrado.
- (b) $\mathfrak{J}(f) \neq \emptyset$ y es infinito.
- (c) $\mathfrak{J}(f)$ no contiene puntos aislados.

Demostración. (a) Por la propiedad I, el conjunto de Julia $\mathfrak{J}(f)$ es cerrado.

- (b) Si $f \in \mathcal{E}$, entonces por la Conjetura 1 existen infinitos puntos fijos para f^2 , es decir, $f^2(z_i) = z_i$ para $i \in \Lambda$ un conjunto infinito de índices.

Si existe $i_0 \in \Lambda$ tal que z_{i_0} no es punto excepcional y pertenece a $\mathfrak{J}(f)$, entonces por la propiedad IV, se tiene que $\mathfrak{J}(f)$ contiene infinitos puntos.

Ahora, supongamos que existen $i_1, i_2 \in \Lambda$ tales que $z_{i_1}, z_{i_2} \in \mathfrak{J}(f)$, entonces deben estar contenidos en diferentes componentes periódicas de Fatou y, por tanto $\mathfrak{J}(f)$ contiene de nuevo, infinitos puntos. Teniendo así lo que deseamos.

- (c) Sean $z_0 \in \mathfrak{J}(f)$ y U una vecindad de z_0 . Se afirma que existen infinitos puntos de $\mathfrak{J}(f)$ no contenidos en $O^+(z_0)$.

En efecto, es claro si $f(z_0) = z_0$. Y si $f(z_0) \neq z_0$, entonces por Teorema 3.1 al menos uno de estos no es punto excepcional. Por tanto, $O^-(z_0)$ o $O^-(f(z_0))$ contiene infinitos puntos que pertenecen a $\mathfrak{J}(f) \setminus O^+(z_0)$, por lo que podemos tomar tres puntos distintos ahí, y por el Teorema 2.8 se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ contiene uno de esos tres puntos, lo cual implica que:

$$(U \setminus \{z_0\}) \cap \mathfrak{J}(f) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $z_0 \in \mathfrak{J}(f)$ no es aislado. Así, $\mathfrak{J}(f)$ es perfecto. □

De acuerdo a la Sección 3.1 sobre puntos fijos, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.4. [32] Sea $f \in \mathcal{E}$. Cada punto periódico repulsor o racional indiferente de f pertenece al conjunto de Julia. Cada punto periódico (súper) atractor pertenece al conjunto de Fatou.

3.4. Componentes del conjunto de Fatou

Todo conjunto abierto tiene componentes, en particular el conjunto de Fatou. Un dominio máximo de normalidad U de las iteradas de f es llamada una *componente* del conjunto de Fatou. Si U es una componente de Fatou, entonces $f^p(U)$, donde p es la p -ésima iterada de f , está contenida en una componente de Fatou, denotada por U_p .

La siguiente definición está dada para funciones meromorfas, véase [25]

Definición 3.5. Dada una función meromorfa f y una componente de Fatou U , se tienen las siguientes posibilidades para la órbita de U bajo f :

- Si $U^n \subseteq U$ para algún entero $n \geq 1$, entonces U es *periódica*. El mínimo entero n que satisface la condición es el *período* de la componente, véase Figura 3.1(a).
- Si U^m es periódica para algún entero $m \geq 0$, entonces U es *pre-periódica*, véase Figura 3.1(b).
- Si U no es periódica ni pre-periódica, entonces U es *errante*, véase Figura 3.1(c).

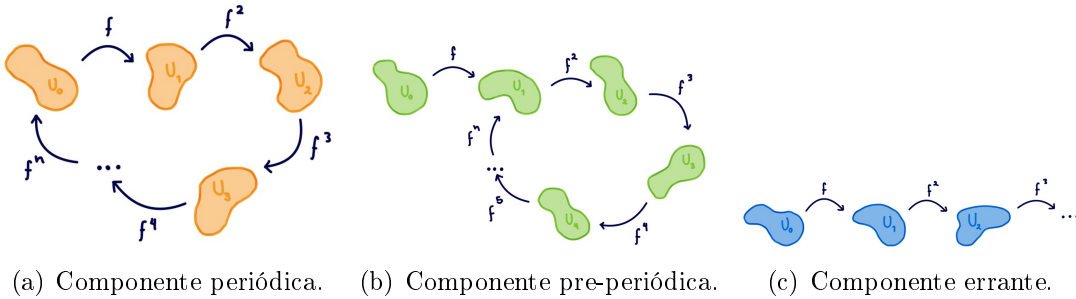


Figura 3.1: Componentes de Fatou

Sea D una componente de Fatou de una función meromorfa f de período p . La clasificación de D tiene cinco posibilidades, véase [10] y [25].

- D contiene un punto periódico atractor z_0 de período p . Entonces $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ para $z \in D$ cuando $n \rightarrow \infty$ y D es llamado un *dominio atractor* de z_0 , véase Figura 3.2.
- ∂D contiene un punto periódico z_0 de período p y $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ para $z \in D$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $(f^p)'(z_0) = 1$, en este caso, D es llamado un *dominio parabólico*, véase Figura 3.3.
- D es un *disco de Siegel*, si existe un homeomorfismo analítico $\phi : D \rightarrow U$, donde $U = \{z : |z| < 1\}$ es un disco unitario, que satisface lo siguiente: $\phi(f^p(\phi^{-1}(z))) = e^{2\pi\alpha i}z$ para algún $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, véase Figura 3.4.

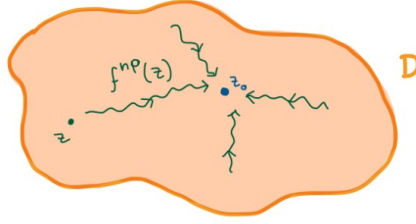


Figura 3.2: Dominio atractor.

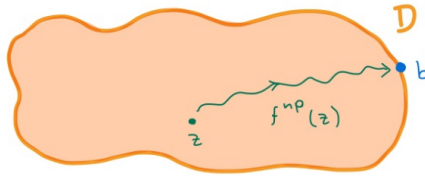


Figura 3.3: Dominio parabólico.

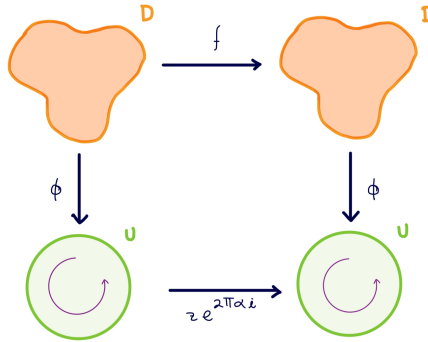


Figura 3.4: Disco de Siegel.

4. D es un *anillo de Herman*, si existe un homeomorfismo analítico $\phi : D \rightarrow A$, donde $A = \{z : 1 < |z| < r\}$ con $r > 1$ es un anillo, que satisface lo siguiente: $\phi(f^p(\phi^{-1}(z))) = e^{2\pi i \alpha} z$ para algún $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, véase Figura 3.5.
5. D es un *dominio de Baker*, si existe $z_0 \in \partial D$ tal que $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ para $z \in D$ cuando $n \rightarrow \infty$, pero $f^p(z_0)$ no está definido. En particular, si $p = 1$, entonces $z_0 = \infty$, véase Figura 3.6.

Cuando D satisface 1 o 2, con el punto periódico (súper) atractor o racional indiferente z_0 de la clasificación anterior, se denota por $A(z_0)$ al conjunto de los z tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{kn+j}(z) = z_0,$$

para algún j . $A(z_0)$ es llamada la *cuenca de (súper) atracción* o *cuenca parabólica*,

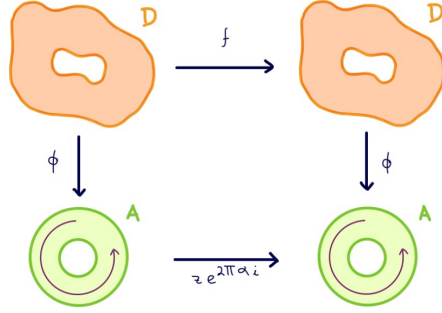


Figura 3.5: Anillo de Herman.

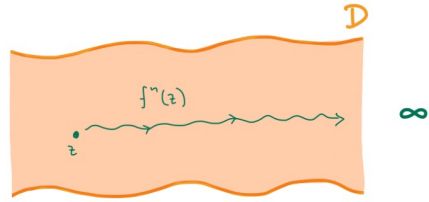


Figura 3.6: Dominio de Baker.

respectivamente. La unión de componentes $A(z_0)$ que contiene un punto del ciclo de z_0 se denomina *cuenca inmediata* del ciclo de z_0 .

De acuerdo a la clasificación de componentes periódicas de Fatou, tenemos los siguientes resultados importantes demostrados por A. Eremenko y M. Y. Lyubich en [19], para funciones trascendentes enteras de tipo finito.

Teorema 3.5. [19]. Si $f \in \mathcal{E} \cap S$, entonces no existe una componente U de $\mathfrak{F}(f)$ tal que $f^n|_U \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Corolario 3.1. Si $f \in \mathcal{E} \cap S$, entonces f no tiene dominios de Baker.

3.5. Algunos resultados de los conjuntos de Fatou y Julia

En esta sección se enunciarán y demostrarán algunos resultados importantes relacionados con las propiedades de los conjuntos de Fatou y Julia para funciones trascendentes enteras, véase [5], [6], [18], [19] y [32].

Proposición 3.2. Si $f \in \mathcal{E}$, el conjunto de Julia $\mathfrak{J}(f)$ no es acotado en $\mathbb{C}$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{E}$. Elijamos $\xi \in \mathfrak{J}(f)$ que no es valor excepcional en el sentido de Picard. Sea U cualquier vecindad del punto infinito. Por el Teorema de

Dicotomía en la dinámica de funciones trascendentes enteras

3.5 Algunos resultados de los conjuntos de Fatou y Julia

Picard, existe un punto $\eta \in U$ tal que $f(\eta) = \xi$ y debido a que $\mathfrak{J}(f)$ es completamente invariante, en particular, invariante hacia atrás, $\eta \in \mathfrak{J}(f)$. Por lo tanto, $\mathfrak{J}(f)$ es no acotado. $\square$

Por definición, los discos de Siegel son simplemente conexos y los anillos de Herman son doblemente conexos, es importante considerar la conexidad de otras componentes de Fatou, destacando el siguiente resultado establecido por I. N. Baker.

Teorema 3.6. [6]. *Si $f \in \mathcal{E}$, entonces $\mathfrak{F}(f)$ no tiene componentes múltiplemente conexas no acotadas.*

Teorema 3.7. *Si $f \in \mathcal{E}$, el conjunto de Fatou $\mathfrak{F}(f)$ no tiene anillos de Herman.*

Demostración. Supóngase que existe un anillo de Herman H , esto es, existe un homeomorfismo analítico $\phi : H \rightarrow A$, con A un anillo de la forma $A = \{z : 1 < |z| < r\}$, $r > 1$, tal que $\phi(f^p(\phi^{-1}(z))) = e^{2\pi i \alpha} z$ para algún $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Luego, el complemento de H tiene dos componentes: una acotada y una no acotada, llamémosle A y B , respectivamente.

Como $\{f^n\}$ es uniformemente acotada en H , porque $H \subseteq \mathfrak{F}(f)$, el Principio del Módulo Máximo muestra que $\{f^n\}$ es también uniformemente acotada en la componente acotada A , lo cual es una contradicción, debido a que A contiene puntos de $\mathfrak{J}(f)$ y se sigue de la Proposición 3.2. $\square$

El Teorema 3.7 no implica la no existencia de componentes de Fatou múltiplemente conexas para funciones trascendentes enteras. I. N. Baker en [7] construyó el primer ejemplo de una función trascendente entera donde el conjunto de Fatou tiene una componente múltiplemente conexa que es una componente errante. También demostró el siguiente resultado.

Teorema 3.8. [32]. *Si $f \in \mathcal{E}$ y U es una componente múltiplemente conexa de $\mathfrak{F}(f)$, entonces U es un dominio errante.*

Posteriormente, A. Eremenko y M. Y. Lyubich en [18] establecieron el siguiente resultado para funciones trascendentes enteras de tipo finito usando la teoría casi-conforme. Dennis Sullivan en [37] aplicó esta teoría por primera vez para probar que funciones racionales no tienen dominios errantes.

Teorema 3.9. [18]. *Una función $f \in \mathcal{E} \cap S$ no tiene componentes errantes en el conjunto de Fatou $\mathfrak{F}(f)$.*

Observación 3.3. Por los Teoremas 3.5, 3.7 y 3.9, se sigue que las funciones trascendentes enteras de tipo finito solamente pueden tener componentes de Fatou que son: atractoras, parabólicas y discos de Siegel.

Recordemos que un conjunto U es completamente invariante con respecto a la función f si cumple que $a \in U$ si y solo si $f(a) \in U$. En [19] A. Eremenko y M. Y. Lyubich establecieron el siguiente resultado.

Teorema 3.10. [19]. Si $f \in \mathcal{E} \cap S$ tiene una componente completamente invariante D en el conjunto $\mathfrak{J}(f)$, entonces $D = \mathfrak{J}(f)$.

Ejemplo 3.1. R. Devaney y M. Krych en [14], estudiaron que la función λe^z tiene una componente completamente invariante si $0 < \lambda < \frac{1}{e}$.

3.6. Movimiento holomorfo

La noción de movimiento holomorfo explica de una manera llamativa las conexiones que las aplicaciones casi-conformes tienen con la dinámica holomorfa, la teoría de Teichmüller y otras áreas. En esta tesis no incluimos la teoría de aplicaciones casi-conformes pero enunciamos lo siguiente que posteriormente usaremos en el estudio de este trabajo.

Los siguientes resultados fueron investigados en [29] y [32] para funciones racionales, pero se aplica a funciones trascendentes enteras.

Definición 3.6. Sea X una variedad compleja. Una familia de funciones racionales $\chi = \{f_\lambda(z)\}$ es una *familia holomorfa* sobre X si el mapeo

$$(\lambda, z) \mapsto f_\lambda(z)$$

es un mapeo holomorfo de $X \times \mathbb{C}_\infty$ a $\mathbb{C}_\infty$.

Definición 3.7. Un *movimiento holomorfo* de un conjunto E en U con centro α es una familia de inyecciones

$$\phi_\lambda : E \longrightarrow \mathbb{C}_\infty,$$

para cada $\lambda \in U$, tal que $\phi_\alpha = \text{id}$ y $\phi_\lambda(z)$ es holomorfa en U para cada fijo $z \in E$.

Teorema 3.11 ([32] λ -Lema). Un movimiento holomorfo de E en U tiene una única extensión a un movimiento holomorfo de $\overline{E}$ en U , el cual da un mapeo continuo $\phi : U \times \overline{E} \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$.

Definición 3.8. Dada una familia holomorfa $\chi = \{f_\lambda(z)\}$ sobre X y $\alpha \in X$. Se dice que el correspondiente conjunto de Julia $\mathfrak{J}(f_\alpha) \subseteq \mathbb{C}_\infty$ se *mueve holomórficamente* si existe un movimiento holomorfo

$$\phi_\alpha : \mathfrak{J}(f_x) \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$$

tal que $\phi_\alpha(\mathfrak{J}(f_x)) = \mathfrak{J}(f_\alpha)$ y

$$\phi_\alpha \circ f_x(z) = f_\alpha \circ \phi_\alpha(z)$$

para toda $z \in \mathfrak{J}(f_x)$. Así, ϕ_α da una conjugación entre f_x y f_α en sus respectivos conjuntos de Julia.

Dicotomía en la dinámica de funciones trascendentes enteras

3.7 Plano de parámetros y plano dinámico de una familia de funciones

El conjunto de Julia se mueve holomórficamente en x si se mueve holomórficamente en alguna vecindad U de $x \in X$.

Definición 3.9. Un punto periódico z de f_α de período p es *persistente indiferente* si existe un mapeo holomorfo $w : V \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ tal que

$$f_\alpha^p(w(\lambda)) = w(\lambda), \quad \|(f_\alpha^p)' w(\lambda)\| = 1,$$

para alguna vecindad V de α . Se denota por $X^\mathfrak{J}$ el conjunto de todos los puntos $\mathfrak{J}$ –estables en X .

Definición 3.10. Sea X una variedad compleja y una familia holomorfa $\chi = \{f_\lambda(z)\}$ sobre X . f_λ es $\mathfrak{J}$ –estable si existe una vecindad U de λ en X tal que para cada $\alpha \in U$, cada punto periódico de f_α es atractor, repulsor o persistente indiferente.

Proposición 3.3 ([32] Caracterización de estabilidad). *Sean $\chi = \{f_\lambda(z)\}$ una familia holomorfa sobre X y $\alpha \in X$. Entonces f_α es $\mathfrak{J}$ –estable si y solo si alguna de las siguientes condiciones se satisface:*

- (i) *El conjunto de Julia se mueve holomórficamente en x .*
- (ii) *El número de ciclos atractores y súper atractores de f_λ es constante en una vecindad de α .*
- (iii) *El período máximo de cualquier ciclo (súper) atractor es localmente acotado cerca de α .*

3.7. Plano de parámetros y plano dinámico de una familia de funciones

En esta sección definimos el plano de parámetros y el plano dinámico para una familia de funciones trascendentes enteras.

El *plano de parámetros* de una familia $f_\lambda \in \mathcal{E}$ se define como:

$$\mathcal{P}_{f_\lambda} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \{f_\lambda^n(c)\} \text{ es acotada}\},$$

donde c es un valor crítico de f_λ .

El *plano dinámico* de $f_\lambda \in \mathcal{E}$ para un parámetro fijo $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, se define como:

$$\mathcal{D}_{f_{\lambda_0}} = \{z \in \mathbb{C} : \{f_{\lambda_0}^n(z)\} \text{ es acotada}\}.$$

El plano de parámetros brinda información sobre la localización de los parámetros que están acotados de una familia de funciones. El plano dinámico, para un parámetro fijo $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, da información de los conjuntos de Fatou y Julia.

A continuación, se ilustran algunos ejemplos de planos de parámetros y planos dinámicos para algunas familias de funciones trascendentes enteras.

Dicotomía en la dinámica de funciones trascendentes enteras

3.7 Plano de parámetros y plano dinámico de una familia de funciones

Ejemplo 3.2. P. Domínguez y G. Sienra en [16], investigaron la dinámica de la familia de funciones trascendentes enteras de tipo finito $f_\lambda(z) = \lambda \sin z$, con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. El plano de parámetros se muestra en la Figura 3.7.

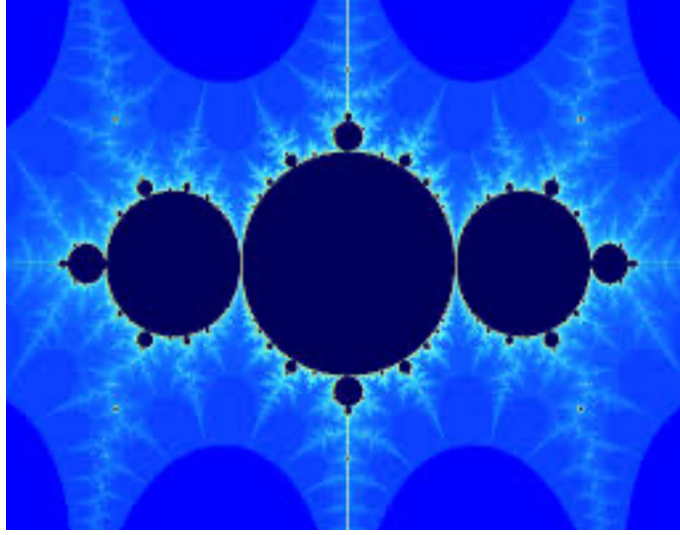


Figura 3.7: Plano de parámetros de $f_\lambda(z) = \lambda \sin z$.

Para algunos parámetros de la Figura 3.7 podemos encontrar componentes atractora y parabólica. A continuación, se muestran algunos de estas componentes.

- **Componente atractora:** En [16] se demuestra que para la familia $f_\lambda = \lambda \sin z$, con $0 < |\lambda| < 1$, el conjunto de Fatou consiste de una componente atractora simplemente conexa y completamente invariante. La Figura 3.8 muestra el plano dinámico para $\lambda = \frac{1}{2}$.

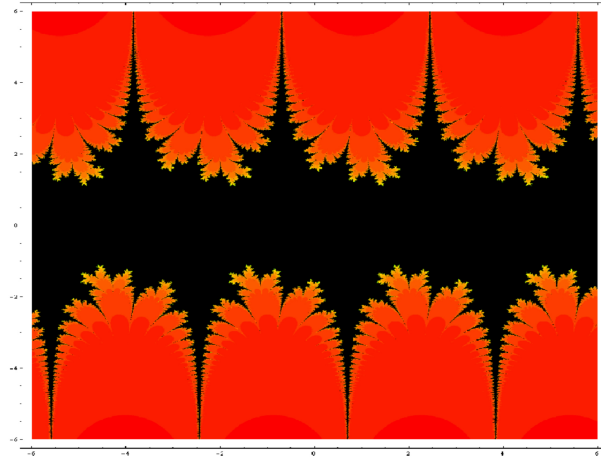


Figura 3.8: Componente atractora con $\lambda = \frac{1}{2}$.

- **Componente parabólica:** Bhattacharyya en [11] estudió el comportamiento dinámico de la función $f(z) = \sin z$, encontrando que el cero es un punto fijo parabólico. El conjunto de Fatou $\mathfrak{F}(f)$ tiene dos hojas, las cuales son invariantes acotadas y donde $f^n \rightarrow 0$. Además, estas hojas contienen los únicos dos valores críticos 1 y -1 . Véase Figura 3.9

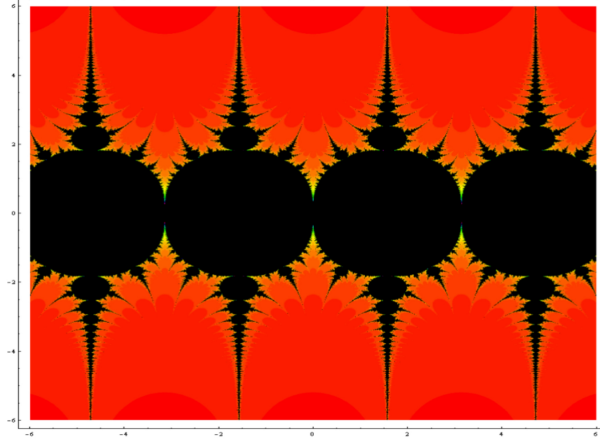


Figura 3.9: Componente parabólica con $\lambda = 1$.

Ejemplo 3.3. R. Devaney y M. Krych en [14] estudiaron el comportamiento dinámico de la función trascendente entera e^z . Considerando los puntos fijos y la iteración de λe^x con $x \in \mathbb{R}$, véase Figura 3.10. Observemos que cuando $\lambda = \frac{1}{e}$, existe un único punto fijo para la función λe^x en $x = 1$.

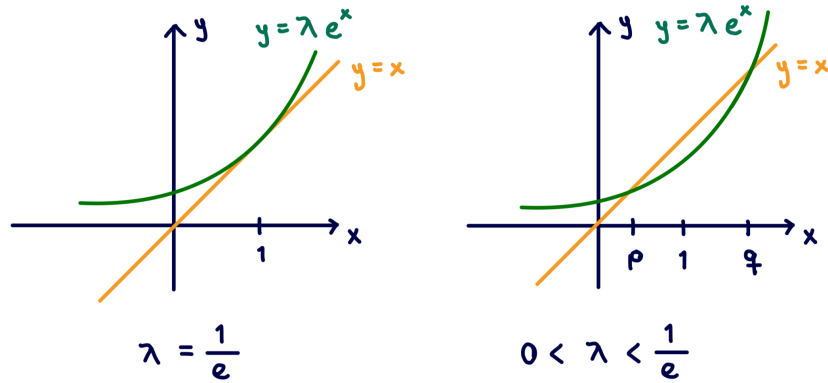


Figura 3.10: Puntos fijos e iteración de la función λe^x , $x \in \mathbb{R}$.

La familia λe^z tiene las siguientes componentes:

- **Componente atractora:** Para $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ se tienen dos puntos fijos: un atractor p y un repulsor q . El plano dinámico se puede observar en la Figura 3.11.

Dicotomía en la dinámica de funciones trascendentes enteras

3.7 Plano de parámetros y plano dinámico de una familia de funciones

- **Componente parabólica:** Para $\lambda = \frac{1}{e}$, el plano dinámico es similar a la Figura 3.11, solo que hay un punto fijo parabólico en el conjunto de Julia.

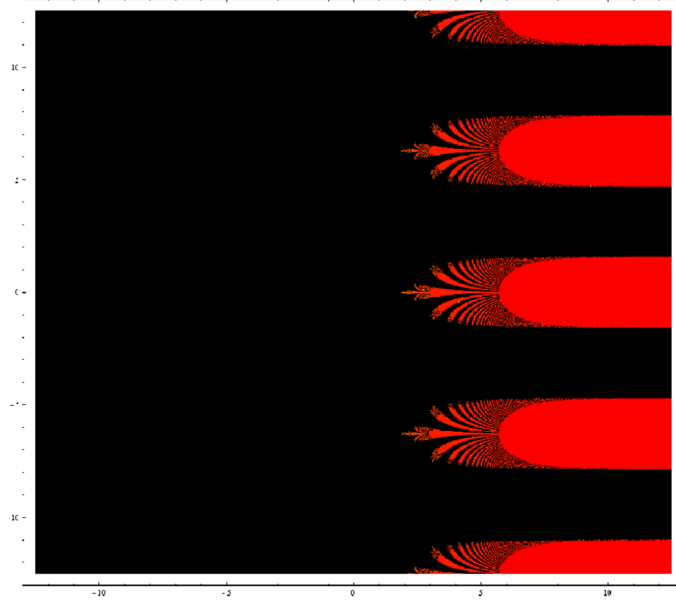


Figura 3.11: Componente atractora con $0 < \lambda < \frac{1}{e}$.

Capítulo 4

Función senoidal elevada al cuadrado

En este capítulo estudiaremos primero la función real $\sin^2 x$ y algunas de sus propiedades. Posteriormente, estudiaremos la función compleja $\sin^2 z$ con algunas de sus propiedades que nos serán de utilidad en los siguientes capítulos.

4.1. Función $\sin^2 x$ y algunas propiedades

Observemos que dadas las funciones reales $g(x) = \sin x$ y $h(x) = x^2$, la composición es:

$$f(x) = (h \circ g)(x) = \sin^2 x.$$

La función $f(x) = \sin^2 x$, con $x \in \mathbb{R}$ es una función positiva y su gráfica puede apreciarse en la Figura 4.1.

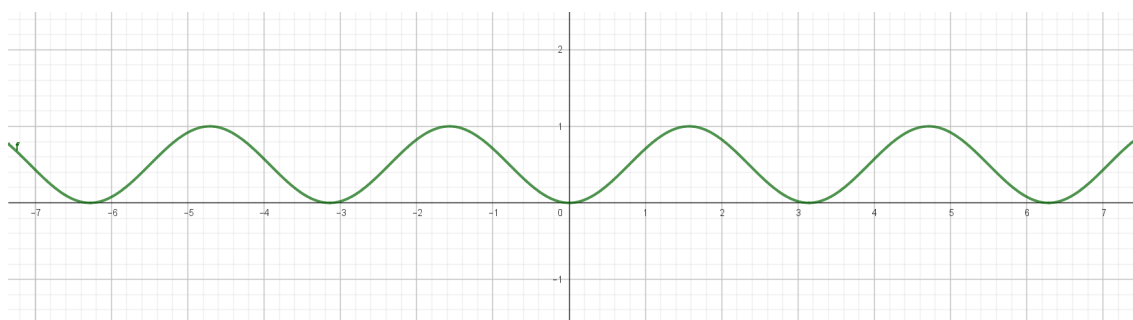


Figura 4.1: Gráfica de la función $f(x) = \sin^2 x$, con $x \in \mathbb{R}$.

A continuación, se enuncian algunas propiedades de la función $\sin^2 x$, con $x \in \mathbb{R}$.

Proposición 4.1. *La función $\sin^2 x$, con $x \in \mathbb{R}$ es simétrica, es decir, $\sin^2(-x) = \sin^2 x$.*

Demostración. Si $x \in \mathbb{R}$, se tiene que: $\sin^2(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$. $\square$

Función senoidal elevada al cuadrado

4.1 Función $\sin^2 x$ y algunas propiedades

Proposición 4.2. *La función $\sin^2 x$, con $x \in \mathbb{R}$ es periódica con período π , esto es, $\sin^2(x + \alpha) = \sin^2 x$, donde $\alpha = k\pi$ y $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\sin^2(x + \alpha) &= \sin(x + \alpha) \cdot \sin(x + \alpha) \\ &= \sin(x + k\pi) \cdot \sin(x + k\pi) \\ &= (\sin x \cdot \cos k\pi + \cos x \cdot \sin k\pi) \cdot (\sin x \cdot \cos k\pi + \cos x \cdot \sin k\pi) \\ &= \sin x \cdot \sin x \\ &= \sin^2 x.\end{aligned}$$

Observemos que $\cos k\pi$ puede tomar el valor de 1 y -1 , dependiendo si k es par o impar, respectivamente, pero se sigue cumpliendo el argumento anterior. $\square$

Recordemos el siguiente teorema para funciones reales sobre la propiedad del punto fijo.

Teorema 4.1 ([28]. Teorema del punto fijo para funciones reales derivables). *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) que cumple las siguientes condiciones:*

1. *Existe un número $C \in [0, 1)$ tal que para cualquier $x \in (a, b)$ se cumple la desigualdad $|g'(x)| \leq C$.*
2. *Para cualquier punto $x \in [a, b]$, se tiene que $g(x) \in [a, b]$.*

Entonces existe un único punto $p \in (a, b)$ tal que $g(p) = p$.

Utilizaremos el Teorema 4.1 para probar el siguiente resultado.

Proposición 4.3. *La función $f(x) = \sin^2 x$ tiene un punto fijo en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.*

Demostración. Consideremos a la función $f(x) = \sin^2 x$ restringida al intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, al ser composición de funciones continuas y derivables, se sigue que $f(x)$ es también continua y derivable en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, respectivamente, así podemos aplicar el Teorema 4.1. La derivada de la función f es

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

Observemos que f' cumple que $|f'(x)| \leq 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$, véase Figura 4.2. Así, como f' en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ alcanza sus valores máximo y mínimo en $\pm\frac{1}{2}$, podemos calcular el máximo de su valor absoluto:

$$C = \max_{x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} |f'(x)| \leq \left| f' \left(\pm \frac{1}{2} \right) \right| \approx 0.8414 < 1.$$

Función senoidal elevada al cuadrado

4.1 Función $\sin^2 x$ y algunas propiedades

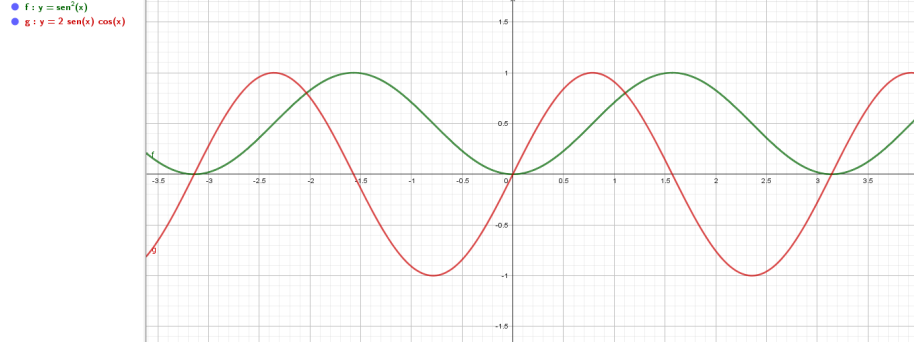


Figura 4.2: Gráficas de las funciones reales f y f' .

Luego, hay que demostrar que $f\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Calculando los valores mínimo y máximo de f en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$\min_{x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]} f(x) = f(0) = 0 \quad \text{y} \quad \max_{x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]} f(x) = f\left(\pm \frac{1}{2}\right) \approx 0.2298.$$

Así,

$$f\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = [0, 0.2298] \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Por lo tanto, f cumple las condiciones del Teorema 4.1 y así, tiene un único punto fijo en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, siendo el punto fijo $x_0 = 0$. $\square$

Analizando la sucesión de iteradas de la función $f(x) = \sin^2 x$, se tiene que $f^n(x) \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión se aproxima a la recta $y = 0$, cuando $n \rightarrow \infty$. Además, el módulo del multiplicador del punto fijo $x_0 = 0$ es:

$$\lambda = |f'(0)| = |2 \cdot \sin 0 \cdot \cos 0| = 0,$$

por tanto, cero es un punto fijo súper atractor; véase Figura 4.3.

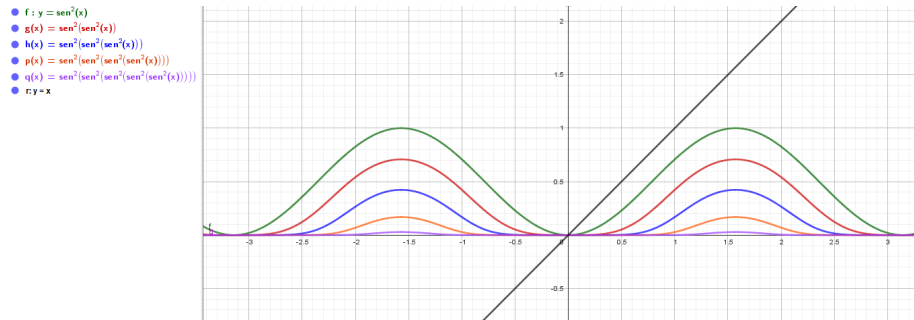


Figura 4.3: Gráfica de iteradas de la función $f(x) = \sin^2 x$, con $x \in \mathbb{R}$ y la recta identidad.

Función senoidal elevada al cuadrado

4.1 Función $\sin^2 x$ y algunas propiedades

Proposición 4.4. *La función $\sin^2 x$ tiene un desarrollo en serie de potencias.*

Demostración. Dada la función $f(x) = \sin^2 x$, vamos aproximar la expresión para la n -ésima derivada de la función:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x \\ f^{(1)}(x) &= 2 (\sin x \cos x) \\ f^{(2)}(x) &= 2 (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ f^{(3)}(x) &= -2^3 (\sin x \cos x) \\ f^{(4)}(x) &= -2^3 (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ f^{(5)}(x) &= 2^5 (\sin x \cos x) \\ f^{(6)}(x) &= 2^5 (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ f^{(7)}(x) &= -2^6 (\sin x \cos x) \\ f^{(8)}(x) &= -2^6 (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Obtenemos que la expresión de la n -ésima derivada de f está dada por:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k (2^{2k+1}) (\sin x \cos x), & \text{si } n = 2k + 1 \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots \\ (-1)^k (2^{2k+1}) (\cos^2 x - \sin^2 x), & \text{si } n = 2k + 2 \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Por lo anterior, la función $f(x) = \sin^2 x$, tomando $N = 1$ y $M = 2$, cumple lo siguiente:

$$|f^{(n)}(x)| \leq NM^2 = 2^n,$$

para cada $n \geq 0$ y toda $x \in \mathbb{R}$. Así, tomando $x_0 = 0$ en la Proposición 1.4, se deduce que

$$f(x) = \sin^2 x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Obteniendo que:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k + 1 \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots \\ (-1)^k (2^{2k+1}), & \text{si } n = 2k + 2 \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) = \sin^2 x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2^{2k+1})}{(2k+2)!} x^{2k+2} \\ &= \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 - \frac{2^7}{8!} x^8 + \dots \end{aligned}$$

□

4.2. Función $\sin^2 z$ y algunas propiedades

En esta sección estudiaremos propiedades importantes de la función de variable compleja seno elevada al cuadrado.

La función $f(z) = \sin^2 z$, tiene parte real y parte imaginaria para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con $x, y \in \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned} \sin^2 z &= \sin^2(x + iy) \\ &= (\sin x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \sinh y)^2 \\ &= \sin^2 x \cdot \cosh^2 y - \cos^2 x \cdot \sinh^2 y + i 2 \sin x \cdot \cosh y \cdot \cos x \cdot \sinh y \\ &= (1 - \cos^2 x) \cosh^2 y - \cos^2 x \cdot \sinh^2 y + i \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \sinh 2y \\ &= \cosh^2 y - \cos^2 x \cdot \cosh^2 y - \cos^2 x \cdot \sinh^2 y + i \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \sinh 2y \\ &= \cosh^2 y - \cos^2 x (\cosh^2 y + \sinh^2 y) + i \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \sinh 2y \\ &= (\cosh^2 y - \cos^2 x \cdot \cosh 2y) + i \left(\frac{1}{2} \sin 2x \cdot \sinh 2y \right) \\ &= u(x, y) + i v(x, y). \end{aligned}$$

Observemos que por la representación de las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico con la función exponencial, la parte real e imaginaria de la función $\sin^2 z$ se pueden representar de la siguiente forma:

$$\sin^2 z = \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)^2 - \cos^2 x \left(\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} \right) + i \sin 2x \left(\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2} \right). \quad (4.3)$$

De lo anterior, los ejes real e imaginario son enviados bajo la función $\sin^2 z$ al semi-eje real positivo y negativo, respectivamente, véase Figura 4.4.

Función senoidal elevada al cuadrado

4.2 Función $\sin^2 z$ y algunas propiedades

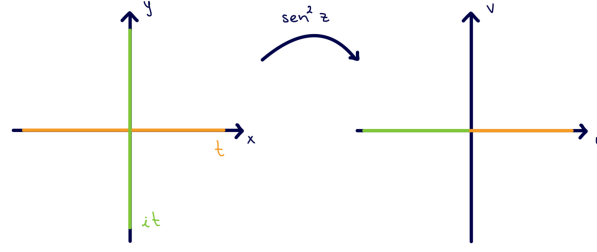


Figura 4.4: Imagen del eje real e imaginario, con $t \in \mathbb{R}$, bajo la función $\sin^2 z$.

Proposición 4.5. *La función $f(z) = \sin^2 z$ no tiene un valor finito asintótico.*

Demostración. Procederemos por contradicción, supongamos que ω es un valor asintótico de $\sin^2 z$. Así, por la Definición 1.16 existe una curva $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ y $\sin^2(\gamma(t)) \rightarrow \omega$ cuando $t \rightarrow \infty$. Sea $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Debido a que $|\sin^2 z| \rightarrow \infty$ cuando $|Im z| \rightarrow \infty$ se sigue que $|y(t)| \leq M$ para alguna constante $M > 0$, lo que implica que $x(t) \rightarrow \infty$. Observemos que por la Ecuación 4.3

$$\begin{aligned} \sin^2(\gamma(t)) &= \left(\frac{e^{y(t)} + e^{-y(t)}}{2} \right)^2 - \cos^2 x(t) \left(\frac{e^{2y(t)} + e^{-2y(t)}}{2} \right) \\ &\quad + \frac{i}{2} \sin 2x(t) \left(\frac{e^{2y(t)} - e^{-2y(t)}}{2} \right). \end{aligned}$$

Como $x(t) \rightarrow \infty$, existe una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $x(t_k) = k\pi$. Realizando cálculos y simplificaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \sin^2(\gamma(t_k)) &= \left(\frac{e^{y(t_k)} + e^{-y(t_k)}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^{2y(t_k)} + e^{-2y(t_k)}}{2} \right) \\ &= - \left(\frac{e^{y(t_k)} - e^{-y(t_k)}}{2} \right)^2 \\ &= -\sinh^2 y(t_k), \end{aligned}$$

así $Re \omega = Re \lim_{t_k \rightarrow \infty} \sin^2(\gamma(t_k)) \leq 0$. Por otro lado, existe una sucesión $t_{k'} \rightarrow \infty$ tal que $x(t_{k'}) = \frac{(2k'-1)\pi}{2}$, realizando cálculos se obtiene:

$$\sin^2(\gamma(t_{k'})) = \left(\frac{e^{y(t_{k'})} + e^{-y(t_{k'})}}{2} \right)^2 = \cosh^2 y(t_{k'}),$$

así $Re \omega = Re \lim_{t_{k'} \rightarrow \infty} \sin^2(\gamma(t_{k'})) \geq 1$. Lo cual es una contradicción, por tanto la función $f(z) = \sin^2 z$ no tiene un valor finito asintótico. $\square$

Como consecuencia de la Proposición 4.5, restará comprobar que las familias de funciones, $F_\lambda(z)$ y $G_\lambda(z)$, tienen una cantidad finita de valores críticos,

para que así, pertenezcan a la clase de funciones trascendentes enteras de tipo finito.

A continuación, enunciaremos algunas propiedades para la función $\sin z$ y $\cos z$.

Proposición 4.6. *Para toda $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple que*

$$|\sinh y| \leq |\sin z|, |\cos z| \leq |\cosh y|.$$

Demostración. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Primero, para la función $\sin z$.

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= |\sin(x + iy)|^2 = |\sin x \cdot \cos(iy) + \cos x \cdot \sin(iy)|^2 \\ &= \sin^2 x \cdot \cosh^2 y + \cos^2 x \cdot \sinh^2 y \\ &= \sin^2 x (1 + \sinh^2 y) + \cos^2 x \cdot \sinh^2 y \\ &= \sin^2 x + \sin^2 x \cdot \sinh^2 y + \cos^2 x \cdot \sinh^2 y \\ &= \sin^2 x + \sinh^2 y (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= \sin^2 x + \sinh^2 y. \end{aligned}$$

De aquí, obtenemos que $\sinh^2 y \leq \sin^2 x + \sinh^2 y = |\sin z|^2$, por lo que se sigue la primera desigualdad:

$$|\sinh y| \leq |\sin z|.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \sin^2 x + \sinh^2 y \\ &= \sin^2 x + \cosh^2 y - 1 \\ &= \cosh^2 y - (1 - \sin^2 x) \\ &= \cosh^2 y - \cos^2 x. \end{aligned}$$

Así, $|\sin z|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x \leq \cosh^2 y$, por lo que se obtiene la otra desigualdad:

$$|\sin z| \leq |\cosh y|.$$

De manera análoga se realiza el argumento para probar las desigualdades de la función $\cos z$. $\square$

Proposición 4.7. *Para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple que:*

$$2 \sin z \cdot \cos z = \sin 2z.$$

Demostración. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Primero, desarrollando la expresión $2 \sin z \cdot \cos z$, obtenemos:

$$\begin{aligned} 2 \sin z \cdot \cos z &= 2 \sin(x + iy) \cdot \cos(x + iy) \\ &= 2 (\sin x \cdot \cos(iy) + \cos x \cdot \sin(iy)) (\cos x \cdot \cos(iy) - \sin x \cdot \sin(iy)) \\ &= 2 (\sin x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \sinh y) (\cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y) \\ &= 2 (\sin x \cdot \cos x (\cosh^2 y + \sinh^2 y) + i \sinh y \cdot \cosh y (\cos^2 x - \sin^2 x)). \end{aligned}$$

Función senoidal elevada al cuadrado

4.2 Función $\sin^2 z$ y algunas propiedades

Por otro lado, desarrollando la expresión $\sin 2z$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\sin 2z &= \sin(z + z) \\ &= \sin(2x + i 2y) \\ &= \sin 2x \cdot \cos(i 2y) + \cos 2x \cdot \sin(i 2y) \\ &= \sin 2x \cdot \cosh 2y + i \cos 2x \cdot \sinh 2y \\ &= 2 \left(\sin x \cdot \cos x (\cosh^2 y + \sinh^2 y) + i \sinh y \cdot \cosh y (\cos^2 x - \sin^2 x) \right).\end{aligned}$$

Así, ambas expresiones tienen el mismo desarrollo, por lo tanto se sigue la igualdad.

□

Capítulo 5

La familia $F_\lambda(z) = \lambda \sin^2 z$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

En este capítulo se estudia la dinámica de la familia de funciones trascendentes enteras de tipo finito $F_\lambda(z) = \lambda \sin^2 z$. Investigaremos y analizaremos el plano de parámetros y algunos planos dinámicos (conjuntos de Fatou y Julia) y también enunciaremos algunas conjeturas. Los planos de parámetros y planos dinámicos fueron realizados con apoyo de Renato Leriche de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Tomemos las siguientes funciones:

$$f(z) = \sin z \quad \text{y} \quad g_\lambda(z) = \lambda z^2,$$

con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la composición de f y g_λ es la siguiente familia de funciones:

$$F_\lambda(z) = \lambda \sin^2 z = (g_\lambda \circ f)(z).$$

A continuación, encontraremos los puntos fijos, los puntos críticos y los valores críticos de la familia F_λ .

A. Puntos fijos

De acuerdo a la Definición 3.2, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, un punto fijo para F_λ es $z_0 \in \mathbb{C}$ si y solo si

$$\begin{aligned} F_\lambda(z_0) = z_0 &\iff \lambda \sin^2 z_0 = z_0 \\ &\iff z_0 = 0. \end{aligned}$$

Así, un punto fijo de F_λ es $z_0 = 0$.

Graficando algunas funciones de variable real para diferentes valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, véase las Figuras 5.1 y 5.2, se tiene lo siguiente.

Proposición 5.1. *Sea $F_\lambda(z)$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, si $0 < |\lambda| < 1.38$, la función tiene a cero como único punto fijo real, véase Figura 5.1.*

Antes de realizar la demostración de la Proposición, recordemos lo siguiente.

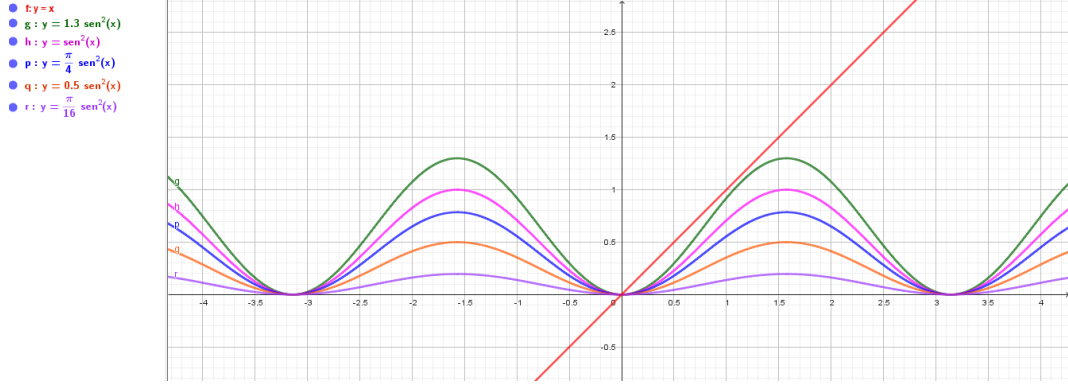


Figura 5.1: Puntos fijos reales para distintos $\lambda \in \mathbb{R}$, con $0 < |\lambda| < 1.38$.

Definición 5.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : D \rightarrow D$ continuamente diferenciable en un subconjunto cerrado $D \subseteq X$ es *contractiva* en D si existe una constante positiva $K < 1$ tal que

$$d(f'(x), f'(y)) \leq K,$$

para cada $x, y \in D$.

Teorema 5.1 (Punto fijo de Banach). *Si (X, d) es un espacio métrico completo y $f : X \rightarrow X$ es una función contractiva en X , entonces f tiene un único punto fijo $x \in X$.*

Demostración. (Proposición 5.1) Sea U_0 una vecindad pequeña alrededor del cero, la derivada de la función F_λ es

$$F'_\lambda(z) = \lambda \sin z \cdot \cos z = \lambda \sin 2z.$$

Para valores de z cercanos a cero, se tiene que $\sin 2z \approx 2z$, esto por su desarrollo en serie de potencias. Por tanto, en U_0 se sigue que $|F'_\lambda(z)| \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow 0$. Así, F_λ actúa como una contracción en U_0 , y por el Teorema 5.1, $z = 0$ es el único punto fijo en U_0 . $\square$

Conjetura 2. Sea $F_\lambda(z)$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, si $|\lambda| \geq 1.38$, la función aumenta sus puntos fijos reales, véase Figura 5.2.

Con la teoría de aproximación se puede analizar la Conjetura 2 para puntos fijos distintos de cero.

B. Puntos críticos

De acuerdo a la Definición 1.15, un punto crítico para F_λ es un cero de la derivada de la función, así tenemos:

$$(F_\lambda)'(z) = 2\lambda \sin z \cdot \cos z = 0.$$

Obtenemos dos tipos de puntos críticos:

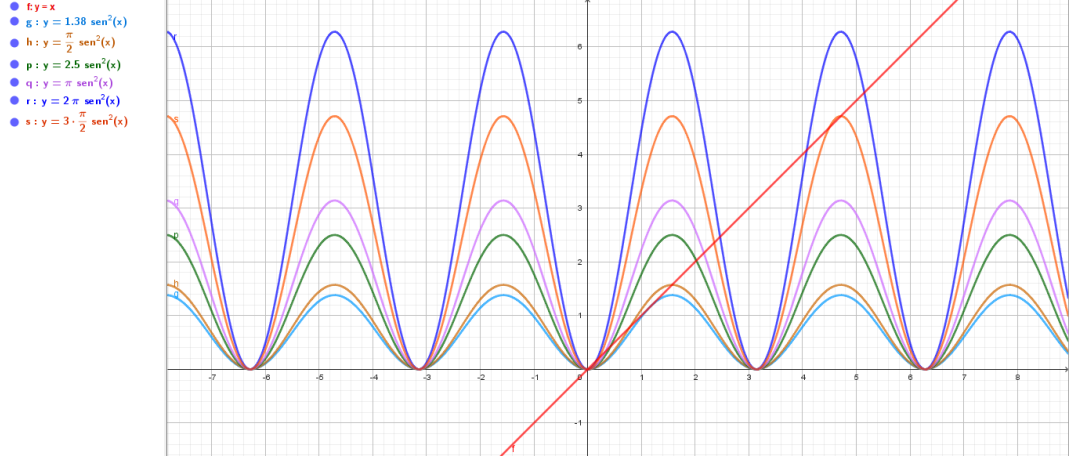


Figura 5.2: Puntos fijos reales para distintos $\lambda \in \mathbb{R}$, con $|\lambda| \geq 1.38$.

(a) $z = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

(a) $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

C. Valores críticos

Los valores críticos para la función F_λ son los puntos críticos, dados por (a) y (b) de **B**, valuados en $F_\lambda(z)$. Así, tenemos dos casos:

(i) Si $z = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} F_\lambda \left(\frac{(2k-1)\pi}{2} \right) &= \lambda \sin^2 \left(\frac{(2k-1)\pi}{2} \right) \\ &= \lambda (\pm 1)^2 \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

(ii) Si $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces

$$F_\lambda(k\pi) = \lambda \sin^2(k\pi) = 0.$$

Para cualquiera de los dos casos, (i) y (ii), y como $\sin^2 z$ no tiene valores asíntóticos, se tiene que la familia F_λ tiene una cantidad finita de valores críticos, además F_λ es trascendente entera, por tanto $F_\lambda \in \mathcal{E} \cap S$.

5.1. Dinámica de la familia F_λ

El plano de parámetros para la familia F_λ tomando el punto crítico $\frac{\pi}{2}$, véase Figura 5.3, es el siguiente:

$$\mathcal{P}_{F_\lambda} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left\{ F_\lambda^n \left(\frac{\pi}{2} \right) \right\} \text{ es acotada} \right\}.$$

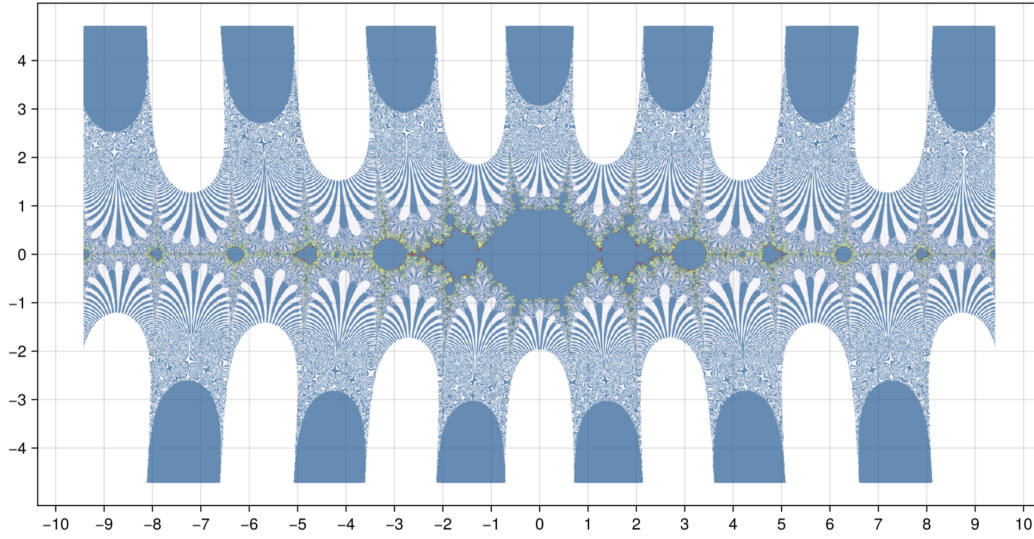


Figura 5.3: Plano de parámetros de F_λ .

Un acercamiento a la región central del plano de parámetros $\mathcal{P}_{F_\lambda}$, es la Figura 5.4.

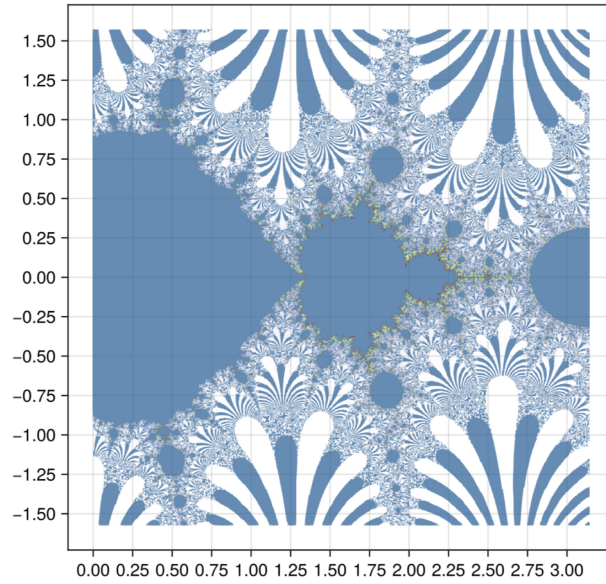


Figura 5.4: Región central del plano de parámetros de F_λ .

Teorema 5.2. *Si λ cumple una de las siguientes condiciones:*

- (i) $\lambda \in \mathbb{R}$ con $0 < |\lambda| < 1.3$.
- (ii) $\lambda \in \mathbb{C}$ con $0 < |\lambda| \leq 0.75$.

Entonces el conjunto de Fatou $\mathfrak{F}(F_\lambda)$ tiene una componente atractora simplemente conexa y completamente invariante.

Demostración. Observe que para λ en cualquiera de los casos (i) y (ii), el cero es un punto fijo súper atractor, porque

$$|F'_\lambda(0)| = |2\lambda \sin 0 \cdot \cos 0| = 0.$$

Entonces existe U cuenca de atracción de $\mathfrak{F}(F_\lambda)$ que contiene a $z_0 = 0$ punto fijo súper atractor. Primero, probaremos que U es simplemente conexa, dividiéndolo en los casos (i) y (ii).

(i) Para $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |\lambda| < 1.3$, la cuenca de atracción U que contiene a cero debe contener el valor crítico λ que bajo iteración debe converger a cero. Vamos a probar que $F_\lambda^n(\lambda) \rightarrow 0$ para $0 < |\lambda| < 1.3$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |\lambda| < 1.3$ y denotemos $a_n = F_\lambda^n(\lambda)$. Sea $I_1 = [0, \lambda] = [x_1, x'_1]$ y tomemos $a_1 \in I_1$, así tenemos que:

$$a_2 = \lambda \sin^2 a_1.$$

Debido a que $\lambda \sin^2 x|_{I_1=[0,\lambda]}$ es una función creciente y se tiene que

$$a_2 \in [F_\lambda(0), F_\lambda(\lambda)] = [F_\lambda(x_1), F_\lambda(x'_1)] = [\lambda \sin^2 x_1, \lambda \sin^2 x'_1] = [x_2, x'_2] = I_2.$$

Repitiendo este procedimiento para $a_3, a_4, \dots$, obtenemos que

$$a_n \in I_n = [x_n, x'_n]$$

donde

$$x_n = \lambda \sin^2 x_{n-1} \quad \text{y} \quad x'_n = \lambda \sin^2 x'_{n-1}.$$

Observe que $\lambda \sin^2 x < x$ para $x \in (0, 1.3)$, véase Figura 5.5.

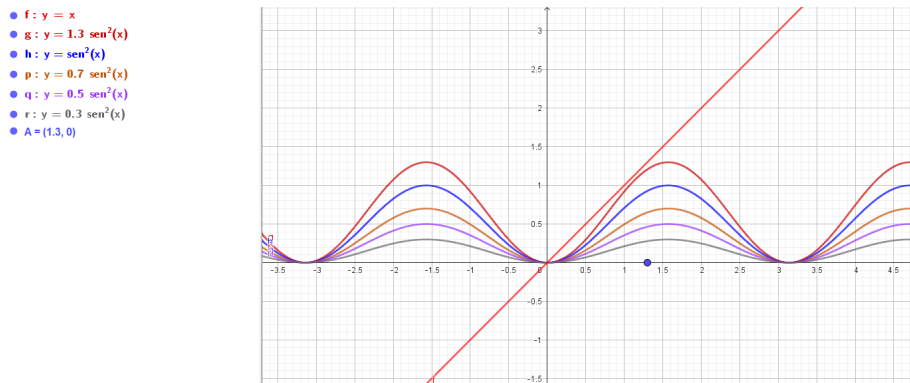


Figura 5.5: $\lambda \sin^2 x < x$ para $x \in (0, 1.3)$.

Observe que $x_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, la sucesión de x'_n es decreciente y tiene una cota inferior, así que x'_n converge a un límite, digamos L , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = L.$$

Más aún, $\lambda \sin^2 x$ es una función continua en $(0, 1.3)$, así se tiene que $\lambda \sin^2 L = L$, lo que significa que L es un punto fijo de F_λ , pero cero es el único punto fijo para $0 < |\lambda| < 1.3$, por tanto $L = 0$. El argumento anterior prueba que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Así, el valor crítico λ está en la cuenca de atracción U para $\lambda \in (0, 1.3)$, por lo que no hay otro ciclo atractor y U es una componente simplemente conexa.

Ahora, tomando la rama $F_\lambda^{-1}(0) = 0$ y continuando analíticamente dentro de U para llegar a la rama de $F_\lambda^{-1}(z)$ para cualquier z en U . Como $\mathfrak{F}(F_\lambda)$ es completamente invariante, se sigue que cada $F_\lambda^{-1}(z) \in U$, es decir, U es completamente invariante y, por el Teorema 3.10 tenemos que $U = \mathfrak{F}(F_\lambda)$.

- (ii) Para el caso complejo, observemos que por el punto anterior el número de ciclos atractores de F_λ es uno y por la Proposición 3.3 el conjunto de Julia se mueve holomórficamente para $\lambda \in \mathbb{R}$ con $0 < |\lambda| < 0.75$, en particular podemos tomar $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, por la Proposición 3.3 existe un mapeo casi-conforme $\phi_\lambda : \mathfrak{J}_{\lambda_0} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\phi(\mathfrak{J}_{\lambda_0}) = \mathfrak{J}_\lambda \quad \text{y} \quad \phi_\lambda \circ F_{\lambda_0}(z) = F_\lambda \circ \phi_\lambda(z)$$

para cada $z \in \mathfrak{J}_{\lambda_0}$. Así, ϕ_{λ_0} da una conjugación entre F_{λ_0} y F_λ en sus respectivos conjuntos de Julia. El movimiento holomorfo ϕ_λ es único, si existe, por la densidad de ciclos periódicos en $\mathfrak{J}_{\lambda_0}$. Por el Teorema 3.11, ϕ_λ se extiende a una vecindad de λ_0 . Así, para $\lambda \in \mathbb{C}$ con $0 < |\lambda_0| < 0.75$, el conjunto de Fatou $\mathfrak{F}(F_\lambda)$ contiene una componente simplemente conexa y completamente invariante.

Así, la componente simplemente conexa y completamente invariante existe y es única, tanto para λ real como compleja con las condiciones (i) y (ii), ya que tomando $U_1 \subseteq U$ y por la invarianza de $\mathfrak{F}$, se tiene que $U_1 \subseteq F_\lambda^{-1}(U_1)$. $\square$

Se presentan los siguientes ejemplos del Teorema 5.2.

Ejemplo 5.1. Para $\lambda = 0.75i$, por el Teorema 5.2 se tiene que F_λ tiene una componente atractora simplemente conexa y completamente invariante, véase Figura 5.6.

Ejemplo 5.2. Para $\lambda = 1$, por el Teorema 5.2 tenemos que F_λ tiene una componente atractora simplemente conexa y completamente invariante, véase Figura 5.7.

A continuación, se enuncian algunas conjeturas relacionadas con la familia $F_\lambda(z)$.

Conjetura 3. Existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que en el conjunto de Fatou $\mathfrak{F}(F_\lambda)$ coexisten dos componentes periódicas acotadas.

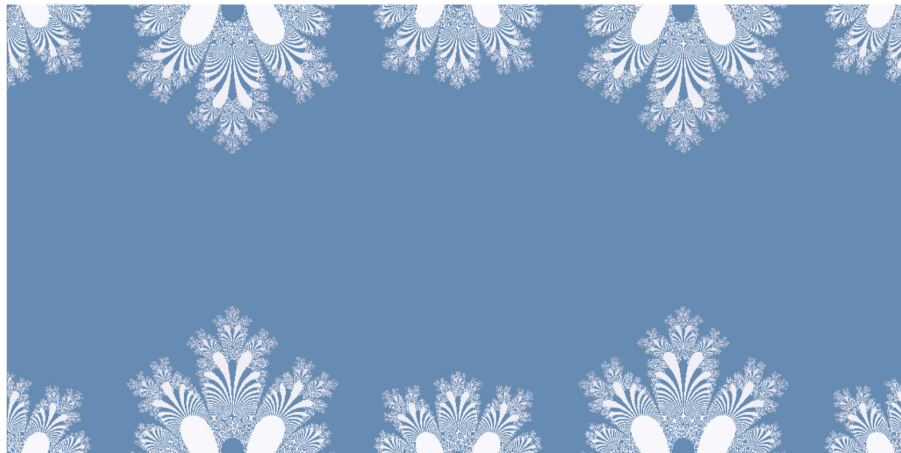


Figura 5.6: Plano dinámico de F_λ con $\lambda = 0.75i$.

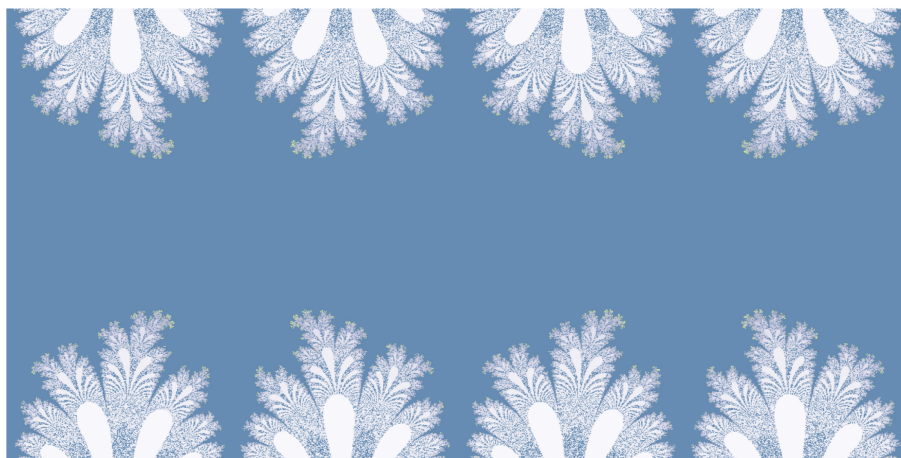


Figura 5.7: Plano dinámico de F_λ con $\lambda = 1$.

Un ejemplo de la Conjetura 3 sería el siguiente.

Ejemplo 5.3. Si $\lambda = 1.280051$, entonces 1.16 es punto parabólico y cero es punto atractor de F_λ . Así, el conjunto de Fatou $\mathfrak{F}(F_\lambda)$ tiene una componente parabólica y una componente atractora acotadas, véase Figura 5.8.

En el plano dinámico de F_λ con $\lambda = 1.280051$, la Figura 5.9 muestra las órbitas para los puntos $z_1 = 0.9$ (verde), $z_2 = \frac{\pi}{2} + 0.5i$ (rojo), $z_3 = -1.75 - 0.5i$ (naranja) y $z_4 = -3 + 0.5i$ (cian). Donde z_1 y z_3 convergen al atractor cero y, z_2 y z_4 convergen al parabólico, el cual es muy cercano a 1.16.

Conjetura 4. Las familias de funciones $f_\lambda(z) = \lambda \sin z$ y $F_\lambda(z) = \lambda \sin^2 z$ son casi-conformes conjugadas para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, donde $0 < |\lambda| < 0.75$.

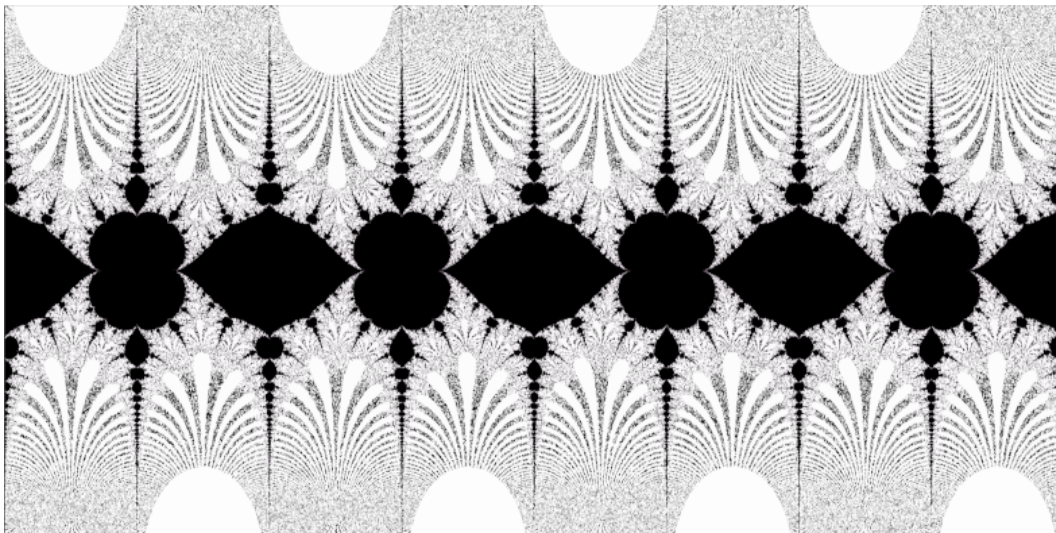


Figura 5.8: Plano dinámico de F_λ con $\lambda = 1.280051$.

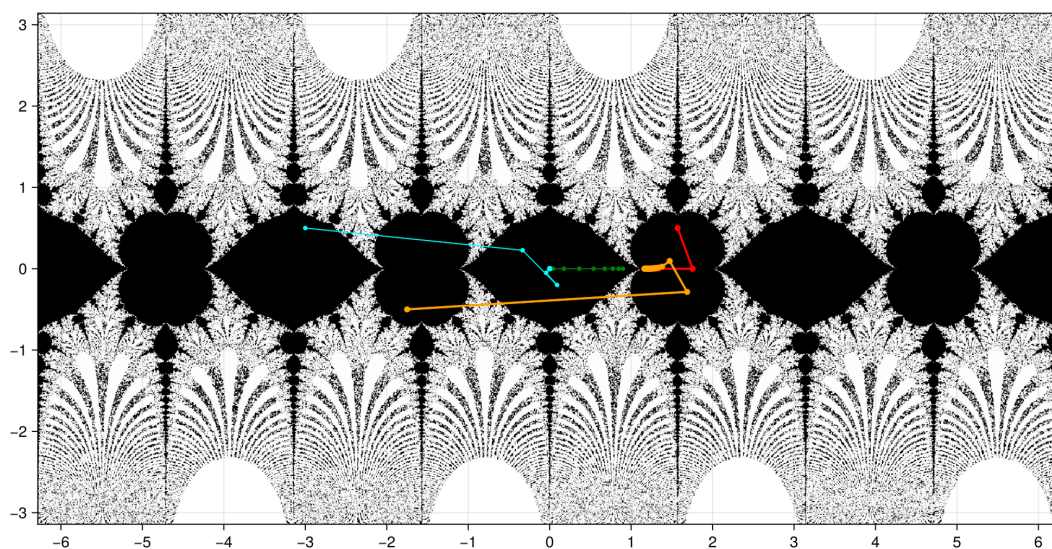


Figura 5.9: Plano dinámico de F_λ con $\lambda = 1.280051$ con las órbitas de z_1 , z_2 , z_3 y z_4 .

Capítulo 6

La familia $G_\lambda(z) = \sin^2 z + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$

En este capítulo se estudia la dinámica de la familia de funciones trascendentes enteras de tipo finito $G_\lambda(z) = \sin^2 z + \lambda$. Investigaremos y analizaremos el plano de parámetros y algunos planos dinámicos (conjuntos de Fatou y Julia) y también enunciaremos algunas conjeturas. Los planos de parámetros y planos dinámicos fueron realizados con apoyo de Renato Leriche de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Tomemos las siguientes funciones:

$$f(z) = \sin z \quad \text{y} \quad g_\lambda(z) = z^2 + \lambda,$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces podemos hacer la composición de f y g_λ para obtener la familia

$$G_\lambda(z) = \sin^2 z + \lambda = (g_\lambda \circ f)(z).$$

A continuación, encontraremos puntos fijos, puntos críticos y valores críticos para la familia G_λ .

A. Puntos fijos

De acuerdo a la Definición 3.2, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, un punto fijo para G_λ es $z_0 \in \mathbb{C}$ si y solo si

$$G_\lambda(z_0) = z_0 \iff \sin^2 z_0 + \lambda = z_0.$$

Graficando algunas funciones de variable real para diferentes valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ la familia tiene un solo punto fijo real, véase Figura 6.1.

Observación 6.1. Para toda $\lambda \in \mathbb{C}$, los puntos fijos, digamos p , de la familia G_λ cumplen:

$$\lambda = p - \sin^2 p. \tag{6.1}$$

Tomando el multiplicador de G_λ en el punto fijo p , se tiene:

$$|G'_\lambda(p)| = |2 \sin p \cdot \cos p| = |\sin 2p|,$$

La familia $G_\lambda(z) = \sin^2 z + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$

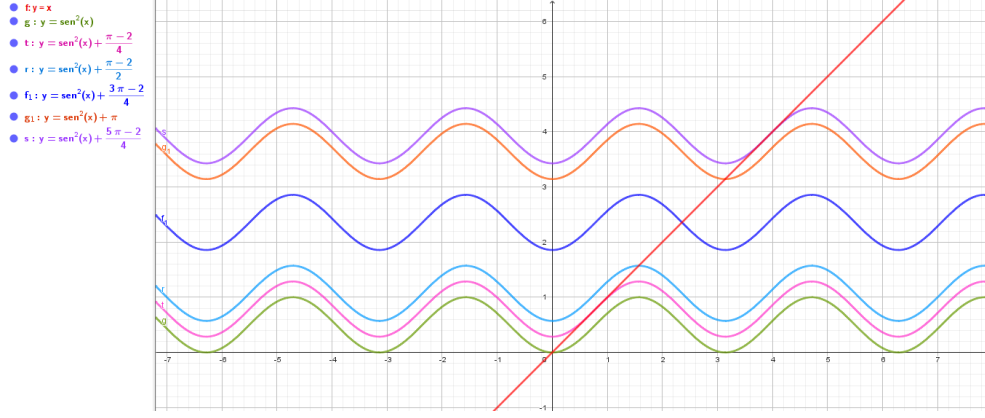


Figura 6.1: Puntos fijos reales de G_λ , con distintos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$.

y por la Proposición 4.6, si $p = x_p + i y_p$, con $x_p, y_p \in \mathbb{R}$, entonces

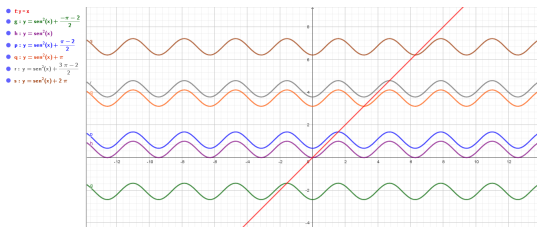
$$|\sinh 2y_p| \leq |\sin 2p| \leq |\cosh 2y_p|.$$

Así, para $p \in \mathbb{R}$, se tiene que $0 \leq |G'_\lambda(p)| \leq 1$, esto es, p puede ser un punto fijo súper atractor, atractor o indiferente.

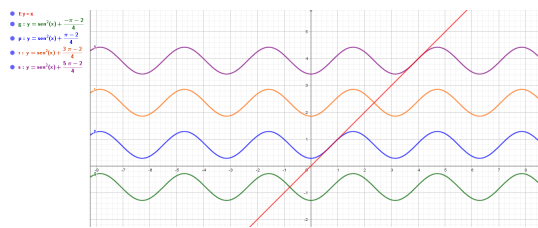
Por la Observación 6.1 se deduce el siguiente resultado.

Proposición 6.1. *Si $p \in \mathbb{R}$ es punto fijo de G_λ , entonces se cumple solo una de las siguientes condiciones:*

1. $p = \frac{(2k-1)\pi}{2}$ o $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, es punto fijo súper atractor, véase Figura 6.2(a).
2. $p = \frac{(2k-1)\pi}{4}$, con $k \in \mathbb{Z}$, es punto fijo indiferente, véase Figura 6.2(b).
3. En cualquier otro caso, p es punto fijo atractor.



(a) Puntos fijos súper atractores.



(b) Puntos fijos indiferentes.

Figura 6.2: Puntos fijos para distintos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$.

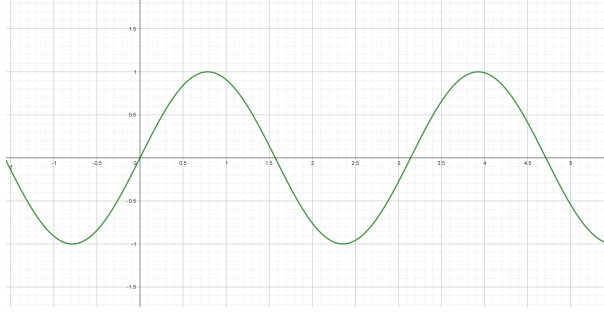


Figura 6.3: Gráfica de la función real $\sin 2x$.

Demostración. Sea $p \in \mathbb{R}$ punto fijo de G_λ . Notemos que $G'_\lambda(x) = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$, por la Proposición 4.7, donde se cumple que

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1,$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, véase Figura 6.3.

Así, tenemos lo siguiente:

1. La función tiene sus raíces en $x = k\pi, \frac{(2k-1)\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$, es decir,

$$|G'_\lambda(k\pi)| = \left| G'_\lambda\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) \right| = 0,$$

por lo que $x = k\pi, \frac{(2k-1)\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$, son puntos fijos súper atractores.

2. La función alcanza sus valores máximos y mínimos en $x = \frac{(2k-1)\pi}{4}$, con $k \in \mathbb{Z}$, es decir,

$$\left| G'_\lambda\left(\frac{(2k-1)\pi}{4}\right) \right| = 1,$$

por lo que $x = \frac{(2k-1)\pi}{4}$, con $k \in \mathbb{Z}$, son puntos fijos indiferentes.

3. En cualquier otro punto distinto de los anteriores, se tiene que $0 < |G'_\lambda(p)| < 1$, así, p es punto fijo atractor.

□

Observación 6.2. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, por la Proposición 6.1 y la Ecuación 6.1 se sigue que:

1. Si $\lambda = \frac{(2k-1)\pi-2}{2}$ o $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $p = \frac{(2k-1)\pi}{2}$ o $k\pi$, respectivamente, es punto fijo súper atractor.
2. Si $\lambda = \frac{(2k-1)\pi-2}{4}$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $p = \frac{(2k-1)\pi}{4}$ es punto fijo indiferente.

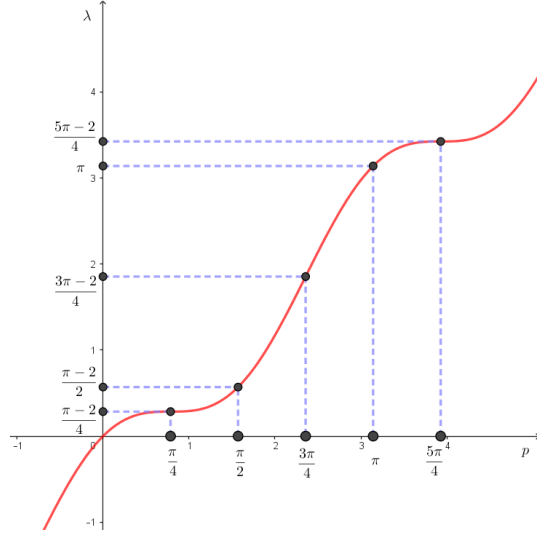


Figura 6.4: Gráfica de $\lambda = p - \sin^2 p$, para $p \in \mathbb{R}$.

3. En cualquier otro caso para λ , el punto fijo está en el caso 3 de la Proposición 6.1. Véase Figura 6.4.

B. Puntos críticos

De acuerdo a la Definición 1.15, los puntos críticos de G_λ son los ceros de la derivada de $G_\lambda(z)$, esto es,

$$(G_\lambda)'(z) = 2 \sin z \cdot \cos z = 0,$$

Así, obtenemos dos tipos de puntos críticos:

- (a) $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- (b) $z = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

C. Valores críticos

Los valores críticos para la familia son los puntos críticos, dados por (a) y (b) de **B**, valuados en $G_\lambda(z)$. Así, tenemos dos casos:

- (i) Si $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces

$$G_\lambda(k\pi) = \sin^2(k\pi) + \lambda = \lambda.$$

- (ii) Si $z = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} G_\lambda\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) &= \sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) + \lambda \\ &= (\pm 1)^2 + \lambda \\ &= 1 + \lambda. \end{aligned}$$

En cualquiera de los casos, (i) y (ii), y como $\sin^2 z$ no tiene valores asintóticos, se tiene que la familia G_λ tiene una cantidad finita de valores críticos, además G_λ es trascendente entera, por tanto $G_\lambda \in \mathcal{E} \cap S$.

6.1. Dinámica de la familia G_λ

Para el estudio de la dinámica de la familia de funciones G_λ , se grafica el plano de parámetros para el punto crítico cero, es el siguiente:

$$\mathcal{P}_{G_\lambda} = \{\lambda : \{G_\lambda^n(0)\} \text{ es acotada}\}$$

La Figura 6.5 muestra el plano de parámetros $\mathcal{P}_{G_\lambda}$.

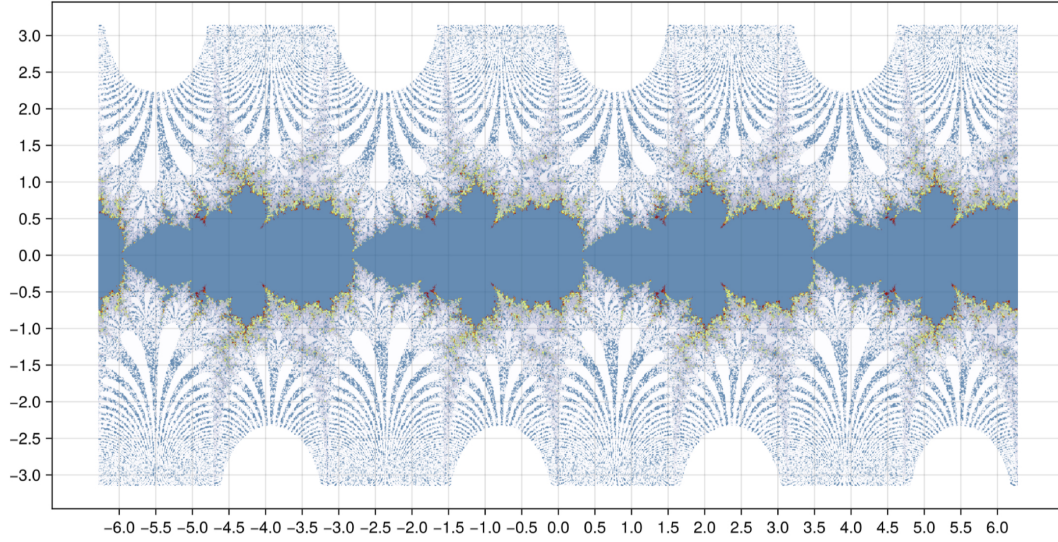


Figura 6.5: Plano de parámetros de G_λ .

Un acercamiento a la región central del plano de parámetros de G_λ se muestra en la Figura 6.6.

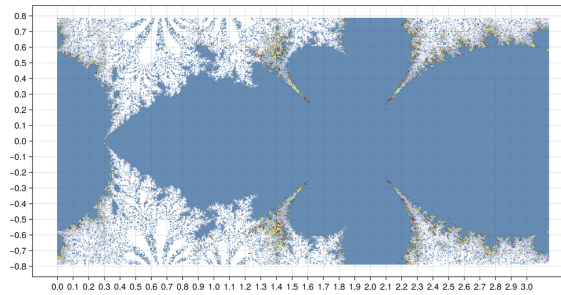


Figura 6.6: Región central del plano de parámetros de G_λ .

Observación 6.3. Cuando $\lambda = 0$, notemos que $G_0(z) = \sin^2 z$ coincide con $F_1(z) = \sin^2 z$. Así, del Teorema 5.2 se sigue que para $\lambda = 0$, G_λ tiene una componente atractora simplemente conexa y completamente invariante, véase Figura 6.7.

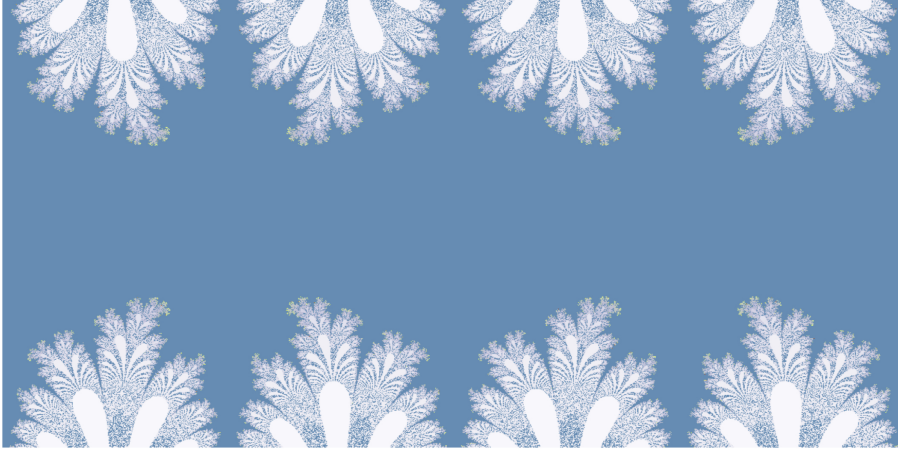


Figura 6.7: Plano dinámico de G_λ con $\lambda = 0$.

Notemos que el plano de parámetros de G_λ sugiere un comportamiento periódico para el valor de los parámetros. De la Observación 6.2 se deduce que los parámetros reales de G_λ tienen período π y los intervalos son de la forma:

$$\left[\frac{(2k-1)\pi-2}{4}, \frac{(2k+3)\pi-2}{4} \right), \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde los extremos del intervalo corresponden con valores de λ que tienen asociados puntos fijos indiferentes.

Tomando la región del plano de parámetros delimitada por los puntos extremos $A = \left(\frac{-3\pi-2}{4}, 0 \right)$ y $B = \left(\frac{\pi-2}{4}, 0 \right)$, véase Figura 6.8. De la Observación 6.2, los valores reales de λ y sus puntos fijos asociados se distribuyen de izquierda a derecha de la siguiente forma:

- $\lambda = \frac{-3\pi-2}{4}$, con punto fijo indiferente $-\frac{3\pi}{2}$.
- $\lambda \in \left(\frac{-3\pi-2}{4}, \frac{-\pi-2}{2} \right)$, con sus respectivos puntos fijos atractores.
- $\lambda = \frac{-\pi-2}{2}$, con punto fijo súper atractor $-\frac{\pi}{2}$.
- $\lambda \in \left(\frac{-\pi-2}{2}, \frac{-\pi-2}{4} \right)$, con sus respectivos puntos fijos atractores.
- $\lambda = \frac{-\pi-2}{4}$, con punto fijo indiferente $-\frac{\pi}{4}$.
- $\lambda \in \left(\frac{-\pi-2}{4}, 0 \right)$, con sus respectivos puntos fijos atractores.

- $\lambda = 0$, con punto fijo súper atractor cero.
- $\lambda \in (0, \frac{\pi-2}{4})$, con sus respectivos puntos fijos atractores.

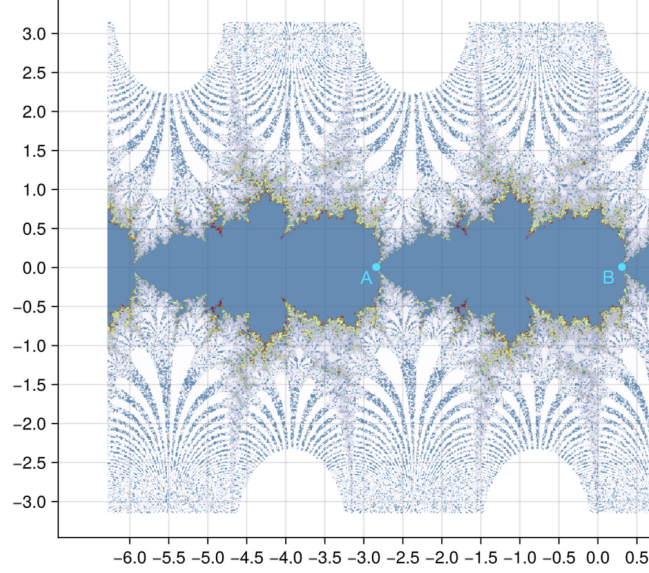


Figura 6.8: Extremos de una región del plano de parámetros de G_λ .

Así, delimitando una región del plano de parámetros en donde los valores reales de λ tienen puntos fijos (súper) atractores asociados, surge la siguiente conjetura.

Conjetura 5. Si $\lambda \in \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : \frac{(x + \frac{1}{2})^2}{(\frac{\pi}{4})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{4})^2} < 1 \right\}$, entonces el conjunto de Fatou $\mathfrak{F}(G_\lambda)$ tiene una componente atractora simplemente conexa y completamente invariante.

El conjunto

$$A = \left\{ x + iy : \frac{(x + \frac{1}{2})^2}{(\frac{\pi}{4})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{4})^2} < 1 \right\},$$

corresponde al interior de la elipse con centro $-\frac{1}{2}$ y con semieje mayor $\frac{\pi}{4}$ y semieje menor $\frac{1}{4}$, que se encuentra inmersa en una de las regiones del plano de parámetros de G_λ , véase Figura 6.9.

Un ejemplo de la Conjetura 5, es el siguiente.

Ejemplo 6.1. Para $\lambda = 0.1$, de la Conjetura 5 se tendría que G_λ tiene una componente atractora simplemente conexa y completamente invariante, véase Figura 6.10.

Conjetura 6. Si $\lambda = \frac{\pi-2}{4} \approx 0.285$, entonces $p = \frac{\pi}{4}$ es punto fijo parabólico de G_λ y el conjunto de Fatou $\mathfrak{F}(G_\lambda)$ tiene una componente parabólica, véase Figura 6.11.

La familia $G_\lambda(z) = \sin^2 z + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$
6.1 Dinámica de la familia G_λ

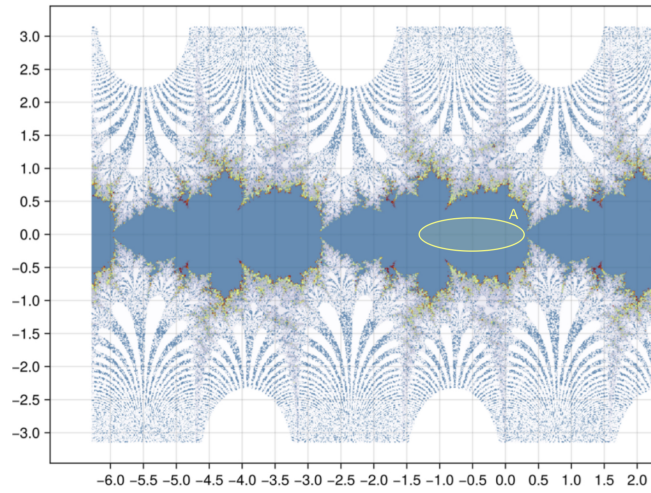


Figura 6.9: Elipse inmersa en el plano de parámetros de G_λ .

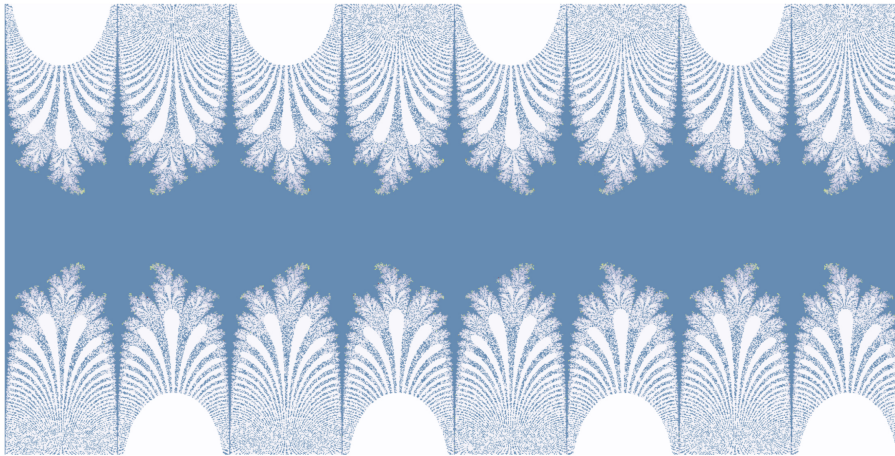


Figura 6.10: Plano dinámico de G_λ con $\lambda = 0.1$.

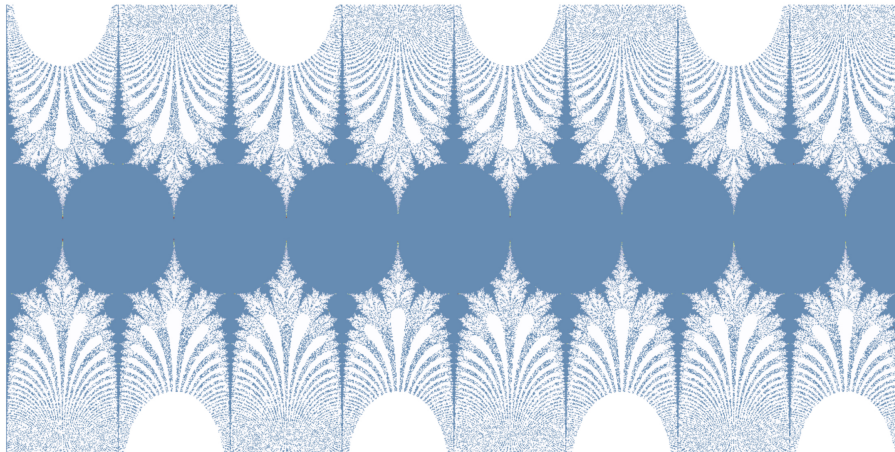


Figura 6.11: Plano dinámico de G_λ con $\lambda = 0.285$.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo a futuro

En este capítulo se enuncian las conclusiones de la tesis y el trabajo a futuro a realizar.

A. Conclusiones

A lo largo del presente trabajo se revisaron y estudiaron las principales definiciones y resultados dentro de la clase de funciones trascendentes enteras de tipo finito. Se investigó la dinámica de dos familias de funciones correspondientes a una homotecia y una traslación compleja de la función $\sin^2 z$, esto es:

$$F_\lambda(z) = \lambda \sin^2 z, \text{ con } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{y} \quad G_\lambda(z) = \sin^2 z + \lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Por los Teoremas 3.5, 3.7 y 3.9, las funciones trascendentes enteras de tipo finito tienen componentes de Fatou, que solamente pueden ser: atractoras, parabólicas y discos de Siegel.

En el estudio de este trabajo nos enfocamos en obtener las condiciones sobre el parámetro λ para obtener componentes atractoras del conjunto de Fatou de las familias de funciones antes mencionadas.

Un resultado importante fue la Proposición 4.5, la cual nos asegura que la función $\sin^2 z$ no tiene valores finitos asintóticos, en consecuencia, las familias de funciones F_λ y G_λ también satisfacen ese resultado. En los Capítulos 5 y 6 se comprobó que las familias de funciones F_λ y G_λ tienen una cantidad finita de valores críticos, por lo que pertenecen a la clase de funciones trascendentes enteras de tipo finito.

Familia $F_\lambda(z) = \lambda \sin^2 z, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Se demostró la Proposición 5.1, que enuncia: para $\lambda \in \mathbb{R}$ con $0 < |\lambda| < 1.38$, la familia tiene a cero como único punto fijo real. Eso dio pie para demostrar el

Teorema 5.2 como principal resultado del Capítulo 5, el cual muestra la condición sobre el parámetro λ para la existencia de la componente atractora del conjunto de Fatou $\mathfrak{F}(F_\lambda)$ que resulta ser simplemente conexa y completamente invariante.

Familia $G_\lambda(z) = \sin^2 z + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Se demostró la Proposición 6.1 que muestra que la familia de funciones G_λ tiene una cantidad infinita de puntos fijos reales, obteniendo la forma de estos puntos y su clasificación en súper atractores, atractores e indiferentes. Además, al relacionar la forma de los puntos fijos con la Ecuación 6.1, se dedujo la condición sobre el parámetro λ para las posibles componentes atractora y parabólica. De igual forma se destacó que $G_0(z)$ y $F_1(z)$ coinciden, por lo que para $\lambda = 0$ se tiene una componente atractora simplemente conexa y completamente invariante, como consecuencia del Teorema 5.2.

B. Trabajo a futuro

En la investigación surgieron conjeturas sobre cada una de las familias, F_λ y G_λ , estudiadas. Para la familia F_λ la Conjetura 4 enuncia la posible existencia de una aplicación conforme ϕ tal que

$$(\phi \circ F_\lambda) = (f_\lambda \circ \phi)(z),$$

donde $f_\lambda(z) = \lambda \sin z$.

Para la componente atractora de la familia G_λ se enuncia la Conjetura 5, que delimita el interior de una elipse inmersa en una región del plano de parámetros. Debemos encontrar condiciones sobre el parámetro λ para la existencia de dicha componente. Observe que los planos dinámicos muestran ese comportamiento, véase Figura 6.10.

Para la componente parabólica, se enuncian las Conjeturas 3 y 6, para cada una de las familias de funciones F_λ y G_λ , respectivamente. Los planos dinámicos muestran los comportamientos enunciados en las conjeturas, véase Figuras 5.8 y 6.11.

Las condiciones sobre el parámetro para obtener discos de Siegel en cada una de las familias de funciones, F_λ y G_λ , es un problema que no se estudió en la tesis.

Por otro lado, S. Morosawa en [31], investigó la cirugía casi-conforme que es una aplicación en la dinámica holomorfa. En un trabajo a futuro se estudiará la técnica de la cirugía casi-conforme para aplicarlo a la dinámica de diferentes clases de funciones.

Finalmente, el *conjunto residual del conjunto de Julia* es un subconjunto del conjunto de Julia cuyos puntos no se intersectan en la frontera de ninguna componente del conjunto de Fatou. Basándonos en el artículo [31], en el trabajo a futuro, esperamos encontrar las condiciones sobre el parámetro λ y la curva que se encuentre contenida en el conjunto residual del conjunto de Julia para alguna de las familias de funciones F_λ o G_λ las cuales son trascendentes enteras de tipo finito.

Bibliografía

- [1] Lars Valerian Ahlfors. *Complex analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, New York [u.a.], 3. ed. edition, 2007.
- [2] Daniel S. Alexander. *A History of Complex Dynamics*. Springer eBook Collection. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1994.
- [3] Michèle Audin. *Fatou, Julia, Montel*. Number 2014 in Lecture notes in mathematics. Springer, Berlin, 2011.
- [4] Irvine Noel Baker. Fixpoints and iterates of entire functions. *Math. Z.*, 71(1):146–153, December 1959.
- [5] Irvine Noel Baker. Completely invariant domains of entire functions. *Mathematical Essays Dedicated to A. J. Macintyre*, 56(396):33–35, May 1970.
- [6] Irvine Noel Baker. The domains of normality of an entire function. *Annales Fennici Mathematici*, 1(2):277–283, 1975.
- [7] Irvine Noel Baker. An entire function which has wandering domains. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 22(2):173–176, September 1976.
- [8] Alan F. Beardon. *Iteration of rational functions*. Number 132 in Graduate texts in mathematics. Springer, New York, 1. softcover printing edition, 2000. Literaturverz. S. [273] - 277.
- [9] Walter Bergweiler. Periodic points of entire functions: proof of a conjecture of baker. *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*, 17(1–2):57–72, August 1991.
- [10] Walter Bergweiler. Iteration of meromorphic functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 29(2), October 1993.
- [11] Prodipeswar Bhattacharyya. *Iteration of analytic functions*. PhD thesis, University of London, 1969.
- [12] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable*. Springer US, 1973.

- [13] Robert L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. CRC Press, Boca Raton, second edition edition, 2018.
- [14] Robert L. Devaney and Michal Krych. Dynamics of $\exp(z)$. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 4(1):35–52, March 1984.
- [15] Patricia Domínguez and J.E. Valente Contreras. *Monografía Dinámica Holomorfa Los conjuntos de Fatou y Julia y algunas de sus propiedades de tres clases de funciones meromorfas*. Dirección de Fomento Editorial, 2014.
- [16] Patricia Domínguez and Guillermo Sienra. A study of the dynamics of $\lambda \sin z$. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(12):2869–2883, 2002.
- [17] Simon K. Donaldson, editor. *Riemann surfaces*. Number 22 in Oxford graduate texts in mathematics. Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [18] Alexandre Eremenko and M. Yu Lyubich. Iterates of entire functions. *Soviet Mathematics Doklady*, 30(3):592–594, 1984.
- [19] Alexandre Eremenko and M. Yu Lyubich. Dynamical properties of some classes of entire functions. *Annales de l'institut Fourier*, 42(4):989–1020, 1992.
- [20] Hershel M. Farkas and Irwin Kra. *Riemann surfaces*. Number 71 in Graduate texts in mathematics. Springer, New York, 2. ed. edition, 1992. Literaturverz. S. 356 - 358.
- [21] Pierre Fatou. Sur les équations fonctionnelles premier mémoire. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 47,48:161–271, 33–94,208–314, 1919, 1920.
- [22] Pierre Fatou. Sur l'itération des fonctions transcendentes entières. *Acta Math.*, 47:337–370, 1926.
- [23] Otto Forster. *Lectures on Riemann surfaces*. Number 81 in Graduate texts in mathematics. Springer, New York, corr. 4. print. edition, 1999. Literaturverz. S. 243 - 245.
- [24] Benito González. Series de potencias. desarrollos en serie de taylor., 2019.
- [25] Xin-Hou Hua and Chung-Chun Yang. *Dynamics of Transcendental Functions*. Routledge, Boca Raton, 2018.
- [26] Gaston Julia. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1:47–245, 1918.
- [27] Jerrold E. Marsden and Michael J. Hoffman. *Basic Complex Analysis*. Freeman & Company, W. H., 1998.

- [28] Egor Maximenko. Ejemplos de aplicación del método del punto fijo (verificación de las condiciones)., 2024.
- [29] Curtis T. McMullen. *Complex Dynamics and Renormalization*. Number 135 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2016.
- [30] Paul Montel. Sur les familles normales de fonctions analytique. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 33:233–302, 1916.
- [31] Shunsuke Morosawa. Local connectedness of julia sets for transcendental entire functions. *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, pages 266–273, 1999.
- [32] Shunsuke Morosawa, Y. Nishimura, and M. Taniguchi. *Holomorphic dynamics*. Number 66 in Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [33] Tristan Needham. *Visual complex analysis*. Clarendon Press, Oxford [u.a.], repr. edition, 2007.
- [34] Junjirō Noguchi. *Introduction to Complex Analysis*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [35] Paul Charles Rosenbloom. The fix-points of entire functions. *Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.]*, 1952(Tome Supplémentaire):186–192, 1952.
- [36] Dierk Schleicher. *Holomorphic dynamical systems*. Number 1998 in Lecture notes in mathematics. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, 2010.
- [37] Dennis Sullivan. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics i. solution of the fatou-julia problem on wandering domains. *The Annals of Mathematics*, 122(2):401, September 1985.
- [38] Alonso Takahashi. ¿qué es una función analítica? *Boletín de Matemáticas*, 6(3):1–65, 1972.
- [39] Jian Hua Zheng and Chung-Chun Yang. Further results on fixpoints and zeros of entire functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 347(1):37–50, 1995.