



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio comparativo de algunas soluciones de la ecuación
paraxial de Helmholtz

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

por

Yolanda Arrieta Aguirre

Asesorada por

Dra. Emma V. García Ramírez

Puebla Pue.
18 de abril de 2024



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio comparativo de algunas soluciones de la ecuación
paraxial de Helmholtz

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

por

Yolanda Arrieta Aguirre

Asesorada por

Dra. Emma V. García Ramírez

Puebla Pue.
18 de abril de 2024

Título: Estudio comparativo de algunas soluciones de la ecuación paraxial de Helmholtz

Estudiante: YOLANDA ARRIETA AGUIRRE

COMITÉ

Dra. Maribel Méndez Otero
Presidente

Dra. Rosario Pastrana Sánchez
Secretario

Dra. Beatriz Martínez Irvias
Vocal

Dr. Julio Abraham Mendoza Fierro
Vocal

Dra. Emma V. García Ramírez
Asesor

Índice general

1. Marco Teórico	11
1.1. Ecuación de onda	11
1.2. Ecuación de Helmholtz	12
1.3. Ecuación paraxial de Helmholtz	12
1.4. Difracción	13
1.5. Óptica no lineal	15
1.6. Propagación en medios no lineales	18
2. Métodos numéricos	21
2.1. Método de Split-Step	21
2.2. Algoritmo	23
3. Haces Gaussianos	27
3.1. Función de onda Gaussiana	27
3.1.1. Distribución de Intensidad	28
3.2. Análisis de Resultados	32
4. Haces Bessel	33
4.1. Funciones Bessel	33
4.1.1. Distribución de Intensidad	34
4.2. Análisis de Resultados	38
5. Haces Bessel-Gauss	39
5.0.1. Distribución de Intensidad	39
5.1. Análisis de Resultados	43
6. Haces Laguerre-Gaussiano	45
6.0.1. Distribución de Intensidad	45
6.1. Análisis de Resultados	50
Bibliografía	57

Agradecimientos

A mis papás, Iliana Aguirre y Pablo Arrieta, porque sin ellos no estaría aquí. A mi abuelita Yolanda Gracia Martínez por darme siempre su apoyo incondicional, gracias a mis hermanos, primos y tías por acompañarme en toda mi vida, a mi mejor amiga Paula por recorrer este camino conmigo, a mi asesora por contestar todas mis preguntas y a Iris por estar siempre a mi lado.

Dedicatoria

A mis papás.

Resumen

En este trabajo de tesis se analizaron diferentes soluciones a la ecuación paraxial de Helmholtz, como son los haces Gaussianos, Laguerre-Gauss, Bessel y Bessel-Gauss, usando el método numérico de paso dividido (split-step) se desarrolló un algoritmo en Matlab en el cual se simuló la propagación de estos haces, y así poder hacer un comparativo con los resultados obtenidos. El análisis de la propagación numérica de los haces antes mencionados se realizó por medio del método numérico de paso dividido (split-step) que es utilizado para simular el comportamiento de la propagación de distribuciones de intensidad de un haz óptico en medios lineales y no lineales. Los haces analizados se propagan a una misma longitud de propagación obteniendo comportamientos diferentes.



Objetivos

Objetivo general

Comparar las propiedades de los haces Gaussianos, Bessel, Bessel-Gauss y Laguerre-Gauss al propagarse en el espacio libre realizando un algoritmo en Matlab usando el método numérico de paso dividido.

Objetivos particulares

- Repasar los conceptos fundamentales de las ecuaciones de onda y de Helmholtz.
- Revisar y comprender la ecuación paraxial de Helmholtz.
- Repasar el concepto de difracción de la luz.
- Inspeccionar las diferentes soluciones a la ec. paraxial de Helmholtz.
- Revisar el Método de Fourier de pasos divididos
- Desarrollar un algoritmo en Matlab usando el método numérico de paso dividido (split-step) para simular la propagación de diferentes haces.
- Obtener simulaciones de la propagación de los haces, distribuciones y perfiles de intensidad.
- Realizar un comparativo entre los resultados obtenidos.

Introducción

La óptica es un área de la física que tiene como objeto de estudio a la luz. Los filósofos griegos desarrollaron varias teorías de la naturaleza de la luz: como la propagación rectilínea de la luz o la ley de reflexión enunciada por Euclides (300 A.C.), el fenómeno de difracción analizado por Francesco María Grimaldi (1660), que es la desviación de la propagación rectilínea que ocurre cuando la luz avanza más allá de una obstrucción [1].

La óptica se fue desarrollando hasta llegar a la invención del máser, acrónimo de Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation (amplificación de microondas por emisión estimulada de radiación) en la década de los cincuentas; casi inmediatamente después de su creación, surgieron especulaciones sobre si la misma técnica podría extenderse a la región óptica del espectro. En julio de 1960, Theodore H. Maiman [2] anunció el primer funcionamiento con éxito de un láser (light amplification by stimulated emission of radiation), conformado por un cristal de rubí como medio activo y una cavidad óptica de Fabry-Perot como resonador óptico.

Más tarde comenzaron a surgir los láseres en los que usó como medio activo algún gas, el de helio-neón (He-Ne), por ejemplo. Este avance sugirió nuevas técnicas y experimentos, inclusive el desarrollo de una nueva rama de la óptica, la óptica no lineal, que se encarga de estudiar los fenómenos donde la luz al propagarse en un medio modifica las propiedades ópticas de éste [3], así mismo este avance permitió el desarrollo de nuevos láseres. La distribución transversal de intensidad del haz que sale del láser depende de la cavidad del resonador y la forma de los espejos [4]. Estos patrones de distribución de intensidad son llamados modos TEM. Los láseres más comunes son los de resonadores de espejos esféricos [5] que tienen la característica de emitir haces del modo fundamental (TEM_{00}) o haces Gaussianos. Se ha estudiado la generación de otros tipos de haces conocidos como haces paraxiales, puesto que el ángulo que hace el rayo con respecto al eje de propagación es muy pequeño y son solución a la ecuación paraxial de Helmholtz.

En el estudio de estos haces en el espacio libre la difracción tiene un papel importante lo mismo que su interacción con la materia en la óptica no lineal.

Existen conjuntos de haces paraxiales que son solución a la ecuación paraxial de Helmholtz: los haces Hermite-Gaussianos y Laguerre-Gaussianos surgen del producto de las funciones Hermite con la función Gaussiana en coordenadas cartesianas o del producto de los polinomios asociados de Laguerre con la función Gaussiana en coordenadas cilíndricas [6].

La solución más sencilla a la ecuación paraxial de Helmholtz es el haz Gaussiano sin embargo no es la única, existen otras como los haces adifraccionales, que tienen la propiedad de conservar la misma distribución de intensidad en un plano ortogonal a la dirección de propagación, estos haces pueden entenderse como una superposición de ondas planas cuyos vectores de onda se encuentran sobre un cono alrededor del eje de propagación, donde todas estas ondas planas tienen la misma componente del vector de onda a lo largo del eje de propagación. El haz más sencillo tiene una distribución transversal de la forma de una función Bessel de orden cero $J_0(k_T \rho)$ el cuál tiene

simetría circular, donde ρ representa la distancia radial desde el eje z , y k_T es la componente del vector de onda ortogonal al eje z .

La solución de algunas ecuaciones matemáticas que describen fenómenos ópticos lineales y no lineales suele ser difícil de encontrar analíticamente por lo que se hace uso de métodos numéricos para resolverlas, esto incluye problemas como la propagación de luz en espacio libre o en algún medio óptico.

En este trabajo de tesis se hace la comparación de las propiedades de haces que son solución a la ecuación paraxial de Helmholtz: Gaussianos, Bessel, Bessel-Gauss y Laguerre-Gauss la simulación de la propagación en espacio libre de los haces se realiza mediante el Método de Paso Dividido (Split-Step) usando Matlab.

El trabajo de tesis esta estructurado de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se presenta una revisión de los conceptos necesarios para el entendimiento de la propagación de los haces paraxiales como la difracción.

En el Capítulo 2 se describe el método numérico Split-Step y se presenta el algoritmo realizado en Matlab.

En el Capítulo 3 se presenta la solución más sencilla a la ecuación paraxial de Helmholtz, esto es el haz Gaussiano, se muestran las simulaciones obtenidas para su propagación así como distribuciones de intensidad para diferentes distancias de propagación y un breve análisis de los resultados obtenidos.

En los Capítulos 4, 5 y 6, se presentan otras funciones que satisfacen la ecuación paraxial de Helmholtz: Haces Bessel, Bessel-Gauss y Laguerre-Gaussiano. Se muestran también simulaciones de la propagación de estos haces, distribuciones transversales de intensidad y análisis de resultados.

Capítulo 1

Marco Teórico

1.1. Ecuación de onda

Una onda óptica se describe matemáticamente mediante una función real de posición $r = (x, y, z)$ y tiempo t , denotada $u(r, t)$ y conocida como función de onda. Esta satisface una ecuación diferencial parcial denominada ecuación de onda:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

donde ∇^2 es el operador Laplaciano, que es $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ en coordenadas cartesianas, cualquier función que satisfaga la ecuación de onda representa una posible onda óptica. La ecuación 1.1 se deduce de las ecuaciones de Maxwell.

La ecuación de onda también es aproximadamente aplicable a medios con índices de refracción que dependen de la posición, siempre que la variación sea lenta en distancias del orden de una longitud de onda. Se dice entonces que el medio es localmente homogéneo.

Una solución a la ecuación de onda es una función armónica en el tiempo, dada por

$$u(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \cos[2\pi\nu t + \phi(\vec{r})] \quad (1.2)$$

donde $a(\vec{r})$ es la amplitud, $\phi(\vec{r})$ es la fase, ν es la frecuencia y $w = 2\pi\nu$ es la frecuencia angular. Tanto la amplitud como la fase generalmente dependen de la posición, pero la función de onda es una función armónica del tiempo con frecuencia ν en todas las posiciones.

La intensidad óptica $I(\vec{r}, t)$ se define como la potencia óptica por unidad de área y es proporcional al promedio temporal de la función de onda al cuadrado:

$$I(\vec{r}, t) = 2 \langle u^2(\vec{r}, t) \rangle \quad (1.3)$$

donde el operador $\langle \cdot \rangle$ denota el promedio sobre un intervalo de tiempo que es mucho más grande que el tiempo de un ciclo óptico.

Función de onda compleja

Es conveniente representar la función de onda real $u(\vec{r}, t)$ en (1.2) en términos de una función compleja

$$U(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \exp[i\phi(\vec{r})] \exp(i2\pi\nu t) \quad (1.4)$$

de modo que

$$u(\vec{r}, t) = \text{Re}\{U(\vec{r}, t)\} = \frac{1}{2}[U(\vec{r}, t) + U^*(\vec{r}, t)] \quad (1.5)$$

La función $U(\vec{r}, t)$, conocida como **función de onda compleja**, describe la onda completamente; la función de onda $u(\vec{r}, t)$ es simplemente su parte real. Como la función de onda $u(\vec{r}, t)$, la función de onda compleja $U(\vec{r}, t)$ también debe satisfacer la ecuación de onda,

$$\nabla^2 U(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(\vec{r})}{\partial t^2} = 0 \quad (1.6)$$

1.2. Ecuación de Helmholtz

Sustituyendo $U(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) \exp(i2\pi\nu t)$ en la ecuación de onda (1.6)

$$\begin{aligned} \left[\nabla^2 U(\vec{r}) + \frac{1}{c^2} (w^2) U(\vec{r}) \right] \exp(iwt) &= 0 \\ \nabla^2 U(\vec{r}) + \frac{w^2}{c^2} U(\vec{r}) &= 0, \\ (\nabla^2 + k^2) U(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

encontramos una ecuación diferencial llamada la ecuación de Helmholtz, la cual nos describe el comportamiento de la onda en el espacio, donde

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{w}{c}$$

es conocido como el número de onda.

1.3. Ecuación paraxial de Helmholtz

Se dice que una onda es paraxial si sus frentes de onda normales son rayos paraxiales. Una forma de construir una onda paraxial es comenzar con una onda plana $A \exp(-ikz)$, considerarla como una onda "portadora", y modificar o "modular" su envolvente compleja A , haciéndola una función variable de la posición $A(\vec{r})$ de modo que la amplitud compleja de la onda modulada se convierte

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) \exp(-ikz) \quad (1.8)$$

La variación de $A(r)$ con la posición debe ser lenta dentro de la distancia de una longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, de modo que la onda mantiene aproximadamente su naturaleza de onda plana.

Para que la onda paraxial (1.8) satisfaga la ecuación de Helmholtz (1.7), la envolvente compleja $A(\vec{r})$ debe satisfacer otra ecuación diferencial parcial obtenida sustituyendo (1.8) en (1.7). La suposición de que $A(\vec{r})$ varía lentamente con respecto a z significa que dentro de una distancia $\Delta z = \lambda$, el cambio ΔA es mucho menor que el mismo A ; es decir, $\Delta A \ll A$. Esta desigualdad de variables complejas se aplica a las magnitudes de las partes reales e imaginarias por separado. Como $\Delta A = (\partial A / \partial z) \Delta z = (\partial A / \partial z) \lambda$, se sigue que $\partial A / \partial z \ll Ak / 2\pi$ y por lo tanto

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA \quad (1.9)$$

De manera similar, la derivada $\partial A / \partial z$ varía lentamente dentro de la distancia λ , de modo que $\partial^2 A / \partial z^2 \ll k \partial A / \partial z$, y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k^2 A \quad (1.10)$$

Sustituyendo (1.8) en (1.7) y despreciando $\partial^2 A/\partial z^2$ en comparación con $k\partial A/\partial z$ o $k^2 A$, se obtiene

$$\nabla_T^2 A - i2k \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (1.11)$$

donde $\nabla_T^2 = \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ es el operador Laplaciano transversal.

La ec. (1.11) es la aproximación de envolvente lentamente variable de la ecuación de Helmholtz la cual es conocida como la ecuación paraxial de Helmholtz.

La solución más simple de la ecuación paraxial de Helmholtz es la onda paraboloidal, sin embargo, la solución más interesante y útil es el haz Gaussiano.

Es importante analizar la evolución del campo óptico al propagarse en un medio o en espacio libre, resolviendo la ecuación paraxial de Helmholtz que para el caso unidimensional esta dada por

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (1.12)$$

Esta ecuación puede normalizarse con los parámetros $X = x/x_0$, con x_0 el ancho inicial del haz y $Z = z/L_D$, donde $L_D = n_0 k_0 x_0^2/2$ es la longitud de difracción o distancia de Rayleigh ($L_D = z_0$), entonces obtenemos:

$$i \frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} \quad (1.13)$$

La ecuación (1.13) describe la difracción del campo en función de la distancia de propagación.

1.4. Difracción

El trabajo de Francesco Grimaldi en el siglo XVII fue el primer estudio detallado publicado sobre la desviación de la luz de la propagación rectilínea, algo que él llamó “difracción”. El efecto es una característica general de los fenómenos ondulatorios que se produce siempre que una porción de un frente de onda, ya sea sonido, una onda de materia o luz, se ve obstruida de algún modo. Si al chocar con un obstáculo, transparente u opaco, se altera la amplitud o la fase de una región del frente de onda, se produce difracción. Los distintos segmentos del frente de onda que se propagan más allá del obstáculo interfieren, dando lugar a la distribución particular de densidad de energía denominada patrón de difracción.

La difracción de la luz es la consecuencia de la violación de la propagación rectilínea. Una difracción fuerte aparece cuando las dimensiones transversales son comparables a la longitud de onda. El efecto de difracción se ve incrementado o disminuido si las dimensiones del objeto que produce una obstrucción al paso de la luz son comparadas con el tamaño transversal de la luz, entonces el efecto de difracción se ve magnificado (difracción fuerte), en comparación si se tuviera un objeto con menor dimensión. Una difracción fuerte es más pronunciada para las ondas largas como el agua o el sonido, mientras que es menos apreciable en óptica. La difracción está a cargo de la divergencia del haz en la propagación en el espacio libre y en la propagación en la región de sombra. La difracción, como propiedad natural de las ondas, se caracteriza por la distribución no homogénea de la intensidad transversal[13].

La óptica de Fourier proporciona una descripción de la propagación de la luz mediante el análisis armónico (transformada de Fourier) y sistemas lineales. El análisis armónico se

basa en la expansión de una función arbitraria $f(t)$ como una superposición de funciones armónicas en el tiempo con diferentes frecuencias. Si la respuesta del sistema a cada función armónica es conocida, la respuesta a una función arbitraria en la entrada es fácilmente determinada mediante el uso de la transformada de Fourier en la entrada y la superposición en la salida [7].

Para resolver la ecuación (1.13) puede usarse el análisis de Fourier que proporciona una descripción de la propagación de ondas a través de un sistema óptico lineal entre un plano de entrada supongamos $Z_0 = 0$ y un plano de salida $Z = Z_s$.

Dada la amplitud compleja en el plano de entrada $U(X, Z = Z_0)$, es posible determinar la amplitud compleja en el plano de salida $U(X, Z = Z_s)$. Aplicando la transformada de Fourier (T.F.) a la ecuación (1.13) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A \exp^{i\omega x} dx \right] = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} (-i\omega)^2 \int_{-\infty}^{\infty} A \exp^{i\omega x} dx \quad (1.14)$$

Sea

$$A(\omega, Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A \exp^{i\omega x} dx \quad (1.15)$$

entonces

$$A(\omega, Z) = T.F. \{A(X, Z)\} \quad (1.16)$$

entonces

$$\frac{\partial A(\omega, Z)}{\partial Z} = \frac{-\omega^2}{4} A(\omega, Z) \quad (1.17)$$

$$\int_{Z_0}^{Z_s} \frac{dA(\omega, Z)}{A(\omega, Z)} = \frac{-\omega^2}{4} \int_{Z_0}^{Z_s} dZ \quad (1.18)$$

$$\ln(A(\omega, Z_s)) \Big|_{Z_0}^{Z_s} = -\frac{\omega^2}{4} Z \Big|_{Z_0}^{Z_s} \quad (1.19)$$

$$\ln(A(\omega, Z_s)) - \ln(A(\omega, Z_0)) = -\frac{\omega^2}{4} \Delta Z \quad (1.20)$$

sea $\Delta Z = Z_s - Z_0$ entonces

$$\frac{\ln(A(\omega, Z_s))}{\ln(A(\omega, Z_0))} = -\frac{\omega^2}{4} \Delta Z \quad (1.21)$$

$$\ln \left[\frac{A(\omega, Z_s)}{A(\omega, Z_0)} \right] = -\frac{\omega^2}{4} \Delta Z \quad (1.22)$$

entonces

$$A(\omega, Z_s) = A(\omega, Z_0) \exp \left(\frac{-\omega^2}{4} \Delta Z \right) \quad (1.23)$$

La ecuación (1.23) considera un sistema lineal con $A(\omega, Z_0)$ como su espectro de entrada, esto es en el plano en entrada Z_0 y con el espectro de salida dado por $A(\omega, Z_s)$, por lo que la respuesta de la frecuencia espacial del sistema esta dado por:

$$\frac{A(\omega, Z_s)}{A(\omega, Z_0)} = \exp \left(\frac{-\omega^2}{4} \Delta Z \right) \Delta Z = H(\omega, \Delta Z) \quad (1.24)$$

$H(\omega, \Delta Z)$ es la función de transferencia, al multiplicarla por una función espacial armónica de entrada, se obtiene la función armónica de salida

$$A(\omega, Z_s) = A(\omega, Z_0)H(\omega, \Delta Z) \quad (1.25)$$

Para obtener la distribución del campo al final de la propagación esto es $Z = Z_s$, necesitamos determinar la transformada inversa de Fourier de la ecuación (1.25):

$$A(X, Z_s) = T.F.I \{A(\omega, Z_0)H(\omega, \Delta Z)\} \quad (1.26)$$

sustituyendo (1.16) en (1.26) para el plano de entrada $Z = Z_0$, el campo a la salida del medio se puede expresar como

$$A(X, Z_s) = T.F.I \{T.F.(A(\omega, Z_0))H(\omega, \Delta Z)\} \quad (1.27)$$

Así obtenemos el campo de salida, después de propagarse en un medio lineal a una distancia ΔZ . Al considerar un campo de entrada $A(\omega, Z_0)$ como condición inicial.

En los siguiente capítulos se describirán algunas soluciones a la ecuación paraxial de Helmholtz, propagados a diferentes distancias de propagación usando el método de paso dividido (split-spct)

1.5. Óptica no lineal

Cuando un campo eléctrico interactúa con un medio óptico, las moléculas de dicho medio tienen un momento dipolar, se dice que la molécula tiene un momento dipolar inducido y que es polarizada. Cuando la polarización es conocida la propagación de campos ópticos en un medio no lineal en donde no hay cargas ni corrientes, puede ser analizada con las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.28)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.29)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.30)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.31)$$

Con

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (1.32)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.33)$$

$$(1.34)$$

\vec{H} es la intensidad del campo magnético, μ_0 la permeabilidad del espacio libre, \vec{E} es el campo eléctrico, \vec{D} el vector de desplazamiento eléctrico y ϵ_0 la permitividad del espacio libre.

Al aplicar el rotacional a la ecuación (1.30) y usando la identidad $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ y usando (1.31) se obtiene la ecuación siguiente

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (1.35)$$

Por otro lado si $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, entonces $\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = 0$, tenemos la ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c_0^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (1.36)$$

con $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

La ecuación (1.36) gobierna la evolución de campos en medios lineales, y para medios no lineales cuando

$$\vec{P} = \vec{P}^L + \vec{P}^{NL} \quad (1.37)$$

con P^L la polarización lineal y P^{NL} la polarización no lineal.

La no linealidad de un medio óptico se presenta debido a la interacción de luz muy intensa, la cual depende del medio, con un material óptico.

Para un medio dieléctrico en el régimen lineal, sus propiedades son descritas por:

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}(t) \quad (1.38)$$

donde la polarización presenta una relación lineal con el campo eléctrico $\vec{E}(t)$, con $\chi^{(1)}$ la susceptibilidad lineal del medio.

Para el caso no lineal la respuesta lineal dada por la ecuación (1.38) puede generalizarse expresando la polarización $\vec{P}(t)$ como una serie de potencias del campo de la siguiente forma [3]

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 [\chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E} \vec{E} + \chi^{(3)} \vec{E} \vec{E} \vec{E} + \dots] \quad (1.39)$$

$$\vec{P} = \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(2)} + \vec{P}^{(3)} + \dots \quad (1.40)$$

$\chi^{(2)}$ y $\chi^{(3)}$ son las susceptibilidades de segundo y tercer orden y describen la estructura del material asociados con procesos no lineales de los mismos ordenes.

Por ejemplo si consideramos procesos a tercer orden la polarización esta representada como

$$\vec{P}^{(3)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} \vec{E} \vec{E} \vec{E} \quad (1.41)$$

Por lo que la contribución total a la polarización es

$$\vec{P} = \epsilon_0 [\chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(3)} \vec{E} \vec{E} \vec{E}] \quad (1.42)$$

Suponiendo un campo que consiste de tres frecuencias dado por

$$\vec{E}(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + E_3 e^{-i\omega_3 t} + C.C. \quad (1.43)$$

Donde C.C. es el complejo conjugado.

Al usar el campo de la ecuación (1.43) en la polarización resultante de la ecuación (1.42), se obtienen 44 componentes de frecuencias diferentes considerando frecuencias positivas y negativas, por lo que (1.42) puede escribirse como

$$\vec{P}^{(3)}(t) = \sum_m P(\omega_m) e^{-i\omega_m t} \quad (1.44)$$

Al usar la expresión general para la polarización (1.44) en términos de los coeficientes de Fourier tenemos

$$\vec{P}^{(3)}(\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = \epsilon_0 \chi^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \vec{E}(\omega_1) \vec{E}(\omega_2) \vec{E}(\omega_3) \quad (1.45)$$

Si consideramos que la luz incidente es una onda monocromática linealmente polarizada a lo largo del eje x de la forma

$$\vec{E} = (E(\omega)e^{-i\omega t} + C.C)\hat{i} \quad (1.46)$$

En este caso la polarización puede ser escrita como

$$P(\omega) = \epsilon_0 [\chi^{(1)}E(\omega) + 3\chi^{(3)}(\omega, -\omega, \omega)E(\omega)E^*(\omega)E(\omega)] \quad (1.47)$$

donde $P(\omega) = \epsilon_0 \chi^{(1)}E(\omega) + 3\chi^{(3)}(\omega, -\omega, \omega)|E(\omega)|^2E(\omega) = \epsilon_0 \chi_{eff}E(\omega)$
con

$$\chi_{eff} = \chi^{(1)} + 3\chi^{(3)}|E(\omega)|^2 \quad (1.48)$$

$$P(\omega) = P^{(1)}(\omega) + P^{(3)}(\omega) \quad (1.49)$$

Por otro lado se sabe que el campo eléctrico monocromático \vec{E} de frecuencia ω esta relacionado con el vector de polarización \vec{P} y el vector de desplazamiento eléctrico \vec{D} mediante

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon_0 \vec{E}(\omega) + \vec{P}(\omega) \quad (1.50)$$

Al sustituir la polarización de la expresión (1.47) se tiene

$$D(\omega) = \epsilon_0 \left\{ E(\omega) + \chi^{(1)}(\omega)E(\omega) + 3\chi^{(3)}(\omega, -\omega, \omega)E(\omega)E^*(\omega)E(\omega) \right\} \quad (1.51)$$

$$D(\omega) = \epsilon_0 \left\{ [1 + \chi^{(1)}(\omega)] + 3\chi^{(3)}(\omega, -\omega, \omega)|E(\omega)|^2 \right\} E(\omega) \quad (1.52)$$

La ecuación anterior puede expresarse como

$$D(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r E \quad (1.53)$$

donde ϵ_r es la constante dieléctrica relativa, que para nuestro caso es

$$\epsilon_r = [1 + \chi^{(1)}] + 3\chi^{(3)}|E|^2 \quad (1.54)$$

$$\epsilon_r = \epsilon_r^0 + 3\chi^{(3)}|E|^2 \quad (1.55)$$

con ϵ_r^0 la constante dieléctrica relativa lineal del medio. Es sabido que ϵ_r está relacionada con el índice de refracción del medio por

$$n = \sqrt{Re\{\epsilon_r\}} \quad (1.56)$$

Si se considera que la contribución no lineal es mucho más pequeña que la lineal, la expresión para el índice de refracción toma la forma

$$n \approx n_0 + \frac{3}{2n_0} Re\{\chi^{(3)}\} |E|^2 \quad (1.57)$$

n con n_0 el índice de refracción lineal del medio. La ecuación anterior puede interpretarse como que bajo la acción de un campo óptico intenso, el índice de refracción para un medio no lineal de tercer

orden no es una constante. El cambio del índice de refracción no lineal inducido es proporcional a la intensidad del campo óptico para un medio con una linealidad tipo Kerr, dado por

$$\Delta n = n - n_0 = n_2|E|^2 \quad (1.58)$$

teniendo

$$n = n_0 + n_2|E|^2 \quad (1.59)$$

$$n = n_0 + \Delta n \quad (1.60)$$

La idea era tener un programa desarrollado para en un futuro poder hacer la propagación en medios no lineales, lamentablemente no se logro llegar a abordar esta parte en el trabajo de tesis, pero es necesario abordar algunos temas de la óptica no lineal para comprender el método split step que se aborda en las siguientes secciones.

1.6. Propagación en medios no lineales

Una solución a la ecuación (1.36) al considerar la propagación de un haz de luz polarizado a través de un medio con índice de refracción $n(x, y, z)$ es

$$\vec{E}(r, t) = A(r)\exp(-i\beta_0 z)\exp(-i\omega t) \quad (1.61)$$

$$\vec{E} = U(r)\exp(-i\omega t) \quad (1.62)$$

con $U(r) = A(r)\exp(-i\beta_0 z)$, donde $\beta_0 = k_0 n_0 = 2\pi n_0 / \lambda_0$ es la constante de propagación.

Se considera que el haz se propaga a lo largo del eje z y se difracta (o se auto enfoca) a lo largo de la dirección transversal x . La función $A(x, z)$ describe la evolución de la envolvente del haz, si consideramos la aproximación de envolvente lentamente variable, podemos desprejir el término d^2/dz^2 obteniéndose la ecuación de onda paraxial:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - 2in_0 k_0 \frac{\partial A}{\partial z} + [n^2 - n_0^2]k_0^2 A = 0 \quad (1.63)$$

Sustituyendo el índice de refracción dada por la ecuación (1.60) y trabajando en una dimensión, tenemos

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2k_0 n_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \Delta n k_0 A \quad (1.64)$$

La ecuación (1.64) se normaliza a los siguientes parámetros $X = \frac{x}{x_0}$ con x_0 el ancho inicial del haz y $Z = \frac{z}{L_D}$, donde $L_D = n_0 k_0 x_0^2 / 2$ es la longitud de difracción o distancia de Rayleigh.

Teniendo entonces la siguiente ecuación que describe la propagación de un haz en un medio no lineal

$$i \frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + k_0 L_D \Delta n A \quad (1.65)$$

El primer término a la derecha de la igualdad, describe la difracción de la luz en el medio y el segundo término describe el comportamiento no lineal con variaciones del índice de refracción Δn . Para un cambio en el índice de refracción dado por la ecuación (1.58), tenemos para este caso

$$\Delta n = n_2|U|^2 = n_2|A|^2 \quad (1.66)$$

Tenemos la ecuación

$$i\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \pm \frac{L_D}{L_{NL}}|U|^2U \quad (1.67)$$

con $L_{NL} = \frac{1}{\Delta n k_0}$, la longitud de difracción no lineal.

Las constantes L_D y L_{NL} son básicas para describir la propagación de la luz. Para L_D menor que L_{NL} , el segundo término de la ecuación (1.67) es despreciable, dominando solo la difracción del haz conforme se propaga en el medio, esto sucede cuando el material presenta un índice de refracción no lineal muy pequeño o la potencia del haz incidente es baja esto es lo que consideraremos en este trabajo pues tomamos como medio de propagación el espacio libre.

Capítulo 2

Métodos numéricos

El método numérico Split-Step puede ser empleado para analizar la propagación de campos ópticos en medios lineales y no lineales, dicho método es empleado en este trabajo de tesis. Para el caso concreto de la propagación en pulsos en fibras ópticas, el método de Fourier de paso dividido se aplicó por primera vez en 1973. Desde entonces, este método se ha utilizado ampliamente para estudiar diversos efectos no lineales en fibras ópticas, principalmente debido a su rápida ejecución en comparación con la mayoría de los esquemas de diferencias finitas. [15]

2.1. Método de Split-Step

Recordemos la ecuación (1.67)

$$i\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \pm \frac{L_D}{L_{NL}}|U|^2U \quad (2.1)$$

esta es una ecuación diferencial parcial no lineal que generalmente no se resuelve analíticamente excepto para algunos casos específicos en los que se puede emplear el método de dispersión inversa. Por lo tanto, a menudo es necesario un enfoque numérico para resolverla.

El método se basa en propagar una función a lo largo de una cierta distancia, la cual es dividida en m pasos. Cada paso es dividido en 2, en la primera mitad la función ve los efectos de difracción y en la segunda mitad ve los efectos no lineales. Para esto es necesario escribir la ecuación (1.67) en términos de operadores, de la siguiente forma:

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = (\hat{D} + \hat{N})U \quad (2.2)$$

donde \hat{D} es un operador diferencial que tiene en cuenta la dispersión y las pérdidas dentro de un medio lineal y \hat{N} es un operador no lineal que gobierna el efecto de las no linealidades.

El método de paso dividido obtiene una solución aproximada asumiendo que en la propagación de un campo óptico sobre una pequeña distancia h , los efectos de difracción y no lineales pueden actuar independientemente.

Resolviendo la ecuación (2.2)

$$\frac{\partial U}{U} = (\hat{D} + \hat{N})dZ \quad (2.3)$$

integrando

$$\int_Z^{Z+h} \frac{\partial U}{U} = \int_Z^{Z+h} (\hat{D} + \hat{N}) dZ \quad (2.4)$$

$$\ln U|_Z^{Z+h} = (\hat{D} + \hat{N})|_Z^{Z+h} \quad (2.5)$$

$$\ln U(Z+h) - \ln U(Z) = (\hat{D} + \hat{N})|_Z^{Z+h} \quad (2.6)$$

De forma que

$$\frac{\ln U(Z+h) - \ln U(Z)}{h} = (\hat{D} + \hat{N}) \quad (2.7)$$

$$\ln \left[\frac{U(Z+h)}{U(Z)} \right] = (\hat{D} + \hat{N})h \quad (2.8)$$

entonces tenemos

$$U(Z+h) = \exp[(\hat{D} + \hat{N})h]U(Z) \quad (2.9)$$

Por lo que la solución a la ecuación (2.2) está dada por

$$U(X, Z+h) = \exp(h\hat{D})\exp(h\hat{N})U(Z) \quad (2.10)$$

La propagación de Z a $Z+h$ se realiza en dos pasos: Actúa la no linealidad $\hat{D} = 0$, teniendo entonces

$$U(X, Z+h) = \exp(h\hat{N})U(z) \quad (2.11)$$

Después actúa la difracción $\hat{N} = 0$

$$U(X, Z+h) = \exp(h\hat{D})U(z) \quad (2.12)$$

El efecto del operador $\exp(h\hat{D})$ se obtiene utilizando el análisis de Fourier explicado en la sección 1.3. Entonces al resolver la parte lineal de la ecuación (2.2) se tiene que el campo a la salida U esta dado por

$$U = T.F.I(T.F(U_0(X))H(\omega, \Delta Z)) \quad (2.13)$$

donde $U_0 = U(X, Z=0)$ es la función de entrada y $H(\omega, \Delta Z)$ es la función de transferencia. Sea $\Delta Z = Z_1 - Z_0$, donde $Z_0 = Z=0$ es el plano de entrada y Z_1 el plano de salida, en nuestro caso $Z_1 = h$

Consideremos la ecuación (1.67) en dos dimensiones, reescrita de la siguiente manera:

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{i}{4} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \mp i \frac{L_D}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (2.14)$$

o

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{i}{4} \nabla_T^2 U \mp i \frac{L_D}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (2.15)$$

definiendo los operadores \hat{D} y \hat{N} como:

$$\hat{D} = -\frac{i}{4} \nabla_T^2 \quad (2.16)$$

$$\hat{N} = \mp i \frac{L_D}{L_{NL}} |U|^2 \quad (2.17)$$

podemos resolver la ecuación (2.15) por el método de split-step.

Los valores adecuados de las constantes L_D y L_{NL} pueden dar origen a la formación de un solitón espacial. Para $L_D < L_{NL}$, el segundo término de esta ecuación se desprecia, dominando sólo difracción del haz conforme se propaga en el medio, esto sucede cuando el material presenta un índice de refracción no lineal muy pequeño o la potencia del haz incidente es baja. En el caso en que $L_{NL} < L_D$ se puede despreciar el término de difracción, dominando el término no lineal, el cual se manifiesta como un ensanchamiento espectral, por efecto de la modulación de fase que se induce produciéndose autoenfocamiento si $n_2 > 0$ o un autodesenfocamiento si $n_2 < 0$. Por otro lado puede suceder que el efecto de ensanchamiento del haz por difracción se compense por el ensanchamiento espectral producido por el efecto Kerr, en este caso se dice que se genera un solitón espacial.

2.2. Algoritmo

```
clear all
lz=4; % tenemos la distancia de propagación normalizada
dz=0.1; % el incremento de la longitud de propagación
nz=round(lz/dz); % el número de perfiles de intensidad obtenidos
nx=2^8;
xm=28; % esto nos define el espacio de trabajo
x=linspace(-xm,xm,nx);
[x,y]=meshgrid(x,x); % tenemos ahora al mallado del área de trabajo [x,y]
fx=(-nx/2:nx/2-1)*2*pi/(2*xm);
[fx,fy]=meshgrid(fx,fx);
[theta,r]=cart2pol(x,y);
fig=figure;
aviobj=VideoWriter('besselgauss.avi','Motion JPEG AVI');
open(aviobj);
m=0;
n=1;
eta=0;
w0=1;
```

Se define ahora los polinomios de los haces

```
Laguerre-Gaussiano
L=mfun('L',m,n,2*r.^2/w0^2);
%L=laguerreL(m,n,2*r.^2/w0^2);
J=(exp(-1i*theta*n)/w0).*(r./w0).^n;
U=J.*L.*exp(-r.^2/(w0^2));
```

```
Gaussiano
U=(1/w0)*exp(-r.^2/(w0.^2));
```

```
Bessel
U=besselj(0,r)
```

```
Bessel-Gauss
G=exp(-r.^2/w0^2);
U=besselj(0,(4*pi)*r).*G;
```

```
%p=fftshift(exp(-i/4)dz(fx.^2+fy.^2));
p=fftshift(exp(-1i.* dz.*(fx.^2+fy.^2)/4));
U1=zeros(nz+1,nx); U2=U1; U3=zeros(1,nz+1);
U1(1,:)=abs(U(nx/2,:).^2);
U2(1,:)=abs(U(:,nx/2).^2);
U3(1,1)=sum(sum(abs(U.^2)));

imagesc(abs(U).^2);
axis square; colormap(hot); shading flat; colorbar
xlabel('Píxeles x'); ylabel('Píxeles y');
F=getframe(fig);
writeVideo(aviobj, F);

A partir de este punto se empieza a trabajar el paso dividido.

for l=1:nz;
    U=ifft2(p.*(fft2(U)));
    U=U.*exp(1i*eta*dz*abs(U).^2);
    U1(l+1,:)=abs(U(nx/2,:).^2);
    U2(l+1, :)=abs(U(:,nx/2).^2);
    U3(1,l+1)=sum(sum(abs(U.^2)));

imagesc(abs(U).^2);
axis square; colormap(hot); shading flat; colorbar
xlabel('Píxeles x'); ylabel('Píxeles y');
F1=getframe(fig);
writeVideo(aviobj, F1);

end
%aviobj=close(aviobj);
close(aviobj);

figure(1)
waterfall(U1); colormap([0 0 0])
xlabel('Píxeles x'); ylabel('nz'); zlabel('I(x,y,z)')

figure(2)
waterfall(U2); colormap([0 0 0])
xlabel('Píxeles x'); ylabel('nz'); zlabel('I(x,y,z)')

figure(3)
plot(U3)

figure(4)
plot(U1(1,:))
xlabel('Píxeles x'); ylabel('I(x,y,z)')
hold on
plot(U1(nz+1,:), 'r')

%figure(5)
%plot(U2(1,:))
%xlabel('Píxeles x'); ylabel('I(x,y,z)')
```

```
%hold on  
%plot(U2(nz+1,:), 'm')
```


Capítulo 3

Haces Gaussianos

3.1. Función de onda Gaussiana

Una onda paraxial es una onda plana e^{-ikz} modulada por una envolvente compleja $A(\vec{r})$ que es una función que varía lentamente con la posición. La amplitud compleja es

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r})\exp(-ikz) \quad (3.1)$$

Para que la amplitud compleja $U(\vec{r})$ satisfaga la ecuación de Helmholtz, $\nabla^2 U + k^2 U$, la envolvente compleja $A(\vec{r})$ debe satisfacer la ecuación paraxial de Helmholtz (1.11) Como se menciona anteriormente una solución simple a la ecuación paraxial de Helmholtz proporciona la onda paraboloidal para la cual

$$A(\vec{r}) = \frac{A_1}{z} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right), \rho = x^2 + y^2 \quad (3.2)$$

donde A_1 es una constante. La onda paraboloidal es la aproximación paraxial de la onda esférica $U(\vec{r}) = (A_1/r)\exp(-ikr)$ donde x y y son mucho más pequeñas que z .

Otra solución de la ecuación de Helmholtz paraxial proporciona el haz Gaussiano. Es obtenida de la onda paraboloidal mediante el uso de una transformación simple. Ya que la envolvente compleja de la onda paraboloidal (3.2) es una solución de la onda paraxial ecuación de Helmholtz (1.11), una versión desplazada de la misma, con $z - \xi$ reemplazando z donde ξ es una constante,

$$A(\vec{r}) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left[-ik \frac{\rho^2}{2q(z)}\right], q(z) = z - \xi \quad (3.3)$$

también es una solución. Esto proporciona una onda paraboloidal centrada en el punto $z = \xi$ en vez de $z = 0$. Cuando ξ es compleja, la anterior ecuación sigue siendo una solución de la ecuación paraxial de Helmholtz, pero adquiere propiedades dramáticamente diferentes. En particular, cuando ξ es puramente imaginario, digamos $\xi = -iz_0$, donde z_0 es real, (3.3) da lugar a la **envolvente compleja** del haz gaussiano.

$$A(\vec{r}) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left[-ik \frac{\rho^2}{2q(z)}\right], q(z) = z + iz_0 \quad (3.4)$$

El parámetro z_0 se conoce como el rango de Rayleigh.

Para separar la amplitud y la fase de esta envolvente compleja, escribimos la función compleja $1/q(z) = 1/(z + iz_0)$ en términos de sus partes real e imaginaria definiendo dos nuevas funciones reales $R(z)$ y $W(z)$, tales que

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi W^2(z)} \quad (3.5)$$

$W(z)$ y $R(z)$ son medidas del ancho del haz y radio de curvatura del frente de onda, respectivamente.

Sustituyendo (3.5) en (3.4) y usando (3.1), una expresión para la amplitud compleja $U(\vec{r})$ del haz gaussiano es obtenida:

$$U(\vec{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)\right], \quad (3.6)$$

donde

$$W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2} \quad (3.7)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right] \quad (3.8)$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1} \frac{z}{z_0} \quad (3.9)$$

$$W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi}\right)^{1/2} \quad (3.10)$$

Una nueva constante $A_0 = A_1/iz_0$ ha sido definida con conveniencia.

3.1.1. Distribución de Intensidad

La intensidad óptica $I(\vec{r}) = |U(\vec{r})|^2$ es función de las distancias axial y radial z y $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$,

$$I(\rho, z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)}\right]^2 \exp\left[-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right] \quad (3.11)$$

donde $I_0 = |A_0|^2$. En cada valor de z la intensidad es una función Gaussiana de la distancia radial ρ . Por esto la onda es llamada Haz Gaussiano. La función gaussiana tiene su pico en $\rho = 0$ (en el eje) y cae monótonamente al aumentar ρ . El ancho $W(z)$ de la distribución gaussiana aumenta con la distancia axial z .

En el eje del haz ($\rho = 0$) la intensidad

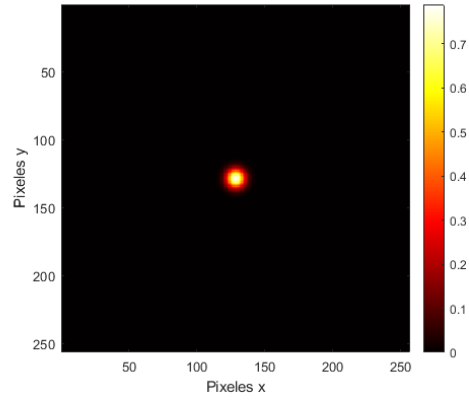
$$I(0, z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)}\right]^2 = \frac{I_0}{1 + (z/z_0)^2} \quad (3.12)$$

tiene su valor máximo I_0 en $z = 0$ y cae gradualmente al aumentar z , llegando a la mitad de su valor máximo en $z = \pm z_0$. Cuando $|z| \gg z_0$, $I(0, z) \approx I_0 z_0^2 / z^2$ de modo que la intensidad disminuye con la distancia de acuerdo con una ley del cuadrado inverso, para ondas esféricas y paraboloidales. La intensidad máxima $I(0, 0) = I_0$ ocurre en el centro del haz ($z = 0, \rho = 0$).

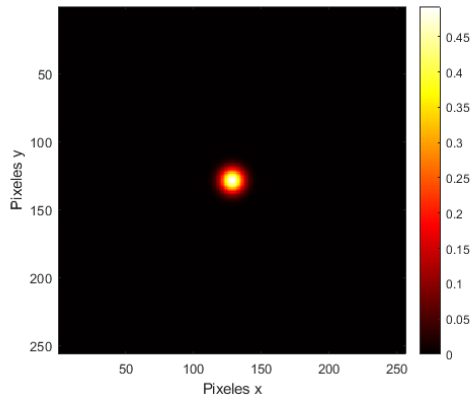
Utilizando el método numérico de paso dividido, con un algoritmo en Matlab con el cual se simula la propagación del haz Gaussiano. Variamos la distancia de propagación, l_z , de 0 a 4, con intervalos de 0.5, quedando con los valores de z : $z = 0, z = 0,5z_0, z = z_0, z = 1,5z_0, z = 2z_0, z = 2,5z_0, z = 3z_0, z = 3,5z_0$ y $z = 4z_0$, y se obtiene las siguientes distribuciones transversales de intensidad:



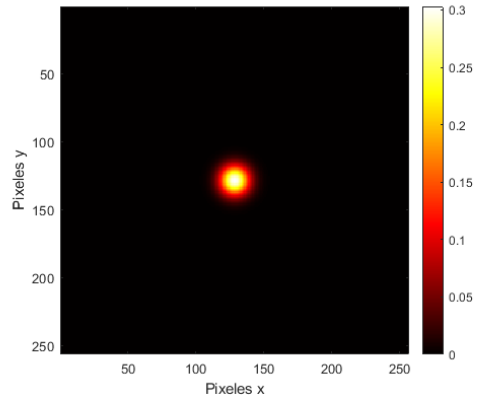
(a) $z = 0$



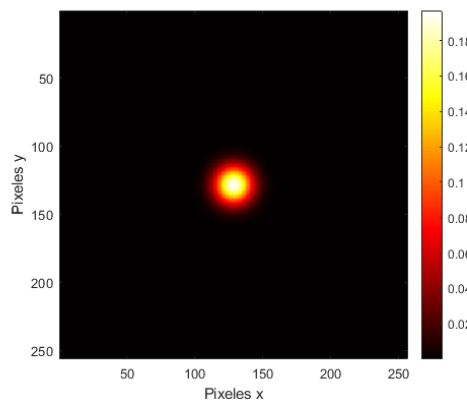
(b) $z = 0,5z_0$



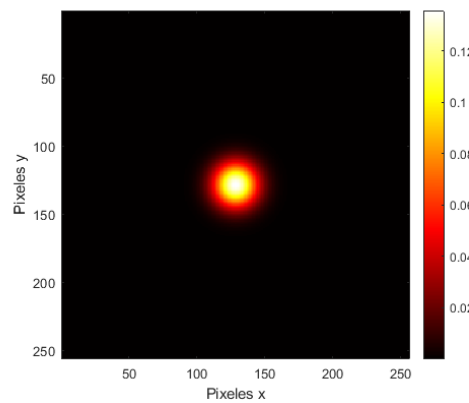
(c) $z = z_0$



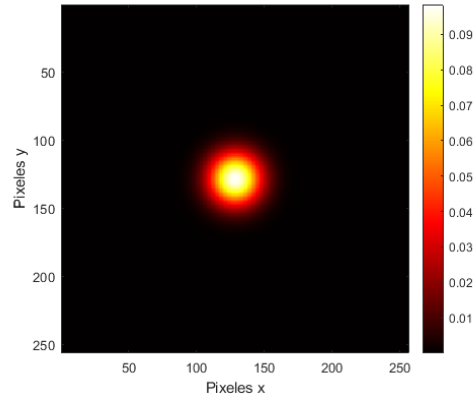
(d) $z = 1,5z_0$



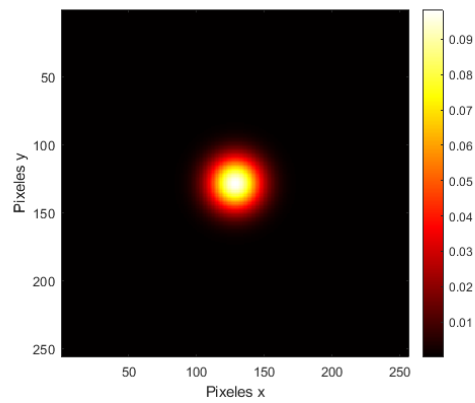
(e) $z = 2z_0$



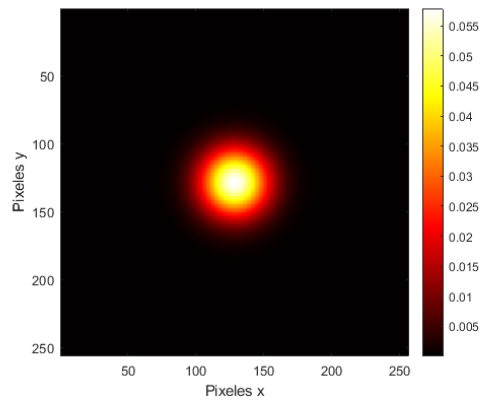
(f) $z = 2,5z_0$



(g) $z = 3z_0$

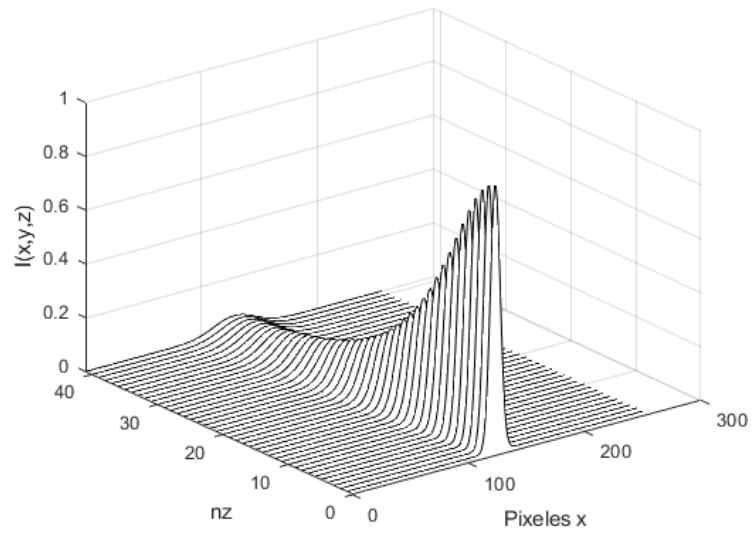


(h) $z = 3,5z_0$

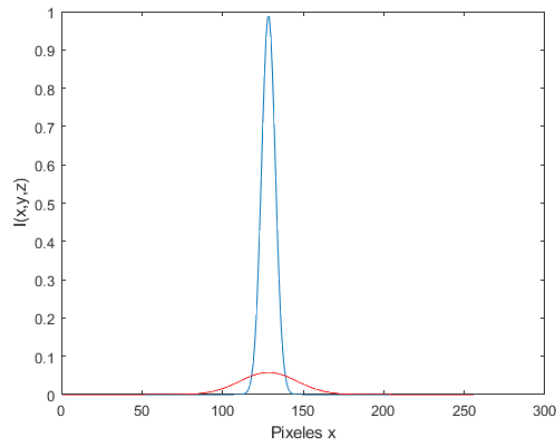


(i) $z = 4z_0$

Figura 3.1: Patrones de intensidad para (a) $z = 0$; (b) $z = 0,5z_0$; (c) $z = z_0$; (d) $z = 1,5z_0$; (e) $z = 2z_0$; (f) $z = 2,5z_0$; (g) $z = 3z_0$; (h) $z = 3,5z_0$; (i) $z = 4z_0$



(a)



(b)

Figura 3.2: Perfiles de intensidad Gaussiana: [a] Los perfiles de intensidad de $z = 0$ a $z = 4z_0$, con intervalos de 0.5; [b] Perfiles de intensidad del haz en la entrada (azul) y salida (rojo) del sistema $z = 0$ y $z = 4z_0$

3.2. Análisis de Resultados

El haz Gaussiano tiene su máximo de intensidad en eje es decir en $\rho = 0$, la intensidad decrece con el incremento de ρ .

Los patrones de difracción mostrados en la figura 3.1(a)-(i) muestran la evolución de un haz Gaussiano desde la posición $z = 0$ hasta $z = 4z_0$, se observa que en $\rho = 0$ y $z = 0$ se tiene la mayor intensidad llamada I_0 y con el incremento de la distancia de propagación la intensidad máxima sobre eje I_0 reduce su valor.

Los patrones de difracción indican un ensanchamiento de la distribución de intensidad conforme el haz se propaga lo cuál puede apreciarse en la figura 3.2(a) que muestra la propagación del haz Gaussiano en espacio libre. Los resultados arrojan que la distribución Gaussiana del haz se conserva conforme este se propaga, esto puede observarse de la figura 3.2(b) donde se observan los perfiles de intensidad de entrada y salida del haz Gaussiano; puede observarse que el perfil de salida conserva la forma Gaussiana pero presenta un ensanchamiento respecto al perfil de entrada, como lo predice la teoría.

Capítulo 4

Haces Bessel

4.1. Funciones Bessel

Los haces adifraccionales o invariantes aparecieron en la literatura en los años 80's, y fueron demostrados experimentalmente por Durnin *et al* en 1987. Sobre el rango de propagación libre de difracción, estos haces tiene una distribución de amplitud transversal de la forma $J_0(k_T\rho)$ donde J_0 es la función Bessel de orden cero.

Consideremos una onda con la amplitud compleja

$$U(\vec{r}) = A(x, y)e^{-i\beta z} \quad (4.1)$$

Para que esta onda satisfaga la ecuación de Helmholtz, $A(x, y)$ debe satisfacer

$$\nabla_T^2 A + k_T^2 A = 0 \quad (4.2)$$

donde $k_T^2 + \beta = k^2$ y $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ es el operador laplaciano transversal. La ecuación (4.2), conocida como ecuación bidimensional de Helmholtz, puede resolverse empleando el método de separación de variables, utilizando coordenadas polares ($x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$), el resultado es

$$A(x, y) = A_m J_m(k_T\rho)e^{im\phi}, m = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (4.3)$$

donde $J_m(\cdot)$ es la función de Bessel del primer tipo y m-ésimo orden, y A_m es una constante.

Para $m = 0$, la onda tiene la amplitud compleja:

$$U(\vec{r}) = A_0 J_0(k_T\rho)e^{-i\beta z} \quad (4.4)$$

y, por tanto, tiene frentes de onda planos. Esta onda se denomina haz de Bessel.

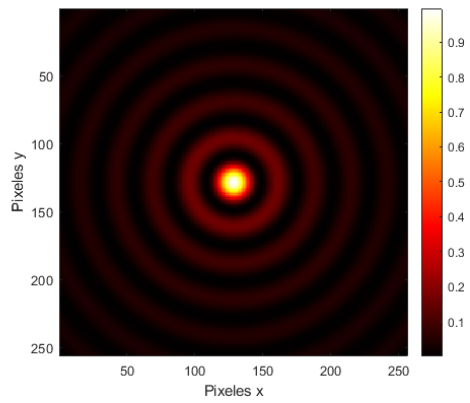
4.1.1. Distribución de Intensidad

Calculando el módulo del campo al cuadrado de la expresión (4.4), es posible obtener la distribución de intensidad:

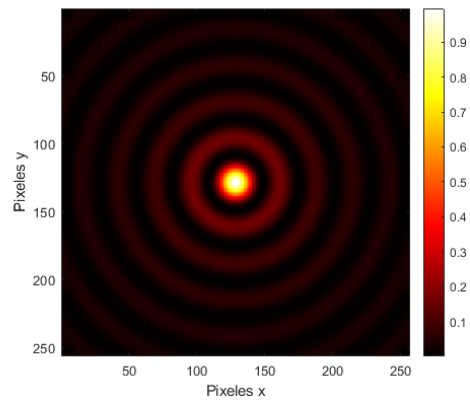
$$I(\rho, \phi, z) = |A_0|^2 J_0^2(k_T \rho) \quad (4.5)$$

se observa que es circularmente simétrica y varía con ρ ; es independiente de z por lo que no hay dispersión de la potencia óptica con la propagación.

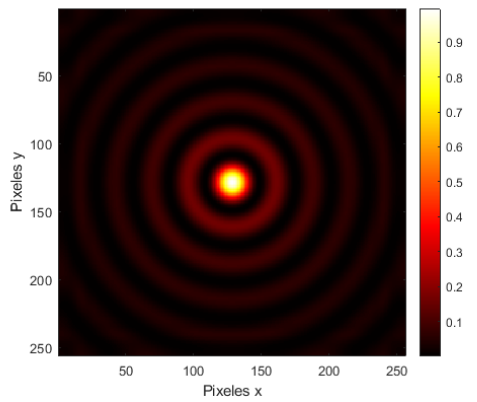
A continuación se presentan las distribuciones transversales de intensidad para la distancia de propagación, l_z , de 0 a $4z_0$, con intervalos de 0.5, quedando con los valores de z : $z = 0, z = 0,5z_0, z = z_0, z = 1,5z_0, z = 2z_0, z = 2,5z_0, z = 3z_0, z = 3,5z_0$ y $z = 4z_0$.



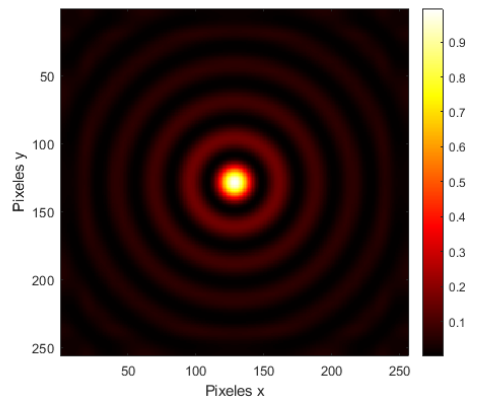
(a) $z = 0$



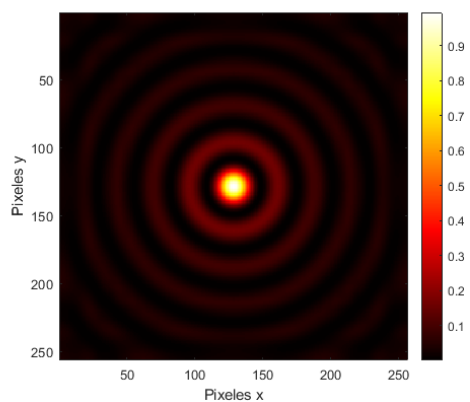
(b) $z = 0,5z_0$



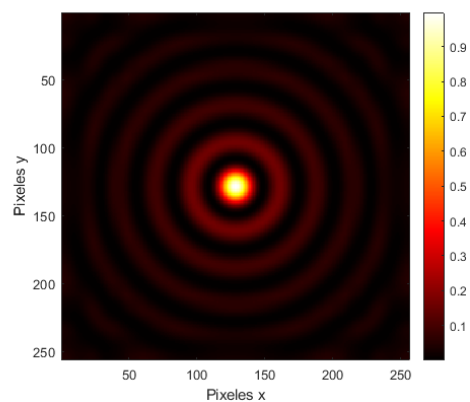
(c) $z = z_0$



(d) $z = 1,5z_0$



(e) $z = 2z_0$



(f) $z = 2,5z_0$

Puede observarse un patrón de anillos en la distribución transversal de intensidad; en un haz adifraccional ideal el número de anillos es infinito, y el haz se propaga indefinidamente sin difractarse porque hay una transferencia continua de energía desde los anillos hacia el centro

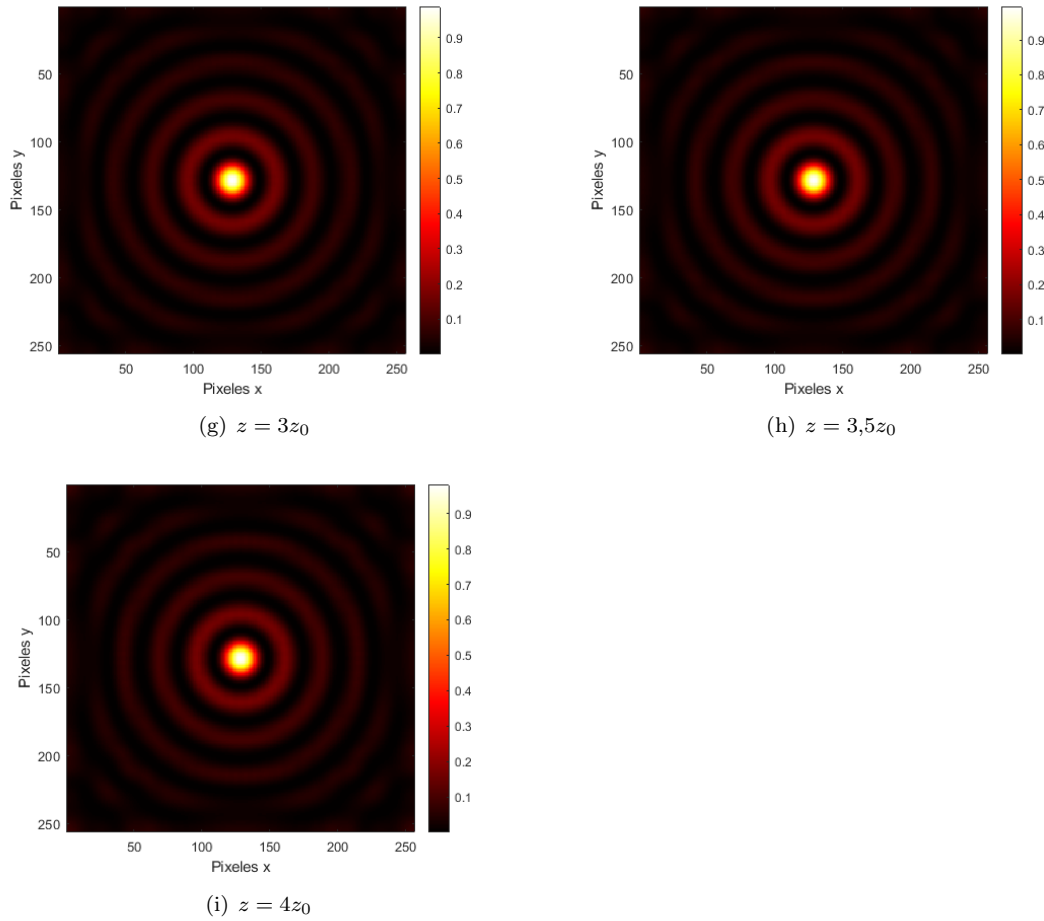
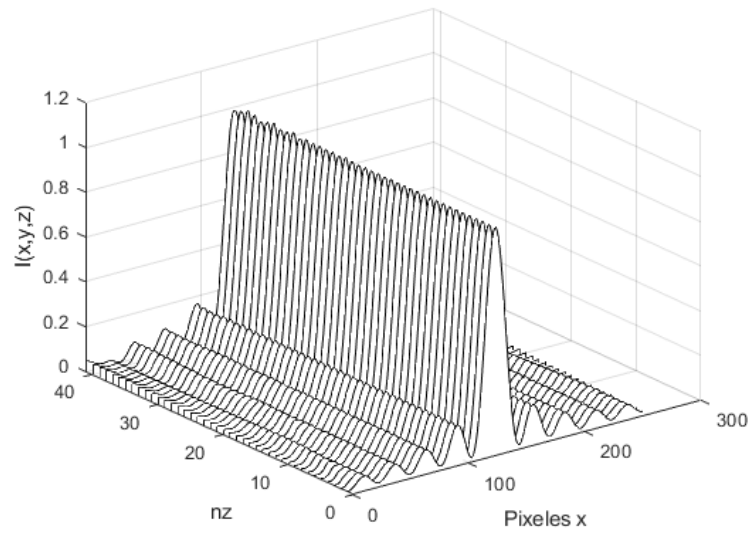


Figura 4.1: Patrones de intensidad para (a) $z = 0$; (b) $z = 0,5z_0$; (c) $z = z_0$; (d) $z = 1,5z_0$; (e) $z = 2z_0$; (f) $z = 2,5z_0$; (g) $z = 3z_0$; (h) $z = 3,5z_0$; (i) $z = 4z_0$

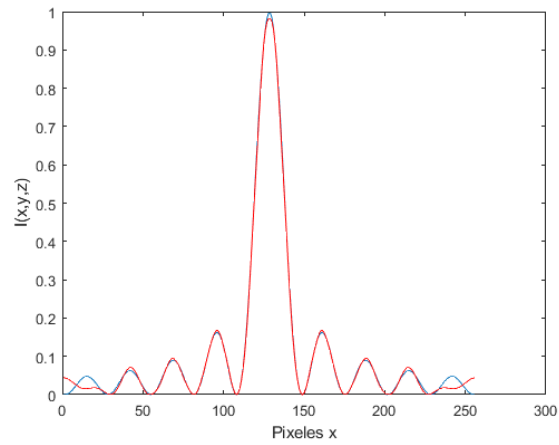
a lo largo del eje de propagación. En la práctica no es posible crear un haz con una extensión transversal infinita, y en consecuencia hay una reducción en el rango adifraccional del haz.

Los métodos principales para generar un haz Bessel son la iluminación de un diafragma anular circular, una lente cónica, o una lente esférica (con aberración esférica), con un frente de onda plano Gaussiano proveniente de un láser.

En la figura 4.2(a) se presenta la propagación del haz Bessel, mientras que en el inciso (b) se presentan los perfiles de intensidad de entrada (rojo) y de salida (azul).



(a)



(b)

Figura 4.2: Perfiles de intensidad Bessel: (a) Los perfiles de intensidad de $z = 0$ a $z = 4z_0$, con intervalos de 0.1; (b) La intensidad del haz en la entrada (azul) y salida (rojo) del sistema $z = 0$ y $z = 4z_0$.

4.2. Análisis de Resultados

En el haz Bessel la distribución de intensidad es circularmente simétrica y varía con ρ , se nota en la figura 4.1(a)-(i) la evolución del haz Bessel desde la posición $z = 0$ hasta $z = 4z_0$ en el espacio libre, se observa que no hay dispersión de la potencia óptica, indicando que la intensidad es independiente de z , y así la intensidad y el haz no varían con la distancia recorrida, a diferencia del haz Gaussiano.

La intensidad del haz de Bessel disminuye como función oscilatoria superpuesta a un lento decaimiento de ley de potencia inversa con ρ . En la figura 4.2(a)-(b), puede observarse que los perfiles de intensidad se mantiene casi iguales de $z = 0$ a $z = 4z_0$, como lo predice la teoría. Esto nos dice que el haz Bessel es un haz adifraccional.

Capítulo 5

Haces Bessel-Gauss

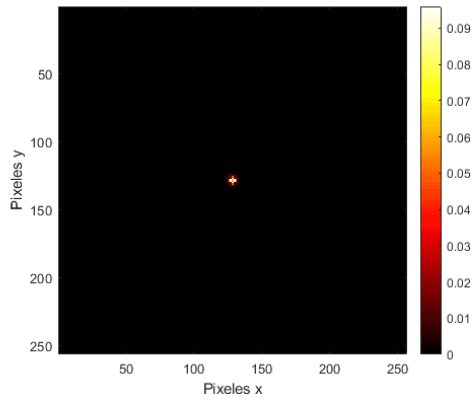
Un haz híbrido, llamado haz Bessel-Gaussiano, es un haz Bessel modulado por una función Gaussiana de la coordenada radial ρ . La función Gaussiana sirve como una función de modulación que acelera el lento decaimiento radial del haz de Bessel.

5.0.1. Distribución de Intensidad

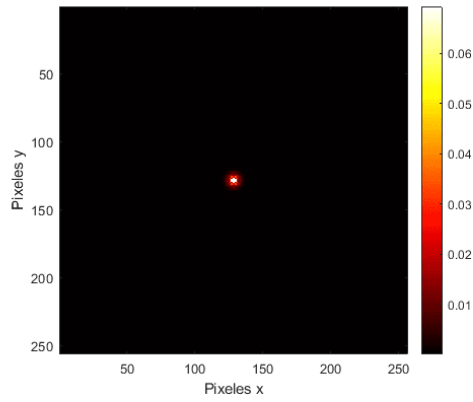
La intensidad del haz Gaussiano disminuye exponencialmente con ρ como $\exp[-2\rho^2/W^2(z)]$. En cambio, la intensidad del haz de Bessel disminuye a $J_0(k_T\rho) \approx (2/\pi k_T\rho)\cos^2(k_T\rho - \pi/4)$ que es una función oscilatoria superpuesta a un lento decaimiento de ley de potencia inversa con ρ .

En consecuencia, el ancho transversal del haz Gaussiano, $\sigma = \frac{1}{2}W(z)$ es finita, mientras que la anchura transversal del haz Bessel es infinita para todo z . Esta es una manifestación de entre el tamaño del haz y la divergencia: la anchura RMS del haz de Bessel ideal es infinita y su divergencia es nula, igual que en el caso de la onda plana ideal.

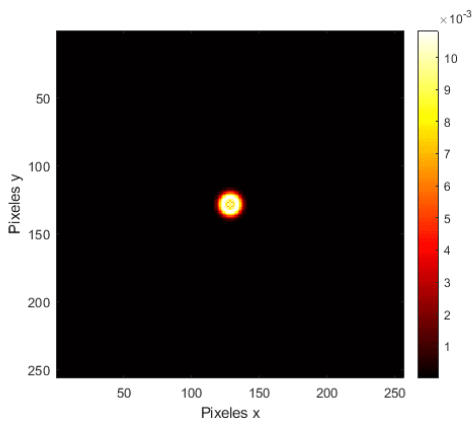
Utilizando el método numérico de paso dividido, con un algoritmo en Matlab con el cual se simula la propagación del haz Bessel-Gauss. Variamos la distancia de propagación, l_z , de 0 a 1, con intervalos de 0.1, en el caso de los haces Bessel-Gauss se modifica la escala en la que se está trabajando en comparación con los otros haces, ya que el cambio en la propagación se distorsiona después de z_0 , quedando con los valores de z : $z = 0$; $z = 0,1z_0$; $z = 0,2z_0$; $z = 0,3z_0$; $z = 0,4z_0$; $z = 0,5z_0$; $z = 0,6z_0$; $z = 0,7z_0$ y $z = z_0$, y se obtiene las siguientes distribuciones transversales de la intensidad:



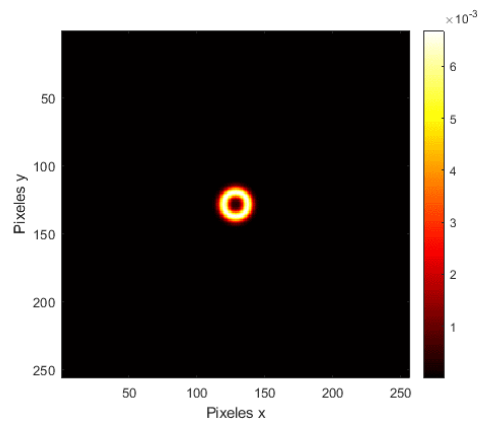
(a) $z = 0$



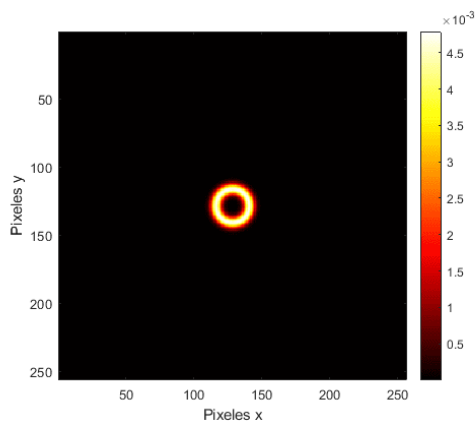
(b) $z = 0,1z_0$



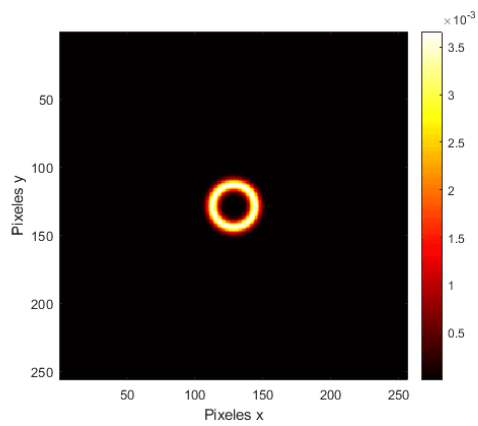
(c) $z = 0,2z_0$



(d) $z = 0,3z_0$



(e) $z = 0,4z_0$



(f) $z = 0,5z_0$

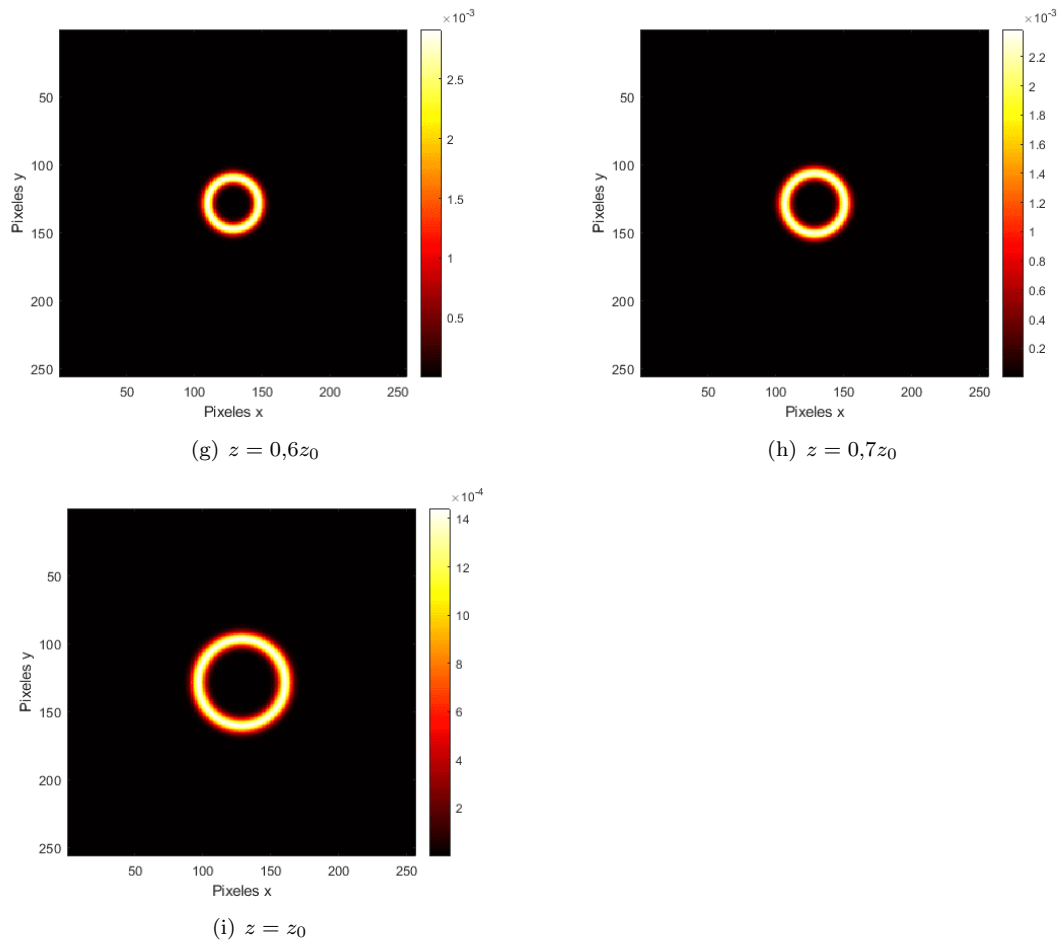
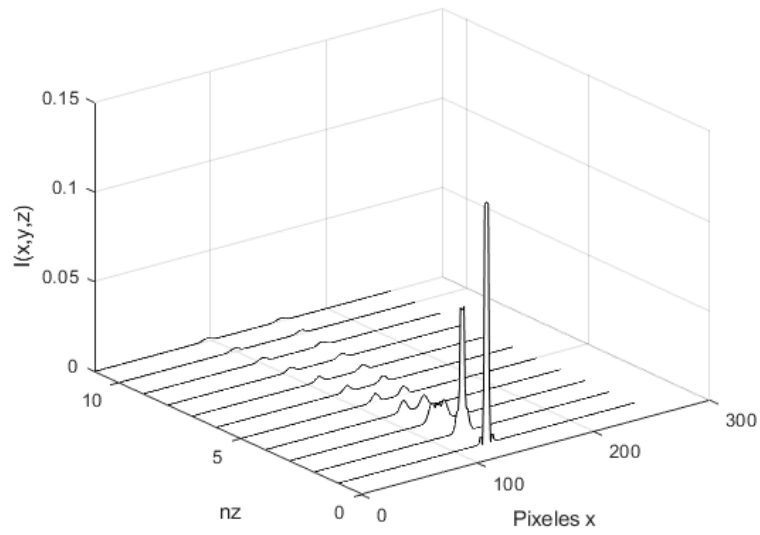
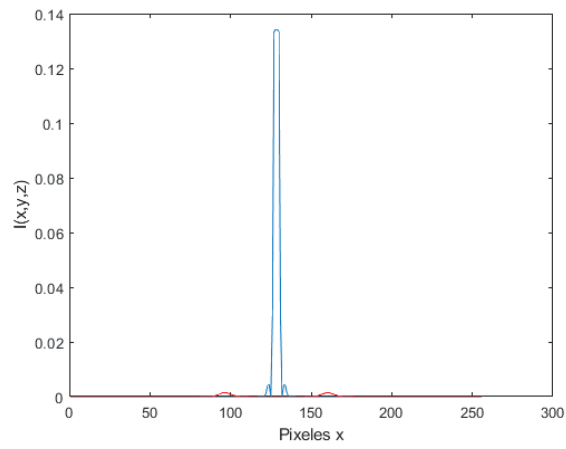


Figura 5.1: Patrones de intensidad para (a) $z = 0$; (b) $z = 0,1z_0$; (c) $z = 0,2z_0$; (d) $z = 0,3z_0$; (e) $z = 0,4z_0$; (f) $z = 0,5z_0$; (g) $z = 0,6z_0$; (h) $z = 0,7z_0$; (i) $z = z_0$



(a)



(b)

Figura 5.2: Perfiles de intensidad Bessel-Gauss: (a) Los perfiles de intensidad de $z = 0$ a $z = 4z_0$, con intervalos de 0.1; (b) La intensidad del haz en la entrada (azul) y salida (rojo) del sistema $z = 0$ y $z = z_0$

5.1. Análisis de Resultados

Los patrones de difracción mostrados en la figura 5.1(a)-(i) muestran la evolución de un haz Bessel-Gauss desde la posición $z = 0$ hasta $z = z_0$. Los patrones de difracción indican una modificación y ensanchamiento de la distribución de intensidad conforme el haz se propaga lo cual se puede apreciar en la figura 5.2(a) que muestra la propagación del haz Bessel-Gaussiano en el espacio libre. Los resultados arrojan que la distribución del haz Bessel-Gauss no se conserva conforme este se propaga, observado en la figura 5.2(b) donde se observan los perfiles de intensidad de entrada y salida del haz.

Capítulo 6

Haces Laguerre-Gaussiano

Los haces Hermite-Gaussianos forman un conjunto completo de soluciones de la ecuación paraxial de Helmholtz. Cualquier otra solución se puede escribir como una superposición de estos haces. Pero esta familia no es la única. Otro conjunto completo de soluciones, conocido como haces Laguerre-Gaussianos, se puede obtener escribiendo la ecuación de Helmholtz paraxial en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) y utilizando la separación de variables en ρ y ϕ en lugar de x e y . El haz Laguerre-Gaussiano de orden más bajo es el haz Gaussiano.

La amplitud compleja del haz Laguerre-Gaussiano, denotado LG_{lm} , puede expresarse como

$$U_{l,m} = A_{l,m} \left[\frac{W_0}{W(z)} \right] \left(\frac{\rho}{W(z)} \right)^l L_m^l \left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right) \exp \left(\frac{-\rho^2}{W^2(z)} \right) \exp \left[-ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} \mp il\phi + i(l+2m+1)\zeta(z) \right] \quad (6.1)$$

donde $L_m^l(\cdot)$ representan polinomios de Laguerre generalizados, y donde $W(z), R(z), \zeta(z)$ y W_0 vienen dados por (3.8)-(3.10). Los enteros $l = 0, 1, 2, \dots$ y $m = 0, 1, 2, \dots$ son índices azimutales y radiales, respectivamente. El haz Gaussiano de Laguerre de orden inferior LG_{00} al igual que el haz Hermite-Gaussiano de orden inferior HG_{00} es el haz Gaussiano simple.

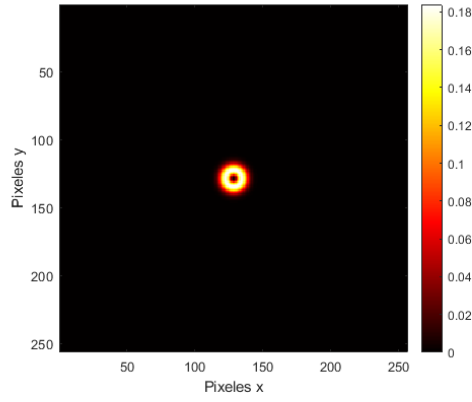
Los haces de cualquier orden $l \neq 0$ son también toroidales cuando $m = 0$, y alcanzan sus valores máximos en un radio $\sqrt{l/2}W(z)$. Todos los haces con $l \neq 0$ tienen intensidad nula en el centro del haz ($\rho = 0$).

6.0.1. Distribución de Intensidad

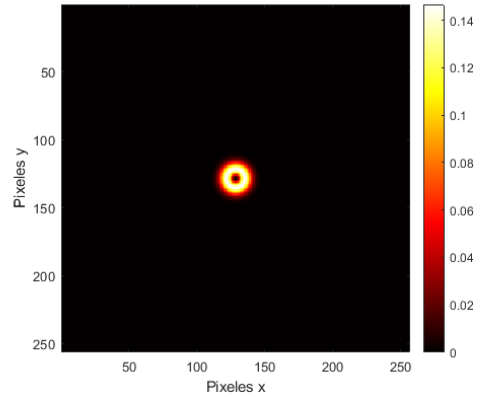
La intensidad del haz Laguerre-Gaussiano, es proporcional al modulo del cuadrado de (6.2), $I(\rho, z) = |U_{l,m}|^2$, es función de ρ y de z , pero no de ϕ , por lo que es circularmente simétrica. La distribución transversal de la intensidad del haz LG_{10} adopta una forma toroidal. Su valor máximo se alcanza a un radio que aumenta con la distancia z desde el centro del haz (como en el caso del haz gaussiano).

$$I(\rho, z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)} \right]^2 \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{W(z)} \right)^{2l} \left[L_m^l \left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right) \right]^2 \exp \left(\frac{-2\rho^2}{W^2(z)} \right) \quad (6.2)$$

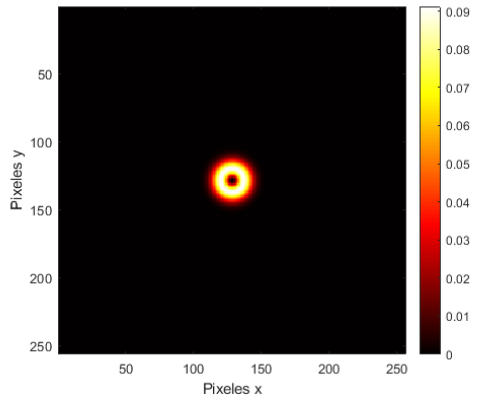
Utilizando el método numérico de paso dividido, con un algoritmo en Matlab con el cual se simula la propagación del haz Laguerre-Gauss. Utilizamos $l = 1$ y $m = 0$ y variamos la distancia de propagación, l_z , de 0 a 4, con intervalos de 0.5, quedando con los valores de z : $z = 0, z = 0,5z_0, z = z_0, z = 1,5z_0, z = 2z_0, z = 2,5z_0, z = 3z_0, z = 3,5z_0$ y $z = 4z_0$, y se obtienen las siguientes distribuciones transversales de la intensidad:



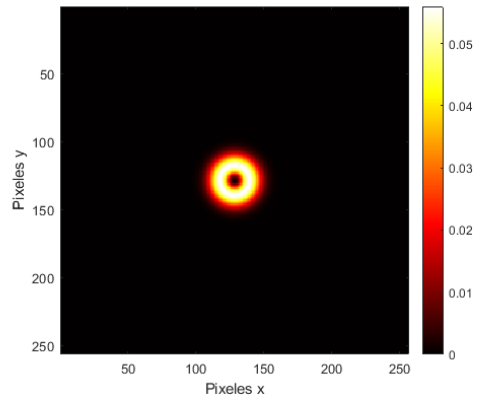
(a) $z = 0$



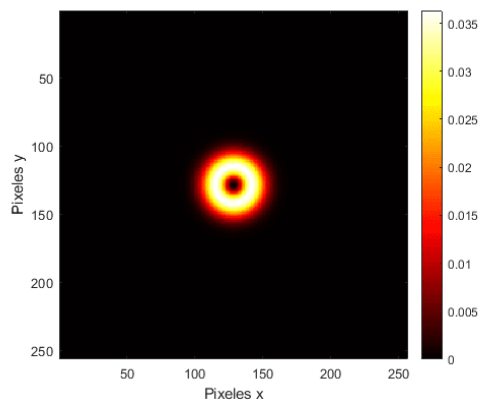
(b) $z = 0,5z_0$



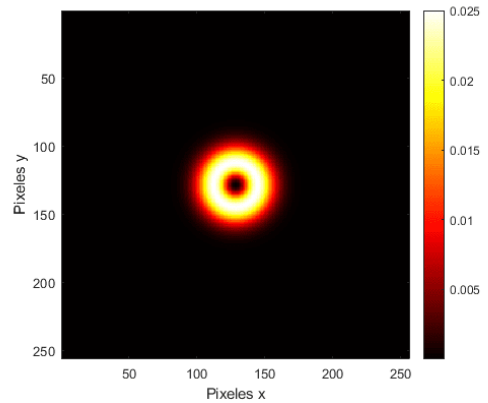
(c) $z = z_0$



(d) $z = 1,5z_0$



(e) $z = 2z_0$



(f) $z = 2,5z_0$

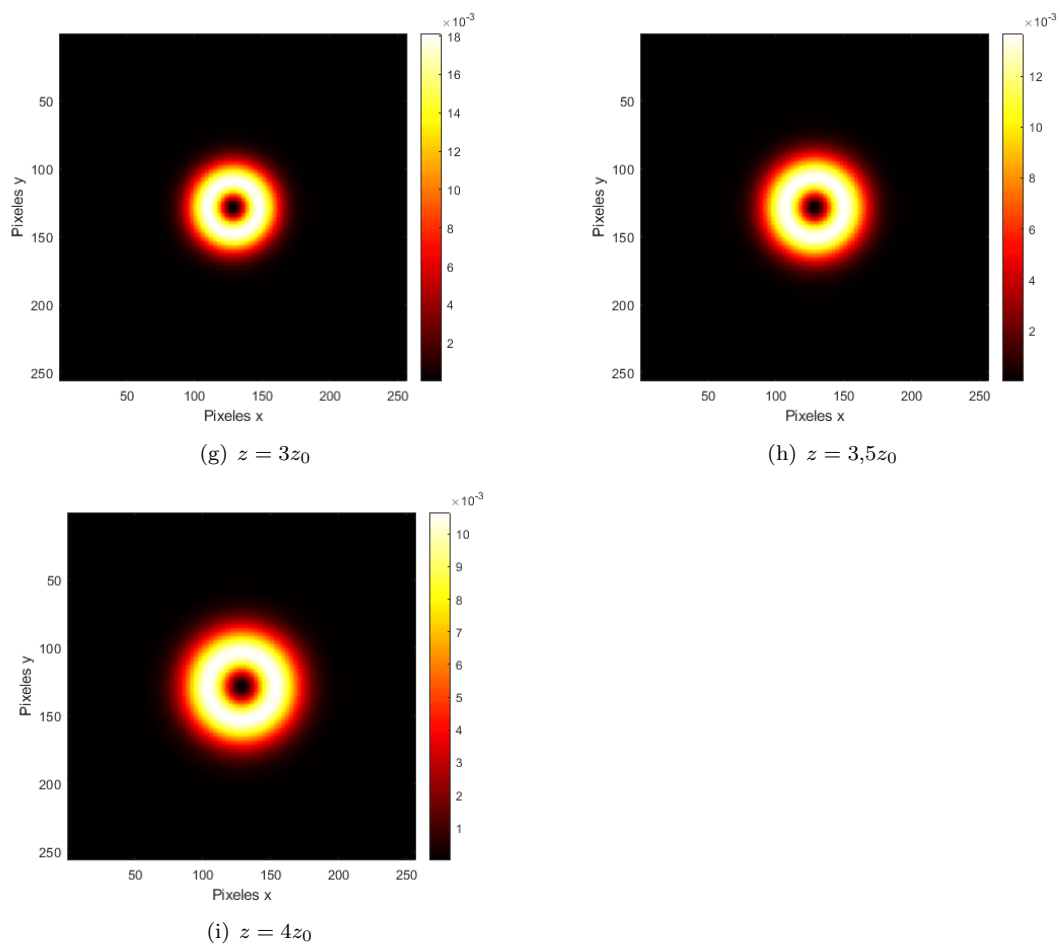
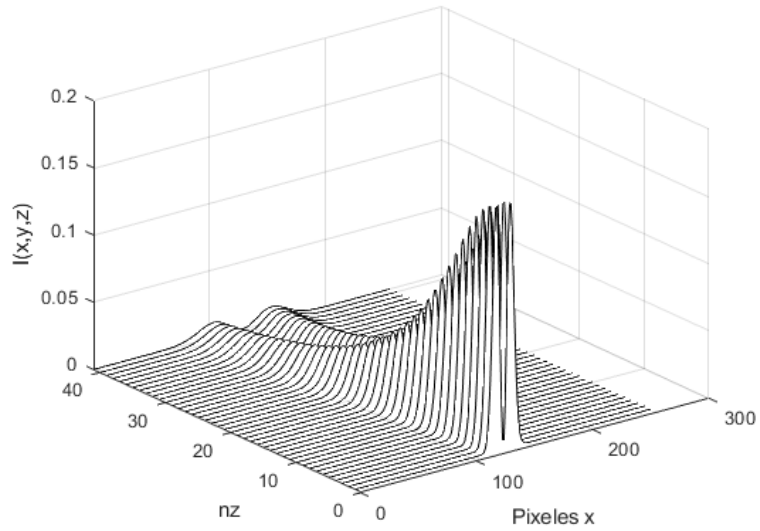
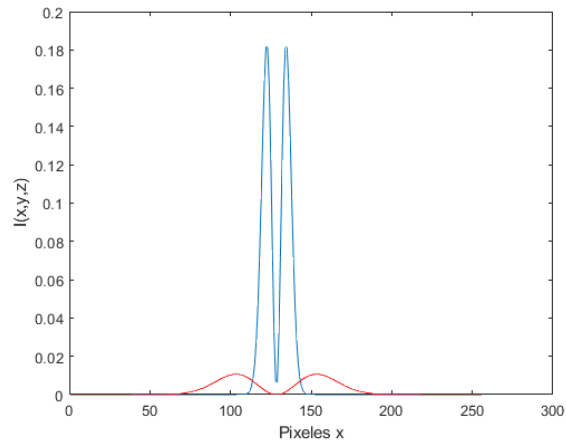


Figura 6.1: Patrones de intensidad para (a) $z = 0$; (b) $z = 0,5z_0$; (c) $z = z_0$; (d) $z = 1,5z_0$; (e) $z = 2z_0$; (f) $z = 2,5z_0$; (g) $z = 3z_0$; (h) $z = 3,5z_0$; (i) $z = 4z_0$



(a)



(b)

Figura 6.2: Perfiles de intensidad Laguerre-Gauss: (a) Los perfiles de intensidad de $z = 0$ a $z = 4z_0$, con intervalos de 0.1; (b) La intensidad del haz en la entrada (azul) y salida (rojo) del sistema $z = 0$ y $z = 4z_0$

6.1. Análisis de Resultados

El haz Laguerre-Gaussiano muestra una intensidad circularmente simétrica, el valor máximo se alcanza a un radio que aumenta con la distancia z desde el centro del haz. En los patrones de difracción mostrados en la figura 6.1(a)-(i) se nota la evolución del haz Laguerre-Gaussiano desde la posición $z = 0$ a $z = 4z_0$, también se puede observar que al trabajar los haces con $l \neq 0$ su intensidad es nula en el centro del haz.

Los patrones de intensidad muestran un ensanchamiento de la distribución de intensidad conforme el haz se propaga. Se nota en los resultados que la distribución del haz se conserva conforme este se propaga. En la figura 6.2(b) se observan los perfiles de intensidad de entrada y salida del haz Laguerre-Gaussiano, y se ve que el perfil de salida mantiene la forma del de entrada pero presenta un ensanchamiento respecto a este.

Comparativo

Se comparan las propiedades de los haces Gaussianos, Bessel, Bessel-Gauss y Laguerre-Gauss cuando estos se propagan en el espacio libre con los resultados que se obtuvieron. Comenzaremos comparando el haz de Bessel con el haz de Gaussiano. En ambos caso la intensidad varía con ρ . Podemos notar que en el caso de los haces Gaussianos su intensidad decrece con ρ y en los haces Bessel la distribución de intensidad es circularmente simétrica y varía con ρ . Fig. (6.3)

Los patrones de difracción del haz Gauss indican un ensanchamiento de la distribución de intensidad conforme el haz se propaga, en el haz Bessel no hay dispersión de la potencia óptica, indicando que la intensidad es independiente de z , al contrario del haz Gauss.

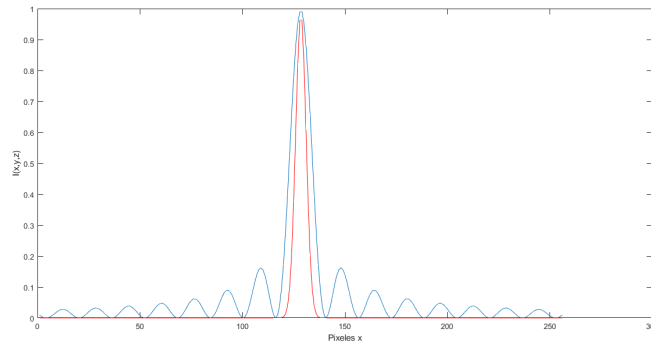


Figura 6.3: Comparativo de los haces Gaussiano (rojo) y Bessel (azul).

El haz Bessel-Gaussiano, es un haz Bessel modulado por una función Gaussiana de la coordenada radial ρ . Los haces Gaussianos y Bessel-Gaussiano tienen en común su intensidad que decrece con el incremento de ρ .

Notamos que los haces Gaussiano, Bessel-Gauss y Laguerre-Gauss son haces que se difractan, sus patrones de difracción indican un ensanchamiento de la distribución de intensidad. En los haces Gaussiano y Laguerre-Gauss su distribución de haz se conserva conforme este se propaga, al su perfil de salida conservar su forma de entrada. Podemos ver un comparativo de las intensidades de entrada y salida de los haces en la fig. (6.4)

Con los haces Laguerre-Gaussiano y Bessel su distribución de intensidad es circularmente simétrica, pero en el caso del Bessel esta varía con ρ a diferencia del Laguerre-Gauss que aumenta con la distancia z . Fig. (6.5) vemos la intensidad de los ha

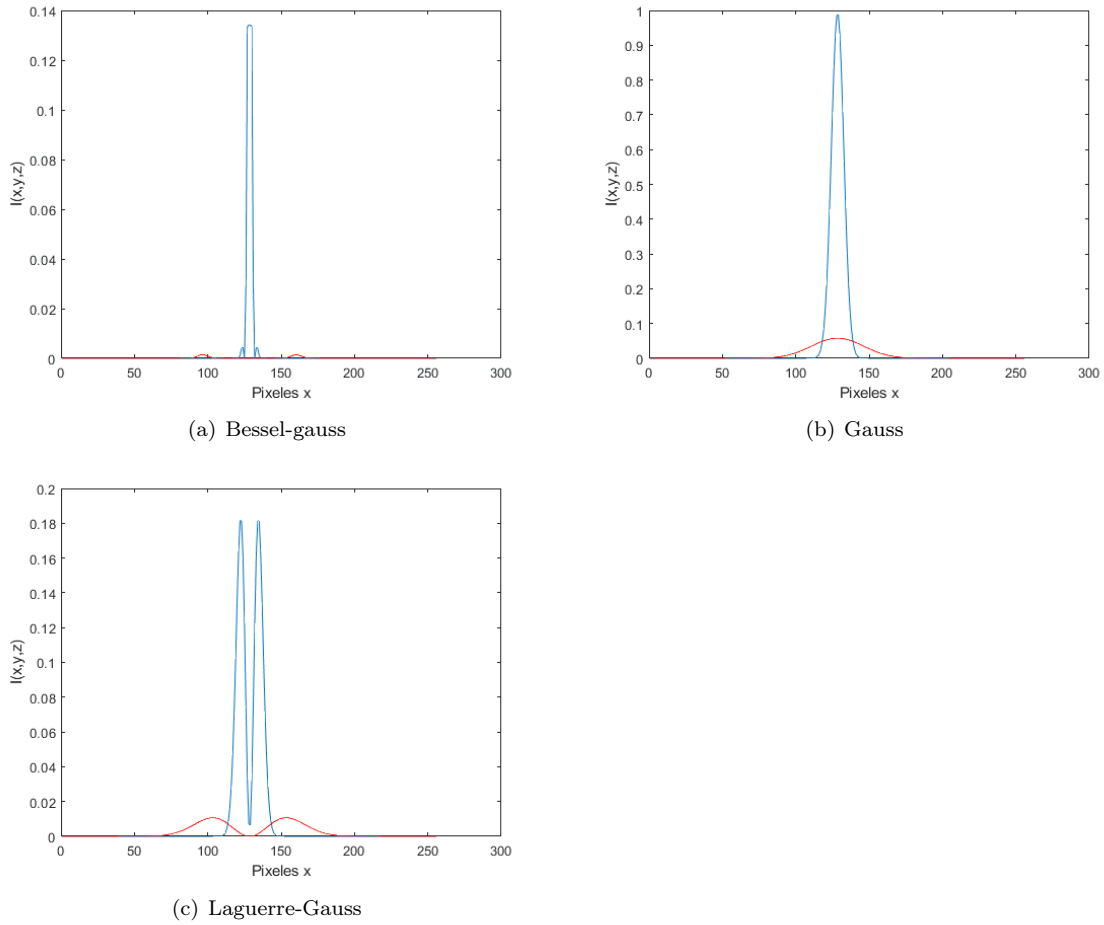


Figura 6.4: Comparativo de la intensidad del haz en la entrada (azul) y salida (rojo) del sistema de los haces Gaussiano, Bessel-Gauss y Laguerre-Gauss.

Se nota que los haces Bessel no tienen tantas características en común con el resto de haces que se trabajaron en esta tesis, observamos que en estos haces no hay dispersión de la potencia óptica, indicando que la intensidad es independiente de z , y con esto se entiende que su intensidad y el haz no varían con la distancia recorrida, haciéndolo un haz que no se difracta, conocido como haz adifraccional. Esto se observa en la Fig. (6.6)

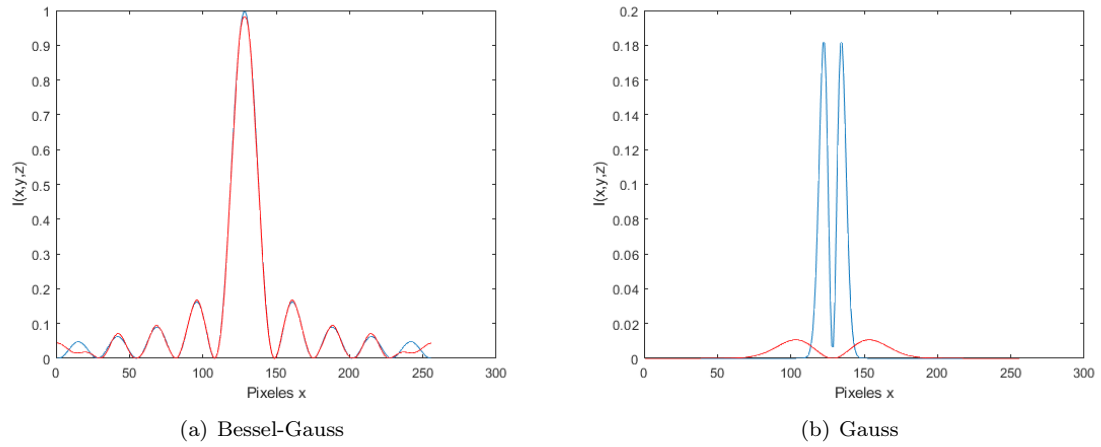


Figura 6.5: Comparativo de la intensidad del haz en la entrada y salida del sistema de los haces Laguerre-Gauss y Bessel.

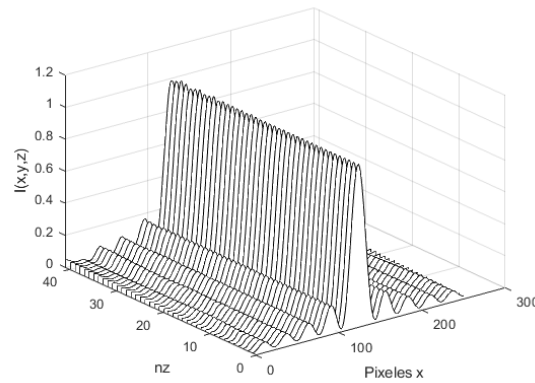


Figura 6.6: Perfiles de intensidad del haz Bessel Propagación del haz de $z = 0$ a $z = 4z_0$, con intervalos de 0,1.

Conclusiones

En este trabajo se empleo el método numérico de Split-Step para analizar diferentes soluciones a la ecuación paraxial de Helmholtz, gracias a que este puede ser usado para analizar la propagación de campos ópticos en medios lineales y no lineales, haciéndolo un método mas sencillo de usar en este trabajo de tesis. Este método se divide en dos partes cada paso, viendo los efectos de difracción en una y en la otra los no lineales.

Comparando los haces que se estudiaron en este trabajo concluimos que los haces Gaussianos, Laguerre-Gaussiano y Bessel-Gaussiano son haces que se difractan, teniendo en común que sus patrones de difracción indican un ensanchamiento de la distribución de intensidad conforme el haz se propaga, en el caso de los haces Gaussiano y Laguerre-Gauss su distribución del haz se conserva conforme este se propaga igual y esto lo vemos por que su perfil de salida conserva su forma de entrada. Los haces Gaussianos y Bessel-Gaussiano también tienen en común que su intensidad decrece con el incremento de ρ . Con los haces Laguerre-Gaussiano y Bessel su distribución de intensidad es circularmente simétrica, pero en el caso del Bessel esta varia con ρ a diferencia del Laguerre-Gauss que que aumenta con la distancia z . En el caso de los haces Bessel concluimos que en estos haces no hay dispersión de la potencia óptica, indicando que la intensidad es independiente de z , y con esto se entiende que su intensidad y el haz no varían con la distancia recorrida, haciéndolo un haz que no se difracta, conocido como haz adifraccional.

Bibliografía

- [1] Hecht, E. (s.f.). Optics (Cuarta ed.). Addison Wesley.
- [2] Maiman T. H. Stimulated optical radiation in ruby. Nature, 87, 943, 1960.
- [3] Boyd, R. W. (2007). Nonlinear Optics (Tercera ed.). Rochester.
- [4] H. Kogelnik and T. Li. Laser beams and resonators. Appl. Opt., 5,1550- 1556, 1966.
- [5] F. L Pedrotti and et al. Introduction to Optics. Second edition, 1993.
- [6] Saleh, B. E. (1991). Fundamentals of Photonics. John Wiley & Sons, Inc.
- [7] Ting-Chung Poon and Taegeun Kim. Engineering Optics With MATLAB.
- [8] Mendoza Hernández, J. (2009). Estudio de la Generación de Haces Bessel. [Tesis de licenciatura, Colegio de Física de la Benemerita Universidad Autonoma de Puebla]
- [9] J. Durnin, “Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory,”J.Opt. Soc. Am. A 4,651 (1987).
- [10] J. Durnin, J.J. Miceli, J. H. Eberly, “Diffraction-Free Beams,”Phys. Rev. Lett. 58,1499 (1987).
- [11] Anthony Carpi, Ph.D., Anne E. Egger, Ph.D. “Comparación en la Investigacion Científica” Visionlearning Vol. POS-1 (5),
- [12] Rincón Campeche, I. Generación de haces Bessel-Gauss con arreglo simple para doble modulación de fase [Tesis de maestría, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica.]
- [13] Ren, Y.-X., He, H., Tang, H., & Y. Wong, K. K. (2021). Non-Diffracting Light Wave: Fundamentals and Biomedical Applications. Frontiers in Physics.
- [14] Bouchal, Z. (2003). Nondiffracting optical beams: physical properties, experiments, and applications. Czechoslovak Journal of Physics, 537–624.
- [15] Agrawal, G. P. (2013). Nonlinear Fiber Optics. Academic Press.