Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Físico Matemáticas

Puntos aislados en el espectro de una relación lineal

T E S I S

que para obtener el grado de:

Maestro en ciencias matemáticas

presenta: Ivan Moises Roque Tlatelpa

Director de tesis:

DR. Slavisa Djordjevic

Puebla, Puebla, 9 de noviembre de 2021

Agradecimientos

Introducción

La teoría de relaciones lineales empezó a cobrar gran interés en los últimos años, pues el desarrollo de resultados ha contribuido de manera significativa a las ecuaciones diferenciales, así como en otras áreas de las matemáticas y de la ciencia en general.
El concepto de relación lineal fue introducido en el Análisis Funcional por J. Von Neumann ([10]) debido a la necesidad de considerar operadores diferenciales no densamente definidos.
Posteriormente, en *El tratado de relaciones diferenciales parciales*, M. Gromov ([5]) seguiría desarrollando las nociones expuestas por Neumann. Así mismo, A. Favini y A. Yagi ([4]) recurrían a la naciente teoría para demostrar que es posible aplicar métodos multivaluados a las soluciones de ecuaciones diferenciales.
En este trabajo de tesis se estudian a profundidad los resultados básicos de la teoría de relaciones lineales. Mostrando especial interés en la teoría espectral, ya que permite acceder al estudio de otras nociones como lo son los puntos aislados del espectro de una relación lineal.
El Capítulo 1 consta de 5 secciones. En la primera sección se introduce el concepto de relación lineal. El estudio de este concepto y de nociones tales como dominio, núcleo, imagen, gráfica y multivalor de una relación lineal, así como de propiedades y resultados relacionadas con estas, permiten observar que uno de los principales objetivos de las relaciones lineales es generalizar a los operadores lineales.

En la segunda sección se estudian las nociones de ascenso y descenso de una relación lineal ([9]). Se observa que algunos resultados clásicos de la teoría de operadores se cumplen también para relaciones lineales bajo ciertas condiciones adicionales. Por ejemplo, se prueba que para $A \in LR(X)$, con $R_c(A) = \{0\}$ y ascenso finito y descenso finito q, $X = ImA^q \oplus KerA^q$.

La tercera sección está dedicada a exhibir y analizar los conceptos de continuidad y acotación para relaciones lineales. Nociones de suma importancia a lo largo de todo el escrito, principalmente al plantear la teoría espectral para relaciones lineales.

En la cuarta sección se estudian las relaciones lineales cerradas. En conjunto con las nociones de continuidad y acotación, se establece un Teorema de la aplicación abierta para relaciones lineales.

En la quinta sección se procede a analizar los conceptos de parte quasinilpotente y núcleo analítico para relaciones lineales ([7], [8]). Nuevamente se pueden observar resultados semejantes al caso de operadores lineales, pero bajo condiciones especiales.

El Capítulo 2 se divide en 3 secciones. La primera sección está dedicada a estudiar la teoría espectral para relaciones lineales. En dicha sección, se definen los conceptos de espectro, conjunto resolvente y función resolvente. También se analiza una correlación entre pseudoresolventes y relaciones lineales cerradas; esto permite hablar sobre subespacio invariante y la resolvente de la restricción de una relación lineal en un espacio cerrado, todo desde el sentido de la resolvente ([2]).

En la segunda sección se aborda el estudio de los puntos aislados del espectro de una relación lineal por medio de la parte quasinilporte y núcleo analítico. La atención se centra en el estudio de una caracterización de los puntos aislados y un resultado de descomposición del espacio ([7], [8]).

Para la última sección se introduce el concepto de polo de la resolvente. Con dicho concepto se extiende el análisis de los puntos aislados en conjunto con las nociones de ascenso y descenso de una relación lineal. Esto permite estudiar resultados de descomposición del espacio en cuestión, así como establecer una correlación entre puntos aislados en el espectro de una relación y polos de la resolvente.

Índice general

Capítulo 1

Relaciones lineales

El presente capítulo está dedicado a estudiar el concepto de relación lineal. El objetivo primordial es estudiar resultados preliminares derivados de este objeto. De igual manera se analizarán otros conceptos de suma importancia como lo son las relaciones lineales cerradas; las nociones de ascenso y descenso; continuidad y acotación; parte quasinilpotente y núcleo analítico de una relación lineal.

Se usarán X, Y, $Z, \ldots$ para denotar a los espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$.

1.1. Relaciones lineales

Una relación R entre dos conjuntos U y V es un subconjunto de $U \times V$ ([3]). El concepto de relación forma parte de la inspiración para construir el concepto de relación lineal.

Definición 1.1.1. Una relación lineal entre X e Y es un subespacio vectorial A de $X \times Y$.
La clase de todas las relaciones lineales de X en Y se denotará por $LR(X,Y)$ y $LR(X,X) := LR(X)$.

Como es usual, el dominio y la imagen de $A \in LR(X,Y)$ están dados por

$$Dom(A) := \{x \in X : \exists y \in Y \text{ tal que } (x, y) \in A\},$$

$$ImA := \{y \in Y : \exists\, x \in X, (x, y) \in A\},$$

respectivamente.

Definición 1.1.2. Si $x \notin Dom(A)$, se define $Ax := \varnothing$ y si $x \in Dom(A)$,

$$Ax = \{y \in Y : (x, y) \in A\} \neq \varnothing.$$

Así, el dominio de A se puede escribir como

$$Dom(A) = \{x \in X : Ax \neq \varnothing\}.$$

Es importante mencionar que, por la Definición 1.1.2, si $A \in LR(X, Y)$ y $x \in Dom(A)$, entonces Ax es un conjunto. De esta manera, para cualesquiera $x, y \in Dom(A)$, $Ax + Ay$ es la suma usual de conjuntos, esto es,

$$\begin{aligned} Ax + Ay &= \{w + z : w \in Ax,\ z \in Ay\} \\ &= \{w + z : (x, w), (y, z) \in A\} \end{aligned}$$

De forma similar, para cualquier $x \in Dom(A)$ y cualquier escalar no nulo α,

$$\alpha Ax = \{\alpha w : (x, w) \in A\}.$$

Definición 1.1.3. Si $A \in LR(X, Y)$, $A^{-1} \in LR(Y, X)$ está determinado por

$$A^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in A\}.$$

A^{-1} es llamada la inversa de la relación A.

Definición 1.1.4. Sea $A \in LR(X, Y)$. El conjunto

$$A(0) = \{y \in Im(A) : (0, y) \in A\}$$

es llamado el multivalor de A.

Definición 1.1.5. Se $A \in LR(X,Y)$, se define el núcleo de A por $KerA := A^{-1}(0) = \{x \in Dom(A) : (x,0) \in A\}$.

Proposición 1.1.1. *Sea $A \in LR(X,Y)$. Entonces*

(i) *$Dom(A)$ es subespacio de X,*

(ii) *ImA es subespacio de Y,*

(iii) *$A(0)$ es subespacio de Y,*

(iv) *$KerA$ es subespacio de X.*

Demostración.

(i) Es claro que $Dom(A) \neq \varnothing$ ya que $(0,0) \in A$ y de esto se sigue que $0 \in Dom(A)$.
Sean $x, y \in Dom(A)$ y sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces existen $z, w \in Y$ tales que $(x,z), (y,w) \in A$. Puesto que A es subespacio de $X \times Y$, $(x+y, z+w) \in A$, con $z+w \in Y$, luego $x+y \in Dom(A)$.
Por otro lado, también se tiene que $\alpha(x,z) = (\alpha x, \alpha z) \in A$, con $\alpha z \in Y$, luego $\alpha x \in Dom(A)$.
Por lo tanto, $Dom(A)$ es subespacio de X.

(ii) Para probar que ImA es subespacio de Y, se procede de forma análoga a (i).

(iii) Como A es un subespacio vectorial de $X \times Y$, entonces $(0,0) \in A$, así que $0 \in A(0)$, es decir, $A(0)$ no es vacío.
Ahora, sean $y_1, y_2 \in A(0)$. Entonces $(0,y_1), (0,y_2) \in A$ y por la linealidad de A también se tiene que $(0,y_1) + (0,y_2) = (0, y_1 + y_2) \in A$, luego $y_1 + y_2 \in A(0)$.
Por otro lado, si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $y \in A(0)$, entonces $(0,y) \in A$; nuevamente por la linealidad, $\lambda(0,y) = (0, \lambda y) \in A$, lo que implica que $\lambda y \in A(0)$.

(iv) Es claro. $\square$

Nota 1.1.1. *Es claro que para $A \in LR(X, Y)$,*

$$ImA = \bigcup \{Ax : x \in Dom(A)\}.$$

El siguiente ejemplo ilustra de manera más clara el concepto de relación lineal ([3]).

Ejemplo 1.1.1. *Sean $X = Y = \mathbb{R}^2$ y considérese el operador matricial*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, para $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in X$ arbitrario, $Ax = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, y aplicando la relación inversa, se tiene $A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + C$, donde C es definido como

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 \in X \right\}.$$

Entonces la relación inversa A^{-1}, se define de la siguiente forma:

$$A^{-1} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se verá que en efecto A^{-1} es una relación lineal. Es claro que $A^{-1} \neq \varnothing$. Además, si $\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) \in A^{-1}$, entonces

$$\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} y_1 + a_1 \\ y_2 + a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ x_2 + b_2 \end{pmatrix} \right),$$

de modo que $\begin{pmatrix} y_1 + a_1 \\ y_2 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De esto se sigue que

$$\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) \in A^{-1}.$$

Así mismo, sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \in A^{-1}$. Entonces

$$\alpha \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\alpha \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} \right),$$

como $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *entonces* $\begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *lo que implica que* $\alpha \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \in A^{-1}$.
Por lo tanto, $A^{-1} \in LR(\mathbb{R}^2)$.

Proposición 1.1.2. *Si* $A \in LR(X,Y)$, *entonces para cualesquiera* $x, y \in Dom(A)$ *y cualquier* $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $Ax + Ay = A(x+y)$ *y* $\alpha Ax = A(\alpha x)$.

Demostración. Sean $x, y \in Dom(A)$ y sea $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
Primero se verá que $Ax + Ay = A(x+y)$. Sea $t \in Ax + Ay$. Entonces existen $w \in Ax$ y $z \in Ay$ tales que $t = w + z$ y $(x,w), (y,z) \in A$. Puesto que A es una relación lineal, entonces $(x,w) + (y,z) = (x+y, w+z) \in A$, esto es, $t = w + z \in A(x+y)$.
Recíprocamente, sea $p \in A(x+y)$. Entonces $(x+y, p) \in A$. Considérese $q \in Ax$, de manera que $(x+y,p) = (x,q) + (y, p-q) \in A$, lo que implica que $(y, p-q) \in A$, es decir, $p - q \in Ay$, luego $p \in q + Ay \subseteq Ax + Ay$. Se concluye que $Ax + Ay = A(x+y)$.
Ahora se probará que $\alpha Ax = A(\alpha x)$. Sea $w \in \alpha Ax$. entonces existe $z \in Y$ tal que $w = \alpha z$, con $(x,z) \in A$. Así que $\alpha(x,z) = (\alpha x, \alpha z) = (\alpha x, w) \in A$. Esto es, $w \in A(\alpha x)$.
Recíprocamente, sea $z \in A(\alpha x)$. Entonces $(\alpha x, z) \in A$. Sea $w \in Ax$, de tal forma que $(x, \alpha^{-1} z) \in A$, esto es, $\alpha^{-1} z \in Ax$, de lo que se sigue, $z \in \alpha Ax$. Se concluye que $\alpha Ax = A(\alpha x)$. □

En [4], [7], [8], se consideran a las relaciones lineales como aplicaciones multivaluadas que tienen la propiedad de la linealidad.
Para entender dicha terminología, nótese que al considerar una relación A entre los conjuntos X e Y, se puede definir una aplicación

$$\widehat{A} : Dom(A) \to 2^Y \setminus \{\varnothing\} \tag{1.1}$$

por $\widehat{A}x := Ax$, para cada $x \in Dom(A)$.
Más aún, a cada relación lineal se le puede asignar una aplicación como en (1.1); dicha aplicación tendrá la propiedad de linealidad.

El siguiente resultado establece una íntima correlación entre relaciones lineales y aplicaciones del tipo (1.1).

Proposición 1.1.3. *$A \in LR(X,Y)$ si y sólo si $\widehat{A}$ es lineal, esto es, $\widehat{A}(x+y) = \widehat{A}x + \widehat{A}y$ y $\widehat{A}(\alpha x) = \alpha \widehat{A}x$, para cualesquiera $x, y \in Dom(A)$ y $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que $A \in LR(X,Y)$. Sean $x, y \in Dom(A)$ y sean $z \in Ax$, $w \in Ay$.
Puesto que $Dom(A)$ es un subespacio de X, $(x+y, z+w) = (x,z) + (y,w) \in A$, lo que implica que $z + w \in \widehat{A}(x+y)$, es decir, $\widehat{A}x + \widehat{A}y \subseteq \widehat{A}(x+y)$.
Recíprocamente, sean $z \in \widehat{A}(x+y)$ y $w \in \widehat{A}x$ arbitrario. Entonces $(x+y, z) = (x,w) + (y, z-w) \in A$, donde $z - w \in Ay = \widehat{A}y$. Así, $z \in w + \widehat{A}y \subseteq \widehat{A}x + \widehat{A}y$ y por lo tanto, $\widehat{A}(x+y) \subseteq \widehat{A}x + \widehat{A}y$.
Por otro lado, sea $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Si $z \in \widehat{A}x$, entonces $\alpha(x,z) = (\alpha x, \alpha z) \in A$, luego $\alpha z \in \widehat{A}(\alpha x)$, donde $\alpha z \in \alpha \widehat{A}x$, así, $\alpha \widehat{A}x \subseteq \widehat{A}(\alpha x)$.
Recíprocamente, sea $w \in \widehat{A}(\alpha x)$. Entonces $(x, \alpha^{-1}w) \in A$, con $\alpha^{-1}w \in \widehat{A}x$, es decir, $w \in \alpha \widehat{A}x$. De esto se sigue que $\widehat{A}(\alpha x) \subseteq \alpha \widehat{A}x$. Se concluye que $\widehat{A}$ es lineal.

($\Leftarrow$) Supóngase que $\widehat{A}$ es lineal.
Entonces $0 \in \widehat{A}(0)$, con $0 \in Dom(A)$ y por tanto, $(0,0) \in A$.
Ahora, sean $(x,y), (z,w) \in A$ y $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Entonces $y \in \widehat{A}x$ y $w \in \widehat{A}z$, lo que implica que $y + w \in \widehat{A}x + \widehat{A}z = \widehat{A}(x+z)$ y así, $(x,y) + (z,w) = (x+z, y+w) \in A$.
Por otro lado, si $y \in \widehat{A}x$, entonces $\alpha y \in \alpha \widehat{A}x = \widehat{A}(\alpha x)$ y por lo tanto, $\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y) \in A$. $\square$

En la demostración de la Proposición 1.1.3 se observa que cada $A \in LR(X,Y)$ es la gráfica de una aplicación $\widehat{A} : Dom(A) \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ definida por $\widehat{A}x := Ax$, para cada $x \in Dom(A)$. Dicha aplicación $\widehat{A}$ se identifica con su gráfica A, de modo que se puede

trabajar con ambas de forma indistinta.
Sin embargo, para evitar confusiones, en lo sucesivo $\widehat{A}$ será denotado por A y por lo tanto, $Gr(A)$ denotará la gráfica de la aplicación $\widehat{A}$, además de que dicha notación se usará para referirse a la relación lineal vista como subespacio de $X \times Y$.
De esta manera, $Gr(A)$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$Gr(A) := \{(x, y) \in X \times Y : x \in Dom(A),\ y \in Ax\}.$$

Una relación lineal A también es llamada operador lineal multivaluado. Si A aplica puntos de su dominio en conjuntos singulares, entonces se le llama aplicación lineal univaluada o simplemente operador lineal.

En el Ejemplo 1.1.1, se observa que el operador matricial A no es invertible ya que $det(A) = 0$. En general, dado un operador lineal no invertible, se puede obtener una relación lineal encontrando la relación inversa del operador.
Por ejemplo, para un operador lineal $A : X \to X$ tal que $KerA \neq \{0\}$ (A no es un operador inyectivo), la relación inversa A^{-1} es una relación lineal. El siguiente ejemplo ilustra mejor la idea anterior ([2]).

Ejemplo 1.1.2. Sea $C[a, b]$ el espacio vectorial de todas la funciones complejas continuas sobre el intervalo $[a, b]$ y sea $C^{(1)}[a, b]$ el subespacio de todas las funciones complejas diferenciables sobre el intervalo $[a, b]$.
Considérese el operador diferencial $A : C^{(1)}[a, b] \to C[a, b]$ definido para cada $x \in C^{(1)}[a, b]$ por $Ax := x'$.
Es claro que todas las funciones constantes son elementos de $KerA$.
Entonces $0 < dimKerA$, lo que implica que $KerA \neq \{0\}$.
Así, para cada $x \in C[a, b]$, se define

$$A^{-1}x := \int x(t)dt + C,$$

donde C es una constante.
Es claro que A^{-1} es una relación lineal.

Definición 1.1.6. Si $A \in LR(X,Y)$ y $U \subseteq X$, entonces la imagen de U bajo A se define por

$$A[U] := \bigcup \{Ax : x \in Dom(A) \cap U\}.$$

De la definición de relación inversa es claro que $ImA^{-1} = Dom(A)$ y $Dom(A^{-1}) = ImA$. Además, para $V \subseteq Y$ no vacío

$$A^{-1}[V] = \{x \in Dom(A) : V \cap Ax \neq \varnothing\}$$

y para cualquier $y \in ImA$

$$A^{-1}y = \{x \in Dom(A) : y \in Ax\}.$$

$A^{-1}[V]$ también se le llama imagen inversa de V bajo A.

Como una generalización del álgebra de operadores lineales, es posible hablar de suma de relaciones lineales y producto por un escalar.

Definición 1.1.7. Sean $A, B \in LR(X,Y)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

(i) Se define la suma de A y B por $(A+B)x := Ax + Bx$, con $x \in X$.

(ii) Se define la relación αA por $(\alpha A)x := \alpha(Ax)$, con $x \in X$.

Convencionalmente se considera que para cualquier conjunto Z, $Z + \varnothing = \varnothing + Z = \varnothing$. De esta manera, si $Ax = \varnothing$ ó $Bx = \varnothing$, para alguna $x \in X$, $Ax + Bx = \varnothing$.

Proposición 1.1.4. *Si* $A, B \in LR(X,Y)$, *entonces*

$$Dom(A+B) = Dom(A) \cap Dom(B).$$

Demostración. Sea $x \in Dom(A+B)$. Entonces $(A+B)x = Ax + Bx \neq \varnothing$. Así, se tiene $Ax \neq \varnothing$ y $Bx \neq \varnothing$, de esto se sigue que $x \in Dom(A) \cap Dom(B)$.
Así mismo, si $x \in Dom(A) \cap Dom(B)$, entonces $Ax \neq \varnothing$ y $Bx \neq \varnothing$ y por lo tanto, $Ax + Bx = (A+B)x \neq \varnothing$, lo que implica que $x \in Dom(A+B)$. $\square$

Rápidamente se observa que $Dom(\alpha A) = Dom(A)$. Y por la Proposición 1.1.4, se tiene que $A + B,\ \alpha A \in LR(X, Y)$ cuyas gráficas son expresadas de la siguiente forma:

$$Gr(A+B) = \{(x, y + z) \in X \times Y : (x, y) \in Gr(A) \text{ y } (x, z) \in Gr(B)\}$$

y

$$Gr(\alpha A) = \{(x, \alpha y) \in X \times Y : (x, y) \in Gr(A)\}.$$

Proposición 1.1.5. *Sea $A \in LR(X, Y)$.*

(i) Para cualquier $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ y $U \subseteq X$, $A[\alpha U] = \alpha A[U]$,

(ii) Si $U, V \subseteq X$, entonces $A[U] + A[V] \subseteq A[U + V]$. En particular, si $V \subseteq Dom(A)$ ó $U \subset Dom(A)$, entonces $A[U + V] = A[U] + A[V]$.

Demostración.

(i) Puesto que A es lineal, se tiene que, para cada $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$,

$$A[\alpha U] = \bigcup \{A(\alpha x) : x \in Dom(A) \cap U\} =$$

$$= \bigcup \{\alpha(Ax) : x \in Dom(A) \cap U\} =$$

$$= \alpha \bigcup \{Ax : x \in Dom(A) \cap U\} = \alpha A[U].$$

(ii) Sean $U, V \subseteq X$ y sea $x + y \in A[U] + A[V]$. Entonces existen $u \in U \cap Dom(A)$, $v \in V \cap Dom(A)$ tales que $x \in Au$, $y \in Au$ y $x + y \in Au + Av = A(u + v)$, con $u + v \in (U + V) \cap Dom(A)$, luego $x + y \in A[U + V]$.
Supóngase ahora que $V \subseteq Dom(A)$. Sea $w \in A[U + V]$, entonces $w \in A(u + v)$, para algunos $u \in U$ y $v \in V$ tales que $u + v \in Dom(A) \cap (U + V)$; ya que $v \in Dom(A)$. Entonces $-v \in Dom(A)$, lo que implica que $u + v - v = u \in Dom(A)$. Puesto que $A(u + v) = Au + Av \subseteq A[U] + A[V]$.
Se procede de forma similar cuando $U \subseteq Dom(A)$. $\square$

Definición 1.1.8. Sean $A \in LR(X,Y)$, $B \in LR(Y,Z)$, tales que $ImA \cap Dom(B) \neq \varnothing$. La relación BA es la composición de A y B y se define por $(BA)x := B(Ax)$, para cada $x \in X$. La gráfica de BA está dada por

$$Gr(BA) = \{(x,z) \in X \times Z : \exists\, y \in Dom(B) \text{ tal que } (x,y) \in Gr(A), (y,z) \in Gr(B)\}.$$

El dominio de BA explícitamente se escribe como

$$Dom(BA) = \{x \in X : B(Ax) \neq \varnothing\},$$

donde $B(Ax) = \bigcup \{By \in Y : y \in Dom(B) \cap Ax \neq \varnothing\}$. Entonces $B(Ax) \neq \varnothing$ si y sólo si existe $y \in Dom(B) \cap Ax$.
De esto se obtiene que $Dom(BA) = \{x \in X : Dom(B) \cap Ax \neq \varnothing\}$.

Proposición 1.1.6. *Sean $A, B, C \in LR(X,Y)$, $E \in LR(X,Y)$ y $F \in LR(Y,Z)$, con $Dom(F) \cap ImE \neq \varnothing$. Entonces*

(i) *Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,*

(ii) *Para cada $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\alpha(FE) = (\alpha F)E = F(\alpha E)$,*

(iii) $A + B = B + A$,

(iv) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

Demostración.

(i) Para cada $x \in Dom(A)$, $[\alpha(\beta A)]x = \alpha((\beta A)x) = \alpha(\beta(Ax)) = (\alpha\beta)Ax$.

(ii) Sea $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Puesto que para cada $x \in Dom(FE)$, $(\alpha(FE))x = \alpha((FE)x) = \alpha(F(Ex)) = (\alpha F)Ex$, entonces es suficiente probar que que $Gr((\alpha F)E) = Gr(F(\alpha E))$.
Sea $(x,z) \in Gr((\alpha F)E)$. Entones existe $y \in Dom(F)$ tal que $(x,y) \in Gr(E)$ y $(y,z) \in Gr(\alpha F)$. Nótese que $(y,z) = (y, \alpha w)$, para algún $w \in Z$ tal que $(y,w) \in Gr(F)$. Así,

$(y, \alpha^{-1}z) = (y, w) \in Gr(A)$, esto es, $(x, \alpha^{-1}z) \in Gr(FE)$, luego existe $t \in Dom(F)$ tal que $(x, t) \in Gr(E)$ y $(t, \alpha^{-1}z) \in Gr(F)$. Se observa que $(x, \alpha t) \in Gr(\alpha E)$ y $\alpha(t, \alpha^{-1}z) = (\alpha t, z) \in Gr(F)$ y por lo tanto, $(x, z) \in Gr(F(\alpha E))$.

De forma análoga, sea $(x, z) \in Gr(F(\alpha E))$. Entonces existe $y \in Dom(F)$ tal que $(x, y) \in Gr(\alpha E)$ y $(y, z) \in Gr(F)$. Como $(x, y) = (x, \alpha p)$, para algún $p \in Y$, entonces $(x, \alpha^{-1}y) \in Gr(E)$, además, $(\alpha^{-1}y, \alpha^{-1}z) \in Gr(F)$, de esto se sigue que $(x, \alpha^{-1}z) \in Gr(FE)$. Así que $(x, z) \in Gr(\alpha(FE))$ y por lo tanto, $(x, z) \in Gr((\alpha F)E)$.

(iii) Supóngase que $A, B \in LR(X, Y)$. Puesto que $Gr(A + B)$ es subespacio lineal de $X \times Y$, entonces

$$\begin{aligned} Gr(A + B) &= \{(x, y + z) \in X \times Y : (x, y) \in Gr(A) \\ &\qquad \text{y } (x, z) \in Gr(B)\} \\ &= \{(x, z + y) \in X \times Y : (x, z) \in Gr(B) \\ &\qquad \text{y } (x, y) \in Gr(A)\} = Gr(B + A). \end{aligned}$$

(iv) Se probará que $Gr((A + B) + C) = Gr(A + (B + C))$.

Sea $(x, y + z) \in Gr((A + B) + C)$, con $(x, y) \in Gr(A + B)$ y $(x, z) \in Gr(C)$. Puesto que $(x, y) \in Gr(A + B)$, entonces $y = a + b$, tal que $(x, a) \in Gr(A)$ y $(x, b) \in Gr(B)$. Así que $(x, y + z) = (x, (a + b) + z) = (x, a + (b + z)) = (x, a + t)$, con $(x, a) \in Gr(A)$ y $(x, t) \in Gr(B + C)$, lo que implica que $(x, y + z) \in Gr(A + (B + C))$.

Recíprocamente, sea $(x, a+z) \in Gr(A+(B+C))$, con $(x, a) \in Gr(A)$ y $(x, z) \in Gr(B + C)$. Así que, $(x, a + z) = (x + a + (b + c)) = (x, (a + b) + c) = (x, y + c)$ con $(x, y) \in Gr(A + B)$ y $(x, a) \in Gr(C)$, esto es, $(x, y + c) \in Gr((A + B) + C)$. $\square$

Proposición 1.1.7. *Si $A \in LR(X, Y)$, $B \in LR(Y, Z)$ son tales que $Dom(B) \cap ImA \neq \varnothing$, entonces $BA \in LR(X, Z)$.*

Demostración. Sean $x, y \in Dom(BA)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Por la Proposición 1.1.5,

$$\begin{aligned}\alpha(BAx) + \beta(BAy) &= \alpha B(Ax) + \beta B(Ay)\\ &= B(\alpha Ax) + B(\beta Ay) = B(A(\alpha x)) + B(A(\beta y))\\ &= B(A(\alpha x) + A(\beta y)) = B(A(\alpha x + \beta y)) = BA(\alpha x + \beta y).\end{aligned}$$ □

Proposición 1.1.8. *Si $B \in LR(X, Y)$, $A \in LR(Y, Z)$, entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Demostración. Por definición,

$$\begin{aligned}Gr(B^{-1}A^{-1}) = \{(x, z) \in X \times Z : \exists\, y \in Dom(B) \text{ tal que}\\ (x, y) \in Gr(A^{-1}), (y, z) \in Gr(B^{-1})\} =\\ = \{(x, z) \in X \times Z : \exists\, y \in Dom(B) \text{ tal que}\\ (y, x) \in Gr(A), (z, y) \in Gr(B)\} = Gr((AB)^{-1})\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Proposición 1.1.9. *Sean $A, B \in LR(Y, Z)$, $C, D \in LR(X, Y)$, con $Dom(A + B) \cap ImC \neq \varnothing$ y $Dom(A) \cap Im(C + D) \neq \varnothing$.*

(i) Para cada x, $(A+B)Cx \subseteq (AC+BC)x$. Si C es un operador lineal, entonces $(A + B)C = AC + BC$.

(ii) Para cada x, $(AB + AC)x \subseteq (A(B + C))x$. Si $Dom(A)$ contiene a $ImB \cup ImC$, entonces $A(B + C) = AB + AC$.

Demostración.

(i) Sea $(x, z) \in Gr((A + B)C)$. Entonces existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in Gr(C)$ y $(y, z) \in Gr(A + B)$. Como $(y, z) \in Gr(A + B)$, entonces $(y, z) = (y, a+b)$, de tal manera $(y, a) \in Gr(A)$ y $(y, b) \in Gr(B)$.
Así que $(x, a) \in Gr(AC)$ y $(x, b) \in Gr(BC)$, lo que implica que $(x, a + b) \in Gr(AC + BC)$.

Ahora supóngase que C es un operador lineal. Puesto que, para cada $x \in X$, Cx es un conjunto singular, entonces

$$(A+B)Cx = ACx + BCx = (AC+BC)x.$$

(ii) Supóngase que $A \in LR(X,Y)$ y $B, C \in LR(Z,X)$. Sea $(z,y) \in Gr(AB+AC)$. Entonces $(z,y) = (z, b+c)$ de tal forma que $(z,b) \in Gr(AB)$ y $(z,c) \in Gr(AC)$. Además, existen x_1, x_2 tales que $(z,x_1) \in Gr(B)$ y $(x_1,b) \in Gr(A)$; $(z,x_2) \in Gr(C)$ y $(x_2,c) \in Gr(A)$.
De lo anterior se tiene $(x_1+x_2, b+c) \in Gr(A)$ y $(z, x_1+x_2) \in Gr(B+C)$. Si $x = x_1+x_2$, entonces $(z,x) \in Gr(B+C)$ y $(x,y) \in Gr(A)$, lo que implica que $(z,y) \in Gr(A(B+C))$.
Ahora supóngase que $ImB \subseteq Dom(A)$ y $ImC \subseteq Dom(A)$. Es claro que

$$Dom(AB+AC) = Dom(AB) \cap Dom(AC) =$$

$$= Dom(B) \cap Dom(C) = Dom(B+C) = Dom(A(B+C)).$$

Sea $z \in Dom(AB+AC)$. Por lo anterior, $z \in Dom(A(B+C))$. Sea $y \in A(B+C)z$. Entonces $y \in Ax$, donde $x \in (A+B)z$. Se observa que $x = x_1 + x_2$, donde $x_1 \in Bz$ y $x_2 \in Cz$, de esto se sigue $Ax_1 \subseteq ABz$ y $Ax_2 \subseteq ACz$. Así,

$$y \in A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 \subseteq ABz + ACz.$$

Por lo tanto, $A(B+C) = AB+AC$. □

Como consecuencia de la Proposición 1.1.9 (ii) se obtiene que $LR(X,Y)$ no es un álgebra sobre $\mathbb{K}$.

Al hablar de una relación lineal, es natural pensar la forma de restringirla a un subespacio, esto con el fin de estudiar su comportamiento. La siguiente definición provee una forma de restringir una relación lineal mediante su gráfica.

Definición 1.1.9. Sean $A \in LR(X,Y)$ y U subespacio de X tal que $U \cap Dom(A) \neq \varnothing$. A_U es la restricción de A sobre U definida por

$$Gr(A_U) := Gr(A) \cap (U \times Y),$$

de tal forma que $A_U x := Ax$, para cada $x \in U$, $Dom(A_U) = Dom(A) \cap U$.
Si $A \in LR(X)$, A_U está definida por $Gr(A_U) := Gr(A) \cap (U \times X)$.

Es claro que $A_U(0) \subseteq A(0)$. Pues si $x \in A_U(0)$, entonces $(0,x) \in Gr(A_U) = Gr(A) \cap (U \times Y) \subseteq Gr(A)$. Lo que implica que $x \in A(0)$.

La Definición anterior es propia de la terminología de Cross [3], sin embargo, dicha restricción se realiza directamente en el dominio y no provee de mucha utilidad para futuros resultados. Así que, en lo sucesivo, para referirse a la restricción de $A \in LR(X)$ se usará la siguiente definición:

Definición 1.1.10. *Sean $A \in LR(X)$ y U un subespacio de X. Se define A_U mediante su gráfica por*

$$Gr(A_U) := Gr(A) \cap (U \times U).$$

La definición 1.1.10 es usada en diversos textos tales como [2], [7], [8], [9], ya que provee de ciertas características para desarrollar más resultados dentro de la teoría subyacente.
En este escrito es fuertemente usada para abordar temas posteriores relacionados con puntos aislados del espectro de una relación lineal.

Definición 1.1.11. Sea $A \in LR(X,Y)$. Se dirá que A es inyectiva si A^{-1} es un operador lineal y se dirá que A es suprayectiva si $ImA = Y$

Proposición 1.1.10. *Si $A \in LR(X,Y)$ es inyectiva, entonces se cumple que para cualesquiera $x, y \in Dom(A)$ tales que $Ax = Ay$ implica que $x = y$.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $Ax = Ay$. Si $w \in Ax$, entonces $(x, w), (y, w) \in Gr(A)$ y $(y, w), (x, w) \in Gr(A^{-1})$. Así que $x, y \in A^{-1}w$. Puesto que A^{-1} es un operador lineal, entonces $x = A^{-1}w = y$. □

Proposición 1.1.11. *Sean $A \in LR(X, Y)$ y $U \subseteq X$ tal que $U \cap Dom(A) \neq \varnothing$. Entonces $KerA_U = KerA \cap U$.*

Demostración. $x \in KerA_U$ si y sólo si $(x, 0) \in Gr(A_U) = Gr(A) \cap (U \times Y)$ si y sólo si $(x, 0) \in Gr(A)$ y $(x, 0) \in U \times Y$ si y sólo si $x \in KerA$ y $x \in U$. □

Proposición 1.1.12. *Sea $A \in LR(X, Y)$. Se cumple lo siguiente:*

(i) Para cualquier $x \in Dom(A)$,

$$y \in Ax \Leftrightarrow Ax = y + A(0).$$

(ii) Para cualesquiera $x_1, x_2 \in Dom(A)$,

$$Ax_1 \cap Ax_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow Ax_1 = Ax_2.$$

Demostración.

(i) ($\Rightarrow$) Supóngase que $y \in Ax$. Entonces por la linealidad de A, $y + A(0) \subseteq Ax + A(0) = Ax$.
Por otro lado, si $\alpha \in Ax$, entonces $(x, \alpha) \in A$ y α se puede reescribir como $\alpha = y+(\alpha-y) \in y+Ax-Ax = y+A(0)$, lo que implica que $Ax \subseteq y + A(0)$. Se concluye que $Ax = y + A(0)$.

($\Leftarrow$) Supóngase que $Ax = y + A(0)$. Así que para cada $t \in y + A(0)$ $t \in Ax$, en particular $y + 0 \in y + A(0)$, entonces $y + 0 = y \in Ax$.

(ii) ($\Rightarrow$) Se supone $Ax_1 \cap Ax_2 \neq \varnothing$. Entonces existe $y \in Ax_1 \cap Ax_2$, es decir, $y \in Ax_1$ y $y \in Ax_2$, por (i), se tiene que

$Ax_1 = y + A(0)$ y $Ax_2 = y + A(0)$, entonces $Ax_1 = Ax_2$.

($\Leftarrow$) Ahora, supóngase que $Ax_1 = Ax_2$. Entonces inmediatamente se sigue que $Ax_1 \cap Ax_2 \neq \varnothing$. $\square$

En la Proposición 1.1.12 (i), de forma particular, se tiene

$$0 \in Ax \Leftrightarrow Ax = A(0).$$

Corolario 1.1.13. $A \in LR(X,Y)$ *es un operador lineal si y sólo si* $A(0) = \{0\}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que A es operador lineal. Entonces para cada $x \in Dom(A)$, $Ax = \{y\}$, para algún $y \in Y$; en particular, existe $y_0 \in Y$ tal que $A(0) = \{y_0\}$. Puesto que $A(0)$ es subespacio vectorial de Y, entonces $0 \in A(0)$, esto implica que $0 = y_0$.

($\Leftarrow$) Ahora, se asume que $A(0) = \{0\}$, basta probar que A es una función.
Considérese $x \in Dom(A)$. Por la Proposición 1.1.12 (i), para $y \in Ax$ se tiene $Ax = y + A(0) = \{y\}$. Y por tanto, A es función. $\square$

Corolario 1.1.14. $A \in LR(X,Y)$ *es inyectiva si y sólo si* $KerA = \{0\}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que A es inyectiva. Se sabe que $KerA = A^{-1}(0)$ que es un subespacio vectorial de X, entonces $0 \in KerA$ y como A^{-1} es un operador lineal, entonces $A^{-1}(0) = KerA = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Ahora se asume que $KerA = \{0\}$. Se verá que A es inyectiva. Puesto que $A^{-1}(0) = \{0\}$, se sigue que A^{-1} es un operador lineal y por lo tanto, A es inyectiva. $\square$

Corolario 1.1.15. *Si $A \in LR(X,Y)$, entonces $AA^{-1}(0) = A(0)$ y $A^{-1}A(0) = A^{-1}(0)$.*

Demostración. Basta probar que $AA^{-1}(0) = A(0)$.
Sea $y \in AA^{-1}(0)$. Entonces $(0,y) \in Gr(AA^{-1})$, así que existe $x \in Dom(A)$ tal que $(0,x) \in Gr(A^{-1})$ y $(x,y) \in Gr(A)$, esto es, $0 \in Ax$ y $y \in Ax$. Por la Proposición 1.1.12 (i), $Ax = A(0)$ y así $y \in A(0)$.
Por otro lado, sea $y \in A(0)$. Entonces $(0,y) \in Gr(A)$. Además, existe $x \in Dom(A^{-1})$ tal que $0 \in A^{-1}x$, entonces $A^{-1}x = A^{-1}(0)$. También se tiene que $(x,0) \in Gr(A^{-1})$, lo que implica que $(x,y) \in Gr(AA^{-1})$, entonces $y \in AA^{-1}x = AA^{-1}(0)$. □

Corolario 1.1.16. *Si $A \in LR(X,Y)$, entonces para cada $y \in ImA$, $AA^{-1}y = y + A(0)$. Y para cada $x \in Dom(A)$, $A^{-1}Ax = x + A^{-1}(0)$.*

Demostración. Puesto que $ImA = Dom(A^{-1})$, basta probar que para cada $y \in ImA$, $AA^{-1}y = y + A(0)$.
Sea $y \in ImA$ entonces existe $x \in Dom(A)$ tal que $(x,y) \in Gr(A)$. También se tiene que $(y,x) \in Gr(A^{-1})$. De esto se tiene que $(y,y) \in Gr(AA^{-1})$, es decir, $y \in AA^{-1}y$. Por el Corolario 1.1.15, se sigue que $AA^{-1}y = y + AA^{-1}(0) = y + A(0)$. □

Proposición 1.1.17. *Sean $A, B \in LR(X)$ tales que $B(0) \subseteq KerA$. Entonces $AB(0) = A(0)$.*

Demostración. Sea $a \in AB(0)$. Entonces $(0,a) \in Gr(AB)$, esto es, $(0,y) \in Gr(B)$ y $(y,a) \in Gr(A)$ para algún $y \in Dom(A)$. Así que, $y \in B(0) \subseteq KerA$ y $a \in Ay$.
De lo anterior se tiene que $0 \in Ay$ o equivalentemente $A(0) = Ay$. Por lo tanto, $a \in A(0)$.
Por otro lado, sea $b \in A(0)$. Entonces $(0,b) \in Gr(A)$.
Como $0 \in Dom(A) \subseteq ImB$, entonces existe $y \in Dom(B)$ tal que $0 \in By$, lo que equivale a $By = B(0)$; también se observa que

$(y, 0) \in Gr(B)$. Así, $(y, b) \in Gr(AB)$, esto es, $b \in ABy = AB(0)$. Se concluye que $A(0) = AB(0)$. □

Definición 1.1.12. Sean $A \in LR(X)$, U, V subespacios de X tales que $X = U \oplus V$. Considérese A_U y A_V. Se dirá que A es completamente reducida por (U, V) si $Gr(A) = Gr(A_U) \oplus Gr(A_V)$.

Proposición 1.1.18. *Si $A \in LR(X)$ es completamente reducido por (U, V), entonces*

(i) $Dom(A) = Dom(A_U) \oplus Dom(A_V)$ *y* $ImA = ImA_U \oplus ImA_V$,

(ii) $A(0) = A_U(0) \oplus A_V(0)$ *y* $KerA = KerA_U \oplus KerA_V$.

Demostración.

(i) Puesto que $Dom(A_U)$ y $Dom(A_V)$ son subespacios de $Dom(A)$, entonces $Dom(A_U) \oplus Dom(A_V) \subseteq Dom(A)$.
Recíprocamente, sea $x \in Dom(A)$. Entonces existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in Gr(A) = Gr(A_U) \oplus Gr(A_V)$, por consiguiente, existen únicos $(a, b) \in Gr(A_U)$ y $(c, d) \in Gr(A_V)$ tales que $(x, y) = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, Así, $x = a + c$ y por lo tanto, $x \in Dom(A_U) \oplus Dom(A_V)$.
La prueba de $ImA_U \oplus ImA_V$ es similar a la anterior.

(ii) Se sabe que $A_U(0)$ y $A_V(0)$ están contenidos en $A(0)$, lo que implica que $A_U(0) \oplus A_V(0) \subseteq A(0)$.
Recíprocamente, sea $y \in A(0)$. Entonces $(0, y) \in Gr(A) = Gr(A_U) \oplus Gr(A_V)$, debido a esto, existen únicos $(w, z) \in Gr(A_U)$ y $(s, t) \in Gr(A_V)$ tales que $(0, y) = (w, z) + (s, t) = (w + s, z + t)$. De donde $w + s = 0$, luego $s = w = 0$ y por lo tanto, $z \in A_U(0)$, $t \in A_V(0)$. Se concluye que $y \in A_U(0) \oplus A_V(0)$.
La prueba de $KerA = KerA_U \oplus KerA_V$ es similar a la anterior. □

1.2. Ascenso y descenso de una relación lineal

En la presente sección se exhiben y se analizan los conceptos de ascenso, descenso, nulidad y defecto de una relación lineal. Se verá que algunos resultados de dichas nociones dentro de la teoría de operadores lineales, también son validas para relaciones lineales bajo condiciones especiales ([9]).

Sea $A \in LR(X)$. Similar al caso de operadores lineales y de forma natural, se define $A^2x := A(Ax)$, para cada $x \in Dom(A)$. Así, de forma recursiva, se tiene que $A^n := A^{n-1}A = AA^{n-1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
Es fácil observar que

$$Gr((A^{-1})^2) = Gr(A^{-1}A^{-1}) =$$

$$= \left\{(x,z) : \exists y \in X \ (x,y),(y,z) \in Gr(A^{-1})\right\} =$$

$$= \{(x,z) : \exists y \in X, \ (y,x),(z,y) \in Gr(A)\} = Gr((A^2)^{-1}).$$

Procediendo de forma recursiva, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$. Convencionalmente se toma $A^0 := I$. De esta manera, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $A^{n+m} = A^nA^m = A^mA^n$.

Lema 1.2.1. *Sean $A, B \in LR(X)$ tales que $Gr(A) \subseteq Gr(B)$. Entonces*

(i) $Gr(A^{-1}) \subseteq Gr(B^{-1})$,

(ii) *para cada* $n \in \mathbb{N}$, $Gr(A^n) \subseteq Gr(B^n)$.

Demostración.

(i) Sea $(x,y) \in Gr(A^{-1})$. Entonces $(y,x) \in Gr(A)$. Por hipótesis $(y,x) \in Gr(B)$ y por lo tanto, $(x,y) \in Gr(B^{-1})$.

(ii) Por inducción matemática sobre n. Para $n = 1$ es claro. Supóngase que la proposición se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $(x, y) \in Gr(A^{n+1}) = Gr(A^n A)$. Existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in G(A)$ y $(z, y) \in G(A^n)$. Por hipótesis inductiva, $(z, y) \in Gr(B^n)$ y $(x, z) \in Gr(A) \subseteq Gr(B)$. Por lo tanto, $(x, y) \in Gr(B^n B) = Gr(B^{n+1})$. □

Como consecuencia inmediata del Lema 1.2.1, para cada $n \in \mathbb{N}$, $Dom(A^n) \subseteq Dom(B^n)$, $ImA^n \subseteq ImB^n$, $KerA^n \subseteq KerB^n$ y $A^n(0) \subseteq B^n(0)$.

Lema 1.2.2. *Sea $A \in LR(X)$. Entonces para cada $n, m \in \mathbb{N}$*

(i) $Dom(A^{n+m}) \subseteq Dom(A^n)$ *y* $ImA^{n+m} \subseteq ImA^n$,

(ii) $KerA^n \subseteq KerA^{n+m}$ *y* $A^n(0) \subseteq A^{n+m}(0)$,

(iii) para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, $Ker(A^n) \subseteq Dom(A^m)$ *y* $A^n(0) \subseteq ImA^m$,

(iv) para cualesquiera $i, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\frac{Dom(A^i)}{(ImA^k + KerA^i) \cap Dom(A^i)} \cong \frac{ImA^i}{ImA^{i+k}},$$

(v) Si $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *entonces*

$$dim \frac{KerA}{KerA \cap ImA^i} = dim \frac{KerA^i}{ImA \cap KerA^i}.$$

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{N}$.

(i) Sea $x \in Dom(A^{n+m})$. Entonces $A^{n+m}x \neq \varnothing$, es decir, existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in Gr(A^{n+m})$.
Se sabe que $A^{n+m} = A^m A^n$, de modo que existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in Gr(A^n)$ y $(z, y) \in Gr(A^m)$, esto es, $x \in Dom(A^n)$.
Por otro lado, sea $y \in ImA^{n+m}$. Existe $x \in Dom(A^{n+m})$ tal

que $y \in A^{n+m}x$, dicho de otra forma, $(x, y) \in Gr(A^{n+m}) = Gr(A^n A^m) = Gr(A^m A^n)$. Así que existe $x \in X$ tal que $(z, y) \in Gr(A^n)$ y por lo tanto, $y \in ImA^n$.

(ii) Sea $x \in KerA^n$. Entonces $(x, 0) \in Gr(A^n)$. Ya que $(0, 0) \in Gr(A^m)$, entonces $(x, 0) \in Gr(A^{n+m})$, esto es, $x \in KerA^{n+m}$. Por otro lado, sea $y \in A^n(0)$. Luego $(0, y) \in Gr(A^n)$ de manera que $(0, y) \in Gr(A^{n+m})$, lo que implica que $y \in A^{n+m}(0)$.

(iii) Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Primero considérese el caso cuando $n \leq m$. Por (ii), $KerA^n \subseteq KerA^m \subseteq Dom(A^m)$ y $A^n(0) \subseteq A^m(0) \subseteq ImA^m$.
Ahora considérese el caso cuando $n > m$. Sea $x \in KerA^n$. Se tiene que $(x, 0) \in Gr(A^n) = Gr(A^{n-m}A^m)$, luego $x \in Dom(A^m)$.
De forma análoga, sea $y \in A^n(0)$. Entonces $(0, y) \in Gr(A^n) = Gr(A^m A^{n-m})$. Así, existe $x \in X$ tal que $(0, x) \in Gr(A^{n-m})$ y $(x, y) \in Gr(A^m)$. Lo que implica que $y \in ImA^m$.

(iv) Sean $i, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y considérese la aplicación

$$T : Dom(A^i) \to \frac{ImA^i}{ImA^{i+k}},$$

definido por $Tx = w + ImA^{i+k}$, para cada $x \in Dom(A^{i+k})$ tal que $(x, w) \in Gr(A^i)$.
Se observa que $y \in T(0)$ si y sólo si existe $w \in X$ tal que $y = w + ImA^{i+k}$ con $(0, w) \in Gr(A^i)$, esto es, $w \in A^i(0) \subseteq A^{i+k}(0) \subseteq ImA^{i+k}$, luego $y = ImA^{i+k}$. Así que $T(0) = \{0\}$.
Debido a lo anterior y a la definición de T, se tiene que T es un operador lineal.
Por otro lado, sea $x \in KerT$. Entonces $Tx = ImA^{i+k} = y + ImA^{i+k}$, para algún $y \in ImA^{i+k}$ tal que $(x, y) \in Gr(A^i)$. Como $y \in ImA^{i+k}$, existe $z \in Dom(A^{i+k})$ tal que $(z, y) \in Gr(A^{i+k})$, luego existe $w \in X$ tal que $(z, w) \in Gr(A^k)$ y

$(w, y) \in Gr(A^i)$.
Así, $(x-w, 0) = (x, y) - (w, y) \in Gr(A^i)$, lo que implica que $x-w \in KerA^i$ y $w \in ImA^k$. Además, $x = w+(x-w)$, luego $x \in ImA^k + KerA^i$; también se observa que $x \in Dom(A^i)$ y por tanto, $x \in (ImA^k + KerA^i) \cap Dom(A^i)$.
Recíprocamente, sea $x \in (ImA^k + KerA^i) \cap Dom(A^i)$. Entonces existe $w \in X$ tal que $(x, w) \in Gr(A^i)$ y existen $y \in ImA^k$, $z \in KerA^i$, por ende, $(y, w) = (x, w) - (z, 0) \in Gr(A^i)$.
Ya que $y \in ImA^k$, existe $t \in Dom(A^k)$ tal que $(t, y) \in Gr(A^k)$. De esto se sigue que $(t, w) \in Gr(A^{i+k})$ y

$$Tx = w + ImA^{i+k} = ImA^{i+k},$$

es decir, $x \in KerT$. Por lo tanto, $KerT = (ImA^k+KerA^i)\cap Dom(A^i)$ y por el primer Teorema de isomorfismos de espacios vectoriales,

$$\frac{Dom(A^i)}{(ImA^k + KerA^i) \cap Dom(A^i)} \cong \frac{ImA^i}{ImA^{i+k}}.$$

(v) Sea $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por (iv) se tiene que

$$\frac{KerA^{i+1}}{(KerA^i + ImA) \cap KerA^{i+1}} \cong \frac{KerA \cap ImA^i}{KerA \cap ImA^{i+1}}.$$

Lo que implica

$$\frac{KerA^{i+1}}{(KerA^i + ImA) \cap KerA^{i+1}} \cong \frac{KerA^{i+1} + KerA^i + ImA}{KerA^i + ImA} =$$

$$= \frac{KerA^{i+1} + ImA}{KerA^i + ImA}.$$

Por lo tanto, $dim\dfrac{KerA}{KerA \cap ImA^i} = dim\dfrac{KerA^i}{ImA \cap KerA^i}$. □

Las demostraciones del Lema 1.2.3 y de la Proposición 1.2.1 serán omitidas ya que no representan el objetivo central de la tesis. Sin embargo, el lector puede acudir a [9] para más detalles.

Lema 1.2.3. *Sean* $A \in LR(X)$ *y* $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Entonces*

$$dim\frac{KerA^r + ImA}{ImA} = dim\frac{KerA^r}{KerA^r \cap ImA} \leq$$

$$\leq dim\frac{Dom(A^r)}{Dom(A^r) \cap ImA} = dim\frac{Dom(A^r) + ImA}{ImA}.$$

Proposición 1.2.1. *Sea* $A \in LR(X)$.

(i) *Si existe* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *tal que* $KerA^k = KerA^{k+1}$, *entonces* $KerA^n = KerA^k$ *para cada* $n \geq k$,

(ii) *si existe* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *tal que* $A^k(0) = A^{k+1}(0)$, *entonces* $A^n(0) = A^k(0)$ *para cada* $n \geq k$.

Definición 1.2.1. *Sea* $A \in LR(X)$. *Se definen:*

(i) $R_0(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} KerA^i$,

(ii) $R_\infty(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i(0)$,

(iii) $R_c(A) = R_0(A) \cap R_\infty(A)$.

Puesto que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $KerA^i = (A^{-1})^i(0)$ y $A^i(0) = Ker(A^{-1})^i$, entonces $R_0(A) = R_\infty(A^{-1})$ y $R_\infty(A) = R_0(A^{-1})$. Así,

$$R_c(A) = R_\infty(A^{-1}) \cap R_0(A^{-1}) = R_c(A^{-1}).$$

Proposición 1.2.2. *Sea* $A \in LR(X)$. $R_c(A) \neq \{0\}$ *si y sólo si existen* $x_1, x_2, ..., x_n \in X \setminus \{0\}$ *tales que*

$$(0, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n), (x_n, 0) \in Gr(A).$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que $R_c(A) \neq \{0\}$. Entonces existe $x \notin \{0\}$ tal que $x \in R_0(A)$ y $x \in R_\infty(A)$. Esto es, existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $x \in KerA^r$ y $x \in A^s(0)$.

Puesto que $x \in KerA^r$, $(x,0) \in Gr(A^r)$. Así que existen $y_1, ..., y_{r-1} \in X$ tales que

$$(0,y_1),(y_1,y_2,)...,(y_{r-1},x) \in Gr(A).$$

De forma similar, como $x \in A^s(0)$, entonces $(0,x) \in Gr(A^s)$. Así que existen $z_1, ..., z_{s-1} \in X$ tales que

$$(x,z_1),(z_1,z_2),...,(z_{s-1},x) \in Gr(A).$$

Para $i = 1, ..., r-1$, $x_i := y_i$ y para cada $j = 1, ..., s-1$, $x_{i+j} := z_j$ de tal manera que

$$(0,x_1),(x_1,x_2),...,(x_{n-1},x_n),(x_n,0) \in Gr(A),$$

y basta elegir aquellos elementos diferente de cero.

($\Leftarrow$) Supóngase que existen $x_1, x_2, ..., x_n \in X \setminus \{0\}$ tales que

$$(0,x_1),(x_1,x_2),(x_2.x_3),...,(x_{n-1},x_n),(x_n,0) \in Gr(A).$$

Puesto que $(x_1,x_2),(x_2.x_3) \in Gr(A)$, entonces $(x_1,x_3) \in Gr(A^2)$; continuando de forma recursiva, se puede observar que $(x_1,0) \in Gr(A^n)$, esto es, $x_1 \in KerA^n \subseteq R_0(A)$. También se observa que $x_1 \in A(0) \subseteq R_\infty(A)$.
Sabiendo que $x_1 \neq 0$, concluye que $R_c(A) \neq \{0\}$. $\square$

Proposición 1.2.3. *Sea $A \in LR(X)$ tal que $R_c(A) = \{0\}$ y sean $i,k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces*

$$\frac{KerA^{i+k}}{KerA^i} \cong ImA^i \cap KerA^k \tag{1.2}$$

y

$$\frac{A^{i+k}(0)}{A^i(0)} \cong Dom(A^i) \cap A^k(0). \tag{1.3}$$

Demostración. Sea $x \in KerA^{i+k}$. Entonces existe $w \in KerA^k$ tal que $(x,w) \in Gr(A^i)$ y $(w,0) \in Gr(A^k)$, esto es $w \in KerA^k$. Puesto que $R_c(A) = \{0\}$, se sigue que w es único con dicha propiedad. También se puede observar que $w \in KerA^k \cap ImA^i$.
Por lo anterior, es posible construir un operador $T : KerA^{i+k} \to ImA^i \cap KerA^k$ definido por $Tx = w$. Es claro que T es suprayectivo.
Se observa que $x \in KerT$ si y sólo si $Tx = 0$ si y sólo si $(x,0) \in Gr(A^i)$ si y sólo si $x \in KerA^i$. Así, $KerT = KerA^i$.
Por el primer Teorema de isomorfismos de espacios vectoriales,

$$\frac{KerA^{i+k}}{KerA^i} \cong ImA^i \cap KerA^k.$$

Ahora, como $R_c(A) = R_c(A^{-1})$, se procede de igual forma para demostrar (1.3). $\square$

Proposición 1.2.4. *Sea $A \in LR(X)$. Si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que*

$$Dom(A^r) \cap A(0) = \{0\} \text{ ó } ImA^r \cap KerA = \{0\},$$

entonces, $R_c(A) = \{0\}$.

Demostración. Caso 1: $Dom(A^r) \cap A(0) = \{0\}$.
Para $r = 0$, $Dom(A^r) \cap A(0) = Dom(I) \cap A(0) = A(0) = \{0\}$. Así que A es un operador lineal, por ende, para cada $i \in \mathbb{N}$, A^i también es un operador lineal, esto es, para cada $i \in \mathbb{N}$, $A^i(0) = \{0\}$. Luego, por definición, $R_c(A) = R_0(A) \cap R_\infty(A) = R_0 \cap \{0\} = \{0\}$.
Ahora, sea $r \in \mathbb{N}$ y supóngase que $R_c(A) \neq \{0\}$. Por la Proposición 1.2.2, existen $x_1, ..., x_n \in X \setminus \{0\}$ tales que

$$(0, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1} x_n), (x_n, 0) \in Gr(A).$$

Obsérvese que $(x_1, 0) \in Gr(A^n)$ y $(0, x_1) \in Gr(A)$, esto es, $x_1 \in KerA^n \subseteq Dom(A^r)$ y $x_1 \in A(0)$, lo que es una contradicción.
Caso 2: $ImA^r \cap KerA = \{0\}$.
Puesto que $R_c(A) = R_c(A^{-1})$, $ImA^r = Dom((A^{-1})^r)$, y $KerA = A^{-1}(0)$, entonces se procede de forma similar que en el Caso 1. $\square$

Definición 1.2.2. Sea $A \in LR(X)$.

(i) $\alpha(A) := \text{mín}\left\{k \in \mathbb{N} : KerA^k = KerA^{k+1}\right\}$ es llamado el ascenso de A,

(ii) $\delta(A) := \text{mín}\left\{k \in \mathbb{N} : ImA^k = ImA^{k+1}\right\}$ llamado el descenso de A,

Si el mínimo en (i) y (ii) no existe, entonces se dirá que es ∞.

Definición 1.2.3. Sea $A \in LR(X)$.

(i) $n(A) := dimKerA$ es llamada nulidad de A,

(ii) $d(A) := dim(X/ImA)$ es llamada deficiencia de A.

Proposición 1.2.5. *Sean $A \in LR(X)$ y $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $X = Dom(A^r) + ImA$, entonces $d(A) = dim\dfrac{Dom(A^r)}{ImA \cap Dom(A^r)}$.*
En particular, si $X = KerA^r + ImA$, entonces

$$d(A) = dim\frac{Dom(A^r)}{ImA \cap Dom(A^r)} = dim\frac{KerA^r}{ImA \cap KerA^r}.$$

Demostración. Por el Lema 1.2.3,

$$dim\frac{Dom(A^r)}{Dom(A^r) \cap ImA} = dim\frac{Dom(A^r) + ImA}{ImA} = dim\frac{X}{ImA}.$$

Si se asume que $X = KerA^r + ImA$, nuevamente por el Lema 1.2.3,

$$dim\frac{KerA^r}{KerA^r \cap ImA} = dim\frac{KerA^r + ImA}{ImA} = dim\frac{X}{ImA}.$$

□

Proposición 1.2.6. *Sean $A \in LR(X)$ y $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $KerA \cap ImA^r = \{0\}$, entonces $n(A) = dim\dfrac{KerA^r}{ImA \cap KerA^r} \leq d(A)$. Además, si $X = KerA^r + ImA$, entonces $n(A) = d(A) = dim\dfrac{KerA^r}{ImA \cap KerA^r}$. Recíprocamente, si $KerA \cap ImA^r = \{0\}$ y $n(A) = d(A) < \infty$, entonces $X = KerA^r + ImA$.*

Demostración. Por la Proposición 1.2.2 (v), se tiene

$$n(A) = dim\frac{KerA}{KerA \cap ImA^r} = dim\frac{KerA^r}{ImA \cap KerA^r} \leq$$

$$\leq dim\frac{X}{ImA \cap X} = d(A).$$

Ahora, se asume que $X = KerA^r + ImA$. Por la Proposición 1.2.5,

$$d(A) = dim\frac{KerA^r + ImA}{ImA} = dim\frac{KerA^r}{KerA^r \cap ImA} = n(A).$$

Recíprocamente, puesto que $n(A) = d(A)$, entonces

$$n(A) = dim\frac{KerA^r}{KerA^r \cap ImA} = dim\frac{X}{ImA \cap X} = d(A),$$

luego, $ImA + KerA^r = X$. □

Proposición 1.2.7. *Sea $A \in LR(X)$.*

(i) Si existe $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $KerA \cap ImA^p = \{0\}$, entonces $R_c(A) = \{0\}$ y $\alpha(A) \leq p$.

(ii) Si existe $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $R_c(A) = \{0\}$ y $\alpha(A) \leq p$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, $KerA^k \cap ImA^p = \{0\}$.

Demostración.

(i) Supóngase que, para algún $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $KerA \cap ImA^p = \{0\}$. Por la Proposición 1.2.2, $R_c(A) = \{0\}$.
Resta probar que $\alpha(A) \leq p$. Sea $x \in KerA^{p+1}$. Entonces existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in Gr(A^p)$ y $(y, 0) \in Gr(A)$. Así, $y \in ImA^p$ y $y \in KerA$, es decir $y \in ImA^p \cap KerA$, luego $y = 0$; esto implica que $x \in KerA^p$. Por lo tanto, $KerA^{p+1} \subseteq KerA^p$ y se concluye que $\alpha(A) \leq p$.

(ii) Supóngase que $R_c(A) = \{0\}$ y $\alpha(A) \leq p$, para algún $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es claro que para cada $k \in \mathbb{N}$, $KerA^{p+k} = KerA^p$ de modo que $KerA^{p+k}/KerA^p = \{0\}$.
Por la Proposición 1.2.3 (1.2), $KerA^k \cap ImA^p = \{0\}$. □

Corolario 1.2.8. *Sea* $A \in LR(X)$ *con* $R_c(A) = \{0\}$. *Si* $\alpha(A) = p < \infty$, *entonces* $n(A) \leq d(A)$. *Si* $X = ImA + KerA^p$, *entonces* $n(A) = d(A)$.
Además, si $\alpha(A) = p < \infty$ *y* $n(A) = d(A) < \infty$, *entonces* $X = ImA + KerA^p$.

Demostración. Puesto que $R_c(A) = \{0\}$ y $p < \infty$, por la Proposición 1.2.7 (ii), $KerA \cap KerA^p = \{0\}$. Aplicando la Proposición 1.2.6, se sigue que $d(A) = n(A)$ y $X = ImA + KerA^p$. □

Proposición 1.2.9. *Sea* $A \in LR(X)$.

(i) Supóngase que $R_c(A) = \{0\}$. *Si* $\alpha(A) < \infty$ *y* $\delta(A) < \infty$, *entonces* $\alpha(A) \leq \delta(A)$.

(ii) Supóngase que $p = \alpha(A) < \infty$ *y que* $q = \delta(A) < \infty$. *Si* $p = q$, *entonces* $Dom(A^p) \subseteq ImA + Dom(A^q)$. *Más aún, si* $Dom(A^p) \subseteq ImA + Dom(A^q)$ *y* $p \leq q$, *entonces* $p = q$.

Demostración.

(i) Sean $p = \alpha(A)$ y $q = \delta(A)$ y supóngase que $p > q$. Entonces $ImA^p = ImA^q$ y esto implica que $KerA \cap ImA^p = KerA \cap ImA^q$. Por (1.2) de la Proposición 1.2.3,

$$\frac{KerA^{q+1}}{KerA^q} \cong ImA^q \cap KerA =$$

$$= ImA^p \cap KerA \cong \frac{KerA^{p+1}}{KerA^p} = \{0\}.$$

Así que, $\dfrac{KerA^{q+1}}{KerA^q} \cong ImA^q = \{0\}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $p \leq q$.

(ii) Supóngase que $p = q$. Entonces $Dom(A^p) = Dom(A^q)$; por consiguiente, $Dom(A^p) \subseteq ImA + Dom(A^q)$.
Ahora supóngase que $Dom(A^p) \subseteq ImA + Dom(A^q)$ y $p \leq q$. Por el Lemma 1.2.2 (iv),

$$\frac{Dom(A^q)}{(ImA + KerA^q) \cap Dom(A^q)} \cong \frac{ImA^q}{ImA^{q+1}} = \{0\},$$

lo que implica que $Dom(A^q) = (ImA + KerA^q) \cap Dom(A^q)$ y por lo tanto, $Dom(A^q) \subseteq ImA + KerA^q$.
Por hipótesis, $Dom(A^p) \subseteq ImA + Dom(A^q) \subseteq ImA + KerA^q$. Además, como $p \leq q$, por definición se tiene $KerA^p = KerA^q$, luego $Dom(A^p) \subseteq ImA + KerA^p$. Nuevamente por el Lemma 1.2.2 (iv),

$$\frac{ImA^p}{ImA^{p+1}} \cong \frac{Dom(A^p)}{(ImA + KerA^{p+1}) \cap Dom(A^q)} = \{0\},$$

entonces $ImA^p = ImA^{p+1}$, esto es, $p \geq q$. □

Proposición 1.2.10. *Sea $A \in LR(X)$.*

(i) Si existe $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $X = ImA^p \oplus KerA^p$, entonces $\alpha(A) \leq p$, $\delta(A) \leq p$ y A es completamente reducido por $(ImA^p, KerA^p)$.

(ii) Supóngase que $R_c(A) = \{0\}$. Si $Dom(A) = X$, $\alpha(A) < \infty$ y $q = \delta(A) < \infty$, entonces A es completamente reducido por $(ImA^q, KerA^q)$.

Demostración.

(i) Sea $x \in KerA^{p+1}$. Entonces $(x, 0) \in Gr(A^{p+1})$ y por ende existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in Gr(A^p)$ y $(y, 0) \in Gr(A)$. De esto se observa que $y \in ImA^p \cap KerA$.
Puesto que $KerA \subseteq KerA^p$, entonces $y \in KerA^p$, de modo que $y \in ImA^p \cap KerA^p = \{0\}$, es decir, $y = 0$. Así, $(x, y) = (x, 0) \in Gr(A^p)$, esto es, $x \in KerA^p$; lo que prueba que $KerA^{p+1} = KerA^p$ y po lo tanto, $\alpha(A) \leq p$.
Similarmente, sea $y \in ImA^p$. Como $X = ImA^p \oplus KerA^p$, existen únicos $x_1 \in ImA^p$ y $x_2 \in KerA^p$ tales que $x = x_1 + x_2$. Nótese que existe $z \in X$ Tal que $(z, x_1) \in Gr(A^p)$ y $(x_2, 0) \in Gr(A^p)$. De esto se sigue que

$$(x_1, y) = (x, y) - (x_2, 0) \in Gr(A^p).$$

Así, $(z, y) \in Gr(A^p A^p) = Gr(A^{2p})$, de tal manera que $y \in ImA^{2p}$, esto significa que $ImA^p = ImA^{2p}$ y por lo tanto, $\delta(A) \leq p$.
Por otro lado, sea $(x, y) \in Gr(A)$. Por hipótesis, existen únicos $x_1 \in ImA^p$ y $x_2 \in KerA^p$ tales que $x = x_1 + x_2$.
Se puede observar que existe $y_1 \in X$ tal que $(x_2, y_1) \in Gr(A)$ y $(y_1, 0) \in Gr(A^{p-1})$. Luego

$$(x_1, y - y_1) = (x, y) - (x_2, y_1) \in Gr(A).$$

Por ende, $y - y_1 \in Ax \subseteq AA^{p+1}z$, para algún $z \in X$, esto es, $y - y_1 \in ImA^{p+1} = ImA^p$. De esto se sigue que

$$(x_1, y - y_1) \in Gr(A) \cap (ImA^p \times ImA^p) = Gr(A_{ImA^p}).$$

Así mismo, se observa que $y_1 \in KerA^{p-1} \subseteq KerA^p$ y $x_2 \in KerA^p$. Entonces

$$(x_2, y_1) \in Gr(A) \cap (KerA^p \times KerA^p) = Gr(A_{KerA^p}).$$

Por lo tanto,

$$(x, y) = (x_1, y - y_1) + (x_2, y_2) \in Gr(A_{ImA^p}) \oplus Gr(A_{KerA^p}).$$

(ii) Por la Proposición 5.8 de [9], se tiene que $X = ImA^q \oplus KerA^q$. Y por (i) se sigue que A es completamente reducido por $(ImA^q, KerA^q)$. □

1.3. Continuidad y acotación

En este apartado se define la norma de una relación lineal a través de la norma de un operador de rango cociente asociado. Esto permite estudiar las nociones de continuidad y acotación de una relación lineal.
En lo sucesivo X, Y, $Z, ...$ denotarán espacios normados sobre el

campo $\mathbb{K}$. Se considerará al espacio producto $X \times Y$ equipado con la siguiente norma: para $x \in X$ y $y \in Y$

$$||(x, y)|| = \text{máx}\{||x||_X, ||y||_Y\}.$$

Para $A \in LR(X, Y)$, la proyección canónica de Y en $Y/\overline{A(0)}$ será denotada por $Q^Y_{\overline{A(0)}}$ ó simplemente por Q cuando no hay riesgo de confusión.
Haciendo uso de la proyección canónica, se define la aplicación $QA : X \to Y/\overline{A(0)}$ por $QAx = y + \overline{A(0)}$, para cada $x \in X$ tal que $(x, y) \in Gr(A)$.

Proposición 1.3.1. *Sea $A \in LR(X, Y)$. QA es un operador lineal.*

Demostración. Se verá que QA está bien definida.
Sean $x, w \in Dom(A)$ tales que $x = w$. Entonces para algunos $y, z \in X$ tales que $(x, y), (w, z) \in Gr(A)$, $QAx = y + \overline{A(0)}$ y $QAw = z + \overline{A(0)}$.
Puesto que $x = w$, $y, z \in Ax$, lo que equivale a que $Ax = y + A(0)$ y $Ax = z + A(0)$, de manera que $y + A(0) = z + A(0)$. De esto se sigue que $y - z \in A(0) \subseteq \overline{A(0)}$, lo que implica $y + \overline{A(0)} = z + \overline{A(0)}$, esto es, $QAx = QAw$.
Por la Proposición 1.1.17, $QA(0) = Q(0) = \overline{A(0)}$, donde $\overline{A(0)}$ es el elemento cero del espacio cociente $Y/\overline{A(0)}$. Además, es claro, por la linealidad de A y de Q, que para cualesquiera $x, y \in Dom(A)$, $QA(x + y) = QAx + QAy$ y para cualquier $\alpha \in \mathbb{K}$, $QA(\alpha x) = \alpha QAx$.
Por lo tanto, QA es un operador lineal. □

La dificultad al tratar definir la norma de una relación lineal radica precisamente en los múltiples valores que esta puede tomar. Sin embargo, debido a la Proposición 1.3.1, a cada relación lineal A, se le puede asignar un operador lineal QA, de manera que la norma de A se puede definir vía QA como dicta la siguiente definición.

Definición 1.3.1. Si $A \in LR(X,Y)$, se define

$$||Ax|| := ||QAx|| \tag{1.4}$$

$$||A|| := ||QA||, \tag{1.5}$$

llamada *la norma de* Ax y *la norma de* A, respectivamente.

Proposición 1.3.2. *Si* $A \in LR(X,Y)$, *entonces para cualquier* $x \in Dom(A)$

(i) $||Ax|| = d(y, A(0))$, *para cualquier* $y \in Ax$,

(ii) $||Ax|| = d(Ax, A(0)) = d(Ax, 0)$.

Demostración.

(i) Si $y \in Ax$, entonces $Ax = y + A(0)$ y por tanto, $||Ax|| = ||y + A(0)|| = \text{ínf}\{||y+a|| : a \in A(0)\} = d(y, A(0))$.

(ii) Para un $z \in Ax$ fijo se tiene que

$$d(Ax, 0) = \text{ínf}\{||0 + y|| : y \in Ax\} = \text{ínf}\{||y|| : y \in Ax\} =$$

$$= \text{ínf}\{||z - (z-y)|| : y \in Ax\}.$$

Además se observa que $z - y \in A(0)$, entonces si se define a $k := z - y$ y aplicando (i),

$$\begin{aligned}\text{ínf}\{||z-(z-y)|| : y \in Ax\} &= \text{ínf}\{||z-k|| : k \in A(0)\}\\ &= d(z, A(0)) = ||Ax||.\end{aligned}$$

□

Definición 1.3.2. Sea $A \in LR(X,Y)$. Se dirá que A es continua si el operador $QA : X \to Y/\overline{A(0)}$ es continuo.
Se dirá que A es acotada si es continua y $Dom(A) = X$.

La clase de todas las relaciones lineales acotadas de X en Y se denotará por $BL(X,Y)$ y $BL(X,X) := BL(X)$.

Definición 1.3.3. Sea $A \in LR(X,Y)$. Se dirá que A es una relación lineal abierta si para subconjunto abierto U de $Dom(A)$, $A[U]$ es un subconjunto abierto de ImA, donde $Dom(A)$ y ImA están equipados con la topología relativa.

Proposición 1.3.3. *$A \in LR(X,Y)$ es continua si y sólo si A^{-1} es una relación lineal abierta.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supóngase que A^{-1} es una relación lineal abierta. Sea $x \in Dom(A)$ y sea $V/\overline{A(0)}$ un subconjunto abierto de $Y/\overline{A(0)}$ tal que V es un subconjunto abierto de $Im(A)$ y $QAx \in V/\overline{A(0)}$.
Para cualquier $y \in Ax$, $y \in V$. Por hipótesis, existe un abierto U tal que $x \in U$ y $U \subseteq A^{-1}[V]$, lo que implica que $A[U] \subseteq V$ y por tanto $A[U]/\overline{A(0)} \subseteq V/\overline{A(0)}$, donde $A[U]/\overline{A(0)} = QA[U]$.
Así que, A es continua.

($\Rightarrow$) Supóngase que A es continua. Sean V un subconjunto abierto de $Dom(A^{-1})$ y $w \in A^{-1}[V]$. Entonces existe $y \in V$ tal que $w \in A^{-1}y$; de donde se obtiene que $y \in Aw$.
Puesto que $Dom(A^{-1}) = ImA$, entonces existe un abierto U tal que $y \in U$ y $QA[U] = A[U]/\overline{A(0)} \subseteq V/\overline{A(0)}$. Aquí se observa que $A[U] \subseteq V$, luego $U \subseteq A^{-1}\left[A\left[U\right]\right] \subseteq A^{-1}[V]$.
Se concluye que A^{-1} es abierta. $\square$

Corolario 1.3.4. *Sea $A \in LC(X,Y)$ abierta. Entonces existe $M > 0$ tal que para cada $x \in Dom(A)$,*

$$d(x, KerA) \leq M \left\| Ax \right\|.$$

Demostración. Puesto que A es abierta, por la Proposición 1.3.3, A^{-1} es continua. Entonces existe $M > 0$ tal que para cada $y \in Dom(A^{-1})$, $\left\| A^{-1}y \right\| \leq M \left\| y \right\|$.
Como $y \in Dom(A^{-1}) = ImA$, entonces existe $x \in Dom(A)$ tal que $y \in Ax$, esto es, $Ax = y + A(0)$. Además, $A^{-1}y = A^{-1}Ax =$

$x + A^{-1}(0)$. Así,

$$\begin{aligned} \left\|A^{-1}y\right\| &= \left\|x + A^{-1}(0)\right\| = d(x, KerA) \\ \leq M \inf\{\|y - z\| : z \in A(0)\} &= M\|y + A(0)\| = M\|Ax\|. \quad \square \end{aligned}$$

1.4. Relaciones lineales cerradas

La noción de relación lineal cerrada es motivada por el concepto de operador cerrado.
En esta sección se estudia una caracterización de las relaciones lineales cerradas mediante su multivalor y su operador asociado. También se estudian resultados que permiten clarificar su importancia dentro de la teoría espectral. La sección culmina presentando un Teorema de la aplicación abierta para relaciones lineales.

Definición 1.4.1. Si $A \in LR(X, Y)$, se define la clausura de A como la relación lineal $\overline{A}$ tal que $Gr(\overline{A}) = \overline{Gr(A)}$.

Definición 1.4.2. Se dirá que $A \in LR(X, Y)$ es cerrada si $A = \overline{A}$.

La clase de todas las relaciones lineales cerradas de X en Y se denotará por $LC(X, Y)$, $LC(X, X) := LC(X)$.
$BLR(X, Y)$ denotará a la clase de todas las relaciones lineales acotadas, $BLC(X, Y)$ denotará a la clase de todas las relaciones lineales que son cerradas y acotadas, $BLC(X, X) := BLC(X)$.
De la Definición 1.4.1 se deduce que $A \in LC(X, Y)$ si $Gr(A)$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$. Además, es claro que $A \in LC(X, Y)$ si y sólo si $A^{-1} \in LC(Y, X)$.

Definición 1.4.3. Sea $A \in LR(X, Y)$ y sean $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ las completaciones de X, Y, respectivamente, esto es, $\widetilde{X}$ y $\widetilde{Y}$ son espacios de Banach. Sea $G \subseteq \widetilde{X} \times \widetilde{Y}$ la completación del subespacio $Gr(A)$. La relación lineal $\widetilde{A}$ definida por $Gr(\widetilde{A}) := G$ es llamada la completación de A y es tal que $\widetilde{A} \in LR(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$.

Proposición 1.4.1. *Sea $A \in LR(X, Y)$, con X e Y espacios normados. Si $A \in LC(X, Y)$, entonces $A(0)$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sea $v \in \overline{A(0)}$. Entonces existe una sucesión (u_n) en $A(0)$, tal que $\lim_n u_n = v$. Así que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(0, u_n) \in Gr(A)$, de modo que $(0, u_n)$ es una sucesión en $Gr(A)$ tal que $\lim_n (0, u_n) = (0, v)$ y como $Gr(A)$ es cerrado, entonces $(0, v) \in Gr(A)$, de lo que se sigue que $v \in A(0)$ y por tanto, $\overline{A(0)} \subseteq A(0)$. Se concluye que $A(0)$ es cerrado. □

Proposición 1.4.2. *Si $A \in LC(X, Y)$, entonces QA es un operador lineal cerrado, es decir, $Gr(QA)$ es cerrado en $X \times Y$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, considérese $(x, Qy) \in \overline{Gr(QA)}$, con $y \in Y$. Entonces existe una sucesión (x_n, QAx_n) en $Gr(QA)$ tal que $\lim_n (x_n, QAx_n) = (x, Qy)$.
Se observa que $\lim_n QAx_n = Qy$, entonces, por la continuidad de Q, existe una sucesión (y_n) en Ax_n y existe una sucesión (t_n) en $A(0)$ tales que $\lim_n (y_n + t_n) = y$. Nótese que $(x_n, y_n + t_n)$ es una sucesión en $Gr(A)$ que converge a (x, y).
Por hipótesis A es una relación cerrada, entonces (x, y) es también un elemento de $Gr(A)$, de esto se sigue que $y \in Ax$ de modo que $Qy \in QAx$. Por la Proposición 1.3.1, QA es un operador lineal, entonces $QAx = Qy$, entonces $(x, Qy) \in Gr(QA)$ y por tanto, $\overline{Gr(QA)} \subseteq Gr(QA)$.
Se concluye que QA es un operador cerrado. □

Corolario 1.4.3. *Sea $A \in LR(X, Y)$. $Gr(Q\overline{A}) = \overline{Gr(QA)}$.*

Demostración. Puesto que $\overline{A}$ es es cerrado, por la Proposición 1.4.2, $Q\overline{A}$ es un operador lineal cerrado, en particular, $Q\overline{A}$ es una relación lineal cerrada, entonces, $Gr(QA) \subseteq \overline{Gr(QA)} \subseteq Gr(Q\overline{A})$.
Por otro lado, sea $(x, Qy) \in Gr(Q\overline{A})$. Entonces $Q\overline{A}x = Qy$, es decir, existe $t \in Y$ con $(x, t) \in \overline{Gr(A)}$ tal que $Qt = t + \overline{A(0)} = Qy$, de modo que existe una sucesión $(x_n, y_n) \in Gr(A)$ tal que $\lim_n (x_n, y_n) = (x, t)$.
Además, (x_n, Qy_n) es una sucesión en $Gr(QA)$, entonces para cada

$n \in \mathbb{N}$, $(x_n, Qy_n) = (x_n, QAx_n)$ y es tal que

$$\lim_n (x_n, QAx_n) = (x, Qy).$$

Puesto que (x_n, QAx_n) es una sucesión en $Gr(QA)$, también es una sucesión en $\overline{Gr(QA)}$ que converge a (x, Qy). Como $\overline{Gr(QA)}$ es cerrado, $(x, Qy) \in \overline{Gr(QA)}$. Así, $Gr(Q\overline{A}) \subseteq \overline{Gr(QA)}$.
Se concluye que $Gr(Q\overline{A}) = \overline{Gr(QA)}$. □

Proposición 1.4.4. *Sea $A \in LR(X,Y)$. $A \in LC(X,Y)$ si y sólo si QA es un operador cerrado y $A(0)$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que A es una relación lineal cerrada. De la Proposición 1.4.1 y la Proposición 1.4.2 se sigue que QA es un operador lineal cerrado y que $A(0)$ es un conjunto cerrado.

($\Leftarrow$) Supóngase ahora que QA es un operador lineal cerrado y que $A(0)$ es un conjunto cerrado. Se verá que A es una relación lineal cerrada.
Sea $(x, y) \in \overline{Gr(A)}$. Entonces existe una sucesión (x_n, y_n) en $Gr(A)$ tal que $\lim\limits_n (x_n, y_n) = (x, y)$.
Considérese que (x_n, Qy_n) es una sucesión en $Gr(QA)$ tal que $\lim\limits_n (x_n, Qy_n) = (x, Qy)$ y como QA es cerrado, entonces $(x, Qy) \in Gr(QA)$.
Además, por el Corolario 1.4.3, $Gr(QA) = Gr(Q\overline{A})$, lo que implica que

$$Q\overline{A}x = Qy = y + \overline{A(0)} = y + A(0).$$

Entonces existe $t \in Y$ con $(x, t) \in \overline{Gr(A)}$ tal que $t + A(0) = y + A(0)$, lo que implica que $y - t \in A(0)$, esto es, $(0, y - t) \in Gr(A)$. Como $Gr(A)$ es un subespacio de $X \times Y$, entonces $(x, t) + (0, y - t) = (x, y) \in Gr(A)$.
Se concluye que A es una relación lineal cerrada. □

Proposición 1.4.5. *Sea $A \in LC(X,Y)$. $KerA$ es un subespacio cerrado de X.*

Demostración. Sea $x \in \overline{KerA}$. Entonces existe una sucesión (x_n) en $KerA$ tal que $\lim_n x_n = x$.
Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(x_n, 0) \in Gr(A)$, entonces

$$\lim_n (x_n, 0) = (x, 0) \in Gr(A).$$

Lo que implica que $x \in KerA$ y por lo tanto, $KerA$ es cerrado. □

La siguiente definición y los siguientes lemas son el preámbulo para abordar un Teorema de la aplicación abierta para relaciones lineales. Por ende, las demostraciones de dichos lemas serán omitidas y podrán encontrarse en [3].

Definición 1.4.4. Sea X un espacio de Banach y sean M, N subespacios de X. $\mathcal{B}_X$ denotará la bola cerrada unitaria en el espacio X.

$$\gamma(M, N) := \{\lambda \in [0,1] : \lambda\mathcal{B}_X \cap (M+N) \subseteq (M \cap \mathcal{B}_X) + N\}$$

es llamada la brecha máxima entre M y N.

Lema 1.4.1. *$M + N$ es cerrado si y sólo si $\gamma(M, N) > 0$.*

Lema 1.4.2. *Sean X, Y espacios de Banach y sea $T : X \to Y$ un operador lineal cerrado. T es continuo si y sólo si existe $\lambda > 0$ tal que*

$$\lambda\mathcal{B}_{Dom(T)\times Y} \subseteq \mathcal{B}_{Gr(T)} + (\{0\} \times Y).$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que T es continua. Considérese $\lambda := \min\left\{1, \|T\|^{-1}\right\}$.
Sea $(x, y) \in \lambda\mathcal{B}_{Dom(T)\times Y}$. Entonces

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda Tx) + (0, \lambda y - \lambda Tx),$$

con $(\lambda x, \lambda Tx) \in \mathcal{B}_{Gr(T)}$ y $(0, \lambda y - \lambda Tx) \in \{0\} \times Y$.

($\Leftarrow$) Sea $x \in Dom(T)$ tal que $\|x\| = 1$. Entonces

$$\lambda(x, 0) = (\lambda x, \lambda Tx) + (0, \lambda Tx).$$

Puesto que $(\lambda x, \lambda Tx) \in \mathcal{B}_{Gr(T)}$, entonces

$$\lambda \|Tx\| = \|\lambda Tx\| \leq \|\lambda Tx\| + \|\lambda x\| = \|(\lambda x, \lambda Tx)\| \leq 1.$$

Así, $\|Tx\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ y por lo tanto, T es continua. □

Proposición 1.4.6. *$A \in LC(X, Y)$ es continua si y sólo si $Dom(A)$ es cerrado en X.*

Demostración. Puesto que A es cerrada, por la Proposición 1.4.2, QA es un operdor lineal cerrado cuyo dominio es $Dom(A)$.
Sean $M := Gr(A)$ y $N := \{0\} \times Y$. Entonces $M + N = Dom(A) \times Y$. Así que, $Dom(A)$ es cerrado si y sólo si $M + N$ es cerrado. Por el Lema 1.4.2, lo anterior equivale a que QA es continua, es decir, A es una relación lineal continua. □

Corolario 1.4.7 (Teorema de la aplicación abierta para relaciones lineales)**.** *$A \in LC(X, Y)$ es abierta si y sólo si ImA es cerrado en Y.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si A es abierta, por definición, $A^{-1} \in LC(Y, X)$ es continua. Por la Proposición 1.4.6, $Dom(A^{-1}) = ImA$ es cerrado.

($\Leftarrow$) Se procede de forma similar. Por la Proposición 1.2.10 □

1.5. Parte quasinilpotente

Está sección está dedicada a estudiar los resultados básicos referentes a la parte quasinilpotente y al núcleo analítico de una relación lineal.

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$ denotará al conjunto de números naturales extendidos y se considerará que las sucesiones inician con el subíndice $n = 0$.

Definición 1.5.1. Sea $A \in BLC(X)$. Se define

$$H_0(A) := \Big\{x \in X : \text{existe } (x_n) \subseteq X \text{ tal que } x_0 = x\ , \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ x_{n+1} \in Ax_n \text{ y } \lim_n \|x_n\|^{\frac{1}{n}} = 0\Big\},$$

llamada la parte quasinilpotente de A.

Proposición 1.5.1. *Sea $A \in BLC(X)$. Considérese el conjunto*

$$\widetilde{H_0}(A) := \Big\{x \in X : \textit{existe } (x_n) \subseteq X \textit{ tal que } x_0 = x\ , \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ x_{n+1} \in Ax_n \textit{ y } \lim_n (d(x_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0\Big\}.$$

Entonces $H_0(A) = \widetilde{H_0}(A)$.

Demostración. Sea $x \in H_0(A)$. Entonces existe una sucesión (x_n) en X tal que $x_0 = x$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} \in Ax_n$ y $\lim_n \|x_n\|^{\frac{1}{n}} = 0$.
Se observa que

$$\lim_n \|x_n\|^{\frac{1}{n}} \geq \lim_n (d(x_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} \geq 0.$$

Así, $\lim_n (d(x_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$ y por lo tanto, $x \in \widetilde{H_0}(A)$.
Recíprocamente, considérese $x \in \widetilde{H_0}(A)$. Así, existe una sucesión (y_n) en X tal que $y_0 = x$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $y_{n+1} \in Ay_n$, $\lim_n (d(y_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$.
Puesto que A es cerrado, entonces $A(0)$ también es cerrado, de manera que existe una sucesión (a_n) en $A(0)$ tal que $d(y_n, A(0)) = \|y_n - a_n\|$.
La sucesión (x_n) se define por $x_0 := x$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n := y_n - a_n$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$Ax_n = A(y_n - a_n) = Ay_n - Aa_n = Ay_n - A(0) = Ay_n$$

y para cada $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} = y_{n+1} - a_{n+1} \in Ay_n - A(0) = Ay_n = Ax_n.$$

Además,

$$\lim_n \|x_n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|y_n - a_n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n (d(t_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Por lo tanto, $x \in H_0(A)$ y se concluye que $H_0(A) = \widetilde{H_0}(A)$. $\square$

El objetivo de la Proposición 1.5.1 es mostrar el comportamiento de la parte quasinilpotente de $A \in BLC(X)$ desde la perspectiva de las distancias de una sucesión a su multivalor. Esto también permite trabajar de manera equivalente con la definición dada en [7] y con $\widetilde{H}_0(A)$.

Proposición 1.5.2. *Sea $A \in BLC(X)$. $H_0(A)$ es subespacio de X.*

Demostración. Es claro que $H_0(A) \neq \varnothing$, ya que $0 \in H_0(A)$, pues al considerar la sucesión (x_n) cuyos términos son todos iguales a cero, se cumple que $x_0 = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} \in Ax_n$ y $\lim_n \|x_n\|^{\frac{1}{n}} = 0$.
Ahora, sean $x, y \in H_0(A)$ y α un escalar arbitrario. Entonces existen sucesiones (x_n) y (y_n) en X tales que $x_0 = x$, $y_0 = y$ y para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} \in Ax_n$, $\lim_n (d(x_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$ y $y_{n+1} \in Ay_n$, $\lim_n (d(y_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$. Considérese la sucesión $(x_n + y_n)$. Es claro que $x+y = x_0+y_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1}+y_{n+1} \in Ax_n+Ay_n = A(x_n + y_n)$. Además,

$$\lim_n (d(x_n + y_n, A(0))) \leq \lim_n (d(x_n, A(0))^{\frac{1}{n}} + d(y_n, A(0))^{\frac{1}{n}})^n,$$

Lo que implica que $\lim_n (d(x_n + y_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$. Así que $x + y \in H_0(A)$.
Finalmente, considérese la sucesión (αx_n). Es claro que $\alpha x_0 = \alpha x$, $\alpha x_{n+1} \in \alpha Ax_n = A(\alpha x_n)$ y $\lim_n (d(\alpha x_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$. De esto se tiene que $\alpha x \in H_0(A)$ y se concluye que $H_0(A)$ es un subespacio de X. $\square$

Proposición 1.5.3. *Sea $A \in BLC(X)$. Se cumple* *(i)* $x \in H_0(A)$ *si y sólo si* $Ax \cap H_0(A) \neq \varnothing$,

(ii) *para cada* $n \in \mathbb{N}$, $KerA^n \subseteq H_0(A)$,

(iii) $A[H_0(A)] \subseteq H_0(A)$.

Demostración.

(i) ($\Rightarrow$) Supóngase que $x \in H_0(A)$. Entonces existe una sucesión (x_n) en X tal que $x_0 = x$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} \in Ax_n$ y $\lim\limits_n (d(x_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$. Obsérvese que $x_1 \in Ax_0 = Ax$.
Considérese la sucesión (w_n) definida por $w_0 = x_1$ y $w_n = x_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De esto se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in Aw_{n-1}$ y $\lim\limits_n (d(w_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$.
Así que $x_1 \in H_0(A)$ y por lo tanto, $Ax \cap H_0(A) \neq \varnothing$.

($\Leftarrow$) Supóngase que $Ax \cap H_0(A) \neq \varnothing$, para algún $x \in X$. Entonces existe $w \in Ax \cap H_0(A)$. Puesto que $w \in H_0(A)$, entonces existe una sucesión (w_n) en X tal que $w_0 = w$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} \in Aw_n$ y $\lim\limits_n (d(w_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$.
Considérese la sucesión (x_n) definida por $x_0 = x$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = w_{n-1}$. De esto se tiene que $x_1 = w_0 = w \in Ax = Ax_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = w_n \in Aw_{n-1} = Ax_n$ y $\lim\limits_n (d(x_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_n (d(w_{n-1}, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$.
Se concluye que $x \in H_0(A)$.

(ii) Por inducción matemática sobre n. Se verá que la afirmación se cumple para $n = 1$.
Sea $x \in KerA$. Entonces $0 \in Ax$ y de esto se tiene que $Ax = A(0)$. Puesto que $A(0)$ y $H_0(A)$ son subespacios de X, entonces $A(0) \cap H_0(A) \neq \varnothing$, esto es, $Ax \cap H_0(A) \neq \varnothing$, aplicando (i) se sigue que $x \in H_0(A)$.
Ahora supóngase que para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple $KerA^n \subseteq H_0(A)$. Se probará que $KerA^{n+1} \subseteq H_0(A)$.
Sea $x \in KerA^{n+1}$. Entonces $0 \in A^{n+1}x = A^n(Ax)$, así que

existe $z \in Ax \cap Dom(A^n)$ tal que $0 \in A^n z$. Por hipótesis inductiva, $z \in H_0(A)$, luego existe una sucesión (z_n) en X tal que $z_0 = z$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} \in Az_n$ y $\lim_n (d(z_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$.
Considérese la sucesión (x_n) definida por $x_0 = x$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = z_{n-1}$, de tal manera que $x_1 = z_0 = z \in Ax = Ax_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = z_n \in Az_{n-1} = Ax_n$ y $\lim_n (d(x_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = \lim_n (d(z_{n-1}, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$.
Por lo tanto, $x \in H_0(A)$.

(iii) Sea $y \in A[H_0(A)]$. Entonces existe $x \in Dom(A) \cap H_0(A)$ tal que $y \in Ax$.
Además, existe una sucesión (x_n) en X tal que $x_0 = x$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} \in Ax_n$ y $\lim_n (d(x_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$. Considérese la sucesión (w_n) definida por $w_0 = y$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $w_n = x_{n+1}$.
Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $w_n = x_{n+1} \in Ax_n = Aw_{n-1}$ y

$$\lim_n (d(w_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = \lim_n (d(x_{n+1}, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Por lo tanto, $y \in H_0(A)$. □

Proposición 1.5.4. *Sea $A \in BLC(X)$. Si $H_0(A)$ es un subespacio cerrado de X, entonces $A_{H_0(A)}$ es una relación lineal cerrada y acotada, y $H_0(A_{H_0(A)}) = H_0(A)$.*

Demostración. Se sabe que relación lineal $A_{H_0(A)}$ está determinada por su gráfica

$$Gr(A_{H_0(A)}) = Gr(A) \cap (H_0(A) \times H_0(A))$$

puesto que $Gr(A)$ y $H_0(A)$ son subespacios cerrados de $X \times X$ y X, respectivamente, entonces $Gr(A_{H_0(A)})$ también es cerrado.
Ahora, nótese que $Dom(A_{H_0(A)}) \subseteq H_0(A)$. Si $x \in H_0(A)$, entonces $H_0(A) \cap Ax \neq \varnothing$, es decir, $Ax \neq \varnothing$, lo que implica que $x \in Dom(A_{H_0(A)})$ y por lo tanto, $Dom(A_{H_0(A)}) = H_0(A)$.

Considérese la proyección canónica restringida al subespacio $H_0(A)$, definida por $Q_1 := Q^{H_0(A)}_{A_{H_0(A)}(0)} : H_0(A) \to H_0(A)/A_{H_0(A)}(0)$. Puesto que $A \in BLC(X)$, entonces el operador QA es continuo, entonces $Q_1 A_{H_0(A)}$ es continuo. Por lo tanto $A_{H_0(A)} \in BLC(X)$.
Por otro lado, sea $x \in H_0(A)$, entonces existe una sucesión (x_n) en X tal que x_0, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} \in Ax_n$ y $\lim\limits_n (d(x_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$.
Considérese la sucesión (w_n) definida por $w_{n-1} = x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. (w_n) es una sucesión tal que $w_0 = x_1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $w_n = x_{n+1} \in Ax_n = Aw_{n-1}$ y $\lim\limits_n (d(w_n, A(0)))^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_n (d(x_{n+1}, A(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$. Así, $x_1 \in H_0(A)$.
Procediendo de forma recursiva, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in H_0(A)$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(x_n, x_{n+1}) \in Gr(A) \cap (H_0(A) \times H_0(A)),$$

esto es, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} \in A_{H_0(A)} x_n$ y por lo tanto, $x \in H_0(A_{H_0(A)})$.
Recíprocamente, sea $x \in H_0(A_{H_0(A)})$. Entonces existe una sucesión (x_n) en X tal que $x_0 = x$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} \in A_{H_0(A)} x_n$ y $\lim\limits_n (d(x_n, A_{H_0(A)}(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$.
Obsérvese que para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in H_0(A_{H_0(A)})$, lo que implica que $A_{H_0(A)} x_n = Ax_n$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$, entonces $x \in H_0(A)$.
Se concluye que $H_0(A) = H_0(A_{H_0(A)})$. $\square$

Definición 1.5.2. Sea $A \in LR(X)$. El núcleo analítico de A es definido por

$$K(A) := \{x \in X : \exists \alpha > 0, \ \exists (x_n) \text{ tal que } x = x_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$
$$x_n \in Ax_{n+1} \text{ y } d(x_n, KerA \cap A(0)) \leq \alpha^n d(x, KerA \cap A(0))\}$$

Lema 1.5.1. *Sea $A \in LR(X)$. $A(0) \subseteq K(A)$.*

Demostración. Sea $x \in A(0)$. Considérese la sucesión (x_n) definida por $x_0 = x$ y para cada $n \geq 1$, $x_n = 0$. Es claro que para cada

$n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in Ax_{n+1}$ y para cada $\alpha > 0$,

$$d(x_n, KerA \cap A(0)) = 0 \leq \alpha^n d(x, KerA \cap A(0)).$$

Por lo tanto, $x \in K(A)$. $\square$

Proposición 1.5.5. *Sea $A \in BLC(X)$. $K(A)$ es un subespacio de X.*

Demostración. Es claro que $K(A) \neq \varnothing$, ya que $0 \in A(0) \subseteq K(A)$. Sean $x, y \in K(A)$. Entonces existen escalares positivos α, β y existen sucesiones (x_n), (y_n) tales que $x_0 = x$, $y_0 = y$ y para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene $x_n \in Ax_{n+1}$, $d(x_n, KerA \cap A(0)) \leq \alpha^n d(x, KerA \cap A(0))$ y $y_n \in Ay_{n+1}$, $d(y_n, KerA \cap A(0)) \leq \beta^n d(y, KerA \cap A(0))$. Considérese la sucesión $(x_n + y_n)$. Es claro que $x_0 + y_0 = x + y$ y para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n + y_n \in Ax_{n+1} + Ay_{n+1} = A(x_{n+1} + y_{n+1})$,

$$d(x_n + y_n, KerA \cap A(0)) \leq d(x_n, KerA \cap A(0)) + d(y_n, KerA \cap A(0))$$

$$\leq \alpha^n d(x, KerA \cap A(0)) + \beta^n d(y, KerA \cap A(0)).$$

Si $\delta := \text{máx}\{\alpha, \beta\}$ y

$$\mu := \frac{d(x, KerA \cap A(0)) + d(y, KerA \cap A(0))}{d(x + y, KerA \cap A(0))},$$

entonces

$$\alpha^n d(x, KerA \cap A(0)) + \beta^n d(y, KerA \cap A(0)) \leq$$

$$\leq \delta^n \mu d(x + y, KerA \cap A(0)),$$

y por tanto, $x + y \in K(A)$.
Ahora, sea κ un escalar arbitrario. Si se toma la sucesión (κx_n), entonces $\kappa x_0 = \kappa x$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $\kappa x_n \in \kappa A x_{n+1} = A(\kappa x_{n+1})$ y

$$d(\kappa x_n, KerA \cap A(0)) = |\kappa|\, d(x_n, KerA \cap A(0)) \leq$$

$$\leq |\kappa|\, \alpha^n d(x, KerA \cap A(0)),$$

así, $\alpha x \in K(A)$ y se concluye que $K(A)$ es un subespacio de X. $\square$

Proposición 1.5.6. *Sea $A \in BLC(X)$. Entonces $A[K(A)] = K(A)$.*

Demostración. Sea $y \in A[K(A)]$. Entonces existe $x \in K(A) \cap Dom(A)$ tal que $y \in Ax$.
Puesto que $x \in K(A)$, entonces existe una sucesión (x_n) en X y existe $\alpha > 0$ tales que $x_0 = x$ y para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in Ax_{n+1}$,

$$d(x_n, KerA \cap A(0)) \leq \alpha^n d(x, KerA \cap A(0)).$$

Considérese la sucesión (y_n) definida por $y_0 = y$ y para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $y_{n+1} = x_n$. Así que $y_0 = y \in Ax = Ay_1$; en general, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{n-1} \in Ax_n = Ay_{n+1}$.
Además, si se define

$$\beta := \max\left\{\alpha, \frac{d(x, KerA \cap A(0))}{d(y, KerA \cap A(0))}\right\},$$

entonces

$$\beta^n d(y, KerA \cap A(0)) \geq \beta^{n-1} d(x, KerA \cap A(0)) \geq$$

$$\geq \alpha^{n-1} d(x, KerA \cap A(0)) \geq d(x_{n-1}, KerA \cap A(0)) =$$

$$d(y_n, KerA \cap A(0)).$$

Así, $y \in K(A)$.
Por otro lado, sea $w \in K(A)$. Entonces existe $\delta > 0$ y existe una sucesión (w_n) en X tales que $w_0 = w$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \in Aw_{n+1}$ y

$$d(w_n, KerA \cap A(0)) \leq \delta^n d(w, KerA \cap A(0)).$$

Considérese la sucesión (z_n) definida por $z_0 = w_1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_n = w_{n+1}$. Entonces $z_0 = w_1 \in Aw_2 = Az_1$ y en general, para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_n = w_{n+1} \in Aw_{n+2} = Az_{n+1}$. Además, si

$$\varepsilon := \max\left\{\delta, \delta^2 \frac{d(w, KerA \cap A(0))}{d(w_1, KerA \cap A(0))}\right\},$$

entonces

$$\varepsilon^n d(w_1, Ker A \cap A(0)) \geq \varepsilon^{n-1}\delta^2 d(w, Ker A \cap A(0)) \geq$$
$$\geq \delta^{n-1}\delta^2 d(w, Ker A \cap A(0)) = \delta^{n+1} d(w, Ker A \cap A(0))$$
$$\geq d(w_{n+1}, Ker A \cap A(0)) = d(z_n, Ker A \cap A(0)).$$

Esto implica que $w_1 \in K(A)$ y por lo tanto, $Aw_1 \subseteq A[K(A)]$. Se concluye que $w \in A[K(A)]$. □

Proposición 1.5.7. *Sea $A \in BCL(X)$. Si E es un subespacio cerrado de X tal que $A[E] = E$, entonces $E \subseteq K(A)$.*

Demostración. Sea $A_0 := A_E$. Puesto que $A[E] = E$, A_0 suprayectiva y por el Teorema de la aplicación abierta para relaciones lineales (1.4.7), A_0 es una relación lineal abierta.
Así, existe $\delta > 0$ tal que, para cada $x \in E$,

$$d(x, Ker A_0) \leq \delta \|A_0 x\|.$$

Sean $\varepsilon > 0$ y $w \in E$. Entonces existe $x \in E$ tal que $w \in Ax$, de modo que es posible encontrar $y \in Ker A$ tal que

$$\|x - y\| \leq (\delta + \varepsilon) d(w, A(0)).$$

Se define $w_1 = x - y$. Como $y \in Ker A$, entonces $0 \in Ay$, esto es, $Ay = A(0)$. Así,

$$w \in Ax = Ax - A(0) = Ax - Ay = A(x - y) = Aw_1$$

y

$$d(w_1, A(0) \cap Ker A) \leq (\delta + \varepsilon) d(w, Ker A \cap A(0)).$$

Aplicando de forma recursiva el procedimiento anterior, se construye una sucesión (w_n) tal que $w_0 = w$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \in Aw_{n+1}$ y

$$d(w_n, Ker A \cap A(0)) \leq (\delta + \varepsilon)^n d(w, Ker A \cap A(0)).$$

Se concluye que $w \in K(A)$. □

Capítulo 2

Teoría espectral

En el presente capítulo se plantean los conceptos de espectro, conjunto resolvente y función resolvente, de manera que se estudiarán algunos resultados, bajo ciertas condiciones adicionales, que son de suma importancia dentro de la teoría espectral para relaciones lineales.

Se considerará que $X, Y, Z, ...$ son espacios normados sobre $\mathbb{C}$. En lo sucesivo, se tomará la siguiente notación $\lambda - A := \lambda I - A$.

2.1. Propiedades espectrales

Dentro de lo clásico de la Teoría espectral para operadores lineales, la función resolvente, conjunto resolvente y espectro son construidos para operadores acotados definidos sobre algún espacio de Banach.
Para poder hablar sobre conceptos análogos a los anteriores para relaciones lineales y que estos tengan comportamientos y propiedades similares, en un principio se construyen con el auxilio de la completación de la relación lineal en cuestión. A continuación se define la función resolvente de una relación lineal A usando su completación $\widetilde{A} \in LR(\widetilde{X})$.

Definición 2.1.1. Sean X un espacio normado, $A \in LR(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. $(\lambda - \widetilde{A})^{-1} \in LR(X)$ es llamada la resolvente de A.

Definición 2.1.2. El *conjunto resolvente* de A se define por

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - \widetilde{A})^{-1} \text{ es operador y } Dom(\lambda - \widetilde{A})^{-1} = X\right\}.$$

El *espectro* de A es es definido por $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Si se considera que X es un espacio de Banach y $A \in LC(X)$, entonces $A = \widetilde{A}$. Así, para cualquier $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - \widetilde{A})^{-1}$ es un operador cuya gráfica $Gr((\lambda - A)^{-1})$ es cerrada, entonces por el Teorema de la gráfica cerrada, $(\lambda - A)^{-1} \in B(X)$. Por lo tanto, el resolvente de A se puede escribir de la siguiente forma:

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A)^{-1} \in B(X) \text{ y } Dom(\lambda - A)^{-1} = X\right\}.$$

Debido a esto, es fácil probar que $0 \notin \sigma(A^{-1})$ si y sólo si $A \in B(X)$. Por simplicidad, en lo sucesivo se usaran espacios de Banach y relaciones lineales cerradas, salvo que se indique lo contrario.

Proposición 2.1.1. *Sea $A \in LC(X)$. $\rho(A)$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $\lambda \in \rho(A)$ y considérese $r = \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|^{-1}$. Se probará que $B(\lambda, r) \subseteq \rho(A)$.
Sea $\mu \in B(\lambda, r)$. Se observa que

$$\left\|(\lambda - \mu)(\lambda - A)^{-1}\right\| = |\lambda - \mu| \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|^{-1} \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| = 1,$$

Entonces $I - (\lambda - \mu)(\lambda - A)^{-1}$ es un operador invertible. Además, para cada $x \in Dom(A)$, por la Proposición 1.1.6,

$$(\lambda - A)\left[I - (\lambda - \mu)(\lambda - A)^{-1}\right] x = (\lambda - A)\left[x - (\lambda - \mu)(\lambda - A)^{-1} x\right]$$

$$= (\lambda - A)x - (\lambda - \mu)(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x =$$

$$= (\lambda - A)x - (\lambda - \mu)\left[x + (\lambda - A)(0)\right] = (\lambda - A)x - (\lambda - \mu)\left[x + A(0)\right] =$$

$$= (\lambda - A)x - (\lambda - \mu)x - (\lambda - \mu)A(0) = (\lambda - A)x - (\lambda - \mu)x - A(0) =$$

$$= \lambda x - Ax - \lambda x + \mu x - A(0) = \mu x - A(x - 0) =$$

$$= \mu x - Ax = (\mu - A)x.$$

Así, $(\lambda - A)\left[I - (\lambda - \mu)(\lambda - A)^{-1}\right] = (\mu - A)$, además $(\lambda - A)$, $I - (\lambda - \mu)(\lambda - A)^{-1}$ son invertibles, entonces $(\mu - A)$ también es invertible, es decir, $(\mu - A)^{-1} \in B(X)$ y por lo tanto, $\mu \in \rho(A)$.
Se concluye que $\rho(A)$ es abierto. □

Proposición 2.1.2. *Sean* $A \in LC(X)$ *y* $\lambda \in \rho(A)$. *Entonces* $Ker(\lambda - A)^{-1} = A(0)$.

Demostración. Sea $x \in Ker(\lambda - A)^{-1}$. Entonces $(\lambda - A)^{-1}x = 0$, luego, por el Corolario 1.1.16

$$(\lambda - A)(0) = (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x = x + (\lambda - A)(0).$$

Esto es, $A(0) = x + A(0)$, así que, por la Proposición 1.1.12 (i), $x \in A(0)$.
Recíprocamente, si $x \in A(0)$, entonces usando el Corolario 1.1.15, $(\lambda - A)^{-1}x \in (\lambda - A)^{-1}A(0) = (\lambda - A)^{-1}(0) = \{0\}$.
Por lo tanto, $(\lambda - A)^{-1}x = 0$ y de esto se concluye que $x \in Ker(\lambda - A)^{-1}$. □

Proposición 2.1.3. *Sean* $A \in LC(X)$ *y* $\lambda \in \rho(A)$. *Entonces* $Im(\lambda - A)^{-1} = Dom(A)$.

Demostración. Si $y \in Im(\lambda - A)^{-1}$, entonces existe $x \in X$ tal que $(\lambda - A)^{-1}x = y$, lo que implica que $x \in (\lambda - A)y$. Por la proposición 1.1.12,

$$(\lambda - A)y = \lambda y - Ay = x + (\lambda - A)(0) = x + A(0).$$

Así que, $Ay = \lambda y - x + A(0) \neq \varnothing$. Por lo tanto, $y \in Dom(A)$.
Recíprocamente. Si $x \in Dom(A)$, entonces existe $y \in X$ tal que

$(x,y) \in Gr(A)$, esto es, $y \in Ax$. Por la Propposición 1.1.12, $Ax = y + A(0)$, de donde se obtiene, $\lambda x - Ax = \lambda x - y + A(0)$.
Por ende, $\lambda x - y \in (\lambda - A)x$, esto es, $(x, \lambda x - y) \in Gr(\lambda - A)$, luego $(\lambda x - y, x) \in Gr((\lambda - A)^{-1})$. Puesto que $(\lambda - A)^{-1}$ es un operador lineal, se tiene $(\lambda - A)^{-1}(\lambda x - y) = x$ y por lo tanto, $x \in Im(A-\lambda)^{-1}$.
Se concluye que $Im(\lambda - A)^{-1} = Dom(A)$. $\square$

Proposición 2.1.4 (Ecuación resolvente)**.** *Sea $A \in LC(X)$. Entonces para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(A)$,*

$$(\lambda_1 - A)^{-1} - (\lambda_2 - A)^{-1} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 - A)^{-1}(\lambda_2 - A)^{-1}.$$

Demostración. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(A)$ y sea $x \in X$.

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 - A)^{-1}(\lambda_2 - A)^{-1}x = (\lambda_1 - A)^{-1}(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - A)^{-1}x.$$

Nótese

$$(\lambda_1 - A)^{-1}\left[\lambda_2 - \lambda_1 + A - A\right](\lambda_2 - A)^{-1}x =$$

$$= (\lambda_1 - A)^{-1}\left[(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - A)^{-1}x + (A - A)(\lambda_2 - A)^{-1}x\right] =$$

$$= (\lambda_1 - A)^{-1}\left[(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - A)^{-1}x + A(0)\right] =$$

$$= (\lambda_1 - A)^{-1}(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - A)^{-1}x + (\lambda_1 - A)^{-1}A(0) =$$

$$= (\lambda_1 - A)^{-1}(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - A)^{-1}x + 0 =$$

$$= (\lambda_1 - A)^{-1}(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - A)^{-1}x.$$

Así,

$$(\lambda_1 - A)^{-1}(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - A)^{-1}x =$$

$$= (\lambda_1 - A)^{-1}\left[\lambda_2 - \lambda_1 + A - A\right](\lambda_2 - A)^{-1}x =$$

$$= (\lambda_1 - A)^{-1}[(\lambda_2 - A) - (\lambda_1 - A)](\lambda_2 - A)^{-1}x =$$

$$= (\lambda_1 - A)^{-1}[(\lambda_2 - A)(\lambda_2 - A)^{-1}x - (\lambda_1 - A)(\lambda_2 - A)^{-1}x] =$$

$$= (\lambda_1 - A)^{-1}[x + (\lambda_2 - A)(0)] - (\lambda_1 - A)^{-1}(\lambda_1 - A)(\lambda_2 - A)^{-1}x =$$

$$= (\lambda_1 - A)^{-1}x + (\lambda_1 - A)^{-1}(\lambda_2 - A)(0) - (\lambda_2 - A)^{-1}x =$$

$$= (\lambda_1 - A)^{-1}x - (\lambda_2 - A)^{-1}x = [(\lambda_1 - A)^{-1} - (\lambda_1 - A)^{-2}]x.$$

□

Corolario 2.1.5. *Sea $A \in LC(X)$. Para cualesquiera $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$.*

Demostración. Sean $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Por la ecuación resolvente,

$$(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} =$$

$$= \frac{(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}}{\lambda - \mu} - \frac{(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}}{\mu - \lambda} =$$

$$= \frac{(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1} + (\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}}{\lambda - \mu} = 0.$$

Por lo tanto, $(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$. □

Proposición 2.1.6. *Sean $A \in LC(X)$ y $\lambda \in \rho(A)$. Entonces*

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}}{\mu - \lambda} = -[(\lambda - A)^{-1}]^2.$$

Demostración. Por la demostración de la Proposición 2.1.1 se sabe que $B(\lambda, r) \subseteq \rho(A)$, donde $r = \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|^{-1}$. Sea $\mu \in B(\lambda, r)$ tal que $\mu \neq \lambda$. Por la ecuación resolvente,

$$((\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1})(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)^{-2} - (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} =$$

$$= (\lambda - A)^{-2} - \frac{(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}}{\lambda - \mu} =$$

$$= (\lambda - A)^{-2} + \frac{(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}}{\mu - \lambda}.$$

Así que,

$$\left\|(\lambda - A)^{-2} + \frac{(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}}{\mu - \lambda}\right\| =$$

$$\left\|((\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1})(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq \left\|(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}\right\| \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|$$

Por otro lado, se observa

$$\left\|(\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}\right\| = |\mu - \lambda| \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|^{-1} \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| = 1.$$

Por lo tanto, $I - (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}$ es un operador invertible cuya inversa es:

$$(I - (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(\mu - \lambda)^n(\lambda - A)^{-n}. \tag{2.1}$$

Además, en la demostración de la Proposición 2.1.1 se tiene

$$(\lambda - A)\left[I - (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}\right] = (\mu - A).$$

Entonces

$$(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(\mu - \lambda)^n(\lambda - A)^{-(n+1)}\right) - (\lambda - A)^{-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(\mu - \lambda)^n(\lambda - A)^{-(n+1)} = (\lambda - A)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(\mu - \lambda)^n(\lambda - A)^{-n}.$$

De esta forma se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\left\|(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \sum_{n=1}^{\infty} |(\mu - \lambda)|^n \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|^n.$$

Ahora,

$$\lim_{\mu \to \lambda} \left\|(\lambda - A)^{-2} + \frac{(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}}{\mu - \lambda}\right\| \leq$$

$$\leq \lim_{\mu \to \lambda} \left\|(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}\right\| \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq \lim_{\mu \to \lambda} \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \sum_{n=1}^{\infty} |(\mu - \lambda)|^n \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|^n \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|$$

$$= \lim_{\mu\to\lambda} \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(\mu-\lambda)|^n \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|^{n+1} = 0$$

Se concluye que

$$\lim_{\mu\to\lambda} \frac{(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}}{\mu - \lambda} = -[(\lambda - A)^{-1}]^2. \qquad \square$$

La Proposición 2.1.6 muestra que la función definida por $\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1}$ de $\rho(A)$ en $B(X)$ es holomorfa sobre $\rho(A)$.

Proposición 2.1.7. *Sea $A \in BLC(X)$ con $\rho(A) \neq \varnothing$. Si $\alpha(A)$ y $\delta(A)$ son finitos, entonces existen subespacios cerrados M y N tales que $X = M \oplus N$ y A es completamente reducido por (M, N), donde $A_M^{-1} \in B(M)$ y A_N es un operador acotado nilpotente.*

Demostración. Sea $m = \delta(A) < \infty$. Por la Proposición 1.2.10 (ii), para $M := ImA^m$ y $N := KerA^m$, se tiene que $X = M \oplus N$ y $Gr(A) = Gr(A_M) \oplus Gr(A_N)$.
Se sabe que A^m es cerrado, lo que implica que M y N también son cerrados.
Es fácil observar que

$$KerA_M = KerA \cap M \subseteq KerA^m \cap M = \{0\}$$

y

$$ImA_M = ImA \cap M = M,$$

esto implica que $A_M^{-1} \in B(M)$.
Por otro lado, sea $y \in A_N$, entonces $(0, y) \in Gr(A_N) = Gr(A) \cap (N \times N)$, entonces $y \in N$, luego $y \in A(0) \cap N \subseteq M \cap N = \{0\}$.
Esto prueba que A_N es un operador lineal.
Además, sean $x \in N$ y $y \in A_N^m x$. Entonces $y \in ImA_N^m \subseteq M$ y $(x, y) \in Gr(A_N^m)$; de modo que existe $w \in X$ tal que $(x, w) \in Gr(A_N^{m-1})$ y $(w, y) \in Gr(A_N)$. Así, $y \in N$, luego $y \in M \cap N$, esto es, $y = 0$.
Se concluye que A_N es un operador nilpotente. $\square$

Si se considera un espacio complejo de Banach X y un operador lineal quasinilpotente $T : X \to X$, entonces $\sigma(T) = \{0\}$. Por consiguiente, T no es invertible. De esto es claro que $T^{-1} \in LC(X)$ y $\sigma(T^{-1}) = \varnothing$.
Esto prueba que existen relaciones lineales cuyo espectro es vacío, sin embargo, el estudio de esta situación no forma parte del propósito de este escrito. Una forma de evitar esta situación, se define el espectro extendido de una relación lineal. Considérese el plano complejo extendido $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ equipado con la siguiente topología: U es abierto en $\mathbb{C}_\infty$ si y sólo si U es abierto en $\mathbb{C}$ ó si $U = V \cup \{\infty\}$, donde $\mathbb{C} \setminus V$ es un conjunto compacto en $\mathbb{C}$.

Definición 2.1.3. Se define el *espectro extendido* de $A \in LC(X)$ como el subconjunto $\widetilde{\sigma}(A)$ de $\mathbb{C}_\infty$ tal que $\widetilde{\sigma}(A) = \sigma(A)$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $A0 = \{0\}$, es decir, A es un operador cerrado,

(2) La función resolvente de A es analítica y continua en ∞;

(3) $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} (\lambda - A)^{-1} = 0$.

En otro caso, $\widetilde{\sigma}(A) = \sigma(A) \cup \{\infty\}$. El conjunto $\widetilde{\rho}(A) = \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\sigma}(A)$ es llamado *conjunto resolvente extendido* de la relación A.

Proposición 2.1.8. *Si $X \neq \{0\}$, entonces para cada $A \in LC(X)$, $\widetilde{\sigma}(A) \neq \varnothing$,*

Demostración. Por contradicción. Supóngase que $X \neq \{0\}$ y que existe una relación $A \in LC(X)$ tal que $\widetilde{\sigma}(A) = \varnothing$. Esto implica que $\widetilde{\rho}(A) = \mathbb{C}_\infty$ y por consiguiente la función resolvente de A es una función entera.
Como para cada $\lambda \in \rho(A)$ el operador $(\lambda - A)^{-1}$ es acotado, entonces existe $M > 0$ tal que para cada $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A)^{-1}$ es acotada, es decir, $|(\lambda - A)^{-1}| < M$. Por el Teorema de Louville $(\lambda - A)^{-1} = 0$. Luego $X = Im(\lambda - A)^{-1} = \{0\}$, lo que es una

contradicción.
Por lo tanto, $\widetilde{\sigma}(A) \neq \varnothing$. $\square$

La Proposición 2.1.8 muestra que en efecto al trabajar con el espectro extendido de una relación lineal se evitan casos triviales.

Proposición 2.1.9. *Sea* $A \in LC(X)$. $\infty \notin \widetilde{\sigma}(A)$ *si y sólo si* $0 \notin \sigma(A^{-1})$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Si $0 \notin \sigma(A^{-1})$, entonces $A \in B(X)$, luego A satisface las condiciones (1), (2) y (3) de la Definición 2.1.3, lo que implica que $\widetilde{\sigma}(A) = \sigma(A)$, es decir, $\infty \notin \widetilde{\sigma}(A)$.

($\Rightarrow$) Supóngase que $\infty \notin \widetilde{\sigma}(A)$ y que $0 \in \sigma(A^{-1})$. Entonces $A \notin B(X)$ y en general, A no satisface (1), (2) y (3) de la Definición 2.1.3. Así que, $\widetilde{\sigma}(A) = \sigma(A) \cup \{\infty\}$, lo que es falso.
Por lo tanto, $0 \notin \sigma(A^{-1})$. $\square$

Proposición 2.1.10. *Si* $A \in LC(X)$, *entonces*

$$\widetilde{\sigma}(A^{-1}) = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \widetilde{\sigma}(A)\right\}$$

Demostración. Considérese el caso cuando $\lambda \neq 0$. Las siguientes relaciones $\lambda - A$ y $\lambda^{-1} - A^{-1}$, son definidas por su gráfica de la siguiente forma:

$$Gr(\lambda - A) = \{(x, \lambda x - y) : (x, y) \in Gr(A)\}$$

y

$$Gr(\lambda^{-1} - A^{-1}) = \left\{(y, \lambda^{-1} y - x) : (x, y) \in Gr(A)\right\}.$$

Primero se demostrará que $\lambda - A$ es inyectiva si y sólo si $\lambda^{-1} - A^{-1}$ es inyectiva.
Supóngase que $\lambda - A$ es inyectiva. Sea $y \in Ker(\lambda^{-1} - A^{-1})$, entonces $(y, 0) \in Gr(\lambda^{-1} - A^{-1})$. Entonces existe $x \in X$ tal que $\lambda^{-1} y - x = 0$, de lo que se obtiene que $\lambda x - y = 0$. Así, $(x, \lambda x - y) = (x, 0) \in Gr(\lambda - A)$, esto es, $x \in Ker(\lambda - A)$.

Puesto que $\lambda - A$ es inyectiva, $Ker(\lambda - A) = \{0\}$. De esto se sigue que $x = 0$ y $y = 0$. Por lo tanto, $Ker(\lambda^{-1} - A^{-1}) = \{0\}$.
El recíproco se prueba de forma análoga.
Ahora, de acuerdo a la gráfica de $\lambda^{-1} - A^{-1}$ y $\lambda - A$, es fácil ver que $Im(\lambda^{-1} - A^{-1}) = Im(\lambda - A)$. De esto se tiene que $\lambda - A$ es invertible si y sólo si $\lambda^{-1} - A^{-1}$ es invertible.
Ahora se considera el caso cuando $\lambda = 0$. Si $0 \notin \sigma(A)$, entonces $A^{-1} \in B(X)$ si y sólo si $\infty \notin \widetilde{\sigma}(A^{-1})$. Además, por la Definición 2.1.3, se tiene $\widetilde{\sigma}(A^{-1}) = \sigma(A^{-1})$ y $\sigma(A) \subset \widetilde{\sigma}(A)$.
Análogamente, $0 \notin \sigma(A^{-1})$ si y sólo si $A \in B(X)$ si y sólo si $\infty \notin \widetilde{\sigma}(A)$. Además se tiene que $\widetilde{\sigma}(A) = \sigma(A)$ y $\sigma(A^{-1}) \subset \widetilde{\sigma}(A^{-1})$.
Por lo tanto, $\widetilde{\sigma}(A^{-1}) = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \widetilde{\sigma}(A)\right\}$. $\square$

Nota 2.1.1. *Considérese la función $f : \sigma(A)\backslash\{0\} \to \sigma(A^{-1})\backslash\{0\}$, definida por $f(\lambda) = \lambda^{-1}$. Claramente f es biyectiva y continua, entonces*

$$\sigma(A^{-1}) \setminus \{0\} = f[\sigma(A) \setminus \{0\}] = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}\right\}.$$

Las siguientes definiciones y resultados ([2]) están íntimamente ligados a la construcción de la función resolvente de una relación lineal. Son fundamentales para definir concretamente a los subespacios invariantes a las restricciones de relaciones lineales.
Además, proveen una interesante correlación entre relaciones lineales y cierta clase de funciones complejas.

Definición 2.1.4. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ y considérese la función $R : U \to B(X)$. Se dice que R es un pseudoresolvente si satisface la identidad de Hilbert, esto es, si para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2 \in U$,

$$R(\lambda_1) - R(\lambda_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_1)R(\lambda_2).$$

Por la Proposición 2.1.4, es claro que la función resolvente de cualquier relación lineal es también un pseudoresolvente.

Definición 2.1.5. Sea $R : U \subseteq \mathbb{C} \to B(X)$ un pseudoresolvente. Se dice que $\widehat{R} : \widehat{U} \subseteq \mathbb{C} \to B(X)$ es un pseudoresolvente máximo de R si $\widehat{R}$ es un pseudoresolvente y es extensión de cualquier otra extensión de R. Se define el conjunto singular de R por $Sing(R) := \mathbb{C} \setminus \widehat{U}$.

Definición 2.1.6. Sean $T \in B(X)$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ y $R : U \subseteq \mathbb{C} \to B(X)$ un pseudoresolvente. Se dirá que T está incrustado en R si $\lambda_0 \in U$ y $T = R(\lambda_0)$.

En la definición anterior es fácil notar que $T \in B(X)$ está incluido en R si y sólo si $T \in ImR$. De esta manera, al observar que algún operador acotado T está incluido en R es equivalente a construir un pseudoresolvente máximo de R.

Proposición 2.1.11. *Todo pseudoresolvente $R : U \subseteq \mathbb{C} \to B(X)$ tiene una única extensión máxima R_0. Además, existe $A \in LC(X)$ tal que R_0 es el resolvente de A y $Sing(R_0) = \sigma(A)$.*

Demostración. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in U$. Considérese las relaciones inversas $R(\lambda_1)^{-1}$ y $R(\lambda_2)^{-1}$, respectivamente. De esta manera se definen $A_1 := \lambda_1 - R(\lambda_1)^{-1}$ y $A_2 := \lambda_2 - R(\lambda_2)^{-1}$.
Puesto que $R(\lambda_1), R(\lambda_2) \in B(X)$, las relaciones A_1 y A_2 son cerradas.
Es claro que $Dom(A_1) = ImR_1$ y $Dom(A_2) = ImR_2$. Además, por la identidad de Hilbert,

$$R(\lambda_1) = R(\lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_1)R(\lambda_2),$$

$$R(\lambda_2) = R(\lambda_1) - (\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_1)R(\lambda_2),$$

lo que implica que $ImR_1 = ImR_2$. Ahora, nótese que $(x.y + z) \in Gr(A_1)$ si y sólo si $(x, y) \in Gr(\lambda_1 I)$ y $(-x, z) \in Gr(R(\lambda_1)^{-1})$ si y sólo si $(x, y) = (x, \lambda_1 y)$ y $x = -R(\lambda_1)z$ si y sólo si $(x, y + z) = (-R(\lambda_1)z, z - R(\lambda_1)z)$. Así,

$$Gr(A_1) = \{(-R(\lambda_1)z, z - R(\lambda_1)z) : z \in X\}$$

y de forma análoga se prueba que

$$Gr(A_2) = \{(-R(\lambda_2)z, z - R(\lambda_2)z) : z \in X\}$$

y por consiguiente, $A_1 = A_2$.
Sean $\lambda_0 \in U$ y $A := \lambda_0 - R(\lambda_0)^{-1}$. Por lo anterior, para cualquier $\lambda \in U$, $(\lambda - A)^{-1} = R(\lambda)$. Sea $R_0 : \rho(A) \to B(X)$ definido por $R_0(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$. Así, R_0 es una extensión de R en $\rho(A)$.
La unicidad de R_0 se sigue de la unicidad del resolvente de A y $Sing(R_0) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) = \sigma(A)$. □

Definición 2.1.7. Sea $A \in LC(X)$ tal que $\rho(A) \neq \varnothing$. Un subespacio cerrado X_0 de X se dice que es invariante respecto de A si es invariante bajo $(\lambda - A)^{-1}$ para cada $\lambda \in \rho(A)$.

Definición 2.1.8. *Sean $A \in LC(X)$ y X_0 un subespacio cerrado de X. Se dice que X_0 es un subespacio $A-$invariante si para cada $x \in X_0 \cap Dom(A)$, $Ax \cap X_0 \neq \varnothing$.*

Es claro que $A[X_0] \subseteq X_0$, entonces X_0 es $A-$invariante.

Lema 2.1.1. *Si X_0 es invariante respecto de A, entonces X_0 es $A-$invariante.*

Demostración. Sea $x \in X_0 \cap Dom(A)$. Entonces existe $y \in X$ tal que $y \in Ax$, escrito de otra forma, $Ax = y + A(0)$.
Para cada $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A)x = \lambda x - y + A(0)$, lo que implica que

$$x = \lambda(\lambda - A)^{-1}x - (\lambda - A)^{-1}y,$$

esto es, $(\lambda - A)^{-1}y = (\lambda - A)^{-1}(\lambda x) - x \in X_0$.
Así, para cada $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}y = y + A(0) \subseteq X_0$.
Por lo tanto, $Ax \cap X_0 \neq \varnothing$. □

Definición 2.1.9. Sean $A \in LC(X)$ y X_0 un subespacio cerrado de X que es invariante respecto de A. Si existe un pseudoresolvente máximo $R : U \subseteq \mathbb{C} \to B(X_0)$ tal que para cada $\lambda \in U$, $R(\lambda)$ es la restricción de $(\lambda - A)^{-1}$ sobre X_0, entonces existe $A_0 \in LC(X_0)$ tal que R es su función resolvente y $U = \rho(A_0)$. Se dirá que A_0 es la restricción de A en X_0 y se denotará por $A_0 = A|_{X_0}$.

Es de suma importancia mencionar que la consistencia de Definición 2.1.9 se debe en su totalidad a la Proposición 2.1.11.

Definición 2.1.10. Sea $A \in LC(X)$, $X = X_1 \oplus X_2$, donde X_1 y X_2 son invariantes con respecto de A y sean $A_1 := A|_{X_1}$, $A_2 := A|_{X_2}$. Entonces se dirá que A es la suma directa de las relaciones A_1 y A_2 y se escribirá como $A = A_1 \oplus A_2$.

Lema 2.1.2. *Si X y A son como en la Definición 2.1.10, también se cumple que $A(0) = A_1(0) \oplus A_2(0)$.*

Demostración.

$$x \in A(0) \Longleftrightarrow (0, x) \in Gr(A) = Gr(A_1 \oplus A_2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x \in (A_1 \oplus A_2)(0) = A_1(0) + A_2(0).$$

Así, $A(0) = A_1(0) + A_2(0)$.
Además, si $y \in A_1(0) \cap A_2(0)$, entonces $y \in A_1(0)$ y $y \in A_2(0)$. Por la Proposición 2.1.2, para cada $\lambda \in \rho(A_1)$ y cada $\mu \in \rho(A_2)$, $A_1(0) = Ker(\lambda - A_1)^{-1}$ y $A_2(0) = Ker(\mu - A_2)^{-1}$. Lo que implica que $y \in Ker(\lambda - A_1)^{-1} \cap Ker(\mu - A_2)^{-1} \subseteq X_1 \cap X_2 = \{0\}$.
Se concluye que $A(0) = A_1(0) \oplus A_2(0)$. $\square$

En la Defición 2.1.10, se observa que A también es completamente reducido por (X_0, X_1).

Proposición 2.1.12. *Si $A \in LC(X)$ satisface las hipótesis de la Definición 2.1.10, entonces $\widetilde{\sigma}(A) = \widetilde{\sigma}(A_1) \cup \widetilde{\sigma}(A_2)$, donde la relación A_i es la restricción de A en X_i, para $i = 1, 2$.*

Demostración. Puesto que para $i = 1, 2$, X_i es invariante respecto de A, entonces para cada

$$(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)|_{X_1}^{-1} \oplus (\lambda - A)|_{X_2}^{-1}.$$

Es fácil notar que para cada $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A_1)^{-1} = (\lambda - A)|_{X_1}^{-1}$, $(\lambda - A_2)^{-1} = (\lambda - A)|_{X_2}^{-1}$. Así,

$$(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A_1)^{-1} \oplus (\lambda - A_2)^{-1}.$$

Sea $\lambda \in \rho(A)$. Por el Lema 2.1.2,

$$(\lambda - A)^{-1}(0) = (\lambda - A_1)^{-1}(0) \oplus (\lambda - A_2)^{-1}(0),$$

con $(\lambda - A)^{-1}(0) = \{0\}$, lo que implica que $(\lambda - A_1)^{-1}(0) = \{0\}$ y $(\lambda - A_2)^{-1}(0) = \{0\}$.
Recíprocamente, sea $\lambda \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$. Entonces

$$(\lambda - A)^{-1}(0) = (\lambda - A_1)^{-1}(0) \oplus (\lambda - A_2)^{-1}(0) = \{0\} \oplus \{0\} = \{0\},$$

esto es, $(\lambda - A)^{-1}(0) = \{0\}$, entonces $\lambda \in \rho(A)$.
De esto se sigue que $\widetilde{\sigma}(A) = \widetilde{\sigma}(A_1) \cup \widetilde{\sigma}(A_2)$. □

El siguiente ejemplo muestra que las Definiciones 1.1.10 y 2.1.9 pueden coincidir. Sin embargo aún no se tiene claridad sobre la relación que hay entre ambas definiciones.

Ejemplo 2.1.1. *Sea $X := l^2(\mathbb{N}^*)$ y considérese la base canónica $\{e_n : n \in \mathbb{N}^*\}$.*
Sean $M_0 := gen\{\{e_{3n}\} : n \in \mathbb{N}^*\}$, $M_1 := gen\{\{e_{3n+1}\} : n \in \mathbb{N}^*\}$ y $M_2 := gen\{\{e_{3n+2}\} : n \in \mathbb{N}^*\}$.
Se afirma que $X = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2$. Es claro que $M_0 + M_1 + M_2 \subseteq X$. Sea $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, ...) \in X$,

$$x = (x_0e_0 + x_3e_3 + \cdots + x_{3n}e_{3n} + \cdots) + (x_1e_1 + \cdots + x_{3n+1}e_{3n+1} + \cdots)$$

$$+ (x_2e_2 + x_5e_5 + x_8e_8 + \cdots + x_{3n+2}e_{3n+2} + \cdots) \in M_0 + M_1 + M_2.$$

Además, es claro que $M_0 \cap M_1 = M_0 \cap M_2 = M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Por lo tanto, $X = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2$.
Debido a esta decomposición de X, existe un operador unitario $T : X \to X$ tal que $Im(T) = M_1$ y $KerT = M_1 \oplus M_2$.

Se define la relación A sobre X por $Ax = Tx + M_2$, para cada $x \in X$.
Es fácil observar que, debido a que T es un operador unitario, $A \in BLC(X)$. De igual manera se observa que $x \in KerA$ si y sólo si $Ax = A(0)$ si y sólo si $Tx + M_2 = T(0) + M_2 = M_2$ si y sólo si $Tx \in M_2$ si y sólo si $Tx \in M_1 \cap M_2$ si y sólo si $Tx = 0$ si y sólo si $x \in KerT$.
Así, $KerA = KerT = M_1 \oplus M_2$ y de esto se sigue que $KerA^{\perp} = M_0$. También, nótese que, para cada $x \in KerA^{\perp} \setminus \{0\}$, existe $y \in M_1$ tal que $Ax = y + M_2$. Es claro que $y \neq 0$, entonces $(y + M_2) \cap M_0 = \varnothing$, es decir, $Ax \cap KerA^{\perp} = \varnothing$.
Lo anterior prueba que $x \notin Dom(A_{KerA^{\perp}})$. Como consecuencia, $Dom(A_{KerA^{\perp}}) \neq KerA^{\perp}$.
Además, por la Definición 1.1.10, $A_{M_0} = A_{KerA^{\perp}}$ está dado por su gráfica $Gr(A_{KerA^{\perp}}) = Gr(A) \cap (M_0 \times M_0) = \{(0,0)\}$, es decir, A_{M_0} es la relación nula.
Por otro lado, considérese la siguiente representación de A,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda \neq 0$,

$$(\lambda - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -T & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -T^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

De esto se tiene que $\widetilde{\sigma}(A) = \{0\} \cup \{\infty\}$. También, $(\lambda - A)^{-1}[M_0] \subseteq M_0$. Puesto que M_0 es cerrado, por la Definición 2.1.9, para cada $x \in X_2$, $(\lambda - A|_{M_0})^{-1}x = (\lambda - A)|_{M_0}^{-1}x = \lambda^{-1}x$. Por lo tanto, $A|_{M_0} = 0$, es decir, $A|_{M_0}$ es la relación cero.

Ahora se verá un ejemplo donde las Definiciones 1.1.10 y 2.1.9 no coinciden.

Ejemplo 2.1.2. *Considérese a* X, M_0, M_1, M_2 *y* $A \in BLC(X)$ *como en el Ejemplo 2.1.1.*
Sean $X_1 := M_0 \oplus M_1$ *y* $X_2 := M_2$. *La restricción de* A *sobre* X_2 *de acuerdo a la Definición 1.1.10 está definida por su gráfica*

$$Gr(A_{X_2}) := Gr(A) \cap (X_2 \times X_2).$$

Se afirma que $Gr(A_{X_2}) = X_2 \times X_2$. *En efecto. Sea* $(a,b) \in X_2 \times X_2$ *y nótese que*

$$Gr(A) = \{(x,y) \in X \times X : x \in Dom(A),\ y \in Ax\}$$

$$= \{(x,y) \in X \times X : x \in Dom(A),\ y \in Tx + M_2\}$$

$$= \{(x,y) \in X \times X : Tx - y \in M_2\}.$$

Además, como $X_2 = M_2$ *es subespacio de* $KerT = M_1 \oplus M_2$, *entonces es claro que* $Ta - b \in M_2$, *es decir,* $(a,b) \in X_2 \times X_2$. *De esto se tiene* $Gr(A_{X_2}) = X_2 \times X_2$.
Por otro lado, por la Proposición 2.1.11, la restricción de A *en* X_2 *de acuerdo a la Definición 2.1.9 está definida por* $\lambda \in$

$$A|_{X_2}x = \lambda x - \left[(\lambda - A)^{-1}|_{X_2}\right]^{-1} x,$$

para cada $\lambda \in \rho(A|_{X_2})$.
Del Ejemplo 2.1.1 es fácil notar que $(\lambda - A)^{-1}|_{X_2}x = \lambda^{-1}x$, *para cada* $x \in X_2$, *de manera que, para cada* $x \in X_2$,

$$A|_{X_2}x = \lambda x - \left[(\lambda - A)^{-1}|_{X_2}\right]^{-1} x = \lambda x - \lambda x = 0.$$

Así que $Gr(A|_{X_2}) = X_2 \times \{0\}$. *Por lo tanto,* $A_{X_2} \neq A|_{X_2}$.

2.2. Puntos aislados en el espectro

En la presente sección se asumirá que las relaciones lineales en cuestión cuentan con espectro diferente del vacío.
Se estudiarán resultados sobre puntos aislados en el espectro de una relación lineal hasta llegar a una caracterización de dichos puntos y la decomposición del espacio en cuestión.

Definición 2.2.1. Se dirá que una curva cerrada Γ es simple si no se corta a sí misma, salvo en su punto inicial y final.

La región acotada por una curva cerrada simple Γ se denotará por $int(\Gamma)$ y la región fuera de la curva se denotará por $ext(\Gamma)$.

Definición 2.2.2. Sean $A \in BLC(X)$, λ_0 un punto aislado de $\sigma(A)$. Una curva Γ se dice que es admisible para λ_0 y A si Γ es una curva cerrada simple alrededor de λ_0 tal que $\overline{int(\Gamma)} \cap \sigma(A) = \{\lambda_0\}$

Definición 2.2.3. Sean $A \in BLC(X)$, λ_0 un punto aislado de $\sigma(A)$ y sea Γ una curva admisible para λ_0 y A.
El operador $P : X \to X$ definido por

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\mu - A)^{-1} d\mu$$

es llamado la integral de Riesz asociada con A y λ_0.

Proposición 2.2.1. *Sean $A \in BLC(X)$, λ_0 un punto aislado de $\sigma(A)$ y P la integral de Riesz asociado con A y $\{\lambda_0\}$. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) $P^2 = P$,

(b) $A(0) \subseteq KerP$,

(c) Para cada $\lambda \in \rho(A)$, $A(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}A + A(0)$,

(d) Para cada $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A)^{-1}P = P(\lambda - A)^{-1}$,

(e) $AP = PA + A(0)$,

(f) Para cada $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A)^{-1}[KerP] \subseteq KerP$ *y* $(\lambda - A)^{-1}[ImP] \subseteq ImP$.

Demostración.

(a) Considérese dos curvas admisibles Γ_1 y Γ_2 que contienen a λ_0 y que Γ_1 está contenida en $int(\Gamma_2)$. Entonces, usando la ecuación resolvente,

$$P^2 = P(P) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(\mu - A)^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\lambda - A)^{-1}d\lambda\right]d\mu =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_2}\left[\int_{\Gamma_1}(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}d\lambda\right]d\mu =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_2}\left[\int_{\Gamma_1}(\lambda-\mu)^{-1}\left[(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}\right]d\lambda\right]d\mu =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_2}\left[\int_{\Gamma_1}(\lambda-\mu)^{-1}(\mu - A)^{-1}d\lambda - \right.$$

$$\left. - \int_{\Gamma_1}(\lambda-\mu)^{-1}(\lambda - A)^{-1}d\lambda\right]d\mu =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_2}\left[\int_{\Gamma_1}(\lambda-\mu)^{-1}(\mu - A)^{-1}d\lambda\right]d\mu -$$

$$- \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_2}\left[\int_{\Gamma_1}(\lambda-\mu)^{-1}(\mu - A)^{-1}d\lambda\right]d\mu,$$

donde

$$\int_{\Gamma_2}\left[\int_{\Gamma_1}(\lambda-\mu)^{-1}(\mu - A)^{-1}d\lambda\right]d\mu =$$

$$= \int_{\Gamma_2}(\mu - A)^{-1}d\mu\int_{\Gamma_1}(\lambda-\mu)^{-1}d\lambda = 2\pi i\int_{\Gamma_2}(\mu - A)^{-1}d\mu$$

y ya que $(\lambda-\mu)^{-1}$ es analítica dentro y fuera de Γ_1,

$$\int_{\Gamma_2}\left[\int_{\Gamma_1}(\lambda-\mu)^{-1}(\lambda - A)^{-1}d\lambda\right]d\mu = 0,$$

De esto se sigue que

$$P^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2}\left(2\pi i\int_{\Gamma_2}(\mu - A)^{-1}d\mu\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(\mu - A)^{-1}d\mu = P.$$

(b) Por el Corolario 1.1.15, para cada $\lambda \in \rho(A)$,

$$(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)(0) = (\lambda - A)^{-1}A(0) = (\lambda - A)^{-1}(0) = \{0\}\,.$$

Así, para una curva admisible Γ que contiene al punto aislado λ_0, se tiene que

$$PA(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - A)^{-1}A(0)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - A)^{-1}0d\lambda = 0.$$

Por lo tanto, $A(0) \subseteq KerP$.

(c) Sea $\lambda \in \rho(A)$. Se observa que

$$(\lambda - A)^{-1}A = (\lambda - A)^{-1}(A - \lambda + \lambda) =$$

$$= \lambda(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}(\lambda - A) = \lambda(\lambda - A)^{-1} - I.$$

Por otro lado, en virtud del Corolario 1.1.15,

$$A(\lambda - A)^{-1} = (A - \lambda + \lambda)(\lambda - A)^{-1} =$$

$$= -(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1} + \lambda(\lambda - A)^{-1} = -I + A(0) + \lambda(\lambda - A)^{-1} =$$

$$= -I + A(0) + \lambda(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}A + A(0).$$

(d) Considérese una curva admisible Γ que contiene a λ_0 y sea $\lambda \in \rho(A)$, entonces se tiene

$$(\lambda - A)^{-1}P = (\lambda - A)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\mu - A)^{-1}d\mu\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}d\mu =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\mu - A)^{-1}d\mu\right)(\lambda - A)^{-1} = P(\lambda - A)^{-1}.$$

(e) Por (d), para cada $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A)^{-1}P = P(\lambda - A)^{-1}$. Entonces $(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}P = (\lambda - A)P(\lambda - A)^{-1}$.

Como para cada $x \in X$, $Px \in Im(\lambda - A)$ y usando el Corolario 1.1.16,

$$(\lambda - A)P(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}P = P + A(0),$$

luego

$$(\lambda - A)P(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A) = (P + A(0))(\lambda - A),$$

donde

$$(\lambda - A)P(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A) = (\lambda - A)P = \lambda P - AP$$

y ya que $A(0) \subseteq KerP$, entonces

$$(P + A(0))(\lambda - A) = P(\lambda - A) + A(0).$$

Así,

$$\lambda P - AP = P(\lambda - A) + A(0) = \lambda P - PA + A(0),$$

de lo que se obtiene

$$-AP = -PA + A(0).$$

y por lo tanto, $AP = PA + A(0)$.

(f) Sea $\lambda \in \rho(A)$ arbitrario.
Sea $y \in (\lambda - A)^{-1}[KerP]$, entonces existe $x \in KerP$ tal que $(\lambda - A)^{-1}x = y$. Aplicando P, y usando (d) se obtiene

$$Py = P(\lambda - A)^{-1}x = (\lambda - A)^{-1}Px = (\lambda - A)^{-1}0 = 0,$$

lo que implica que $y \in KerP$.
De forma análoga, sea $w \in (\lambda - A)^{-1}[ImP]$, entonces existe $y \in ImP$ tal que $(\lambda - A)^{-1}y = w$. Así mismo, existe $x \in X$ tal que $Px = y$. De esto y por (d) se sigue que $w = (\lambda - A)^{-1}y = (\lambda - A)^{-1}Px = P(\lambda - A)^{-1}x$, lo que implica que $w \in ImP$. $\square$

De la Proposición 2.2.1 (a), se tiene que P es una proyección y por lo tanto, $X = ImP \oplus KerP$.

Definición 2.2.4. Al operador P se le llamará la proyección espectral asociado al conjunto espectral $\{\lambda_0\}$ y a la relación A.

Es importante destacar que, debido a la Proposición 2.2.1 (f), los subespacios ImP y $KerA$ son invariantes respecto de A, es decir, son invariantes de acuerdo a la Definición 2.1.7.
De igual manera, es importante mencionar que por la Proposición 2.2.1 (f), en adelante, las restricciones serán consideradas en el sentido de la Definición 1.1.10, ya que también lo serán en el sentido de la Definición 2.1.9.

Proposición 2.2.2. *Sean $A \in BLC(X)$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$ un punto aislado y P la proyección espectral asociada con $\{\lambda_0\}$. Si $M = ImP$, entonces se cumple lo siguiente:*

(a) A_M es un operador acotado,

(b) Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y cada $x \in M$ se cumple $(\lambda - A_M)x \in (\lambda - A)x$,

(c) Para cada $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A_M)P = P$,

(d) Para cada $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A_M)(\lambda - A)^{-1}P = P$.

Demostración.

(a) Primero se verá que A_M es un operador, para ello se probará que el conjunto multivalor de A_M consta sólo del cero, esto es, $A_M(0) = \{0\}$.
Sea $y \in A_M(0)$. Entonces $(0, y) \in Gr(A_M)$, esto es, $y \in M$ y $(0, y) \in Gr(A)$. De esto último se tiene que $y \in A(0)$ y por la Proposición 2.2.1 (b), $A(0) \subseteq KerP$, lo que implica que $y \in KerP$, entonces $y \in M \cap KerP$, luego $0 = Py = y$. Así, $A_M(0) = \{0\}$.

Ahora, ya que A es una relación cerrada y acotada, entonces $Gr(A)$ es cerrado, de esto se sigue que $Gr(A) \cap (M \times M)$ es cerrado en $X \times X$.
Resta probar que $Dom(A_M) = M$. Es claro que $Dom(A_M) \subseteq M$. Sea $w \in M$, entonces $Pw = w$ y usando la Proposición 2.2.1 (e), se tiene que $Aw = APw = PAw + A(0)$, se observa que $PAw \in Aw \cap M$, entonces $w \in Dom(A_M)$ y se concluye que A_M es un operador acotado.

(b) Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in M$. De la definición de A_M, se tiene que $A_M x \in Ax$, lo que implica que $(\lambda - A_M)x \in \lambda x - Ax$ y por lo tanto, $(\lambda - A_M)x \in (\lambda - A)x$.

(c) Sea $\lambda \in \rho(A)$. Por (b),

$$(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A_M)Px \in (\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)Px = Px,$$

para cada $x \in X$. Puesto que P es un operador acotado, entonces $(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A_M)Px = Px$.

(d) Sean $x \in X$ y $\lambda \in \rho(A)$. En virtud de la Proposición 2.2.1 (d),

$$(\lambda - A_M)(\lambda - A)^{-1}Px = (\lambda - A_M)P(\lambda - A)^{-1}x,$$

usando (b),

$$(\lambda - A)P(\lambda - A)^{-1}x \in (\lambda - A)P(\lambda - A)^{-1}x =$$

$$= (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}Px = Px + A(0).$$

Entonces

$$P((\lambda - A_M)(\lambda - A)^{-1}Px) \in x + PA(0) = x$$

y por lo tanto, $(\lambda - A_M)(\lambda - A)^{-1}Px = Px$.
Se concluye que $(\lambda - A_M)(\lambda - A)^{-1}P = P$. $\square$

Anteriormente se demostró que todo subespacio invariante respecto de $A \in LC(X)$, de acuerdo a la Defnción 2.1.7, también es $A-$invariante. En la siguiente proposicón se demuestra, usando los resultados hasta ahora ya vistos, que $KerP$ e ImP también son $A-$ invariantes, donde P es la poyección espectral asociada con A.

Proposición 2.2.3. *Sea $A \in BLC(X)$, λ_0 un punto aislado de $\sigma(A)$ y sea P la proyección espectral asociada con A y $\{\lambda_0\}$. Sean $M = ImP$ y $N = KerP$, entonces se cumple:*

(a) $A[N] \subseteq N$ *y* $A[M] \subseteq M$,

(b) $A = A_M \oplus A_N$.

Demostración.

(a) Primero se probará que $A[N] \subseteq N$.
Sea $x \in N$. Por la Proposición 2.2.1 (b) y (e), $APx = PAx + A(0)$, o equivalentemente

$$PAx \in APx = A(0) \subseteq KerP.$$

Así que $P(PAx) \in P[N] = \{0\}$, lo que implica que $0 = P^2Ax = PAx$. Por lo tanto, $Ax \in N$.
Ahora se probará que $A[M] \subseteq M$.
Sea $w \in A[M] = \bigcup \{Ay : y \in Dom(A) \cap M\}$. Entonces existe $y \in Dom(A) \cap M$ tal que $w \in Ay$.
Puesto que $Pw \in PA$, entonces $PAy = Pw + A(0) = Pw$. Además, por la Proposición 2.2.1 (e),

$$APy = PAy + A(0) = Pw + A(0)$$

y se observa que $APy = Ay$, así, $Ay = Pw + A(0)$. También se tiene $Ay = w + A(0)$, entonces $w + A(0) = Pw + A(0)$, de esto se sigue que $Pw + PA(0) = P^2w + PA(0)$ y por lo tanto, $Pw = w$.

(b) Sea $x \in X$. Como $X = M \oplus N$, entonces existen únicos $x_1 \in M$ y $x_2 \in N$ tales que $x = x_1 + x_2$.
Se sabe que A_M es un operador lineal acotado, entonces $y = A_M x_1$. Por la Proposición 2.2.2 (b), $y \in Ax_1$ y así, $Ax_1 = y + A(0)$. Luego

$$A_M x_1 + A_N x_2 = y + Ax_2 = y + A(0 + x_2) = y + A(0) + Ax_2 =$$

$$= Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2) = Ax.$$

Por lo tanto, $A = A_M \oplus A_N$. $\square$

La proyección espectral asociada con el punto aislado λ_0 y con A se generaliza para subconjuntos de $\sigma(A)$.

Definición 2.2.5. Sean $A \in BLC(X)$. Considérese $\sigma_1 \subset \sigma(A)$ de tal manera que σ_1 y $\sigma_2 := \sigma(A) \backslash \sigma_1$ son cerrados en $\mathbb{C}$. Sean Γ_1 y Γ_2 curvas cerradas simples tales que $\sigma_j \subseteq \overline{int(\Gamma_j)}$ y $\overline{int(\Gamma_j)} \cap \sigma(A) = \sigma_j$, para cada $j = 1, 2$. Se definen los operadores

$$P_j := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

para cada $j = 1, 2$.

Lema 2.2.1. *Sean $A \in BLC(X)$, σ_1 y $\sigma_2 := \mathbb{C} \setminus \sigma_1$ son cerrados en $\mathbb{C}$. Entonces*

(i) Para cada $i = 1, 2$, $P_i^2 = P_i$,

(ii) $P_1 + P_2 = I$,

(iii) $X = ImP_1 \oplus KerP_1$ y $\sigma_1 = \sigma(A_{ImP_1})$, $\sigma_2 = \sigma(A_{KerP_1})$,

(iv) Para cada $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A)^{-1}[ImP_1] \subseteq ImP_1$ y $(\lambda - A)^{-1}[KerP_1] \subseteq KerP_1$.

Demostración.

(i) La prueba es similar a la de la Proposición 2.2.1 (a).

(ii) Para cada $x \in X$,

$$(P_1+P_2)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\lambda-A)^{-1}xd\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(\lambda-A)^{-1}xd\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\Gamma_1}(\lambda-A)^{-1}xd\lambda+\int_{\Gamma_2}(\lambda-A)^{-1}xd\lambda\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}(\lambda-A)^{-1}xd\lambda = \frac{1}{2\pi i}2\pi i x = x.$$

(iii) Por (ii), se obtiene que $P_2 = I - P_1$ y que $ImP_2 = KerP_1$. Sean $M = ImP_1$ y $N = KerP_1$.
Sea $x \in X$. Entonces $x = P_1x + (I - P_1)x$, donde $P_1x \in M$ y $(I - P_1)x \in N$. Es claro que $M \cap N = \varnothing$. Más aún, para cada $x \in X$, $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in M$ y $x_2 \in N$.
Similar a la demostración de la Proposición 2.2.3 (c), se prueba que $A = A_M \oplus A_N$ y de la Proposición 2.1.12, se consigue que $\sigma_1 = \sigma(A_{ImP_1})$, $\sigma_2 = \sigma(A_{KerP_1})$.

(iv) La prueba es análoga a la de la Proposición 2.2.3 (a). □

Los operadores P_i son también llamados proyecciones espectrales asociados con σ_i, con $i = 1, 2$.

Lema 2.2.2. *Sean $A \in LC(X)$, σ_0 y σ_1 subconjuntos de $\widetilde{\sigma}(A)$ tales que σ_0 es compacto en $\mathbb{C}$ y σ_1 es cerrado en $\mathbb{C}_\infty$, de manera que $\widetilde{\sigma}(A) = \sigma_0 \cup \sigma_1$. Entonces $X = X_0 \oplus X_1$ y $A = A_0 \oplus A_1$, con X_0, X_1 son subespacios cerrados invariantes respecto de A, $A_0 = A|_{X_0}$, $A_1 = A|_{X_1}$ y satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) $A_1 \in B(X_1)$, $\widetilde{\sigma}(A_1) = \sigma(A_1) = \sigma_1$,

(ii) para cada $\lambda \in \rho(A)$,

$$A_2(0) = A(0) = Ker(\lambda - A)^{-1} = Ker(\lambda - A_2)^{-1} \subseteq X_2,$$

$$Dom(A) = X_1 \oplus Dom(A_2),$$

$$\widetilde{\sigma}(A_2) = \sigma_1.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, sea Γ una curva cerrada simple en $\rho(A)$ tal que $\sigma_0 \subseteq \overline{int(\Gamma)}$ y $\overline{ext(\Gamma)} \cap \sigma(A) = \sigma_1$. Considérese la proyección espectral asociada con σ_1

$$P_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Puesto que P_0 está definido sobre todo X, entonces $X = X_0 \oplus X_1$, donde $X_0 = ImP_0$ y $X_1 = KerP_0$. Además, para cada $\mu \in \rho(A)$, $(\mu - A)^{-1}[X_i] \subset X_i$, para cada $i = 0, 1$ es decir, X_0 y X_1 son invariantes respecto de A.

Se sabe que $Ker(\lambda - A)^{-1} = A(0)$ y se puede probar, de igual manera que en la Proposición 2.2.1 (b), que para cada $x \in Ker(\lambda - A)^{-1}$, $P_0(x) = 0$. Esto implica que $Ker(\lambda - A)^{-1} \subseteq KerP_0 = X_1$ y por lo tanto, $A(0) \subseteq X_1$.

Sean R_0 y R_1 son las restricciones del resolvente de A en X_0 y X_1, respectivamente, de tal manera que R_0 es la función resolvente de A_0 y R_1 es la función resolvente de A_1, esto es, $R_0 : \rho(A_0) \to B(X_0)$ y $R_1 : \rho(A_1) \to B(X_1)$.

Ahora, se vera que R_0 es analítico en ∞ y que $\lim\limits_{|\mu|\to\infty} (\mu - A_0)^{-1} = 0$. Sea $x_0 \in X_0$. Entonces

$$\begin{aligned} R_0(\mu)x_0 &= (\mu - A_0)^{-1}x_0 = (\mu - A)^{-1}P_0 x_0 = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}x_0 d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - \mu)^{-1}((\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1})x_0 d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_\Gamma (\lambda - \mu)^{-1}(\mu - A)^{-1}x_0 d\lambda - \int_\Gamma (\lambda - \mu)^{-1}(\lambda - A)^{-1}x_0 d\lambda\right], \end{aligned}$$

Se observa que, si se considera μ fuera de la la curva Γ, entonces

$$R_0(\mu)x_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - \mu)^{-1}(\lambda - A)^{-1}x_0 d\lambda,$$

donde $(\lambda - \mu)^{-1}(\lambda - A)^{-1}$ es una función analítica, luego existe una extensión analítica de R_0 en $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{int(\Gamma)}$. Además, cuando la distancia de μ al origen es cada vez más grande, entonces

$R_0(\mu)x_0 = 0$, esto es, $\lim\limits_{|\mu|\to\infty} (\mu - A_0)^{-1} = 0$. Por ende, $\infty \notin \sigma_0$, lo que equivale a que $A_0 \in B(X_0)$; concluyendo que $\widetilde{\sigma}(A_0) = \sigma(A_0)$. Ahora, por el Lema 2.1.2,

$$A(0) = A_0(0) \oplus A_1(0) = \{0\} \oplus A_1(0) = A_1(0).$$

Por la Proposición 2.1.2, para cada $\lambda \in \rho(A)$, $Ker(\lambda - A)^{-1} = Ker(\lambda - A_1)^{-1}$. Entonces $\widetilde{\sigma}(A_1)$ es subconjunto de $\mathbb{C}_\infty$.
Para demostrar que la resolvente R_1 de A_1 tiene una extensión analítica y continua en ∞, se procede de forma similar.
Así que $\widetilde{\sigma}(A) = \widetilde{\sigma}(A_0) \cup \widetilde{\sigma}(A_1) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, es decir, $\widetilde{\sigma}(A_0) = \sigma_0$ y $\widetilde{\sigma}(A_1) = \sigma_1$. Donde σ_1 es cerrado, pues si no lo fuera, $\widetilde{\rho}(A_1)$ no sería abierto, lo que es falso. □

Proposición 2.2.4. *Sean $A \in BLC(X)$, λ_0 un punto aislado de $\sigma(A)$ y sea P la proyección espectral asociado con A y $\{\lambda_0\}$. Se denota $M := ImP$ y $N := KerP$. Entonces:*

(a) Para cada $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A_N)^{-1} = (\lambda - A)_N^{-1}$ y $(\lambda - A_M)^{-1} = (\lambda - A)_M^{-1}$,

(b) $\sigma(A_M) = \{\lambda_0\}$ y $\lambda_0 \notin \sigma(A|_N)$.

Demostración.

(a) Se observa que, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda - A_M)$ y $(\lambda - A_N)$ es la restricción de la relación lineal $(\lambda - A)$ en los espacios M y N, respectivamente, entonces por la Proposición 2.2.3 (c),

$$\lambda - A = (\lambda - A_M) \oplus (\lambda - A_N).$$

De esto se sigue que $\lambda - A$ es invertible si y sólo si $\lambda - A_M$ es un operador invertible y $(\lambda - A_N)^{-1} \in B(N)$. Entonces para cada $\lambda \in \rho(A)$,

$$(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A_M)^{-1} \oplus (\lambda - A_N)^{-1}.$$

De esto se tiene que $\rho(A) \subseteq \rho(A_M) \cap \rho(A_N)$ y que

$$(\lambda - A)_M^{-1} = (\lambda - A_M)^{-1}, (\lambda - A)_N^{-1} = (\lambda - A_N)^{-1}.$$

(b) Sea Γ una curva admisible asociada con $\{\lambda_0\}$ y considérese $\lambda \in \rho(A) \setminus \Gamma$.

Por la ecuación resolvente se tiene

$$(\lambda - A)^{-1}P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}d\mu =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\Gamma}(\mu-\lambda)^{-1}(\lambda - A)^{-1}d\mu - \int_{\Gamma}(\mu-\lambda)^{-1}(\mu - A)^{-1}d\mu\right].$$

Se observa que al considerar λ fuera de la curva Γ,

$$\int_{\Gamma}(\mu-\lambda)^{-1}(\lambda - A)^{-1}d\mu = 0.$$

Por (a), para cada $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda - A)^{-1}P = (\lambda - A_M)^{-1}$. Entonces, para cada $\lambda \in \rho(A)$,

$$(\lambda - A_M)^{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\mu-\lambda)^{-1}(\mu - A)^{-1}d\mu.$$

Puesto que para cada λ fuera de la curva Γ, $(\mu-\lambda)^{-1}(\mu - A)^{-1}$ es una función analítica, entonces existe una extensión analítica de $(\lambda - A_M)^{-1}$ en $\mathbb{C} \setminus \overline{int(\Gamma)}$, donde $\overline{int(\Gamma)}$ es la cerradura del interior de la región que está acotada por la curva Γ. De esto se sigue que $\mathbb{C} \setminus \overline{int(\Gamma)} \subseteq \rho(A_M)$.

Además, se sabe que la curva Γ separa al punto aislado z de resto del espectro, así que $\overline{int(\Gamma)} \setminus \{\lambda_0\} \subseteq \rho(A_M)$, luego $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_0\} \subseteq \rho(A_M)$. Por lo tanto, $\sigma(A_M) \subseteq \{\lambda_0\}$. Y ya que A_M es un operador lineal acotado, entonces se obtiene que $\sigma(A_M) = \{\lambda_0\}$.

Resta probar que $\lambda_0 \notin \sigma(A_N)$.

Puesto que para cada $\lambda \in \rho(A)$

$$(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A_M)^{-1} \oplus (\lambda - A_N)^{-1},$$

entonces $\rho(A) = \rho(A_M) \cap \rho(A_N)$, esto implica que $\sigma(A) = \sigma(A_M) \cup \sigma(A_N)$. Por el Lema 2.2.2 se tiene que $\lambda_0 \notin \sigma(A_N)$.

$\square$

Proposición 2.2.5. *Sean $A \in BLC(X)$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Entonces $K(\lambda_0 - A)$ es cerrado y*

$$X = H_0(\lambda_0 - A) \oplus K(\lambda_0 - A)$$

si y sólo si λ_0 es un punto aislado de $\sigma(A)$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que λ_0 es un punto aislado de $\sigma(A)$. Considérese la circunferencia Γ con centro en λ_0, de radio $\varepsilon > 0$ y de orientación positiva. Nótese que si $\mu \in \Gamma$, entonces $\mu = \lambda - \lambda_0$, para algún $\lambda \in \rho(A)$ tal que $|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon$. También considérese la proyección espectral asociada con A y $\{\lambda_0\}$, denotada por P.
Puesto que $P \in B(X)$ y $X = ImP \oplus KerP$, basta probar que $ImP = H_0(\lambda_0 - A)$ y $KerP = K(\lambda_0 - A)$. Se denotará $M := ImP$ y $N := KerP$.
Sea $x \in M$. Se sabe que la función $\mu \mapsto (\mu - A)^{-1}$ es analítica sobre $\rho(A)$, entonces para cada $\lambda - \lambda_0 \in \Gamma$, la función $\lambda - \lambda_0 \mapsto (\lambda - \lambda_0)^n(\lambda - \lambda_0 - A)^{-1}x$ es analítica y continua, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda - \lambda_0)^n(\lambda - \lambda_0 - A)^{-1}x$ es integrable sobre Γ. Se define la sucesión (x_n) por $x_0 := x$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$x_n := \int_\Gamma (\lambda - \lambda_0)^n(\lambda - \lambda_0 - A)^{-1}x d\lambda.$$

Como A_M es un operador acotado, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \int_\Gamma (\lambda - \lambda_0)^{n+1}(\lambda - \lambda_0 - A)^{-1}x d\lambda =$$

$$= \int_\Gamma (A_M + \lambda - \lambda_0 - A_M)(\lambda - \lambda_0)^n(\lambda - \lambda_0 - A)^{-1}x d\lambda =$$

$$= \int_\Gamma (\lambda - \lambda_0)^n A_M(\lambda - \lambda_0 - A)^{-1}x d\lambda +$$

$$+ \int_\Gamma (\lambda - \lambda_0)^n(\lambda - \lambda_0 - A_M)(\lambda - A)^{-1}x d\lambda.$$

Usando la Proposición 2.2.2 (d),

$$\int_\Gamma (\lambda - \lambda_0)^n(\lambda - \lambda_0 - A_M)(\lambda - A)^{-1}x d\lambda = \int_\Gamma (\lambda - \lambda_0)^n x d\lambda = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^n A_M(\lambda-\lambda_0-A)^{-1}x d\lambda = \\ = A_M \int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^n (\lambda-\lambda_0-A)^{-1}x d\lambda = \\ = A_M x_n \in A x_n, \end{aligned}$$

esto implica que $(\lambda_0 - A_M)x_n \in (\lambda_0 - A)x_n$ y por lo tanto, $x_{n+1} \in (\lambda-\lambda_0-A)x_n$.
Es claro que la función $\lambda-\lambda_0 \mapsto \left\|(\lambda-\lambda_0)^n(\lambda-\lambda_0-A)^{-1}x\right\|$ es continua sobre el compacto Γ, entonces alcanza su valor máximo y su valor mínimo en Γ. De esto se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_n (d(x_n,(\lambda_0-A)(0)))^{\frac{1}{n}} = \lim_n (d(x_n,A(0)))^{\frac{1}{n}} \leq \lim_n (d(x_n,0))^{\frac{1}{n}} = \\ = \lim_n \|x_n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \left\|\int_\Gamma \lambda^n(\lambda-A)^{-1}xd\lambda\right\|^{\frac{1}{n}} \leq \\ \leq \lim_n \left[\varepsilon^n \max\left\{\left\|(\lambda-A)^{-1}\right\|\|x\| : \lambda\in\Gamma\right\} 2\pi\varepsilon\right]^{\frac{1}{n}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

Como lo anterior se cumple para cualquier circunferencia de radio ε, entonces $\lim_n (d(x_n,(\lambda_0-A)(0)))^{\frac{1}{n}} = 0$. De esto se sigue que $x \in H_0(\lambda_0-A)$.
Recíprocamente, sea $z \in H_0(\lambda_0 - A)$. Entonces existe una sucesión (z_n) en X tal que $z_0 = z$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} \in (\lambda_0-A)z_n$ y

$$\limsup \|z_n\|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon.$$

Sea $\lambda-\lambda_0 \in \Gamma$. Tomando la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}$, se observa que

$$\limsup \left\|\frac{z_n}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}\right\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \left\|\frac{z_n}{\varepsilon^{n+1}}\right\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1.$$

Por lo tanto, $w = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}$, con $w \in X$.
Ahora, obsérvese que

$$(\lambda-\lambda_0)w - z = -z_0 + (\lambda-\lambda_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_n}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}} = -z_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_n}{(\lambda-\lambda_0)^n}$$

$$= -z_0 + z_0 + \frac{z_1}{\lambda - \lambda_0} + \frac{z_2}{(\lambda - \lambda_0)^2} + \cdots + \frac{z_n}{(\lambda - \lambda_0)^n} + \cdots =$$

$$= \frac{z_1}{\lambda - \lambda_0} + \frac{z_2}{(\lambda - \lambda_0)^2} + \cdots + \frac{z_n}{(\lambda - \lambda_0)^n} + \cdots \in$$

$$\in \frac{1}{\lambda - \lambda_0} A(z_0) + \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^2} A(z_1) + \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^3} A(z_2) +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^n} A(z_{n-1}) + \cdots = A\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}\right) = Aw.$$

Esto implica que $(\lambda - \lambda_0)w - z \in Aw$ o equivalentemente,

$$(\lambda - \lambda_0 - A)w = z + A(0).$$

Luego

$$w = (\lambda - \lambda_0 - A)^{-1} z + (\lambda - \lambda_0 - A)^{-1} A(0) = (\lambda - \lambda_0 - A)^{-1} z.$$

Ahora,

$$Pz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - \lambda_0 - A)^{-1} z d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma w d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{z_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} [2\pi i z_0] = z_0 = z.$$

Por lo tanto, $z \in Im(P)$ y se concluye que $H_0(\lambda_0 - A) = M$.
Ahora se verá que $N = K(\lambda_0 - A)$.
Por la Proposición 2.2.4 (b), se sabe que $\sigma(A_M) = \{\lambda_0\}$ y que $\lambda_0 \notin \sigma(A_N)$, esto es, $\lambda_0 \in \rho(A_N)$, entonces $(\lambda_0 - A_N)^{-1} \in B(N)$. Así, $(\lambda_0 - A_N)^{-1}(0) = \{0\}$, por ende, $\lambda_0 - A_N$ es inyectiva, además, $Im(\lambda_0 - A_N) = Dom(\lambda_0 - A_N)^{-1} = N$. Aplicando la Proposición 2.2.3 (b), $(\lambda_0 - A)[N] = N$.
Por la Proposición 1.5.7, $N \subseteq K(\lambda_0 - A)$.
Resta probar que $K(\lambda_0 - A) \subseteq N$, para ello, primero se probará que $K(\lambda_0 - A) \cap H_0(\lambda_0 - A) = \{0\}$.

Se afirma que $K(\lambda_0 - A) \cap H_0(\lambda_0 - A) = K((\lambda_0 - A)_{H_0(\lambda_0 - A)})$. En efecto. Sea $x \in K(\lambda_0 - A) \cap H_0(\lambda_0 - A)$. Entonces existe una sucesión (x_n) en X y existe $\alpha > 0$ tales que $x_0 = x$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in (\lambda_0 - A)x_{n+1}$ y

$$d(x_n, (\lambda_0 - A)(0)) = d(x_n, A(0)) \leq \alpha^n d(x, A(0)).$$

Se probará por inducción matemática que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in H_0(\lambda_0 - A)$.
Para $n = 0$, es claro.
Ahora supóngase que se cumple para algún $n \in \mathbb{N}^*$. Puesto que $x_n \in (\lambda_0 - A)x_{n+1}$, entonces $(\lambda_0 - A)x_{n+1} = x_n + A(0)$. Ya que $M = H_0(\lambda_0 - A)$,

$$P(\lambda_0 - A)x_{n+1} = Px_n + PA(0) = x_n + A(0).$$

Por la Proposición 2.2.1 (e),

$$(\lambda_0 - A)Px_{n+1} = \lambda_0 Px_{n+1} - APx_{n+1} = \lambda_0 Px_{n+1} - PAx_{n+1} + A(0) =$$

$$= P((\lambda_0 - A)x_{n+1}) + A(0) = x_n + A(0) + A(0) =$$

$$= x_n + A(0) = P(\lambda_0 - A)x_{n+1} = (\lambda_0 - A)x_{n+1}.$$

Así,

$$(\lambda_0 - A)(0) = A(0) = (\lambda_0 - A)Px_{n+1} - (\lambda_0 - A)x_{n+1} =$$

$$= (\lambda_0 - A)(Px_{n+1} - x_{n+1}),$$

lo que implica que

$$Px_{n+1} - x_{n+1} \in Ker(\lambda_0 - A) \subseteq H_0(\lambda_0 - A),$$

por consiguiente, $x_{n+1} \in H_0(\lambda_0 - A)$.
De esto último se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_{n+1}, x_n) \in Gr((\lambda_0 - A)_{H_0(\lambda_0 - A)})$ y

$$Ker((\lambda_0 - A)_{H_0(\lambda_0 - A)}) = H_0(\lambda_0 - A) \cap Ker(\lambda_0 - A) = Ker(\lambda_0 - A)$$

de tal manera que

$$d(x_n, Ker((\lambda_0 - A)_{H_0(\lambda_0-A)}) \cap (\lambda_0 - A)_{H_0(\lambda_0-A)}(0)) =$$

$$= d(x_n, Ker(\lambda_0 - A) \cap (\lambda_0 - A)(0) \cap H_0(\lambda_0 - A)) =$$

$$= d(x_n, Ker(\lambda_0 - A) \cap (\lambda_0 - A)(0)) \leq$$

$$\leq \alpha^n d(x_n, Ker(\lambda_0 - A) \cap (\lambda_0 - A)(0)) =$$

$$= \alpha^n d(x, Ker((\lambda_0 - A)_{H_0(\lambda_0-A)}) \cap A_{H_0(\lambda_0-A)}(0)),$$

luego $x \in K((\lambda_0 - A)_{H_0(\lambda_0-A)})$, esto es $K(\lambda_0 - A) \cap H_0(\lambda_0 - A) \subseteq K((\lambda_0 - A)_{H_0(\lambda_0-A)})$. Además, es claro que $K((\lambda_0 - A)_{H_0(\lambda_0-A)}) \subseteq K(\lambda_0 - A) \cap H_0(\lambda_0 - A)$. Usando el Corolario 2.32 de [1], se sigue que $K(\lambda_0 - A) \cap H_0(\lambda_0 - A) = \{0\}$.
Por lo tanto,

$$K(\lambda_0 - A) = K(\lambda_0 - A) \cap X = K(\lambda_0 - A) \cap [M \oplus N] =$$

$$= N + K(\lambda_0 - A) \cap H_0(\lambda_0 - A) = N + \{0\} = N.$$

Se concluye que $X = H_0(\lambda_0 - A) \oplus K(\lambda_0 - A)$ y $K(\lambda_0 - A)$ es cerrado en X.

($\Rightarrow$) Sin perdida de generalidad, se supondrá que $\lambda_0 = 0$. De esta manera $X = H_0(A) \oplus K(A)$ con $K(A)$ cerrado.
Por la Proposición 1.5.6, $A[K(A)] = K(A)$, entonces $A|_{K(A)}$ es suprayectiva.
Por hipótesis, $K(A) \cap H_0(A) = \{0\}$ y por la Proposición 1.5.3, se tiene $KerA \cap K(A) \subseteq H_0 \cap K(A)$. Así, $Ker(A_{K(A)}) = KerA \cap K(A) = \{0\}$, lo que implica que $A_{K(A)}$ es inyectiva y por ende, $A_{K(A)}$ es biyectiva.
Por el Lema 2.2 de [7], existe $\delta > 0$ tal que $\lambda - A_{K(A)}$ es biyectivo, para cada $|\lambda| < \delta$. Aunado a esto, $(\lambda - A_{K(A)})[K(A)] = K(A)$. También es claro que

$$KerA \cap A(0) \subset H_0(A) \cap K(A) = \{0\}.$$

Se afirma que, para cada $\lambda \neq 0$, $Ker(\lambda - A) \subset K(A)$. En efecto, sea $x \in Ker(\lambda - A)$ y considérese la sucesión (x_n) definida por $x_0 := x$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n := \dfrac{x}{\lambda^n}$.
Ya que $x \in Ker(\lambda - A)$, entonces $0 \in (\lambda - A)x$ o equivalentemente, $(\lambda - A)x = (\lambda - A)(0) = A(0)$. De esto se obtiene que $Ax = \lambda x + A(0)$, es decir, $\lambda x \in Ax$.
Así, para cada $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = \frac{\lambda x}{\lambda^{n+1}} \in \frac{1}{\lambda^{n+1}} Ax = A\left(\frac{x}{\lambda^{n+1}}\right) = Ax_{n+1}$$

y

$$d(x_n, KerA \cap A(0)) = d(x_n, 0) = \|x_n\| = \frac{\|x\|}{|\lambda|^n} < \frac{\|x\|}{\delta^n}.$$

Si, $\alpha := \delta^{-1}$, entonces

$$d(x_n, KerA \cap A(0)) < \alpha^n \|x\| = \alpha^n d(x, 0) = \alpha^n d(x, KerA \cap A(0)).$$

Es decir, $x \in K(A)$.
Por consiguiente, para cada $|\lambda| < \delta$.

$$Ker(\lambda - A_{K(A)}) = K(A) \cap Ker(\lambda - A) = Ker(\lambda - A) = \{0\}.$$

Por otro lado, sea $x \in H_0(A)$. Entonces existe una sucesión (x_n) en X tal que $x_0 = x$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} \in Ax_n$ y $\lim_n \|x_n\|^{\frac{1}{n}} = 0$.
Nótese que para cada $0 < |\lambda| < \delta$,

$$(\lambda - A)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\lambda^{n+1}} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\lambda^{n+1}} - A\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\lambda^{n+1}}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\lambda^n} - \left(\frac{Ax_0}{\lambda} + \frac{Ax_1}{\lambda^2} + \cdots + \frac{Ax_n}{\lambda^{n+1}} + \cdots\right) \in$$

$$\in \left(x_0 + \frac{Ax_0}{\lambda} + \frac{Ax_1}{\lambda^2} + \cdots + \frac{Ax_{n-1}}{\lambda^n} + \frac{Ax_n}{\lambda^{n+1}} \cdots\right) -$$

$$-\left(\frac{Ax_0}{\lambda} + \frac{Ax_1}{\lambda^2} + \cdots + \frac{Ax_{n-1}}{\lambda^n} + \frac{Ax_n}{\lambda^{n+1}} + \cdots\right) = x_0 + A(0).$$

Esto es, $x_0 \in (\lambda - A)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\lambda^{n+1}}$ y por lo tanto, $H_0(A) \subseteq Im(\lambda - A)$.
Así, para cada $|\lambda| < \delta$, $X = H_0(A) \oplus K(A) \subset Im(\lambda - A)$.
Sumando lo anterior, si $\lambda \in V = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda| < \delta\}$, $(\lambda - A)$ es suprayectiva e inyectiva, es decir, $(\lambda - A)^{-1}$ es un operador lineal, con $Dom(\lambda - A)^{-1} = X$ y por el Teorema de la aplicación abierta para relaciones lineales, $(\lambda - A)^{-1} \in B(X)$.
Se concluye que λ_0 es un punto aislado de $\sigma(A)$. □

2.3. Polos del resolvente

En esta sección se pretende estudiar los puntos aislados del espectro de una relación lineal a través del concepto de polo de la resolvente.

Considérese $A \in BCL(X)$ y λ_0 un punto aislado de $\sigma(A)$. Por la Proposición 2.1.6, para $\lambda \in \rho(A)$ arbitrario, se sabe que $(\lambda - A)^{-1}$ es analítica. Así, por la Proposición 46.7 de [6], $(\lambda - A)^{-1}$ tiene una representación en serie de Laurent en el disco abierto

$$D(\lambda_0, r) \setminus \{\lambda_0\} = \{\lambda : 0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$$

de la siguiente forma:

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n Q_n + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{-n} P_n,$$

donde, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\Gamma = \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| = \delta\}$ con $\delta < \varepsilon$,

$$P_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (\lambda - \lambda_0)^{n-1} (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

$$Q_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (\lambda - \lambda_0)^{-n-1} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Es claro que $P_1 = P$, donde P es la proyección espectral asociada con A y $\{\lambda_0\}$.

Proposición 2.3.1. *Sean $A \in BCL(X)$, λ_0 un punto aislado de $\sigma(A)$ y $\lambda \in \rho(A)$. Entonces*

(i) Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $(A-\lambda_0)Q_{n+1} = Q_n + A(0)$,

(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $(A-\lambda_0)P_n = P_{n+1} + A(0)$,

(iii) Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $(A-\lambda_0)^n P_1 = P_{n+1} + A^n(0)$.

Demostración. Considérese la curva Γ de la misma forma como se definió anteriormente.

(i) Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y considérese el epimorfismo canónico asociado con A, $Q_A : X \to X/A(0)$. Entonces $Q_A(A-\lambda_0)Q_{n+1} =$

$$
\begin{aligned}
&= Q_A(A-\lambda_0)\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^{-n-2}(\lambda-A)^{-1}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^{-n-2}Q_A(A-\lambda_0)(\lambda-A)^{-1}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^{-n-2}Q_A(A-\lambda+\lambda-\lambda_0)(\lambda-A)^{-1}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^{-n-2}(\lambda-\lambda_0)Q_A(\lambda-A)^{-1}d\lambda - \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^{-n-2}Q_A(\lambda-A)(\lambda-A)^{-1}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^{-n-1}Q_A(\lambda-A)^{-1}d\lambda - \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^{-n-2}Q_A(I+A(0))d\lambda \\
&= Q_A\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^{-n-1}(\lambda-A)^{-1}d\lambda - \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^{-n-2}Q_A d\lambda = Q_AQ_n - 0 = Q_AQ_n.
\end{aligned}
$$

Así que, $Q_A(A-\lambda_0)Q_{n+1} = Q_AQ_n$, es decir $(A-\lambda_0)Q_{n+1} - Q_n = A(0)$ y por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $(A-\lambda_0)Q_{n+1} = Q_n + A(0)$.

(ii) Sea $n \in \mathbb{N}$. De forma similar a (i) se tiene que

$$\begin{aligned} Q_A(A-\lambda_0)P_n = Q_A \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^n(\lambda-A)^{-1}d\lambda - \\ -Q_A \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^{n-1}d\lambda = Q_A P_{n+1} - 0 = Q_A P_n. \end{aligned}$$

Nuevamente $Q_A(A-\lambda_0)P_n = Q_A P_n$ lo que implica que $(A-\lambda_0)P_n = P_{n+1} + A(0)$.

(iii) Por inducción matemática sobre n. El resultado es claro para $n = 0$. Supóngase dicho resultado se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$.

Ahora,

$$(A-\lambda_0)^{n+1}P_1 = (A-\lambda_0)(A-\lambda_0)^n P_1$$

$$= (A-\lambda_0)(P_{n+1} + A^n(0)) = (A-\lambda_0)P_1 + (A-\lambda_0)A^n(0).$$

Por (ii),

$$\begin{aligned} (A-\lambda_0)P_1 + (A-\lambda_0)A^n(0) = P_{n+2} + A(0) + A^n(A-\lambda_0)(0) \\ = P_{n+2} + A(0) + A^nA(0) = P_{n+2} + A^{n+1}(0). \end{aligned}$$ □

Definición 2.3.1. Sean $A \in BCL(X)$. Se dirá que λ_0 es un polo de $(\lambda - A)^{-1}$ de orden $m > 0$ si λ_0 es un punto aislado de $\sigma(A)$, $ImP_m \nsubseteq A^{m-1}(0)$ y $ImP_{m+1} \subseteq A^m(0)$.

Proposición 2.3.2. *Sean $A \in BCL(X)$ y λ_0 un punto aislado de $\sigma(A)$. Si λ_0 es un polo de $(\lambda - A)^{-1}$ de orden $m > 0$, entonces se cumple lo siguiente:*

(i) $ImP_1 = Ker(\lambda_0 - A)^m$ *y* $\alpha(\lambda_0 - A) = m$,

(ii) para cada $n \geq m$ $KerP_1 = Im(\lambda_0 - A)^n$,

(iii) $\delta(\lambda_0 - A) = m$,

(iv) $X = Ker(\lambda_0 - A)^m \oplus Im(\lambda_0 - A)^m$.

Demostración.

(i) Por la Proposición 1.5.3 (ii), para cada $n \in \mathbb{N}$, $Ker(\lambda_0 - A)^n \subseteq H_0(\lambda_0 - A)$. Además, como λ_0 es un punto aislado de $\sigma(A)$, por la Proposición 2.2.5, $H_0(\lambda_0 - A) = ImP = ImP_1$, es decir, $Ker(\lambda_0 - A)^m \subseteq ImP_1$.
Recíprocamente, sea $x \in ImP_1$. De la demostración de la Proposición 2.3.1 (iii) se puede observar que $(\lambda_0 - A)P_1x = (\lambda_0 - A)x = -P_{m+1}x + A^m(0)$. Puesto que λ_0 es un polo de orden m, $ImP_{m+1} \subseteq A^m(0)$. Luego $P_{m+1}x + A^m(0) = A^m(0)$, entonces $(\lambda_0 - A)^m x = A^m(0)$; de modo que $0 \in (\lambda_0 - A)^m$, esto prueba que $x \in Ker(\lambda_0 - A)^m$.
Por otro lado, sea $x \in Ker(\lambda_0 - A)^{m+1}$. Entonces existe $y \in X$ tal que $y \in (\lambda_0 - A)x$ y $(\lambda_0 - A)^m y = (\lambda_0 - A)^m(0)$. Por la Proposición 2.3.1 (iii) y ya que λ_0 es un polo de orden m, se tiene que

$$\begin{aligned}(\lambda_0 - A)^m(0) &= (\lambda_0 - A)^m y = (\lambda_0 - A)^m P_1 y\\ &= P_{m+1}y + A^m(0) = A^m(0).\end{aligned}$$

De lo anterior también se observa que

$$\begin{aligned}(\lambda_0 - A)^{m+1}x &= (\lambda_0 - A)^m(y + A(0))\\ &= (\lambda_0 - A)^m y + (\lambda_0 - A)^m A(0)\\ &= A^m(0) + A(\lambda_0 - A)^m(0) = A^m(0) + AA^m(0)\\ &= A^m(0) + A^{m+1}(0) = A^{m+1}(0).\end{aligned}$$

De esta manera se puede deducir que $(\lambda_0 - A)^m x = A^m(0) = (\lambda_0 - A)^m(0)$. Lo que implica que $x \in Ker(\lambda_0 - A)^m$ y por lo tanto, $\alpha(\lambda_0 - A) = m$.

(ii) Sean $M := ImP_1$ y $N := KerP_1$. Considérese $A_1 := A_M$ y $A_2 := A_N$; se observa que $A = A_1 \oplus A_2$.
Por la Proposición 2.2.4 (b), $\lambda_0 \notin \sigma(A_2)$, lo que implica que $(\lambda_0 - A_2)^{-1} \in B(N)$, en particular, $N = Dom(\lambda_0 - A_2)^{-1} =$

$Im(\lambda_0 - A_2)$, esto es, $(\lambda_0 - A_2)$ es suprayectiva. Así $\delta(\lambda_0 - A_2) = 0$ y por lo tanto, para cada $n \geq m$, $Im(\lambda_0 - A_2) = N = Im(\lambda_0 - A_2)^n \subseteq Im(\lambda_0 - A)^m$.

Ahora, sean $n \geq m$ y $x \in Im(\lambda_0 - A)^n \cap Ker(\lambda_0 - A)^n$. Entonces $x \in (\lambda_0 - A)^n$ y $Ker(\lambda_0 - A)^n$, es decir, existe $y \in X$ tal que $x \in (\lambda_0 - A)^n y$ y $(\lambda_0 - A)^n x = (\lambda_0 - A)^n(0)$. Así, $(\lambda_0 - A)^n y = x + (\lambda_0 - A)^n(0)$, de donde se obtiene

$$\begin{aligned}(\lambda_0 - A)^n(\lambda_0 - A)^n y &= (\lambda_0 - A)^n(x + (\lambda_0 - A)^n(0)) \\ &= (\lambda_0 - A)^n x + (\lambda_0 - A)^n(\lambda_0 - A)^n(0) \\ &= (\lambda_0 - A)^n(0) + (\lambda_0 - A)^{2n}(0) = (\lambda_0 - A)^{2n}(0),\end{aligned}$$

luego $(\lambda_0 - A)^{2n} y = (\lambda_0 - A)^{2n}(0)$, por consiguiente, $y \in Ker(\lambda_0 - A)^{2n}$.

Puesto que $\alpha(\lambda_0 - A) = m \leq n$, $y \in Ker(\lambda_0 - A)^n$. Además, como $(\lambda_0 - A)^n(0) = (\lambda_0 - A)^n y = x + (\lambda_0 - A)^n(0)$. Esto prueba que $x \in (\lambda_0 - A)^m(0)$.

Sea $w \in Im(\lambda_0 - A)^n$. Puesto que $X = M \oplus N$, existen $w_1 \in M$ y $w_2 \in N$ tales que $w = w_1 + w_2$. Como $N \subseteq Im(\lambda_0 - A)^n$, entonces $w_2 = w - w_1 \in Im(\lambda_0 - A)^n$. Además, $w_2 \in Ker(\lambda_0 - A)^n$, luego

$$w_2 \in Im(\lambda_0 - A)^n \cap Ker(\lambda_0 - A)^n \subseteq (\lambda_0 - A)^n(0).$$

Se probará que para cada $k \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0 - A)^k \subseteq N$. Se sabe que $A(0) = (\lambda_0 - A)(0) \subseteq N$. Supóngase que para algún $k \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0 - A)^k(0) \subseteq N$. Sea $z \in (\lambda_0 - A)^{k+1}(0)$, existe $t \in X$ tal que $t \in (\lambda_0 - A)^k(0)$ y $z \in (\lambda_0 - A)t$. Sabiendo que $(\lambda_0 - A)[N] \subseteq N$ y por hipótesis inductiva, $z \in N$.

De esto último se sigue que $w \in N$ y por lo tanto, para cada $n \geq m$, $Im(\lambda_0 - A)^n = N$, en particular, $Im(\lambda_0 - A)^m = N$.

(iii) Por (ii), $\delta(\lambda_0 - A) \leq m$.

Es fácil observar que $ImP_1 \cap KerP_1 = \{0\}$ y

$$R_c(\lambda_0 - A) = Ker(\lambda_0 - A)^m \cap Im(\lambda_0 - A)^m \subseteq ImP_1 \cap KerP_1.$$

Así, por la Proposición 1.2.10, $\alpha(\lambda_0 - A) = m \leq \delta(\lambda_0 - A)$. Esto demuestra que $\delta(\lambda_0 - A) = m$.

(iv) Por (i)-(iii), $ImP_1 = Ker(\lambda_0 - A)^m$ y $KerP_1 = Im(\lambda_0 - A)^m$. Puesto que P_1 es la proyección espectral asociada con λ_0, entonces

$$X = ImP_1 \oplus KerP_1 = Ker(\lambda_0 - A)^m \oplus Im(\lambda_0 - A)^m. \quad \square$$

Proposición 2.3.3. *Sea $A \in BLC(X)$ tal que $\rho(A) \neq \varnothing$ y sea $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Si $\alpha(\lambda_0 - A) = \delta(\lambda_0 - A) = m < \infty$, entonces:*

(i) λ_0 es un punto aislado de $\sigma(A)$,

(ii) λ_0 es un polo de orden m.

Demostración. Sean $M := Ker(\lambda_0 - A)^m$ y $N := Im(\lambda_0 - A)^m$.

(i) Por la Proposición 2.1.7 y por la Proposición 2.2.3 (b), $X = M \oplus N$ y $A = (\lambda_0 - A)_M \oplus (\lambda_0 - A)_N$, con $(\lambda_0 - A)_M \in B(M)$ nilpotente y $(\lambda_0 - A)_N^{-1} \in B(N)$.
De esto se sigue que $\sigma((\lambda_0 - A)_M) = \{0\}$ y por consiguiente, $\sigma(A_M) = \{\lambda_0\}$. Además, desde que $(\lambda_0 - A)_N^{-1} \in B(N)$, por el Lema 2.2 de [7], existe una vecindad V de λ_0 tal que $(\lambda - A)_N^{-1}$ existe para cada $\lambda \in V \setminus \{\lambda_0\}$. Luego, para cada $\lambda \in V \setminus \{\lambda_0\}$, $\lambda - A = (\lambda - A)_M \oplus (\lambda - A)_M$, es decir, para cada $\lambda \in V \setminus \{\lambda_0\}$, $(\lambda - A)^{-1} \in B(X)$.
Por lo tanto, λ_0 es un punto aislado de $\sigma(A)$.

(ii) Puesto que P_1 es la proyección espectral asociada con $\{\lambda_0\}$ y por (i), para cada $x \in X$ y cada $n > m$, $P_1 x \in M = Ker(\lambda_0 - A)^{n-1}$.
Por la Proposición 2.3.1 (iii), $(\lambda_0 - A)^{n-1} P_1 = -P_n + A^{n-1}(0)$.
De esta manera, para cada $x \in X$ y para cada $n > m$,

$$-P_n + A^{n-1}(0) = (\lambda_0 - A)^{n-1} P_1 = A^{n-1}(0),$$

esto implica que $P_n x \in A^{n-1}(0)$, es decir, $ImP_n \subseteq A^{n-1}(0)$. En particular, $ImP_{m+1} \subseteq A^m(0)$. Se concluye que λ_0 es un polo de orden m. □

Corolario 2.3.4. *Sean $A \in BLC(X)$ y λ_0 un punto aislado de $\sigma(A)$. Si $dimImP_1 < \infty$, entonces λ_0 es un polo.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.5 y la Proposición 1.5.3 (ii), para cada $n \in \mathbb{N}$, $Ker(\lambda_0 - A) \subseteq H_0(\lambda_0 - A) = ImP_1$. Como $dimImP_1$ es finita, entonces $\alpha(\lambda_0 - A) < \infty$.
Ahora considérese $A_1 := A_{KerP_1}$. Por la Proposición 2.2.4 (b), $\lambda_0 \notin \sigma(A_1)$, esto quiere decir que $KerP_1 \subseteq Im(\lambda_0 - A_1) \subseteq Im(\lambda_0 - A)$ y por ende, para cada $n \in \mathbb{N}$, $KerP_1 \subseteq Im(\lambda_0 - A)^n$.
Ya que $dimImP_1 < \infty$, y $X = ImP_1 \oplus KerP_1$, $codimKerP_1 < \infty$ y $codimIm(\lambda_0 - A) < \infty$. Como en la demostración de la Proposición 2.3.2 (iii), $R_c(\lambda_0 - A) = \{0\}$. Así, por la Proposición 1.2.9 (i), $\alpha(\lambda_0 - A) \leq \delta(\lambda_0 - A)$ y por la Proposición 1.2.9 (ii), $\alpha(\lambda_0 - A) = \delta(\lambda_0 - A) = m$.
Por la Proposición 2.3.3, λ_0 es un polo de orden m. □

Conclusiones

Al estudiar con detalle el concepto de relación lineal, resultados y nociones posteriores, se observa que existen ciertas similitudes con los operadores lineales.
Sin embargo, dichas similitudes no inducen el mismo comportamiento, ni el mismo manejo entre ambos objetos, ya que muchos resultados obtenidos dentro de la Teoría de operadores, requieren condiciones adicionales y específicas para poder funcionar de manera adecuada en el caso de relaciones lineales.
Al hablar de la restricción de una relación lineal, existen dos enfoques diferentes, el de la Definición 1.1.10 y el de la Definición 2.1.9. Ambas nociones son sumamente importantes para abordar varios resultados que involucran integración en curvas rectificables en el estudio de puntos aislados.
También se exhibieron dos ejemplos referente a estos enfoques. En ellos se muestra de manera parcial el manejo distinto entre ambas definiciones. El Ejemplo 2.1.1 muestra que ambas definiciones coinciden y el Ejemplo 2.1.2 muestra que no lo hacen.
Así mismo, las nociones de subespacio invariante, dictadas en la Definición 2.1.8 y en la 2.1.7, derivadas de la Definición 1.1.10 y de la Definición 2.1.9, respectivamente, también muestran claramente la diferencia entre los enfoques que representa cada una de dichas definiciones.
El concepto de subespacio invariante es de suma importancia para abordar varios resultados dentro del estudio de los puntos aislados

en el espectro de una relación lineal. En este caso, debido a resultados posteriores a estos enunciados, se prueba que ambos enfoques coinciden. De esta manera es posible aplicar los resultados que se han obtenido en ambas vías.
Algunas preguntas que surgen para investigaciones futuras son precisamente sobre las condiciones en las que las Definiciones 1.1.10 y 2.1.9 serían equivalentes y sobre cuán distintos serían los resultados y el comportamiento de relaciones lineales excluyendo alguno de los dos enfoques.
De igual forma, la correlación que existe entre pseudoresolventes y relaciones lineales cerradas, representa una interesante linea de investigación futura, pues es una manera natural y orgánica de sustentar la Definición 2.1.9.
El análisis culmina con una caracterización de dichos puntos por medio de la parte quasinilpotente y núcleo analítico de la relación lineal en cuestión. Además, mediante el uso de polos del resolvente, se amplia en gran media el estudio de los puntos aislados.
Dado el gran abanico de lineas de investigación y el gran repertorio de resultados de la teoría de relaciones lineales, se puede concluir con total certeza que puede tener grandes aplicaciones en otras áreas del conocimiento.
Así mismo, también puede servir como otro enfoque de estudio a la teoría de operadores, ya que puede ayudar a entender desde otra perspectiva algunos problemas subyacentes.

Bibliografía

[1] AIENA, P. *Semi-Fredholm Operators, Perturbation theory and Localized SVEP.* Mérida, Venezuela, 2007.

[2] BASKAKOV, A. G., AND CHERNYSHOV, K. I. Spectral analysis of linear relations and degenerate operator semigroups. *Sbornik: Mathematics 193* (2002), 1573–1610.

[3] CROSS, R. *Multivalued Linear Operators*, 1st ed. Dekker, 1998.

[4] FAVINI, A., AND YAGI, A. Multivalued linear operators and degenerate evolution equations. *Ann. Mat. Pura Appl (4) 163 no. 1* (1993), 353–384.

[5] GROMOV, M. Partial differential relations. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Gren- zgebiete, Springer-Verlag, Berlin (3) 9* (1986).

[6] HEUSER, H. *Functional Analysis*, 1st ed. Wiley Interscience, 1982.

[7] LAJNEF, M., AND MNIF, M. Isolated spectral points of a linear relation. *Springer-Verlag GmbH 47* (2020), 596–614.

[8] MNIF, M., AND OULED, H. Analytic core and quasi-nilpotent part of linear relations in Banach spaces. *Filomat 32* (2018), 2500–2515.

[9] Sandovici A., de Snoo H., W. H. Ascent, descent, nullity, defect, and related notions for linear relations in linear spaces. *Linear Algebra and its Applications, 423* (2007), 456–497.

[10] von Neumann, J. Functional operators II. The Geometry of Orthogonal Spaces. *Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, NJ 22* (1950).