



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Solución de la ecuación de Laplace con una condición de contorno fraccionaria en una región circular

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

por

C. Miguel Angel Tlapanco Polanco

Asesorada por

Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros
Dra. María Monserrat Morín Castillo

Puebla Pue.
19 de febrero de 2025



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Solución de la ecuación de Laplace con una condición de contorno fraccionaria en una región circular

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

por

C. Miguel Angel Tlapanco Polanco

Asesorada por

Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros
Dra. María Monserrat Morín Castillo

Puebla Pue.
19 de febrero de 2025

Título: Solución de la ecuación de Laplace con una condición de contorno fraccionaria en una región circular

Estudiante: C. MIGUEL ANGEL TLAPANCO POLANCO

COMITÉ

Dr. José Julio Conde Mones
Presidente

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres
Secretario

Dr. Andrés Anzo Hernández
Vocal

M.C. Julio Andrés Acevedo Vázquez
Vocal

Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros
Dra. María Monserrat Morín Castillo
Asesor

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Antecedentes	3
1.1.1. Ecuaciones diferenciales	3
1.1.2. Series de Fourier	4
1.1.3. Cálculo Fraccionario	4
1.1.4. Ecuación de Laplace con condición de frontera fraccionaria	5
1.2. Planteamiento del problema	6
1.3. Objetivos de la tesis.	7
1.4. Contribuciones	7
1.5. Descripción del contenido de la tesis	7
2. Elementos básicos	9
2.1. Series de Fourier	9
2.1.1. Función par e impar.	16
2.1.2. Espacio producto interior	17
2.1.3. Vector normal, gradiente y derivada en dirección normal al exterior sobre \mathbb{R} .	18
2.1.4. Operador Adjunto y operador autoadjunto.	20
2.2. Ecuaciones diferenciales elípticas	22
2.2.1. Introducción	22
2.3. Ecuación de Laplace y Ecuación de Poisson.	23
2.3.1. Funciones Armónicas y sus propiedades.	23
2.3.2. Funciones Armónicas	24
2.3.3. Media esférica	24
2.3.4. Propiedades de Funciones Armónicas	25
2.3.5. Separación de variables en ecuaciones de Laplace	30
2.3.6. Problema de Dirichlet para un círculo	31
2.3.7. Fórmula integral de Poisson para un círculo	34
2.3.8. Función Gamma	36
3. Sobre una generalización del problema de Neumann para la ecuación de Laplace	37
3.0.1. Introducción	37
3.0.2. Propiedades de los operadores J^α y D^α	38
3.0.3. Sobre la solución del problema (3.1)-(3.2)	41
3.1. Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace	43
3.2. Problema de Neumann para la ecuación de Laplace	44
3.3. Problema con una condición de frontera fraccionaria para la ecuación de Laplace	46
3.3.1. Caso $m = 1$.	49
3.3.2. Caso $m = 2$	52
3.3.3. Caso general	54

4. Ejemplos numéricos	57
4.1. Condición de contorno de Dirichlet	57
4.2. Condición de contorno de Neumann	59
4.3. Caso de Neumann a partir del operador D^α	61
5. Conclusiones y perspectivas	69
A.	71
A.1. Coeficientes de Fourier de $ \theta $	71
A.2. Coeficientes de Fourier de θ^2	72
A.3. Programa graficador del Ejemplo (1)	72
A.4. Programa graficador del Ejemplo (2)	73
A.5. Programa graficador del Ejemplo (1)	73
A.6. Programa graficador del Ejemplo (2)	74
A.7. Programa graficador del Ejemplo (1)	74
A.8. Programa graficador del Ejemplo (2)	75
A.9. Programa graficador del Ejemplo (3), (4) y (5)	75
Bibliografía	77

Resumen

En el presente trabajo de tesis se hace un análisis a una generalización del problema de Neumann para la ecuación de Laplace definida sobre el disco unitario con una condición de frontera o de contorno fraccionaria. Esta generalización está planteada y desarrollada en el artículo *On One Generalization of the Neumann Problem for Laplace Equation*[19]. El operador fraccionario con el que se trabaja en este artículo, es una modificación de un operador de tipo Hadamard que involucra el cálculo de integrales. Como parte del trabajo de esta tesis, se calculó de forma explícita la solución del problema fraccionario usando la técnica de series de Fourier ya que la geometría circular lo permite. Sin embargo, para determinar los coeficientes de la expresión analítica, se hizo uso de la cuadratura de Gauss-Kronrod que está programada en MATLAB ya que como se mencionó anteriormente, el operador fraccionario involucra el cálculo de integrales. Se validó que las cuadraturas se aplicarán correctamente calculando (en forma exacta y numérica) algunas integrales similares a las que se requieren para determinar los coeficientes de Fourier de la solución. Una vez calculados los coeficiente de Fourier, se procede a calcular y graficar las soluciones para diferentes valores del operador fraccionario. Se considera un caso particular en el que se reproduce desde el caso fraccionario el problema clásico de Neumann obteniendo los mismos resultados, lo cual valida la programación. Una vez realizado esto, se procede a considerar otros valores del parámetro fraccionario.

Para alcanzar lo anterior, como punto de partida se desarrolla la teoría que nos permite entender y dar contexto a las nociones básicas de los problemas de contorno, así como una introducción a las series de Fourier. Siendo lo anterior usado como antecedente al contenido expuesto en el artículo.

Como segundo paso, se hace un análisis del artículo, donde se proponen un par de operadores diferenciales de orden fraccionario los cuales nos permitirán plantear una condición de frontera reducida con respecto a la planteada en el artículo. Como parte de nuestro trabajo, se realizó un acoplamiento a coordenadas polares. Se elaboró un algoritmo que será base para las soluciones de las condiciones de contorno de Dirichlet, de Neumann y la generalización reducida del problema de Neumann propuesto en el artículo.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

1.1.1. Ecuaciones diferenciales

La historia de las matemáticas es interesante, extensa y muestra el desarrollo que ha tenido el pensamiento complejo de la humanidad. En particular, las ecuaciones diferenciales, las cuales son expresiones matemáticas que relacionan funciones con sus derivadas, son por sí mismas no solo interesantes sino complejas desde el punto de vista matemático 'se interrelacionan con otras áreas de la matemática como son los métodos numéricos, el análisis funcional, Álgebra Lineal, Topología, etc. Además, éstas surgen de la modelación de fenómenos en la física, la química, la fisiología, la biología, la economía, la industria, etc. Algunos de los problemas que dieron origen a las ecuaciones diferenciales fueron el movimiento de los planetas, la forma de una cuerda colgante, la propagación del calor, el crecimiento de las poblaciones, entre otros. actualmente sus aplicaciones son muy amplias.

Las ecuaciones diferenciales se empezaron a estudiar de forma sistemática a finales del siglo XVII, con el desarrollo del cálculo infinitesimal por parte de Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, plantearon el problema inverso de la diferenciación: dada a partir de una relación entre dos cantidades y sus diferenciales.

Entre los primeros matemáticos que se dedicaron a resolver ecuaciones diferenciales de primer orden se encuentran los hermanos Jacques y Jean Bernoulli, quienes resolvieron el problema de la braquistocrona (la curva de descenso más rápido entre dos puntos) y el problema de la catenaria (la curva que adopta una cuerda flexible colgada de dos puntos). También se destacan Pierre de Fermat, Christiaan Huygens, Johann Bernoulli, Leonhard Euler, Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon Laplace, entre otros.

Las ecuaciones diferenciales de orden superior se empezaron a considerar a principios del siglo XVIII, motivadas por problemas geométricos y mecánicos. Algunos de los matemáticos que contribuyeron al desarrollo de esta teoría fueron Jacopo Riccati, Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon Laplace, Joseph Fourier, Siméon Denis Poisson, Augustin Louis Cauchy, entre otros.

A finales del siglo XVIII y principios del XIX, se introdujeron las ecuaciones diferenciales con derivadas parciales, estas son aquellas las cuales involucran funciones de varias variables y sus derivadas parciales. Estas ecuaciones surgieron de la generalización de las ecuaciones diferenciales ordinarias en dimensiones superiores y de la aplicación a problemas de física y matemática, como lo es la ecuación del calor, la ecuación de onda, la ecuación de Laplace, la ecuación de Poisson, la ecuación de Navier-Stokes, etc. Algunos de los matemáticos que trabajaron en este campo fueron Jean Baptiste Joseph Fourier, Siméon Denis Poisson, Augustin Louis Cauchy, Carl Gustav Jacob Jacobi, Bernhard Riemann, Karl Weierstrass, Henri Poincaré, David Hilbert, entre otros [12].

1.1.2. Series de Fourier

Las series de Fourier y las ecuaciones diferenciales están estrechamente relacionadas como a continuación se describe:

1. Las series de Fourier facilitan la posibilidad de representar a funciones generales.
2. Solución de problemas: aunque se utilizaron en su inicio en la solución del problema de propagación del calor, actualmente se utilizan para resolver una gran cantidad de problemas en otras áreas y de naturaleza muy diferente a la del calor.
3. Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales (PDE): La solución de PDEs ha sido el uso principal de la aplicación de las series de Fourier.
4. Funciones periódicas: Las series de Fourier se utilizan para representar funciones periódicas.

Por lo tanto, las series de Fourier son una herramienta muy importante en la solución de problemas en los que intervienen ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

1.1.3. Cálculo Fraccionario

El Cálculo Fraccionario trata del estudio de los llamados operadores de derivación e integración de orden fraccionario sobre dominios reales o complejos y sus aplicaciones. En realidad dichos operadores surgen con el objetivo de generalizar los conceptos de integración y de derivada para valores no enteros, por ello la utilización de los términos “Integración y Diferenciación de Orden Arbitrario” es más apropiado. De acuerdo con [17]: El origen del Cálculo Fraccionario se remonta a 1675, momento en el que Leibniz introduce la noción de la derivada de orden n de una función. Fue posteriormente en 1695 cuando los primeros resultados publicados son citados en una carta de L’Hôpital a Leibniz, en la cual L’Hôpital plantea la cuestión del posible significado de la derivada de orden n si $n = 1/2$. La respuesta intuitiva en ese momento de Leibniz fue: “...y esto es una paradoja aparente que permitirá en el futuro extraer consecuencias muy útiles”.

A continuación presentaremos algunos de los principales operadores diferenciales los cuales pueden ser encontrados en [6] y [9] junto con sus propiedades:

- *Integral Derecha de Riemann-Liouville e Integral izquierda de Riemann-Liouville con orden $\alpha > 0$ de una función dada $f(t)$, con $t \in (a, b)$ son definidas como*

$$D_{a,t}^{-\alpha} f(t) = {}_{RL} D_{a,t}^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

y

$$D_{t,b}^{-\alpha} f(t) = {}_{RL} D_{t,b}^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

- *Derivada izquierda y derecha de Grünwald-Letnikov de orden $\alpha > 0$ de una función dada $f(t)$, con $t \in (a, b)$ son definidas como*

$${}_{GL} D_{a,t}^{\alpha} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ Nh = t - a}} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh),$$

y

$${}_{GL} D_{t,b}^{\alpha} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ Nh = b - t}} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t + jh),$$

- *Derivadas izquierda y derecha de Riemann-Liouville de orden $\alpha > 0$* de una función dada $f(t)$, con $t \in (a, b)$ definidas como

$${}_{RL}D_{a,t}^{\alpha}f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[D_{a,t}^{-(m-\alpha)} f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f(s) ds$$

y

$${}_{RL}D_{t,b}^{\alpha}f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[D_{t,b}^{-(m-\alpha)} f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_t^b (s-t)^{m-\alpha-1} f(s) ds$$

donde m es un entero positivo que satisface $m-1 \leq \alpha < m$.

- *Derivada izquierda y derecha de Caputo de orden $\alpha > 0$* de la función dada $f(t)$, con $t \in (a, b)$ son definidas como

$${}_cD_{a,t}^{\alpha}f(t) = D_{a,t}^{-(m-\alpha)} \left[f^{(m)}(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds$$

y

$${}_cD_{t,b}^{\alpha}f(t) = D_{t,b}^{-(m-\alpha)} \left[f^{(m)}(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds$$

donde m es un entero positivo que satisface $m-1 \leq \alpha < m$.

- *Derivada de Riesz de orden $\alpha > 0$* de una función dada $f(t)$, $t \in (a, b)$ es definido como

$${}_{RZ}D_t^{\alpha}f(t) = C_{\alpha} \left({}_{RL}D_{a,t}^{\alpha}f(t) + {}_{RL}D_{t,b}^{\alpha}f(t) \right),$$

donde $C_{\alpha} = -\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)}$, $\alpha \neq 2k-1$, $k = 0, 1, \dots$. ${}_{RZ}D_t^{\alpha}f(t)$ es también expresado como $\frac{\partial^{\alpha}f(t)}{\partial|t|^{\alpha}}$.

- *La derivada e integral de Hadamard de orden α* para una función dada $f(t)$, $t \in (a, b)$ son dadas por

$$J_{a+,\mu}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x} \right)^{\mu} \left(\log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t} \quad (\alpha > 0; x > a)$$

y

$$D_{a+,\mu}^{\alpha}f(x) = x^{-\mu} \delta^n x^{\mu} u. J_{0+,\mu}^{n-\alpha} f(x), \quad \delta = x \frac{d}{dx}, \quad (\alpha > 0; n = [\alpha] + 1, \mu \in \mathfrak{R}).$$

Notemos que en el Capítulo 3 se trabajará con los operadores de Hadamard dadas sus cualidades para ser representados mediante series de Fourier.

1.1.4. Ecuación de Laplace con condición de frontera fraccionaria

La ecuación de Laplace es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden de tipo elíptico. Recibe su nombre en honor al físico y matemático Pierre-Simon Laplace. Esta ecuación aparece en diversas ramas de la física teórica, como la astronomía, la electrostática, la mecánica de fluidos y la mecánica cuántica.

El prototipo de la clase de ecuaciones diferenciales parciales lineales homogéneas de segundo orden de tipo elípticas en dos variables independientes con coeficientes analíticos es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

la cual es llamada *ecuación de Laplace en el plano* (o en dos dimensiones). La correspondiente ecuación en tres variables independientes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

es llamada *ecuación de Laplace en el espacio* (o en tres dimensiones). El laplaciano de u , ya sea en dos o tres dimensiones, es usualmente denotado por Δu . Del contexto estará claro cuántas variables independientes están involucradas. La ecuación no homogénea correspondiente a la ecuación de Laplace es

(3-7)

$$\Delta u = f(x, y),$$

donde $f(x, y)$ es una función continua definida en la región Ω .

Las soluciones de la ecuación de Laplace se denominan funciones armónicas.

Existen dos problemas fundamentales relacionados con la ecuación de Laplace:

1. Problema de Dirichlet: Consiste en hallar una solución en algún dominio tal que sobre su contorno o frontera se cumpla una condición específica. Por ejemplo, fijar la temperatura en el contorno de acuerdo a una especificación determinada.
2. Problema de Neumann: Las condiciones de contorno de Neumann corresponden al valor sobre la frontera de la derivada normal de la solución.

Las ecuaciones de Laplace y de Poisson son fundamentales en el estudio de campos potenciales y tiene aplicaciones en diversas áreas de la ciencia como son la mecánica de fluidos, electrostática, física, química y la matemática [7].

Una ecuación diferencial de orden fraccionario (FODE por sus siglas en inglés) es una forma generalizada de una ecuación diferencial de orden entero. El FODE es útil en muchas áreas, por ejemplo, para la representación de un modelo físico de diversos fenómenos.

La primera definición de derivada fraccionaria fue introducida a finales del siglo XIX por Liouville y Riemann, pero el concepto de derivada no entera e integral ya fue mencionado en 1695 por Leibniz y L'Hopital. En realidad, los FODE son consideradas como un modelo alternativo a la ecuación diferencial entera. La definición de derivada de Riemann-Liouville fue establecida por Riemann en 1876. Desde entonces se han demostrado muchas aplicaciones de las derivadas fraccionarias e integrales de este tipo de Riemann-Liouville en numerosos campos de la ciencia y la tecnología. Estos incluyen estudios sobre controlabilidad, problemas de avivamiento, termoelasticidad, vibración y procesos de difusión, cuestiones de bioingeniería y otros fenómenos complejos.

Un tema de investigación actual se centra en comprender las diversas propiedades de las derivadas de orden fraccionario y su efectividad en ciertos sistemas complejos [8].

1.2. Planteamiento del problema

Dos problemas clásicos para la ecuación de Laplace definida en una región de \mathbb{R}^2 son el problema de Dirichlet y el problema de Neumann. Estos consisten en determinar una función armónica que satisfaga una condición prescrita en la frontera. En el problema de Dirichlet se conoce el valor de la solución buscada y en el de Neumann se conoce el valor de la derivada de la solución. Resolver mediante la técnica de series de Fourier una generalización al problema clásico de Neumann para la ecuación de Laplace que se presenta en el artículo "*On one generalization of the Neumann problem for the Laplace equation*"[19]. En tiempos recientes, se han considerado condiciones de contorno o de frontera que amplían estos dos condiciones clásicas. Para ello, se

considera que en la frontera se conoce la acción de un operador fraccionario sobre la solución. En este trabajo se resuelve mediante la técnica de series de Fourier una generalización al problema clásico de Neumann para la ecuación de Laplace presentada en el artículo On one generalization of the Neumann problem for the Laplace equation.

1.3. Objetivos de la tesis.

Objetivo general: Dar solución a una generalización del problema clásico de Neumann para la ecuación de Laplace en una región circular tomando un operador fraccionario sobre la condición de contorno propuesto en el artículo a partir del uso de series de Fourier.

Objetivos específicos:

1. Analizar e incluir los elementos básicos que se requieren tales como series de Fourier, ecuación de Laplace, problema de contorno, productos escalares, espacios vectoriales, etc.
2. Analizar matemáticamente el operador fraccionario D^α .
3. Desarrollar ejemplos que muestren que el operador D^1 se comporta como el problema clásico de Neumann usando series de Fourier.
4. Construir ejemplos que muestren la solución de la ecuación de Laplace con una condición de contorno dada a través del operador D^α para diferentes valores de α .
5. Utilizar herramientas de MATLAB para calcular coeficientes de Fourier y graficar las soluciones de los problemas de contorno fraccionarios.

1.4. Contribuciones

1. Desarrollo de ejemplos a modo, que nos permiten la obtención del problema clásico de Neumann para su posterior comparación de los mismos ejemplos obtenidos a partir del operador D^1 .
2. Se realizaron y ejecutaron programas, a partir de los cuales se obtuvieron gráficos, con los que se compararon los resultados obtenidos.
3. Se crearon ejemplos para validar los cálculos y los programas presentado aquí.
4. Se obtuvieron imágenes que ejemplifican las variaciones que sufren los gráficos de las soluciones de los problema de contorno asociadas a la familia de operadores D^α bajo una misma condición de frontera pero bajo distintos valores del parámetro α .

1.5. Descripción del contenido de la tesis

La estructura propuesta de la tesis es la siguiente:

En el Capítulo 1 se proporcionan resúmenes de antecedentes históricos, además, del planteamiento del problema, objetivos a desarrollar y un resumen de nuestras contribuciones.

En el Capítulo 2 se describen conceptos básicos Series de Fourier y su representación gráfica a partir de ejemplos. También se desarrolló la teoría que nos permite comprender las nociones básicas de los problemas con condiciones de contorno.

En el Capítulo 3, se presenta un desarrollo de nociones teóricas sobre ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno, este será enfocado en el disco unitario como región, desarrollando nuestra solución del problema clásico de Neumann a partir de series de Fourier.

En el Capítulo 4, se estudian y desarrollan los operadores J^α y D^α , los cuales son trabajados sobre el disco unitario como problemas de condición de contorno. Para la obtención de su solución, se adapta a coordenadas polares, donde se busca una solución mediante series de Fourier. Se proponen ejemplos que al comparar gráficamente con los resultados obtenidos del problema clásico de Neumann ayuden a validar nuestros resultados para posteriormente presentar valores arbitrarios de α y compararlos entre sí.

Capítulo 2

Elementos básicos

2.1. Series de Fourier

En el estudio de múltiples problemas físicos aparecen series trigonométricas de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)), \quad (2.1)$$

para funciones periódicas de periodo 2π . Dichas series permiten representar funciones muy generales, incluso con muchas discontinuidades. Esta es una ventaja con respecto a las series de potencias que sólo pueden representar funciones con derivadas de todo orden.

En la búsqueda de los coeficientes, es conveniente suponer que la serie es convergente “en algún sentido” ya sea de manera uniforme, puntual, lo cual dependerá del problema que estemos considerando, en este caso supondremos que converge de manera uniforme, para así poder integrar término a término desde cualquier intervalo de longitud 2π . [15]

Recordemos que el problema que nos interesa es poder expresar una función f de periodo 2π en la forma (2.1).

Existen variantes de la definición de series de Fourier, que cambian la formulación de los coeficientes pero que en esencia tienen un mismo resultado. Una de estas, toma la forma

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt), \quad (2.2)$$

donde se considerarán las mismas condiciones de (2.1). Por definición, la serie de Fourier de x es la serie trigonométrica (2.2) con coeficientes a_k y b_k dados por las fórmulas de Euler

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos kt dt \quad k = 1, 2, \dots, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \operatorname{sen} kt dt \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Esos coeficientes son llamados los coeficientes de Fourier de x . Si la serie de Fourier converge para cada t y tiene como suma $x(t)$, entonces escribimos

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sen kt) \quad (2.4)$$

Dado que x se extiende periódicamente con periodo 2π , en (2.2) podemos reemplazar el intervalo de integración $[0, 2\pi]$ por otro intervalo de longitud 2π , por ejemplo $[-\pi, \pi]$. De (2.2) vemos que para la obtención de los coeficientes de Fourier se requiere integración.

Ejemplo 1. Consideremos a la función dada por

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{si } -\pi/2 \leq t < \pi/2 \\ \pi - t & \text{si } \pi/2 \leq t < 3\pi/2 \end{cases} \quad (2.5)$$

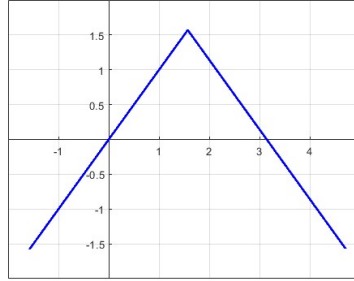


Figura 2.1: Gráfica de la función (2.5) definida en el intervalo de longitud 2π dado por $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Esta función es periódica, es decir, $x(t + 2\pi) = x(t)$. De (2.2) obtenemos $a_k = 0$ para $k = 0, 1, 2, \dots$ y eligiendo $[-\pi/2, 3\pi/2]$ como un intervalo conveniente de integración e integrando por partes, se obtiene que $b_k = \frac{4}{k^2\pi} \sen \frac{k\pi}{2}$, con $k = 1, 2, \dots$. Para más detalle, a continuación se realiza el cálculo de a_k y b_k :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \cos kt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t) \cos kt \, dt \\ &= \frac{1}{k\pi} [t \sen kt] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sen kt \, dt \\ &\quad + \frac{1}{k\pi} [(\pi - t) \sen kt] \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{1}{k\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sen kt \, dt \\ &= \frac{1}{k\pi} \left[\frac{\pi}{2} \sen \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sen \frac{-k\pi}{2} \right] + \frac{1}{k^2\pi} [\cos kt] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &\quad + \frac{1}{k\pi} \left[\left(\pi - \frac{3\pi}{2} \right) \sen \frac{3k\pi}{2} - \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) \sen \frac{k\pi}{2} \right] - \frac{1}{k^2\pi} [\cos kt] \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \\ &= \frac{1}{k^2\pi} \left[\cos \frac{k\pi}{2} - \cos \frac{-k\pi}{2} \right] - \frac{1}{k\pi} \left[-\frac{\pi}{2} \sen \frac{3k\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sen \frac{k\pi}{2} \right] - \frac{1}{k^2\pi} \left[\cos \frac{3k\pi}{2} - \cos \frac{k\pi}{2} \right] \\ &= 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sen kt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\pi - t) \sen kt \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{k\pi} [t \cos kt] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos kt \, dt \\
 &\quad - \frac{1}{k\pi} [(\pi - t) \cos kt] \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} - \frac{1}{k\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos kt \, dt \\
 &= -\frac{1}{k\pi} \left[\frac{\pi}{2} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{-k\pi}{2} \right] + \frac{1}{k^2\pi} [\text{sen } kt] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &\quad - \frac{1}{k\pi} \left[\left(\pi - \frac{3\pi}{2} \right) \cos \frac{3k\pi}{2} - \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{k\pi}{2} \right] - \frac{1}{k^2\pi} [\text{sen } kt] \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \\
 &= -\frac{1}{k\pi} \left[\pi \cos \frac{k\pi}{2} \right] + \frac{1}{k^2\pi} \left[\text{sen } \frac{k\pi}{2} - \text{sen } \frac{-k\pi}{2} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{k\pi} \left[-\frac{\pi}{2} \cos \frac{3k\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{k\pi}{2} \right] - \frac{1}{k^2\pi} \left[\text{sen } \frac{3k\pi}{2} - \text{sen } \frac{k\pi}{2} \right] \\
 &= -\frac{1}{k\pi} \left[\pi \cos \frac{k\pi}{2} \right] + \frac{1}{k^2\pi} 2 \text{sen } \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{k\pi} \pi \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{2}{k^2\pi} \text{sen } \frac{k\pi}{2} \\
 &= \frac{4}{k^2\pi} \text{sen } \frac{k\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Así (2.2) toma la forma

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{4}{\pi} (\text{sen } t - \frac{1}{3^2} \text{sen } 3t + \frac{1}{5^2} \text{sen } 5t - + \dots) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k-1)} \frac{4}{(2k-1)^2\pi} \text{sen}((2n-1)t).
 \end{aligned}$$

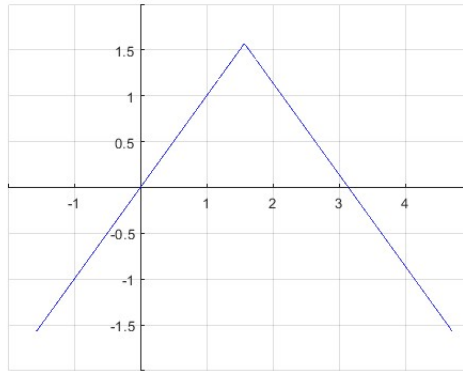


Figura 2.2: Gráfica de la serie de Fourier de la función (2.5), tomando $n = 100$ términos del desarrollo.

Si denotamos por

$$u_k(t) = \cos kt, \quad v_k(t) = \text{sen } kt,$$

entonces podemos escribir (2.4) en la forma

$$x(t) = a_0 u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k u_k(t) + b_k v_k(t)] \quad (2.6)$$

Podemos multiplicar (2.4) por un u_j fijo e integrar respecto a t de 0 a 2π . Esto significa que tomamos el producto interior por u_j . Asumimos que la integración de términos es permisible (la convergencia uniforme sería suficiente) y usamos la ortogonalidad de (u_k) y (v_k) así como el hecho de que $u_j \perp v_k$ para todo j, k . Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \langle x, u_j \rangle &= a_0 \langle u_0, u_j \rangle + \sum [a_k \langle u_k, u_j \rangle + b_k \langle v_k, u_j \rangle] \\ &= a_j \langle u_j, u_j \rangle \\ &= a_j \|u_j\|^2 = \begin{cases} 2\pi a_0 & \text{si } j = 0 \\ \pi a_j & \text{si } j = 1, 2, \dots, \end{cases} \end{aligned}$$

Similarmente, si multiplicamos (2.4) por v_j y procedemos como antes, obtenemos

$$\langle x, v_j \rangle = b_j \|v_j\|^2 = \pi b_j$$

donde $j = 1, 2, \dots$. Resolviendo para a_j y b_j y usando las sucesiones ortonormales (e_j) y (\tilde{e}_j) , donde $e_j = \|u_j\|^{-1} u_j$ y $\tilde{e}_j = \|v_j\|^{-1} v_j$, obtenemos

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{\|u_j\|^2} \langle x, u_j \rangle = \frac{1}{\|u_j\|} \langle x, e_j \rangle, \\ b_j &= \frac{1}{\|v_j\|^2} \langle x, v_j \rangle = \frac{1}{\|v_j\|} \langle x, \tilde{e}_j \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

Esto es idéntico a (2.2). Muestra que en (2.4),

$$a_k u_k(t) = \frac{1}{\|u_k\|} \langle x, e_k \rangle u_k(t) = \langle x, e_k \rangle e_k(t)$$

y similarmente para $b_k v_k(t)$. Por lo que podemos escribir la serie de Fourier (2.4) de la forma

$$x = \langle x, e_0 \rangle e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\langle x, e_k \rangle e_k + \langle x, \tilde{e}_k \rangle \tilde{e}_k] \quad (2.8)$$

Nuestro ejemplo se refiere a series infinitas y plantea la pregunta de cómo podemos extender la consideración a otras secuencias ortonormales y lo que podemos decir sobre la convergencia de las series correspondientes. Dada cualquier sucesión ortonormal (e_k) en un espacio de Hilbert H , puede considerar series de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \quad (2.9)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ son escalares. Tal serie converge y tiene la suma s si existe un $s \in H$ tal que la sucesión (s_n) de sumas parciales

$$s_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

converge a s , es decir, $\|s_n - s\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 1 (Convergencia). *Sea (e_k) una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H . Entonces:*

a) La serie (2.9) converge (con la norma en H) si y sólo si la siguiente serie converge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2. \quad (2.10)$$

b) Si (2.9) converge, entonces los coeficientes α_k son los coeficientes de Fourier $\langle x, e_k \rangle$, donde x denota la suma de (2.9), por lo tanto, en este caso, (2.9) puede ser escrito

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \quad (2.11)$$

c) para cualquier $x \in H$, la serie (2.9) con $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ converge (con la norma de H).

Prueba. (a) Sea $s_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ y $\sigma_n = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$
Entonces, por la ortonormalidad, para cualquier m y $n > m$,

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|^2 &= \|\alpha_{m+1} e_{m+1} + \dots + \alpha_n e_n\|^2 \\ &= |\alpha_{m+1}|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = \sigma_n - \sigma_m \end{aligned}$$

Entonces (s_n) es de Cauchy en H si y sólo si (σ_n) es de Cauchy en \mathbb{R} . Ya que H y \mathbb{R} son completos, se sigue el primer enunciado del Teorema.

(b) Tomando el producto interior de s_n y e_j y usando la ortonormalidad, tenemos

$$\langle s_n, e_j \rangle = \alpha_j \quad \text{para } j = 1, \dots, k \quad (k \leq n \text{ y fijo}).$$

Se asume, $s_n \rightarrow x$. Ya que el producto es continuo

$$a_j = \langle s_n, e_j \rangle \rightarrow \langle x, e_j \rangle \quad (j \leq k).$$

Aquí podemos tomar $k(\leq n)$ tan grande como queramos pues $n \rightarrow \infty$. Para que tengamos $\alpha_j = \langle x, e_j \rangle$ para todo $j = 1, 2, \dots$

(c) De la desigualdad de Bessel vemos que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

converge. De esto y (a) concluimos que (c) se cumple.

Lema 1 (Coeficientes de Fourier). *Cualquier x en un espacio con producto interior X puede tener como mucho contables coeficientes de Fourier distintos de cero $\langle x, e_k \rangle$ con respecto una familia ortonormal (e_k) , $k \in I$ en X . Por lo tanto con cualquier $x \in H$ fijo podemos asociar una serie similar a (2.9)*

$$\sum_{k \in I} \langle x, e_k \rangle e_k \quad (2.12)$$

y podemos acomodar e_k con $\langle x, e_k \rangle \neq 0$ en una sucesión (e_1, e_2, \dots) , así que (2.12) toma la forma de (2.9). La convergencia se sigue del Teorema anterior. Se prueba que la suma no depende del orden en que esos e_k estén ordenados en una sucesión.

Prueba. Sea (w_n) una reordenación de (e_n) . Por definición, esto significa que hay un mapeo biyectivo $n \rightarrow m(n)$ de N en sí mismo, tales que los términos correspondientes de dos sucesiones sean iguales, esto es, $w_{m(n)} = e_n$. Establecemos

$$\alpha_n = \langle x, e_n \rangle, \quad \beta_m = \langle x, w_m \rangle$$

y

$$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \quad x_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m w_m$$

Entonces por el Teorema anterior inciso (b),

$$\alpha_n = \langle x, e_n \rangle = \langle x_1, e_n \rangle, \quad \beta_m = \langle x, w_m \rangle = \langle x_2, w_m \rangle$$

Dado que $e_n = w_{m(n)}$ entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \langle x_1 - x_2, e_n \rangle &= \langle x_1, e_n \rangle - \langle x_2, w_{m(n)} \rangle \\ &= \langle x, e_n \rangle - \langle x, w_{m(n)} \rangle = 0 \end{aligned}$$

y similarmente $\langle x_1 - x_2, w_m \rangle = 0$ Esto implica

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|^2 &= \langle x_1 - x_2, \sum \alpha_n e_n - \sum \beta_m w_m \rangle \\ &= \sum \tilde{\alpha}_n \langle x_1 - x_2, e_n \rangle - \sum \beta_m \langle x_1 - x_2, w_m \rangle = 0 \end{aligned}$$

Consecuentemente, $x_1 - x_2 = 0$ y $x_1 = x_2$ dado que el reordenamiento era arbitrario, esto completa la prueba.

Integrando a ambos lados de (1) y suponiendo que se puede integrar término a término se halla que $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) dx = 0$ y $\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}(nx) dx = 0$ para $n = 1, 2, \dots$, la integración término a término da $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \pi$, es decir,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (2.13)$$

En este caso, la fórmula muestra que el término constante $\frac{1}{\pi} a_0$ en (2.1) es el valor medio de f sobre el intervalo. De forma análoga se calcula el coeficiente a_n . Así pues, multiplicamos (2.1) por $\text{cos}(kx)$ de donde resulta

$$f(x) \text{cos}(kx) = \frac{a_0}{2} \text{cos}(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{cos}(nx) \text{cos}(kx) + b_n \text{sen}(nx) \text{cos}(kx)) \quad (2.14)$$

y mediante el uso de las siguientes identidades trigonométricas

$$1. \text{sen}(nx) \text{cos}(kx) = \frac{1}{2} [\text{sen}(n+k)x + \text{sen}(n-k)x]$$

$$2. \text{cos}(nx) \text{cos}(kx) = \frac{1}{2} [\text{cos}(n+k)x + \text{cos}(n-k)x]$$

$$3. \text{sen}(nx) \text{sen}(kx) = \frac{1}{2} [\text{cos}(n-k)x - \text{cos}(n+k)x]$$

se prueba que, para los valores enteros n y $k \geq 1$, se cumple

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\cos(kx)dx = 0 \quad (2.15)$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = 0, \quad n \neq k. \quad (2.16)$$

Integrando término a término la expresión (2.14) se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = a_n\pi,$$

de donde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx. \quad (2.17)$$

Por (2.14), la fórmula (2.17) es válida para $n = 0$. Esta es la razón de que se escriba el término constante en (2.1) como $\frac{1}{2}a_0$ en lugar de a_0 . Se llega a la fórmula correspondiente para b_n por un procedimiento similar, es decir, multiplicando (2.1) por $\operatorname{sen}(nx)$, e integrando término a término utilizando el hecho conocido,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(kx)dx = 0, \quad \text{para } n \neq k$$

de ahí que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx)dx = b_n\pi,$$

es decir,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx \quad (2.18)$$

Estos cálculos muestran que si la serie (2.1) es uniformemente convergente los coeficientes a_n y b_n se pueden obtener a partir de f mediante las fórmulas anteriores. Sin embargo, necesitamos saber si dada una función periódica ésta admite un desarrollo mediante una serie trigonométrica que converge de manera uniforme, esto no se sabe, por eso es necesario definir ciertos números a_n y b_n que se usarán para construir la serie trigonométrica (2.1).

Cuando se procede de esta manera, a los coeficientes a_n y b_n se les llama coeficientes de Fourier de la función f y a la serie (2.1) se le llama serie de Fourier de f .

Una serie de Fourier es un tipo especial de serie trigonométrica, cuyos coeficientes se calculan aplicando (2.13), (2.17) y (2.18) a cierta función f . Para formar esta serie no es preciso suponer que f sea continua; basta que las integrales (2.13), (2.17) y (2.18) existan, y para ello es suficiente que f sea integrable sobre el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

A partir de ahora entenderemos que f está definida sólo en el intervalo que especifiquemos y la serie de Fourier se extiende periódicamente, con periodo 2π igualmente al mencionar el intervalo en alguna definición.

Sin embargo, esto no implica que la serie de Fourier sea convergente a f , asimismo la convergencia de una serie trigonométrica no quiere decir que ésta sea una serie de Fourier de alguna función f . El problema fundamental en esta cuestión es el de descubrir propiedades de una función integrable que garanticen que su serie de Fourier no sólo es convergente sino que tiende a f .

2.1.1. Función par e impar.

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es par, si para todo punto $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$f(-x) = f(x). \quad (2.19)$$

Se dice que f es impar, si para todo punto $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$f(-x) = -f(x). \quad (2.20)$$

Además, al graficar funciones pares e impares se puede observar que:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \text{ si } f(x) \text{ es par} \quad (2.21)$$

y

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0, \text{ si } f(x) \text{ es impar.} \quad (2.22)$$

Puesto que las integrales representan las áreas (con signo) bajo las curvas. Estos hechos pueden demostrarse también por razonamientos analíticos basados en las definiciones (2.19) y (2.20). Bajo el producto de las funciones pares e impares se comportan así:

$$\begin{aligned} (\text{par})(\text{par}) &= \text{par}, \\ (\text{par})(\text{impar}) &= \text{impar}, \\ (\text{impar})(\text{impar}) &= \text{par} \end{aligned}$$

Por ejemplo para demostrar la segunda de ellas, consideremos la función $F(x) = f(x)g(x)$, con f par y g impar. Entonces

$$F(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)] = -f(x)g(x) = -F(x)$$

lo que demuestra que el producto $f(x)g(x)$, es impar. Las otras se demuestran de manera similar.

Ejemplo 2.

Consideremos la función $f(x) = x^3 \cos(nx)$, Haciendo un pequeño análisis, se deduce que $x^3 \cos(nx)$ es impar, puesto que x^3 es impar y $\cos(nx)$ es par, de tal modo que (2.22) nos dice que

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos(nx) dx = 0,$$

sin necesidad de hacer la integración por partes.

Teorema 2. Sea f una función integrable definida en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. Si f es par, su serie de Fourier tiene sólo términos de tipo coseno y sus coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = 0. \quad (2.23)$$

Si f es impar, su serie de Fourier sólo tiene términos de tipo seno, con coeficiente dados por

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (2.24)$$

2.1.2. Espacio producto interior

Definición Un espacio producto interior es un espacio vectorial X con un producto interior definido en X . Donde el producto interior sobre X es un mapeo de $X \times X$ al campo escalar K de X , es decir, para cada par de vectores x, y se les asocia un escalar el cual es escrito

$$\langle x, y \rangle$$

y es llamado como el producto interior de x y y .

Propiedades del producto interior, sean x, y, z y sea α un escalar, obtenemos

1)

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

2)

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

3)

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

4)

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ y } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Un producto interior sobre X define una norma en X dada por

5)

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} (\geq 0)$$

y una métrica sobre X dada por

x)

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Nota: en 3 si X es el espacio vectorial real tenemos

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

Definición (Ortogonalidad). Un elemento x de un espacio producto interior X se dice que es ortogonal al elemento $y \in X$ si

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Decimos que x y y son ortogonales y lo escribimos como $x \perp y$, similarmente, si $A, B \subset X$, $x \perp A$ si $x \perp a$ para toda $a \in A$ y $A \perp B$ si $a \perp b$ para toda $a \in A$ y para todo $b \in B$.

Definición (conjunto ortonormal y sucesiones). Un conjunto ortogonal M en un espacio producto interior X es un subconjunto $M \subset X$ cuyos par de elementos son ortogonales. Un conjunto ortonormal $M \subset X$ es un conjunto ortogonal en X cuyos elementos tienen norma 1, esto es, para todo $x, y \in M$

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Si un conjunto ortogonal u ortonormal M es numerable, podemos ordenarlo en una sucesión (x_n) y llamarla sucesión ortogonal u ortonormal, respectivamente.

Más generalmente, un conjunto indexado, o familia, $(x_\alpha), \alpha \in I$, es ortogonal si $x_\alpha \perp x_\beta$ para todo

$\alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta$. La familia es llamada ortonormal si es ortogonal y x_α tiene norma 1, entonces para todo α, β tenemos

$$\langle x, y \rangle = \delta_{\alpha, \beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

donde $\delta_{\alpha, \beta}$ es la delta de Kronecker.

Lema 2 (Independencia lineal). *Un conjunto ortonormal es linealmente independiente.*

Producto interior en el espacio de las funciones continuas.

Sea X el espacio producto interior de todas las funciones continuas de valor real en $[0, 2\pi]$ con el producto interior definido por

$$\langle x, y \rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt$$

Una sucesión en X es (u_n) , donde

$$u_n(t) = \cos(nt) \quad n = 0, 1, \dots$$

Otra sucesión ortogonal en X es (v_n) , donde

$$v_n(t) = \sen(nt) \quad n = 1, 2, \dots$$

De hecho, por definición obtenemos

$$\langle u_m, u_n \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n = 1, 2, \dots \\ 2\pi & \text{si } m = n = 0 \end{cases}$$

Similarmente para (v_n)

$$\langle u_m, u_n \rangle = \int_0^{2\pi} \sen(mt)\sen(nt)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Tomando la sucesión ortonormal (e_n) , donde

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_n(t) = \frac{u_n(t)}{\|u_n\|} = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

De (v_n) obtenemos la sucesión ortonormal $(\tilde{e}_n(t))$, donde

$$\tilde{e}_n(t) = \frac{v_n(t)}{\|v_n\|} = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

2.1.3. Vector normal, gradiente y derivada en dirección normal al exterior sobre \mathbb{R} .

Definición 1. ■ Sean dos funciones continuas con valores reales $\phi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Sea D el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $x \in [a, b]$, $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$. Esta es una región de tipo 1.

- Sean dos funciones continuas con valores reales $\psi_1 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$. Sea D el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $y \in [c, d]$, $\phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)$. Esta es una región de tipo 2.
- Una región D es de tipo 3 si D es de tipo 1 y de tipo 2

Vector normal

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región del tipo 3 y sea ∂D su frontera. Denotemos por \mathbf{n} la normal unitaria exterior a ∂D . Si $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \rightarrow \sigma(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización orientada de manera positiva de ∂D , \mathbf{n} está dado por

$$\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}. \quad (2.25)$$

Ejemplo 3. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)| \leq 1\}$ el disco unitario en el plano, la cual es una región de tipo 3, donde $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)| = 1\}$, donde $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta \rightarrow \sigma(\theta) = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ es una parametrización orientada de manera positiva de ∂D , \mathbf{n} está dado por

$$\mathbf{n} = \frac{((\text{sen}(\theta))', -(\cos(\theta))')}{\sqrt{[(\cos(\theta))']^2 + [(\text{sen}(\theta))']^2}} = \frac{(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))}{\sqrt{\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)}} = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta)) \quad (2.26)$$

[1]

Gradiente

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, cuando el campo f es parcialmente derivable en a , el gradiente de f en a es, por definición, el vector $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ dado por

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \quad (2.27)$$

Ejemplo 4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, desarrollaremos el gradiente de f en coordenadas polares, tenemos lo siguiente:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \text{arc tan} \frac{y}{x}$$

entonces, por la regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

calculemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos(\theta)}{r} = \cos(\theta) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-r \text{sen}(\theta)}{r^2} = \frac{-\text{sen}(\theta)}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \text{sen}(\theta)}{r} = \text{sen}(\theta) \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos(\theta)}{r^2} = \frac{\cos(\theta)}{r} \end{aligned}$$

de lo anterior obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \cos(\theta) - \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\text{sen}(\theta)}{r}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \text{sen}(\theta) + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\cos(\theta)}{r}$$

por lo que

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \cdot \cos(\theta) - \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\text{sen}(\theta)}{r}, \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \text{sen}(\theta) + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\cos(\theta)}{r} \right). \quad (2.28)$$

La derivada en dirección normal al exterior sobre \mathfrak{R}

La derivada en dirección normal al exterior sobre \mathfrak{R} se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n} \quad (2.29)$$

lo que es el producto punto entre el gradiente y el vector normal.

Ejemplo 5. Calculemos $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ de nuestra región \mathfrak{R} siendo esta el disco unitario usando coordenadas polares.

Como ya calculamos antes el gradiente y el vector normal en (2.26) y (2.28) respectivamente tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n} &= \left(\frac{\partial f}{\partial r} \cos(\theta) - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\text{sen}(\theta)}{r}, \frac{\partial f}{\partial r} \text{sen}(\theta) + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\cos(\theta)}{r} \right) \cdot (\cos(\theta), \text{sen}(\theta)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \cos^2(\theta) - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\text{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r} + \frac{\partial f}{\partial r} \text{sen}^2(\theta) + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\text{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} (\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)) = \frac{\partial f}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Se usará este resultado pues es usado en el problema de Neumann para el disco unitario en la sección 4.

2.1.4. Operador Adjunto y operador autoadjunto.

Definición 2. Sea $A \in M_{m \times n}$. Definimos la transpuesta conjugada o adjunta de A como la matriz A^* de tamaño $n \times m$ tal que $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

Nota: en el caso que A tenga entradas reales, A^* es simplemente la transpuesta de A .

Para un operador lineal T en un espacio con producto interior V , ahora definimos un operador lineal sobre V llamado el adjunto de T , cuya representación matricial con respecto a cualquier base ortonormal β para V es $[T]_{\beta}^*$.

Sea V un espacio con producto interior y sea $y \in V$. La función $g : V \rightarrow F$ definida por $g(x) = \langle x, y \rangle$ es claramente lineal. Si V es de dimensión finita, cada transformación de V a F es de esta forma.

Teorema 3. Sea V un espacio con producto interior de dimensión finita sobre F y sea $g : V \rightarrow F$ una transformación lineal. Entonces existe un único vector $v \in V$ tal que $g(x) = \langle x, v \rangle$ para toda $x \in V$.

Teorema 4. Sea V un espacio finito con producto interior y sea T un operador lineal en V . Entonces existe una única función $T^* : V \rightarrow V$ tal que $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$ para toda $x, y \in V$ y T^* es lineal.

Teorema 5. Sea V un espacio de dimensión finita con producto interior y sea β una base ortonormal para V . Si T es un operador lineal en V , entonces $[T^*]_\beta = [T]_\beta^*$.

Teorema 6. Sea V un espacio con producto interior y sean T y U operadores lineales sobre V . Entonces:

- a) $(T + U)^* = T^* + U^*$;
- b) $(cT)^* = \bar{c}T^*$ para cualquier $c \in F$;
- c) $(TU)^* = U^*T^*$
- d) $T^{**} = T$
- e) $I^* = I$

Lema 3. Sea $A \in M_{m \times n}(F)$, $x \in F^n$ y $y \in F^m$. Entonces

$$\langle Ax, y \rangle_m = \langle x, A^*y \rangle_n$$

Definición 3. Sea T un operador lineal en un espacio con producto interior V . Se dice que T es auto adjunta (**Hermitiana**) si $T = T^*$. Una matriz A con entradas reales o complejas de tamaño $n \times n$ es Auto adjunta (**Hermitiana**) si $A = A^*$.

2.2. Ecuaciones diferenciales elípticas

2.2.1. Introducción

Un problema de valores en la frontera de interés en las aplicaciones es descrito como sigue: Sea \mathfrak{R} una región acotada con frontera S , y sea $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} \cup S$, la unión de \mathfrak{R} con su frontera S , es decir, $\overline{\mathfrak{R}}$ es la *clausura* de \mathfrak{R} . Sea L un operador diferencial parcial auto-adjunto lineal de segundo orden, el cual es elíptico en $\overline{\mathfrak{R}}$. Esto significa que $L = L^*$, donde L y L^* se definen como

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial}{\partial x_i} + C$$

y

$$L^*v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (A_{ij}v) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i v) + Cv$$

Para una solución u de la ecuación diferencial

$$Lu = f \text{ en } \mathfrak{R}, \tag{2.31}$$

es deseado que esta sea continua en $\overline{\mathfrak{R}}$ y

$$u = g \text{ sobre } S. \tag{2.32}$$

Aquí f es una función dada, continua sobre \mathfrak{R} y g es una función dada continua en la frontera S . Este problema es llamado el *problema de Dirichlet* para la región \mathfrak{R} . La ecuación (2.32) es la *condición de frontera de Dirichlet*. Un problema diferente es determinar una solución de la ecuación (2.31) la cual tiene primera derivada continua sobre $\overline{\mathfrak{R}}$ y satisface

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ en } S \tag{2.33}$$

donde $\partial u / \partial n$ denota la derivada en dirección de la normal exterior en S . Este problema es llamado el *problema de Neumann*, y la ecuación (2.33) es llamada *condición de frontera de Neumann*. Una condición de Frontera de la forma

$$a \frac{\partial u}{\partial n} + bu = g \text{ en } S \tag{2.34}$$

es una *condición de frontera mixta* o de *Robin*. Se asume que las funciones dadas a, b, g son continuas en S , y a, b no se anulan simultáneamente. El problema de encontrar una solución de la ecuación (2.31) es que la ecuación tiene primeras derivadas continuas en $\overline{\mathfrak{R}}$ y satisface la ecuación (2.34) en S es llamado *problema mixto* o *problema de Robin*. A menudo el primer, segundo y tercer término de los problemas de valores en la frontera corresponden a las condiciones de Dirichlet, Neumann y de Robin, respectivamente. En algunos problemas se producen combinaciones de las condiciones de contorno anteriores. Por ejemplo, una condición de Dirichlet prescrita sobre parte de S y una condición de Neumann sobre el resto.

Si la región \mathfrak{R} en la que se busca una solución de la ecuación diferencial (2.31) es la región ilimitada exterior a una superficie cerrada (o la región en el plano exterior a una curva si el problema es en dos dimensiones), el problema es llamado *problema exterior*. En este caso a menudo se impone una condición adicional, llamada *condición al infinito*, la cual gobierna el comportamiento de la solución a grandes distancias del origen.

Cada uno de los problemas de valores en la frontera descritos anteriormente es un problema de valores en la frontera lineal, es decir, la ecuación diferencial y las condiciones de frontera son relaciones lineales en la respectiva función desconocida. Varias consecuencias de la linealidad, pueden ser demostradas. Si u_1, u_2 son soluciones de problemas de Dirichlet

$$\begin{aligned} Lu_1 = f_1 & \quad \text{en } \mathfrak{R} & u_1 = g_1 & \quad \text{en } S, \\ Lu_2 = f_2 & \quad \text{en } \mathfrak{R} & u_2 = g_2 & \quad \text{en } S \end{aligned}$$

y c_1, c_2 son constantes, entonces la función $u = c_1u_1 + c_2u_2$ es solución del problema de Dirichlet

$$Lu = c_1f_1 + c_2f_2 \quad \text{en } \mathfrak{R} \quad u = c_1g_1 + c_2g_2 \quad \text{en } S$$

Esta propiedad importante es conocida como el *principio de superposición*. Considere un problema de Dirichlet en el que se desea resolver la ecuación (2.31) sujeta a la condición (2.32). Si la función f no es igual a cero, puede resultar conveniente transformar el problema en uno que involucre a la ecuación diferencial homogénea $Lu = 0$. Elija una función simple v la cual es continua en \mathfrak{R} y tal que $Lv = f$ en \mathfrak{R} . Sea g_1 la función v restringida a los puntos de la frontera S . Si w satisface $Lw = 0$ en \mathfrak{R} y $w = g - g_1$ en S , la función $u = v + w$ es una solución del problema original. En otra instancia suponga que la frontera S consiste de dos partes S_1 y S_2 . Sea el problema

$$Lu = 0 \quad \text{en } \mathfrak{R} \quad u = g_1 \quad \text{en } S_1 \quad u = g_2 \quad \text{en } S_2$$

Si u_1, u_2 son soluciones de $Lu = 0$ en \mathfrak{R} y si $u_1 = g_1$ en S_1 , $u_1 = 0$ en S_2 , $u_2 = 0$ en S_1 , $u_2 = g_2$ en S_2 , entonces $u = u_1 + u_2$ satisface el problema original. Se pueden utilizar procedimientos análogos para problemas de Neumann y de valores de frontera mixtos. Si las condiciones de frontera no son homogéneas, el problema se puede reducir a uno que involucre condiciones homogéneas de frontera y una ecuación diferencial no homogénea. Por ejemplo, en el problema mixto una solución de la ecuación (2.31) la cual satisface la ecuación (2.34) en S es deseada. Si g no es idéntica a cero, se elige una función simple v con segunda derivada continua tal que v satisface la ecuación (2.34) en S . Sea $f_1 = Lv$. Si w satisface $Lw = f - f_1$ en \mathfrak{R} y $\partial w / \partial n + bw = 0$ en S , entonces $u = v + w$ es solución del problema original.

2.3. Ecuación de Laplace y Ecuación de Poisson.

2.3.1. Funciones Armónicas y sus propiedades.

El prototipo de la clase de ecuaciones diferenciales parciales lineales homogéneas de segundo orden de tipo elípticas en dos variables independientes con coeficientes analíticos es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.35)$$

llamada *ecuación de Laplace en el plano* (o en dos dimensiones). La correspondiente ecuación en tres variables independientes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (2.36)$$

es llamada *ecuación de Laplace en el espacio* (o en tres dimensiones). El laplaciano de u , ya sea en dos o tres dimensiones, es usualmente denotado por Δu , y esta convención se sigue en el texto de este documento. Del contexto estará claro cuántas variables independientes están involucradas. La ecuación no homogénea correspondiente a la ecuación de Laplace (2.35) es

$$\Delta u = f(x, y), \quad (2.37)$$

llamada *ecuación de Poisson en el plano*. La ecuación de Poisson en el espacio es

$$\Delta u = f(x, y, z), \quad (2.38)$$

Estas son ecuaciones clásicas importantes, y ellos (al igual que sus extensiones a n variables independientes) han sido estudiadas extensamente [7],[18]. Las soluciones de la ecuación de Laplace son llamadas funciones armónicas.

2.3.2. Funciones Armónicas

Recordemos que una solución de una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden en una región es una función con segundas derivadas continuas la cual satisface dicha ecuación diferencial en la región. En particular, como mencionamos anteriormente, las soluciones de la ecuación de Laplace son llamadas *funciones armónicas*. Más específicamente, una función u es armónica en el punto P en un espacio de tres dimensiones si existe una esfera S con centro en P tal que u tiene segundas derivadas continuas y satisface la ecuación (2.36) en cada punto dentro de S . Una función u es *armónica en una región* \mathfrak{R} si u es armónica en cada punto de \mathfrak{R} . En el caso bidimensional, la esfera se reemplaza con un círculo. Las soluciones de ecuaciones de Laplace también se llaman función potencial, debido al significado físico de la solución.

Sea S una superficie cerrada en el espacio xyz y sea \mathfrak{R} la región encerrada por S . Recordemos que el símbolo \mathfrak{R} denota el conjunto de puntos que consta de todos los puntos de \mathfrak{R} junto con los puntos de S , es decir, la clausura de \mathfrak{R} . Se asume que la superficie S es tal que \mathfrak{R} es una región regular. Por ejemplo, sea la superficie cerrada S que consta de un número finito de elementos de superficie lisa contiguos, de modo que en los puntos donde se unen los elementos adyacentes, la normal tiene una discontinuidad de salto ordinaria.

Sea \mathfrak{R} una región acotada en un espacio n -dimensional y sea $b(\mathfrak{R})$ la frontera de \mathfrak{R} . Entonces \mathfrak{R} es llamada región regular si

$$\int_{\mathfrak{R}} \nabla \cdot V d\tau = \int_{b(\mathfrak{R})} \left(\sum_{i=1}^n V_i \gamma_i \right) d\sigma$$

se cumple para todo campo vectorial V cuyos componentes V_i son continuamente diferenciables en \mathfrak{R} y la frontera $b(\mathfrak{R})$. Aquí $d\tau = dx_1 \dots dx_n$ es el elemento de volumen en \mathfrak{R} , es el elemento de superficie en la frontera $b(\mathfrak{R})$ y $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ es la unidad exterior normal a $b(\mathfrak{R})$. Una condición suficiente para que \mathfrak{R} sea una superficie regular es que la frontera $b(\mathfrak{R})$ consista de un número finito de superficies continuas, cada pieza es representable paramétricamente como $x_i = \psi_i(s_1, \dots, s_{n-1})$, donde cada función ψ_i tiene primera derivada continua con respecto a los parámetros s_1, \dots, s_{n-1} . En este caso γ es una función continua por tramos en la frontera $b(\mathfrak{R})$.

2.3.3. Media esférica

En la derivación de las propiedades de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales el concepto de media esférica de una función es muy útil. Sea $P(x, y, z)$ un punto dado de \mathfrak{R} , y sea $S(P, r)$ denota la esfera con centro en P y radio r . Se asume de ahora en adelante que r es elegido tal que $S(P, r)$ está dentro de \mathfrak{R} . Si φ es una función continua en \mathfrak{R} , el medio esférico de φ es la función $\bar{\varphi}$ definida por

$$\bar{\varphi}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S(P,r)} \varphi(Q) dS \quad (2.39)$$

Aquí Q denota un punto variable en $S(P, r)$, y dS es el elemento de la superficie de integración. En la ecuación (2.39) se asume que el centro $P(x, y, z)$ se mantiene fijo, de lo contrario, una notación más apropiada para el valor del medio esférico es $\bar{\varphi}(x, y, z; r)$. Para un radio fijo el valor $\bar{\varphi}$ es el promedio de los valores que φ toma alrededor de la esfera $S(P, r)$; de ahí el nombre de media esférica. Se introducen las coordenadas esféricas r, θ, φ con origen en P , y sea

$$\xi = x + r \sin \theta \cos \varphi \quad \eta = y + r \sin \theta \sin \varphi \quad \zeta = z + r \cos \theta$$

para $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$

Entonces (ξ, η, ζ) son las coordenadas del punto variable Q en $S(P, r)$, y el medio esférico

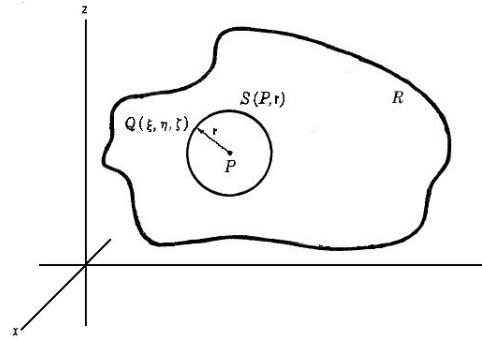


Figura 3-1

puede ser escrito

$$\bar{\varphi}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(x + r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, y + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, z + r \cos \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi \quad (2.40)$$

donde $dS = r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi$. Es claro que $\bar{\varphi}$ es una función continua de r en algún intervalo $0 < r \leq R$. Además

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi(\bar{Q})}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi = \varphi(\bar{Q})$$

por el Teorema de valor medio para integrales, donde \bar{Q} es algún punto en $S(P, r)$.

Por eso

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{\varphi} = \varphi(x, y, z) \quad (2.41)$$

donde $\bar{Q} \rightarrow P$ cuando $r \rightarrow 0$. Ahora si $\bar{\varphi}$ es definida en $r = 0$ por $\bar{\varphi}(0) = \varphi(x, y, z)$ entonces $\bar{\varphi}$ es continua en el intervalo cerrado $[0, R]$. Es claro que si φ es continuamente diferenciable en \mathfrak{R} , entonces $\bar{\varphi}$ tiene primer derivada continua en $0 < r < R$.

2.3.4. Propiedades de Funciones Armónicas

La primera propiedad de funciones armónicas demostrada aquí es encarnada en el Teorema (7), a menudo llamado Teorema de valor medio de Gauss. Este Teorema establece que para una función armónica la media esférica tiene un valor constante sobre esferas $S(P, r)$ alrededor de P , y de hecho este valor medio constante es el valor de la función en el centro P .

Teorema 7. *Sea u armónica en \mathfrak{R} . Si P es un punto dado de \mathfrak{R} y $S(P, r)$ es una esfera con centro en P tal que $S(P, r)$ es contenido en \mathfrak{R} , entonces*

$$u(P) = \bar{u}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S(P, r)} u(Q) dS. \quad (2.42)$$

Demostración. La prueba consiste en mostrar que $\bar{u}(r) = \text{constante}$, $0 < r < R$. Entonces la conclusión se sigue por la continuidad de \bar{u} en $[0, R]$ y la ecuación (2.41). Reemplazando φ por u en la ecuación (2.40) y diferenciando con respecto a r . Entonces

$$\frac{d\bar{u}}{dr} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (u_\xi n_1 + u_\eta n_2 + u_\zeta n_3) \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi$$

donde ξ, η, ζ son como se definieron previamente y

$$n_1 = \text{sen } \theta \cos \varphi \quad n_2 = \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi \quad n_3 = \cos \theta \quad (2.43)$$

son los cosenos de dirección de la normal \mathbf{n} en $S(P, r)$. Sea ∇u denota el vector gradiente

$$\mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (2.44)$$

y sea $V(P, r)$ denota la región esférica (bola) cuyo límite es $S(P, r)$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (u_\xi n_1 + u_\eta n_2 + u_\zeta n_3) \text{sen } \theta \, d\theta \, d\varphi \\ = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S(P,r)} \nabla \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{V(P,r)} \Delta u \, d\tau = 0 \end{aligned}$$

por el Teorema de convergencia. Por eso $\partial \bar{u} / \partial r = 0$, y entonces \bar{u} tiene valor constante para $0 < r < R$. La continuidad de \bar{u} en $r = 0$ implica

$$\bar{u}(r) = \bar{u}(0) = u(x, y, z).$$

El opuesto del Teorema de Gauss es también verdadero. Es decir, si u es continua y tiene la propiedad de valor medio expresada en la conclusión del Teorema (7) en cada punto de \mathfrak{R} , entonces u debería ser armónica en \mathfrak{R} . En consecuencia, la propiedad del valor medio sobre esferas caracteriza las funciones armónicas. Por supuesto, se puede probar que esta propiedad implica que u es una función analítica en \mathfrak{R} . Las propiedades de valor medio pueden ser usadas para probar el principio del máximo-mínimo. Como bien sabemos el Teorema de Heine-Borel afirma que una función continua en un conjunto cerrado y acotado debe ser acotada en el conjunto, más aún, tiene máximo y mínimo en el conjunto[3]. El siguiente Teorema se puede considerar una extensión de éste. Se incluyen las demostraciones del Teorema para completéz de la exposición y pueden ser consultadas en [7].

Teorema 8 (Principio del máximo-mínimo para funciones armónicas). *Sea \mathfrak{R} una región acotada con frontera S . Sea u una función continua en $\bar{\mathfrak{R}}$ y armónica en \mathfrak{R} . Si u no es constante en $\bar{\mathfrak{R}}$, el máximo M y el mínimo m de u en \mathfrak{R} debe ser alcanzada en la frontera S y la desigualdad $m < u(p) < M$ se cumple para cada punto $P \in \mathfrak{R}$.*

Demostración. Supongamos que el valor máximo M es alcanzado en un punto P en \mathfrak{R} y mostremos que u tiene un valor constante en todo $\bar{\mathfrak{R}}$. Sea R cualquier otro punto en \mathfrak{R} y unamos P con R mediante una línea poligonal que se encuentra dentro de \mathfrak{R} . Sea d la distancia de esta línea a la frontera S , elijamos r_0 tal que $0 < r_0 < d$. Sea T_0 que denota la esfera de centro P de radio r_0 . Entonces T_0 se encuentra dentro de \mathfrak{R} . Por la ecuación (2.42) y dado que se asume que $u(p) = M$, se sigue que

$$\frac{1}{4\pi r_0^2} \iint_{T_0} [M - u(Q)] dS = \frac{M}{4\pi r_0^2} 4\pi r_0^2 - \frac{1}{4\pi r_0^2} \iint_{T_0} u(Q) dS = 0.$$

La función $M - u$ es continua y $M - u(Q) \geq 0$, en particular para todos los puntos Q en T_0 . La desaparición de la integral implica que u tiene valor constante M en T_0 . De hecho u debe ser constante dentro de T_0 también. Para probar esto, elegimos un radio $r < r_0$ y aplicamos el mismo argumento usado para T_0 a la esfera T_r de centro P y de radio r . Entonces u tiene el valor constante M en T_r . Entonces u es idénticamente igual a M en todo el interior de T_r . Ahora sea

Q_1 el punto de intersección de la línea poligonal con la esfera T_0 . Entonces $u(Q_1) = M$. Sea T_1 la esfera de radio r_0 al rededor de Q_1 . Entonces T_1 y su interior están en \mathfrak{R} y repitiendo el argumento previo se sigue que u tiene valor constante M dentro de T_1 . Se Q_2 el punto de intersección de la línea poligonal con la esfera T_1 ; entonces $u(Q_2) = M$, etc. Después de un número finito de pasos, el punto R está incluido en el interior o sobre la superficie de una esfera T_n tal que u tiene el valor constante dentro y sobre T_n . Por eso $u(R) = M$. Esto prueba que u tiene el valor constante M en \mathfrak{R} . Por continuidad u debe tener un valor constante M en $\overline{\mathfrak{R}}$. En consecuencia si u no es constante en \mathfrak{R} , entonces $u(P) < M$ debe mantenerse en \mathfrak{R} . La declaración sobre el valor mínimo m sigue ahora notando que la función $-u$ es continua sobre $\overline{\mathfrak{R}}$ y armónica en \mathfrak{R} , y el máximo de $-u$ es $-m$.

Corolario 1. *Sea \mathfrak{R} una región acotada con frontera S . Sea u armónica en \mathfrak{R} y continua sobre $\overline{\mathfrak{R}}$. Sea M una constante tal que $|u(P)| \leq M$ se cumple para todo punto P en la frontera S . Entonces $|u(P)| \leq M$ se cumple en $\overline{\mathfrak{R}}$, incluyendo todos los puntos de \mathfrak{R} . Si la desigualdad es estricta se cumple en S la desigualdad estricta debe cumplirse en \mathfrak{R} también. En particular si $u = 0$ en todos los puntos de S , entonces $u = 0$ en todo $\overline{\mathfrak{R}}$*

Demostración. Sea M_1 el valor máximo de u en S . Dado que u es continua en S , $M_1 \leq M$. Por el principio Máximo-mínimo, $u(P) \leq M_1$ se cumple para todo punto P en \mathfrak{R} . La prueba de que $u(P) \geq -M$ en \mathfrak{R} se cumple de la misma manera. Por tanto $|u(P)| \leq M$. Se debe notar que el Teorema (8) (y sus consecuencias) se cumplen para cualquier región acotada y no solo aquellos a los que se aplica el Teorema de la divergencia. Los Teoremas siguientes con respecto al problema de Dirichlet son obtenidos inmediatamente de las propiedades de funciones armónicas. El primer Teorema es una consecuencia del corolario notando que la diferencia de dos soluciones del problema es armónica en \mathfrak{R} , continua en $\overline{\mathfrak{R}}$ y ocurre en todo S . El segundo Teorema pertenece a la estabilidad de la solución del problema de Dirichlet. Un pequeño cambio en los valores de la frontera produce un pequeño cambio en los valores de la solución en puntos interiores.

Teorema 9 (Unicidad). *Sea f una función continua dada en \mathfrak{R} , y sea g una función continua dada definida en la frontera S . Entonces hay al menos una solución al problema de Dirichlet*

$$\Delta u = f \quad \text{en } \mathfrak{R} \quad u = g \quad \text{sobre } S.$$

Teorema 10 (Dependencia continua de los valores en la frontera). *Sea f una función continua dada en \mathfrak{R} , y sea g_1, g_2 funciones continuas dadas en la frontera S tal que $|g_1(P) - g_2(P)| < \epsilon$ se cumple en S . Si u_1, u_2 son soluciones del problema de Dirichlet*

$$\begin{aligned} \Delta u_1 = f & \quad \text{en } \mathfrak{R} & u_1 = g_1 & \quad \text{sobre } S, \\ \Delta u_2 = f & \quad \text{en } \mathfrak{R} & u_2 = g_2 & \quad \text{sobre } S, \end{aligned}$$

entonces $|u_1(P) - u_2(P)| < \epsilon$ se cumple en cada punto P en \mathfrak{R} .

Demostración. Sea $v = u_1 - u_2$. Entonces v satisface la hipótesis del Corolario (3.36) con ϵ reemplazando a M . Respectivamente, $|v(P)| < \epsilon$ se cumple en cada punto P en \mathfrak{R} . Del Teorema (9) se sigue que la única solución del problema $\Delta u = 0$ en \mathfrak{R} , $u = c$ en S , c es constante, es $u = c$ en $\overline{\mathfrak{R}}$. En particular, la única solución del problema homogéneo $\Delta u = 0$ en \mathfrak{R} , $u = 0$ en S es la solución trivial. Cabe destacar en este punto que aunque la singularidad está garantizada por el Teorema (9), las hipótesis del Teorema son demasiado débiles para asegurar la existencia de una solución al problema de Dirichlet. El hecho es que existen regiones acotadas \mathfrak{R}

tales que el problema de Dirichlet no tiene solución independientemente de la elección de la función de frontera continua g . En algunas aplicaciones la función g prescrita en la frontera en el problema de Dirichlet tiene puntos de discontinuidad. Por supuesto es entonces imposible encontrar una solución u bajo el requisito de que u sea continua en $\overline{\mathfrak{R}}$. El problema de Dirichlet con valores límite continuos por partes se describe como sigue. Sea g una función dada definida y continua a trozos en la frontera S . Una solución de $\Delta u = f$ en \mathfrak{R} es descrita tal que

- $u = g$ en cada punto de S donde g es continua y
- u es acotada en $\overline{\mathfrak{R}}$.

Se puede probar que hay al menos una solución para este problema. Para el problema de Neumann.

$$\Delta u = f \quad \text{en } \mathfrak{R} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{en } S$$

como mucho se puede esperar la unicidad dentro de una constante aditiva. Porque si u es una solución, entonces es $u + c$ es también una solución, donde c es constante arbitraria. Además, las funciones f y g no se pueden prescribir de una manera completamente arbitraria si se desea que las soluciones existan. Para verlo, suponga u una solución del problema. Por el Teorema de la divergencia

$$\iiint_{\mathfrak{R}} f d\tau = \iiint_{\mathfrak{R}} \Delta u d\tau = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

De esta relación se halla que

$$\iiint_{\mathfrak{R}} f d\tau = \iint_S g dS \tag{2.45}$$

debe cumplirse. Por tanto, el problema de Neumann no tiene solución para elecciones arbitrarias de f y g . En particular una condición necesaria de que exista una solución del problema

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \mathfrak{R} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{en } S$$

es que g satisfaga

$$\iint_S g dS = 0. \tag{2.46}$$

De importancia en muchas aplicaciones es el problema exterior de Dirichlet. Para la ecuación de Laplace se puede formular de la siguiente manera. Sea S una superficie cerrada simple del tipo descrito arriba, y sea \mathfrak{R} la región no acotada exterior a S . Sea g una función continua dada en S . Uno busca una función u la cual es armónica en \mathfrak{R} , continua en $\overline{\mathfrak{R}}$ y tal que $u = g$ en S . Los Teoremas de procedimiento no se pueden aplicar inmediatamente a este problema ya que se derivaron bajo el supuesto de que \mathfrak{R} era una región acotada. Además, ejemplos simples prueban que el Teorema es falso para regiones no acotadas. Como contraejemplo para el Teorema (9), sea S la esfera unitaria con centro en el origen y sea la función dada $g(P) = 1$. Considere la función $u(P) = 1$, $v(P) = 1/r$, donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Cada función es armónica fuera de la esfera unitaria y $u(P) = v(P) = 1$ en la esfera. Note entonces que la función $w = u - v$ es armónica en la región exterior a la esfera, tiene el valor cero en todo S , pero no se anula de forma idéntica fuera de S . Está claro que se debe imponer un requisito adicional antes de que se pueda obtener una solución única para el problema exterior de Dirichlet. Sea φ una función la cual es definida en todos los puntos exteriores a alguna esfera con centro en el origen. Como antes, sea $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ la distancia del punto variable $P(x, y, z)$ al origen. Entonces φ se anula uniformemente en el infinito si, dado $\epsilon > 0$, existe un número $r_\epsilon > 0$ tal que si $r \geq r_\epsilon$, entonces $|\varphi(P)| < \epsilon$. Se visualiza geoméricamente la esfera S de radio r_ϵ con centro en el origen. Entonces

$|\varphi(P)| < \epsilon$ se cumple para todo punto P externo a S . Para simbolizar esta propiedad escribimos $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(P) = 0$ uniformemente.

Con el requisito adicional de que la solución se anule uniformemente en el infinito, la propiedad de unicidad se mantiene para el problema exterior de Dirichlet.

Teorema 11. *Sea S una superficie cerrada simple, \mathfrak{R} la región exterior S y sea g una función continua en S dada. Puede haber como máximo una función u que es continua en $\overline{\mathfrak{R}}$ y armónica en \mathfrak{R} tal que $u = g$ en S y $\lim_{r \rightarrow \infty} u(P) = 0$ uniformemente.*

Demostración. Suponga que u_1, u_2 son funciones con las propiedades descritas en el Teorema. Entonces la función $v = u_1 - u_2$ es continua en $\overline{\mathfrak{R}}$, armónica en \mathfrak{R} se hace cero en S y converge uniformemente a 0 en el infinito. Ahora, esto prueba que v debe ser igual a cero en \mathfrak{R} . Sea P un punto fijo en \mathfrak{R} y sea $\epsilon > 0$. Se elige una esfera S_r con centro en el origen y de radio suficientemente grande tal que:

1. S es contenido dentro de S_r .
2. P está contenido en S_r .
3. $|v(Q)| < \epsilon$ se cumple para todo punto Q en S_r .

Sea \mathfrak{R}_r la región anular acotada por las superficies S y S_r . Dado que $v = 0$ en S , $|v(Q)| < \epsilon$ se cumple en la frontera completa $S + S_r$ de \mathfrak{R}_r . Se sigue del Corolario (3.36) que $|v(P)| < \epsilon$. La única manera en la que esta desigualdad se cumple para toda elección de $\epsilon > 0$ es cuando $v(P) = 0$. Teoremas análogos son válidos para funciones armónicas de dos variables reales. Sea C una curva suave a trozos cerrada simple en el plano xy y sea \mathfrak{R} la región interior de C . Si $P(x, y)$ es un punto dado de \mathfrak{R} , denotamos por $C(P, r)$ el círculo de radio r con centro en P . Suponga que $C(P, r)$ es contenida en \mathfrak{R} . Dada una función continua φ , la media circular es la función $\bar{\varphi}$ definida por

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2\pi r} \int_{C(P,r)} \varphi(Q) ds \tag{2.47}$$

donde Q es un punto variable en $C(P, r)$ y ds es el elemento del arco. Sean r, θ coordenadas polares con origen en P . Entonces la media circular puede ser reescrita

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \varphi(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) d\theta \tag{2.48}$$

dado que $ds = r d\theta$. Mediante argumentos exactamente similares, ahora se puede demostrar que el Teorema del valor medio de Gauss es válido para una función armónica u en \mathfrak{R}

$$u(P) = \bar{u}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C(P,r)} u(Q) dS. \tag{2.49}$$

Entonces el principio máximo-mínimo en dos dimensiones establece que, excepto en el caso trivial de una constante, una función armónica en una región plana acotada \mathfrak{R} no puede alcanzar su máximo y mínimo en \mathfrak{R} pero debe alcanzar estos valores en la frontera de \mathfrak{R} . El Teorema de la unicidad para el problema de Dirichlet y la propiedad de estabilidad incorporada en el Teorema (10) se derivan del Teorema del valor medio de la misma manera que antes.

2.3.5. Separación de variables en ecuaciones de Laplace

Incluso cuando se puede escribir la solución general de una ecuación diferencial parcial lineal, es más que difícil (excepto en casos especiales) ajustar las funciones arbitrarias que parecen cumplir las condiciones de frontera prescritas. Generalmente se deben utilizar otras técnicas. Una consideración en la elección de un método y el sistema de coordenadas utilizado es la forma de la frontera. Un método aplicable a una serie de ecuaciones lineales homogéneas clásicas de la física matemática, en varios sistemas de coordenadas, se llama método de separación de variables (método de Bernoulli o el método de Fourier). En lugar de comenzar con la solución general, el procedimiento es derivar una secuencia de soluciones particulares, de una forma llamada separable, de tal manera que la superposición produce una solución que satisface las condiciones de contorno.

Coordenadas en el Plano Polar

Si la frontera es rectangular, las coordenadas rectangulares son sugeridas. El primer caso discutido aquí es la ecuación de Laplace en el plano de coordenadas polares r, θ . Este es el apropiado uso de coordenadas si la frontera es un círculo o parte de un círculo. La ecuación de Laplace en coordenadas polares r, θ es

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.50)$$

Una solución de la ecuación (2.50) de la forma

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (2.51)$$

se denomina solución separable de la ecuación de Laplace en coordenadas polares planas. En un esfuerzo por encontrar soluciones separables, se asume una solución de esta forma y luego se deduce la ecuación que deben satisfacer las funciones R, Θ . La sustitución de u de la ecuación (2.51) en la ecuación (2.50) produce

$$r^2 R'' \Theta + r R' \Theta + R \Theta'' = 0$$

o

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} \quad (2.52)$$

donde

$$R' = \frac{dR}{dr} \quad \Theta' = \frac{d\Theta}{d\theta}.$$

El lado izquierdo de la ecuación (2.52) involucra solo r y el lado derecho involucra solo θ . Por lo tanto, las variables en la ecuación (2.50) se han separado. Ahora se argumenta que si se cumple la ecuación (2.52), dado que esta es una identidad en las variables independientes r, θ se sigue que cada lado es idénticamente igual a una constante:

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R} = \lambda = \frac{-\Theta''}{\Theta}.$$

La constante λ es llamada *constante de separación*. Respectivamente, si $u = R\Theta$ es una solución de la ecuación (2.50), las funciones R, Θ deben satisfacer, respectivamente, las ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes

$$r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0, \quad (2.53)$$

$$\Theta'' + \lambda \Theta = 0. \quad (2.54)$$

La ecuación (2.53) es del tipo Euler y puede ser resuelta asumiendo que tiene una solución de la forma $R = r^\alpha$, donde α es una constante a determinar. La solución general es

$$R = \begin{cases} C_0 + D_0 \log r & \text{si } \lambda = 0 \\ C_1 r^\mu + D_1 r^{-\mu} & \text{si } \mu = \sqrt{\lambda} \neq 0. \end{cases}$$

La solución general de la ecuación (2.54) es

$$\Theta = \begin{cases} A_0 + B_0 \theta & \text{si } \lambda = 0 \\ A_1 \cos \mu \theta + B_1 \sen \mu \theta & \text{si } \mu = \sqrt{\lambda} \neq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, soluciones separables de la ecuación (2.50) es de la forma

$$u = (C_0 + D_0 \log r)(A_0 + B_0 \theta) + (C_1 r^\mu + D_1 r^{-\mu})(A_1 \cos \mu \theta + B_1 \sen \mu \theta), \quad (2.55)$$

donde las letras mayúsculas denotan constantes y μ es una constante. En cambio, una función de esta forma es una solución de la ecuación (2.50) en alguna región.

2.3.6. Problema de Dirichlet para un círculo

Se resuelve el problema de Dirichlet para un círculo, para ilustrar cómo las condiciones prescritas en un problema sirven para determinar los valores de la constante de separación, así como las constantes arbitrarias que aparecen en la ecuación (2.55). Sea C un círculo de radio a con centro en el origen en el plano xy y mediante \mathfrak{R} se denota a la región interior de C . Sea $f(\theta)$ una función continua dada en C . El problema es encontrar una solución u de la ecuación (2.50) en \mathfrak{R} tal que u sea de un solo valor y continua en $R + C$ y tal que

$$u(a, \theta) = f(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (2.56)$$

El requisito de un solo valor en $R + C$ implica una condición de periodicidad

$$u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta) \quad 0 \leq r \leq a; -\infty < \theta < \infty \quad (2.57)$$

en adición a la condición de frontera (2.56). Esta condición se satisface con la solución separable (2.55) siempre que θ satisfaga

$$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \quad (2.58)$$

es decir, Θ es periódica, de período 2π . La ecuación (2.58) implica que

$$\Theta(-\pi) - \Theta(\pi) = 0 \quad \Theta'(-\pi) - \Theta'(\pi) = 0 \quad (2.59)$$

$$\lambda = \lambda_n = n^2 \quad n = 0, 1, \dots$$

Además $B_0 = 0$, $D_0 = 0$ son necesarios en la ecuación (2.55). Las funciones

$$u_n(r, \theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sen n\theta) \quad (2.60)$$

son llamadas armónicas circulares. En el presente problema la región de interés incluye $r = 0$ y así la continuidad exige que el coeficiente $D_n = 0$. Las armónicas circulares

$$u_n(r, \theta) = r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sen n\theta) \quad n = 0, 1, \dots$$

son apropiadas aquí. La superposición

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sen n\theta)$$

también será una solución siempre que la serie sea adecuadamente convergente. La condición de contorno (2.56) aun necesita satisfacerse. Esto requiere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sen n\theta) = f(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (2.61)$$

Asuma ahora que f es periódica, de periodo 2π , continua y con primera derivada continua para toda θ . De donde los coeficientes de Fourier de f son

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sen nt \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si las constantes A_n, B_n son elegidas $A_0 = a_0/2$, $A_n = a_n/a^n$, $B_n = b_n/a^n$, $n = 1, 2, \dots$, entonces la ecuación (2.61) se cumple. Las soluciones en serie obtenidas por separación de variables es

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sen n\theta) \quad (2.62)$$

donde los coeficientes a_0, a_n, b_n son los coeficientes de Fourier de f . Note que

$$u(0, \theta) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

expresa la propiedad del valor medio de la función armónica u sobre el círculo C .

Con la ayuda del principio máximo-mínimo se puede probar que la solución formal de la serie (2.60) converge y de hecho produce las soluciones del problema de Dirichlet para el círculo. Recuerde que f se supone continua, con una primera derivada continua a trozos, y periódica, con período 2π . De ahí la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sen n\theta)$$

converge uniformemente a f en $[0, 2\pi]$. Ahora el criterio de Cauchy establece que dado $\epsilon > 0$, existe un entero $N_\epsilon > 0$ tal que si n, m son enteros con $n \geq m \geq N_\epsilon$, entonces

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=m}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sen k\theta) \right| < \epsilon \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Defina la función v en el disco cerrado $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} + C$ por

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=m}^n \left(\frac{r}{a}\right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sen k\theta).$$

Observe que v es continua en $\bar{\mathfrak{R}}$, armónica en \mathfrak{R} y sobre la frontera C satisface

$$|v(a, \theta)| < \epsilon \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Como consecuencia del Corolario (3.36),

$$|v(r, \theta)| < \epsilon \quad \text{en } \bar{\mathfrak{R}}.$$

Lo que se ha mostrado es que dado $\epsilon > 0$ existe un entero $N_\epsilon > 0$ tal que siempre que n, m sean enteros con $n \geq m \geq N_\epsilon$, entonces

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=m}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sen k\theta) \right| < \epsilon$$

para todos los puntos (r, θ) pertenecientes a $\overline{\mathfrak{R}}$. Pero esto es el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de la serie (2.62) en $\overline{\mathfrak{R}}$. Entonces la serie define una función continua u en $\overline{\mathfrak{R}}$. Además, esta función u toma los valores de frontera correctos en el siguiente sentido continuo:

$$\lim_{(r,\theta) \rightarrow (a,\theta_0)} u(r, \theta) = f(\theta_0) \quad 0 \leq \theta_0 \leq 2\pi \quad (2.63)$$

donde se entiende que el enfoque anterior considera solo sobre puntos de $\overline{\mathfrak{R}}$. La relación (2.63) sigue inmediatamente del hecho de que u es continua en $\overline{\mathfrak{R}}$, y

$$u(a, \theta_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta_0 + b_k \sin k\theta_0) = f(\theta_0) \quad \text{para } 0 \leq \theta_0 \leq 2\pi.$$

Queda por demostrar que u es armónica en \mathfrak{R} . Dado que la serie de Fourier de f converge, existe una constante $M > 0$ tal que

$$|a_0| < M \quad |a_n| < M \quad |b_n| < M \quad n = 1, 2, \dots$$

Ahora definimos la sucesión de funciones u_n por

$$u_n(r, \theta) = \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad n = 1, 2, \dots$$

y $u_0(r, \theta) = a_0/2$. Observe que cada u_n es continua en $\overline{\mathfrak{R}}$ y armónica en \mathfrak{R} . Se elije un r_0 tal que $0 < r_0 < a$. Entonces

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial r} \right| = \left| \left(\frac{n}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right| \leq \left(\frac{n}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^n (|a_n| + |b_n|) < 2M \left(\frac{n}{a}\right) \left(\frac{r_0}{a}\right)^n$$

con $n = 1, 2, \dots$ para $0 \leq r \leq r_0$. La serie de constantes positivos

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2M \left(\frac{n}{a}\right) \left(\frac{r_0}{a}\right)^n$$

converge y domina, término a término, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial r} \quad 0 \leq r \leq r_0; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Así la serie obtenida al diferenciar la serie (2.62), término por término con respecto a r , converge uniformemente en el disco cerrado de radio r_0 con centro en el origen. A su vez esto implica que la función u tiene primera derivada continua con respecto a r y $\partial u / \partial r$ se puede calcular mediante la diferenciación término por término de la serie para u con respecto a r siempre que $0 \leq r \leq r_0$. La repetición de este tipo de argumentos muestran que la segunda derivada $\partial^2 u / \partial r^2$, $\partial^2 u / \partial \theta^2$ existen y son funciones continuas y se pueden obtener por diferenciación de términos de la serie para u para puntos dentro del círculo de radio r con centro en el origen. De este modo

$$\Delta u = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta u_n = 0 \quad 0 \leq r < r_0; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Recordemos ahora que r_0 es una elección arbitraria con $0 < r_0 < a$. Así, la función u es armónica en \mathfrak{R} .

La solución (2.62) puede ser interpretada físicamente de diferentes maneras.

2.3.7. Fórmula integral de Poisson para un círculo

Una representación integral importante y útil de la solución del problema de Dirichlet puede derivarse de la ecuación (2.62). Sustituyendo la expresión para los coeficientes de Fourier a_n, b_n de f en la ecuación (2.62) da

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left[\int_0^{2\pi} f(\varphi) (\cos n\varphi \cos n\theta + \sin n\varphi \sin n\theta) d\varphi \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left[\int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n(\varphi - \theta) d\varphi \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi - \theta) \right] d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi - \theta) \right] d\varphi. \end{aligned}$$

Nótese que el intercambio de suma e integración es válido en vista de la convergencia uniforme de las series. Ahora si x es real, $|x| < 1$, entonces

$$1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos n\psi = \frac{1 - x^2}{1 - 2x \cos \psi + x^2}. \quad (2.64)$$

Para probar esto, sea $z = xe^{i\psi}$, $i = \sqrt{-1}$. Recordemos la expansión

$$\frac{1+z}{1-z} = -1 + \frac{2}{1-z} = -1 + 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

Sea $\text{Re } \zeta$ que denota la parte real de un número complejo ζ . Entonces

$$\text{Re} \left[\frac{1+z}{1-z} \right] = \frac{1 - |z|^2}{1 - 2\text{Re}(z) + |z|^2} = \frac{1 - x^2}{1 - 2x \cos \psi + x^2}$$

y

$$\text{Re} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right) = \text{Re} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) \right] = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\psi.$$

En la ecuación (2.64) establezca $x = r/a$, $\psi = \varphi - \theta$ y sustituye el resultado en la ecuación anterior. Entonces

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta) + r^2} f(\varphi) d\varphi. \quad (2.65)$$

La ecuación (2.65) es llamada *integral de Poisson para el círculo*. La suposición hecha es que $0 \leq r < a$ y que f es continua con derivada continua por partes. Sin embargo, la integral existe y define una función diferenciable si sólo se asume la continuidad para f . De hecho el integrando involucra a r, θ como parámetros y el integrando tiene derivadas continuas de todos los órdenes con respecto a r y θ , siempre que $0 \leq r < a$. Esto implica que la función u definida por la integral tiene derivadas continuas de todos los órdenes con respecto de r y θ para $0 \leq r < a$ y las derivadas de u pueden ser calculadas dentro del signo integral. Un cálculo de las derivadas involucradas muestra que la función u definida por la ecuación (2.65) es armónica dentro del círculo. Además se puede demostrar que la función u así definida toma los valores prescritos $f(\theta)$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ donde $r = a$. Así, la integral de Poisson proporciona la única solución del problema de Dirichlet.

Ejemplo Hallar la solución del problema $\Delta u = 0$ $0 \leq r \leq a$ $u(a, \theta) = f(\theta)$ donde $f(\theta) = 1$, $0 < \theta < \pi$; $f(\theta) = 0$, $\pi < \theta < 2\pi$.

Para obtener la solución en serie (2.62) del problema, un cálculo de los coeficientes de Fourier de f produce $a_0 = 1$ y

$$a_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad b_n = \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} \quad n = 1, 2, \dots$$

En consecuencia, la solución en serie es

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-1} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\theta}{2n-1}.$$

De la integral de Poisson (2.65) la solución también debe estar dada por

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi.$$

Las Tablas de integrales proporcionan la fórmula válida si $c^2 < d^2$,

$$\int \frac{dx}{c + d \cos x} = \frac{2}{\sqrt{c^2 + d^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{c^2 - d^2} \tan(x/2)}{c + d}.$$

Sea $f(x) = (c + d \cos x)^{-1}$ y sea $F(x)$ el miembro de la derecha en la fórmula de integración anterior. La diferenciación muestra que $F'(x) = f(x)$ si $x \neq \pm(2n-1)\pi$, $n = 1, 2, \dots$. Sin embargo $F'(x)$ no existe en múltiplos impares de π . Entonces en este caso

$$\int_a^b f(x) dx \neq F(b) - F(a)$$

para una elección arbitraria de intervalo $[a, b]$. Suponga que $0 < x < \pi$. Entonces $F'(x) = f(x)$ y

$$\int_0^\pi f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi-\epsilon} f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{2}{\sqrt{c^2 - d^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{c^2 - d^2} \tan[(\pi - \epsilon)/2]}{c + d} \right\} = \frac{\pi}{\sqrt{c^2 - d^2}}.$$

En la expresión para la solución dada por el conjunto integral de Poisson $c = a^2 + r^2$, $d = -2ar$, $x = \varphi - \theta$. Ahora el intervalo de integración es $0 \leq \varphi \leq \pi$, mientras que la variable θ es tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Por eso, si $0 < \theta < \pi$, entonces $-\pi < x < \pi$. En consecuencia, ya que no estamos integrando a través de un múltiplo impar de π , se sigue que la integral de Poisson da para $0 \leq r < a$, $0 < \theta < \pi$,

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\left| \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \frac{2}{a^2 - r^2} \left\{ \tan^{-1} \frac{(a^2 - r^2) \tan[(\varphi - \theta)/2]}{(a - r)^2} \right\} \right| \right) \Big|_\epsilon^{\pi - \epsilon} \\ &= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{a + r}{a - r} \cot \frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{a + r}{a - r} \tan \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Si $\pi < \theta < 2\pi$, entonces $-2\pi < x < 0$ y esto incluye $x = -\pi$, donde la función $F(x)$ es discontinua. Para evaluar la integral de Poisson para $0 \leq r \leq a$, $\pi < \theta < 2\pi$, tenemos

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\tan^{-1} \left(\frac{a + r}{a - r} \tan \frac{\varphi - \theta}{2} \right) \right] \Big|_\epsilon^{\theta - \pi - \epsilon} + \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\tan^{-1} \left(\frac{a + r}{a - r} \tan \frac{\varphi - \theta}{2} \right) \right] \Big|_{\theta - \pi + \epsilon}^{\pi - \epsilon} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{a + r}{a - r} \tan \frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{a + r}{a - r} \cot \frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{a + r}{a - r} \tan \frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{a + r}{a - r} \cot \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

De estas expresiones se puede verificar que

$$\lim_{r \rightarrow a} u(r, \theta) = 1 \quad 0 < \theta < \pi \quad \lim_{r \rightarrow a} u(r, \theta) = 0 \quad \pi < \theta < 2\pi.$$

2.3.8. Función Gamma

Una de las funciones básicas en el cálculo fraccional es la función gamma de Euler $\Gamma(z)$, la cual generaliza al factorial $n!$ y permite que n tome valores no enteros e incluso valores complejos.

Definición 4 (Función Gamma.). La función Gamma $\Gamma(z)$ es definida de la siguiente manera: sea $x > 0$

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\log(t))^{x-1} dt.$$

Siendo usualmente más usada la siguiente versión

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (2.66)$$

la cual converge en el lado derecho del plano complejo $Re(z) > 0$. En efecto, tenemos

$$\Gamma(x+iy) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} e^{iy \log(t)} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \log(t)) + i \operatorname{sen}(y \log(t))] dt. \quad (2.67)$$

La expresión entre corchetes en (2.67) es acotada para toda t ; la convergencia en el infinito la proporciona e^{-t} y para la convergencia en $t = 0$ debemos tener $x = Re(z) > 1$.

Algunas propiedades de la función Gamma

Una de las propiedades básicas de la función Gamma es que satisface la siguiente ecuación funcional:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (2.68)$$

De (2.68) obtenemos

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$$

Algunos valores importantes:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Sea n un entero positivo

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad (2.69)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3^n} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right) = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}. \quad (2.70)$$

Capítulo 3

Sobre una generalización del problema de Neumann para la ecuación de Laplace

3.0.1. Introducción

Parte del material presentado en esta sección se obtuvo de [19]. Se incluye para una mejor comprensión del lector y se agregan detalles complementarios. Los resultados de la Sección 3.3 son originales de este trabajo. Estos dan la solución para el caso de una condición de frontera fraccionaria en el caso en el que la región Ω es un círculo unitario.

Sean $\Omega = \{x : |x| < 1\}$ la bola unitaria y $\partial\Omega$ la esfera unitaria, $n \geq 2$, $r = |x|$, $\theta = \frac{x}{r}$, consideremos el operador $\delta = r \frac{d}{dr}$, siendo este es un operador de Dirac, donde $r \frac{d}{dr} = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ y $u(x)$ una función suave en el dominio $\bar{\Omega}$. Para cualquier $\alpha > 0$ la expresión siguiente

$$J^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{u(s\theta)}{s} ds, \quad x \in \Omega$$

es llamado operador de integración del orden α en el sentido de Hadamard [11]. Además, supondremos, que $J^0[u](x) = u(x)$, $x \in \Omega$.

Consideremos la siguiente modificación al operador J^α de Hadamard:

$$D_m^\alpha[u](x) = J^{m-\alpha}[\delta^m u](x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s}\right)^{m-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds}\right)^m u \frac{(s\theta)}{s} ds.$$

Notemos que, se usará de forma indistinguida D_m^α y D^α . En esta sección, se presentan los resultados dados en [19] sobre la solución analítica y numérica a una a generalización del problema clásico de Neumann con operadores de frontera de orden fraccionario. Sean $0 < \alpha_N < \dots < \alpha_1 < \alpha \leq 1$, $P_N(D) = D^\alpha + \sum_{j=1}^N a_j D^{\alpha_j}$. En el dominio Ω , consideremos el siguiente problema:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$P_N(D)u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.2)$$

Se entenderá por solución del problema (3.1)-(3.2) a una función $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, para el cual $D^\alpha[u](x) \in C(\bar{\Omega})$, satisface la ecuación (3.1) y las condiciones de frontera (3.2) en el sentido

clásico. Ya que $J^0[u](x) = u(x)$, entonces $D^1[u](x)|_{\partial\Omega} = r \frac{du}{dr} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega}$, donde ν es un vector normal a la frontera del dominio. Por lo tanto, en el caso $\alpha = 1, \alpha_j = 0, j = 1, 2, \dots, N$, se obtiene el problema clásico de Neumann.

3.0.2. Propiedades de los operadores J^α y D^α

Los siguientes resultados se encuentran en [19]. Se incluyen las demostraciones para mejor entendimiento de los mismos.

Lema 4. Sean $0 < \alpha \leq 1$ y $u(x)$ una función armónica en el dominio Ω y $u(x) \in C(\bar{\Omega})$. Si $u(0) = 0$, entonces $J^\alpha[u](x) \in C(\bar{\Omega})$.

Demostración. Sea x_0 un punto arbitrario en $\bar{\Omega}$. Ya que $u(x)$ es una función armónica en Ω y $u(x) \in C(\bar{\Omega})$, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existen números positivos $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ tales que para todo $|s| < \delta_1, |s| < \delta_2$ y $|x - x_0| < \delta_3$ la siguiente desigualdad se cumple:

$$\frac{|u(s(x))|}{s} < \varepsilon, \frac{|u(sx_0)|}{s} < \varepsilon, |u(sx) - u(sx_0)| < \varepsilon.$$

Por eso, si $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces

$$|J^\alpha[u](x) - J^\alpha[u](x_0)| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{\alpha-1} [u(sx) - u(sx_0)] \frac{ds}{s} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) - \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)} \ln \frac{1}{\delta} = C_\delta \cdot \varepsilon.$$

Entonces, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tales que cuando $|x - x_0| < \delta$ la desigualdad $|J^\alpha[u](x) - J^\alpha[u](x_0)| < \varepsilon$ se tiene, es decir, la función $J^\alpha[u](x)$ es continua en el punto x_0 . El lema está probado.

Lema 5. Sea $0 < \alpha \leq 1$ y sea $u(x)$ una función armónica en el dominio Ω . Entonces

- 1) la función $D^\alpha[u](x)$ es también armónica en Ω y $D^\alpha[u](0) = 0$,
- 2) si $f(0) = 0$, entonces la función $J^\alpha[u](x)$ es también armónica en Ω y $J^\alpha[u](0) = 0$.

Lema 6. Sea $0 < \alpha \leq 1$ y sea $u(x)$ una función armónica en el dominio Ω . Entonces para cualquier $x \in \Omega$ las siguientes igualdades se cumplen:

$$J^\alpha [D^\alpha [u]] (x) = u(x) - u(0) \tag{3.3}$$

$$D^\alpha [J^\alpha [u]](x) = u(x), \text{ si } u(0) = 0. \tag{3.4}$$

Estas proposiciones llevan a lo siguiente.

Corolario 2. Sea $u(x)$ una función armónica en el dominio Ω . Entonces, la función $P_m(D)u(x)$ es también armónica en Ω y $P_m(D)u(0) = 0$.

Lema 7. Sea $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$ y sea $u(x)$ una función armónica en el dominio Ω . Entonces para cualquier $x \in \Omega$ las siguientes desigualdades se cumplen:

$$D^\alpha [u](x) = J^{\alpha-\beta} [D^\alpha [u]](x) \tag{3.5}$$

y si $u(0) = 0$, entonces

$$J^\alpha [(u)](x) = J^\beta [J^{\alpha-\beta} [u]] (x). \tag{3.6}$$

Prueba. Sea $u(x)$ una función armónica en el dominio Ω . Entonces, se sabe (ver por ejemplo [5]) que la función $u(x)$ se representa en la forma

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h_k} u_k^{(l)} H_k^{(l)}(x), x \in \Omega, \quad (3.7)$$

donde $\{H_k^l(x), 1, 2, \dots, h_k\}$ es un sistema completo de polinomios armónicos homogéneos de grado k , y $u_k^{(l)}$ son coeficientes de la expansión (3.7). Además, la serie (3.7) converge absoluta y uniformemente con respecto a x cuando $|x| \leq \rho < 1$. Es fácil demostrar que las siguientes igualdades son verdaderas:

$$\begin{aligned} D^\alpha[H_k](x) &= k^\alpha H_k(x), k \geq 0, 0 < \alpha \leq 1, \\ J^\alpha[H_k](x) &= k^{-\alpha} H_k(x), k > 1, \alpha > 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Entonces, aplicando formalmente el operador D^β a la serie (3.7) y teniendo en cuenta la igualdad (3.8), obtenemos

$$D^\beta[u](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{h_k} k^\beta u_k^{(l)} H_k^{(l)}(x). \quad (3.9)$$

El radio de convergencia de la serie (3.9) coincide con el radio de convergencia de la serie (3.7); por lo tanto converge absoluta y uniformemente con respecto a x cuando $|x| \leq \rho < 1$. Transformamos la serie (3.9) de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{h_k} k^\beta u_k^{(l)} H_k^{(l)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{h_k} k^{\beta-\alpha} k^\alpha u_k^{(l)} H_k^{(l)}(x).$$

Además, teniendo en cuenta las igualdades (3.8) y la convergencia uniforme de la última serie, es posible reducir la serie (3.9) a la forma:

$$D^\beta[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - \beta)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\alpha - \beta - 1} D^\alpha \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h_k} u_k^{(l)} H_k^{(l)}(sx) \right] \frac{ds}{s} = J^{\alpha - \beta}[D^\alpha[u]](x).$$

La igualdad (3.6) se prueba similarmente. El Lema se ha probado.

Sea $0 < \beta \leq 1$ considere la función

$$P_\beta(x, y) = \frac{1}{\omega_n \Gamma(\beta)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\beta - 1} \left| \frac{1 - s^2}{|sx - y|^n} - 1 \right| \frac{ds}{s}. \quad (3.10)$$

Además, con el símbolo C denotaremos la constante, cuyo valor no nos interesa.

Lema 8. La función $P_\beta(x, y)$ tiene la propiedad del núcleo polar, es decir, es continua con respecto a $x, y \in \partial\Omega$ cuando $x \neq y$ y para cualquier $x, y \in \partial\Omega$

$$|P_\beta(x, y)| \leq C|x - y|^{-\gamma}, \gamma < (n - 1).$$

Demostración: Note que la función $\frac{1-s^2}{|sx-y|^n} - 1, 0 \leq s \leq 1$ es continua con respecto a $x, y \in \partial\Omega$ cuando $x \neq y$ y se anula cuando $s = 0$. Por lo tanto, la función $P_\beta(x, y)$ es continua con respecto a $x, y \in \partial\Omega$ cuando $x \neq y$. Sea además, ε un número fijo del intervalo $(0, 1)$. Dividiendo la integral del lado derecho de (3.10) en dos partes:

$$\int_0^1 = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^1 = I_1 + I_2.$$

Sobre una generalización del problema de Neumann para la ecuación de Laplace

Se estimará la integral I_1 . Si $0 \leq s \leq \varepsilon$, entonces $|sx - y| = |y - sx| \geq |y| - s|x| = 1 - s \geq 1 - \varepsilon$, de donde se concluye que la función $|sx - y|^{-n}$ es acotada. Además, para la función $f(s) = \frac{1 - s^2 - |sx - y|^n}{s}$ tenemos

$$\lim_{s \rightarrow 0} f(s) = \lim_{s=0} \frac{1 - s^2 - (s^2 - 2sq + 1)^{n/2}}{s} = nq,$$

donde $q = (x, y) = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$. Consecuentemente, la función $f(s)$ es también acotada. Por lo tanto

$$I_1 \leq C \int_0^\varepsilon \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\beta-1} ds \leq C \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\beta-1} ds = C.$$

Por lo tanto, la integral I_1 es acotada. A continuación, estimamos I_2 . Considere dos casos.

1) Sea $q \leq 0$. En este caso $|sx - y|^2 = 1 - 2sq + s^2 \geq 1 + s^2 \geq 1$. Entonces.

$$I_2 = \int_\varepsilon^1 \frac{1 - s^2 - |sx - y|^n}{s \cdot |sx - y|^n} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\beta-1} ds \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\beta-1} ds \leq C.$$

2) Sea $q > 0$. Primero, notamos que para la integral I_2 la siguiente estimación es verdadera:

$$I_2 \leq C \int_\varepsilon^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\beta-1} \frac{1 - s}{|sx - y|^n} ds + C \int_\varepsilon^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\beta-1} ds.$$

La segunda integral en la última expresión es acotada, y para calcular la primera integral usamos la desigualdad $1 - s \leq (1 - s)^{1-\beta} |sx - y|^\beta$. Entonces

$$\int_\varepsilon^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\beta-1} \frac{1 - s}{|sx - y|^n} ds \leq \int_\varepsilon^1 (1 - s)^{1-\beta} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\beta-1} |sx - y|^{-(n-\beta)} ds.$$

En el segmento $[\varepsilon, 1]$ la función $(1 - s)^{1-\beta} \cdot (\ln(1/s))^{1-\beta}$ es acotada. Por lo tanto, es suficiente estudiar la integral

$$\int_\varepsilon^1 (1 - 2sq + s^2)^{-(n-\beta)/2} ds.$$

Para estimar esta integral usamos la siguiente igualdad:

$$|sx - y|^2 = 1 - 2sq + s^2 = (s - q)^2 + 1 - q^2 = \frac{1}{1 - q^2} \left[\left(\frac{s - q}{\sqrt{1 - q^2}} \right)^2 + 1 \right].$$

Entonces, cambiando las variables $s = \sqrt{1 - q^2}t + q$, obtenemos

$$\int_\varepsilon^1 |sx - y|^{-(n-\beta)} ds = (1 - q^2)^{-(n-1-\beta)/2} \int_a^b \frac{dt}{(1 + t^2)^{(n-\beta)/2}},$$

donde $a = \frac{\varepsilon - q}{\sqrt{1 - q^2}}$, $b = \frac{1 - q}{\sqrt{1 - q^2}}$. Además,

$$\int_a^b (1 + t^2)^{-(n-\beta)/2} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + t^2)^{-(n-\beta)/2} dt < \infty.$$

Entonces

$$\int_\varepsilon^1 |sx - y|^{-(n-\beta)} ds \leq C(1 - q^2)^{-(n-\beta-1)/2},$$

donde $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = 2^{-1}(2 - 2q)(1 + q) \geq 2^{-1}|x - y|^2$, de lo cual para la integral I_2 finalmente obtenemos: $I_2 \leq C|x - y|^{-(n-1-\beta)/2}$. Entonces, para la función $P_\beta(x, y)$ la estimación (3.9) se cumple, por lo que el lema se ha probado.

3.0.3. Sobre la solución del problema (3.1)-(3.2)

Para investigar los problemas (3.1)-(3.2), primero estudiamos el siguiente problema auxiliar.

Problema A. Hallar la función $\nu(x)$ armónica en la bola, continua en Ω y con las condiciones:

$$\nu(x) + \sum_{j=1}^m a_j J^{\alpha-\alpha_j}[\nu](x) = f(x), x \in \partial\Omega, \nu(0) = 0. \quad (3.11)$$

Teorema 12. Sea $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Entonces, El problema A tiene solución si y solo si

$$\int_{\partial\Omega} f(x) dS_x = 0. \quad (3.12)$$

Si una solución del problema A existe, entonces esta es única.

Demostración. Sea $\nu(x)$ una solución al problema A. Aplicando el operador $J^{\alpha-\alpha_j}$, $j = 1, 2, \dots, m$, a la función $\nu(x)$ y denotándola por

$$w(x) = \nu(x) + \sum_{j=1}^m a_j J^{\alpha-\alpha_j}[\nu](x). \quad (3.13)$$

Por la suposición: $\nu(x) \in C(\bar{\Omega})$, entonces, debido al Lema (7): $J^{\alpha-\alpha_j}[\nu](x) \in C(\bar{\Omega})$. En consecuencia, $w(x) \in C(\bar{\Omega})$ y es una solución del problema de Dirichlet:

$$\Delta w(x) = 0, x \in \Omega; w(x)|_{\partial\Omega} = f(x). \quad (3.14)$$

Primero probemos la unicidad de la solución al problema A. Si $\nu(x)$ es una solución del problema A homogénea, entonces $f(x) = 0$, y debido a la unicidad de solución del problema de Dirichlet: $w(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\Omega}$. Además, expanda la función $\nu(x)$ en la serie de la forma (3.7). Dado que $\nu(0) = 0$, entonces en esta expansión los miembros libres estarán ausentes. Entonces

$$\nu(x) + \sum_{j=1}^m a_j J^{\alpha-\alpha_j}[\nu](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{h_k} \left(1 + \sum_{j=1}^m a_j k^{\alpha_j-\alpha} \right) \nu_k^{(l)} H_k^{(l)}(x) = 0, |x| \leq \rho < 1.$$

Como $1 + \sum_{j=1}^m a_j k^{\alpha_j-\alpha} > 0$, entonces $\nu_k^{(l)} = 0$ para toda $k = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, h_k$. En consecuencia, $\nu(x) = 0$, $|x| \leq \rho < 1$ y debido a la continuidad $\nu(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\Omega}$. Se prueba la unicidad de la solución del Problema A.

Ahora procedemos a la justificación de la existencia de la solución del Problema A. Sea $\nu(x)$ una solución del Problema A. Como $\nu(0) = 0$, entonces, por el Lema (5), la igualdad $J^{\alpha-\alpha_j}[\nu](0) = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, se cumple. Entonces la función $w(x)$ de la igualdad (3.13) es una solución del problema (3.14) y satisface la condición $w(0) = 0$. Representando la solución del problema (3.14) en forma de integral de Poisson, obtenemos $0 = w(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} f(y) ds_y$. Por lo tanto, se prueba la necesidad de la condición $\nu(0) = 0$ para la existencia de la solución del Problema A. Demostremos que esta condición es suficiente para la existencia de la solución de este problema. Denotemos por $\mu(x) = \nu(x)|_{\partial\Omega}$ la traza de una función armónica desconocida $\nu(x)$ sobre $\partial\Omega$. Como buscamos una función armónica $\nu(x) \in C(\bar{\Omega})$, luego buscaremos la solución del Problema A en forma de integral de Poisson:

$$\nu(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n} \mu(y) ds_y. \quad (3.15)$$

Poniendo la función (3.15) en la condición de contorno (3.11), y teniendo en cuenta la condición $\nu(0) = 0$, para la función $\mu(x)$, desconocida ya que ν es desconocida, obtenemos la siguiente

ecuación integral:

$$\mu(x) + \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{\omega_n \Gamma(\alpha - \alpha_j)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{\alpha - \alpha_j - 1} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{1 - s^2}{|sx - y|^n} - 1 \right| \mu(y) ds_y \frac{ds}{s} = f(x), x \in \partial\Omega.$$

Cambiando el orden de integración en la parte izquierda de la última igualdad, concluimos que

$$\mu(x) + \sum_{j=1}^m a_j \int_{\partial\Omega} P_{\alpha - \alpha_j}(x, y) \mu(y) ds_y = f(x), x \in \partial\Omega,$$

donde

$$P_{\alpha - \alpha_j}(x, y) = \frac{1}{\omega_n \Gamma(\alpha - \alpha_j)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{\alpha - \alpha_j - 1} \left| \frac{1 - s^2}{|sx - y|^n} - 1 \right| \frac{ds}{s}.$$

Denotemos $K(x, y) = \sum_{j=1}^m a_j P_{\alpha - \alpha_j}(x, y)$ Entonces la ecuación integral relativa a $\mu(x)$ se puede reescribir en la forma:

$$\mu(x) + \int_{\partial\Omega} K(x, y) \mu(y) ds_y = f(x), x \in \partial\Omega. \quad (3.16)$$

Del Lema (8), se sigue que el kernel $K(x, y)$ de la ecuación integral (3.16) es polar. Además, para $x, y \in \partial\Omega$ tenemos $|sx - y|^2 = |sy - x|^2$. Por lo tanto $P_{\alpha - \alpha_j}(x, y) = P_{\alpha - \alpha_j}(y, x)$. Entonces el núcleo de la ecuación integral (3.16) es simétrico, es decir, $K(x, y) = K(y, x)$. En consecuencia, una alternativa de Fredholm es aplicable a la ecuación integral (3.16). De ellos se sigue la afirmación del Teorema. De hecho, como se mencionó anteriormente, el problema homogéneo A tiene la solución única; por tanto, la ecuación integral homogénea (3.16) correspondiente a este problema también tiene solución única. Entonces, por el Teorema de Fredholm, la ecuación integral (3.16) es resoluble para cualquier $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Si para la función $f(x)$ se cumple la condición (3.12), entonces integrando (3.16) sobre el dominio Ω , teniendo en cuenta la igualdad: $\frac{1}{\omega} \int_{\partial\Omega} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n} ds_y = 1$, para la función $\mu(x)$ tenemos $\int_{\partial\Omega} \mu(x) ds_x = 0$. Si a través de la función $\mu(x)$ construimos la función $\nu(x)$ en la forma de la integral (3.15), entonces la función dada satisface todas las condiciones del Problema A. El Teorema está probado.

Ahora damos el enunciado principal sobre el problema (3.1)-(3.2).

Teorema 13. *Sea $0 < \alpha_m < \dots < \alpha_1 < \alpha$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Entonces el problema (3.1) - (3.2) se puede resolver si y solo si se cumple la condición (3.12). Si existe una solución del problema, entonces es única hasta un valor constante y se representa en la forma:*

$$u(x) = J^\alpha[\nu](x), \quad (3.17)$$

donde $\nu(x)$ es una solución del **Problema A**.

Demostración. Sea una solución del problema (3.1)-(3.2) y sea denotada por $u(x)$. Se aplica el operador D^α a la función $u(x)$ y se hace $\nu(x) = D^\alpha[u](x)$. Ya que $u(x)$ es una función armónica en Ω , entonces por el Lema (4) la función $\nu(x)$ es también armónica en Ω y $\nu(0) = 0$. Por definición para una solución del problema (3.1) - (3.2) obtenemos $D^\alpha u(x) \in C(\bar{\Omega})$. Entonces por el Lema (6), la función $J^{\alpha - \alpha_j}[D^\alpha[u]](x)$, $j = 1, 2, \dots, m$ es continua en el dominio $\bar{\Omega}$. En el otro lado de la igualdad, por el Lema (8): $D^\alpha[u](x) = J^{\alpha - \alpha_j}[D^\alpha[u]](x)$, $j = 1, 2, \dots, m$. La función $u(x)$ satisface la condición de frontera (3.2). Entonces

$$f(x) = D^\alpha[u](x) + \sum_{j=1}^m a_j D^{\alpha_j}[u](x)|_{\partial\Omega} = D^\alpha[u](x) + \sum_{j=1}^m J^{\alpha - \alpha_j}[D^\alpha[u]](x)|_{\partial\Omega}$$

$$= \nu(x) + \sum_{j=1}^m J^{\alpha-\alpha_j}[\nu](x)|_{\partial\Omega}.$$

Por lo tanto, si $u(x)$ es una solución del problema (3.1)-(3.2), entonces la función $\nu(x) = D^\alpha[u](x)$ es una solución del **Problema A**. Según el Teorema (12) para que exista la solución del **Problema A** es necesario que se cumpla la condición (3.12). Aplicando el operador J^α a la igualdad $\nu(x) = D^\alpha[u](x)$, obtenemos $u(x) = u(0) + J^\alpha[\nu](x)$ tomando en cuenta (3.3). Por tanto, la solución del Problema (3.1) - (3.2) se representa en la forma (3.17) hasta una $u(0)$ arbitraria. Se prueba la necesidad. Demostremos que la condición (3.12) también es suficiente para la existencia de la solución del problema (3.1)-(3.2). De hecho, si se cumple la condición (3.12), entonces existe la solución del **Problema A**. Entonces tiene sentido considerar la función $u(x) = C + J^\alpha[\nu](x)$. Demostremos que la función dada satisface todas las condiciones del problema (3.1)-(3.2). Si $\nu(x) \in C(\bar{\Omega})$ y $\nu(0) = 0$, entonces la función $J^\alpha[\nu](x)$ es armónica y $J^\alpha[\nu](x) \in C(\bar{\Omega})$. Entonces $D^\alpha[u](x) = D^\alpha[J^\alpha[\nu]](x) = \nu(x)$, $D^\alpha[u](x) \in C(\bar{\Omega})$, $D^{\alpha_j}[u](x) = D^{\alpha_j}[J^\alpha[u]](x) = D^{\alpha_j}[J^{\alpha-\alpha_j}[\nu]](x) = J^{\alpha-\alpha_j}[\nu](x)$. Por lo tanto,

$$P_m(D)u(x)|_{\partial\Omega} = \nu(x) + \sum_{j=1}^m a_j J^{\alpha-\alpha_j}[\nu](x)|_{\partial\Omega} = f(x),$$

es decir, la condición de contorno también se cumple. Se prueba el Teorema.

3.1. Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace

Consideremos el siguiente problema de contorno

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \Omega, \\ u &= \varphi & \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Buscaremos su solución (única), en la forma $u(r, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \cos(k\theta) + b_k r^k \sin(k\theta)$ (serie de Fourier desarrollada en base conformada por los armónicos circulares). Cada término de la serie satisface la ecuación de Laplace. Así, u dada por la serie también lo hace ya que dicha serie converge uniformemente. Para determinar los coeficientes, utilizaremos la condición de contorno sobre $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} u|_{\partial\Omega} &= u|_{r=R} = u(R, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k \cos(k\theta) + b_k R^k \sin(k\theta) \\ &= \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \sin(k\theta). \end{aligned}$$

Aplicando el producto interior a ambos lados de la ecuación anterior con $\cos(n\theta)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle u, \cos(n\theta) \rangle &= \left\langle a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k \cos(k\theta) + b_k R^k \sin(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle = \\ &= \left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \sin(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle. \end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de producto interior obtenemos

$$\left\langle a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k \cos(k\theta) + b_k R^k \sin(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle =$$

$$\begin{aligned} & \langle a_0 \cos(0\theta), \cos(n\theta) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k R^k \cos(k\theta), \cos(n\theta) \rangle + \langle b_k R^k \sen(k\theta), \cos(n\theta) \rangle = \\ & 0 \text{ si } k \neq n, \quad a_k R^k \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots, \text{ y } 2a_0\pi \text{ si } k = n = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Análogamente para su igual

$$\begin{aligned} & \left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \sen(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle = \\ & \langle \varphi_0 \cos(0\theta), \cos(n\theta) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k^1 \cos(k\theta), \cos(n\theta) \rangle + \langle \varphi_k^2 \sen(k\theta), \cos(n\theta) \rangle = \\ & 0 \text{ si } k \neq n, \quad \varphi_k^1 \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots, \text{ y } 2\varphi_k^1 \pi \text{ si } k = n = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Aplicando un razonamiento semejante, tomando el producto interior de μ con $\sen(n\theta)$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\langle a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k \cos(k\theta) + b_k R^k \sen(k\theta), \sen(n\theta) \right\rangle = \\ & \langle a_0 \cos(0\theta), \sen(n\theta) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k R^k \cos(k\theta), \sen(n\theta) \rangle + \langle b_k R^k \sen(k\theta), \sen(n\theta) \rangle = \\ & = 0 \text{ si } k \neq n \text{ ó } b_k R^k \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} & \left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \sen(k\theta), \sen(n\theta) \right\rangle = \\ & \langle \varphi_0 \cos(0\theta), \sen(n\theta) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k^1 \cos(k\theta), \sen(n\theta) \rangle + \langle \varphi_k^2 \sen(k\theta), \sen(n\theta) \rangle = \\ & = 0 \text{ si } k \neq n, \text{ ó } \varphi_k^2 \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Por lo antes obtenido en (3.19), (3.20), (3.21) y (3.22), obtenemos que

$$a_k R^k \pi = \varphi_k^1 \pi, \quad 2a_0 \pi = 2\varphi_0 \pi \text{ y } b_k R^k \pi = \varphi_k^2 \pi, \quad (3.23)$$

de donde al despejar en las igualdades obtenidas en (3.23) se obtienen los coeficientes siguientes

$$a_0 = \varphi_0, \quad a_k = \frac{\varphi_k^1}{R^k} \text{ y } b_k = \frac{\varphi_k^2}{R^k}. \quad (3.24)$$

3.2. Problema de Neumann para la ecuación de Laplace

Consideremos el siguiente problema de contorno

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \varphi & \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Buscaremos su solución (única), en la forma $u(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \cos(k\theta) + b_k r^k \sen(k\theta)$ (serie de Fourier desarrollada en base conformada por los armónicos circulares). Cada término de la serie satisface la ecuación de Laplace. Así, u dada por la serie también lo hace. Para determinar los

Sobre una generalización del problema de Neumann para la ecuación de Laplace

3.2 Problema de Neumann para la ecuación de Laplace

coeficientes, utilizaremos la condición de contorno sobre $\partial\Omega$ dada por $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{\partial\Omega}$. Para ello, recordemos que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k r^{k-1} \cos(k\theta) + kb_k r^{k-1} \sen(k\theta).$$

De aquí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{\partial\Omega} &= \frac{\partial u}{\partial\Omega}\Big|_{r=R} = \frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k R^{k-1} \cos(k\theta) + kb_k R^{k-1} \sen(k\theta) \\ &= \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \sen(k\theta). \end{aligned}$$

Aplicando el producto interior a ambos lados de la ecuación anterior con $\cos(n\theta)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u}{\partial r}, \cos(n\theta) \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} ka_k R^{k-1} \cos(k\theta) + kb_k R^{k-1} \sen(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle = \\ &= \left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \sen(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle. \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de producto interior obtenemos

$$\begin{aligned} &\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} ka_k R^{k-1} \cos(k\theta) + kb_k R^{k-1} \sen(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle = \\ &\sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k R^k \cos(k\theta), \cos(n\theta) \rangle + \langle b_k R^k \sen(k\theta), \cos(n\theta) \rangle = \\ &= 0 \text{ si } k \neq n \text{ ó } ka_k R^{k-1} \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

Análogamente para su igual

$$\begin{aligned} &\left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \sen(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle = \\ &\langle \varphi_0 \cos(0\theta), \cos(n\theta) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k^1 \cos(k\theta), \cos(n\theta) \rangle + \langle \varphi_k^2 \sen(k\theta), \cos(n\theta) \rangle = \\ &0 \text{ si } k \neq n, \varphi_k^1 \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots \text{ ó } 2\varphi_k^1 \pi \text{ si } k = n = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aplicando un razonamiento semejante, tomando el producto interior de μ con $\sen(n\theta)$ obtenemos

$$\begin{aligned} &\left\langle a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k \cos(k\theta) + b_k R^k \sen(k\theta), \sen(n\theta) \right\rangle = \\ &\langle a_0 \cos(0\theta), \sen(n\theta) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k R^k \cos(k\theta), \sen(n\theta) \rangle + \langle b_k R^k \sen(k\theta), \sen(n\theta) \rangle = \\ &= 0 \text{ si } k \neq n \text{ ó } b_k R^k \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.28)$$

Análogamente,

$$\left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \sen(k\theta), \sen(n\theta) \right\rangle =$$

Sobre una generalización del problema de Neumann para la ecuación de Laplace
3.3 Problema con una condición de frontera fraccionaria para la ecuación de Laplace

$$\langle \varphi_0 \cos(0\theta), \text{sen}(n\theta) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k^1 \cos(k\theta), \text{sen}(n\theta) \rangle + \langle \varphi_k^2 \text{sen}(k\theta), \text{sen}(n\theta) \rangle =$$

$$0 \quad \text{si } k \neq n \quad \text{ó} \quad \varphi_k^2 \pi \quad \text{si } k = n = 1, 2, \dots \quad (3.29)$$

Por los resultados de (3.26), (3.27), (3.28) y (3.29), obtenemos que

$$0 = 2\varphi_0\pi, \quad ka_k R^{k-1}\pi = \varphi_k^1\pi \quad \text{y} \quad kb_k R^{k-1}\pi = \varphi_k^2\pi \quad (3.30)$$

y al despejar las igualdades en (3.30) tenemos los siguientes coeficientes de Fourier

$$a_k = \frac{\varphi_k^1}{kR^{k-1}}, \quad 0 = a_0 \quad \text{y} \quad b_k = \frac{\varphi_k^2}{kR^{k-1}}. \quad (3.31)$$

3.3. Problema con una condición de frontera fraccionaria para la ecuación de Laplace

Consideremos el siguiente problema de contorno

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \Omega, \\ D_m^\alpha(u) &= \varphi & \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Buscaremos su solución (única), en la forma $u(r, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \cos(k\theta) + b_k r^k \text{sen}(k\theta)$ (serie de Fourier desarrollada en base conformada por los armónicos circulares). Cada término de la serie satisface la ecuación de Laplace. Así, u dada por la serie también lo hace. Para determinar los coeficientes, utilizaremos la condición de contorno sobre $\partial\Omega$, pero antes, analicemos $u(s\beta)$ con $\beta = x/r$:

Dado que x lo hemos considerado en \mathbb{R}^2 , tenemos

$$s\beta = s \frac{x}{r} = s \frac{(x_1, x_2)}{r} = \left(\frac{sx_1}{r}, \frac{sx_2}{r} \right),$$

al pasar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares, como $(x, y) = (r \cos\theta, r \text{sen}\theta)$, entonces:

$$\left(\frac{sr \cos\theta}{r}, \frac{sr \text{sen}\theta}{r} \right) = (s \cos\theta, s \text{sen}\theta).$$

Aplicando lo anterior en $u(r, \theta)$ obtenemos:

$$D^\alpha(u) = D^\alpha \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \cos(k\theta) + b_k r^k \text{sen}(k\theta) \right) = D^\alpha(a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} D^\alpha(a_k r^k \cos(k\theta)) +$$

$$D^\alpha(b_k r^k \text{sen}(k\theta)) = a_0 D^\alpha(1) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k D^\alpha(r^k \cos(k\theta)) + b_k D^\alpha(r^k \text{sen}(k\theta))$$

$$= \frac{a_0}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{m-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right)^m (1) \frac{ds}{s} +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{m-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right)^m s^k \cos(k\theta) \frac{ds}{s} +$$

$$\frac{b_k}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{m-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right)^m s^k \text{sen}(k\theta) \frac{ds}{s} \right) =$$

Sobre una generalización del problema de Neumann para la ecuación de Laplace
3.3 Problema con una condición de frontera fraccionaria para la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(a_0 \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{m-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right)^m 1 \frac{ds}{s} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{m-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right)^m s^k \cos(k\theta) \frac{ds}{s} + \right. \\ & \quad \left. b_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{m-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right)^m s^k \operatorname{sen}(k\theta) \frac{ds}{s} \right) = \\ & \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{m-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right)^m s^k \cos(k\theta) \frac{ds}{s} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. b_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{m-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right)^m s^k \operatorname{sen}(k\theta) \frac{ds}{s} \right) \right). \end{aligned}$$

Calculemos el operador de Dirac aplicado a las respectivas $u_k = s^k \cos(k\theta)$, $v_k = s^k \operatorname{sen}(k\theta)$. Antes recordemos al operador de Dirac, el cual es:

$$s \frac{d}{ds} = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

donde n es la dimensión del espacio en el que se está trabajando, en nuestro caso particular trabajaremos con $n = 2$ pues estamos trabajando en \mathbb{R}^2 .

Dado que estaremos trabajando con coordenadas polares, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial s} \cos(\theta) - \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial s} \operatorname{sen}(\theta) + \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial \theta} \cos \theta. \end{aligned}$$

Encontremos las derivadas parciales para $s^k \cos(k\theta)$.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial s^k \cos(k\theta)}{\partial s} \cos(\theta) - \frac{1}{s} \frac{\partial s^k \cos(k\theta)}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta = ks^{k-1} \cos(k\theta) \cos \theta - ks^{k-1} (-\operatorname{sen}(k\theta)) \operatorname{sen} \theta \\ & = ks^{k-1} (\cos(k\theta) \cos \theta + \operatorname{sen}(k\theta) \operatorname{sen} \theta) = ks^{k-1} \cos(k\theta - \theta) = ks^{k-1} \cos((k-1)\theta) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{\partial s^k \cos(k\theta)}{\partial s} \operatorname{sen}(\theta) + \frac{1}{s} \frac{\partial s^k \cos(k\theta)}{\partial \theta} \cos \theta = ks^{k-1} \cos(k\theta) \operatorname{sen}(\theta) + ks^{k-1} (-\operatorname{sen}(k\theta)) \cos \theta. \\ & = ks^{k-1} (\cos(k\theta) \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}(k\theta) \cos \theta) = ks^{k-1} \operatorname{sen}(\theta - k\theta) = ks^{k-1} \operatorname{sen}(-(k-1)\theta). \end{aligned}$$

Dado lo anterior

$$\begin{aligned} x \frac{\partial u_k}{\partial x} &= s \cos(\theta) (ks^{k-1} \cos((k-1)\theta)) = ks^k \cos((k-1)\theta) \cos \theta, \\ y \frac{\partial u_k}{\partial y} &= s \operatorname{sen}(\theta) (ks^{k-1} \operatorname{sen}(-(k-1)\theta)) = -ks^k \operatorname{sen}((k-1)\theta) \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

De esto,

$$s \frac{du_k}{ds} = ks^k \cos((k-1)\theta) \cos(\theta) - ks^k \operatorname{sen}((k-1)\theta) \operatorname{sen}(\theta) = ks^k \cos(k\theta).$$

Encontremos las derivadas parciales para $s^k \operatorname{sen}(k\theta)$.

$$\frac{\partial s^k \operatorname{sen}(k\theta)}{\partial s} \cos(\theta) - \frac{1}{s} \frac{\partial s^k \operatorname{sen}(k\theta)}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta = ks^{k-1} \operatorname{sen}(k\theta) \cos \theta - ks^{k-1} (\cos(k\theta)) \operatorname{sen} \theta$$

Sobre una generalización del problema de Neumann para la ecuación de Laplace
3.3 Problema con una condición de frontera fraccionaria para la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned}
 &= ks^{k-1}(\operatorname{sen}(k\theta)\cos\theta - \cos(k\theta)\operatorname{sen}\theta) = ks^{k-1}\operatorname{sen}((k-1)\theta). \\
 \frac{\partial s^k \operatorname{sen}(k\theta)}{\partial s} \operatorname{sen}(\theta) + \frac{1}{s} \frac{\partial s^k \operatorname{sen}(k\theta)}{\partial \theta} \cos\theta &= ks^{k-1}\operatorname{sen}(k\theta)\operatorname{sen}(\theta) + ks^{k-1}(\cos(k\theta))\cos\theta \\
 &= ks^{k-1}\cos((k-1)\theta).
 \end{aligned}$$

Dado la anterior, se halla

$$\begin{aligned}
 x \frac{\partial v_k}{\partial x} &= s \cos(\theta)(ks^{k-1}\operatorname{sen}((k-1)\theta)) = ks^k \operatorname{sen}((k-1)\theta)\cos\theta, \\
 y \frac{\partial v_k}{\partial y} &= s \operatorname{sen}(\theta)(ks^{k-1}\cos((k-1)\theta)) = ks^k \cos((k-1)\theta)\operatorname{sen}\theta.
 \end{aligned}$$

Así,

$$s \frac{dv_k}{ds} = ks^k \operatorname{sen}((k-1)\theta)\cos(\theta) + ks^k \cos((k-1)\theta)\operatorname{sen}(\theta) = ks^k \operatorname{sen}(k\theta). \quad (3.33)$$

Ahora calculemos $\left(s \frac{d}{ds}\right)^2$, esto es, aplicar el operador dos veces y como ya lo hemos aplicado una vez, bastaría con aplicarlo una vez más. Entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial ks^k \cos(k\theta)}{\partial s} \cos(\theta) - \frac{1}{s} \frac{\partial ks^k \cos(k\theta)}{\partial \theta} \operatorname{sen}\theta &= k^2 s^{k-1} \cos(k\theta)\cos\theta - k^2 s^{k-1}(-\operatorname{sen}(k\theta))\operatorname{sen}\theta \\
 &= k^2 s^{k-1}(\cos(k\theta)\cos\theta + \operatorname{sen}(k\theta)\operatorname{sen}\theta) = k^2 s^{k-1} \cos(k\theta - \theta) = k^2 s^{k-1} \cos((k-1)\theta)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial ks^k \cos(k\theta)}{\partial s} \operatorname{sen}(\theta) + \frac{1}{s} \frac{\partial ks^k \cos(k\theta)}{\partial \theta} \cos\theta &= k^2 s^{k-1} \cos(k\theta)\operatorname{sen}(\theta) + k^2 s^{k-1}(-\operatorname{sen}(k\theta))\cos\theta \\
 &= k^2 s^{k-1}(\cos(k\theta)\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}(k\theta)\cos\theta) = k^2 s^{k-1} \operatorname{sen}(\theta - k\theta) = k^2 s^{k-1} \operatorname{sen}(-(k-1)\theta)
 \end{aligned}$$

Dado la anterior

$$\begin{aligned}
 x \frac{\partial u_k}{\partial x} &= s \cos(\theta)(k^2 s^{k-1} \cos((k-1)\theta)) = k^2 s^k \cos((k-1)\theta)\cos\theta, \\
 y \frac{\partial u_k}{\partial y} &= s \operatorname{sen}(\theta)(k^2 s^{k-1} \operatorname{sen}(-(k-1)\theta)) = -k^2 s^k \operatorname{sen}((k-1)\theta)\operatorname{sen}\theta.
 \end{aligned}$$

De este modo,

$$s \frac{du_k}{ds} = k^2 s^k \cos((k-1)\theta)\cos(\theta) - k^2 s^k \operatorname{sen}((k-1)\theta)\operatorname{sen}(\theta) = k^2 s^k \cos(k\theta)$$

Encontremos las derivadas parciales para $s^k \operatorname{sen}(k\theta)$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial ks^k \operatorname{sen}(k\theta)}{\partial s} \cos(\theta) - \frac{1}{s} \frac{\partial ks^k \operatorname{sen}(k\theta)}{\partial \theta} \operatorname{sen}\theta &= k^2 s^{k-1} \operatorname{sen}(k\theta)\cos\theta - k^2 s^{k-1}(\cos(k\theta))\operatorname{sen}\theta \\
 &= k^2 s^{k-1}(\operatorname{sen}(k\theta)\cos\theta - \cos(k\theta)\operatorname{sen}\theta) = k^2 s^{k-1} \operatorname{sen}((k-1)\theta),
 \end{aligned}$$

Sobre una generalización del problema de Neumann para la ecuación de Laplace
3.3 Problema con una condición de frontera fraccionaria para la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} \frac{\partial k s^k \operatorname{sen}(k\theta)}{\partial s} \operatorname{sen}(\theta) + \frac{1}{s} \frac{\partial k s^k \operatorname{sen}(k\theta)}{\partial \theta} \cos\theta &= k^2 s^{k-1} \operatorname{sen}(k\theta) \operatorname{sen}(\theta) + k^2 s^{k-1} (\cos(k\theta)) \cos\theta \\ &= k^2 s^{k-1} \cos((k-1)\theta). \end{aligned}$$

Dado la anterior, se halla

$$\begin{aligned} x \frac{\partial v_k}{\partial x} &= s \cos(\theta) (k^2 s^{k-1} \operatorname{sen}((k-1)\theta)) = k^2 s^k \operatorname{sen}((k-1)\theta) \cos\theta, \\ y \frac{\partial v_k}{\partial y} &= s \operatorname{sen}(\theta) (k^2 s^{k-1} \cos((k-1)\theta)) = k^2 s^k \cos((k-1)\theta) \operatorname{sen}\theta, \end{aligned}$$

entonces:

$$s \frac{dv_k}{ds} = k^2 s^k \operatorname{sen}((k-1)\theta) \cos(\theta) + k^2 s^k \cos((k-1)\theta) \operatorname{sen}(\theta) = k^2 s^k \operatorname{sen}(k\theta). \quad (3.34)$$

Con lo antes hecho, esto nos da una idea para una prueba mediante inducción en la cual podremos ver lo siguiente

$$\begin{aligned} \left(s \frac{du_k}{ds} \right)^m &= k^m s^k \cos(k\theta), \\ \left(s \frac{dv_k}{ds} \right)^m &= k^m s^k \operatorname{sen}(k\theta). \end{aligned}$$

Empecemos la prueba. Para $m = 1$

Ya se probó $s \frac{du_k}{ds} = k \cos(k\theta)$ y $s \frac{dv_k}{ds} = k \operatorname{sen}(k\theta)$.

Supongamos que se cumple para $m = n$ y veamos que se cumple para $m = n + 1$.

Como se cumple para $m = n$ tenemos $\left(s \frac{du_k}{ds} \right)^n = k^n s^k \cos(k\theta)$ y $\left(s \frac{dv_k}{ds} \right)^n = k^n s^k \operatorname{sen}(k\theta)$, donde:

$$\left(s \frac{du_k}{ds} \right)^{n+1} = s \frac{d}{ds} (k^n s^k \cos(k\theta)) = k^n \left(s \frac{d}{ds} s^k \cos(k\theta) \right) = k^n \left(s \frac{du_k}{ds} \right) = k^n (k s^k \cos(k\theta)) = k^{n+1} s^k \cos(k\theta)$$

y de forma análoga

$$\begin{aligned} \left(s \frac{dv_k}{ds} \right)^{n+1} &= s \frac{d}{ds} (k^n s^k \operatorname{sen}(k\theta)) = k^n \left(s \frac{d}{ds} s^k \operatorname{sen}(k\theta) \right) = k^n \left(s \frac{dv_k}{ds} \right) = k^n (k s^k \operatorname{sen}(k\theta)) = \\ &= k^{n+1} s^k \operatorname{sen}(k\theta). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Casos particulares

En lo que resta de este capítulo se desarrollarán las soluciones de dos casos particulares, estos serán para los valores de $m = 1$ y $m = 2$.

3.3.1. Caso $m = 1$.

Para $m = 1$ Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{1-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right) (s^k \cos(k\theta)) \frac{ds}{s} + \right. \right. \\ \left. \left. b_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{1-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right) (s^k \operatorname{sen}(k\theta)) \frac{ds}{s} \right) \right) = \end{aligned}$$

Sobre una generalización del problema de Neumann para la ecuación de Laplace
3.3 Problema con una condición de frontera fraccionaria para la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right) (s^k \cos(k\theta)) \frac{ds}{s} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. b_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right) (s^k \sen(k\theta)) \frac{ds}{s} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{-\alpha} (ks^k \cos(k\theta)) \frac{ds}{s} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. b_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{-\alpha} (ks^k \sen(k\theta)) \frac{ds}{s} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{-\alpha} (ks^k \cos(k\theta)) \frac{ds}{s} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. b_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{-\alpha} (ks^k \sen(k\theta)) \frac{ds}{s} \right) \right) = \\
&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sen(k\theta)) k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{-\alpha} s^{k-1} ds \right).
\end{aligned}$$

Notemos que el proceso antes hecho nos ayudará a encontrar los coeficientes de Fourier de la solución. Veamos el siguiente paso de este proceso:

$$\begin{aligned}
D^\alpha(u)|_{\partial\Omega} &= D^\alpha(u)|_{r=1} = D^\alpha u(1, \theta) = \\
&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sen(k\theta)) k \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{-\alpha} s^{k-1} ds \right) \\
&= \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \sen(k\theta).
\end{aligned}$$

Con fines prácticos usaremos el siguiente símbolo así:

$$G_k = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} k \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{-\alpha} s^{k-1} ds.$$

Por lo cual, al sustituir en la ecuación anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}
D^\alpha(u)|_{\partial r} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sen(k\theta)) k \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{-\alpha} s^{k-1} ds \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k G_k \cos(k\theta) + b_k G_k \sen(k\theta) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \sen(k\theta).
\end{aligned}$$

Aplicando el producto interior a ambos lados de la ecuación anterior con $\cos(n\theta)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha(u), \cos(n\theta) \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k G_k \cos(k\theta) + b_k G_k \sen(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle = \\
&\left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \sen(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Sobre una generalización del problema de Neumann para la ecuación de Laplace
3.3 Problema con una condición de frontera fraccionaria para la ecuación de Laplace

Aplicando las propiedades de producto interior obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k G_k \cos(k\theta) + b_k G_k \operatorname{sen}(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle = \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k G_k \cos(k\theta), \cos(n\theta) \rangle + \langle b_k G_k \operatorname{sen}(k\theta), \cos(n\theta) \rangle = \\ & = 0 \quad \text{si } k \neq n \quad \text{ó } a_k G_k \pi \quad \text{si } k = n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

Procedemos de forma análoga

$$\begin{aligned} & \left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \operatorname{sen}(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle \\ & \langle \varphi_0 \cos(0\theta), \cos(n\theta) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k^1 \cos(k\theta), \cos(n\theta) \rangle + \langle \varphi_k^2 \operatorname{sen}(k\theta), \cos(n\theta) \rangle = \\ & = 0 \quad \text{si } k \neq n, \quad \varphi_k^1 \pi \quad \text{si } k = n = 1, 2, \dots \quad \text{ó } 2\varphi_k^1 \pi \quad \text{si } k = n = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Aplicando un razonamiento semejante, tomando el producto interior de μ con $\operatorname{sen}(n\theta)$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k G_k \cos(k\theta) + b_k G_k \operatorname{sen}(k\theta), \operatorname{sen}(n\theta) \right\rangle = \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k G_k \cos(k\theta), \operatorname{sen}(n\theta) \rangle + \langle b_k G_k \operatorname{sen}(k\theta), \operatorname{sen}(n\theta) \rangle = \\ & = 0 \quad \text{si } k \neq n \quad \text{ó } b_k G_k \pi \quad \text{si } k = n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.38)$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} & \left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \operatorname{sen}(k\theta), \operatorname{sen}(n\theta) \right\rangle \\ & \langle \varphi_0 \cos(0\theta), \operatorname{sen}(n\theta) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k^1 \cos(k\theta), \operatorname{sen}(n\theta) \rangle + \langle \varphi_k^2 \operatorname{sen}(k\theta), \operatorname{sen}(n\theta) \rangle = \\ & 0 \quad \text{si } k \neq n \quad \text{ó } \varphi_k^2 \pi \quad \text{si } k = n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.39)$$

Por los resultados anteriores obtenemos que

$$a_k G_k \pi = \varphi_k^1 \pi, \quad 0 = a_0 \quad \text{y} \quad b_k G_k \pi = \varphi_k^2 \pi, \quad (3.40)$$

después de despejar las igualdades se tiene

$$a_k = \frac{\varphi_k^1}{G_k}, \quad 0 = a_0 \quad \text{y} \quad b_k = \frac{\varphi_k^2}{G_k}. \quad (3.41)$$

Sustituyendo G_k en cada igualdad obtenemos

$$a_k = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{k \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-\alpha} s^{k-1} ds} \varphi_k^1, \quad 0 = a_0 \quad \text{y} \quad b_k = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{k \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-\alpha} s^{k-1} ds} \varphi_k^2. \quad (3.42)$$

3.3.2. Caso $m = 2$

Sea $m = 2$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{2-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right)^2 (s^k \cos(k\theta)) \frac{ds}{s} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. b_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{2-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right)^2 (s^k \operatorname{sen}(k\theta)) \frac{ds}{s} \right) \right) = \\
 & = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{1-\alpha} k^2 s^k \cos(k\theta) \frac{ds}{s} + b_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{1-\alpha} k^2 s^k \operatorname{sen}(k\theta) \frac{ds}{s} \right) \right) = \\
 & = \frac{2}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{1-\alpha} (k^2 s^{k-1} \cos(k\theta)) ds + b_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{1-\alpha} (k^2 s^{k-1} \operatorname{sen}(k\theta)) ds \right) \right) = \\
 & = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta)) k^2 \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{1-\alpha} s^{k-1} ds \right) \\
 & \quad D^{2,\alpha}(u)|_{\partial r} = D^{2,\alpha}(u)|_{r=1} = D^{2\alpha}u(1, \theta) = \\
 & \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta)) k^2 \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{1-\alpha} s^{k-1} ds \right) \\
 & \quad = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \operatorname{sen}(k\theta).
 \end{aligned}$$

Con fines prácticos usaremos el siguiente símbolo así:

$$G_{2,k} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} k^2 \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{1-\alpha} s^{k-1} ds. \quad (3.43)$$

Por lo cual, al sustituir en la ecuación anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}
 D^{2,\alpha}(u)|_{\partial r} &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta)) k^2 \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{1-\alpha} s^{k-1} ds \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k G_{2,k} \cos(k\theta) + b_k G_{2,k} \operatorname{sen}(k\theta) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \operatorname{sen}(k\theta).
 \end{aligned}$$

Aplicando el producto interior a ambos lados de la ecuación anterior con $\cos(n\theta)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 \langle D^{2,\alpha}(u), \cos(n\theta) \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k G_{2,k} \cos(k\theta) + b_k G_{2,k} \operatorname{sen}(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle = \\
 & \left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \operatorname{sen}(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de producto interior obtenemos

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k G_{2,k} \cos(k\theta) + b_k G_{2,k} \operatorname{sen}(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle =$$

Sobre una generalización del problema de Neumann para la ecuación de Laplace
3.3 Problema con una condición de frontera fraccionaria para la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k G_{2,k} \cos(k\theta), \cos(n\theta) \rangle + \langle b_k G_{2,k} \sin(k\theta), \cos(n\theta) \rangle = \\ & = 0 \text{ si } k \neq n \text{ ó } a_k G_{2,k} \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.44)$$

Análogamente para su igual

$$\begin{aligned} & \left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \sin(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle \\ & \langle \varphi_0 \cos(0\theta), \cos(n\theta) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k^1 \cos(k\theta), \cos(n\theta) \rangle + \langle \varphi_k^2 \sin(k\theta), \cos(n\theta) \rangle = \\ & = 0 \text{ si } k \neq n, \varphi_k^1 \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots \text{ y } 2\varphi_k^1 \pi \text{ si } k = n = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Aplicando un razonamiento semejante, tomando el producto interior de μ con $\sin(n\theta)$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k G_{2,k} \cos(k\theta) + b_k G_{2,k} \sin(k\theta), \sin(n\theta) \right\rangle = \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k G_{2,k} \cos(k\theta), \sin(n\theta) \rangle + \langle b_k G_{2,k} \sin(k\theta), \sin(n\theta) \rangle = \\ & = 0 \text{ si } k \neq n \text{ ó } b_k G_{2,k} \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.46)$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} & \left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \sin(k\theta), \sin(n\theta) \right\rangle \\ & \langle \varphi_0 \cos(0\theta), \sin(n\theta) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k^1 \cos(k\theta), \sin(n\theta) \rangle + \langle \varphi_k^2 \sin(k\theta), \sin(n\theta) \rangle = \\ & = 0 \text{ si } k \neq n \text{ ó } \varphi_k^2 \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.47)$$

Por lo anterior, obtenemos que

$$a_k G_{2,k} \pi = \varphi_k^1 \pi, \quad 0 = a_0 \text{ y } b_k G_{2,k} \pi = \varphi_k^2 \pi. \quad (3.48)$$

Despejando en cada igualdad se obtiene

$$a_k = \frac{\varphi_k^1}{G_{2,k}}, \quad 0 = a_0 \text{ y } b_k = \frac{\varphi_k^2}{G_{2,k}}. \quad (3.49)$$

Sustituyendo $G_{2,k}$ por (3.43) obtenemos

$$a_k = \frac{\Gamma(2-\alpha) \varphi_k^1}{k^2 \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{1-\alpha} s^{k-1} ds}, \quad 0 = a_0 \text{ y } b_k = \frac{\Gamma(2-\alpha) \varphi_k^2}{k^2 \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{1-\alpha} s^{k-1} ds}. \quad (3.50)$$

3.3.3. Caso general

En general, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{m-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right)^m (s^k \cos(k\theta)) \frac{ds}{s} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. b_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{m-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right)^m (s^k \operatorname{sen}(k\theta)) \frac{ds}{s} \right) \right) = \\
 = & \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{m-1-\alpha} k^m s^k \cos(k\theta) \frac{ds}{s} + b_k \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{m-1-\alpha} k^m s^k \operatorname{sen}(k\theta) \frac{ds}{s} \right) \right) = \\
 = & \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta)) k^m \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{m-1-\alpha} s^{k-1} ds \right) \\
 & D^{m,\alpha}(u)|_{\partial r} = D^{m,\alpha}(u)|_{r=1} = D^{m,\alpha}u(1, \theta) = \\
 & \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta)) k^m \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{m-1-\alpha} s^{k-1} ds \right) \\
 & = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \operatorname{sen}(k\theta).
 \end{aligned}$$

Con fines prácticos usaremos el siguiente símbolo así:

$$G_{m,k} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} k^m \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{m-1-\alpha} s^{k-1} ds.$$

Por lo cual, al sustituir en la ecuación anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}
 D^{m,\alpha}(u)|_{\partial r} &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta)) k^m \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{m-1-\alpha} s^{k-1} ds \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k G_{m,k} \cos(k\theta) + b_k G_{m,k} \operatorname{sen}(k\theta) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \operatorname{sen}(k\theta).
 \end{aligned}$$

Aplicando el producto interior a ambos lados de la ecuación anterior con $\cos(n\theta)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 \langle D^{m,\alpha}(u), \cos(n\theta) \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k G_{m,k} \cos(k\theta) + b_k G_{m,k} \operatorname{sen}(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle = \\
 & \left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \operatorname{sen}(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de producto interior obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k G_{m,k} \cos(k\theta) + b_k G_{m,k} \operatorname{sen}(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle = \\
 & \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k G_{m,k} \cos(k\theta), \cos(n\theta) \rangle + \langle b_k G_{m,k} \operatorname{sen}(k\theta), \cos(n\theta) \rangle =
 \end{aligned}$$

Sobre una generalización del problema de Neumann para la ecuación de Laplace
3.3 Problema con una condición de frontera fraccionaria para la ecuación de Laplace

$$= 0 \text{ si } k \neq n \text{ ó } a_k G_{m,k} \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots \quad (3.51)$$

Análogamente para su igual

$$\begin{aligned} & \left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \operatorname{sen}(k\theta), \cos(n\theta) \right\rangle \\ & \langle \varphi_0 \cos(0\theta), \cos(n\theta) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k^1 \cos(k\theta), \cos(n\theta) \rangle + \langle \varphi_k^2 \operatorname{sen}(k\theta), \cos(n\theta) \rangle = \\ & = 0 \text{ si } k \neq n, \varphi_k^1 \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots \text{ ó } 2\varphi_k^1 \pi \text{ si } k = n = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Aplicando un razonamiento semejante, tomando el producto interior de μ con $\operatorname{sen}(n\theta)$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k G_{m,k} \cos(k\theta) + b_k G_{m,k} \operatorname{sen}(k\theta), \operatorname{sen}(n\theta) \right\rangle = \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k G_{m,k} \cos(k\theta), \operatorname{sen}(n\theta) \rangle + \langle b_k G_{m,k} \operatorname{sen}(k\theta), \operatorname{sen}(n\theta) \rangle \\ & = 0 \text{ si } k \neq n \text{ ó } b_k G_{m,k} \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.53)$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} & \left\langle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^1 \cos(k\theta) + \varphi_k^2 \operatorname{sen}(k\theta), \operatorname{sen}(n\theta) \right\rangle \\ & \langle \varphi_0 \cos(0\theta), \operatorname{sen}(n\theta) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_k^1 \cos(k\theta), \operatorname{sen}(n\theta) \rangle + \langle \varphi_k^2 \operatorname{sen}(k\theta), \operatorname{sen}(n\theta) \rangle \\ & = 0 \text{ si } k \neq n \text{ ó } \varphi_k^2 \pi \text{ si } k = n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.54)$$

Por lo anterior, obtenemos que

$$a_k G_{m,k} \pi = \varphi_k^1 \pi, \quad 0 = a_0 \text{ y } b_k G_{m,k} \pi = \varphi_k^2 \pi. \quad (3.55)$$

$$a_k = \frac{\varphi_k^1}{G_{m,k}} \quad 0 = a_0 \text{ y } b_k = \frac{\varphi_k^2}{G_{m,k}} \quad (3.56)$$

$$a_k = \frac{\Gamma(m-\alpha) \varphi_k^1}{k^m \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-1-\alpha} s^{k-1} ds}, \quad 0 = a_0 \text{ y } b_k = \frac{\Gamma(m-\alpha) \varphi_k^2}{k^m \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{m-1-\alpha} s^{k-1} ds}. \quad (3.57)$$

Así, a través de (3.57) se tiene la solución del problema considerado. En el Capítulo siguiente, se presentarán algunos ejemplos numéricos.

Capítulo 4

Ejemplos numéricos

En este Capítulo se presentarán ejemplos con los que se buscará ilustrar los resultados obtenidos anteriormente. Se procede de la manera siguiente:

1. Se resuelve el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace.
2. Se resuelve el problema de Neumann para la ecuación de Laplace.
3. Se resuelve la ecuación de Laplace con una condición de frontera fraccionaria.
4. Se compara la solución del problema de Neumann con un caso particular del problema fraccionario en el que las dos soluciones coinciden. Con ello, se validan los resultados y los programas elaborados.
5. Se muestran las gráficas de las soluciones de los problemas de contorno fraccionarios.

Para realizar lo anterior, requerimos los siguientes ejemplos, en los que se encuentra la solución de la ecuación de Laplace tanto para la condición de contorno de Dirichlet como la de Neumann.

En lo que sigue, consideremos que Ω corresponde con un círculo de radio $R = 1$. En este caso, $\partial\Omega$ corresponde a la circunferencia de radio $R = 1$.

4.1. Condición de contorno de Dirichlet

Ejemplo 1. Consideremos la función $\varphi(\theta) = |\theta|$ definida sobre la circunferencia de radio $R = 1$. Después de laboriosos cálculos, se halla que los coeficientes de Fourier están dados por:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \varphi_k^1 = 0 \text{ si } k \text{ es par, } \varphi_k^1 = -\frac{4}{\pi k^2} \text{ si } k \text{ es impar} \quad \varphi_k^2 = 0 \quad \text{para todo } k, \quad (4.1)$$

$$\varphi(\theta) = \frac{\pi}{2} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)\theta). \quad (4.2)$$

Los detalles sobre el cálculo, se encuentran en el [Apéndice A1].
Sustituyendo en los resultados obtenidos en (3.23) para el caso de condición de frontera de Dirichlet ($u|_{\partial\Omega} = \varphi$), obtenemos los coeficientes de Fourier del potencial:

$$a_0 = \frac{R\pi}{2}, \quad a_k = 0 \text{ si } k \text{ es par, } \quad a_k = -\frac{4}{\pi R^{k-1} k^2} \text{ si } k \text{ es impar y } b_k = 0.$$

Dado lo anterior, se obtiene la siguiente serie de Fourier para la solución u

$$u(r, \theta) = \frac{\pi}{2} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(2k-1)^2} r^{2k-1} \cos((2k-1)\theta), \quad (4.3)$$

de donde se obtienen los gráficos dados en la Figura 4.1:

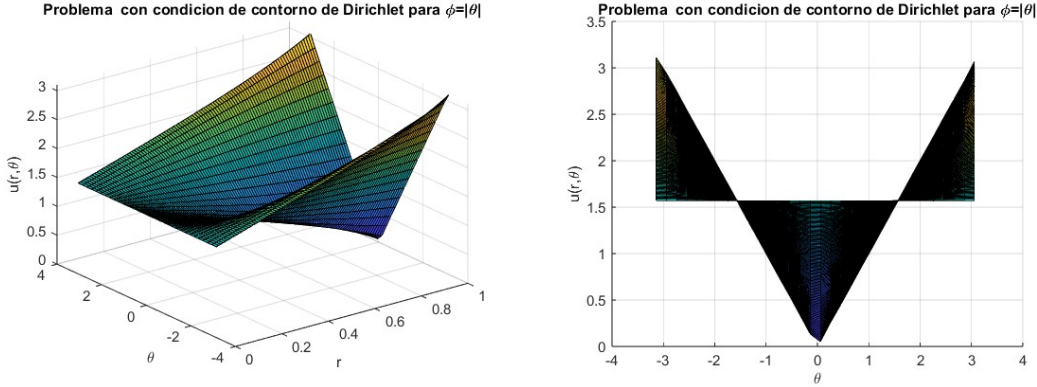


Figura 4.1: Gráfica de la solución del problema 3.18 con la condición de contorno $\varphi = |\theta|$ (en coordenadas polares). La condición de contorno es la clásica de Dirichlet. Se graficó usando la serie de Fourier antes obtenida $\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^3} r^{2k-1} \cos((2k-1)\theta)$. Más información sobre el programa en [Apéndice A3].

Ejemplo 2. Consideremos, como en el ejemplo anterior, que la región Ω corresponde al círculo de radio $R = 1$. Como condición de contorno consideremos a $\varphi(\theta) = \theta^2$. Los coeficientes de Fourier de φ y su respectiva serie de Fourier están dados por:

$$\varphi_0 = \frac{R\pi^2}{3}, \quad \varphi_k^1 = (-1)^k \frac{4}{R^{k-1}k^2} \text{ y } \varphi_k^2 = 0, \quad (4.4)$$

de donde

$$\varphi = \frac{R\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{R^{k-1}k^2} \cos(kx).$$

Los detalles de las operaciones se encuentran en el [Apéndice A2] Sustituyendo 4.4 en los resultados obtenidos anteriormente en (3.23) ($u|_{\partial\Omega} = \varphi$) obtenemos

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}, \quad a_k = (-1)^k \frac{4}{k^2} \text{ y } b_k = 0.$$

Dado lo anterior se obtiene la siguiente serie de Fourier para la solución u :

$$u(r, \theta) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} r^k \cos(kx),$$

de donde se obtienen los siguientes gráficos mostrados en la Figura 4.1:

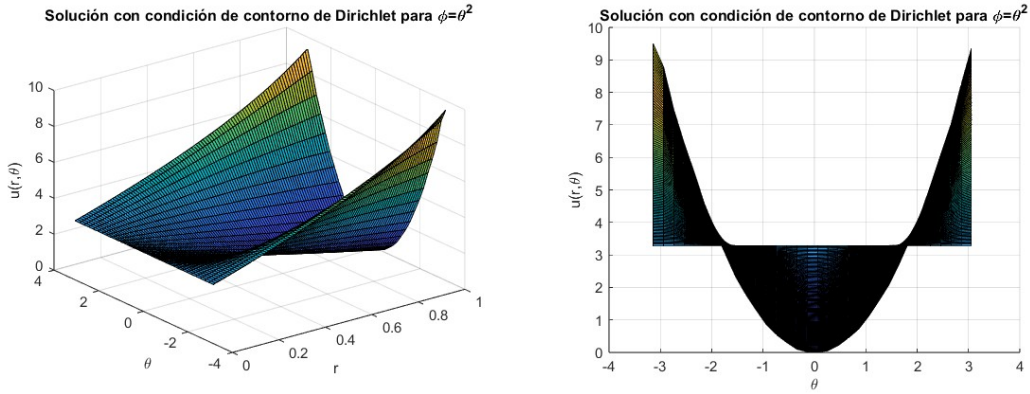


Figura 4.2: Gráfica de la solución del problema 3.18 con la condición de contorno $\varphi = |\theta|$ (en coordenadas polares). La condición de contorno es la clásica de Neumann. Se graficó usando la serie de Fourier antes obtenida $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^3} r^{2k-1} \cos((2k-1)\theta)$. Más información sobre el programa en [Apéndice A4].

4.2. Condición de contorno de Neumann

Ejemplo 1. La solución de la ecuación de Laplace con la condición de contorno de Neumann dada por $\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi = |\theta|$. Para ello, se sustituyen los coeficientes obtenidos en (4.1) en (3.31), de donde obtenemos

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0 \text{ si } k \text{ es par}, \quad a_k = -\frac{4}{\pi k^3} \text{ si } k \text{ es impar y } b_k = 0. \quad (4.5)$$

De lo anterior, se obtiene la siguiente serie de Fourier para u :

$$u(r, \theta) = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} r^{2k-1} \cos((2k-1)\theta).$$

En la Figura 4.2, se muestra la gráfica obtenida en la anterior serie de Fourier, la cual servirá de base para verificar la coincidencia para el caso fraccionario en el que $\alpha = 1$, es decir, cuando se considera en la condición de contorno al operador D^1 .

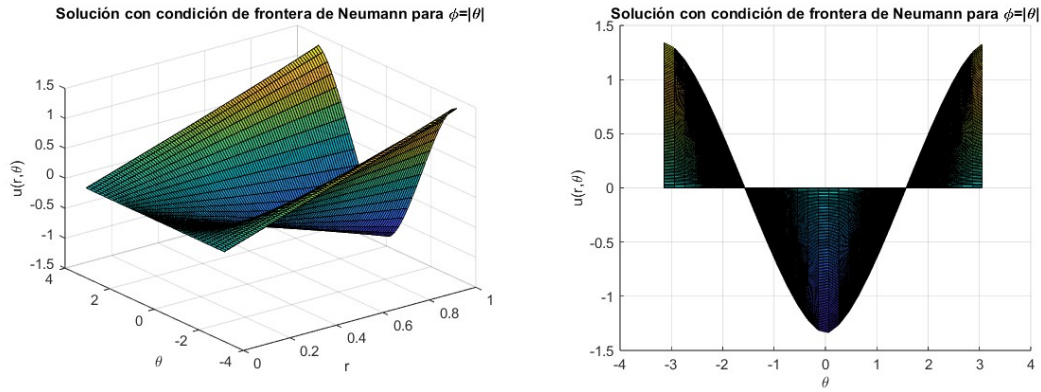


Figura 4.3: Gráfica de la solución del problema 3.25 con la condición de contorno $\varphi = |\theta|$ (en coordenadas polares). La condición de contorno es la clásica de Neumann. Se graficó usando la serie de Fourier antes obtenida $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^3} r^{2k-1} \cos((2k-1)\theta)$. Más información sobre el programa en [Apéndice A5].

Ejemplo 2. Consideremos ahora que $\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi = \theta^2$, En este caso,

$$a_0 = 0, \quad a_k = (-1)^k \frac{4}{R^{k-2} k^3} \quad \text{y} \quad b_k = 0. \quad (4.6)$$

Dado lo anterior, la solución del problema de contorno está dada por:

$$u(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^3} r^k \cos(k\theta) \quad (4.7)$$

En la Figura 4.4, se muestra la gráfica obtenida en la anterior serie de Fourier, la cual servirá de base para verificar la coincidencia para el caso fraccionario en el que $\alpha = 1$, es decir, cuando se considera en la condición de contorno al operador D^1 .

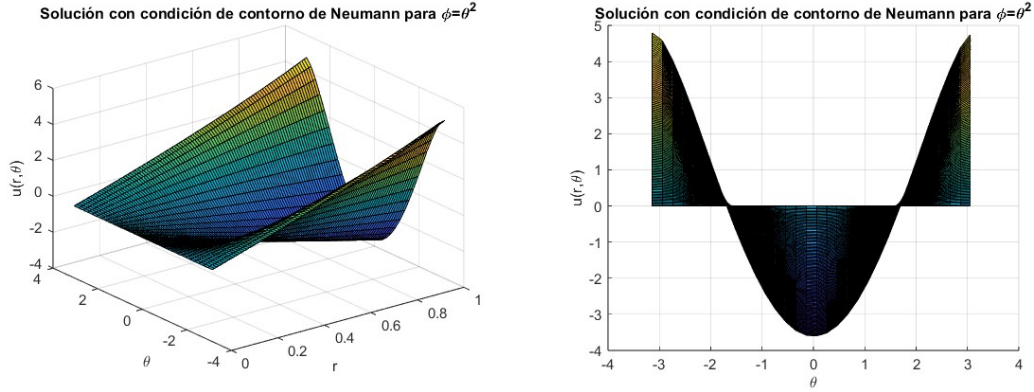


Figura 4.4: a). Gráfica de la solución del problema (3.25) para la condición de contorno $\varphi = \theta^2$ en coordenadas polares. La condición de contorno es la clásica de Neumann. Se graficó usando la serie de Fourier antes obtenida dada en $4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} r^k \cos(k\theta)$. b). La misma gráfica presentada desde una vista lateral. Más información sobre el programa en [Apéndice A6].

4.3. Caso de Neumann a partir del operador D^α

Dado lo anterior, ya tenemos una base bajo la cual podemos comparar el caso particular del operador D^α , con $\alpha = 1$, el cual coincide con el problema clásico de Neumann.

Ejemplo 1. Para la solución del caso fraccionario, se procederá de manera similar al caso de Neumann. Para ello, se sustituyen los coeficientes obtenidos en (4.1) en (3.57), de donde obtenemos que los coeficientes de Fourier de la solución están dados por:

$$a_k = \frac{(-4)\Gamma(m - \alpha)}{\pi k^{m+2} \int_0^1 (\ln \frac{1}{s})^{m-1-\alpha} s^{k-1} ds} \quad \text{si } k \text{ es impar, } a_k = 0 \text{ si } k \text{ es par, } 0 = a_0 \text{ y } b_k = 0, \quad (4.8)$$

de donde se obtiene la solución:

$$u(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4\Gamma(m - \alpha)}{\pi(2k - 1)^{m+2} \int_0^1 (-\ln(s))^{m-1-\alpha} s^{2k-2} ds} r^{2k-1} \cos((2k - 1)\theta). \quad (4.9)$$

A continuación, en la Figura (4.3) se mostrarán las gráficas de las soluciones para la ecuación de Laplace con condiciones clásicas de frontera de Dirichlet y Neumann, así como la solución para el caso fraccionario. Como caso particular, tomaremos los siguientes valores, $\alpha = 1$ y $m = 2$, de donde se obtienen las siguientes gráficas obtenidas a partir del programa de Matlab del [Apéndice A7].

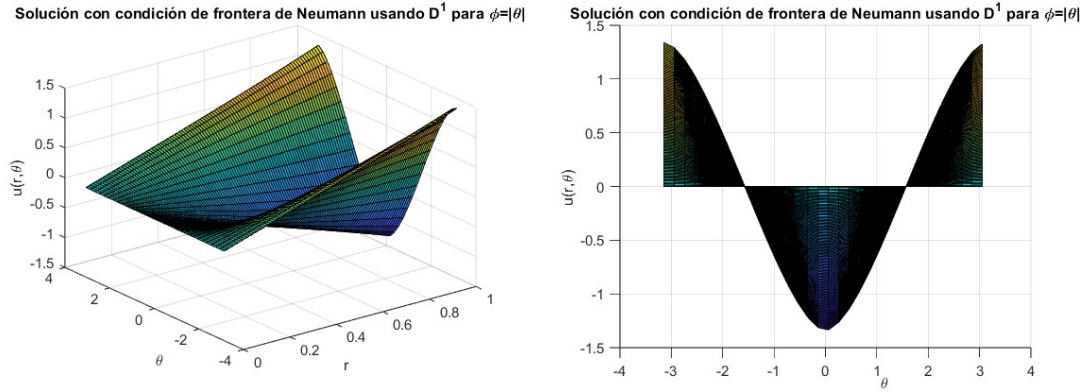


Figura 4.5: Gráfica de la solución del problema (3.32) para la condición de contorno $\varphi = |\theta|$ en coordenadas polares. La condición de contorno corresponde a una derivada fraccionaria D_m^α con $\alpha = 1$ y $m = 2$ que corresponde al caso clásico de Neumann. Vista desde un lateral, se observa que coinciden los resultados con el ejemplo 1.1.

Ejemplo 2. Se procederá de manera similar al caso anterior. Para ello se sustituyen los coeficientes obtenidos en (4.6) en (3.57), de donde obtenemos

$$a_k = \frac{4(-1)^k \Gamma(m - \alpha)}{k^{m+2} \int_0^1 (\ln \frac{1}{s})^{m-1-\alpha} s^{k-1} ds}, \quad 0 = a_0 \quad \text{y} \quad b_k = 0, \quad (4.10)$$

de donde obtenemos la siguiente serie de Fourier:

$$u(r, \theta) = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(m - \alpha)}{k^{m+2} \int_0^1 (-\ln(s))^{m-1-\alpha} s^{k-1} ds} r^k \cos(k\theta). \quad (4.11)$$

Igual que en el caso anterior, en la Figura (4.3) como caso particular, tomaremos los siguientes valores, $\alpha = 1$ y $m = 2$, donde en las siguientes gráficas obtenemos

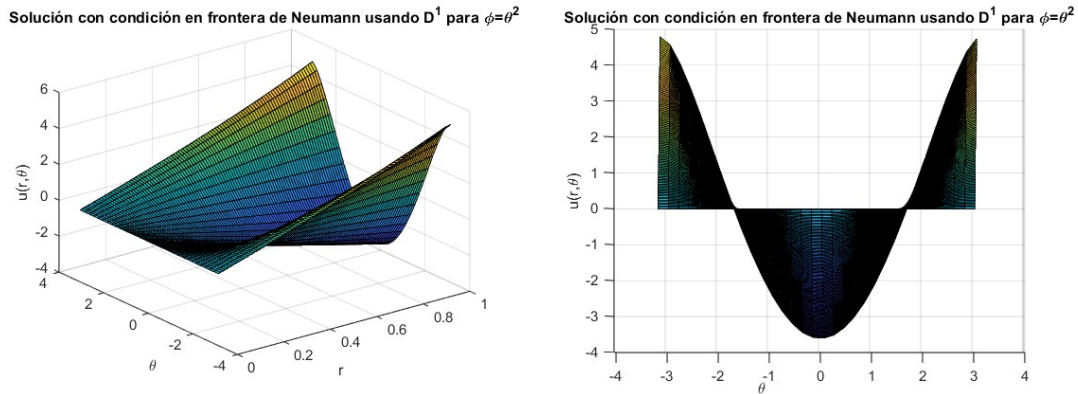


Figura 4.6: Gráfica de la solución del problema (3.32) para la condición de contorno $\varphi = \theta^2$ en coordenadas polares. La condición de contorno corresponde a una derivada fraccionaria dada en los siguientes valores del operador D_m^α con $\alpha = 1$ y $m = 2$ que corresponde al caso clásico de Neumann. Vista desde un lateral, se observa que coinciden los resultados con el ejemplo 1.2. Más información sobre el programa en [Apéndice A8].

Ejemplo 3. Los siguientes dos figuras se realizaron a partir de un programa en Matlab (ver [Apéndice A9]), con el que se busca encontrar la gráfica de la solución al problema de frontera con respecto al operador D^1 , que lleva al problema clásico de Neumann. Se deben proporcionar los siguientes datos: tamaño de paso, número de iteraciones de la serie, el valor de $m \in \mathbb{N}$, el valor de $\alpha \in (0, 1]$, para al final introducir como función la condición de contorno. En la Figura (4.3), se presenta la gráfica de la solución del problema de contorno fraccionario para valores de los parámetros: tamaño de paso igual a 0.2, $m = 2$, $\alpha = 1$ y $|\theta|$ como condición de contorno.

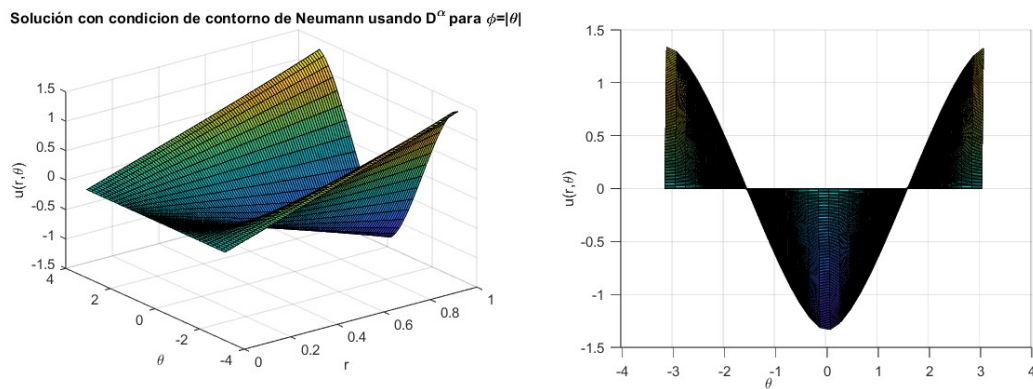


Figura 4.7: Gráfica de la solución del problema (3.32) para la condición de contorno $\varphi = |\theta|$ en coordenadas polares. La condición de contorno es la clásica de Neumann. Vista desde un lateral. Coincide con los gráficos de los ejemplos 1.1 y 2.1.

Ejemplo 4. Los siguientes dos gráficos se realizaron a partir de un programa en Matlab (ver [Apéndice A9]), con el que se busca encontrar la gráfica solución a nuestro problema reducido de la generalización del problema clásico de Neumann. En la Figura (4.3) los datos introducidos en las siguiente gráficas son: tamaño de paso 0,1, $m = 2$, $\alpha = 1$ y como función θ^2 , de donde obtenemos

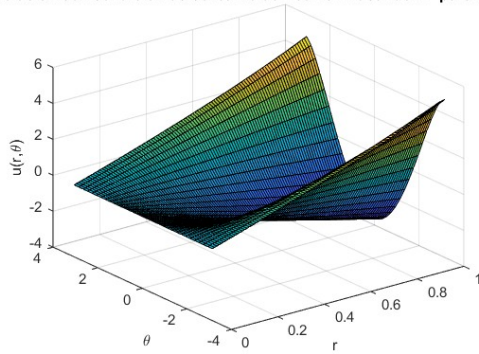
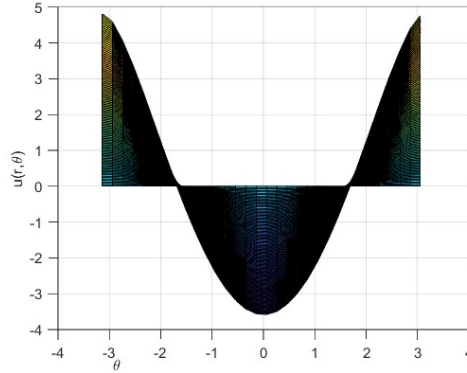
Solución con condición de contorno de Neumann usando D^α para $\phi=x^2$ Solución con condición de contorno de Neumann usando D^α para $\phi=x^2$ 

Figura 4.8: Gráfica de la solución del problema (3.32) para la condición de contorno $\varphi = \theta^2$ en coordenadas polares. La condición de contorno es la clásica de Neumann. Coinciden con los ejemplos 1.2 y 2.2.

Ejemplo 5. Como hemos visto, con los ejemplos anteriores, dada la coincidencia entre el operador D^1 y el problema clásico de Neumann, tal funciona como parámetro para visualizar su exactitud. Ahora, como parte de su análisis veamos la variaciones del operador D^α cuando varía α , veamos las siguientes gráficas en las Figuras (4.3), (4.3), (4.3) y (4.3).

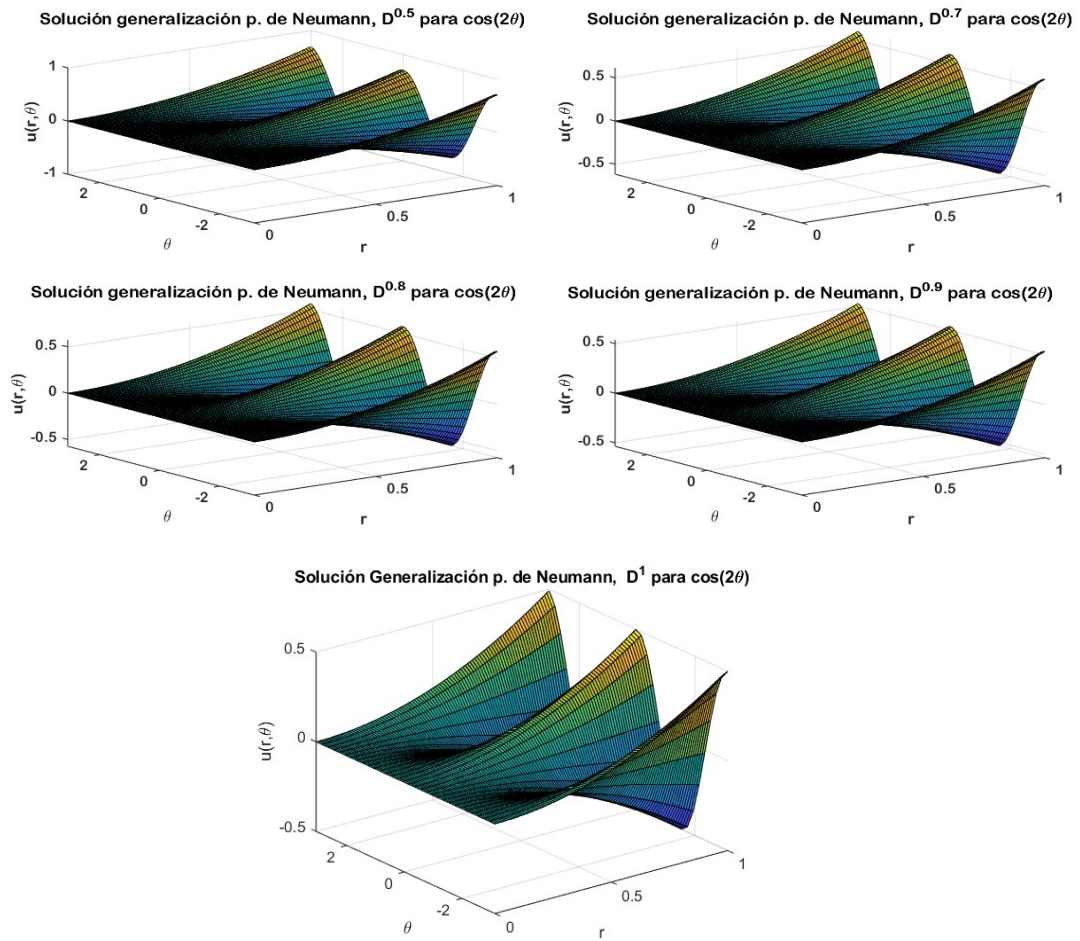


Figura 4.9: Gráficas de la solución del problema (3.32) para la condición de contorno $\varphi = \cos(2\theta)$ en coordenadas polares. La condición de contorno corresponde a una derivada fraccionaria dada en los siguientes valores del operador D_m^α con los siguientes valores: $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = 0.8$, $\alpha_4 = 0.9$ y $\alpha_5 = 1$, $m = 3$. Más información sobre el programa graficador en [Apéndice A9].

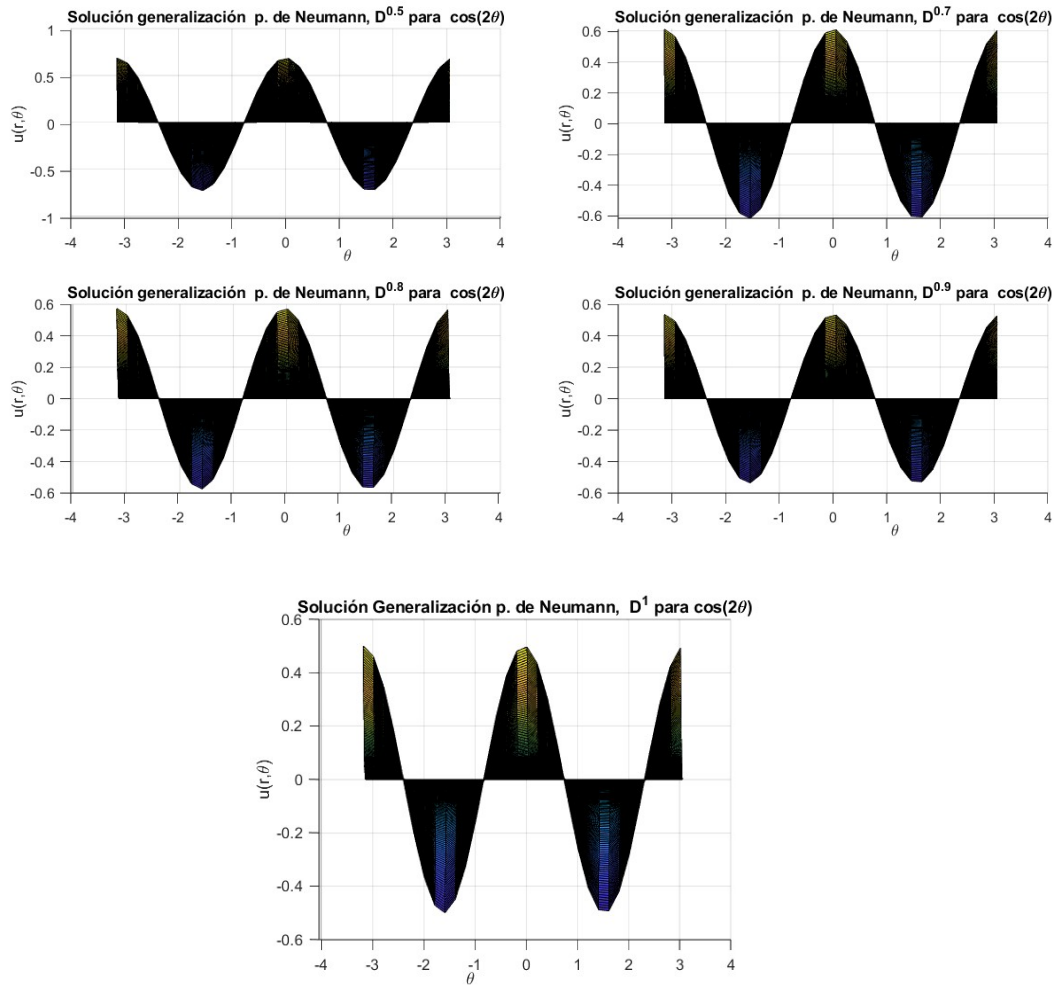


Figura 4.10: Gráficas de la solución del problema (3.32) para la condición de contorno $\varphi = \cos(2\theta)$ en coordenadas polares. La condición de contorno corresponde a una derivada fraccionaria dada en los siguientes valores del operador D^α con los siguientes valores: $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = 0.8$, $\alpha_4 = 0.9$ y $\alpha_5 = 1$, $m = 3$. Más información sobre el programa graficador en [Apéndice A9]. Vista lateral.

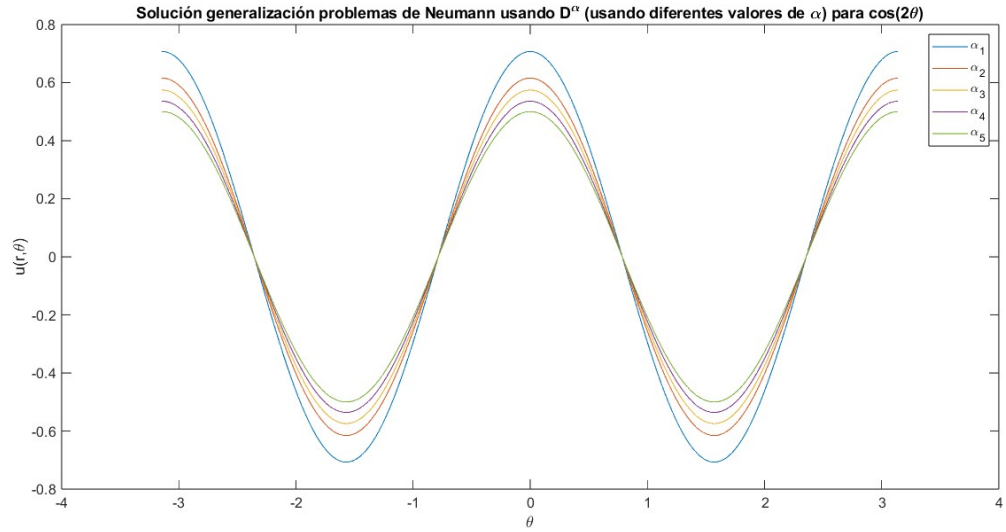


Figura 4.11: Gráficas de la solución del problema (3.32) para la condición de contorno $\varphi = \cos(2\theta)$ y para diferentes valores del parámetro α en $r = R = 1$. Más explícitamente, la condición de contorno corresponde a una derivada fraccionaria del operador D^α con los siguientes valores: $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = 0.8$, $\alpha_4 = 0.9$ y $\alpha_5 = 1$, $m = 3$.

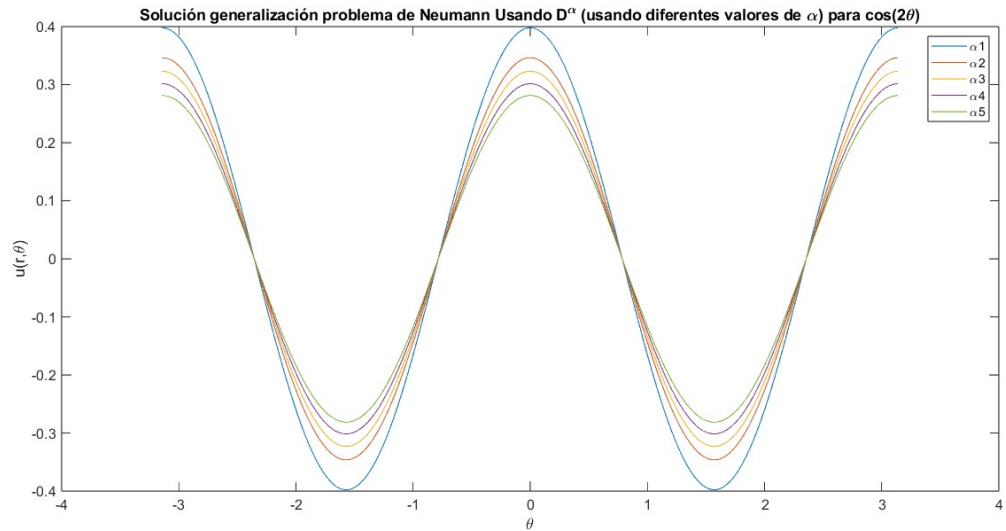


Figura 4.12: Gráficas de la solución del problema $\varphi = \cos(2\theta)$ en coordenadas polares. La condición de contorno corresponde a una derivada fraccionaria dada en los siguientes valores del operador D^α con los siguientes valores: $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.7$, $\alpha_3 = 0.8$, $\alpha_4 = 0.9$ y $\alpha_5 = 1$, $m = 3$ con $r = 0.75$

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

Como se vio en la Introducción de esta tesis, el uso de ecuaciones diferenciales y en especial el uso de problemas con condiciones de frontera son muy útiles para resolver múltiples problemas físicos [5], [14]. Por ello, siempre es importante entender el contexto bajo el cual se plantean y desarrollan, además de plantear las diferencias entre los tipos de problemas de contorno. En particular, la ecuación de Laplace es una de las ecuaciones diferenciales parciales más importantes tanto por su riqueza matemática como por sus múltiples aplicaciones. Esta ecuación está definida sobre una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ y es acompañada por condiciones de frontera o de contorno tales como la de Dirichlet y la de Neumann. En la primera, se conoce el valor de la solución buscada en la frontera de la región. En la segunda, lo que se conoce es la derivada normal de la solución buscada. Con estas condiciones se garantiza unicidad de solución (salvo constantes en el caso de Neumann). El caso en que la condición de contorno esté dada a través de operadores con derivada fraccionaria ha sido desarrollado [14]. Aquí, la condición de contorno no es la de Neumann sino una condición fraccionaria que depende de dos parámetros, uno de los cuales devuelve la condición de Neumann cuando dicho parámetro toma el valor uno. Aunque la teoría se ha desarrollado para regiones más complejas que la circular, en este trabajo se considera el caso en que Ω corresponde a un círculo unitario. En este caso se hallaron las soluciones analíticas utilizando la técnica de series de Fourier. Para el cálculo de los coeficientes hubo que usar fórmulas de cuadratura ya que el operador diferencial fraccionario está definido a través de un proceso de integración. Se desarrollaron ejemplos para ilustrar y validar los resultados. Como primer paso, nos enfocamos en el desarrollo de teoría clásica que abarca la condición de contorno de Dirichlet y la condición de contorno de Neumann, pues, son tomadas como punto de partida para la mejor comprensión de lo visto en el artículo *On one generalization of the Neumann problem for the Laplace equation* [19] y el desarrollo de este trabajo.

Como trabajo futuro se podría considerar el caso de geometría no circular y alguna técnica numérica como el método del elemento finito y el de las diferencias finitas. Quedaría pendiente la interpretación física de una condición de contorno fraccionaria.

Apéndice A

En este Apéndice se realizan los detalles de los cálculos del documento principal.

A.1. Coeficientes de Fourier de $|\theta|$

Primero encontremos los valores de φ_0, φ_k^1 y φ_k^2 , entonces:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \langle \varphi, 1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} |\theta| d(\partial\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\theta| R d\theta = \frac{R}{\pi} \int_0^{\pi} \theta d\theta = R \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \varphi_k^1 &= \frac{1}{\pi} \langle \varphi, \cos(k\theta) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} |\theta| \cos(k\theta) d(\partial\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\theta| \cos(k\theta) R d\theta = \frac{R}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\theta| \cos(k\theta) d\theta \\ &= \frac{R}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 |\theta| \cos(k\theta) d\theta + \int_0^{\pi} |\theta| \cos(k\theta) d\theta \right] = \frac{R}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 \theta \cos(k\theta) d\theta + \int_0^{\pi} \theta \cos(k\theta) d\theta \right] \\ &= \frac{R}{\pi} \left[- \left(\frac{\theta}{k} \text{sen}(k\theta) + \frac{1}{k^2} \cos(k\theta) \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left(\frac{\theta}{k} \text{sen}(k\theta) + \frac{1}{k^2} \cos(k\theta) \right) \Big|_0^{\pi} \right] = \\ &\quad \frac{R}{\pi} \left[- \left(0 + \frac{1}{k^2} - 0 - \frac{1}{k^2} \cos(k\pi) \right) + 0 + \frac{1}{k^2} \cos(k\pi) - 0 - \frac{1}{k^2} \right] \\ &\quad \frac{R}{\pi} \left[- \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^2} \cos(k\pi) \right] = 0 \text{ si } k \text{ es par } \acute{o} - \frac{4}{\pi k^2} R \text{ si } k \text{ es impar.} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \varphi_k^2 &= \frac{1}{\pi} \langle \varphi, \text{sen}(k\theta) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} |\theta| \text{sen}(k\theta) d(\partial\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\theta| \text{sen}(k\theta) R d\theta = \frac{R}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\theta| \text{sen}(k\theta) d\theta \\ &= \frac{R}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 |\theta| \text{sen}(k\theta) d\theta + \int_0^{\pi} |\theta| \text{sen}(k\theta) d\theta \right] = \frac{R}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 \theta \text{sen}(k\theta) d\theta + \int_0^{\pi} \theta \text{sen}(k\theta) d\theta \right] \\ &= \frac{R}{\pi} \left[- \left(-\frac{\theta}{k} \cos(k\theta) + \frac{1}{k^2} \text{sen}(k\theta) \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left(-\frac{\theta}{k} \cos(k\theta) + \frac{1}{k^2} \text{sen}(k\theta) \right) \Big|_0^{\pi} \right] = \\ &\quad \frac{R}{\pi} \left[- \left(0 + 0 - \frac{\pi}{k} \cos(k\pi) - 0 \right) + -\frac{\pi}{k} \cos(k\pi) + 0 - 0 - 0 \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A.2. Coeficientes de Fourier de θ^2

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \langle \varphi, 1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \theta^2 d(\partial\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 R d\theta = \frac{R}{\pi} \int_0^{\pi} \theta^2 d\theta = R \frac{\pi^2}{3} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \varphi_k^1 &= \frac{1}{\pi} \langle \varphi, \cos(k\theta) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \theta^2 \cos(k\theta) d(\partial\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 \cos(k\theta) R d\theta = \frac{R}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 \cos(k\theta) d\theta \\ &= \frac{R}{\pi} \left[2 \int_0^{\pi} \theta^2 \cos(k\theta) d\theta \right] = \frac{2R}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \theta^2 \cos(k\theta) d\theta \right] \\ &= \frac{2R}{\pi k^3} \left[(k^2 \theta^2 \sin(k\theta) - 2(-k\theta \cos(k\theta) + \sin(k\theta))) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2R}{\pi k^3} [k^2 \pi^2 \sin(k\pi) - 2(-k\pi \cos(k\pi) + \sin(k\pi)) - 0 + 2(0 + \sin(k\theta))] \\ &= \frac{4R\pi}{\pi k^2} \cos(k\pi) = (-1)^k \left(\frac{4R}{k^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \varphi_k^2 &= \frac{1}{\pi} \langle \varphi, \sin(k\theta) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \theta^2 \sin(k\theta) d(\partial\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 \sin(k\theta) R d\theta = \\ &= \frac{R}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 \sin(k\theta) d\theta = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Por ser función impar, los coeficientes de Fourier asociados a el desarrollo en senos son cero. Sin embargo, se hicieron los cálculos para mostrar congruencia.

A.3. Programa graficador del Ejemplo (1)

```
clear all;
clc;
h=input('Dame el tama o del paso: ');
N=input('Dame el n mero de t rminos de la serie: ');
epsilon=0.0001;
theta=-pi:h:pi;
n=1;
r=0:0.01:1;
[X,Y]=meshgrid(r,theta);
solucionu=pi/2;

for k=1:N
solucionu=solucionu+(-4/(pi*(2*k-1)^2)).*(X.^(2*k-1)).*(cos((2*k-1)
.*Y));
end

figure(1)
surf(X,Y,solucionu)
xlabel('r')
ylabel('\theta')
zlabel('u(r,\theta)')
```

```
xlim auto
ylim auto
zlim auto
```

A.4. Programa graficador del Ejemplo (2)

```
clear all;
clc;
h=input('Dame el tama o del paso: ');
N=input('Dame el n mero de t rminos de la serie: ');
epsilon=0.0001;
theta=-pi:h:pi;
n=1;
r=0:0.01:1;
[X,Y]=meshgrid(r,theta);
solucionu=(pi^2)/3;

for k=1:N
solucionu=solucionu+((4*(-1)^k)/(k^2)).*(X.^k).*(cos(k.*Y));
end

figure(2)
surf(X,Y,solucionu)
xlabel('r')
ylabel('\theta')
zlabel('u(r,\theta)')
xlim auto
ylim auto
zlim auto
```

A.5. Programa graficador del Ejemplo (1)

```
clear all;
clc;
h=input('Dame el tama o del paso: ');
N=input('Dame el n mero de t rminos de la serie: ');
epsilon=0.0001;
theta=-pi:h:pi;
n=1;
r=0:0.01:1;
[X,Y]=meshgrid(r,theta);
solucionu=0;

for k=1:N
solucionu=solucionu+(-4/(pi*(2*k-1)^3)).*(X.^(2*k-1)).*(cos((2*k-1)
.*Y));
end

figure(3)
```

```
surf(X,Y,solucionu)
xlabel('r')
ylabel('\theta')
zlabel('u(r,\theta)')
xlim auto
ylim auto
zlim auto
```

A.6. Programa graficador del Ejemplo (2)

```
clear all;
clc;
h=input('Dame el tama o del paso: ');
N=input('Dame el n mero de t rminos de la serie: ');
epsilon=0.0001;
theta=-pi:h:pi;
n=1;
r=0:0.01:1;
[X,Y]=meshgrid(r,theta);
solucionu=0;

for k=1:N
solucionu=solucionu+((4*(-1)^k)/(k^3)).*(X.^k).*(cos(k.*Y));
end

figure(4)
surf(X,Y,solucionu)
xlabel('r')
ylabel('\theta')
zlabel('u(r,\theta)')
xlim auto
ylim auto
zlim auto
```

A.7. Programa graficador del Ejemplo (1)

```
clear all;
clc;
h=input('Dame el tama o del paso: ');
N=input('Dame el n mero de t rminos de la serie: ');
m=input('Dame el valor de m: ');
alfa=input('Dame el valor de alfa: ');
epsilon=0.0001;
R=1;
theta=-pi:h:pi;
n=1;
ff=@(x,k) ((-log(x)).^(m-1-alfa)).*(x.^(2*k-2));

r=0:0.01:1;
```

```

[X,Y]=meshgrid(r,theta);
solucionu=0;

for k=1:N
solucionu=solucionu+((-4*gamma(m-alfa))/(pi*((2*k-1).^(m+2))*
    quadgk(@(x)ff(x,k),0,1)))).*(X.^(2*k-1)).*(cos((2*k-1).*Y));
end

figure(5)
surf(X,Y,solucionu)
xlabel('r')
ylabel('\theta')
zlabel('u(r,\theta)')
xlim auto
ylim auto
zlim auto

```

A.8. Programa graficador del Ejemplo (2)

```

clear all;
clc;
h=input('Dame el tamaño del paso: ');
N=input('Dame el número de términos de la serie: ');
m=input('Dame el valor de m: ');
alfa=input('Dame el valor de alfa: ');
R=1;
theta=-pi:h:pi;
n=1;
ff=@(x,k)((-log(x)).^(m-1-alfa)).*(x.^(k-1));
r=0:0.01:1;
[X,Y]=meshgrid(r,theta);
solucionu=0;

for k=1:N
solucionu=solucionu+((4*((-1)^k)*gamma(m-alfa))/((k.^(m+2))*
    (quadgk(@(x)ff(x,k),0,1)))).*(X.^k).*cos(k.*Y);
end

figure(6)
surf(X,Y,solucionu)
xlabel('r')
ylabel('\theta')
zlabel('u(r,\theta)')
xlim auto
ylim auto
zlim auto

```

A.9. Programa graficador del Ejemplo (3), (4) y (5)

```

clear all;
clc;
h=input('Dame el tamaño del paso: ');
N=input('Dame el número de términos de la serie: ');
m=input('Dame el valor de m: ');
alfa=input('Dame el valor de alfa: ');
epsilon=0.0001;
R=1;
theta=-pi:h:pi;
fprueba=input('introduce la función:', 's');
n=1;
%Función auxiliar handle para la integración
fcero=@(x,n) n*eval(fprueba)*1/(2*pi);
fcos=@(x,k,n) n*eval(fprueba).*cos(k*x)/(pi);
fsin=@(x,k,n) n*eval(fprueba).*sin(k*x)/(pi);
ff=@(x,k) ((-log(x)).^(m-1-alfa)).*(x.^(k-1));

r=0:0.01:1;
[X,Y]=meshgrid(r,theta);
solucionu=0;

for k=1:N
solucionu=solucionu+(((gamma(m-alfa)*(quadgk(@(x)fcos(x,k,n),-pi,pi)
)))/((k.^m)*(quadgk(@(x)ff(x,k),0,1)))))*(X.^k).*(cos(k.*Y))+...
quadgk(@(x)fsin(x,k,n),-pi,pi)*((gamma(m-alfa))/((k.^m)*(quadgk
(@(x)ff(x,k),0,1)))))*(X.^k).*(sin(k.*Y)));
end

figure(1)
surf(X,Y,solucionu)
xlabel('r')
ylabel('\theta')
zlabel('u(r,\theta)')
xlim auto
ylim auto
zlim auto

```

Bibliografía

- [1] Tom M. Apostol. *CALCULUS, Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, With Applications to Differential Equations and Probability*. Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, 2002.
- [2] Beckenstein E. Bachman G., Narici L. *Fourier and Wavelets Analysis*. Springer-Verlag N. Y., Inc., 2000.
- [3] Robert G. Bartle. *The Elements of Real Analysis*. John Wiley & Sons. Inc., 1967.
- [4] Kulzina Dz. Nazarova Batirkhan Kh. Turmetov. On one generalization of the Neumann problem for the Laplace equation. *International Conference on Analysis and Applied Mathematics*, Volumen 1997, Agosto 2018.
- [5] Manuel Campos-García and Rufino Díaz-Urbe. Irradiance transport equation from geometrical optics considerations. *Revista Mexicana De Física*, 52:546–549, 2006.
- [6] Fanhai Zeng Changpin Li. *Numerical Methods for Fractional Calculus*. 2015.
- [7] Rene Dennemeyer. *Introduction to partial differential equations and boundary value problems*. Mc-Graw-Hill, 1968.
- [8] Mohanapriya A. Ganesh A. et al. Hammachukiattikul, P. A study on fractional differential equations using the fractional Fourier transform. *Springer Open Journal*, 1997, December 2020.
- [9] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1999.
- [10] Anthony J. Tromba Jerrold E. Marsden. *Vector calculus*. W.H Freeman and Company, 1988.
- [11] Anatoly A. Kilbas. Hadamard-type fractional calculus. *Department of Mathematics and Mechanics Belarusian State University*.
- [12] Morris Klane. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial, 1992.
- [13] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. Inc., 1978.
- [14] María Monserrat Morín-Castillo, Jesús Arriaga-Hernández, Bolivia Cuevas-Otahola, and José Jacobo Oliveros-Oliveros. Analysis of Dipolar Sources in the Solution of the Electroencephalographic Inverse Problem. *Mathematics*, 10(11):1–22, June 2022.
- [15] Roberto Rodríguez del Río and Enrique Zuazua. Series de fourier y fenómeno de gibbs. 06 2003.
- [16] Lawrence Spence Stephen Friedberg, Arnold Insel. *Linear Algebra*. Pearson, 2014.

- [17] José Manuel Sánchez Muñoz. Génesis y desarrollo del cálculo fraccional. *Pensamiento Matemático*, 10 2011.
- [18] William F. Trench. *Elementary differential equations with boundary values problems*. Trinity University, 2024.
- [19] B. Turmetov and K. Nazarova. On a generalization of the neumann problem for the laplace equation. *Mathematische Nachrichten*, 293(1):169–177, 2020.