



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Introducción a la Teoría de Grupos y Representaciones de
Grupos para Estudiantes de Física

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADA EN FÍSICA

por

Victoria Ledesma Basave

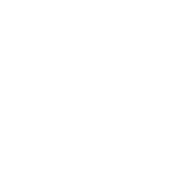
Asesorada por

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

Coasesorada por

Dra. Sindy Mirella Chamorro Solano

Puebla Pue.
15 de junio de 2023



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla



Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Introducción a la Teoría de Grupos y Representaciones de
Grupos para Estudiantes de Física

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADA EN FÍSICA

por

Victoria Ledesma Basave

Asesorada por

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

Coasesorada por

Dra. Sindy Mirella Chamorro Solano

Puebla Pue.
15 de junio de 2023

Título: Introducción a la Teoría de Grupos y Representaciones de Grupos para Estudiantes de Física

Estudiante: VICTORIA LEDESMA BASAVE

COMITÉ

Horoscopista Fernando
Presidente

Homeópata Pérez
Secretario

Cienciólogo Fdez.
Vocal

C. Soto
Vocal

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Directora

Dra. Sindy Mirella Chamorro Solano
Co directora

Agradecimientos

A mi madre y a mi padre: gracias por estar conmigo siempre, por enseñarme lo más hermoso y fundamental de la vida y por creer en mí. Esta tesis es otro de los logros que he podido realizar sólo gracias a su apoyo y amor incondicional.

A mi hermana: gracias por inspirarme a ser más fuerte, independiente y empática. Gracias por regalarme tu confianza y recordarme de lo que soy capaz.

A mi directora de tesis, la Doctora Mercedes Velázquez: gracias por siempre mostrar interés en mis opiniones e inquietudes, así como por realizar las observaciones pertinentes. Me siento afortunada de haber podido trabajar con usted y entablar una relación de respeto, apertura y confianza.

A mi co directora de tesis, la Doctora Sindy Chamorro, y al Doctor Sair Arquez: gracias por todas las asesorías y consejos que me han brindado, así como por su apertura y calidez. Trabajar con ustedes fue una gran oportunidad para acercarme al mundo de la investigación y la interdisciplinariedad.

A mis profesoras y profesores, quienes, a lo largo de mi vida académica, me han motivado a la reflexión, la búsqueda de respuestas, el entusiasmo y la disciplina.

Finalmente, a mis familiares y amistades, quienes estuvieron conmigo a lo largo de la Licenciatura y de este proyecto: gracias por darme ánimo y por compartirme un poco de sus sentires y saberes. Ustedes también han sido maestras y maestros de vida para mí.

Introducción

Este trabajo de Tesis consiste en una monografía sobre la Teoría de Grupos y la Teoría de Representaciones, y surge de la necesidad de estudiar estos temas en los niveles formativos de física, ya sea en la Licenciatura o en la Maestría. A pesar de que lleguemos a usar estos conceptos en las asignaturas de mecánica clásica y mecánica cuántica, el plan de estudios de la Licenciatura en Física no cuenta con una asignatura que introduzca los grupos, específicamente, o las estructuras algebraicas, en general. Por ello, es muy común que las y los estudiantes de física no comprendamos los objetos o herramientas matemáticas que empleamos.

Existe ya una gran variedad de libros introductorios a la Teoría de Grupos y a la Teoría de Representaciones de Grupos, también una gran variedad de textos que hablan sobre sus aplicaciones a la física y algunos más que abordan la física y la matemática a la par. Sin embargo, su lectura suele ser complicada, pues suponen que la lectora cuenta con conocimientos sólidos en estructuras algebraicas o que le serán familiares los ejemplos de física de partículas y cristalografía.

Es por ello que, en esta monografía, se presentan las definiciones y teoremas con un lenguaje claro y simple, se intenta construir la teoría de manera ordenada e intuitiva y se insertan recursos gráficos para lograr una mejor comprensión. No se discuten implicaciones ni aplicaciones físicas complejas, pues, desde mi punto de vista, éstos pueden generar confusión u ocultar la simplicidad y naturalidad con la que surgen los conceptos.

A pesar de que me parece importante homologar la física con las matemáticas, pienso que, dado nuestro historial de aprendizaje, resulta más efectivo construir una base matemática sólida, alcanzando cierto nivel de abstracción y familiaridad con las operaciones y herramientas. Es hasta conocer las bases de la teoría y las propiedades de un grupo, que se puede comprender por qué las transformaciones de rotación y de traslación, generadas por los operadores de momento angular y de momento lineal, son elementos de un grupo; o por qué la geometría de ciertos metales y cristales puede ser descrita mediante grupos finitos. Incluso conceptos que son difíciles de entender físicamente, como el espín de una partícula, pueden verse con mayor claridad a la luz de la teoría de grupos.

La monografía introduce algunos Grupos de Lie, que son los grupos más importantes en física, pues pueden representar simetrías continuas de sistemas físicos y sus operaciones son diferenciables. Sin embargo, son los Grupos de Permutaciones y los Grupos Cíclicos los que mejor ilustran las propiedades de cerradura y simetría de los grupos, por lo que se mencionarán repetidamente en los ejemplos. Además, se toma en cuenta que los grupos surgieron inicialmente del estudio de permutaciones y polinomios, por lo que la manera más natural de abordarlos es iniciando por estos grupos finitos.

Al revisar la bibliografía, pude notar que, en otros libros, hay una disociación entre la Teoría de Grupos y la Teoría de Representaciones. En la mayoría de los casos, esto se debe a que no emplean la misma notación en ambas teorías ni muestran el cálculo explícito de las representaciones. Es

por ello que, en esta tesis, se intenta que la notación sea lo más clara y consistente posible a lo largo de los dos capítulos. La notación elegida está desglosada en tablas en las siguientes páginas.

Asimismo, se pretende que esta sea una monografía autocontenida, es decir, que no sea necesario recurrir a libros suplementarios para entender el contenido. Sin embargo, se presupone que las y los lectores tienen conocimientos sólidos de matemáticas básicas y álgebra lineal; también pueden ser necesarios conocimientos de teoría de matrices y combinatoria. En todo caso, se sugiere estudiar previamente *Álgebra Lineal*, de S. H. Friedberg, A. J. Insel, et al., o *Introducción al Álgebra Lineal* de S. Lang.

Este documento puede también emplearse como curso introductorio a los grupos y representaciones de grupos, y se propone a estudiantes de Licenciatura o Maestría en Física que deseen introducirse en las áreas de física matemática, partículas, cristalografía o estado sólido.

El contenido del primer capítulo está principalmente basado en *An Introduction to the Theory of Groups*, de J. J. Rotman, y el del segundo, en *Representation Theory of Finite Groups. An Introductory Approach*, de B. Steinberg. Se incluyen las demostraciones de la mayoría de proposiciones y teoremas, pues gran parte de ellas no están incluidas o desarrolladas exhaustivamente en los textos.

Por último, los recursos gráficos fueron realizados en la herramienta digital de diseño **Canva** (www.canva.com) y a cada uno se añade como referencia el texto o artículo en el que están basados.

Notación

Matemáticas básicas

$:=$	Definición.
\forall	Para todo elemento.
\exists, \nexists	Existe, no existe elemento.
$\exists!$	Existe un único elemento.
\wedge	Conjunción, <i>y</i> .
\vee	Disyunción, <i>o</i> .
\implies	Implicación, <i>entonces</i> .
\iff	Equivalencia, <i>si y sólo si</i> .
\therefore	Por lo tanto.
$ $	Tal que.
$X \cap Y$	Intersección de dos conjuntos.
$\bigcap_{i=1}^n X_i$	Intersección de n conjuntos.
$X \cup Y$	Unión de dos conjuntos.
$\bigcup_{i=1}^n$	Unión de n conjuntos.
$x \in X$	x pertenece a X .
$X \subset Y$	X es un subconjunto de Y .
\emptyset	Conjunto vacío.
$ X $	Cardinalidad de un conjunto.
$f : X \longrightarrow Y$	Función con dominio en X e imagen en Y .
$f : x \longmapsto y$	y es la imagen de x bajo la función f .
$f _S$	Función restringida a un subconjunto del dominio.
id	Función identidad.
\sum, \prod	Sumatoria, productoria.
\mathbb{K}	Campo arbitrario.
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Números Naturales, Enteros, Reales, Complejos.
E^n	Espacio Euclideo de dimensión n .
z^*	Complejo conjugado de un número z .
A^T	Traspuesta de una transformación A .
A^\dagger	Adjunta de una transformación A .

Teoría de Grupos

$*$	Operación de un grupo arbitrario.
$ G $	Orden de un grupo.
$1, \mathbf{1}$	Identidad de un grupo.
(1)	Permutación identidad.
$H \leq G$	H es un subgrupo de G .
$H < G$	H es un subgrupo propio de G .
$H \triangleleft G$	H es un subgrupo normal de G .
$\{1\}$	Subgrupo trivial.
S_X, S_n	Grupo de permutaciones de X , grupo simétrico en n letras.
A_n	Grupo alternante o de permutaciones pares en n letras.
D_n	Grupo diedral de n elementos.
C_n	Grupo cíclico de n elementos.
$\langle g \rangle$	Grupo cíclico generado por g .
\mathbb{Z}_n	Grupo de enteros módulo n .
$[a]_n$	Clase de congruencia de a módulo n .
$GL_n(V)$	Grupo general lineal sobre V .
$\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$	Grupo de matrices $n \times n$ sobre \mathbb{C}^n .
$SL_n(V)$	Grupo especial lineal sobre V .
$\mathcal{SL}_n(\mathbb{C})$	Grupo de matrices $n \times n$ sobre \mathbb{C}^n , con determinante 1.
$O_n(\mathbb{R})$	Grupo ortogonal real.
$M_n(\mathbb{R})$	Grupo de isometrías.
SO_n	Grupo Especial Ortogonal en n dimensiones.
U_n, SU_n	Grupo Unitario, Grupo Especial Unitario en n dimensiones.
\mathcal{T}_1	Grupo de traslaciones continuas en 1 dimensión.
$H \cong G$	H es isomorfo a G .
Hg	Coset de H en G .
$[G : H]$	Índice de H en G .
ST	Producto de subconjuntos $S, T \subset G$.
$\frac{G}{N}$	Grupo cociente o grupo de cosets de N en G .
$H \times K$	Producto directo de H con K .
x^G	Clase de conjugación de $x \in G$.
$\gamma_g(x)$	Conjugada de x bajo g .
$Z(G)$	Centro del grupo G .
$C_G(x)$	Centralizador de $x \in G$.
H^g, gHg^{-1}	Conjugada del subgrupo $H \leq G$.
$N_G(H)$	Normalizador del subgrupo $H \leq G$.

Teoría de Representaciones

φ_g	Representación φ evaluada en un elemento g del grupo.
$V \leq W$	V es un subespacio de W .
$V \cong W$	El espacio V es isomorfo al espacio W .
$\ \cdot\ $	Norma de un vector.
$\langle \cdot \cdot \rangle$	Producto interno.
χ_φ	Caracter de la representación φ .
$\varphi \oplus \rho$	Suma directa de representaciones.
$\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$	Grupo de matrices de permutación.
$\varphi \sim \rho$	Representaciones equivalentes.
$\mathbb{K}_G, \mathbb{C}_G$	Álgebra del grupo G .
$\mathbb{C}G$	Espacio vectorial generado a partir de G .
$\mathcal{C}(\mathbb{C}_G)$	Conjunto de funciones de clase sobre \mathbb{C}_G .
$\text{Hom}(V, W)$	Conjunto de homomorfismos entre V y W .
$\mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$	Conjunto de morfismos entre los espacios de representación de G , correspondientes a φ y ρ .
ζ	Clase de conjugación del grupo.
L_g, \mathcal{L}_g	Representación regular izquierda.
$\lambda \vdash n$	λ es una partición de n .
χ_ϕ^m	Representación irreducible de SO_2 .
χ_x^p	Representación irreducible de \mathcal{T}_1 .
T, S, U	Tablas de Young.
$\Lambda(\sigma)$	Tipo de ciclo de la permutación σ .
C_T, F_T	Estabilizador de columna, estabilizador de fila de T .
$[T]$	Tabloide de T .
E_T	Politabloide asociado a T .
\mathcal{T}^λ	Conjunto de λ -tabloides.
\mathcal{M}^λ	Espacio vectorial generado por los λ -tabloides.
\mathcal{E}^λ	Espacio vectorial generado por los politabloides de una λ -Tabla.
φ^λ	Representación de S_n sobre \mathcal{M}^λ .
ψ^λ	Representación de S_n sobre \mathcal{E}^λ (Representación de Sprech).
r_λ, D_λ	Grados de las representaciones $\psi^\lambda, \varphi^\lambda$.
$h_\lambda(u)$	Longitud de gancho del cuadro u en un λ -diagrama.

Índice general

1. Teoría de Grupos	1
1.1. Grupos y Subgrupos	2
1.2. clases laterales, Subgrupos Normales y Grupos Cocientes	24
1.3. Homomorfismos e Isomorfismos	39
1.4. Grupos de Permutaciones	63
1.5. Producto Directo	86
1.6. Clases de Conjugación	94
2. Teoría de Representaciones	109
2.1. Representaciones de Grupos	110
2.2. Lema de Schur	133
2.3. Teoría de Caracteres	141
2.4. Representación Regular	155
2.5. Tablas de Young	163
2.6. Tablas de Young para SU_n	192
Bibliografía	200

Capítulo 1

Teoría de Grupos

Una estructura algebraica es un conjunto no vacío, equipado con ciertas operaciones, que son en general *binarias*; es decir, toman dos elementos y los combinan u *operan* para obtener un tercer elemento. Lo que distingue a una estructura algebraica de otras, son las propiedades y el comportamiento de sus elementos bajo transformaciones u operaciones.

Algunas de las estructuras algebraicas más conocidas entre estudiantes de física, son los anillos, espacios vectoriales y grupos. Esto se debe a que la *estructura matemática* de estos objetos se ajusta a la *estructura física* de los sistemas que nos interesa estudiar.

No sólo es conveniente trabajar con objetos matemáticos, sino que es la única manera en que podemos enunciar leyes generales y hacer predicciones exactas sobre los sistemas físicos. La construcción de toda la física reside en la abstracción de objetos concretos e irregulares, a los cuales no nos podemos aproximar sin un lenguaje matemático: un esquema mediante el cual clasificarlos y relacionarlos entre sí. Así, reducimos el problema de conocer un fenómeno de la naturaleza en toda su complejidad, al de identificar sus propiedades más importantes y trabajar con ellas de manera sistemática.

Por un lado, tenemos el fenómeno físico a estudiar, sus escalas temporales y espaciales y sus efectos medibles; por el otro, está la abstracción que hacemos de sus propiedades, su comportamiento ante transformaciones y el interés por expresar o predecir su evolución. El propósito de la física matemática es integrar ambas partes y visualizarlas como un todo, pues es tan importante comprender la situación física, como la matemática subyacente.

Particularmente, los grupos son estructuras que usamos constantemente en física para estudiar las *simetrías* de los objetos o propiedades que permanecen *invariantes* ante cierta transformación; puede tratarse de una forma o cantidad conservada. Este tipo de objetos tiene un papel protagónico en diversas áreas de la física: mecánica cuántica, física de partículas, cristalografía, física del estado sólido, teorías de campos y de cuerdas, etc.

La intención de este capítulo es comprender los fundamentos de la Teoría de Grupos, abordando los teoremas y conceptos más importantes con suficiente rigurosidad y claridad.

El libro que se ha tomado como base es *An Introduction to the Theory of Groups* de Joseph J. Rotman. De manera suplementaria, se emplearon *The Theory of Groups* de Marshall Hall [2], *Group Theory in Physics* de Wu Ki Tung [3] y *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, de Eugene P. Wigner [5]. Los recursos gráficos están inspirados en las imágenes de *Visual Group Theory*, de Nathan C. Carter.

1.1. Grupos y Subgrupos

Definición 1.1.1. Llamamos **semigrupo** $(S, *)$ a un conjunto no vacío S equipado con una operación asociativa $(*)$, comúnmente llamada *producto*. Así,

$$\forall s_1, s_2, s_3 \in S, \quad (s_1 * s_2) * s_3 = s_1 * (s_2 * s_3) = s_1 * s_2 * s_3.$$

El semigrupo es una estructura algebraica bastante simple, pues satisface sólo dos axiomas: la cerradura y la asociatividad. Sus elementos pueden ser de cualquier tipo, mientras tengan una operación asociativa.

Algunos semigrupos son:

- Los números naturales, junto con la operación de suma: $(\mathbb{N}, +)$.
- Los números enteros, bajo la operación de suma: $(\mathbb{Z}, +)$, y también bajo la operación de multiplicación: (\mathbb{Z}, \cdot) .
- El conjunto de matrices de tamaño $n \times n$, junto con las operaciones de suma y de multiplicación: $(\mathcal{M}_n, +)$ y (\mathcal{M}_n, \cdot) .

Un grupo es también un semigrupo, pues posee una operación cerrada y asociativa; sin embargo, los grupos deben satisfacer cuatro axiomas, por lo que pueden verse como una extensión de los semigrupos.

Definición 1.1.2. Llamamos **grupo** $(G, *)$ a un conjunto no vacío G y una operación $(*)$, que satisfacen las siguientes propiedades:

- i. *Cerradura:* El producto de dos elementos cualesquiera de G , también pertenece a G y es único.

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad g_1 * g_2 = g_3 \in G. \tag{1.1}$$

- ii. *Asociatividad:* Para cualesquiera $g_1, g_2, g_3 \in G$,

$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3) = g_1 * g_2 * g_3. \tag{1.2}$$

- iii. *Identidad:* Existe un elemento $1 \in G$ tal que

$$1 * g = g * 1 = g, \quad \forall g \in G. \tag{1.3}$$

- iv. *Inverso:* Sea $g \in G$ arbitrario. Entonces, existe un elemento $g^{-1} \in G$ tal que

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = 1. \tag{1.4}$$

***Nota:** Usualmente, la operación del grupo es una **composición**, denotada por el símbolo (\circ) . Sin embargo, son muy comunes los *grupos multiplicativos*, cuya operación es una multiplicación (\cdot) , y los *grupos aditivos*, cuya operación es una suma $(+)$. Comúnmente, la notación $(G, *)$ se reduce a G , a menos que sea necesario especificar la operación.

Durante todo el texto, denotaremos a los grupos por letras mayúsculas: G, H, K, \dots , y a los elementos de un grupo arbitrario, por letras minúsculas: g, h, k, \dots

***Nota:** Siempre que deseemos verificar si un conjunto es un grupo, debemos revisar que satisfaga los cuatro axiomas de la Definición 1.1.2.

De los semigrupos mencionados anteriormente, veamos que:

- Los naturales \mathbb{N} **no** son un grupo, pues no cuentan con un elemento 0 tal que $n + 0 = n$, ni con los elementos $-n$ tales que $n + (-n) = 0$.
- Los enteros \mathbb{Z} son un grupo **aditivo**, pues satisfacen los cuatro axiomas de grupo bajo la operación de suma; sin embargo, **no** son un grupo multiplicativo, pues el elemento $q^{-1} = \frac{1}{q}$ correspondiente a cada $q \in \mathbb{Z}$, no es un entero.
- Las matrices de tamaño $n \times n$, junto con la operación de suma, forman un grupo aditivo: la matriz identidad es la *matriz nula* $\mathcal{O}_{n \times n}$ y cada matriz tiene una inversa, cuyas entradas son los inversos aditivos de la matriz original.

Sin embargo, el conjunto \mathcal{M}_n **no** es un grupo multiplicativo, pues no todas las matrices $n \times n$ son invertibles, por lo que no podemos asegurar que exista $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$ tal que $A^{-1}A = \mathbf{1}$, para cada $A \in \mathcal{M}_n$.

Por lo tanto,

Grupos: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathcal{M}_n, +)$.

Semigrupos: $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{Z}, \cdot) , (\mathcal{M}_n, \cdot) .

Es probable que, al hablar de grupos, pensemos inmediatamente en grupos **infinitos**, como son los números reales, las matrices no singulares y los operadores de evolución que estudiamos en mecánica cuántica. Sin embargo, los grupos **finitos** son, en su mayoría, los que mejor ilustran los principios de la Teoría de Grupos.

Es muy conveniente examinar grupos finitos y discretos para comprender la trascendencia de los cuatro axiomas de grupo, así como los conceptos de orden, exponente, permutación, etc., que veremos más adelante.

El área de la física donde más se utilizan grupos finitos es la cristalografía, pues con éstos se estudian las simetrías de cristales, y la físico-química, para estudiar la estructura de las moléculas. Por ejemplo, en la Figura (1.1), se muestra una estructura cúbica que caracteriza a ciertos cristales; el material completo luce como la Figura (1.2).

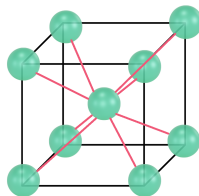


Figura 1.1: Estructura cúbica de un cristal: cada esfera representa un átomo, y las líneas son los enlaces entre ellos [4]. En la sección (1.4), veremos que las simetrías de esta figura son elementos del grupo simétrico S_4 .

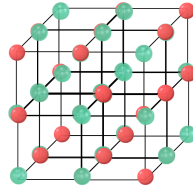


Figura 1.2: Patrón de un cristal formado por varias estructuras cúbicas [4].

Por otro lado, también es común trabajar con grupos finitos en física de partículas; por ejemplo, el grupo de 2 elementos, $C_2 = \{-1, 1\}$, puede representar la paridad de una partícula, y el grupo formado por matrices de Pauli pueden representar el espín [3].

Más adelante revisaremos los principales grupos finitos: **grupos de permutaciones** y **grupos diedrales**, formados por biyecciones o *reordenamientos* en un conjunto finito. En cuanto a grupos infinitos, discutiremos los grupos de rotaciones y traslaciones continuas, también llamados **grupos de Lie**.

Ahora, daremos un nombre especial a los grupos que poseen una operación conmutativa:

Definición 1.1.3. Un par de elementos g_1, g_2 en un grupo G *conmutan* si $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$.

Decimos que el grupo es **abeliano** o **conmutativo** si todos sus pares de elementos conmutan:

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad g_1 * g_2 = g_2 * g_1.$$

Entre los grupos abelianos más comunes, están los números enteros, reales y complejos (todos ellos poseen la estructura de grupo aditivo y de campo); también R^n o el espacio euclideo más general E^n , son grupos aditivos abelianos, como veremos en el Ejemplo (1.1.4).

En cuanto a grupos finitos abelianos, está el grupo de 2 elementos: $C_2 = \{-1, 1\}$, que revisaremos más adelante.

Ejemplo 1.1.1 (Grupo de enteros módulo n). En primer lugar, recordemos el concepto de **congruencia**, de la Teoría de Enteros [16]:

Sean $n, a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces, decimos que a es congruente con b módulo n , si y sólo si n es un divisor de $a - b$. Matemáticamente,

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid a - b. \tag{1.5}$$

Además, llamamos **clase de congruencia** de a , **módulo n** , al conjunto de enteros b tales que $a \equiv b \pmod{n}$, y la denotamos por $[a]_n$.

Sabemos que

$$n \mid a - b \iff b = a + kn, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces,

$$[a]_n := \{b \in \mathbb{Z} \mid n \mid a - b\} = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.6}$$

Al conjunto de todas las clases de congruencia módulo n , lo denotamos por \mathbb{Z}_n :

$$\mathbb{Z}_n := \{[a]_n \mid a \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.7}$$

Probaremos que \mathbb{Z}_n forma un Grupo bajo la operación de suma de clases de congruencia, que coincide con la suma de enteros.

Para simplificar la notación, omitiremos el subíndice n .

i. Sean $[a], [b] \in \mathbb{Z}_n$, y sean $\tilde{a} \in [a], \tilde{b} \in [b]$. Entonces,

$$\begin{aligned}\tilde{a} + \tilde{b} &= (a + k_1n) + (b + k_2n) \\ &= (a + b) + (k_1 + k_2)n \in [a + b] \subset \mathbb{Z}_n.\end{aligned}$$

Note que \tilde{a} y \tilde{b} son cualesquiera elementos en $[a], [b]$, por lo que

$$[a] + [b] \subset [a + b].$$

Igualmente, un elemento arbitrario $m \in [a + b]$ satisface:

$$\begin{aligned}m &= (a + b) + kn \\ &= (a + 0n) + (b + kn) \in [a] + [b]; \\ \implies [a + b] &\subset [a] + [b]. \\ \therefore [a] + [b] &= [a + b],\end{aligned}$$

con lo que se satisface la cerradura de la suma.

ii. Ahora, si $\tilde{c} \in [c]$, entonces

$$\begin{aligned}(\tilde{a} + \tilde{b}) + \tilde{c} &= [(a + b) + (k_1 + k_2)n] + (c + k_3n) \\ &= (a + b + c) + (k_1 + k_2 + k_3)n \\ &= a + (b + c) + k_1n + (k_2 + k_3)n \\ &= (a + k_1n) + [(b + k_2n) + (c + k_3n)] \\ &= \tilde{a} + (\tilde{b} + \tilde{c})\end{aligned}$$

Como los enteros $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ son arbitrarios, en general se cumple:

$$([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c]) = [a + b + c] \in \mathbb{Z}_n.$$

Por lo tanto, la suma es asociativa en \mathbb{Z}_n .

iii. Consideremos la clase de congruencia del neutro aditivo, $0 \in \mathbb{Z}$:

$$[0]_n = \{0 + kn \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Esto significa que $[0]$ consta de todos los múltiplos de n . Tomando cualquier $\tilde{n} \in [0]$,

$$\begin{aligned}\tilde{n} + \tilde{a} &= k_0n + (a + k_1n) \\ &= a + (k_0 + k_1)n \in [a] \\ \implies [0] + [a] &\subset [a].\end{aligned}$$

Igualmente,

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= 0n + a + k_1n \\ \implies \tilde{a} &\in [0] + [a] \\ \implies [a] &\subset [0] + [a]; \\ \therefore [a] &= [0] + [a].\end{aligned}$$

Como la suma de enteros es conmutativa, podemos asegurar que también $[a] + [0] = [a]$. Por lo tanto,

$$\exists [0] \in \mathbb{Z}_n \text{ tal que } [0] + [a] = [a] + [0] = [a],$$

para toda $[a] \in \mathbb{Z}_n$.

iv. Consideremos $[-a] = \{-a + k'_1n \mid k'_1 \in \mathbb{Z}\}$, y $-\tilde{a} \in [-a]$ arbitraria. Entonces,

$$\begin{aligned}-\tilde{a} + \tilde{a} &= (-a + k'_1n) + (a + k_1n) \\ &= (-a + a) + (k'_1 + k_1)n \\ &= (k'_1 + k_1)n \in [0]. \\ \implies [-a] + [a] &\subset [0].\end{aligned}$$

Igualmente, si $\tilde{n} \in [0]$, entonces

$$\begin{aligned}\tilde{n} &= k_0n \\ &= (-\tilde{a} + \tilde{a}) + k_0n \\ &= (-a + k'_1n) + (a + k_1n) + k_0n \\ &= (-a + k'_1n) + [a + (k_1 + k_0)n] \\ &\in [-a] + [a]. \\ \implies [0] &\subset [-a] + [a] \\ \implies [-a] + [a] &= [0].\end{aligned}$$

Al igual que en el inciso (iii), se sigue que $[a] + [-a] = [0]$. Por tanto, para cada $[a] \in \mathbb{Z}_n$,

$$\exists [-a] \in \mathbb{Z}_n \text{ tal que } [-a] + [a] = [a] + [-a] = [0].$$

Por lo tanto, el conjunto de clases de congruencia módulo n , junto con la operación de suma de clases, forma un grupo, llamado **grupo de enteros módulo n** y denotado por $(\mathbb{Z}_n, +)$.

El grupo de enteros módulo n es importante porque, históricamente, motivó la introducción de los grupos cocientes [1], a revisar en la Sección (2.2). Nos seguiremos refiriendo a él en otros ejemplos del capítulo.

Volviendo a los axiomas de grupo, no podemos asegurar, a priori, que los elementos 1 y $g^{-1} \in G$ sean únicos; esto se prueba en los siguientes teoremas:

Teorema 1.1.1 (Unicidad de la identidad). Sea G un grupo. Entonces, el elemento $1 \in G$ tal que $1 * g = g * 1 = g$, para toda $g \in G$, es único.

Al elemento 1 le llamamos **identidad** de G .

Dem. Sea $1 \in G$ un elemento tal que $1g = g1 = g$, y supongamos que existe $1' \in G$, distinto de 1 , tal que

$$1'g = g1' = g, \quad \forall g \in G.$$

Si $g^{-1} \in G$ es un elemento tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$,

$$\implies 1'gg^{-1} = gg^{-1}$$

$$\iff 1'1 = 1$$

$$\iff 1' = 1,$$

contradiciendo la suposición de que $1' \neq 1$.

$$\therefore \exists ! 1 \in G \text{ tal que } g1 = 1g = g \quad \forall g \in G.$$

■

Teorema 1.1.2 (Unicidad de los inversos). Para cada $g \in G$, el elemento $g^{-1} \in G$ tal que $g * g^{-1} = g^{-1} * g = 1$, es único.

A g^{-1} le llamamos **inverso** de g .

Dem. Sean $g, g^{-1} \in G$ tales que $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$, donde 1 es la identidad de G .

Supongamos que existe $(g^{-1})' \in G$, distinto de g^{-1} , tal que $g(g^{-1})' = (g^{-1})'g = 1$.

$$\implies (g^{-1})'gg^{-1} = 1g^{-1}$$

$$\iff (g^{-1})'1 = 1g^{-1}$$

$$\iff (g^{-1})' = g^{-1},$$

contradiciendo la suposición de que $(g^{-1})' \neq g^{-1}$.

$$\therefore \text{ Para cada } g \in G, \exists ! g^{-1} \in G \text{ tal que } gg^{-1} = g^{-1}g = 1.$$

■

En los grupos aditivos, el elemento identidad es el **neutro aditivo** 0 , y los inversos son los **inversos aditivos** $-g$.

En general, se omite el símbolo $*$ para indicar un producto: $g * h = gh$.

Ejemplo 1.1.2 (Matrices diagonales 2×2). El conjunto de **matrices diagonales no singulares**, cuyas entradas pertenecen al campo \mathbb{K} , forma un grupo bajo la operación de **producto matricial**.

En particular, consideraremos las matrices diagonales de tamaño 2×2 , sobre el campo \mathbb{R} ; las denotaremos por $\mathcal{D}_{2 \times 2}$.

i. Sean $A, B \in \mathcal{D}_{2 \times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\implies AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_{2 \times 2},$$

\therefore El producto es cerrado en $\mathcal{D}_{2 \times 2}$.

ii. Sea $C \in \mathcal{D}_{2 \times 2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} (AB)C &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22}c_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} & 0 \\ 0 & b_{22}c_{22} \end{pmatrix} \\ &= A(BC), \end{aligned}$$

\therefore El producto es asociativo en $\mathcal{D}_{2 \times 2}$.

iii. Veamos que

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_{2 \times 2}.$$

Entonces,

$$\mathbf{1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = A.$$

$$A\mathbf{1} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = A.$$

Por lo tanto, existe un elemento $\mathbf{1} \in \mathcal{D}_{2 \times 2}$ tal que $\mathbf{1}A = A\mathbf{1} = A$, para toda $A \in \mathcal{D}_{2 \times 2}$.

$\therefore \mathcal{D}_{2 \times 2}$ tiene una identidad.

iv. Como $\mathcal{D}_{2 \times 2}$ es un conjunto de matrices no singulares, podemos asegurar que son **invertibles**.
Explícitamente,

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^T}{\det(A)}, \tag{1.8}$$

$$\text{Con } (A^{adj})_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|, \tag{1.9}$$

donde $|A_{ij}|$ es la matriz de cofactores, que se obtiene al omitir la i -ésima fila y la j -ésima columna.

$$\implies A^{adj} = \begin{pmatrix} (-1)^2|A_{11}| & (-1)^3|A_{12}| \\ (-1)^3|A_{21}| & (-1)^4|A_{22}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\implies (A^{adj})^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Además, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Como las matrices son diagonales, $a_{12} = a_{21} = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{a_{11}a_{22}} \begin{pmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}} & 0 \\ 0 & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_{2 \times 2}. \end{aligned}$$

Así,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}.$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}.$$

Por lo tanto, para cada $A \in \mathcal{D}_{2 \times 2}$, existe $A^{-1} \in \mathcal{D}_{2 \times 2}$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}$.

$\therefore \mathcal{D}_{2 \times 2}$ es un grupo, junto con la operación de **multiplicación matricial**.

***Nota:** Notemos que, en las matrices diagonales, las entradas de A^{-1} son los escalares inversos de las entradas de A . Sin embargo, esto no se cumple en el resto de matrices.

***Nota:** Recordemos que no todas las matrices pertenecen a un **grupo multiplicativo**. Para hacerlo, es necesario que tengan inversa, y que dicha inversa posea la misma estructura.

Además, puede que el producto de 2 matrices con cierta estructura resulte en una matriz con estructura distinta, por lo que no pueden ser elementos de un grupo.

Usualmente, en física nos interesan las matrices invertibles porque nos permiten hallar la solución a un sistema de ecuaciones.

Definición 1.1.4. Sea G un grupo, $g \in G$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, definimos las **potencias** de g como:

$$\begin{aligned} g^0 &:= 1 \\ g^1 &:= g \\ g^{n+1} &:= g * g^n \\ g^{-n} &:= (g^n)^{-1} = (g^{-1})^n. \end{aligned}$$

Así, $g^n = g * g * \dots * g$ es el elemento de G que se obtiene al operar g consigo misma n veces. En grupos aditivos,

$$\begin{aligned} g^n &\longrightarrow ng := g + g + \dots + g. \\ g^{-n} &\longrightarrow -ng := -g - g - \dots - g. \end{aligned}$$

Por la cerradura de la operación, un grupo posee a todas sus potencias, tanto positivas como negativas, ya que unas son los elementos inversos de las otras.

En el siguiente ejemplo, introduciremos uno de los grupos más sencillos pero, a la vez, más útiles para comprender conceptos fundamentales y construir grupos más grandes.

Ejemplo 1.1.3 (Grupo cíclico de 2 elementos). Consideremos un conjunto $C_2 = \{a, b\}$, que forma un grupo bajo cierta operación.

Para ser un grupo, C_2 debe contener al elemento identidad, por lo que elegimos $a = 1$:

$$C_2 = \{a, b\} = \{1, b\}. \quad (1.10)$$

Como debe satisfacerse la cerradura del producto, tenemos:

$$\begin{aligned} ab &= 1b = b \in C_2, \\ ba &= b1 = b \in C_2, \\ a^2 &= a^3 = \dots = a^n = 1^n = 1 \in C_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Imponemos la condición de que $b^2, b^3, \dots, b^k \in C_2, \forall k \in \mathbb{N}$. Entonces, sólo existen 2 posibilidades:

$$b^k = 1 \vee b^k = b \quad (1.11)$$

De la Ecuación (1.11), podemos deducir que $b^2 = b^4 = \dots = b^{2k} = 1$ y $b^1 = b^3 = \dots = b^{2k+1} = b$. Eligiendo $b = -1$, tenemos:

$$\begin{aligned} b^n &= (-1)^n = \begin{cases} -1, & \text{si } n \text{ es impar.} \\ 1, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \\ \implies C_2 &= \{1, -1\} \\ \therefore &\text{ El producto es cerrado y conmutativo en } C_2. \end{aligned}$$

Como veremos en las definiciones (1.1.12), (1.1.13), esto significa que C_2 tiene un *exponente* $n = 2$, el cual coincide con su cardinalidad, también llamada *orden* en este contexto.

$$a^2 = b^2 = 1 \quad \wedge \quad |C_2| = 2.$$

La propiedad de asociatividad, la existencia de la identidad y la existencia de los inversos en C_2 , se satisfacen de manera trivial.

El elemento $-1 \in C_2$ puede entenderse como una inversión o reflexión. El grupo C_2 es abeliano porque la aplicación de la identidad, seguida de la reflexión, es completamente equivalente a la aplicación de la reflexión, seguida de la identidad: $(-1)(1) = (1)(-1)$.

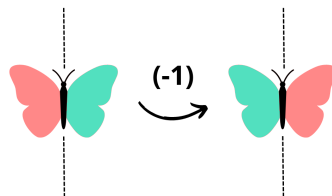


Figura 1.3: El grupo C_2 consta de la identidad y de la reflexión (simetría de espejo).

Ejemplo 1.1.4 (Espacio euclidiano n-dimensional). Todo espacio vectorial V es también un grupo, pues la **suma vectorial** es cerrada y asociativa en V , además de que V contiene al elemento identidad (neutro aditivo) y a los inversos aditivos.

En particular, consideremos el espacio euclidiano n-dimensional E^n sobre un campo \mathbb{K} :

i. Sean \vec{x}, \vec{y} vectores en E^n , con la forma:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vec{y} &= (y_1, y_2, \dots, y_n),\end{aligned}$$

donde x_1, \dots, x_n y y_1, \dots, y_n pertenecen al Campo \mathbb{K} . Entonces,

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{y} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (w_1, w_2, \dots, w_n) \in E^n,\end{aligned}$$

con $w_i := x_i + y_i \in \mathbb{K}$, para toda $i = 1, 2, \dots, n$.

\therefore La suma vectorial es cerrada en E^n .

Además,

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n) \\ &= (y_1, y_2, \dots, y_n) + (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \vec{y} + \vec{x}.\end{aligned}$$

\therefore La suma vectorial es conmutativa en E^n .

ii. Sea $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ otro vector en E^n . Entonces,

$$\begin{aligned}(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \dots, x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n) \\ &= \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}).\end{aligned}$$

\therefore La suma vectorial es asociativa en E^n .

iii. Tomemos $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0) \in E^n$. Entonces,

$$\vec{x} + \vec{0} = (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Por lo tanto, existe $\vec{0} \in E^n$ tal que $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$, para toda $\vec{x} \in E^n$.

$\therefore E^n$ posee un elemento identidad.

iv. Tomemos $\vec{x}' = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in E^n$. Entonces,

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{x}' &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, 0, \dots, 0) \\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $\vec{x} \in E^n$, existe $\vec{x}' = -\vec{x} \in E^n$ tal que $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.

$\therefore E^n$ cuenta con los elementos inversos.

$\therefore E^n$ es un grupo aditivo abeliano.

Aunque sea mucho más sencillo trabajar con grupos abelianos, la mayoría de los grupos que estudiaremos no lo son. Por ejemplo, la multiplicación matricial y la composición de funciones no son operaciones conmutativas, por lo que los grupos de matrices (grupo general lineal, grupo especial lineal, etc.) y los grupos de permutaciones o simetrías (S_n y D_n) no son abelianos.

En cuanto a los grupos de Lie, sólo algunos son abelianos, como el grupo de traslaciones en una dimensión, denotado por \mathcal{T}_1 , y el grupo de rotaciones en dos dimensiones, denotado por SO_2 . Esto se debe a que las operaciones de ambos grupos se dan como una suma de escalares, la cual es conmutativa.

Ejemplo 1.1.5 (Grupo de traslaciones continuas). El conjunto de traslaciones continuas en una dimensión, denotado por \mathcal{T}_1 , es un **grupo abeliano de Lie**, junto con la operación de composición de transformaciones [3].

Como todo grupo de Lie, \mathcal{T}_1 posee una estructura de variedad diferenciable, por lo que puede ser parametrizado por una variable continua $x \in \mathbb{C}$.

Demostraremos que \mathcal{T}_1 satisface los axiomas de grupo, asumiendo que está definido sobre \mathbb{C} (la demostración es equivalente en cualquier otro espacio unidimensional E^1).

Entonces, \mathcal{T}_1 consta de todas las funciones:

$$\begin{aligned}T_x : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto y + x, \quad \text{con } x \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

i. Si $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}T_{x_1}T_{x_2}(y) &= T_{x_1}(y + x_2) = y + x_2 + x_1 = T_{x_2+x_1}(y) \\ &\therefore T_{x_1}T_{x_2} \in \mathcal{T}_1.\end{aligned}$$

Además, $x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \implies T_{x_1}T_{x_2} = T_{x_2}T_{x_1}$, por lo que la composición de traslaciones es conmutativa.

ii. Si $x_3 \in \mathbb{C}$, entonces

$$T_{x_1}(T_{x_2}T_{x_3})(y) = T_{x_1}(y + x_3 + x_2) = y + x_3 + x_2 + x_1 = T_{x_1}T_{x_2}(y + x_3) = (T_{x_1}T_{x_2})T_{x_3}(y).$$

Por lo tanto, la composición de traslaciones es asociativa.

iii. Consideremos $0 \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$T_0(y) = y + 0 = 0 + y = y.$$

Por lo tanto, T_0 es la identidad de \mathcal{T}_1 .

iv. Consideremos x y su inverso aditivo $-x \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\begin{aligned} T_x T_{-x}(y) &= y - x + x = y = T_0(y) \\ T_{-x} T_x(y) &= y + x - x = y = T_0(y) \\ \implies T_{-x} &= T_x^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe un elemento inverso T_{-x} para cada $T_x \in \mathcal{T}_1$.

$\therefore \mathcal{T}_1$ es un grupo abeliano.

Los grupos de traslaciones son ampliamente utilizados en mecánica clásica y mecánica cuántica, para estudiar simetrías de un sistema ante traslaciones. El más importante es \mathcal{T}_3 , que consta de las traslaciones continuas en tres dimensiones, y se puede parametrizar con 3 variables $x, y, z \in \mathbb{C}$.

Más adelante, revisaremos otras propiedades del grupo de traslaciones continuas, así como de los principales grupos de Lie en física: $SO(2)$, $SO(3)$ y $SU(2)$.

Definición 1.1.5. Sea G un grupo finito, cuyos elementos se pueden enlistar como $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n$. Entonces, una **tabla de productos** de G es un arreglo cuadrado, con n filas y n columnas, cuya entrada (ij) -ésima es el producto $g_i * g_j$:

G	g_1	g_2	\dots	g_n
g_1	$g_1 * g_1$	$g_1 * g_2$	\dots	$g_1 * g_n$
g_2	$g_2 * g_1$	$g_2 * g_2$	\dots	$g_2 * g_n$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
g_n	$g_n * g_1$	$g_n * g_2$	\dots	$g_n * g_n$

La tabla de productos es una herramienta muy útil para visualizar los productos entre elementos de G .

***Nota:** En inglés, a la tabla de productos se le llama *multiplication table*; sin embargo, este nombre es impreciso, pues la operación desplegada en la tabla puede ser una suma, composición, multiplicación, etc.

Lema 1.1.3 (Lema de reordenamiento). También llamada **ley de cancelación**:

Sean $g_1, g_2, g_3 \in G$. Entonces,

$$g_1 g_3 = g_2 g_3 \vee g_3 g_1 = g_3 g_2 \implies g_1 = g_2. \tag{1.12}$$

Equivalentemente, si $g_1 \neq g_2$, entonces $g_1 g_3 \neq g_2 g_3$.

Aunque este lema parezca trivial, representa una de las propiedades más importantes de los grupos: el hecho de que cada elemento sea único y que la operación sea cerrada, implica que podemos operar a cada elemento del grupo con cierto $h \in G$, y obtendremos el mismo grupo G .

Así, si los elementos de G están ordenados o enlistados como $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots\}$, el resultado será $G = \{hg_1, hg_2, hg_3, \dots\} = \{g_i, g_j, g_k, \dots\}$, para ciertos i, j, k, \dots

En otras palabras, el lema significa que, si todos los elementos de G son ordenados en una secuencia y multiplicados por cierto $h \in G$, entonces la secuencia resultante es un **reordenamiento**

de la secuencia original, es decir, un reordenamiento del grupo.

El lema de reordenamiento se utiliza para demostrar otras propiedades importantes, así como reescribir al grupo de manera conveniente. También veremos que está directamente relacionado con los grupos de permutaciones, pues una permutación es una función que reordena los elementos de un conjunto.

Ejemplo 1.1.6. Consideremos las siguientes matrices 2×2 en \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & C &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ D &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & E &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Estas seis matrices, junto con la operación de **multiplicación matricial**, forman un **grupo**, al que denotaremos por \mathcal{G} [5].

Para demostrar que \mathcal{G} es un grupo, se deben calcular todos los productos entre las matrices, sus potencias y sus respectivos inversos. El resultado es que todos estos elementos pertenecen al grupo (cada operación devuelve alguna de las 6 matrices previas).

Desplegamos la tabla de productos de \mathcal{G} :

\mathcal{G}	$\mathbf{1}$	A	B	C	D	E
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	A	B	C	D	E
A	A	$\mathbf{1}$	D	E	B	C
B	B	E	$\mathbf{1}$	D	C	A
C	C	D	E	$\mathbf{1}$	A	B
D	D	C	A	B	E	$\mathbf{1}$
E	E	B	C	A	$\mathbf{1}$	D

Así, si enlistamos los elementos de \mathcal{G} en la forma:

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{1}, A, B, C, D, E\},$$

Entonces, al multiplicar por A , obtenemos el **reordenamiento**:

$$\mathcal{G} = \{A, \mathbf{1}, D, E, B, C\}.$$

Corolario 1.1.4 (Inverso de un producto). Sea G un grupo y sean $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$(g_1 g_2 \cdots g_n)^{-1} = g_n^{-1} \cdots g_2^{-1} g_1^{-1}. \tag{1.13}$$

Dem. Lo haremos por inducción; veamos que, para $n = 2$,

$$(g_1 g_2)(g_1 g_2)^{-1} = 1;$$

Pero

$$\begin{aligned} 1 &= g_1 g_1^{-1} \\ &= g_1 (1) g_1^{-1} \\ &= g_1 g_2 g_2^{-1} g_1^{-1} \\ &= (g_1 g_2) (g_2^{-1} g_1^{-1}), \end{aligned}$$

$$\therefore (g_1 g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1^{-1}.$$

Ahora, supongamos que $(g_1 g_2 \cdots g_n)^{-1} = g_n^{-1} \cdots g_2^{-1} g_1^{-1}$. Entonces,

$$(g_1 g_2 \cdots g_n) g_{n+1} [(g_1 g_2 \cdots g_n) g_{n+1}]^{-1} = 1;$$

Pero

$$\begin{aligned} 1 &= (g_1 g_2 \cdots g_n) (g_n^{-1} \cdots g_2^{-1} g_1^{-1}) \\ &= (g_1 g_2 \cdots g_n) 1 (g_n^{-1} \cdots g_2^{-1} g_1^{-1}) \\ &= (g_1 g_2 \cdots g_n) [g_{n+1} (g_{n+1})^{-1}] (g_n^{-1} \cdots g_2^{-1} g_1^{-1}) \\ &= (g_1 g_2 \cdots g_n g_{n+1}) (g_{n+1}^{-1} g_n^{-1} \cdots g_2^{-1} g_1^{-1}), \end{aligned}$$

$$\therefore (g_1 g_2 \cdots g_n g_{n+1})^{-1} = g_{n+1}^{-1} g_n^{-1} \cdots g_2^{-1} g_1^{-1},$$

Con lo que la ecuación (1.13) queda demostrada. ■

Definición 1.1.6. Llamamos **subgrupo** a un subconjunto S de G que satisface las siguientes propiedades:

$$\forall s \in S, \quad s^{-1} \in S. \tag{1.14}$$

$$\forall s, t \in S, \quad st \in S. \tag{1.15}$$

Indicamos que S es un subgrupo de G con la notación $S \leq G$.

Si G es un grupo aditivo, las ecuaciones (1.14) y (1.15) toman la forma:

$$\forall s \in S, \quad -s \in S.$$

$$\forall s, t \in S, \quad s + t \in S.$$

Notemos que todo subgrupo S es también un grupo, pues satisface la definición (1.1.2).

Para verificar que un subconjunto $S \subset G$ sea un Subgrupo, usaremos tanto la Definición (1.1.6) como el siguiente teorema:

Teorema 1.1.5. Un subconjunto $S \subset G$ es un subgrupo de G , si y sólo si:

$$1 \in S. \tag{1.16}$$

$$\forall s, t \in S, \quad st^{-1} \in S. \tag{1.17}$$

Dem. (\implies)

Supongamos que $S \leq G$. Entonces, para cualesquiera $s, t \in S$, tenemos que $s^{-1}, t^{-1}, st \in S$.

$$\implies ss^{-1} = 1 \in S \wedge st^{-1} \in S.$$

(\impliedby)

Ahora, supongamos que $1 \in S$ y $st^{-1} \in S$ para cualesquiera $s, t \in S$. Probaremos que S satisface las ecuaciones (1.14), (1.15):

Si $s^{-1} = 1s^{-1} \notin S$, entonces

$$s \notin S \vee 1 \notin S,$$

contradiciendo la Ecuación (1.17). Por lo tanto, $s^{-1} \in S$.

Además, si $t \in S$,

$$\begin{aligned} \implies s^{-1}t^{-1} &= (ts)^{-1} \in S \\ \implies ts &\in S, \end{aligned}$$

Usando el hecho de que el producto es cerrado en S y usando el Corolario (1.13).

$$\therefore S \leq G.$$

■

Si G es un grupo aditivo, las ecuaciones (1.16) y (1.17) toman la forma:

$$0 \in S. \tag{1.18}$$

$$\forall s, t \in S, s - t \in S. \tag{1.19}$$

Corolario 1.1.6. Si G es un grupo, entonces G y $\{1\}$ son siempre subgrupos de G .

Definición 1.1.7. Sea H un subgrupo de G . Si $H \neq G$ y $H \neq \{1\}$, entonces decimos que H es un **subgrupo propio** y lo denotamos como $H < G$.

Por otro lado, al subgrupo $\{1\}$ lo llamamos **subgrupo trivial**.

Proposición 1.1.7. La intersección de cualquier familia de subgrupos S_i de G , es también un subgrupo de G :

$$S_i \leq G \implies \bigcap_i S_i \leq G, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots \tag{1.20}$$

Con la intersección de los subgrupos S_i , nos referimos a los elementos que pertenecen simultáneamente a todos los S_i .

Notemos que esta intersección jamás será vacía, pues, para ser subgrupos, deben poseer a la identidad. Por lo tanto, la intersección de cualesquiera subgrupos será, como mínimo, la identidad, que efectivamente es un subgrupo de G .

Definición 1.1.8. Sea V un espacio vectorial de dimensión n . Entonces, llamamos **grupo general lineal** al conjunto de **transformaciones lineales invertibles** de V en sí mismo, y lo denotamos por $GL_n(V)$:

$$GL_n(V) = \{T : V \longrightarrow V \mid T \text{ es lineal e invertible.}\} \tag{1.21}$$

Si V está definido sobre el campo \mathbb{K} , entonces podemos elegir una base $\beta = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n\}$ de V , de modo que (x_1, x_2, \dots, x_n) sean las coordenadas de cada $v \in V$ respecto de β . Asimismo, cada transformación $T \in GL_n(V)$ puede representarse como una **matriz no singular** de tamaño $n \times n$ respecto de esta base.

El conjunto de matrices no singulares de tamaño $n \times n$, con entradas en \mathbb{K} , también forma un grupo, al que denotaremos por $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Tanto $GL_n(V)$ como $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ son llamados *grupo general lineal* y se les trata como iguales.

Usualmente, denotaremos a las matrices en $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ por letras mayúsculas cursivas: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M}, \dots$

Veamos que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ forma un grupo, bajo la operación de multiplicación matricial:

i. Sean $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} &\implies \det(A) \neq 0 \neq \det(B) \\ &\implies \det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0, \end{aligned}$$

usando propiedades del Determinante.

Además, AB también es de tamaño $n \times n$ y tiene entradas en \mathbb{K} :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \in \mathbb{K},$$

\therefore El producto es cerrado en $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

ii. Sea $C \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \implies [(AB)C]_{ij} &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl} \right) c_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl}c_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{l=1}^n b_{kl}c_{lj} \right) \\ &= [A(BC)]_{ij}. \end{aligned}$$

\therefore El producto es asociativo en $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

iii. Consideremos la matriz identidad $\mathbb{1}_{n \times n} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, cuyas entradas son $(\mathbb{1})_{ij} = \delta_{ij}$. Entonces,

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}A)_{ij} &= \sum_{k=1}^n \delta_{ik}a_{kj} = a_{ij} = (A)_{ij}. \\ (A\mathbb{1})_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{kj}\delta_{ik} = a_{ij} = (A)_{ij}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ consta de un elemento identidad $\mathbb{1}_{n \times n}$ tal que $\mathbb{1}A = A\mathbb{1} = A$, para toda $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

iv. Como $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ consta de matrices no singulares, todas ellas son invertibles. Además,

$$\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1} \neq 0, \quad \forall A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Para cualquier matriz cuadrada, se puede obtener A^{-1} con la Ecuación (1.8). Esta matriz también será de tamaño $n \times n$, con entradas en \mathbb{K} .

Por lo tanto, para cada $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, existe $A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$.

$\therefore \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ es un grupo, bajo la operación de **multiplicación matricial**.

***Nota:** Cabe recalcar que las transformaciones deben ser invertibles y operarse de manera asociativa para pertenecer a un grupo; es por ello que el grupo general lineal consta de transformaciones invertibles o biyecciones de un espacio en sí mismo.

Enseguida definiremos algunos de los subgrupos más importantes del grupo general lineal, que igualmente pueden verse como grupos de transformaciones lineales o como grupos de matrices.

Proposición 1.1.8. El conjunto de matrices singulares de tamaño $n \times n$ con entradas sobre \mathbb{K} , cuyo determinante es igual a 1, es un **subgrupo** de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, al que llamamos **grupo especial lineal** y denotamos por $\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$.

Nombramos de la misma manera al conjunto de transformaciones lineales en $GL_n(V)$ cuyas matrices asociadas tienen determinante igual a 1, y lo denotamos por $SL_n(V)$. Entonces,

$$SL_n(\mathbb{K}) \leq GL_n(\mathbb{K}) \iff \mathcal{SL}_n(\mathbb{K}) \leq \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}). \quad (1.22)$$

Dem. Probaremos que $\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$ es un **subgrupo** de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, aplicando el Teorema 1.1.5:

- i. Sabemos que $\det(\mathbb{1}) = 1$, por lo que $\mathbb{1} \in \mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$.
- ii. Sean $X, Y \in \mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$. Entonces, X y Y son invertibles, y sus inversas pertenecen a $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$; más aún,

$$\begin{aligned} \det(X^{-1}) &= [\det(X)]^{-1} = 1 \\ \det(Y^{-1}) &= [\det(Y)]^{-1} = 1 \\ \implies \det(XY^{-1}) &= \det(X)\det(Y^{-1}) = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Además, si \tilde{y}_{ij} son las entradas de Y^{-1} ,

$$\begin{aligned} \implies (XY^{-1})_{ij} &= \sum_{k=1}^n x_{ik}\tilde{y}_{kj} \in \mathbb{K} \\ \implies XY^{-1} &\in \mathcal{SL}_n(\mathbb{K}) \\ \therefore \mathcal{SL}_n(\mathbb{K}) &\leq \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

■

Definición 1.1.9.

- i. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal sobre un espacio normado. Entonces, decimos que T es una **isometría** si y sólo si preserva la distancia, es decir:

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in V. \quad (1.23)$$

- ii. Sea $S : V \rightarrow V$ una isometría, donde V es un espacio real con producto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Entonces, decimos que S es una **transformación ortogonal** si y sólo si preserva el producto interno, es decir:

$$\langle S(x) | S(y) \rangle = \langle x | y \rangle, \quad \forall x, y \in V. \quad (1.24)$$

Se puede probar que la inversa de una transformación ortogonal coincide con su traspuesta, es decir:

$$S^{-1} = S^T.$$

Teorema 1.1.9.

- i. El conjunto de todas las isometrías biyectivas de un espacio normado en sí mismo es un Grupo.

En particular, el conjunto de isometrías biyectivas $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es llamado **grupo de isometrías real** y denotado por $M_n(\mathbb{R})$. Además, $M_n(\mathbb{R})$ es un subgrupo del grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R})$.

- ii. El conjunto de todas las isometrías biyectivas $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que fijan el origen es llamado **grupo ortogonal real** y denotado por $O_n(\mathbb{R})$; también este es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$.

Dem.

- i. Veamos que la transformación identidad es una isometría. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{1}(x) &= x; \\ \implies \|x - y\| &= \|\mathbf{1}(x) - \mathbf{1}(y)\| \\ \implies \mathbf{1} &\in M_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Además, como $M_n(\mathbb{R})$ es un conjunto de transformaciones biyectivas, toda $B \in M_n(\mathbb{R})$ es invertible. Entonces,

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|\mathbf{1}(x) - \mathbf{1}(y)\| \\ &= \|B(B^{-1}(x)) - B(B^{-1}(y))\| \\ &= \|B^{-1}(x) - B^{-1}(y)\| \\ \implies B^{-1} &\in M_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $M_n(\mathbb{R})$ cuenta con todos sus elementos inversos. Finalmente, tomando $A \in M_n(\mathbb{R})$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \|A(B^{-1}(x)) - A(B^{-1}(y))\| &= \|B^{-1}(x) - B^{-1}(y)\| = \|x - y\| \\ \implies AB^{-1} &\in M_n(\mathbb{R}). \\ \therefore M_n(\mathbb{R}) &\leq GL_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

- ii. Ya probamos que $\mathbf{1}$ es una isometría. Además, veamos que $\mathbf{1}(0) = 0$, por lo que fija el origen.

$$\implies \mathbf{1} \in O_n(\mathbb{R}).$$

Ahora, sean $A, B \in O_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \implies \|B(x - y)\| &= \|B(x) - B(y)\| = \|x - y\| \\ \implies \|B^{-1}B(x - y)\| &= \|B^{-1}(x - y)\| \\ \iff \|\mathbf{1}(x - y)\| &= \|x - y\| = \|B^{-1}(x - y)\|. \end{aligned}$$

Además, $B(0) = 0$, por lo que:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{1}(0) = B^{-1}B(0) = B^{-1}(0). \\ \implies B^{-1} &\in O_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ahora, consideremos la transformación $AB^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \|AB^{-1}(x-y)\| &= \|A[B^{-1}(x) - B^{-1}(y)]\| \\ &= \|A(B^{-1}(x)) - A(B^{-1}(y))\| \\ &= \|B^{-1}(x) - B^{-1}(y)\| \\ &= \|x-y\|. \end{aligned}$$

$\implies AB^{-1}$ es una isometría.

Además, $A(B^{-1}(0)) = A(0) = 0$.

$\implies AB^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

$$\therefore O_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R}).$$

Esto implica que $O_n(\mathbb{R})$ es por sí mismo un grupo, bajo la operación de composición. ■

***Nota:** Más adelante veremos que la relación entre el grupo de transformaciones lineales invertibles de V a V o grupo general lineal $GL_n(V)$ y el grupo de matrices no singulares $n \times n$, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, es un **isomorfismo**; esto significa que son idénticos en estructura.

De la misma manera, el grupo ortogonal real $O_n(\mathbb{R})$ es isomorfo al grupo multiplicativo de **matrices ortogonales** de tamaño $n \times n$, al que denotaremos por $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

El isomorfismo entre ambos grupos es precisamente la representación matricial de cada transformación $A \in O_n(\mathbb{R})$, respecto de la base canónica de \mathbb{R}^n , $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n\}$.

El último grupo de transformaciones lineales que definiremos en esta sección es el grupo que consta de todas las transformaciones unitarias sobre un espacio V . Las transformaciones unitarias se pueden considerar análogas a las transformaciones ortogonales, pero definidas sobre espacios complejos.

Definición 1.1.10. Sea $A : V \longrightarrow W$ una transformación lineal entre espacios complejos con producto interno definido. Entonces, decimos que A es una **transformación unitaria** si y sólo si A es biyectiva y preserva el producto interno, es decir:

$$\langle A(x)|A(y) \rangle_W = \langle x|y \rangle_V, \quad \forall x, y \in V. \quad (1.25)$$

Se puede probar que la inversa de una transformación unitaria coincide con su adjunta, es decir:

$$A^{-1} = A^\dagger = (A^T)^*.$$

Proposición 1.1.10. Sea V un espacio de dimensión n . Entonces, el conjunto de transformaciones unitarias sobre V es un **subgrupo** del grupo general lineal $GL_n(V)$; lo llamamos **grupo unitario** y lo denotamos por $U_n(V)$:

$$U_n(V) = \{A : V \longrightarrow V \mid A^\dagger = A^{-1}\} \leq GL_n(V). \quad (1.26)$$

Cada transformación unitaria se puede representar mediante una matriz, seleccionando una base de V . Por lo tanto, $U_n(V)$ es **isomorfo** a $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, el **grupo de matrices unitarias** $n \times n$.

Es fácil ver que el producto de transformaciones unitarias es cerrado y asociativo, además de que la identidad y las transformaciones inversas son también unitarias.

Definición 1.1.11. Sea G un grupo y $g \in G$. Entonces, llamamos **subgrupo cíclico generado por g** al conjunto de potencias de g , y se denota por $\langle g \rangle$:

$$\langle g \rangle = \{1, g^1, g^2, g^3, \dots\}. \quad (1.27)$$

Asimismo, G es un **grupo cíclico** si existe $g \in G$ tal que $G = \langle g \rangle$.

En cuanto a los **grupos cíclicos aditivos**, son generados mediante la suma iterada, es decir, la multiplicación:

$$\langle g \rangle = \{0, g, 2g, 3g, \dots\}. \quad (1.28)$$

Notemos que, para satisfacer las propiedades de grupo, se requiere que para cada g^i exista g^j , tal que $(g^i)^{-1} = g^{-i} = g^j$. Es decir, todos los inversos pertenecen a $\langle g \rangle$.

Los elementos inversos del grupo cíclico aditivo son $\{0, -g, -2g, -3g, \dots\}$.

Inicialmente, podríamos pensar que los grupos cíclicos son infinitos, pues es posible operar un elemento consigo mismo una infinidad de veces. Sin embargo, la mayoría de los grupos cíclicos son **finitos**: veremos que, a partir de cierto exponente g^m , los elementos se repiten; es decir, existe $j < m$ tal que $g^m = g^j$, por lo que $g^{m+1} = g^{j+1}$, $g^{m+2} = g^{j+2}$, etc. ¡Pero esto implica que $g^{m-j} = g^n = 1$!

En este caso, al natural $n > 1$ tal que $g^n = 1$, lo llamamos *exponente* del grupo, como veremos en la Definición (1.1.13). Siempre que un grupo sea cíclico y finito, tendrá un exponente.

Definición 1.1.12. Sea G un grupo. Entonces, llamamos **orden de G** a la cardinalidad de G , es decir, al número de elementos de G , y lo denotamos por $|G|$.

De igual manera, llamamos **orden del elemento g** a la cardinalidad de $\langle g \rangle$.

Definición 1.1.13. Se dice que un grupo G tiene un **exponente n** si $g^n = 1$ para toda $g \in G$. Si G es aditivo, el exponente es el natural n tal que $ng = 0$ para toda $g \in G$.

De las Definiciones (1.1.11) y (1.1.13), se sigue que todo grupo cíclico y finito $\langle g \rangle$, tiene un exponente. Además, el orden de un grupo cíclico coincide con su exponente: $|\langle g \rangle| = n \iff g^n = 1 \forall g \in G$.

Ejemplo 1.1.7 (Raíces de la unidad). Otra manera de pensar en los **grupos cíclicos**, es como las n raíces complejas de la unidad, introducidas en la teoría de números complejos.

Si $\omega = e^{i2\pi/n}$ es la n -ésima raíz de la unidad, entonces n es el mínimo natural tal que $\omega^n = 1$:

$$\begin{aligned} \omega^n &= (e^{i2\pi/n})^n \\ &= e^{i2\pi} \\ &= \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Entonces, $\{1, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$, junto con la multiplicación escalar, son un **grupo cíclico de orden n** [5]:

$$\langle \omega \rangle = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\} = \{1, e^{i2\pi/n}, e^{i4\pi/n}, \dots, e^{i2(n-1)\pi/n}\}.$$

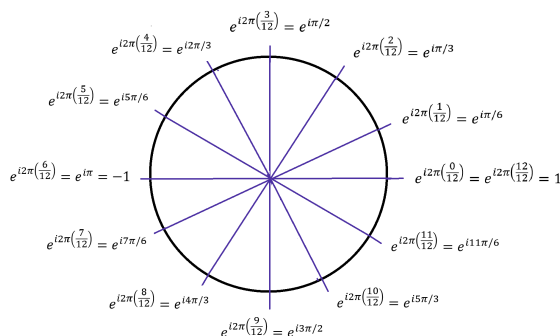


Figura 1.4: Raíces de la unidad, con $n = 12$.

Definición 1.1.14. Sea X un subconjunto de G ; entonces, existe un mínimo subgrupo $H \leq G$ que también contiene a X , es decir, el mínimo subgrupo tal que $X \subset H$.

El subgrupo H es llamado **subgrupo generado por X** y se denota por $\langle X \rangle$. También se dice que *el conjunto X genera al grupo $\langle X \rangle$* .

En particular, si X consta de un sólo elemento g , entonces $\langle X \rangle$ es cíclico:

$$\langle X \rangle = \langle g \rangle.$$

Notemos que X puede ser un subconjunto cualquiera de G , mientras que el subgrupo $\langle X \rangle$ debe contener a todas las potencias y productos entre elementos de X , así como sus respectivos inversos y el elemento identidad.

Si el subconjunto en cuestión X ya satisface la Definición (1.1.6), entonces $\langle X \rangle = X$ (pues es en sí mismo un subgrupo).

Ejemplo 1.1.8 (Grupo cíclico de 3 elementos). Consideremos tres elementos $C_3 = \{a, b, c\}$, que forman un grupo bajo cierta operación.

Al igual que con C_2 , exigimos que $1 \in C_3$ y que, para toda $g \in C_3$, $g^{-1} \in C_3$. Entonces,

$$C_3 = \{1, g, g^{-1}\}.$$

También requerimos que todas las potencias de g pertenezcan a C_3 , por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = 1$. En este caso, $n = 3$:

$$g^3 = (g^{-1})^3 = 1. \tag{1.29}$$

Si la Ecuación (1.29) no se cumpliera, entonces C_3 tendría más elementos o se contradiría la unicidad de la identidad.

De acuerdo con el Ejemplo (1.1.7), C_3 puede ser representado como:

$$C_3 = \{1, e^{i2\pi/3}, e^{-i2\pi/3}\}, \tag{1.30}$$

con la multiplicación de números complejos como operación del grupo.

Efectivamente, C_3 tiene un **exponente** $n = 3$:

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1. \\ (e^{i2\pi/3})^3 &= e^{i6\pi/3} = e^{i2\pi} = 1. \\ (e^{-i2\pi/3})^3 &= e^{-i6\pi/3} = e^{-i2\pi} = 1. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} (e^{i2\pi/3})^{3k} &= e^{i2k\pi} = 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \\ \therefore C_3 &= \langle e^{i2\pi/3} \rangle. \end{aligned}$$

Gráficamente, podemos ver al grupo C_3 como las **rotaciones** de un **triángulo equilátero**:

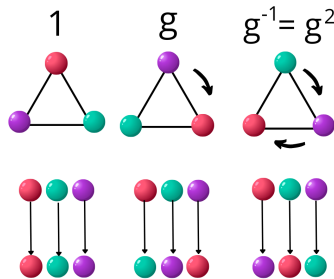


Figura 1.5: Representación de C_3 [4].

Cada elemento de C_3 es una *transformación de simetría* sobre el triángulo. La identidad fija los vértices, $e^{i2\pi/3}$ aplica una rotación de $2\pi/3$ radianes, y $e^{-i2\pi/3}$ aplica una rotación de $4\pi/3$ radianes, equivalente a $-2\pi/3$ radianes.

Más adelante, estudiaremos el grupo más general D_3 , llamado **grupo diedral** del triángulo; éste incluye también las reflexiones del equilátero respecto a sus bisectrices, por lo que se le llama *grupo de simetrías del triángulo*. Más aún, C_3 es un subgrupo normal de D_3 , concepto que se verá en la siguiente sección.

Una de las aplicaciones de C_3 se da en la química: la molécula de ácido bórico, $B(OH)_3$, es **invariante** (conserva su forma) ante rotaciones de $2\pi/3$ radianes:

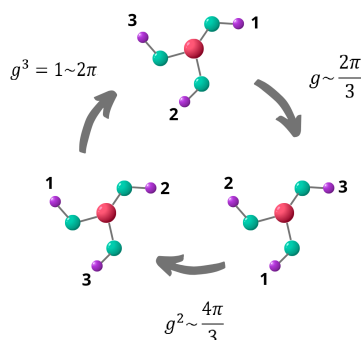


Figura 1.6: Simetrías de la molécula de ácido bórico [4].

Notemos que la molécula no es invariante ante reflexiones (rotaciones de π *radianes* hacia adentro del papel), por lo que sólo tiene tres transformaciones de simetría.

1.2. clases laterales, Subgrupos Normales y Grupos Cocientes

Los conceptos que revisaremos en esta sección nos permitirán relacionar grupos entre sí, inducir particiones y trabajar con copias o subconjuntos del grupo, seleccionándolos de acuerdo con las características que nos interesen.

En particular, las clases laterales, también llamadas *cosets*, nos permiten partir un grupo en subconjuntos disjuntos; en cuanto a los subgrupos normales, sus propiedades de invarianza resultan útiles para definir nuevos grupos, llamados grupos cocientes, con los que se contemplan las características del grupo a nivel general y no particular.

Definición 1.2.1. Sea $S \leq G$ y $t \in G$. Entonces, llamamos **clase lateral derecha** St al subconjunto de G dado por:

$$St = \{st \mid s \in S\} \quad (1.31)$$

Igualmente, llamamos **clase lateral izquierda** al subconjunto de G dado por:

$$tS = \{ts \mid s \in S\} \quad (1.32)$$

Se dice que el elemento $t \in G$ es una **representante** de las clases laterales St , tS .

Notemos que la representante de un clase lateral **no** es única: cualquier otro elemento $v \in St$

puede fungir como representante, haciendo un reordenamiento:

$$\begin{aligned} St &= \{1t, s_2t, s_3t, \dots\} \\ &= \{1t(t^{-1}v), s_2t(t^{-1}v), s_3t(t^{-1}v), \dots\} \\ &= \{1v, s_2v, s_3v, \dots\} = Sv. \end{aligned}$$

***Nota:** En inglés, a las clases laterales se les llama **cosets**, y este es el término más frecuente en la bibliografía; sin embargo, en este texto usaremos el término en español.

Es necesario que S sea un **subgrupo** de G para poder definir las clases laterales $\{St \mid t \in G\}$. Sin embargo, las clases laterales no son subgrupos, sino subconjuntos de G : el único clase lateral que es también un subgrupo es $S1 = S$.

Esto se debe a que, al operar todos los elementos de S con cierto $t \neq 1$, obtenemos t en vez de la identidad y al resto de elementos st en vez de s ; por lo tanto, las clases laterales resultantes no necesariamente poseen al elemento identidad ni a los inversos $t^{-1}s^{-1}$.

Para ilustrar esta Definición, consideremos las clases laterales de un importante grupo aditivo:

Ejemplo 1.2.1 (Línea recta en \mathbb{R}^2). El conjunto de vectores en \mathbb{R}^2 , junto con la operación de suma vectorial, forma un **grupo aditivo abeliano**, al que denotaremos por $(\mathbb{R}^2, +)$.

Consideremos una recta $\ell \in \mathbb{R}^2$ que atraviesa el origen [1]:

$$\ell = \{r(x_0, y_0) \mid r \in \mathbb{R}\}, \text{ con } (x_0, y_0) \neq \vec{0}. \quad (1.33)$$

Es decir, ℓ es el conjunto de múltiplos escalares de un vector no nulo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Primero, veamos que ℓ es un **subgrupo propio** de $(\mathbb{R}^2, +)$:

i. Tomemos $0 \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$0(x_0, y_0) = (0, 0) = \vec{0} \in \ell,$$

por lo que ℓ cuenta con un elemento identidad.

ii. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ell$. Entonces, existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= r_1(x_0, y_0) \\ \vec{v}_2 &= r_2(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Entonces, $-\vec{v}_2 = -r_2(x_0, y_0) \in \ell$, pues $-r_2 \in \mathbb{R}$, y $\vec{v}_1 + (-\vec{v}_2) = r_1(x_0, y_0) - r_2(x_0, y_0) = \vec{0}$.

Más aún,

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2) &= r_1(x_0, y_0) - r_2(x_0, y_0) \\ &= (r_1 - r_2)(x_0, y_0) \\ &= R(x_0, y_0), \end{aligned}$$

con $R := r_1 - r_2 \in \mathbb{R}$.

$$\therefore \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2) \in \ell$$

$$\therefore \ell \leq (\mathbb{R}^2, +).$$

Que $\ell < (\mathbb{R}^2, +)$ se sigue del hecho de que $\ell \neq \mathbb{R}^2$ y $\ell \neq \{\vec{0}\}$.

Ahora que sabemos que ℓ es un subgrupo de $(\mathbb{R}^2, +)$, podemos encontrar sus clases laterales derechos $\ell + \vec{g}$, para cada $\vec{g} \in (\mathbb{R}^2, +)$:

$$\ell + \vec{g} = \{\vec{v} + \vec{g} \mid \vec{v} \in \ell\}. \tag{1.34}$$

- Si $\vec{g} \in \ell$, entonces el clase lateral $\ell + \vec{g}$ coincidirá con ℓ .

Habrán tantas clases laterales $\ell + \vec{g} \neq \ell$, como vectores $\vec{g} \in \mathbb{R}^2$ que no pertenezcan a la recta ℓ .

Como $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo infinito, la cantidad de clases laterales $\ell + \vec{g}$ también será infinita.

- Cada clase lateral de ℓ en $(\mathbb{R}^2, +)$ es una **recta paralela** a ℓ , pues desplaza a todos los vectores de ℓ a una distancia $\|r(x_0, y_0) - \vec{g}\|$:

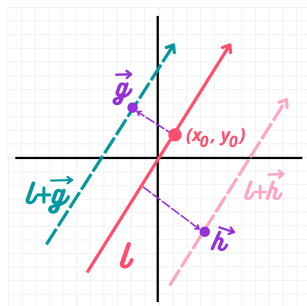


Figura 1.7: clases laterales de una línea recta ℓ en el grupo aditivo de \mathbb{R}^2 .

Entonces, el conjunto de clases laterales de ℓ barre todo el espacio \mathbb{R}^2 , por lo que el grupo $(\mathbb{R}^2, +)$ coincide con la unión de sus clases laterales:

$$(\mathbb{R}^2, +) = \bigcup_i (\ell + \vec{g}_i),$$

Donde el índice corre sobre todos los elementos $\vec{g}_i \in \mathbb{R}^2$.

Además, todas las clases laterales son distintas entre sí, pues desplazan a ℓ a lugares diferentes, y no tienen ningún vector en común, pues son paralelas (no se intersectan en ningún punto).

El hecho de que G coincida con la unión de sus clases laterales y que éstos sean disjuntos, es una propiedad general de los grupos, como se verá en el Teorema (1.2.2).

- Ninguno de las clases laterales de ℓ en $(\mathbb{R}^2, +)$, a excepción de $\ell + \vec{0} = \ell$, es un subgrupo de $(\mathbb{R}^2, +)$, puesto que no poseen al elemento identidad $\vec{0}$.

Notemos que, si G es un grupo abeliano, entonces sus clases laterales izquierdos y derechos serán iguales: $St = tS$. Así, en este ejemplo, tenemos que $\ell + \vec{g} = \vec{g} + \ell$ para toda $\vec{g} \in \mathbb{R}^2$.

Ahora, establezcamos bajo qué condiciones dos clases laterales son iguales:

Lema 1.2.1. Sean $S \leq G$, $g, h \in G$. Entonces, la igualdad de clases laterales se establece como:

$$Sg = Sh \vee gS = hS \iff gh^{-1} \in S. \quad (1.35)$$

Dem. (\implies) Supongamos que $Sg = Sh$, con Sg, Sh clases laterales de S en G , y recordemos que:

$$\begin{aligned} Sg &= \{sg \mid s \in S\} \\ Sh &= \{sh \mid s \in S\} \end{aligned}$$

Con $g, h \in G$. Por tanto,

$$\begin{aligned} Sg &= Sh \\ \implies Sg &\subset Sh \wedge Sh \subset Sg. \end{aligned}$$

Entonces, todo elemento $sg \in Sg$ también pertenece a Sh ; esto a su vez implica que existe $\sigma \in S$ tal que $sg = \sigma h$.

Tomando en cuenta que el producto es cerrado en S ,

$$\begin{aligned} sgh^{-1} &= \sigma hh^{-1} = \sigma \in S \\ \therefore gh^{-1} &\in S. \end{aligned}$$

(\impliedby) Ahora, supongamos que $gh^{-1} \in S$. Esto implica que $g, h \in S$, pues el producto es cerrado en S .

Considerando $s \in S$ arbitrario:

$$\begin{aligned} sg, sh &\in S \\ \implies sg &\in Sh \wedge sh \in Sg \\ \implies Sg &\subset Sh \wedge Sh \subset Sg, \end{aligned}$$

donde hemos usado el Lema (1.1.3): los productos sg representan un **reordenamiento** de los elementos $s \in S$, por lo que cualquier sg pertenece a Sh , así como cualquier sh pertenece a Sg .

$$\therefore Sg = Sh. \quad \blacksquare$$

Antes de enunciar las demás propiedades de las clases laterales, recordemos uno de los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos:

Definición 1.2.2. Sea X un conjunto cualquiera. Entonces, la colección $P := \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ es una **partición** de X si y sólo si satisface las siguientes condiciones: [23]

i. Los elementos de P son subconjuntos de X :

$$X_i \subset X, \forall X_i \in P.$$

ii. P no posee al conjunto vacío:

$$\emptyset \notin P.$$

iii. P cubre a X , es decir,

$$\bigcup_{X_i \in P} X_i = X.$$

iv. Los elementos de P son disjuntos o mutuamente excluyentes:

$$X_i \cap X_j = \emptyset, \forall X_i, X_j \in P.$$

Teorema 1.2.2. Sea $S \leq G$. Entonces, dos clases laterales de S en G sólo pueden ser idénticos o disjuntos. Es decir,

$$Sg = Sh \vee Sg \cap Sh = \emptyset. \tag{1.36}$$

Por lo tanto, las clases laterales de un subgrupo S inducen una partición en el grupo G .

Dem. Sea $S \leq G$. Por ahora, nos limitaremos al caso en que S es finito: $S = \{1, s_1, s_2, \dots, s_m\}$.

Ahora, sean Sg y Sh clases laterales de S en G , y supongamos que existen $s_i g \in Sg$, $s_j h \in Sh$, tales que $s_i g = s_j h$.

$$\begin{aligned} \implies s_i^{-1} s_i g &= s_i^{-1} s_j h \\ \iff gh^{-1} &= s_i^{-1} s_j h h^{-1} \\ \iff gh^{-1} &= s_i^{-1} s_j \in S, \end{aligned}$$

por el Teorema (1.1.5).

Pero esto implica que también $g, h \in S$, por lo que podemos reescribir a S como:

$$\begin{aligned} S &= \{g, s_1 g, s_2 g, \dots, s_m g\} = Sg \\ S &= \{h, s_1 h, s_2 h, \dots, s_m h\} = Sh, \end{aligned}$$

usando el Lema de Reordenamiento.

Entonces, $S = Sg = Sh$, por lo que las clases laterales Sg, Sh son idénticos.

La única forma de que $Sg \neq Sh$, es que no exista ningún par $s_i, s_j \in S$ tales que $s_i g = s_j h$; es decir, que $Sg \cap Sh = \emptyset$.

\therefore las clases laterales de S en G inducen una partición en G .

■

Las siguientes imágenes nos permiten visualizar la partición de un grupo G en sus clases laterales Hg :

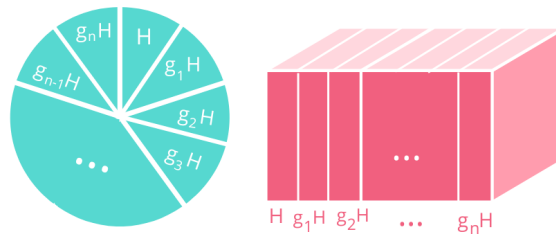


Figura 1.8: Partición de G en sus clases laterales [4].

Notemos que cada clase lateral tiene la misma cardinalidad, es decir, la misma cantidad de elementos, y ésta debe coincidir con el orden de S . Si S consta de m elementos, entonces habrá m

productos de tipo st en cada clase lateral St :

$$\begin{aligned} S &= \{1, s_1, s_2, s_3, \dots\} \\ St &= \{t, s_1t, s_2t, s_3t, \dots\} \\ Su &= \{u, s_1u, s_2u, s_3u, \dots\} \\ &\dots \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.2 (Clases de congruencia). Consideremos el grupo aditivo de enteros, $(\mathbb{Z}, +)$ y el subconjunto $S \subset \mathbb{Z}$ que consta de todos los múltiplos de cierto entero n :

$$S = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Veamos que S es un subgrupo propio de $(\mathbb{Z}, +)$:

- i. Tomando $k = 0$, tenemos $0 \cdot n = 0 \in S$.
- ii. Sean $a, b \in S$. Entonces, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $a = k_1n$ y $b = k_2n$. Entonces,

$$\begin{aligned} -a &= -k_1n \in S, \quad -b = -k_2n \in S. \\ \implies a - b &= (k_1 - k_2)n = \hat{k}n \in S, \end{aligned}$$

con $\hat{k} := k_1 - k_2$.

$$\therefore S < (\mathbb{Z}, +).$$

Más aún, S es un **subgrupo cíclico** de $(\mathbb{Z}, +)$, pues

$$S = \{\dots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \dots\} = \langle n \rangle.$$

Entonces, podemos partir $(\mathbb{Z}, +)$ en clases laterales de $\langle n \rangle$, que son de la forma:

$$\langle n \rangle + a = \{kn + a \mid kn \in \langle n \rangle\},$$

para cada $a \in \mathbb{Z}$. Pero $\langle n \rangle + a$ coincide con la **clase de congruencia módulo n** de a :

$$\langle n \rangle + a = [a]_n = \{kn + a \mid k \in \mathbb{Z}\} \tag{1.37}$$

y, como vimos en el Ejemplo (1.1.1),

$$\mathbb{Z}_n = \{[a]_n \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{\langle n \rangle + a \mid a \in \mathbb{Z}\}.$$

Ahora, probemos que dichas clases laterales inducen una partición en \mathbb{Z} :

- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y supongamos que existe $x \in [a]_n \cap [b]_n$. Entonces, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{aligned} x &= k_1n + a = k_2n + b. \\ \implies b &= (k_1 - k_2)n + a \\ \implies b &\in [a]_n \\ \implies b \pm n, b \pm 2n, b \pm 3n, \dots &\in [a]_n \\ \implies [b]_n &\subset [a]_n. \end{aligned}$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned} a &= (k_2 - k_1)n + b \in [b]_n. \\ \implies a \pm n, a \pm 2n, a \pm 3n, \dots &\in [b]_n \\ \implies [a]_n &\subset [b]_n \\ \implies [a]_n &= [b]_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la única manera de que $[a]_n \cap [b]_n \neq \emptyset$ es que $[a]_n = [b]_n$.

- Por el *algoritmo de la división*, todo entero z pertenece a alguna clase de congruencia módulo n :

$$z = \alpha n + r \implies z \in [r]_n.$$

Donde α y r son enteros llamados *cociente* y *residuo*, respectivamente [16].

Así, la unión de todas las clases de congruencia módulo n debe resultar en todo \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \bigcup_i [a_i]_n \quad \wedge \quad \bigcap_i [a_i]_n = \emptyset.$$

Por lo tanto, las clases laterales $\{\langle n \rangle + a : a \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}_n$ inducen una partición en \mathbb{Z} .

Proposición 1.2.3. Sea $S \leq G$. Entonces, el número de clases laterales derechas de S en G es igual al número de clases laterales izquierdas de S en G .

Esto se puede probar estableciendo una biyección entre las clases laterales derechas y las clases laterales izquierdas, que asigne a cada $sg \in Sg$ el elemento $gs \in gS$.

Definición 1.2.3. Sea $S \leq G$. Entonces, llamamos **índice** de S en G al número de clases laterales derechas (o izquierdas) de S en G , es decir, el número de subconjuntos St con $t \in G$, y lo denotamos por $[G : S]$.

Es decir, el índice de un subgrupo indica en cuántos subconjuntos parte al grupo. Con este concepto, podemos formular el Teorema de Lagrange, que es uno de los pilares de la teoría de grupos:

Teorema 1.2.4 (Teorema de Lagrange). Si G es un grupo finito y $S \leq G$, entonces $|S|$ es un divisor de $|G|$ y

$$[G : S] = \frac{|G|}{|S|}. \tag{1.38}$$

Dem. Sea G finito y $S \leq G$. Entonces, G puede ser partido en n clases laterales Sg_1, Sg_2, \dots, Sg_n , con $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$ y $n \in \mathbb{N}$.

Tomando en cuenta que las clases laterales $\{Sg_i\}$ son una partición de G , tenemos:

$$G = \bigcup_{i=1}^n Sg_i \implies |G| = \sum_{i=1}^n |Sg_i|.$$

Ahora, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, definimos la función:

$$\begin{aligned} f : S &\longrightarrow Sg_i \\ s &\longmapsto sg_i \end{aligned}$$

- Veamos que f es inyectiva:

Si existen $s, t \in S$ tales que $f(s) = f(t)$,

$$\implies sg_i = tg_i, \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\iff sg_i(g_i)^{-1} = tg_i(g_i)^{-1}$$

$$\iff s = t.$$

- Ahora, veamos que f es sobreyectiva:

Sea $\sigma g_i \in Sg_i$ arbitrario. Entonces, existe $\sigma \in S$ tal que $f(\sigma) = \sigma g_i$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Por lo tanto, f es **biyectiva**. Esto implica que el dominio de f tiene la misma cantidad de elementos que su imagen, es decir:

$$|S| = |Sg_i|, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\implies |G| = \sum_{i=1}^n |S| = n|S|$$

Pero hay n clases laterales de S en G , por lo que $[G : S] = n$.

$$\therefore [G : S] = n = \frac{|G|}{|S|}.$$

■

El Teorema de Lagrange indica que podemos encontrar la cantidad de elementos de un grupo G , si conocemos la cantidad de clases laterales de G en su subgrupo H y la cantidad de elementos de H . Por ejemplo:

Si $|G| = 10$ y $|H| = 5$, entonces existen sólo dos clases laterales de H en G :

- $H1$: el subconjunto de cinco elementos que coincide con H .
- Hg : el subconjunto formado por los cinco elementos $hg \notin H$, es decir, los elementos de H operados con cierta $g \notin H$.

El teorema también habla de la simetría subyacente en los grupos finitos: si G tiene diez elementos, es imposible hallar un subgrupo S cuyo orden sea primo relativo del diez. Es decir, los únicos subgrupos permitidos tienen cinco, dos o un elemento.

Corolario 1.2.5. Si p es un número primo y $|G| = p$, entonces G es un grupo cíclico.

Dem. Consideremos $g \in G$ distinto de la identidad. Entonces, el grupo cíclico $\langle g \rangle$ es un subgrupo de G y consta de más de 1 elemento, pues $1, g \in \langle g \rangle$:

$$\langle g \rangle \leq G, \quad |\langle g \rangle| > 1.$$

Por el Teorema de Lagrange, $|\langle g \rangle|$ divide a $|G| = p$, pero los únicos divisores de un número primo son ± 1 y $\pm p$.

$$\implies |\langle g \rangle| = p = |G|.$$

Sabemos que, si un subconjunto tiene la misma cantidad de elementos que el conjunto al que pertenece, entonces son iguales.

$$\therefore \langle g \rangle = G.$$

■

Como se indica en la demostración, los únicos divisores de un primo p son ± 1 y $\pm p$; entonces, los únicos subgrupos posibles de G son de orden 1 y p , que corresponden precisamente al subgrupo trivial $\{1\}$ y a G mismo.

Si existiera algún subgrupo propio $S < G$, siendo G cíclico, entonces todas las potencias e inversos de $g^j \in S$ deberían pertenecer a G , con lo que se genera el mismo grupo: $S = G$.

Corolario 1.2.6. Si G es un grupo finito y $K \leq H \leq G$, entonces

$$[G : K] = [G : H][H : K] \quad (1.39)$$

Dem. Por el Teorema de Lagrange,

$$\begin{aligned} [G : H] &= \frac{|G|}{|H|} \\ [G : K] &= \frac{|G|}{|K|} \\ [H : K] &= \frac{|H|}{|K|} \\ \implies |G| &= |H|[G : H] = |K|[G : K]. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |K| &= \frac{|H|}{[H : K]} \\ \implies |H|[G : H] &= \frac{|H|}{[H : K]}[G : K] \\ \therefore [G : K] &= [G : H][H : K]. \end{aligned}$$

■

Definición 1.2.4. Sean S y T subconjuntos no vacíos del grupo G . Entonces, el **producto de subconjuntos** está dado por:

$$ST = \{st \mid s \in S \wedge t \in T.\} \quad (1.40)$$

En particular, si $S \leq G$ y $T = \{t\}$, entonces ST coincide con el clase lateral derecho St .

Teorema 1.2.7. La familia de todos los subconjuntos no vacíos de G , bajo la operación de *producto de subconjuntos*, forma un semigrupo.

Dem. Consideremos la colección de subconjuntos no vacíos de G : $\mathcal{S} := \{S_i \mid S_i \subset G, S_i \neq \emptyset\}$. Sabemos que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, pues todo grupo tiene al menos un subconjunto trivial: $G \subset G$.

De acuerdo con la Definición (1.2.4), vemos que la operación ST es asociativa: si $S, T, V \subset G$,

$$\begin{aligned} \implies (ST)V &= \{(st)v \mid st \in ST, v \in V\} = \{stv \mid s \in S, t \in T, v \in v\} \\ S(TV) &= \{s(tv) \mid s \in S, tv \in TV\} = \{stv : s \in S, t \in T, v \in v\} \\ \implies (ST)V &= S(TV). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la familia \mathcal{S} de subconjuntos no vacíos de G , junto con la operación de producto de subconjuntos, es un semigrupo. ■

Corolario 1.2.8.

- i. Si S es un subgrupo de G , entonces $SS = S$.
- ii. Si S es un subconjunto finito y no vacío de G tal que $SS = S$, entonces S es un subgrupo de G .

Definición 1.2.5. Sea $N \leq G$. Si $gNg^{-1} = N$ para toda $g \in G$, entonces decimos que N es un **subgrupo normal** o **subgrupo invariante**, y lo denotamos por $N \triangleleft G$.

Si G es un grupo aditivo, entonces $N \triangleleft G$ si y sólo si $g + N - g = N$, para toda $g \in G$.

Veamos que:

$$gNg^{-1} = \{gng^{-1} \mid n \in N\},$$

Por lo que la Definición (1.2.5) indica que N es un subgrupo normal si y sólo si

$$gng^{-1} \in N \wedge n \in gNg^{-1}, \text{ para cualesquiera } n \in N, g \in G. \quad (1.41)$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} N \subset gNg^{-1} \wedge gNg^{-1} \subset N &\implies gNg^{-1} = N; \\ &\implies N \triangleleft G. \end{aligned}$$

Si $N \triangleleft G$, entonces las clases laterales derechas de N en G son también clases laterales izquierdas, pues:

$$\begin{aligned} gNg^{-1} &= N = N1 = Ngg^{-1} \\ \implies (gN)g^{-1} &= (Ng)g^{-1} \\ \implies gN &= Ng. \\ \therefore N \triangleleft G &\implies gN = Ng. \end{aligned}$$

Un resultado inmediato es que todos los subgrupos de grupos **abelianos** son normales:

$$gNg^{-1} = Ngg^{-1} = N.$$

Asimismo, la **intersección** de cualquier familia de subgrupos normales de G es también un subgrupo normal de G :

$$N_1, N_2, \dots, N_n \triangleleft G \implies \bigcap_{i=1}^n N_i \triangleleft G.$$

Ejemplo 1.2.3. Recordemos que el grupo especial lineal $\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$ es un subgrupo del grupo general lineal $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Probaremos que, además, es un **subgrupo normal**:

Sean $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$. Entonces,

$$\begin{aligned} \det(AXA^{-1}) &= \det(A)\det(X)\det(A^{-1}) \\ &= \det(A)1[\det(A)]^{-1} \\ &= 1 \\ \implies A[\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})]A^{-1} &\subset \mathcal{SL}_n(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 X &= AA^{-1}XAA^{-1} \in A[\mathcal{S}\mathcal{L}_n(\mathbb{K})]A^{-1} \\
 \implies \mathcal{S}\mathcal{L}_n(\mathbb{K}) &\subset A[\mathcal{S}\mathcal{L}_n(\mathbb{K})]A^{-1} \\
 \therefore \mathcal{S}\mathcal{L}_n(\mathbb{K}) &= A[\mathcal{S}\mathcal{L}_n(\mathbb{K})]A^{-1}. \\
 \therefore \mathcal{S}\mathcal{L}_n(\mathbb{K}) &\triangleleft \mathcal{G}\mathcal{L}_n(\mathbb{K}).
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Definición 1.2.6. Sea $X \subset G$. Entonces, llamamos **subgrupo normal generado por X** o **cierre normal de X** al mínimo subgrupo normal de G que contiene a X , y lo denotamos por $\langle X \rangle^G$.

Teorema 1.2.9. Sea $N \triangleleft G$. Entonces, las clases laterales de N en G , bajo la operación de *producto de subconjuntos*, forman un grupo llamado **grupo cociente** o **grupo factor**, al que denotamos por $\frac{G}{N}$.

Más aún, el grupo cociente es de orden $[G : N]$:

$$\left| \frac{G}{N} \right| = [G : N]. \tag{1.43}$$

Dem. Sea $N \triangleleft G$. Entonces, $g^{-1}Ng = N$, para toda $g \in G$.

Denotemos al conjunto de clases laterales de N en G por $\frac{G}{N}$. Como estas clases laterales son subconjuntos de G , obedecen la operación asociativa de *producto de subconjuntos*:

$$(NgNh)Nk = Ng(NhNk), \quad \forall g, h, k \in G.$$

También nos referiremos a esta operación como *producto de clases laterales*. Así,

$$NgNh = \{(ng)(n'h) \mid n, n' \in N, g, h \in G.\}$$

Tomando en cuenta que N es un subgrupo normal y que $NN = N$,

$$\begin{aligned}
 NgNh &= Ng(g^{-1}Ng)h \\
 &= NNgh \\
 &= Ngh \in \frac{G}{N}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el **producto de clases laterales** de N en G es **cerrado**.

Ahora, consideremos $N1 \in \frac{G}{N}$:

$$\begin{aligned}
 N1Ng &= N1g = Ng \wedge NgN1 = Ng1 = Ng \\
 \implies N1Ng &= NgN1 = Ng.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto $\frac{G}{N}$ tiene un **clase lateral identidad** $N1$.

Por último, consideremos $Ng^{-1} \in \frac{G}{N}$:

$$\begin{aligned}
 Ng^{-1}Ng &= Ng^{-1}g = N1 \\
 \text{y } NgNg^{-1} &= Ngg^{-1} = N1.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $Ng \in \frac{G}{N}$, existe $Ng^{-1} \in \frac{G}{N}$ tal que $Ng^{-1}Ng = NgNg^{-1} = N1$. Es decir, cada clase lateral tiene un **inverso**.

$\therefore \frac{G}{N}$ forma un grupo, junto con la operación de producto de clases laterales.

Por definición del **índice** como número de clases laterales de N en G , concluimos que $|\frac{G}{N}| = [G : N]$. ■

***Nota:** La única manera de asegurar que existen el clase lateral identidad y el clase lateral inverso Sg^{-1} para cada Sg , es que S sea normal: esto nos permite demostrar los axiomas de grupo.

Cuando consideremos las clases laterales de un subgrupo $S \leq G$, debemos tener cuidado de no afirmar a priori que forman un grupo: esto se cumple sólo si $S \triangleleft G$.

Definición 1.2.7. Un grupo $G \neq 1$ es **simple** si no tiene subgrupos normales, además del subgrupo trivial $\{1\}$ y sí mismo.

Ejemplo 1.2.4 (Grupo de enteros módulo n). Como vimos en el Ejemplo (1.2.2), $\langle n \rangle < \mathbb{Z}$. Además, veamos que $\langle n \rangle \triangleleft \mathbb{Z}$:

Sea $a \in \mathbb{Z}$ arbitraria. Entonces,

$$\begin{aligned} a + \langle n \rangle + (-a) &= \{a + kn - a \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \langle n \rangle. \end{aligned}$$

$$\therefore \langle n \rangle \triangleleft \mathbb{Z}. \tag{1.44}$$

Entonces, las clases laterales de $\langle n \rangle$ en \mathbb{Z} forman un grupo que, como ya vimos, coincide con \mathbb{Z}_n :

$$\frac{\mathbb{Z}}{\langle n \rangle} = \{\langle n \rangle + a \mid a \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}_n, \tag{1.45}$$

y a este grupo cociente se le llama **grupo de enteros módulo n** . Al igual que \mathbb{Z} , $\frac{\mathbb{Z}}{\langle n \rangle}$ es aditivo y abeliano.

Como mencionamos en la sección (1.1), el grupo de de isometrías en \mathbb{R} que fijan el origen o *grupo ortogonal real* $O_n(\mathbb{R})$, es isomorfo al grupo de matrices ortogonales $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Si $A \in O_n$, entonces las entradas a_{ij} de la matriz asociada a A están dadas por el producto interno:

$$a_{ij} = \langle \hat{e}_i | A(\hat{e}_j) \rangle,$$

Donde $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R} .

Por las propiedades del determinante y de las matrices ortogonales, tenemos:

$$\begin{aligned} \det(AA^\dagger) &= \det(\mathbf{1}) = 1. \\ \iff (\det A)(\det A^\dagger) &= (\det A)^2 = 1. \\ \therefore \det A &= \pm 1. \end{aligned}$$

Con base en este resultado, formulamos la siguiente definición:

Definición 1.2.8. Una isometría R que fija al origen, definida sobre un espacio vectorial V , es llamada **rotación continua** si $\det(R) = \pm 1$; en este caso, decimos que R *preserva la orientación*.

En cambio, si $\det(R) = -1$, entonces decimos que R *revierte la orientación*.

Proposición 1.2.10. El conjunto de rotaciones continuas $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, al que denotamos por $SO_n(\mathbb{R})$, es un subgrupo normal de $O_n(\mathbb{R})$, llamado **grupo de rotaciones** o **grupo especial ortogonal**.

Así, se satisfacen las ecuaciones:

$$SO_n(\mathbb{R}) \triangleleft O_n(\mathbb{R}).$$

$$\left| \frac{O_n(\mathbb{R})}{SO_n(\mathbb{R})} \right| = 2.$$

Dem. Para simplificar la notación, obviaremos el campo y escribiremos SO_n, O_n .

Primero, veamos que SO_n es un subgrupo de O_n :

Sabemos que $\det(\mathbf{1}) = 1$, por lo que $\mathbf{1} \in SO_n$. Además, si $A, B \in SO_n$, entonces

$$\begin{aligned} \det(AB^{-1}) &= \det(A)\det(B^{-1}) = 1 \cdot 1 = 1 \\ \implies AB^{-1} &\in SO_n. \\ \therefore SO_n &\leq O_n. \end{aligned}$$

Ahora, veamos que SO_n es un subgrupo normal. Para ello, tomamos $R \in SO_n, A \in O_n$ arbitrarias.

$$\begin{aligned} \implies \det(ARA^{-1}) &= \det(A)\det(R)\det(A^{-1}) \\ &= \det(R)\det(A)\det(A)^{-1} \\ &= 1. \\ \implies ARA^{-1} &\in SO_n. \\ \therefore SO_n &\triangleleft O_n. \end{aligned}$$

Entonces, las clases laterales de SO_n en O_n forman un grupo:

$$\begin{aligned} \frac{O_n}{SO_n} &= \{SO_n A \mid A \in O_n\} \\ &= \{SO_n, SO_n T\}, \text{ con } \det(T) = -1. \end{aligned}$$

Es decir, $T \in O_n - SO_n$.

Efectivamente, sólo existen 2 clases laterales de SO_n en O_n , pues cualesquiera transformaciones $R \in SO_n, T \in O_n - SO_n$ satisfacen:

$$\begin{aligned} \det(RT) &= \det(R)\det(T) = 1(-1) = -1. \\ \implies RT &\in O_n - SO_n = SO_n T. \\ \therefore [O_n : SO_n] &= \left| \frac{O_n}{SO_n} \right| = 2. \end{aligned}$$

■

El tipo de relación que plantea la Proposición (1.2.10) también es satisfecha por el grupo especial lineal $SL_n(V)$ y por el grupo especial unitario, que introduciremos a continuación:

Proposición 1.2.11. El subconjunto de $U_n(V)$ cuyo determinante es igual a 1, es un **subgrupo normal** de U_n , llamado **grupo especial unitario** y denotado por $SU_n(V)$:

$$SU_n(V) = \{A : V \rightarrow V \mid A^\dagger = A^{-1} \wedge \det(A) = 1\} \triangleleft U_n(V).$$

$$\text{Además, } \left| \frac{U_n(V)}{SU_n(V)} \right| = 2.$$

Dem. Sabemos que el determinante de toda matriz unitaria tiene módulo igual a 1:

$$\det(T) = e^{i\phi} \implies |\det(T)| = 1, \quad \forall T \in U_n.$$

Por tanto, SU_n es el subconjunto de U_n cuyo determinante tiene fase $\phi = 0$.

Si $A, B \in SU_n$, entonces:

$$\begin{aligned} \det(B^{-1}) &= [\det(B)]^{-1} = 1. \\ \implies \det(AB^{-1}) &= \det(A)\det(B^{-1}) = 1. \\ \implies AB^{-1} &\in SU_n, \end{aligned}$$

y se cumple trivialmente que $\mathbf{1} \in SU_n$, por lo que $SU_n \leq U_n$. Ahora, tomemos $T \in U_n$ arbitraria:

$$\det(TAT^{-1}) = \det(T)\det(A)[\det(T)]^{-1} = \det(A) = 1. \tag{1.46}$$

$$\implies TAT^{-1} \in SU_n, \quad \forall A \in SU_n, T \in U_n. \tag{1.47}$$

$$\therefore SU_n \triangleleft U_n. \tag{1.48}$$

Para ver que el grupo cociente $\frac{U_n}{SU_n}$ es de orden 2, basta tomar cualquier transformación $W \in U_n$ con determinante $e^{i\phi} \neq 1$:

$$\det(AW) = \det(A)\det(W) = 1 \cdot e^{i\phi} \neq 1.$$

$$\implies \frac{U_n}{SU_n} = \{SU_n\mathbf{1}, SU_nW\}.$$

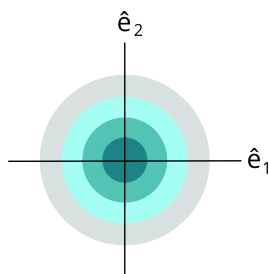
■

***Nota:** En física, comúnmente nos referimos a los grupos ortogonal y especial ortogonal como $O(n)$ y $SO(n)$, respectivamente, pues se obvia que están definidos sobre el campo de los reales.

Igualmente, se suele denotar a los grupos unitario y especial unitario por $U(n)$ y $SU(n)$.

Ahora, nos fijaremos particularmente en el **grupo de rotaciones continuas en dos dimensiones** $SO_2(\mathbb{R})$, comúnmente llamado **grupo especial ortogonal** y denotado por $SO(2)$ [3].

La siguiente figura representa un sistema físico que es invariante ante rotaciones en un plano, alrededor de cierto punto fijo \vec{P} , que, en este caso, coincide con el origen del sistema coordenado:



La base del sistema de coordenadas inducido es $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$. Podemos representar una rotación R en un ángulo ϕ de manera matricial, respecto de esta base:

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \text{Cos}\phi & -\text{sen}\phi \\ \text{sen}\phi & \text{cos}\phi \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

Entonces, un vector $\vec{x} = (x_1, x_2)$ se transforma bajo R_ϕ como:

$$R_\phi : \vec{x} \mapsto \vec{x}' = (x'_1, x'_2), \quad \text{donde:}$$

$$x'_i = (R_\phi)^i_j x^j,$$

Usando notación de suma de Einstein.

Además, como las rotaciones son transformaciones ortogonales, preservan la longitud de los vectores:

$$\|x'\|^2 = \|R_\phi(\vec{x})\|^2 = \|x\|^2$$

$$\iff x'_i x'^i = (R_\phi)^i_j x^j (R_\phi)^j_i x_j = (R_\phi)^i_j (R_\phi)^j_i x_i x^i = x_i x^i$$

$$\iff (R_\phi)^i_j (R_\phi)^j_i = 1,$$

Siendo $(R_\phi)^i_j$ las entradas de R_ϕ y $(R_\phi)^j_i$, las de R_ϕ^T .

$$\therefore R_\phi R_\phi^T = \mathbf{1}, \quad \forall R_\phi \in SO_2(\mathbb{R}). \quad (1.50)$$

La Ecuación (1.50) es satisfecha por todas las rotaciones: podemos generalizarla a un espacio n -dimensional, tomando $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y conociendo las $n - 1$ variables que parametrizan a la rotación $R(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in SO_n(\mathbb{R})$.

Una propiedad importante de las rotaciones en dos dimensiones es que son **conmutativas**; esto se debe a que están caracterizadas por 1 sólo parámetro ϕ , por lo que:

$$R_{\phi_1} R_{\phi_2} = R_{\phi_1 + \phi_2} = R_{\phi_2} R_{\phi_1},$$

Lo cual se puede ver geoméricamente:

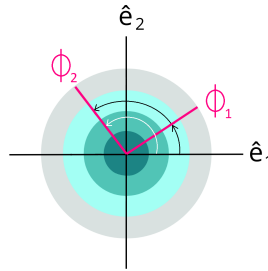


Figura 1.9: Composición de rotaciones en un plano.

Por lo tanto, $SO_2(\mathbb{R})$ es un grupo abeliano. En general, todas las rotaciones que se aplican respecto a un mismo eje de rotación son conmutativas.

Además, como el intervalo $[0, 2\pi)$ barre todo el espacio bidimensional, tenemos que $R_\phi = R_{\phi \pm 2\pi}$; por lo tanto, se suele restringir $\theta \in [0, 2\pi)$ para tener un conjunto de transformaciones univaluadas.

Resumimos las propiedades de SO_2 en la siguiente proposición:

Proposición 1.2.12. El conjunto de isometrías $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que fijan el origen y preservan la orientación forma un grupo, al que llamamos **grupo de rotaciones en dos dimensiones** y denotamos por $SO_2(\mathbb{R})$.

- Los elementos de SO_2 están determinados por un parámetro $\phi \in [0, 2\pi)$, y satisfacen:

$$R_\phi = R_{\phi+2k\pi}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}. \quad (1.51)$$

- Si $R_{\phi_1}, R_{\phi_2} \in SO_2$, entonces:

$$R_{\phi_1} R_{\phi_2} = R_{\phi_1+\phi_2} = R_{\phi_2} R_{\phi_1}. \quad (1.52)$$

Por lo tanto, SO_2 es un **grupo abeliano**.

- La identidad y los elementos inversos de SO_2 están dados por:

$$R|_{\phi=0} = R_0 = \mathbb{1}, \quad (1.53)$$

$$R_\phi^{-1} = R_{-\phi}, \quad (1.54)$$

de modo que

$$\begin{aligned} R_\phi R_0 &= R_0 R_\phi = R_{\phi+0} = R_\phi. \\ R_\phi R_\phi^{-1} &= R_\phi^{-1} R_\phi = R_{\phi-\phi} = R_0. \end{aligned}$$

Como otros grupos de Lie de transformaciones, SO_2 puede ser generado a partir de la identidad del grupo, con ayuda de un operador llamado *generador infinitesimal*. En el siguiente capítulo, hallaremos dicho generador y las representaciones irreducibles de SO_2 .

1.3. Homomorfismos e Isomorfismos

En este apartado revisamos los Teoremas de isomorfismos, que sientan la base de la Teoría de Representaciones. La trascendencia de estos teoremas se debe a que nos permiten establecer relaciones convenientes entre grupos, además de que pueden extenderse a otras estructuras algebraicas [1].

Definición 1.3.1. Sean $(G, *)$ y (H, \circ) grupos o semigrupos. Una función $f : G \rightarrow H$ es un **homomorfismo** si, para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$,

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2). \quad (1.55)$$

Es decir, los homomorfismos son mapeos que preservan el producto.

Teorema 1.3.1. Sea $f : (G, *) \rightarrow (H, \circ)$ un homomorfismo entre grupos. Entonces,

- i. $f(1) = 1'$, siendo $1'$ la identidad de H .

ii. $\forall a \in G, f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.

iii. $\forall a \in G, n \in \mathbb{Z}, f(a^n) = [f(a)]^n$.

Dem. i. Sea $1'$ la identidad del grupo H .

$$\implies h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h = 1', \quad \forall h \in H.$$

Como f es un homomorfismo,

$$\begin{aligned} f(1) &= f(1 * 1) = f(1) \circ f(1) \\ \implies 1' &= f(1) \circ [f(1)]^{-1} = f(1) \circ f(1) \circ [f(1)]^{-1} = f(1) \circ 1' \\ \text{y } 1' &= [f(1)]^{-1} \circ f(1) = [f(1)]^{-1} \circ f(1) \circ f(1) = 1' \circ f(1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies f(1) \circ 1' &= 1' \circ f(1) = 1' \\ \implies [f(1)]^{-1} &= 1' \\ \implies f(1) &= 1'. \end{aligned}$$

ii. Ahora, sea $g \in G$ arbitrario.

$$\begin{aligned} \implies 1' &= f(1) = f(g * g^{-1}) = f(g) \circ f(g^{-1}) \\ \text{y } 1' &= f(1) = f(g^{-1} * g) = f(g^{-1}) \circ f(g) \\ \implies f(g) \circ f(g^{-1}) &= f(g^{-1}) \circ f(g) = 1'. \end{aligned}$$

$$\therefore f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}.$$

iii. Sabemos que $f(a^1) = f(a) = [f(a)]^1$.

Ahora, supongamos que $f(a^{n-1}) = [f(a)]^{n-1}$, con $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \implies f(a^n) &= f(a^{n-1} * a) \\ &= f(a^{n-1}) \circ f(a) \\ &= [f(a)]^{n-1} \circ f(a) \\ &= f(a) \circ f(a) \circ \dots \circ f(a) \quad (\text{n veces}) \\ &= [f(a)]^n. \end{aligned}$$

$$\therefore f(a^n) = [f(a)]^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

Por lo tanto, un homomorfismo también preserva la identidad y los inversos de un grupo.

Definición 1.3.2. Un **isomorfismo** $f : (G, *) \longrightarrow (H, \circ)$ es un homomorfismo biyectivo; es decir, un homomorfismo que tiene función inversa $f^{-1} : (H, \circ) \longrightarrow (G, *)$.

Revisemos algunos ejemplos de homomorfismos:

Ejemplo 1.3.1. Consideremos el grupo de enteros, $(\mathbb{Z}, +)$, y el grupo de enteros módulo n , $(\mathbb{Z}_n, +)$. Definimos la función f como:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}_n \\ a &\longmapsto [a]_n \end{aligned}$$

Si f es un homomorfismo, entonces la operación que debe preservar es la suma, pues ambos grupos son aditivos.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \implies f(a + b) &= [a + b] \\ &= [a] + [b] \\ &= f(a) + f(b), \end{aligned}$$

usando las propiedades de \mathbb{Z}_n , demostradas en el Ejemplo (1.1.1).

Notemos que f no es un inyectiva, pues a tiene la misma clase de congruencia que todos sus múltiplos módulo n , es decir:

$$\begin{aligned} [a] &= \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{a + (k + k')n \mid k, k' \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(a + kn) + k'n \mid k, k' \in \mathbb{Z}\} \\ &= [a + kn]. \\ \implies f(a) &= f(a + kn), \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, f no es un isomorfismo.

Ejemplo 1.3.2 (Determinante). Sea (\mathbb{K}, \cdot) el grupo multiplicativo del campo \mathbb{K} .

La función *determinante* está definida como:

$$\begin{aligned} \det : \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto \det(A) \end{aligned}$$

Es un resultado general de la teoría de matrices, que el determinante es distributivo sobre el producto:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B),$$

para cualesquiera $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Por lo tanto el determinante es un homomorfismo; también se satisfacen las propiedades del Teorema (1.3.1):

$$\det(\mathbf{1}) = 1, \quad \det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1},$$

donde $\mathbf{1}$ es la identidad de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ y A^{-1} es la matriz inversa de A .

Al igual que el homomorfismo del Ejemplo (1.3.1), el determinante no es un isomorfismo, pues existen muchas matrices con el mismo valor $\det(M) \in \mathbb{K}$.

Definición 1.3.3. Decimos que 2 grupos G, H son **isomorfos** si es posible establecer un isomorfismo entre ellos, $f : G \longrightarrow H$. En este caso, escribimos $G \cong H$.

Cuando dos grupos son isomorfos, tienen la misma estructura y cantidad de elementos; sin embargo, pueden diferir en su operación y en el tipo de elementos que poseen (por ejemplo: matrices bajo la multiplicación, y funciones bajo la composición).

En la práctica, si dos grupos son isomorfos, entonces se tratan como iguales y se trabaja con el que resulte más conveniente. Se suele decir que uno es la *copia isomorfa* del otro.

Podemos hacer una analogía entre grupos isomorfos e idiomas o sistemas de medición diferentes: si el grupo G es el Sistema Nacional de Unidades y el grupo H es el Sistema Inglés, entonces el isomorfismo $f : G \rightarrow H$ funciona como un convertidor entre ellos [2].

Enseguida revisaremos algunas propiedades de los homomorfismos, involucrando los conceptos de las secciones previas.

Corolario 1.3.2.

- i. Si $f : G \rightarrow H$ y $g : H \rightarrow K$ son isomorfismos, entonces la composición $g \circ f : G \rightarrow K$ también es un isomorfismo.
- ii. Si $f : G \rightarrow H$ es un isomorfismo, entonces también lo es $f^{-1} : H \rightarrow G$.

Proposición 1.3.3. Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo. Entonces, el **núcleo** de f es un subgrupo de G y la **imagen** de f es un subgrupo de H ; es decir,

$$\text{Núcleo de } f = N[f] \leq G. \tag{1.56}$$

$$\text{Imagen de } f = \text{Im}[f] \leq H. \tag{1.57}$$

Dem. Por definición, el núcleo de una función es un subconjunto de su dominio, y la imagen es un subconjunto de su codominio. Así, $N \subset G$, $\text{Im} \subset H$, con:

$$N := \{g \in G \mid f(g) = 1'\} \tag{1.58}$$

$$\text{Im} := \{h \in H \mid h = f(g) \text{ para algún } g \in G.\} \tag{1.59}$$

- i. Primero, probaremos que $N \leq G$:

Por ser un homomorfismo, $f(1) = 1'$, con $1'$ la identidad de H . Entonces, $1 \in N$.
Ahora, sean $s, t \in N$.

$$\begin{aligned} \implies f(s) &= f(t) = 1' \\ \implies 1' &= [f(t)]^{-1} = f(t^{-1}) \\ \implies t^{-1} &\in N; \\ \implies f(st^{-1}) &= f(s) \circ f(t^{-1}) = 1' \circ 1' = 1' \\ \implies st^{-1} &\in N. \end{aligned}$$

Por el Teorema (1.1.5), $1 \in N$ y $st^{-1} \in N$ implican que N es un subgrupo de G .

- ii. Ahora, probaremos que $\text{Im} \leq H$:

Sabemos que $f(1) = 1'$, por lo que $1' \in \text{Im}$.

Ahora, sean $h_1, h_2 \in \text{Im}$. Entonces, existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $f(g_1) = h_1$, $f(g_2) = h_2$.

$$\begin{aligned} \implies f(g_2^{-1}) &= [f(g_2)]^{-1} = h_2^{-1} \in \text{Im}, \text{ pues } g_2^{-1} \in G. \\ \implies f(g_1 g_2^{-1}) &= f(g_1) \circ f(g_2^{-1}) = h_1 \circ h_2^{-1} \in \text{Im}, \text{ pues } g_1 g_2^{-1} \in G. \end{aligned}$$

De nuevo, aplicamos el Teorema (1.1.5) para ver que Im es un subgrupo de H .

$$\therefore N \leq G \wedge \text{Im} \leq H.$$

■

Corolario 1.3.4. El núcleo N de un homomorfismo $f : G \longrightarrow H$ es un subgrupo normal de G .

Dem. Sabemos que $f(a) = 1' \forall a \in N$. Ahora, sea $g \in G$ arbitraria. Entonces,

$$\begin{aligned} f(gag^{-1}) &= f(g)f(a)f(g^{-1}) \\ &= f(g)1'f(g^{-1}) \\ &= f(g)[f(g)]^{-1} \\ &= 1'. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $gag^{-1} \in N$. Como g y a son arbitrarias, tenemos $gNg^{-1} \subset N$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} a &= g(g^{-1}ag)g^{-1} \in gNg^{-1}. \\ \implies N &\subset gNg^{-1}. \\ \therefore N &\triangleleft G. \end{aligned}$$

■

Además de que el núcleo de un homomorfismo es un subgrupo normal, se puede probar que todo subgrupo normal es núcleo de un homomorfismo; específicamente, del *mapeo natural*, que introducimos en la siguiente proposición:

Proposición 1.3.5. Si $N \triangleleft G$, entonces la función $\nu : G \longrightarrow \frac{G}{N}$, dada por $\nu(g) = Ng$, es un homomorfismo sobreyectivo con núcleo N .

La función ν es llamada **mapeo natural**.

Dem. Recordemos que el producto de subconjuntos se extiende al producto de clases laterales, como:

$$\begin{aligned} NgNh &= Ngh, \\ gNhN &= ghN. \end{aligned}$$

El mapeo ν está definido como la función que asigna a cada elemento $g \in G$ un clase lateral Ng . Si $g, h \in G$, entonces

$$\nu(gh) = Ngh = NgNh = \nu(g)\nu(h).$$

Por lo tanto, ν es un homomorfismo.

Ahora, sea $Na \in \frac{G}{N}$ arbitrario. Entonces, Na es un clase lateral de N en G , con representante a , por lo que $\nu(a)$ está definida:

$$\begin{aligned} \nu(a) &= Na, \\ \implies \frac{G}{N} &\subset Im[\nu], \\ \implies \frac{G}{N} &= Im[\nu]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ν es sobreyectiva.

Finalmente, el núcleo de ν consta de todos los elementos $g \in G$ tales que $\nu(g) = 1'$, donde $1'$ es la identidad del grupo $\frac{G}{N}$; pero, como ya se mencionó, el clase lateral identidad es $N1 = N$:

$$\implies \text{Núcleo}[\nu] = \{g \in G \mid \nu(g) = N\}.$$

Por el Lema (1.2.1), $Ng = N \iff g \in N$. Por lo tanto, el núcleo de ν es todo N .

■

La siguiente imagen ilustra la relación entre un grupo G con subgrupo normal N , y el grupo cociente $\frac{G}{N}$:

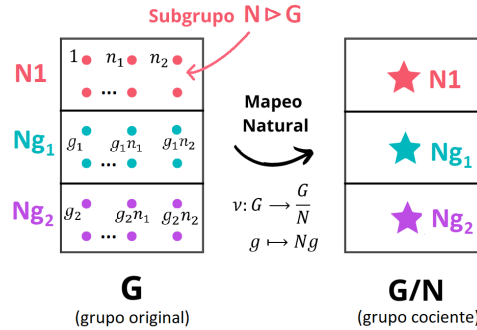


Figura 1.10: Representación gráfica de un grupo G , sus clases laterales Ng y el grupo cociente G/N .

El mapeo natural ν es el homomorfismo que asocia cada elemento $g \in G$ a un elemento $Ng \in \frac{G}{N}$. En general, ν no es inyectiva, pues todos los elementos que pertenecen a cierto clase lateral Ng_i tienen la misma imagen bajo ν .

Ahora, estudiaremos uno de los temas más importantes de la teoría de grupos, y probablemente del álgebra moderna: los **Teoremas de isomorfismos**, formulados por Emmy Noether en 1927.

Estos teoremas revelan la conexión entre grupos, subgrupos normales y grupos cocientes, y nos permiten establecer homomorfismos e isomorfismos entre los grupos de nuestro interés. Su trascendencia se debe, en parte, a que pueden extenderse a otras estructuras algebraicas, tales como anillos, espacios vectoriales, álgebras de Lie, etc. [1]

Teorema 1.3.6 (Primer Teorema de isomorfismos). Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo con núcleo N . Entonces,

$$N \triangleleft G \wedge \frac{G}{N} \cong \text{Im}[f]. \tag{1.60}$$

Dem. Sea N el núcleo de f . Entonces,

$$N = \{a \in G \mid f(a) = 1'\},$$

donde $1'$ es la identidad de H .

Ahora, tomemos $g \in G$ arbitraria. Como f es un homomorfismo,

$$\begin{aligned} f(gag^{-1}) &= f(g)f(a)f(g^{-1}) \\ &= f(g)f(g^{-1}) \\ &= f(g)[f(g)]^{-1} \\ &= 1'. \end{aligned} \implies gag^{-1} \in N.$$

Lo mismo se puede decir de cualquier elemento $b \in N$. Es decir,

$$\begin{aligned} \{gbg^{-1} \mid b \in N\} &= gNg^{-1} \subset N. \\ \text{Además, } N &\subset gNg^{-1}, \forall g \in G; \\ \implies gNg^{-1} &= N. \\ \therefore N &\triangleleft G. \end{aligned}$$

Ahora, definimos la función:

$$\begin{aligned} \phi : \frac{G}{N} &\longrightarrow H \\ Ng &\longmapsto \phi(Ng) = f(g) \end{aligned}$$

Es decir, la imagen de Ng bajo ϕ coincide con la imagen de g bajo f .

Consideremos dos clases laterales cualesquiera $Ng, Nh \in \frac{G}{N}$.

$$\begin{aligned} \phi(NgNh) &= \phi(Ngh) \\ &= f(gh) \\ &= f(g)f(h) \\ &= \phi(Ng)\phi(Nh). \end{aligned}$$

Por lo tanto, ϕ es un homomorfismo.

Ahora, supongamos que existen $Ng, Nh \in \frac{G}{N}$ tales que:

$$\begin{aligned} \phi(Ng) &= \phi(Nh) \\ \iff f(g) &= f(h) \\ \iff f(g)[f(h)]^{-1} &= 1 \\ \iff f(gh^{-1}) &= 1. \end{aligned}$$

Entonces, gh^{-1} pertenecen al núcleo de f , implicando así la igualdad de las clases laterales:

$$\begin{aligned} gh^{-1} &\in N, \\ \implies Ng &= Nh. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ϕ es **inyectiva**. En este caso, se puede establecer una **biyección** entre el dominio $\frac{G}{N}$ de ϕ , y su imagen $Im[\phi] \leq H$:

$$\begin{aligned} \forall Na \in \frac{G}{N}, \exists ! \tilde{a} \in Im[\phi] \text{ tal que } \phi(Na) &= \tilde{a}. \\ \therefore \frac{G}{N} &\cong Im[\phi]. \end{aligned}$$

Si, además, se prueba que ϕ es sobreyectiva, entonces se tiene $\frac{G}{N} \cong H$. ■

El primer teorema de isomorfismos nos permite transformar un homomorfismo cualquiera $f : G \longrightarrow H$ en un isomorfismo $\phi : \frac{G}{N} \longrightarrow H$, y así trabajar con grupos isomorfos (idénticos en estructura y orden).

Para ello, sólo debemos encontrar el núcleo del homomorfismo, $N \triangleleft G$ y su imagen $Im \cong \frac{G}{N}$. Luego, definimos la función:

$$\phi : Ng \longmapsto f(g)$$

Que establece una biyección entre $\frac{G}{N}$ y H .

Así, si antes el núcleo N constaba de varios elementos, ahora su núcleo será sólo $N1 = 1'$, la identidad de $\frac{G}{N}$, satisfaciendo la propiedad:

$$\phi \text{ es inyectiva} \iff \text{Núcleo}[\phi] = 1' \tag{1.61}$$

Las siguientes imágenes nos ayudan a comprender mejor el teorema:

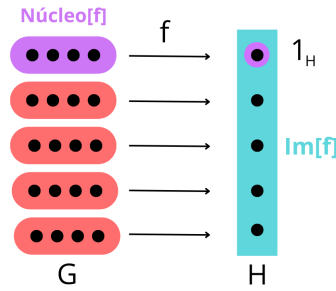


Figura 1.11: Explicación gráfica del primer Teorema de isomorfismos [6].

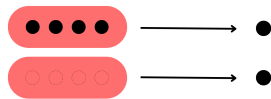
En la Figura (1.11), los puntos \bullet representan elementos de G , separados en rectángulos, de acuerdo con el valor que les asigna el homomorfismo $f : G \rightarrow H$.

Cada rectángulo es mapeado al mismo elemento en H ; en particular, el Núcleo N de f , es mapeado a la identidad.

Como $f(a) = 1$ para toda $a \in N$, entonces cada rectángulo es un clase lateral de N en G :

$$\begin{aligned} f(ag) &= f(a)f(g) = 1f(g) \\ \implies f(ag) &= f(g) \quad \forall ag \in Ng. \end{aligned}$$

Si tomamos como dominio las clases laterales de N en G (rectángulos), en vez de los elementos de G (puntos), entonces f es inyectiva.



Por tanto, la función $\phi : Ng \mapsto f(g)$ es un isomorfismo entre $\frac{G}{N}$ y la Imagen de f .

En el siguiente ejemplo, ilustramos los conceptos previos y el primer Teorema de isomorfismos:

Ejemplo 1.3.3. Sean $\langle g \rangle$ y $\langle h \rangle$ grupos cíclicos de orden n . Esto implica que

$$g^n = h^n = 1.$$

Ahora, definimos una función:

$$\begin{aligned} f : \langle g \rangle &\longrightarrow \langle h \rangle \\ g^k &\longmapsto h^k. \end{aligned}$$

Veamos que f es un homomorfismo:

$$\begin{aligned} f(g^k g^j) &= f(g^{k+j}) \\ &= h^{k+j} \\ &= h^k h^j \\ &= f(g^k) f(g^j). \end{aligned}$$

Además, f es biyectiva, pues:

- Si $f(g^k) = f(g^j)$, entonces

$$\begin{aligned} h^k &= h^j \\ \iff h^k (h^j)^{-1} &= 1 \\ \iff h^{k-j} &= 1 \\ \iff k = j \vee k - j &= n. \end{aligned}$$

Si $k = j$, tenemos $g^k = g^j$. Igualmente, si $k - j = n$, entonces

$$\begin{aligned} g^{k-j} &= 1 \\ \iff g^{k-j+j} &= g^j \\ \iff g^k &= g^j. \end{aligned}$$

Entonces, f es inyectiva.

- Ahora, si consideramos $\eta \in \langle n \rangle$ arbitraria, entonces $\eta = h^l$ para alguna $l \leq n$.

Entonces, existe $g^l \in \langle g \rangle$ tal que $f(g^l) = h^l = \eta$, por lo que f es sobreyectiva.

Por lo tanto, f es un isomorfismo y

$$\langle g \rangle \cong \langle h \rangle.$$

Este resultado indica que todos los grupos cíclicos cuyo orden es el mismo, son isomorfos.

Ahora, consideremos la función:

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{Z}, +) &\longrightarrow \langle g \rangle \\ k &\longmapsto g^k \end{aligned}$$

También ϕ es un homomorfismo:

$$\begin{aligned} \phi(j + k) &= g^{j+k} \\ &= g^j g^k \\ &= \phi(j) \phi(k). \end{aligned}$$

El **núcleo** de ϕ consta de todos los enteros $m \in \mathbb{Z}$ tales que $\phi(m) = g^m = 1$; pero

$$g^m = 1 \iff m = 0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots,$$

es decir, si m es un múltiplo de n .

$$\implies \text{Núcleo}[\phi] = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\} = \langle n \rangle.$$

Ahora, aplicamos el 1^{er} Teorema de isomorfismos y obtenemos:

$$\langle n \rangle \triangleleft \mathbb{Z} \tag{1.62}$$

$$\frac{\mathbb{Z}}{\langle n \rangle} \cong \text{Im}[\phi]. \tag{1.63}$$

El resultado (1.62) ya se había obtenido en el Ejemplo (1.2.4). El segundo resultado indica que la imagen de ϕ puede verse como el grupo de enteros módulo n , \mathbb{Z}_n .

Por último, veamos que ϕ es sobreyectiva:

Si γ es un elemento arbitrario de $\langle g \rangle$, entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $g^m = \gamma$.

$$\begin{aligned} &\implies \phi(m) = \gamma \\ &\implies \langle g \rangle \subset \text{Im}[\phi] \\ &\implies \langle g \rangle = \text{Im}[\phi] \\ &\therefore \frac{\mathbb{Z}}{\langle n \rangle} = \mathbb{Z}_n \cong \langle g \rangle. \end{aligned}$$

Este ejemplo es relevante porque muestra que todo grupo cíclico de orden n puede verse como el grupo de enteros módulo n .

Teorema 1.3.7 (Segundo Teorema de isomorfismos). Sean N, H subgrupos del grupo G . Si $N \triangleleft G$, entonces

$$N \cap H \triangleleft H \quad \wedge \quad \frac{H}{N \cap H} \cong \frac{NH}{N}. \tag{1.64}$$

Dem. Si $N \triangleleft G$, entonces $gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G$ y el grupo cociente $\frac{G}{N}$ está bien definido.

Sea $\nu : G \rightarrow \frac{G}{N}$ el mapeo natural, con núcleo es N . Restringiendo el mapeo a $H \leq G$, tenemos:

$$\begin{aligned} \nu' := \nu|_H : H &\rightarrow \tilde{H} \subset \frac{G}{N} \\ h &\mapsto Nh \end{aligned}$$

Donde $\tilde{H} = \{Nh : h \in H\}$.

Como ν es un homomorfismo, ν' también debe serlo. Tomando $h_1, h_2 \in H$, y recordando que $N1$ es la identidad de $\frac{G}{N}$,

$$\begin{aligned} \nu'(h_1h_2) &= Nh_1h_2 \\ &= Nh_1h_2N1 \\ &= Nh_1h_2(h_2^{-1}Nh_2) \\ &= Nh_1Nh_2 \\ &= \nu'(h_1)\nu'(h_2), \end{aligned}$$

pues toda $h_i \in H$ pertenece también a G y $h_iNh_i^{-1} = N$.

Ahora, supongamos que x pertenece al núcleo de ν' .

$$\implies \nu'(x) = Nx = N1 \iff x \in N.$$

Entonces, el núcleo de ν' es el subconjunto de H que también pertenece a N , es decir,

$$\text{Núcleo}[\nu'] = N \cap H.$$

Por el 1^{er} Teorema de isomorfismos,

$$N \cap H \triangleleft H \quad \wedge \quad \frac{H}{N \cap H} \cong \text{Im} [\nu'].$$

Veamos que ν' es sobreyectiva: para toda clase lateral $Nh \in \tilde{H}$, existe $h \in H$ tal que $\nu'(h) = Nh$.

$$\implies \text{Im} [\nu'] = \tilde{H}.$$

En principio, no podemos asegurar que $N \triangleleft H$, por lo que el grupo $\frac{H}{N}$ no necesariamente está definido. Sin embargo, fijémonos en $NH = \{nh \mid n \in N, h \in H\}$:

NH es un subconjunto de G , por la cerradura del producto de subconjuntos. Así,

$$\begin{aligned} (nh)N(nh)^{-1} &= nhNh^{-1}n^{-1} \\ &= n(hNh^{-1})n^{-1} \\ &= nNn^{-1} \\ &= N. \end{aligned}$$

Por tanto, $N \triangleleft NH$ y existe el grupo cociente $\frac{NH}{N}$, que consta de todas las clases laterales de N con representante en NH :

$$\begin{aligned} \frac{NH}{N} &= \{N(nh) : nh \in NH\} = \{Nh : h \in H\} \\ \implies \frac{NH}{N} &= \tilde{H}. \end{aligned}$$

$$\therefore N \cap H \triangleleft H \quad \wedge \quad \frac{H}{N \cap H} \cong \frac{NH}{N}.$$

■

También este teorema puede ser interpretado de manera gráfica. La siguiente imagen muestra el subgrupo $NH \leq G$:

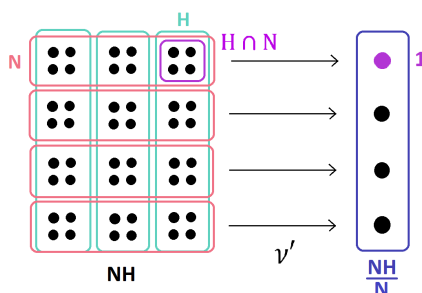
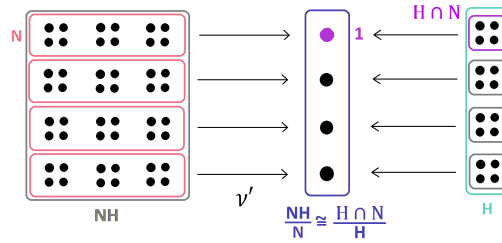


Figura 1.12: Explicación gráfica del segundo Teorema de isomorfismos [6].

Nuevamente, los puntos \bullet son los elementos de NH , que está partido en clases laterales de N (rectángulos rosas) y de H (rectángulos verdes). La intersección $H \cap N$ es el cuadrado morado.

Como N es un subgrupo normal de G , coincide con el núcleo del mapeo natural $\nu : G \rightarrow \frac{G}{N}$. Si denotamos por ν' al mapeo $\nu|_H$, entonces el núcleo de ν' es $H \cap N$, como muestra la Figura (1.12).

Más aún, las imágenes bajo ν de las clases laterales de N en NH , son las mismas que de las clases laterales de $H \cap N$ en H , como muestra la siguiente imagen:



Entonces, basta aplicar el 1^{er} Teorema de isomorfismos para probar que los grupos $\frac{NH}{N}$ y $\frac{H}{H \cap N}$ son isomorfos.

Teorema 1.3.8 (Tercer Teorema de isomorfismos). Sean N, H subgrupos normales de G , con $N \leq H \leq G$. Entonces,

$$\frac{H}{N} \triangleleft \frac{G}{N} \quad \wedge \quad \frac{G/N}{H/N} \cong \frac{G}{H}.$$

Dem. Por hipótesis, $N \triangleleft G$ y $H \triangleleft G$, así que los grupos cocientes $\frac{G}{H}$ y $\frac{G}{N}$ están bien definidos. Además,

$$\begin{aligned} gNg^{-1} &= N \quad \forall g \in G \\ \implies hNh^{-1} &= N \quad \forall h \in H \\ \implies N &\triangleleft H. \end{aligned}$$

Por lo que $\frac{H}{N}$ también está definido.

Ahora, consideremos la función:

$$\begin{aligned} f : \frac{G}{N} &\longrightarrow \frac{G}{H} \\ Ng &\longmapsto Hg. \end{aligned}$$

Si $Na, Nb \in \frac{G}{N}$, entonces

$$\begin{aligned} f(NaNb) &= f(Nab) \\ &= Hab \\ &= (Ha)(Hb) \\ &= f(Na)f(Nb). \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es un homomorfismo.

Ahora, sea Nx un elemento del núcleo de f .

$$\begin{aligned} \implies f(Nx) &= Hx = H1 \\ \implies x &\in H \\ \implies \text{Núcleo}[f] &= \{Nx : x \in H\} = \frac{H}{N}. \end{aligned}$$

Aplicando el 1^{er} Teorema de isomorfismos, tenemos

$$\frac{H}{N} \triangleleft \frac{G}{N} \quad \wedge \quad \frac{G/N}{H/N} \cong \text{Im}[f] \subset \frac{G}{H}.$$

Tomando un clase lateral arbitrario $Hg \in \frac{G}{H}$, vemos que existe $Ng \in \frac{G}{N}$ tal que $f(Ng) = Hg$.

$$\begin{aligned} \implies \frac{G}{H} &\subset \text{Im}[f] \\ \implies \text{Im}[f] &= \frac{G}{H} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{H}{N} \triangleleft \frac{G}{N} \wedge \frac{G/N}{H/N} \cong \frac{G}{H}.$$

■

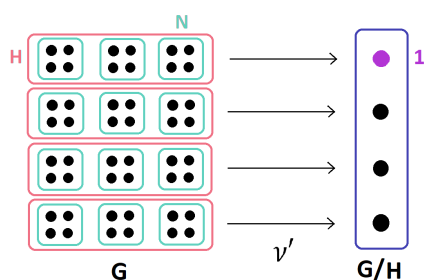
***Nota:** Debemos aclarar que $\frac{G/N}{H/N}$ es el grupo cociente que consta de las clases laterales de $\frac{H}{N}$ con representante en $\frac{G}{N}$:

$$\frac{G/N}{H/N} = \left\{ \left(\frac{H}{N} \right) Ng \mid Ng \in \frac{G}{N} \right\}$$

Es decir, sus elementos son clases laterales que inducen una partición en el grupo cociente.

También notemos la semejanza entre las demostraciones del segundo y del tercer Teorema: primero se define un homomorfismo apropiado entre los grupos de nuestro interés, luego se aplica el 1^{er} Teorema de isomorfismos y, finalmente, se prueba la sobreyectividad de dicho homomorfismo.

Otra vez ilustramos este teorema con el arreglo rectangular de puntos \bullet , que representan a los elementos de G . Podemos partir G en clases laterales de H (rectángulos rosas) y en clases laterales de N (cuadrados verdes), siendo $N \triangleleft H$:



Sabemos que H es el núcleo del mapeo $\nu : G \rightarrow \frac{G}{H}$. Además, cada clase lateral de N en G tiene la misma imagen bajo ν , por lo que podemos definir un homomorfismo f entre $\frac{G/N}{H/N}$ y $\frac{G}{H}$, que contenga la misma información que ν :

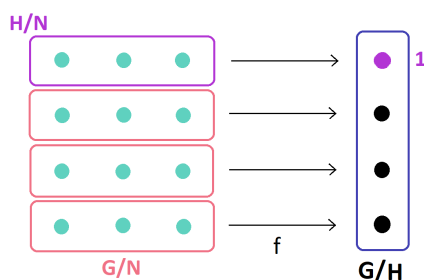


Figura 1.13: Explicación gráfica del 3^{er} Teorema de isomorfismos [6].

En la Figura (1.13), representamos al grupo $\frac{G}{N}$, cuyos elementos son las clases laterales Ng (puntos verdes). las clases laterales $Hg \in \frac{G}{H}$ son representados mediante rectángulos rosas; en particular, el rectángulo superior (en color morado) es el grupo $\frac{H}{N}$ que consta de las clases laterales Nh .

Ahora, podemos reemplazar f por un homomorfismo ϕ entre las clases laterales de $\frac{H}{N}$ en $\frac{G}{N}$ y la imagen de f , $\frac{G}{H}$. Así, notamos que cada clase lateral (rectángulo) es mapeado en 1 sólo elemento de $\frac{G}{H}$, y que $\frac{H}{N}$ es el núcleo de ϕ .

Por lo tanto, ϕ es un isomorfismo entre $\frac{G/N}{H/N}$ y $\frac{G}{H}$.

Teorema 1.3.9 (Teorema de correspondencia). También llamado **cuarto Teorema de isomorfismos**:

Sean $N \triangleleft G$ y $\nu : G \rightarrow \frac{G}{N}$ el mapeo natural. Entonces, la función

$$\tilde{\nu} : S \mapsto \frac{S}{N} \tag{1.65}$$

Es una biyección de la familia de subgrupos $S \leq G$ que contienen a N , a la familia de subgrupos $\frac{S}{N} \leq \frac{G}{N}$.

Más aún, si T, S son subgrupos de G , tales que $N \subset T$ y $N \subset S$, entonces

$$\text{i. } T \leq S \iff \frac{T}{N} \leq \frac{S}{N} \tag{1.66}$$

$$\text{Y, en este caso, } [S : T] = \left[\frac{S}{N} : \frac{T}{N} \right]. \tag{1.67}$$

$$\text{ii. } T \triangleleft S \iff \frac{T}{N} \triangleleft \frac{S}{N} \tag{1.68}$$

$$\text{Y, en este caso, } \frac{S}{T} \cong \frac{S/N}{T/N}. \tag{1.69}$$

***Nota:** La biyección $\tilde{\nu}$ mapea **subgrupos** en **grupos cocientes**; es una función que actúa sobre conjuntos de elementos, y no sobre los elementos de G en sí. Debemos tener cuidado en no confundirla con el mapeo natural $\nu : s \mapsto Ns$.

Dem. Primero, notemos que $N \triangleleft G$ y $N \subset S \leq G$ implican que $N \triangleleft S$, pues

$$gNg^{-1} = N \quad \forall g \in G.$$

En particular, si $s \in S$, entonces $s \in G$, por lo que

$$sNs^{-1} = N \quad \forall s \in S.$$

Por lo tanto, se puede definir un grupo cociente $\frac{S}{N}$ para cada subgrupo $S \leq G$ que contiene a N .

Ahora, sea \mathcal{S} la familia de subgrupos de G , y $\tilde{\mathcal{S}}$ la familia de subgrupos de $\frac{G}{N}$. Es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{S \mid N \subset S \leq G\} \\ \tilde{\mathcal{S}} &= \left\{ \frac{S}{N} \leq \frac{G}{N} \right\} \\ \implies \tilde{\nu} : \mathcal{S} &\rightarrow \tilde{\mathcal{S}} \\ S &\mapsto \frac{S}{N} = \{Ns \mid s \in S\}. \end{aligned}$$

Tomemos $S, T \in \mathcal{S}$ y supongamos que $\tilde{\nu}(S) = \tilde{\nu}(T)$:

$$\begin{aligned} \implies \frac{S}{N} &= \frac{T}{N} \\ \iff \{Ns \mid s \in S\} &= \{Nt \mid t \in T\} \end{aligned}$$

Entonces, para cada $s \in S$, existen $t \in T$ y $n \in N$ tales que $s = nt$. Pero

$$nt \in T \implies s \in T.$$

Equivalentemente, $n^{-1}s = n^{-1}nt = t$, por lo que

$$n^{-1}s \in S \implies t \in S.$$

Como s, t son arbitrarias, podemos asegurar que $S \subset T$ y $T \subset S$.

$$\therefore S = T$$

$$\therefore \tilde{\nu} \text{ es inyectiva.}$$

Ahora, tomemos $\frac{H}{N} \in \tilde{\mathcal{S}}$ arbitrario.

$$\begin{aligned} \frac{H}{N} &= \{Nh \mid h \in H \leq G\} \\ \implies \exists H \in \mathcal{S} \text{ tal que } \tilde{\nu}(H) &= \frac{H}{N}. \end{aligned}$$

Podemos asegurar que $H \in \mathcal{S}$, pues $\frac{H}{N}$ está definido siempre que $N \triangleleft H$.

$$\therefore \tilde{\nu} \text{ es sobreyectiva.}$$

$$\therefore \tilde{\nu} \text{ es una biyección entre } \mathcal{S} \text{ y } \tilde{\mathcal{S}}.$$

i. (\implies)

Sean $T, S \in \mathcal{S}$ y $T \leq S$. Entonces, T está contenido en S y, además, satisface los axiomas de grupo.

$$\implies \frac{T}{N} = \{Nt \mid t \in T\} \subset \{Ns \mid s \in S\} = \frac{S}{N}$$

Pues tanto N como T son subgrupos de S . Además,

$$1 \in T \implies N1 \in \frac{T}{N}.$$

$$\forall t_1, t_2 \in T, \quad t_1 t_2^{-1} \in T. \implies Nt_1, Nt_2, Nt_1 t_2^{-1} \in \frac{T}{N}.$$

Pero

$$\begin{aligned} Nt_1 Nt_2 &= Nt_1 t_2^{-1} N1 \\ &= Nt_1 t_2^{-1} t_2 Nt_2^{-1} \\ &= Nt_1 Nt_2^{-1} \\ &= Nt_1 (Nt_2)^{-1} \in \frac{T}{N} \\ \therefore \frac{T}{N} &\leq \frac{S}{N}. \end{aligned}$$

(\impliedby)

Supongamos que $\frac{T}{N} \leq \frac{S}{N}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{T}{N} &\subset \frac{S}{N} \\ \iff \{Nt \mid t \in T\} &\subset \{Ns \mid s \in S\} \end{aligned}$$

Entonces, para toda $\tau \in T$ existen $\sigma \in S$ y $n \in N$, tales que $\tau = n\sigma$.

Como $N \triangleleft S$, esto significa que $T \subset S$. Además, como $\frac{T}{N} \leq \frac{S}{N}$,

$$\begin{aligned} N1 \in \frac{T}{N} &\implies 1 \in T. \\ \forall Nt_1, Nt_2 \in \frac{T}{N}, \quad Nt_1 (Nt_2)^{-1} &= Nt_1 Nt_2^{-1} = Nt_1 t_2^{-1} \in \frac{T}{N}; \\ \implies \forall t_1, t_2 \in T, \quad t_1 t_2^{-1} &\in T. \end{aligned}$$

$$\therefore T \leq S.$$

Ahora, consideramos los conjuntos

$$X := \{Ts \mid s \in S\} \quad (\text{clases laterales de } T \text{ en } S)$$

$$\tilde{X} := \left\{ \left(\frac{T}{N} \right) Ns \mid Ns \in \frac{S}{N} \right\} \quad \left(\text{clases laterales de } \frac{T}{N} \text{ en } \frac{S}{N} \right)$$

Y definimos la función

$$\phi : X \longrightarrow \tilde{X}$$

$$Ts \longmapsto \phi(Ts) = \frac{T}{N} \nu(s) = \frac{T}{N} Ns$$

Siendo ν el mapeo natural.

Supongamos que existen $Ts_1, Ts_2 \in X$ tales que $\phi(Ts_1) = \phi(Ts_2)$. Entonces,

$$\frac{T}{N} Ns_1 = \frac{T}{N} Ns_2$$

$$\iff Ns_1 (Ns_2)^{-1} = Ns_1 Ns_2^{-1} = Ns_1 s_2^{-1} \in \frac{T}{N}$$

$$\iff s_1 s_2^{-1} \in T$$

$$\iff Ts_1 = Ts_2.$$

Por lo tanto, ϕ es inyectiva.

Ahora, tomemos $\frac{T}{N} N\sigma \in \tilde{X}$ arbitrario. Entonces,

$$\exists \sigma \in S \quad \text{tal que} \quad \frac{T}{N} N\sigma = \frac{T}{N} \nu(\sigma)$$

$$\implies \exists T\sigma \in X \quad \text{tal que} \quad \frac{T}{N} \nu(\sigma) = \phi(T\sigma).$$

$$\implies \tilde{X} \subset \text{Im}[\phi] \quad \wedge \quad \text{Im}[\phi] \subset \tilde{X}$$

$$\implies \tilde{X} = \text{Im}[\phi]$$

$\therefore \phi$ es sobreyectiva.

Por lo tanto, ϕ es una biyección de X a \tilde{X} , así que $|X| = |\tilde{X}|$; pero

$$|X| = [S : T] \quad \wedge \quad |\tilde{X}| = \left[\frac{S}{N} : \frac{T}{N} \right]$$

$$\therefore [S : T] = \left[\frac{S}{N} : \frac{T}{N} \right]$$

ii. (\implies)

Supongamos que $T \triangleleft S$. Entonces, las clases laterales de T en S forman un grupo cociente, $\frac{S}{T}$.

Sabemos que

$$T \triangleleft S \iff T \leq S \quad \wedge \quad sTs^{-1} = T \quad \forall s \in S.$$

Por el inciso (i), tenemos que $\frac{T}{N} \leq \frac{S}{N}$. Tomando $N\sigma \in \frac{S}{N}$, $N\tau \in \frac{T}{N}$ arbitrarios, obtenemos

$$(N\sigma)N\tau(N\sigma)^{-1} = N\sigma N\tau N\sigma^{-1}$$

$$= N\sigma(\sigma^{-1}N\sigma)\tau(\sigma^{-1}N\sigma)\sigma^{-1}$$

$$= NN\sigma\tau\sigma^{-1}N1$$

$$= N\tau N1$$

$$= N\tau.$$

$$\implies (N\sigma) \frac{T}{N} (N\sigma)^{-1} \subset \frac{T}{N}.$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} N\tau &= (N\sigma)(N\sigma)^{-1}N\tau(N\sigma)(N\sigma)^{-1} \in (N\sigma) \frac{T}{N} (N\sigma)^{-1} \\ \implies \frac{T}{N} &\subset (N\sigma) \frac{T}{N} (N\sigma)^{-1} \\ \implies \frac{T}{N} &= N\sigma \left(\frac{T}{N} \right) (N\sigma)^{-1}, \quad \forall N\sigma \in \frac{S}{N}; \\ &\quad \therefore \frac{T}{N} \triangleleft \frac{S}{N}. \end{aligned}$$

(\Leftarrow)

Ahora, supongamos que $\frac{T}{N} \triangleleft \frac{S}{N}$. Entonces, las clases laterales de $\frac{T}{N}$ en $\frac{S}{N}$ forman un grupo, $\frac{S/N}{T/N}$.

Sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{T}{N} \triangleleft \frac{S}{N} &\iff \frac{T}{N} \leq \frac{S}{N}, \\ (Ns) \frac{T}{N} (Ns)^{-1} &= \frac{T}{N}, \quad \forall Ns \in \frac{S}{N}. \end{aligned}$$

Por el inciso (i), $T \leq S$. Tomando $\sigma \in S$ y $N\tau \in \frac{T}{N}$ arbitrarios, tenemos:

$$\begin{aligned} N\tau &= (N\sigma)N\tau(N\sigma)^{-1} = N\sigma\tau\sigma^{-1} \\ &\iff \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} \in N. \end{aligned}$$

Pero $N \subset T$, por lo que $\sigma\tau\sigma^{-1} \in T \implies \sigma T\sigma^{-1} \subset T$.

Además,

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma(\sigma^{-1}\tau\sigma)\sigma^{-1} \in \sigma T\sigma^{-1} \\ \implies T &\subset \sigma T\sigma^{-1} \\ \implies T &= \sigma T\sigma^{-1}, \quad \forall \sigma \in S \\ &\quad \therefore T \triangleleft S. \end{aligned}$$

Por último, consideremos la función

$$\begin{aligned} \phi: \frac{S}{T} &\longrightarrow \frac{S/N}{T/N} \\ Ts &\longmapsto \frac{T}{N}\nu(s) = \frac{T}{N}Ns. \end{aligned}$$

Al igual que en el inciso (i), ϕ es biyectiva, por lo que

$$\left| \frac{S}{T} \right| = \left| \frac{S/N}{T/N} \right|$$

Vemos que, además, ϕ es un homomorfismo. Si $Ts_1, Ts_2 \in \frac{S}{T}$, entonces

$$\begin{aligned} \phi(Ts_1Ts_2) &= \phi(Ts_1s_2) \\ &= \left(\frac{T}{N} \right) Ns_1s_2 \\ &= \left(\frac{T}{N} \right) Ns_1Ns_2 \\ &= \left(\frac{T}{N} \right) Ns_1 \left(\frac{T}{N} \right) Ns_2 \\ &= \phi(Ts_1)\phi(Ts_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, ϕ es un isomorfismo.

$$\therefore \frac{S}{T} \cong \frac{S/N}{T/N}.$$

■

Este Teorema, como su nombre lo indica, habla de una **correspondencia** entre dos grupos T, S y sus respectivos grupos cocientes $\frac{T}{N}, \frac{S}{N}$:

Que T sea un subgrupo o subgrupo normal de S , asegura que $\frac{T}{N}$ también será un subgrupo o subgrupo normal de $\frac{S}{N}$; esto se puede ver de geoméricamente en las siguientes imágenes:

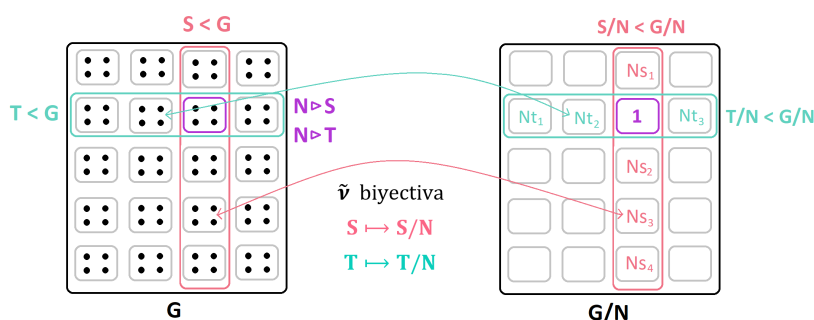


Figura 1.14: Biyección entre los subgrupos $S \leq G$ y los grupos cocientes $S/N \leq G/N$.

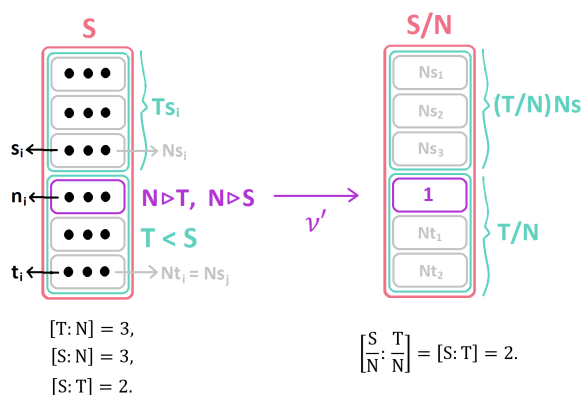


Figura 1.15: Representación gráfica del Teorema de correspondencia.

Sólo si $T \triangleleft S$ podemos asegurar la existencia del grupo $\frac{S/N}{T/N}$; en este caso, el índice coincide con el orden del grupo y se puede establecer un isomorfismo entre grupos cocientes.

Sin embargo, los resultados (i), (ii) significan lo mismo: si S es partido en n clases laterales de T , entonces $\frac{S}{N}$ también es partido en n clases laterales de $\frac{T}{N}$.

Tanto los grupos $S, \frac{S}{N}$ como sus particiones $\{Ts\}, \left\{ \frac{T}{N}Ns \right\}$ son equivalentes: lo único que los distingue es su tipo de elementos.

Los siguientes teoremas son consecuencias de las definiciones previas y de los teoremas de

isomorfismos; en particular, el Teorema de Zassenhaus es una aplicación del 1^{er} Teorema de isomorfismos:

Teorema 1.3.10 (Teorema de Zassenhaus). Sea G un grupo finito tal que, si $n > 1$, entonces $(xy)^n = x^n y^n$, para cualesquiera $x, y \in G$. Definiendo:

$$G[n] = \{z \in G \mid z^n = 1\} \quad (1.70)$$

$$G^n = \{x^n \mid x \in G\} \quad (1.71)$$

Entonces $G[n]$ y G^n son subgrupos normales de G y $|G^n| = [G : G[n]]$.

Dem. i. Primero, fijémonos en $G[n]$.

Por definición, $G[n] \subset G$. Además,

$$\begin{aligned} 1^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} &\implies 1 \in G[n]. \\ x, y \in G[n] &\implies x^n = y^n = 1, \end{aligned}$$

$$\implies 1 = (y^n)(y^n)^{-1} = 1(y^n)^{-1}$$

$$\iff (y^n)^{-1} = 1;$$

Pero $(y^n)^{-1} = y^{-n} = (y^{-1})^n$.

$$\implies y^{-1} \in G[n]$$

$$\implies (xy^{-1})^n = x^n (y^{-1})^n = 1$$

$$\implies xy^{-1} \in G[n].$$

$$\therefore G[n] \leq G.$$

Ahora, sean $g \in G$ y $z \in G[n]$ arbitrarias.

$$\begin{aligned} \implies (gzg^{-1})^n &= g^n z^n (g^{-1})^n \\ &= g^n g^{-n} \\ &= (gg^{-1})^n \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\implies gzg^{-1} \in G[n].$$

$$\implies gG[n]g^{-1} \subset G[n].$$

De la misma manera,

$$z = g(g^{-1}zg)g^{-1} \in gG[n]g^{-1};$$

$$\implies gG[n]g^{-1} \subset G[n],$$

$$\implies gG[n]g^{-1} = G[n].$$

$$\therefore G[n] \triangleleft G.$$

ii. Ahora, nos fijamos en G^n .

Por ser G un grupo, $x^n \in G \quad \forall x \in G$, por lo que $G^n \subset G$.

Veamos que $1^n = 1 \in G^n$. Además,

$$a, b \in G^n \implies \exists x, y \in G \text{ tales que } a = x^n, \quad b = y^n.$$

$$\implies ab^{-1} = x^n (y^n)^{-1} = x^n (y^{-1})^n = (xy^{-1})^n \in G^n.$$

$$\therefore G^n \leq G.$$

Ahora, sea $g \in G$. Entonces, todas las potencias de g también pertenecen a G :

$$g^n \in G \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies (g^n)^{-1} = g^{-n} \in G \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando $a = x^n \in G^n$, vemos que

$$\begin{aligned} gag^{-1} &= gx^n g^{-1} \\ &= (g^{-n+1} x g^{-n-1})^n \\ &= [g^{-(n-1)} x g^{-(n+1)}]^n \in G^n. \end{aligned}$$

Pues $g^{-(n\pm 1)} \in G$.

Entonces, $gG^n g^{-1} \subset G^n$; más aún,

$$\begin{aligned} a &= x^n \\ &= gg^{-1} x^n gg^{-1} \\ &= g(g^{-n-1} x g^{-n+1}) g^{-1} \\ &= g [g^{-(n+1)} x g^{-(n-1)}] g^{-1} \in gG^n g^{-1}. \end{aligned}$$

Entonces, $G^n \subset gG^n g^{-1}$.

$$\begin{aligned} \implies G^n &= gG^n g^{-1} \quad \forall g \in G; \\ \therefore G^n &\triangleleft G. \end{aligned}$$

iii. Ahora, consideremos la función

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow G^n \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

Si $x, y \in G$, entonces

$$\begin{aligned} f(xy) &= (xy)^n \\ &= x^n y^n \\ &= f(x)f(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es un homomorfismo.

Denotando por N al núcleo de f , si $x \in N$,

$$\begin{aligned} \implies f(x) &= x^n = 1 \\ \implies x &\in G[n] \\ \implies N &\subset G[n]; \end{aligned}$$

Además, si $y \in G[n]$, entonces $y^n = 1$.

$$\begin{aligned} \implies 1 &= f(1) = f(y^n) = [f(y)]^n \\ \implies y &\in N \\ \implies G[n] &\subset N \\ \implies G[n] &= N. \end{aligned}$$

Por el primer Teorema de isomorfismos,

$$G[n] \triangleleft G \wedge \frac{G}{G[n]} \cong \text{Im}[f].$$

Sea $a \in G^n$ arbitraria. Entonces,

$$\begin{aligned} \exists z \in G &\text{ tal que } a = z^n. \\ \implies f(z) &= z^n = a \\ \implies G^n &\subset \text{Im}[f]; \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es sobreyectiva y G^n es toda su imagen.

$$\begin{aligned} \implies \frac{G}{G[n]} &\cong G^n \\ \therefore \left| \frac{G}{G[n]} \right| &= [G : G[n]] = |G^n|, \end{aligned}$$

por definición del índice como número de clases laterales. ■

Definición 1.3.4. Un subgrupo $H \triangleleft G$ es llamado **subgrupo normal máximo** de G si no existe un subgrupo normal N de G tal que $H < N < G$.

Es decir, H es un subgrupo normal máximo si no existe ningún otro subgrupo propio de G , que contenga a H .

Proposición 1.3.11. H es un subgrupo normal máximo de G , si y sólo si $\frac{G}{H}$ es un grupo simple.

Dem. (\implies) Supongamos que $H \triangleleft G$ es máximo. Esto significa que no existe otro subgrupo $N \triangleleft G$ tal que $H < N$.

Consideremos el mapeo $\nu : G \longrightarrow \frac{G}{H}$, con núcleo H . Por el Teorema de correspondencia,

$$\neg(N \triangleleft G) \iff \neg\left(\frac{N}{H} \triangleleft \frac{G}{H}\right)$$

Entonces, $\frac{G}{H}$ no tiene subgrupos normales, además de los triviales: la identidad $\frac{H}{H} = \{H1\}$ y sí mismo. Por lo tanto, de acuerdo con la Definición (2.2.6), $\frac{G}{H}$ es simple.

(\impliedby) Ahora, supongamos que $\frac{G}{H}$ es simple. Entonces, sus únicos subgrupos normales son $\{H1\}$ (la identidad) y sí mismo. Es decir, no existe $\frac{N}{H}$, no trivial, tal que $\frac{N}{H} \triangleleft \frac{G}{H}$.

Veamos que H es el núcleo del mapeo natural $\nu : G \longrightarrow \frac{G}{H}$.

Por el Teorema de correspondencia,

$$\neg\left(\frac{N}{H} \triangleleft \frac{G}{H}\right) \iff \neg(N \triangleleft G)$$

Recordemos que el mapeo $\nu|_S$ es una biyección del conjunto de subgrupos $S \leq G$ que contienen a H , al conjunto de subgrupos de $\frac{G}{H}$. Entonces, los únicos subgrupos de G que contienen a H son H y G mismo.

En otras palabras, no existe $N \triangleleft G$ tal que $H < G < N$. Por lo tanto, H es un subgrupo normal máximo. ■

Teorema 1.3.12. Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo distinto del homomorfismo trivial, es decir, $f(g) \neq 1$ para algún g .

Si G es un grupo simple, entonces f es inyectiva.

Dem. Recordemos que, si una función $f : G \longrightarrow H$ es inyectiva, entonces $f(g) \neq f(h)$ para cualesquiera $g, h \in G$, siempre que $g \neq h$.

Supongamos que G es un grupo simple; entonces, no posee ningún subgrupo normal además de $\{1\}$ y sí mismo.

Ahora, si $f : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo, entonces el núcleo K de f debe ser un subgrupo normal de G , por el primer Teorema de isomorfismos.

$$\implies \text{Núcleo}[f] = G \vee \text{Núcleo}[f] = 1.$$

Si el núcleo de f es todo G , entonces $f(g) = 1 \forall g \in G$, lo cual contradice la hipótesis de que f no es el mapeo trivial $f : g \mapsto 1$.

Entonces, el núcleo de f debe ser igual a la identidad; es decir, 1 es el único elemento de G tal que $f(1) = 1$.

Sabemos que una condición necesaria y suficiente para que f sea inyectiva, es que su núcleo sea igual a la identidad.

$$\therefore G \text{ es simple} \implies f \text{ es inyectiva.} \quad \blacksquare$$

***Nota:** El Teorema (1.3.12) ilustra el hecho de que todo subgrupo normal es núcleo de algún homomorfismo. Si G no tiene subgrupos normales no triviales y f es un homomorfismo en G , entonces sólo existen 2 posibilidades: que el núcleo de f sea todo G (función trivial $f : g \mapsto 1$), o que el núcleo de f sea sólo 1 (función inyectiva).

Los grupos especial unitario SU_2 y especial ortogonal SO_3 son probablemente los grupos más importantes en la física elemental.

En el siguiente ejemplo, revisaremos sus propiedades más generales y probaremos que son **homomorfos**, es decir, que se pueden relacionar mediante una función que preserve el producto.

Ejemplo 1.3.4. Llamamos **grupo especial ortogonal en tres dimensiones** o **grupo de rotaciones en tres dimensiones** al grupo de transformaciones ortogonales con determinante igual a 1, y lo denotamos por SO_3 .

Trataremos de forma equivalente al grupo de matrices de rotación 3×3 . Entonces,

$$SO_3(\mathbb{R}) = \{R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid \|R(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \wedge \det(R) = 1\}. \quad (1.72)$$

Para determinar completamente a una rotación $R \in SO_3$, debemos conocer el **ángulo de rotación** $\psi \in [0, 2\pi)$ y la **dirección del eje** de rotación $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$, con $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, pues \hat{n} es un vector unitario.

Entonces, decimos que R está **parametrizada** por tres parámetros independientes: ψ, n_2, n_3 , pues se impone la restricción $n_1^2 = 1 - n_2^2 - n_3^2$. Por lo tanto, SO_3 es de dimensión 3.

La parametrización de R , como de cualquier transformación en GL_n , no es única. Esta elección particular de parámetros da lugar a la matriz [10]:

$$R = \begin{pmatrix} n_1^2(1 - \cos\psi) + \cos\psi & n_1n_2(1 - \cos\psi) - n_3\text{sen}\psi & n_1n_3(1 - \cos\psi) + n_2\text{sen}\psi \\ n_2n_1(1 - \cos\psi) + n_3\text{sen}\psi & n_2^2(1 - \cos\psi) + \cos\psi & n_2n_3(1 - \cos\psi) - n_1\text{sen}\psi \\ n_3n_1(1 - \cos\psi) - n_2\text{sen}\psi & n_3n_2(1 - \cos\psi) + n_1\text{sen}\psi & n_3^2(1 - \cos\psi) + \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Se puede probar que esta matriz satisface $R^T = R^{-1}$, una condición de las matrices ortogonales.

Por otro lado, llamamos **grupo especial unitario en dos dimensiones** al grupo de transformaciones unitarias con determinante igual a 1, así como a sus matrices unitarias asociadas, definidas sobre \mathbb{C}^2 :

$$SU_2(\mathbb{C}) = \{A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \mid A^\dagger = A^{-1} \wedge \det(A) = 1\}. \quad (1.73)$$

Entonces, cualquier elemento $A \in SU_2$ puede escribirse como [10]:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{C} \text{ tales que } |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Esto asegura que:

$$\begin{aligned} AA^\dagger &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa^* + bb^* & ab + ab \\ -a^*b^* + a^*b^* & aa^* + bb^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Otra parametrización de SU_2 se da mediante un vector unitario $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3) : n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, y un ángulo $\psi \in [0, 2\pi)$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\psi}{2} - in_3 \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} & (-in_1 - n_2) \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \\ (-in_1 + n_2) \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} & \cos \frac{\psi}{2} + in_3 \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

Notemos la similitud entre las parametrizaciones de SU_2 y de SO_3 : ambas requieren de tres parámetros independientes, por lo que decimos que son de dimensión 3, a pesar de que sus elementos sean matrices 2×2 y 3×3 , respectivamente.

La relación entre SU_2 y SO_3 se puede ver más claramente definiendo la función:

$$F : SU_2 \longrightarrow SO_3 \\ A \longmapsto F_A$$

Donde F_A es una transformación lineal que actúa sobre el espacio vectorial de **matrices anti-hermitianas** de tamaño 2×2 , con traza igual a 0:

$$su_2 := \{X \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid X^\dagger = -X^{-1} \wedge \operatorname{Tr}(X) = 0\},$$

Es decir, las entradas de X satisfacen $x_{ij} = -x_{ij}^*$ y $\sum_i x_{ii} = 0$.

Podemos probar que cualquier elemento de su_2 puede escribirse en la forma:

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -iz & -y - ix \\ y - ix & iz \end{pmatrix}, \text{ con } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

El espacio de matrices 2×2 es de dimensión 4. Sin embargo, como las matrices anti-hermitianas están sujetas a la condición $\operatorname{Tr}(X) = 0$, se requiere sólo de tres variables independientes para determinarlas; por tanto, el espacio su_2 es de dimensión 3.

Podemos probar que las siguientes matrices son hermitianas:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices reciben el nombre de **matrices de Pauli** y son ampliamente utilizadas en mecánica cuántica y en física de partículas, pues describen el espín de una partícula y su interacción con el campo electromagnético.

A partir de las matrices de Pauli, podemos formar una base ortonormal de su_2 :

$$S_x = -\frac{i}{2}\sigma_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \\ S_y = -\frac{i}{2}\sigma_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \\ S_z = -\frac{i}{2}\sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Así, toda matriz $X \in su_2$ se puede expresar como $X = xS_x + yS_y + zS_z$. Es decir, el vector X se escribe como es $\bar{X} = (x, y, z)$ respecto de la base $\beta = \{S_x, S_y, S_z\}$.

Notemos que el **determinante** de $X \in su_2$ es $\frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2)$, mientras que la **norma** de \bar{X} (de X en la base β) es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\implies \|\tilde{X}\|^2 = 4\det(X).$$

Tomando esto en cuenta, definimos a la función $F(A) = F_A$ como:

$$\begin{aligned} F_A : su_2 &\longrightarrow su_2 \\ X &\longmapsto AXA^\dagger. \end{aligned}$$

Verifiquemos que, efectivamente, $AXA^\dagger \in su_2$, para cualesquiera $A \in SU_2$, $X \in su_2$:

$$\begin{aligned} (AXA^\dagger)^\dagger &= AX^\dagger A^\dagger = -AXA^\dagger. \\ Tr(AXA^\dagger) &= Tr(A)Tr(X)Tr(A)^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Como F_A es una transformación lineal entre espacios tridimensionales, su expresión matricial es de tamaño 3×3 .

Escribiendo tanto a F_A como a los vectores X respecto de la base β , tenemos:

$$\begin{aligned} F_A(\bar{X}) &= \overline{AXA^\dagger} \\ \implies \|F_A(\bar{X})\|^2 &= \|\overline{AXA^\dagger}\|^2 \\ &= 4\det(AXA^\dagger) \\ &= 4\det(A)\det(X)\det(A)^{-1} \\ &= \|\bar{X}\|^2. \end{aligned}$$

Entonces, F_A es una transformación ortogonal, pues preserva la norma. Además, imponiendo la condición de que $\det(F_A) = 1$ para toda $A \in SU_2$, tenemos:

$$\{F_A : X \longmapsto AXA^\dagger \mid A \in SU_2\} \subset SO_3.$$

De hecho, que el determinante de F_A sea igual a 1 es consecuencia de la continuidad de F_A y de la topología de SU_2 , que es una variedad diferenciable y conectada.

Ya que conocemos la acción explícita de F_A , podemos probar que F es un homomorfismo. Si $A, B \in SU_2$, entonces

$$\begin{aligned} [F(AB)](X) &= F_{AB}(X) \\ &= (AB)X(AB)^\dagger \\ &= A(BXB^\dagger)A^\dagger \\ &= F_A \circ F_B(X) \\ &= [F(A)F(B)](X). \\ \therefore F(AB) &= F(A)F(B). \end{aligned}$$

Sin embargo, F **no es inyectiva**, pues:

$$\begin{aligned} [F(\mathbf{1})](X) &= F_1(X) = X \\ [F(-\mathbf{1})](X) &= F_{-1}(X) = (-\mathbf{1})X(-\mathbf{1})^\dagger = X. \\ \implies \text{Núcleo}[F] &\neq \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Más aún, podemos ver que

$$F(A) = F(-A) = F_A, \quad \forall A \in SU_2,$$

Por lo que F_A es multivaluada: a cada rotación en la imagen de F_A le corresponden dos transformaciones unitarias en SU_2 .

Decimos, entonces, que SU_2 y SO_3 son **homomorfos**, pero no isomorfos: poseen una estructura similar, mas no idéntica.

Se puede probar que F es **sobreyectiva**, es decir, que para toda $R \in SO_3$, existe $A \in SU_2$ tal que $F_A = R$. Esto significa que toda rotación se puede implementar como una transformación de similitud AXA^{-1} , con A unitaria.

En conclusión, SU_2 cubre dos veces (*double-covers*) SO_3 , pues F es sobreyectiva (cubre) y asigna dos elementos de SU_2 a un elemento de SO_3 (doble).

Esto tiene diversas implicaciones físicas. En física de partículas, las rotaciones aplicadas a partículas de espín $1/2$ (fermiones) pueden ser descritas mediante dos matrices en SU_2 , correspondientes a los signos $+$, $-$ [10].

***Nota:** El espacio vectorial su_2 es el **álgebra de Lie de SU_2** . Introduciremos el concepto de álgebra de un grupo en la sección (2.2); si se desea profundizar en las álgebras de Lie, sugerimos *Lie Algebras in Particle Physics*, de H. Georgi, *Lie Groups, Lie Algebras and Representations; An Elementary Introduction* de B. Hall, y *Lie Groups, Lie Algebras and their Representations* de V. S. Varadajan.

1.4. Grupos de Permutaciones

Históricamente, el concepto de grupo surgió con el estudio de las permutaciones. Al permutar las raíces de un polinomio, los matemáticos Lagrange, Cauchy y Galois establecieron que las permutaciones son mapeos biyectivos y que es posible definir una operación cerrada y asociativa entre ellos [7].

Esto motivó a Galois para inventar los grupos en 1830, con lo que asoció a cada polinomio un grupo de permutaciones de sus raíces. Es por esta razón que, en muchos textos de Teoría de Grupos, se inicia con el estudio de permutaciones y se llega de manera natural a la definición de grupo [1].

Los grupos de permutaciones son ampliamente utilizados en la física y la química. Por ejemplo, para estudiar la estructura geométrica de las moléculas y sus transformaciones, los reordenamientos de un conjunto de partículas, las simetrías de estados electrónicos, estados de espín y estados orbitales, etc.

En esta sección revisaremos las principales definiciones y propiedades de las permutaciones, centrándonos en permutaciones sobre conjuntos finitos. Al final de la sección, hablaremos de los grupos diedrales, que describen las simetrías de una figura geométrica plana.

Definición 1.4.1. Si X es un conjunto no vacío, entonces llamamos **permutación** a una función biyectiva $\alpha : X \rightarrow X$, y denotamos por S_X al conjunto de todas las permutaciones de X .

Usualmente, las permutaciones serán denotadas por las letras griegas $\alpha, \beta, \sigma, \tau, \dots$

Teorema 1.4.1. Sea X un conjunto no vacío. Entonces, el conjunto de permutaciones S_X , junto con la operación de composición de funciones, forma un grupo, llamado **grupo de permutaciones de X** .

Dem. Consideremos el conjunto $S_X = \{\alpha \mid X \rightarrow X \mid \alpha \text{ es biyectiva}\}$. Veamos que S_X satisface los cuatro axiomas de grupo:

- i. Sean $\alpha, \beta \in S_X$. Entonces, $\alpha(x), \beta(x) \in X$, para toda $x \in X$.

$$\begin{aligned} \implies \beta(x) &:= y \in X \\ \implies \alpha(y) &= \alpha(\beta(x)) := z \in X; \\ \implies \alpha \circ \beta &: X \rightarrow X. \end{aligned}$$

Es un resultado de matemáticas básicas que la composición de funciones biyectivas es biyectiva. Por lo tanto, $\alpha \circ \beta$ es biyectiva y la composición es cerrada en S_X :

$$\therefore \alpha \circ \beta \in S_X.$$

- ii. Consideremos otra función $\gamma \in S_X$. Entonces,

$$\begin{aligned} [(\alpha \circ \beta) \circ \gamma](x) &= (\alpha \circ \beta)(\gamma(x)) \\ &= \alpha(\beta(\gamma(x))) \\ &= \alpha(\beta \circ \gamma(x)) \\ &= [\gamma \circ (\beta \circ \gamma)](x); \\ \therefore (\alpha \circ \beta) \circ \gamma &= \gamma \circ (\beta \circ \gamma). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la composición es asociativa en S_X .

- iii. Consideremos el mapeo identidad:

$$\begin{aligned} id: X &\rightarrow X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Esta función es trivialmente biyectiva, por lo que $id \in S_X$. Además,

$$\begin{aligned} (id \circ \alpha)(x) &= id(\alpha(x)) = \alpha(x), \\ (\alpha \circ id)(x) &= \alpha(id(x)) = \alpha(x) \\ \implies id \circ \alpha &= \alpha \circ id = \alpha, \quad \forall \alpha \in S_X. \end{aligned}$$

Por lo tanto, S_X cuenta con un elemento identidad.

- iv. Como S_X consta de funciones biyectivas, todas ellas son invertibles. Además, la inversa de una función biyectiva también es biyectiva.

Por lo tanto, para cada $\alpha \in S_X$, existe $\alpha^{-1} \in S_X$ tal que

$$\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = id.$$

$\therefore S_X$ forma un grupo, bajo la composición de funciones. ■

***Nota:** Los grupos de permutaciones **no** suelen ser **abelianos**, pues la composición no es una operación conmutativa. Veremos que, en la mayoría de los casos, $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$.

Definición 1.4.2. Si X consta de n elementos, entonces X se puede ver como el conjunto de los primeros n números naturales:

$$X \approx \{1, 2, \dots, n\}$$

En este caso, llamamos **grupo simétrico en n letras** al conjunto de permutaciones de X , y lo denotamos por S_n .

Como existen $n!$ maneras de permutar un conjunto de n elementos, S_n es de orden $n!$.

Podemos ver a las permutaciones de X como un **reordenamiento** de sus elementos. Así,

$$\alpha : \{1, 2, \dots, n\} \mapsto \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \quad (1.75)$$

Es decir, la permutación α asigna a cada $j \in X$ una posición i_j en la lista de elementos.

Podemos representar a α mediante 2 filas:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}, \quad (1.76)$$

donde los elementos de la primera fila corresponden al conjunto original (dominio) y, los de la segunda, al conjunto permutado (imagen).

Ahora, ¿cómo representamos el producto o **composición** de permutaciones?

Fijémosnos particularmente en $\alpha, \beta \in S_n$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_{n-1} & j_n \end{pmatrix},$$

donde $\alpha : \mu \mapsto i_\mu$ y $\beta : \mu \mapsto j_\mu$. Entonces,

$$(\alpha \circ \beta)(\mu) = \alpha(\beta(\mu)) = \alpha(j_\mu) = i_{j_\mu}.$$

Esto significa que $\alpha \circ \beta$ lleva a los elementos de X del orden $(1, 2, \dots, n)$ al nuevo orden $(i_{j_1}, i_{j_2}, \dots, i_{j_n})$.

Ejemplo 1.4.1 (Grupo simétrico en 3 letras). Denotamos por S_3 al grupo de permutaciones en tres elementos, a los que etiquetamos como $\{1, 2, 3\}$.

S_3 es un grupo de orden $3! = 6$, pues existen $n!$ maneras de permutar un conjunto de n elementos.

Explícitamente, los elementos de S_3 son:

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \xi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La composición de permutaciones en tres elementos es también una permutación en tres elementos. Para conocer la forma explícita de cada $\xi_i \circ \xi_j$, se debe calcular su acción sobre $\{1, 2, 3\}$.

Por ahora, sólo calcularemos $\xi_2 \circ \xi_5$:

$$\begin{aligned}(\xi_2 \circ \xi_5)(1) &= \xi_2(\xi_5(1)) = \xi_2(3) = 1 \\(\xi_2 \circ \xi_5)(2) &= \xi_2(\xi_5(2)) = \xi_2(2) = 3 \\(\xi_2 \circ \xi_5)(3) &= \xi_2(\xi_5(3)) = \xi_2(1) = 2\end{aligned}$$

$$\implies \xi_2 \circ \xi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \xi_4.$$

Otra manera de visualizar la acción de $\xi_2 \circ \xi_5$, es mediante la siguiente imagen:

$$\xi_2 \circ \xi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

donde la primera fila de la matriz corresponde al conjunto original X ; la segunda fila, al reordenamiento X' efectuado por ξ_5 ; y la tercera fila, al reordenamiento efectuado por ξ_2 sobre X' .

También S_3 cuenta con todos sus elementos inversos, es decir, las funciones que *revierten* la permutación. Por ejemplo, si

$$\xi_3 : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3,$$

entonces

$$\begin{aligned}\xi_3^{-1} : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3. \\ \implies \xi_3 = \xi_3^{-1}.\end{aligned}$$

Podemos visualizarlo gráficamente:

$$\xi_3^{-1} \circ \xi_3 = \xi_3 \circ \xi_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \text{I}.$$

Se obtienen resultados análogos para las demás permutaciones de S_3 .

$$\therefore \xi_i = \xi_i^{-1} \quad \forall \xi_i \in S_3.$$

En la siguiente Definición, introducimos dos tipos de funciones muy importantes, que se utilizan en la demostración del Teorema de Cayley y en la teoría de representaciones.

Definición 1.4.3. Sea G un grupo y $g \in G$. Entonces, definimos la **traslación izquierda** L_a como:

$$L_a : G \longrightarrow G \tag{1.77}$$

$$g \longmapsto ag \tag{1.78}$$

Y la **traslación derecha** como:

$$R_a : G \longrightarrow G \tag{1.79}$$

$$g \longmapsto ga \tag{1.80}$$

De la misma manera, se pueden definir traslaciones L_g, R_g para cada $g \in G$.

Lema 1.4.2. Las funciones L_a y R_a , introducidas en la Definición (1.4.3), son **permutaciones** del grupo G :

$$L_a, R_a \in S_G. \tag{1.81}$$

Dem. Sólo probaremos el Lema para L_a , pues la demostración para R_a es completamente equivalente.

Veamos que L_a es una biyección:

- i. Supongamos que $L_a(g) = L_a(h)$, para ciertos $g, h \in G$.

$$\implies ag = ah$$

$$\implies g = h,$$

por la Ley de cancelación. Por lo tanto, L_a es inyectiva.

- ii. Sea $x \in G$ arbitraria. Entonces,

$$x = aa^{-1}x = L_a(a^{-1}x), \text{ con } a^{-1}x \in G.$$

Entonces, para cada $x \in G$, existe $a^{-1}x \in G$ tal que $L_a(a^{-1}x) = x$, por lo que L_a es sobreyectiva.

$$\therefore L_a \text{ es biyectiva y } L_a \in S_G.$$

■

Este teorema muestra que podemos encontrar permutaciones sobre un grupo G fácilmente: sólo basta operar sus elementos con algún $g \in G$ particular, y obtendremos un reordenamiento del grupo.

Por lo tanto, las traslaciones L_g, R_g permiten establecer una conexión entre el Lema de reordenamiento (1.1.3) y los grupos de permutaciones.

Definición 1.4.4. Sean $x \in X$ y $\alpha \in S_X$. Entonces, decimos que α **fija** a x si $\alpha(x) = x$, y decimos que **mueve** a x si $\alpha(x) \neq x$.

Definición 1.4.5. Sean $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ y $r \leq n$. Entonces, llamamos **ciclo finito de longitud r** o **r-ciclo** a una función $\alpha \in S_X$ que fija $n - r$ elementos de X y permuta los demás r , de la forma:

$$\alpha(x_1) = x_2, \alpha(x_2) = x_3, \dots, \alpha(x_{r-1}) = x_r, \alpha(x_r) = x_1.$$

En este caso, α es representada como:

$$\alpha = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r). \tag{1.82}$$

Los $r \leq n$ elementos que α mueve no necesariamente son contiguos o subsecuentes. Así, la acción general de un r-ciclo es:

$$\alpha(x_i) = x_j, \alpha(x_j) = x_k, \dots, \alpha(x_k) = x_l, \dots, \alpha(x_p) = x_i.$$

Y se representa como:

$$\alpha = (x_i \ x_j \ x_k \ \cdots \ x_p).$$

En otras palabras, un r -ciclo mueve en 1 posición a cada elemento de una cadena de $r \leq n$ elementos.

En física trabajamos con sistemas de muchas partículas y con espacios de dimensión infinita, por lo que se hace necesario considerar permutaciones y ciclos sobre conjuntos infinitos:

Definición 1.4.6. Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ un conjunto infinito, y sea α una permutación sobre X . Decimos que α es un **ciclo infinito** si

$$\alpha(x_i) = x_j,$$

Para cada par $i, j \in (-\infty, \infty)$, con $i \neq j$.

Por ahora, nos enfocaremos en los ciclos finitos. Veamos algunas consecuencias de la Definición (1.4.5):

- Un **1-ciclo** fija todos los elementos de X , pues debe satisfacer $\alpha(i_1) = i_1$. Por lo tanto, todo 1-ciclo corresponde coincide la **permutación identidad**, a la que denotaremos por (1).

- Un **2-ciclo** sólo intercambia dos elementos, por lo que también es llamado **trasposición**.

Por ejemplo, en el caso de S_3 (Ejemplo (1.4.1)), las permutaciones ξ_4 y ξ_5 son trasposiciones, pues fijan una letra e intercambian las otras dos:

$$\begin{aligned} \xi_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2 \ 3). \\ \xi_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 3). \end{aligned}$$

- Los siguientes ciclos generan la misma permutación:

$$\begin{aligned} (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) &= (x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_n \ x_1) \\ &= (x_3 \ x_4 \ \cdots \ x_n \ x_1 \ x_2) \\ &= \cdots \\ &= (x_n \ x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{n-1}) \end{aligned}$$

Por ejemplo, si nos fijamos en $\xi_2 \in S_3$, vemos que puede escribirse como un 3-ciclo:

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3),$$

Pues $\xi_2(1) = 2$, $\xi_2(2) = 3$ y $\xi_2(3) = 1$. Sin embargo, este ciclo es equivalente a $(2 \ 3 \ 1)$ y $(3 \ 1 \ 2)$, por lo que:

$$(1 \ 2 \ 3) = (2 \ 3 \ 1) = (3 \ 1 \ 2).$$

En general, podemos escribir un r -ciclo de r maneras distintas, empezando cada vez por un x_i distinto y preservando el orden de los elementos subsecuentes.

En el Ejemplo (1.4.1), vimos cómo calcular el producto de permutaciones, representadas como arreglos matriciales. Ahora, veamos que el producto de ciclos se calcula de la misma manera:

Ejemplo 1.4.2. Sean $\alpha, \beta \in S_6$ dadas por:

$$\begin{aligned}\alpha &= (2 \ 3 \ 1) (4 \ 5) \\ \beta &= (5 \ 6 \ 2) (3 \ 1).\end{aligned}$$

Evaluemos $\alpha \circ \beta$ en cada uno de los números:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta(1)) &= \alpha(3) = 1, & \alpha(\beta(2)) &= \alpha(5) = 4, \\ \alpha(\beta(3)) &= \alpha(1) = 2, & \alpha(\beta(4)) &= \alpha(4) = 5, \\ \alpha(\beta(5)) &= \alpha(6) = 6, & \alpha(\beta(6)) &= \alpha(2) = 3.\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (2 \ 4 \ 5 \ 6 \ 3).$$

La última igualdad se obtiene notando que $\alpha \circ \beta$ fija al 1 y permuta a los demás elementos en el orden $2 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 3 \mapsto 2$. Por lo tanto, $\alpha \circ \beta$ es un 5-ciclo.

Ahora, calculemos $\beta \circ \alpha$ para mostrar que $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$:

$$\begin{aligned}\beta(\alpha(1)) &= \beta(2) = 5, & \beta(\alpha(2)) &= \beta(3) = 1, \\ \beta(\alpha(3)) &= \beta(1) = 3, & \beta(\alpha(4)) &= \beta(5) = 6, \\ \beta(\alpha(5)) &= \beta(4) = 4, & \beta(\alpha(6)) &= \beta(6) = 2.\end{aligned}$$

$$\therefore \beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1 \ 5 \ 4 \ 6 \ 2),$$

Pues $\beta \circ \alpha : 1 \mapsto 5 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 2 \mapsto 1$.

Definición 1.4.7. Decimos que 2 permutaciones son **disjuntas** si cada elemento movido por una, es fijado por la otra. Es decir, si $\alpha, \beta \in S_X$ son disjuntas, entonces

$$\begin{aligned}\alpha(x) \neq x &\implies \beta(x) = x \\ \beta(y) \neq y &\implies \alpha(y) = y.\end{aligned}$$

Sin embargo, es posible que exista $z \in X$ tal que $\alpha(z) = \beta(z) = z$. Es decir, algunos elementos pueden quedar fijos en ambas permutaciones.

Una familia de permutaciones $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ es **disjunta** si cada par α_i, α_j es disjunto.

Teorema 1.4.3. Toda permutación $\alpha \in S_n$ es un ciclo o un producto de ciclos disjuntos.

En el segundo caso, X puede partirse en subconjuntos disjuntos X_1, X_2, \dots, X_k , tales que α sea un **ciclo** ζ_i en cada X_i .

Los ciclos $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ serán disjuntos, y la expresión de α como producto de estos ciclos será única:

$$\alpha = \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_k. \tag{1.83}$$

Definición 1.4.8. Si α es una permutación, entonces su expresión como producto de ciclos, dada por la Ecuación (1.83), es llamada **factorización en ciclos disjuntos**.

Si, además, cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ aparece en un solo ciclo de la expresión, decimos que la factorización de α en ciclos disjuntos es **completa**.

Dicha factorización contiene un 1-ciclo por cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ que α fija; sin embargo, es común omitir los 1-ciclos de la factorización, pues son iguales a la identidad.

***Nota:** La factorización de cada α en ciclos disjuntos es única, a excepción del orden, pues posible que algunos de sus ciclos conmuten.

Daremos una prueba informal para el Teorema (1.4.3):

Consideremos un conjunto finito X y cierta permutación $\alpha \in S_X$. Visualicemos X como una colección de puntos:

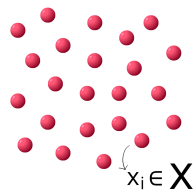


Figura 1.16: Representación del conjunto X .

La acción de α es un reordenamiento de los puntitos, donde ningún par puede ocupar la misma posición, ya que α es biyectiva.

Podemos representar la acción de α mediante flechas, que llevan a cada elemento a su nueva posición.

Entonces, obtendremos uno o más ciclos, pues los puntitos no se pueden cambiar de lugar indefinidamente. Es decir, en algún momento se regresará a la posición inicial: α llevará a un punto x_i a donde estaba el primer punto x_1 :

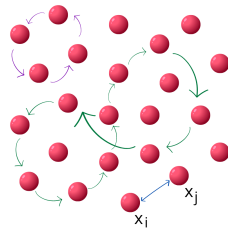
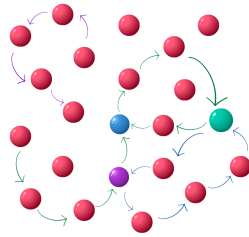


Figura 1.17: Ilustración del reordenamiento efectuado por α [8].

En la Figura (1.17), cada ciclo que compone a α fue trazado con un color diferente. Los elementos fijados por α corresponden a 1-ciclos.

En la siguiente imagen, consideramos una situación hipotética en que las flechas no se cierran en un ciclo y diferentes ciclos permutan al mismo elemento:



Pero, de ser así, ¿ α no sería biyectiva y $\alpha \notin S_X$? Por lo tanto, los ciclos que factorizan a α deben ser disjuntos.

Aunque ya sabemos que toda permutación $\sigma \in S_n$ se puede factorizar en ciclos disjuntos, aún no sabemos cómo encontrar dicha factorización. Para ello, proponemos el siguiente método [8]:

1. Escogemos una letra j que aún no aparezca en ningún ciclo de la factorización, y hallamos su imagen bajo σ .
2. Calculamos la imagen de $\sigma(j)$ bajo σ , y la imagen de ésta, y así sucesivamente, hasta que obtengamos un ciclo. Escribimos el ciclo obtenido.
3. Si todos los elementos $\{1, 2, \dots, n\}$ son permutados por alguno de los ciclos que encontramos, entonces el proceso ha finalizado. Si no, regresamos al paso número 1.

Ejemplo 1.4.3. Consideremos $\sigma \in S_9$, dada por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 3 & 2 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Deseamos escribir a σ como un producto de ciclos disjuntos. Aplicamos el primer paso del método al número 1:

$$\sigma : 1 \mapsto 4 \mapsto 3 \mapsto 9 \mapsto 6 \mapsto 1.$$

Así, obtenemos el 5-ciclo $(1 \ 4 \ 3 \ 9 \ 6)$.

Repetimos el procedimiento, fijándonos en que el 2 no pertenece al ciclo anterior:

$$\sigma : 2 \mapsto 7 \mapsto 5 \mapsto 2,$$

Y obtenemos el 3-ciclo $(2 \ 7 \ 5)$.

Finalmente, vemos que σ fija al número 8, por lo que podemos escribir el 1-ciclo (8) u omitirlo, ya que coincide con la identidad.

$$\therefore \sigma = (1 \ 4 \ 3 \ 9 \ 6)(2 \ 7 \ 5).$$



Figura 1.18: Visualización de los ciclos que factorizan a σ .

De manera intuitiva, sabemos que *reordenar* un conjunto es lo mismo que *intercambiar* sus elementos por pares, cierto número de veces. Matemáticamente, esto significa que toda permutación puede verse como la aplicación iterada de trasposiciones o 2-ciclos.

Formalizamos esto en el siguiente Corolario:

Corolario 1.4.4. Toda permutación $\alpha \in S_n$ se puede expresar como un producto de trasposiciones τ_j , es decir, de 2-ciclos:

$$\alpha = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m = (i_1 \ i_2)(i_3 \ i_4) \cdots (i_{k-1} \ i_k),$$

Más aún, todo r-ciclo se puede expresar como $r - 1$ trasposiciones:

$$(1 \ 2 \ \cdots \ r) = (1 \ r) (1 \ r - 1) \cdots (1 \ 3) (1 \ 2) \tag{1.84}$$

Así, la Ecuación (1.84) indica que efectuar un r-ciclo es equivalente a intercambiar los elementos por parejas.

Definición 1.4.9. Dos permutaciones $\alpha, \beta \in S_n$ tienen la **misma estructura de ciclo** si su factorización completa en ciclos disjuntos tiene el mismo número de r-ciclos, para cada $r = 1, 2, \dots, n$.

Es decir, si α y β tienen la misma estructura de ciclo, entonces se factorizan como:

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_k \\ \beta &= \chi_1 \chi_2 \cdots \chi_k \end{aligned}$$

Y sus factorizaciones incluyen la misma cantidad de 1-ciclos, 2-ciclos, 3-ciclos, etc. Sin embargo, esto no significa que sus ciclos sean iguales.

Ejemplo 1.4.4. Consideremos $\alpha, \beta \in S_{11}$:

$$\begin{aligned} \alpha &= (8 \ 9) (1 \ 2 \ 5 \ 7) (4 \ 10 \ 6) (3 \ 11). \\ \beta &= (5 \ 7 \ 8 \ 9) (1 \ 10) (2 \ 3 \ 4) (6 \ 11). \end{aligned}$$

Notemos que α y β tienen la misma estructura de ciclo, pues ambas están formadas por dos 2-ciclos, un 3-ciclo y un 4-ciclo.

Si consideramos dos permutaciones $\alpha, \beta \in S_n$, la permutación $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}$ tendrá la misma estructura de ciclo que β .

En la literatura se suele omitir el símbolo \circ , dando por hecho que la operación del grupo es la composición. Así,

$$\alpha \beta \alpha^{-1} \approx \beta.$$

Ejemplo 1.4.5. Sean $\alpha, \beta \in S_7$, dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha &= (2 \ 5 \ 6) (1 \ 4 \ 3). \\ \beta &= (1 \ 3) (2 \ 4 \ 7). \end{aligned}$$

Para encontrar α^{-1} , podemos enlistar las imágenes de cada número bajo α e identificar el mapeo que las revierte; esto es:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} : 1 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 6 \mapsto 5 \mapsto 2 \\ \implies \alpha^{-1} = (1 \ 3 \ 4) (2 \ 6 \ 5). \end{aligned}$$

Ahora, aplicamos $\alpha\beta\alpha^{-1}$ a cada letra:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta(\alpha^{-1}(1))) &= 4, & \alpha(\beta(\alpha^{-1}(2))) &= 2, \\ \alpha(\beta(\alpha^{-1}(3))) &= 7, & \alpha(\beta(\alpha^{-1}(4))) &= 1, \\ \alpha(\beta(\alpha^{-1}(5))) &= 3, & \alpha(\beta(\alpha^{-1}(6))) &= 6, \\ \alpha(\beta(\alpha^{-1}(7))) &= 5. \end{aligned}$$

Nos fijamos en que $\alpha\beta\alpha^{-1}$ intercambia el número 1 por el 4, realiza un 3-ciclo sobre $\{3, 7, 5\}$ y fija $\{2, 6\}$.

$$\implies \alpha\beta\alpha^{-1} = (1 \ 4) (3 \ 7 \ 5),$$

que es la misma estructura de ciclo que β .

Definición 1.4.10. Decimos que una permutación $\alpha \in S_n$ es **par** si se puede factorizar en un número par de trasposiciones; de lo contrario, decimos que es **impar**.

En general, la factorización en trasposiciones o 2-ciclos de una permutación α **no** es única. Sin embargo, todas esas factorizaciones tendrán la misma **paridad**, es decir, el número de trasposiciones involucradas siempre será par o impar.

Ejemplo 1.4.6. Consideremos de nuevo la permutación $\xi_2 \in S_3$, escrita como un 3-ciclo. Veamos que:

$$\begin{aligned} \xi_2 = (1 \ 2 \ 3) &= (1 \ 3) (1 \ 2) \\ &= (2 \ 3) (1 \ 3) \end{aligned}$$

Por lo tanto, ξ_2 es **par**, pues se expresa como 2 trasposiciones.

De la misma manera, consideremos $\xi_3 \in S_3$:

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 2)$$

Vemos que ξ_3 es **impar**, pues involucra una sola trasposición.

La siguiente función nos ayuda a identificar más fácilmente si una permutación es par o impar:

Definición 1.4.11. Si $\alpha \in S_n$ y $\alpha = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_k$ es su factorización completa en ciclos disjuntos, entonces definimos la **función signo** de α como:

$$\text{sgn}(\alpha) = (-1)^{n-k}, \tag{1.85}$$

con n el número de elementos a permutar y k el número de ciclos en la factorización de α .

Revisemos el caso de las **trasposiciones**: una trasposición τ mueve dos números (i, j) y fija los demás $n - 2$ elementos. Entonces, la factorización completa en ciclos disjuntos de τ involucra un solo **2-ciclo**: $k = 1$,

$$\implies \operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^{n-1} = -1.$$

Por lo tanto, toda trasposición tiene signo negativo. Esto da pie a las siguientes proposiciones:

Lema 1.4.5.

i. Si $\beta \in S_n$ y τ es una trasposición, entonces

$$\operatorname{sgn}(\tau\beta) = -\operatorname{sgn}(\beta). \tag{1.86}$$

ii. Sean $\alpha, \beta \in S_n$ arbitrarias. Entonces,

$$\operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{sgn}(\beta). \tag{1.87}$$

Teorema 1.4.6.

i. Una permutación $\alpha \in S_n$ es **par** $\iff \operatorname{sgn}(\alpha) = 1$.

ii. Una permutación $\alpha \in S_n$ es **impar** $\iff \operatorname{sgn}(\alpha) = -1$.

Dem. Como ya vimos, $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$ para toda trasposición τ .

Sea $\alpha = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_k$ la factorización en trasposiciones de α ; entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\alpha) &= \operatorname{sgn}(\tau_1)\operatorname{sgn}(\tau_2) \cdots \operatorname{sgn}(\tau_k) \\ &= (-1)(-1) \cdots (-1) \\ &= (-1)^k, \end{aligned}$$

usando el Lema ???. Por lo tanto,

$$(-1)^k = 1, \text{ si } k \text{ es par.}$$

$$(-1)^k = -1, \text{ si } k \text{ es impar.}$$

■

Teorema 1.4.7. El conjunto de todas las permutaciones **pares** en S_n es un subgrupo de S_n , de orden $\frac{n!}{2}$. Lo llamamos **grupo alternante** y lo denotamos por A_n .

Dem. De acuerdo con el Teorema (1.4.6), podemos definir a A_n como:

$$A_n := \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}. \tag{1.88}$$

Revisemos que A_n satisfaga las propiedades de subgrupo:

i. Sea (1) la identidad de S_n . Entonces,

$$\operatorname{sgn}[(1)] = (-1)^0 = 1,$$

Pues la identidad no involucra ninguna trasposición.

$$\therefore (1) \in A_n.$$

ii. Sean $\alpha, \beta \in A_n$. Entonces, ambas permutaciones involucran un número par de trasposiciones:

$$\begin{aligned}\alpha &= \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{2p}. \\ \beta &= \tau'_1 \tau'_2 \cdots \tau'_{2q}.\end{aligned}$$

Y sus inversas α^{-1}, β^{-1} también deben ser pares, pues sólo revierten cada trasposición:

$$\begin{array}{ccc} \beta : 1 \mapsto i_1 & \implies & \beta^{-1} : i_1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto i_2 & & i_2 \mapsto 2 \\ \dots & & \dots \\ n \mapsto i_n & & i_n \mapsto n \end{array}$$

$$\implies \text{sgn}(\alpha\beta^{-1}) = \text{sgn}(\alpha)\text{sgn}(\beta^{-1}) = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\therefore \alpha\beta^{-1} \in A_n,$$

usando las propiedades de la función signo.

$$\therefore A_n \leq S_n.$$

Ahora, veamos que sólo existen dos clases laterales de A_n en S_n :

$$\begin{aligned}A_n 1 &= A_n = \{\text{permutaciones pares}\} \\ A_n \tau &= \{\sigma\tau \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\} = \{\text{permutaciones impares}\},\end{aligned}$$

siendo τ una trasposición.

Aplicando el Teorema de Lagrange, obtenemos:

$$\begin{aligned}[S_n : A_n] &= \frac{|S_n|}{|A_n|} \\ \implies |A_n| &= \frac{|S_n|}{[S_n : A_n]} = \frac{n!}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe el mismo número de permutaciones pares e impares en S_n . ■

Ejemplo 1.4.7 (Grupo alternante en cuatro letras). El grupo simétrico en cuatro letras, S_4 , consta de $4! = 24$ permutaciones. Entonces, el grupo $A_4 \leq S_4$ consta de $\frac{4!}{2} = 12$ permutaciones:

- La identidad (1).
- Cuatro trasposiciones: (1 2), (2 3), (3 4), (4 1).
- Cuatro ciclos de longitud 3: (1 2 3), (2 3 4), (3 4 1), (1 2 4), que pueden factorizarse como trasposiciones dobles:

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3) &= (1\ 2)(2\ 3) \\ (2\ 3\ 4) &= (2\ 3)(3\ 4) \\ (3\ 4\ 1) &= (3\ 4)(4\ 1) \\ (1\ 2\ 4) &= (1\ 2)(2\ 4).\end{aligned}$$

- Tres funciones que permutan a todas las letras, y pueden escribirse como productos de trasposiciones disjuntas: (1 2)(3 4), (2 3)(4 1), (2 4)(3 1).

El grupo A_4 representa las simetrías de un tetraedro regular, por lo que también es llamado *grupo tetraédrico* [4]. Más adelante estudiaremos el *grupo de cuatro elementos* o *grupo de Klein*, que es el subgrupo más importante de A_4 .

Además de su relevancia histórica, puede que los grupos de permutaciones sean los más generales y útiles de todos. Esto se debe al teorema formulado por Cayley en 1854, que propone que cualquier grupo puede verse como un grupo de permutaciones.

Así, presentamos el enunciado y la demostración de uno de los resultados más importantes de la teoría de grupos:

Teorema 1.4.8 (Teorema de Cayley): Sea G un grupo y S_G su grupo de permutaciones. Entonces, G es isomorfo a un subgrupo de S_G .

En particular, si $|G| = n$, entonces existe un subgrupo $D \leq S_n$ de orden n , tal que

$$G \cong D \leq S_n. \quad (1.89)$$

***Nota:** Como ya mencionamos, S_n es de orden $n!$.

Por tanto, debe existir un subgrupo $\mathcal{S} \leq S_n$ de orden n , tal que $G \cong \mathcal{S}$.

Dem. Recordemos que, para cada $a \in G$, se puede definir la **traslación izquierda**:

$$\begin{aligned} L_a : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto ag \end{aligned}$$

y, como ya vimos, $L_a \in S_G$, para toda $a \in G$.

Ahora, definimos la función

$$L : G \longrightarrow S_G \quad (1.90)$$

$$a \longmapsto L_a \quad (1.91)$$

Veamos que L es un homomorfismo: si $a, b, g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} [L(ab)](g) &= L_{ab}(g) \\ &= abg \end{aligned}$$

y, tomando en cuenta que la operación de S_G es la composición de funciones,

$$\begin{aligned} [L(a)L(b)](g) &= (L_a \circ L_b)(g) \\ &= L_a[L_b(g)] \\ &= L_a(bg) \\ &= abg. \end{aligned}$$

$$\therefore L(ab) = L(a)L(b).$$

$\therefore L$ es un homomorfismo.

Ahora, veamos que L es inyectiva: si existieran $a, b \in G$ tales que $L(a) = L(b)$,

$$\begin{aligned} \implies L_a &= L_b \\ \implies L_a(g) &= L_b(g) \\ \iff ag &= bg \\ \iff a &= b. \end{aligned}$$

Entonces, L es un mapeo biyectivo entre G y la imagen de L . Además, por el Teorema (1.3.3), la imagen de L es un subgrupo de S_G :

$$\therefore G \cong \text{Im}[L] \leq S_G. \quad (1.92)$$

Si la imagen de L fuera todo S_G , entonces

$$G \cong S_G.$$

En este caso, todas las permutaciones de G serían traslaciones, que se obtienen multiplicando los elementos de G por cada g particular. ■

El Teorema de Cayley nos dice que podemos insertar a un grupo cualquiera G en su grupo de permutaciones S_G . Más aún, al introducir las funciones L y R , nos permite **representar** a G como un grupo de permutaciones $D \leq S_G$, que tiene la misma cantidad de elementos y preserva la estructura del producto.

Definición 1.4.12. Los homomorfismos $L : g \mapsto L_g$, $R : g \mapsto R_g$, son llamados **representación regular izquierda** y **representación regular derecha** del grupo G , respectivamente.

En el Capítulo 2, profundizaremos en L , R y otro tipo de representaciones que puede tener un grupo.

***Nota:** Se demostró que L es un homomorfismo; sin embargo, de acuerdo con nuestra convención, R revierte el producto:

$$\begin{aligned} [R(ab)](g) &= R_{ab}(g) \\ &= gab \\ &= (ga)b \\ &= R_b(ga) \\ &= (R_b \circ R_a)(g) \\ &= [R(b)R(a)](g). \end{aligned}$$

Sin embargo, otros textos usan la convención de evaluar las funciones por el lado derecho; así,

$$\begin{aligned} (g)[R(ab)] &= (g)R_{ab} \\ &= gab \\ &= (ga)R_b \\ &= (g)(R_a \circ R_b) \\ &= (g)[R(a)R(b)], \end{aligned}$$

con lo que R preserva el producto.

Como ya demostramos, las funciones biyectivas de un conjunto en sí mismo, llamadas *permutaciones*, forman un grupo. Entre estas funciones, tenemos las **simetrías** de objetos matemáticos o de sistemas físicos, es decir, las transformaciones que dejan al objeto o a sus propiedades invariantes.

En particular, las simetrías de figuras geométricas planas son ampliamente utilizadas en matemáticas y física, por lo que reciben un nombre especial:

Definición 1.4.13. Llamamos **grupo diedral** o **diédrico** al conjunto de simetrías de un polígono regular, junto con la operación de *composición de funciones*.

Si el polígono en cuestión tiene $n \geq 3$ lados, entonces su grupo diedral es denotado por D_n y es de orden $2n$. En otros textos se le llama D_{2n} , para explicitar su orden.

Decimos que un sistema u objeto tiene **simetría** si posee una propiedad que permanece invariante ante ciertas transformaciones. Por ejemplo, puede tratarse de rasgos geométricos, como la longitud de los lados de una figura o su orientación en un sistema de coordenadas, que permanecen invariantes ante traslaciones o rotaciones. También puede tratarse de la forma de

una ecuación diferencial, invariante ante ciertas operaciones. Físicamente, podemos referirnos a la energía total de un sistema, que se conserva bajo la evolución temporal.

En todos los casos, hay una relación de simetría entre el objeto original y el objeto transformado, y decimos que el objeto o la propiedad es **invariante ante transformaciones**.

En el caso de los Grupos Diedrales, sus elementos son transformaciones **congruentes**, es decir, que preservan la distancia. Es por ello que la figura no se deforma: sigue teniendo n lados iguales.

Ejemplo 1.4.8 (Grupo diedral del triángulo). En el Ejemplo (1.1.8), estudiamos al Grupo cíclico de 3 elementos C_3 , que puede verse como el grupo de rotaciones de un triángulo equilátero.

También mencionamos que el grupo diedral D_3 consta de todas las transformaciones de simetría del triángulo equilátero, por lo que C_3 es un subgrupo de D_3 . Los otros tres elementos de D_3 corresponden a las reflexiones del triángulo respecto a sus bisectrices:

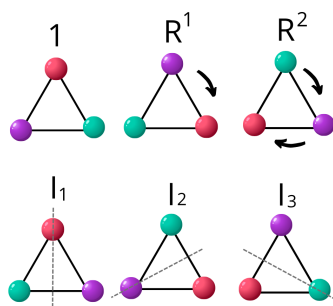


Figura 1.19: Grupo diedral D_3 .

Así, D_3 consta de seis transformaciones que conservan la forma del triángulo, pues sólo permutan sus vértices. Más adelante, veremos la forma explícita de estas transformaciones.

Veamos algunas propiedades de los grupos diedrales:

- Así como los lados de la figura, el orden de D_n es finito. Por tanto,

$$g^{2n} = 1 \quad \forall g \in D_n. \tag{1.93}$$

- Los elementos de D_n son funciones biyectivas entre los n vértices del polígono. Para representarlas, podemos etiquetar los vértices como $\{1, 2, \dots, n\}$ y realizar permutaciones entre ellos [4].

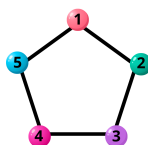


Figura 1.20: Numeración de vértices de un pentágono.

En particular, si queremos representar las rotaciones de la figura, debemos tomar el primer vértice y mapearlo en alguno de los $n - 1$ restantes. A su vez, los demás vértices son mapeados en sentido contrarreloj (positivo) o en sentido del reloj (negativo).

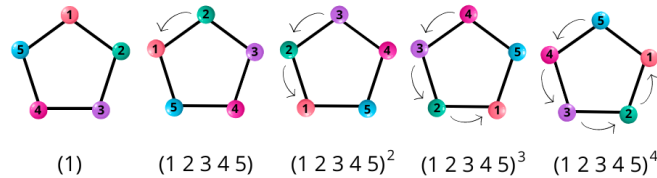


Figura 1.21: Rotaciones en D_5 .

En cambio, si queremos representar las reflexiones de la figura, debemos trazar un eje que atraviese la figura por la mitad, e intercambiar los vértices que se encuentren en posiciones simétricas respecto al eje.

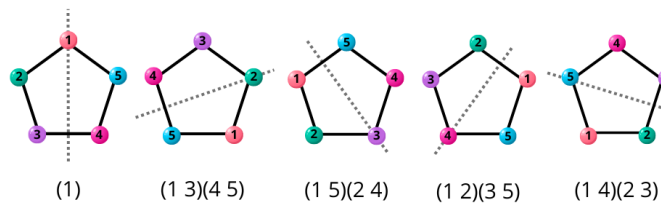


Figura 1.22: Reflexiones en D_5 .

Cada una de las permutaciones descritas representa una *transformación de simetría* de la figura.

- Todos los elementos de D_n son generados por la transformación de **rotación** y la transformación de **reflexión** o **inversión**. Éstas pueden representarse en la notación usual de permutaciones:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} : \text{ Rotación.} \quad (1.94)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix} : \text{ Reflexión.} \quad (1.95)$$

En la primera fila, se enlistan los vértices en su orden original, y en la segunda, sus posiciones tras haber sido permutados.

Usualmente, se elige al vértice #1 sobre el eje de reflexión, de modo que éste permanezca fijo y el resto de vértices sean mapeados al lado opuesto del polígono.

- Por el inciso anterior, el grupo diedral puede escribirse como:

$$D_n = \langle R, I \rangle, \quad (1.96)$$

Por lo que cuenta con todas las potencias y productos de R con I . Además, satisface:

$$R^n = 1. \tag{1.97}$$

$$I^2 = 1. \tag{1.98}$$

$$IR = R^{-1}I. \tag{1.99}$$

Podemos probar estas ecuaciones de manera geométrica. Particularmente, nos fijamos en D_5 :

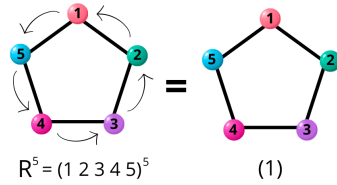


Figura 1.23: Ilustración de la Ecuación (1.97) para $n = 5$.

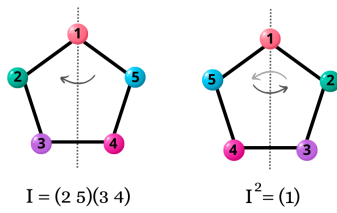


Figura 1.24: Ilustración de la Ecuación (1.98) para $n = 5$.

La Ecuación (1.99) debe entenderse como una composición de funciones. Así, $IR = I \circ R$, por lo que primero aplicamos la rotación y después la reflexión, mientras que en $R^{-1}I$, primero aplicamos la reflexión y luego la rotación inversa.

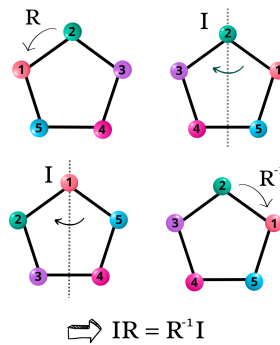


Figura 1.25: Ilustración de la Ecuación (1.99) para $n = 5$.

- De las ecuaciones (1.97), (1.99), se hace la generalización:

$$IR^m = R^{-m}I, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{1.100}$$

Estas relaciones determinan completamente al grupo. Así, cualquier elemento $\xi \in D_n$ puede escribirse como:

$$\xi = (R_1^i I_1^j)(R_2^k I_2^l) \cdots (R_m^v I_m^w),$$

Donde cada R_j es una rotación en un ángulo $\theta_i = \frac{2\pi i}{n}$, y cada I_j es una reflexión respecto a un eje ℓ_j .

***Nota:** Para ser una transformación de simetría, el eje ℓ_j debe pasar por el centro del polígono: Si n es impar, entonces ℓ_j atravesará un vértice del polígono o un lado por la mitad. Si es par, atravesará dos vértices o dos lados por la mitad.

Si consideramos que el plano es un sistema de coordenadas cartesianas XY , entonces los vértices de un polígono de n lados están ubicados en:

$$\begin{aligned} x_k &= r \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \\ y_k &= r \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \end{aligned}$$

para cada $k = 1, 2, \dots, n$.

D_n consta de todas las transformaciones que van del polígono F_n a sí mismo:

$$\begin{aligned} \xi : F_n &\longrightarrow F_n \\ \vec{p} &\longmapsto \vec{p}' \end{aligned}$$

donde \vec{p}, \vec{p}' son puntos dentro o sobre los lados del polígono. En particular,

$$\begin{aligned} \xi(x_k) &= x_l = r \cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right) \\ \xi(y_k) &= y_l = r \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi l}{n}\right), \quad \text{con } l = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Así, toda permutación $\xi \in D_n$ mapea vértices en vértices.

Sabemos que toda transformación lineal tiene una representación matricial asociada. Más adelante, veremos que también los elementos abstractos de un grupo pueden representarse como matrices.

Considerando un polígono de n lados sobre el plano XY , podemos representar a los elementos de D_n como matrices de 2×2 que actúan sobre los puntos del polígono [5]:

- **Rotación** en un ángulo $\theta_k = \frac{2\pi k}{n}$:

$$R_k = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n} & -\operatorname{sen} \frac{2\pi k}{n} \\ \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{n} & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} \quad (1.101)$$

Notemos que $R_n = \mathbf{1}$, pues devuelve a los vértices a su posición original. De la misma manera,

$$(R_k)^n = \mathbf{1}, \quad \forall R_k \in D_n. \quad (1.102)$$

Esto se debe a que n rotaciones sucesivas en ángulos $\theta_k = 2\pi k/n$, resultan en una rotación de $2\pi k$, es decir, de k revoluciones, por lo que volvemos a la posición inicial.

La rotación inversa de cada R_k debe satisfacer $(R_k)(R_k^{-1}) = \mathbf{1}$. Entonces,

$$R_k^{-1} = (R_k)^{n-1} = R_{n-k}. \quad (1.103)$$

Por lo tanto, D_n cuenta con n Rotaciones: la identidad $\mathbf{1} = R_0 = R_n$ y $\{R_1, R_2, \dots, R_{n-1}\}$.

El conjunto de rotaciones es un subgrupo cíclico de D_n y tiene orden n . Lo llamaremos **grupo de rotaciones discretas** en un plano y lo denotaremos por \mathcal{R}_n .

Por ejemplo, retomando el Ejemplo (1.4.8), podemos colocar un **triángulo equilátero** sobre el plano XY, de modo que sus vértices tengan coordenadas:

$$x_k = r \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right), \quad y_k = r \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{3}\right), \quad \text{con } k = 1, 2, 3.$$

O, en notación vectorial,

$$\vec{x}_k = r \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{2\pi k}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

donde r es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

El grupo de rotaciones $\mathcal{R}_3 \leq D_3$ posee tres elementos, cuyas representaciones matriciales son:

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} & \cos\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} \cos\frac{6\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{6\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{6\pi}{3} & \cos\frac{6\pi}{3} \end{pmatrix},$$

y, efectivamente, R_3 es igual a la matriz identidad.

Para aplicar rotaciones a la figura, realizamos la multiplicación matricial $R_k \vec{x}_k$.

En particular, una rotación de $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ mueve al 2° vértice a la posición \vec{x}_3 :

$$R_1 \vec{x}_2 = r \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\frac{6\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{6\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Probemos que \mathcal{R}_3 es un grupo cíclico:

$$\begin{aligned} (R_1)^2 &= \begin{pmatrix} \operatorname{Cos}^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{Sen}^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -2\operatorname{cos}\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \\ 2\operatorname{cos}\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} & \operatorname{Cos}^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{Sen}^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} & \cos\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} = R_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R_1)^3 &= \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} - \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} & -\operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{4\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \\ \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{4\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} - \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{6\pi}{3} & -\operatorname{sen} \frac{6\pi}{3} \\ \operatorname{sen} \frac{6\pi}{3} & \cos \frac{6\pi}{3} \end{pmatrix} = R_3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{R}_3 = \langle R_1 \rangle = \{R_1, R_1^2, R_1^3\}$. De acuerdo con el Ejemplo (1.1.8), \mathcal{R}_3 es isomorfo a C_3 .

También se puede ver que:

$$(R_2)^3 = \begin{pmatrix} \cos \frac{12\pi}{3} & -\operatorname{sen} \frac{12\pi}{3} \\ \operatorname{sen} \frac{12\pi}{3} & \cos \frac{12\pi}{3} \end{pmatrix} = \mathbf{1},$$

Con lo que se prueba la validez de la Ecuación (1.102) para $n = 3$.

- **Reflexión** respecto de un eje que pasa por el centro del polígono.

Es posible aplicar una reflexión respecto a cualquier eje ℓ_j con pendiente m_j ; pero comúnmente colocamos la figura en un sistema de coordenadas cartesiano y elegimos como ejes de reflexión los ejes X y Y .

Las matrices de reflexión correspondientes son:

$$\text{Reflexión respecto al Eje X : } I_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.104)$$

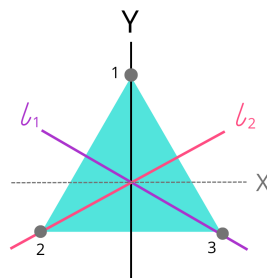
$$\text{Reflexión respecto al Eje Y : } I_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.105)$$

En el caso del triángulo equilátero, se suele colocar el origen del plano XY en su centro geométrico y, como ejes de reflexión, se toman:

$$\text{Eje Y, con pendiente } m_Y = \frac{\pi}{2}.$$

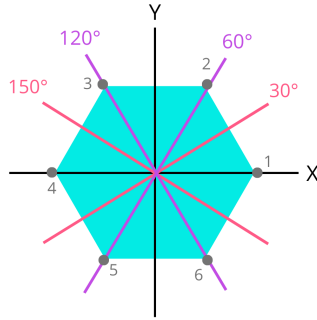
$$\text{Eje } \ell_1, \text{ con pendiente } m_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}.$$

$$\text{Eje } \ell_2, \text{ con pendiente } m_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}.$$



Por otro lado, si n es par, entonces debemos considerar los ejes de reflexión que atraviesan sus vértices y los que atraviesan sus lados por la mitad.

Por ejemplo, los ejes de reflexión de un hexágono son seis rectas ℓ_j con pendientes $m_j = \frac{j\pi}{6}$, respectivamente.



- El resto de elementos de D_n se puede expresar como el producto de una rotación y una inversión, de acuerdo con la Ecuación (1.96).

En particular, la **reflexión** respecto al **eje Y**, seguida de una **rotación** en $\theta_k = \frac{2\pi k}{n}$, se expresa como:

$$U_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n} & \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{n} \\ -\operatorname{sen} \frac{2\pi k}{n} & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{2\pi k}{n} & -\operatorname{sen} \frac{2\pi k}{n} \\ -\operatorname{sen} \frac{2\pi k}{n} & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}.$$

Al igual que las rotaciones R_k , sólo hay n transformaciones U_k en D_n , pues $U_0 = U_n = \mathbf{1}$ para toda $k = 1, 2, \dots, n$.

En este caso, las inversas U_k^{-1} se obtienen aplicando la reflexión respecto al mismo eje, seguida de la rotación inversa:

$$\begin{aligned} U_k^{-1} &= R_k^{-1} I_y \\ \implies U_k U_k^{-1} &= I_y R_k R_k^{-1} I_y = I_y I_y = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Denotemos por \mathcal{U} al conjunto de transformaciones U_k , es decir, *reflexiones respecto al eje Y, seguidas de una rotación R_k* . Entonces, \mathcal{U} no es un subgrupo de D_n , pues no posee al elemento identidad ni a los inversos.

Sin embargo, \mathcal{U} es un **clase lateral izquierdo** de \mathcal{R} en D_n :

$$\mathcal{U} = I_y \mathcal{R} = \{I_y R_k : R_k \in \mathcal{R}\}.$$

Lo mismo se cumple para el conjunto de reflexiones respecto a cualquier eje ℓ_j , seguidas de una rotación.

Notando que $I_y = I_y R_0$, tenemos que todas las reflexiones pertenecen al clase lateral \mathcal{U} .

$$\begin{aligned} \therefore D_n &= \mathcal{R} \cup \mathcal{U}. \\ \therefore |D_n| &= |\mathcal{R}| + |\mathcal{U}| = 2n. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.9 (Grupo de Klein). Llamamos *grupo de Klein* o *4-grupo* al conjunto de cuatro elementos:

$$V := \{1, a, b, c\}, \tag{1.106}$$

sujetos a la condición de que cada uno es su propio inverso:

$$a = a^{-1}, \quad b = b^{-1}, \quad c = c^{-1} \tag{1.107}$$

$$\implies a^2 = b^2 = c^2 = 1. \tag{1.108}$$

De acuerdo con la Ecuación (1.108), el grupo V tiene un exponente $n = 2$.

Podemos ver al grupo de Klein como el **grupo de simetrías** de un **rectángulo no regular**:

- a = reflexión horizontal
- b = reflexión vertical
- c = rotación de $\pi = 180^\circ$.

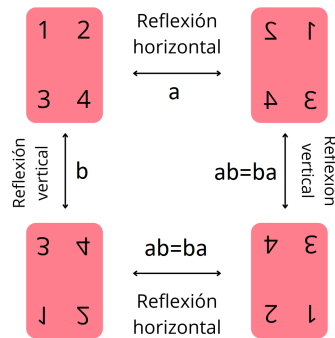


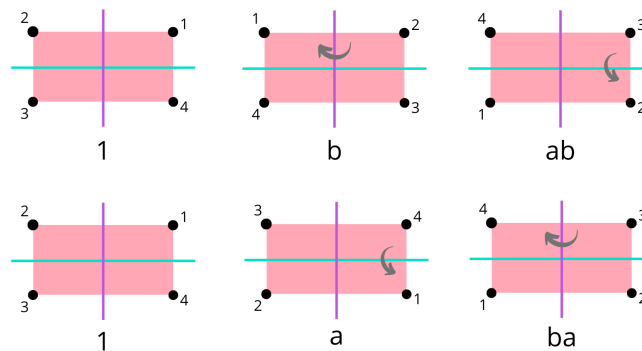
Figura 1.26: Representación gráfica de los cuatro elementos del grupo de Klein [4].

La aplicación sucesiva de dos reflexiones respecto al mismo eje, o de dos rotaciones de π radianes, devuelve al rectángulo a su posición original, por lo que se cumple la Ecuación (1.107).

Además,

$$ab = ba = c, \quad ac = ca = b, \quad bc = cb = a.$$

Lo cual se puede ver geoméricamente:



Por tanto, también podemos escribir a V como el grupo generado por a, b :

$$V = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1 \rangle.$$

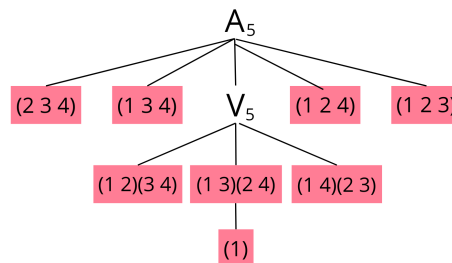
Recordemos que los grupos diedrales describen las simetrías de un polígono regular (un polígono de n lados iguales), y constan de $2n$ elementos. Por lo tanto, el grupo de Klein **no** es un grupo diedral, ya que describe las simetrías de un polígono irregular de cuatro lados (rectángulo no cuadrado) y consta sólo de cuatro elementos.

No obstante, V es un grupo de permutaciones, ya que, efectivamente, permuta los vértices de un rectángulo, dejando **invariante** su forma (consta de transformaciones congruentes).

Más aún,

$$V \triangleleft S_4 \wedge V \triangleleft A_4.$$

En el siguiente esquema, se desglosan los elementos de V como subgrupo de A_4 :



A lo largo de esta sección, mencionamos que un grupo de permutaciones puede ser *representado* de diferentes maneras (como matrices o como ciclos); sin embargo, será hasta el Capítulo 2 que profundicemos en qué es una representación y cómo encontrarla.

También vale la pena mencionar que sólo hemos introducido rotaciones **discretas**; más aún, las rotaciones de un grupo diedral D_n siempre son múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$, por lo que podemos decir que están cuantizadas.

Sin embargo, en física es común trabajar con rotaciones **continuas**, es decir, que pueden tomar valores en un intervalo no contable $[\theta_1, \theta_2] \subset \mathbb{R}$. Este tipo de transformaciones pertenece a un **grupo de Lie**, que tiene una estructura de variedad diferenciable y es estudiado en el marco de la Teoría de Representaciones.

1.5. Producto Directo

En física, comúnmente trabajamos con sistemas compuestos de partes más simples o fáciles de estudiar. Así, un grupo G puede verse como la *combinación* o *unión* de grupos más simples H_1, H_2, H_3, \dots

En esta sección, veremos que es posible combinar 2 grupos o más, mediante la operación de producto directo.

Definición 1.5.1. Sean H y K grupos. Entonces, su **producto directo** consta de todos los pares ordenados (h, k) , con $h \in H$ y $k \in K$, y se denota por $H \times K$.

Probablemente nos resulte más familiar el *producto cartesiano* entre conjuntos, mediante el cual se define el sistema de coordenadas cartesianas:

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in E_i, \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n.\}$$

Este tipo de producto se puede generalizar a cualquier estructura algebraica bajo el nombre de *producto directo*, y la misma notación $(V \times W)$ se usa para denotar el producto de dos espacios topológicos cualesquiera.

Teorema 1.5.1. El producto directo $H \times K$ forma un grupo, bajo la operación:

$$(h, k)(h', k') = (hh', kk'). \quad (1.109)$$

Con $h, h' \in H$ y $k, k' \in K$.

Dem. Revisemos que $H \times K$ satisface los axiomas de grupo:

i. Sean $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$. Entonces,

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1h_2, k_1k_2).$$

Como H y K son grupos, $h_1h_2 \in H$ y $k_1k_2 \in K$, por lo que $(h_1h_2, k_1k_2) \in H \times K$.

Por lo tanto, se cumple la cerradura del producto en $H \times K$.

ii. Sea (h_3, k_3) otro elemento de $H \times K$. Entonces,

$$\begin{aligned} [(h_1, k_1)(h_2, k_2)](h_3, k_3) &= (h_1h_2, k_1k_2)(h_3, k_3) \\ &= (h_1h_2h_3, k_1k_2k_3) \\ &= (h_1, k_1)(h_2h_3, k_2k_3) \\ &= (h_1, k_1)[(h_2, k_2)(h_3, k_3)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la operación de $H \times K$ es asociativa.

iii. Sea 1_H la identidad de H y 1_K la identidad de K ; entonces,

$$(1_H, 1_K) \in H \times K.$$

$$\begin{aligned} \implies (h, k)(1_H, 1_K) &= (h1_H, k1_K) = (h, k) \\ \text{y } (1_H, 1_K)(h, k) &= (1_Hh, 1_Kk) = (h, k). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H \times K$ cuenta con un elemento **identidad** $\mathbb{1} = (1_H, 1_K)$, tal que

$$(h, k)\mathbb{1} = \mathbb{1}(h, k) = (h, k) \quad \forall (h, k) \in H \times K.$$

iv. Sabemos que H y K cuentan con elementos inversos h^{-1}, k^{-1} para cada $h \in H, k \in K$. Entonces, $(h^{-1}, k^{-1}) \in H \times K$ satisface:

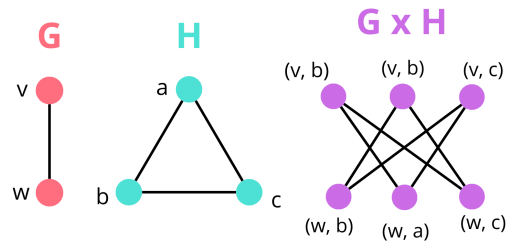
$$\begin{aligned} (h, k)(h^{-1}, k^{-1}) &= (hh^{-1}, kk^{-1}) = (1_H, 1_K) = \mathbb{1} \\ \text{y } (h^{-1}, k^{-1})(h, k) &= (h^{-1}h, k^{-1}k) = (1_H, 1_K) = \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $(h, k) \in H \times K$, existe $(h, k)^{-1} = (h^{-1}, k^{-1}) \in H \times K$ tal que

$$(h, k)(h, k)^{-1} = (h, k)^{-1}(h, k) = \mathbb{1}.$$

$\therefore H \times K$ es un grupo. ■

Las siguientes imágenes muestran cómo se construye un producto directo a partir de dos grupos más simples:



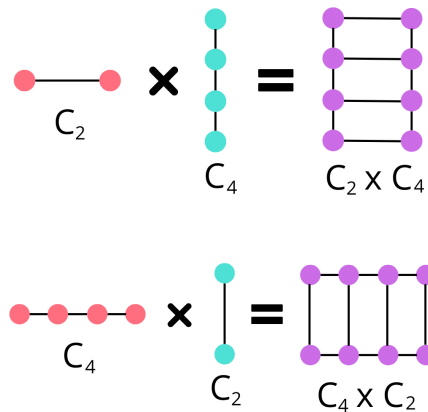
En este caso, G tiene 2 elementos, H tiene 3 elementos y $G \times H$ tiene $2 \cdot 3 = 6$ elementos:

$$G \cong C_2 \wedge H \cong C_3 \implies G \times H \cong C_6.$$

Podemos probar que el orden del grupo $G \times H$ coincide con el producto de los órdenes de G y H :

$$|G \times H| = |G||H|.$$

En general, $G \times H \neq H \times G$. Por ejemplo, si $G = C_2$ y $H = C_4$, entonces podemos representar sus productos directos de manera gráfica [4]:



Vemos que $C_2 \times C_4 \neq C_4 \times C_2$. Sin embargo, se cumple que

$$C_2 \times C_4 \cong C_4 \times C_2 \cong C_8.$$

De la misma manera, podríamos obtener $C_{2n} = C_2 \times C_2 \times \dots \times C_2$. Es decir, la iteración de productos directos resultará cada vez en un nuevo grupo.

Teorema 1.5.2. Consideremos los productos directos:

$$\begin{aligned} H \times 1_K &= \{(h, 1_K) \mid h \in H\} \\ 1_H \times K &= \{(1_H, k) \mid k \in K\} \end{aligned}$$

Entonces, $H \times 1_K$ y $1_H \times K$ son **subgrupos normales** de $H \times K$. Más aún,

$$\begin{aligned} H \times 1_K &\cong H. \\ 1_H \times K &\cong K. \end{aligned}$$

Dem. Por simplicidad, omitiremos los subíndices de las identidades $1_H, 1_K$, siempre tomando en cuenta a cuál de los grupos corresponden.

i. Primero, veamos que $H \times 1$ y $1 \times K$ son subconjuntos de $H \times K$:

$$\begin{aligned} H \times 1 &= \{(h, 1) \mid h \in H\} \subset H \times K. \\ 1 \times K &= \{(1, k) \mid k \in K\} \subset H \times K. \end{aligned}$$

Además,

$$\mathbf{1} = (1, 1) \in (H \times 1) \cap (1 \times K).$$

Y, para cualesquiera $(h_1, 1_K), (h_2, 1_K) \in H \times 1$, tenemos

$$\begin{aligned} (h_1, 1)(h_2, 1)^{-1} &= (h_1, 1)(h_2^{-1}, 1^{-1}) \\ &= (h_1, 1)(h_2^{-1}, 1) \\ &= (h_1 h_2^{-1}, 1) \in H \times 1, \end{aligned}$$

pues $h_1 h_2^{-1} \in H$, por ser H un grupo. De manera análoga, se puede probar que

$$(1, k_1)(1, k_2)^{-1} \in 1 \times K,$$

Para cualesquiera $k_1, k_2 \in K$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} H \times 1 &\leq H \times K. \\ 1 \times K &\leq H \times K. \end{aligned}$$

Ahora, sea $(\eta, \kappa) \in H \times K$ arbitrario. Entonces,

$$\begin{aligned} (\eta, \kappa)(h, 1)(\eta, \kappa)^{-1} &= (\eta, \kappa)(h, 1)(\eta^{-1}, \kappa^{-1}) \\ &= (\eta, \kappa)(h\eta^{-1}, 1\kappa^{-1}) \\ &= (\eta h\eta^{-1}, \kappa 1\kappa^{-1}) \\ &= (\eta h\eta^{-1}, 1) \in H \times 1, \end{aligned}$$

Pues $\eta h\eta^{-1}$ para cualesquiera $\eta, h \in H$.

$$\implies (\eta, \kappa)(H \times 1)(\eta, \kappa)^{-1} = H \times 1, \quad \forall (\eta, \kappa) \in H \times K.$$

$$\therefore H \times 1 \triangleleft H \times K.$$

De la misma manera, se prueba que $1 \times K \triangleleft H \times K$.

ii. Para ver que $H \times 1$ es isomorfo a H , establecemos la función:

$$\begin{aligned} f : H &\longrightarrow H \times 1 \\ h &\longmapsto (h, 1) \end{aligned}$$

Si $h_1, h_2 \in H$, entonces

$$\begin{aligned} f(h_1 h_2) &= (h_1 h_2, 1) \\ &= (h_1, 1)(h_2, 1) \\ &= f(h_1)f(h_2); \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es un homomorfismo.

Ahora, supongamos que $f(h_1) = f(h_2)$,

$$\begin{aligned} \implies (h_1, 1) &= (h_2, 1) \\ \iff h_1 &= h_2; \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva.

Además, para todo $(h, 1) \in H \times 1$ existe $h \in H$ tal que $f(h) = (h, 1)$, por lo que f es sobreyectiva.

$$\begin{aligned} \therefore f &\text{ es un isomorfismo.} \\ \therefore H &\cong H \times 1. \end{aligned}$$

Para demostrar que $K \cong 1 \times K$, se establece un isomorfismo similar $\phi : K \rightarrow 1 \times K$.

■

Corolario 1.5.3. El producto directo $H \times K$ es abeliano si y sólo si H y K son abelianos.

Ejemplo 1.5.1. Tomemos dos copias del Grupo cíclico de 2 elementos:

$$\begin{aligned} C_{2_a} &= \{1, a\} \\ C_{2_b} &= \{1, b\} \end{aligned}$$

Y obtengamos su producto directo:

$$C_{2_a} \times C_{2_b} = \{(1, 1), (a, 1), (1, b), (a, b)\}.$$

Recordemos el grupo de Klein, introducido en el Ejemplo (1.4.9):

$$V = \{1, a, b, ab\}.$$

Veamos que es posible establecer un isomorfismo entre $C_{2_a} \times C_{2_b}$ y V :

$$\varphi : C_{2_a} \times C_{2_b} \rightarrow V, \text{ tal que } \begin{cases} \varphi(1, 1) = 1. \\ \varphi(a, 1) = a. \\ \varphi(1, b) = b. \\ \varphi(a, b) = ab. \end{cases}$$

$$\implies \varphi : (g, h) \mapsto gh.$$

Como ambos grupos tienen la misma cantidad de elementos, φ es biyectiva, y si tomamos $(g_a, h_a) \in C_{2_a}$, $(g_b, h_b) \in C_{2_b}$, entonces:

$$\begin{aligned} \varphi[(g_a, h_a)(g_b, h_b)] &= \varphi[(g_a g_b, h_a h_b)] \\ &= g_a g_b h_a h_b \\ &= g_a h_a g_b h_b \\ &= \varphi(g_a, h_a) \varphi(g_b, h_b), \end{aligned}$$

pues ambos grupos son abelianos.

$$V \cong C_{2_a} \times C_{2_b}.$$

El siguiente Teorema indica bajo qué condiciones un grupo G puede expresarse como un producto directo; esto es, *partirse* en grupos más simples sin que pierda su estructura ni se omitan elementos.

Teorema 1.5.4. Sea G un grupo con subgrupos normales H y K . Si $HK = G$ y $H \cap K = 1$, entonces

$$G \cong H \times K.$$

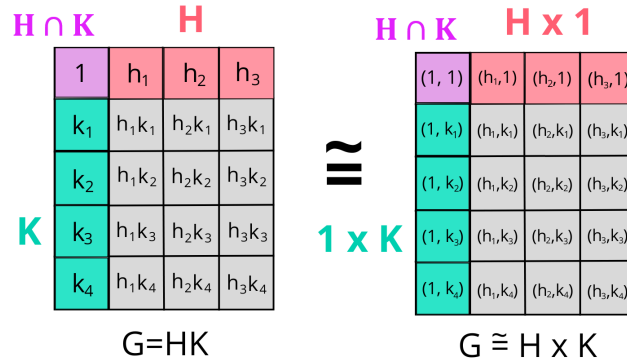


Figura 1.27: Representación gráfica del Teorema 1.5.4 [4].

También podemos generalizar el Teorema al caso en que G es el producto directo de n subgrupos H_i :

Teorema 1.5.5. Sea G un grupo y H_1, H_2, \dots, H_n subgrupos de G ; si

$$G = H_1 H_2 \cdots H_n = \prod_{i=1}^n H_i$$

$$\text{y } H_j \cap \left(\prod_{i \neq j} H_i \right) = \{1\},$$

Entonces

$$G \cong H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n.$$

Dem. Definamos una función:

$$\psi : G = H_1 H_2 \cdots H_n \longrightarrow H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$$

$$g = (h_1 h_2 \cdots h_n) \longmapsto (h_1, h_2, \dots, h_n).$$

Si $a, b \in G$, entonces existen $h_i^a, h_i^b \in H_i$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, tales que:

$$a = h_1^a h_2^a \cdots h_n^a \wedge b = h_1^b h_2^b \cdots h_n^b.$$

Entonces, tomando en cuenta que la multiplicación por h_i^b induce un **reordenamiento** en los elementos de H_i ,

$$\begin{aligned} \psi(ab) &= \psi(h_1^a h_2^a \cdots h_n^a h_1^b h_2^b \cdots h_n^b) \\ &= \psi(h_1^{ab} h_2^{ab} \cdots h_n^{ab}) \\ &= (h_1^{ab}, h_2^{ab}, \dots, h_n^{ab}) \\ &= (h_1^a h_1^b, h_2^a h_2^b, \dots, h_n^a h_n^b) \\ &= (h_1^a, h_2^a, \dots, h_n^a)(h_1^b, h_2^b, \dots, h_n^b) \\ &= \psi(a)\psi(b). \end{aligned}$$

Por lo tanto, ψ es un homomorfismo.

Ahora, supongamos que $\psi(a) = \psi(b)$:

$$\begin{aligned} \implies (h_1^a, h_2^a, \dots, h_n^a) &= (h_1^b, h_2^b, \dots, h_n^b) \\ \implies h_1^a &= h_1^b, h_2^a = h_2^b, h_n^a = h_n^b. \\ \implies a &= b. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ψ es inyectiva.

Además, si (h_1, h_2, \dots, h_n) es un elemento arbitrario de $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$, entonces $h_i \in H_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$, y

$$\begin{aligned} \exists x \in G \text{ tal que } x &= h_1 h_2 \dots h_n. \\ \implies \psi(x) &= (h_1, h_2, \dots, h_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, ψ es sobreyectiva.

$$\therefore \psi \text{ es un isomorfismo: } G \cong H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n. \quad \blacksquare$$

Teorema 1.5.6. Sea G un grupo y H_1, H_2, \dots, H_n subgrupos de G .

Si para cada $g \in G$ existen únicos $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2, \dots, h_n \in H_n$ tales que $g = h_1 h_2 \dots h_n$, entonces

$$G \cong H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n.$$

Este teorema significa que, si cada elemento $g \in G$ puede ser expresado como un producto $h_1 h_2 \dots h_n$, con $h_i \in H_i \leq G$, entonces G es idéntico en estructura al grupo $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$.

Proposición 1.5.7. Consideremos los grupos H, K . Si $N \triangleleft H$ y $M \triangleleft K$, entonces

$$\begin{aligned} N \times M &\triangleleft H \times K \\ \text{y } \frac{H \times K}{N \times M} &\cong \frac{H}{N} \times \frac{K}{M}. \end{aligned}$$

Dem. Primero, notemos que $\frac{H \times K}{N \times M}$ es el grupo cociente que consta de todas las clases laterales de tipo $(N \times M)(h, k)$. Es decir,

$$\begin{aligned} \frac{H \times K}{N \times M} &= \{(N \times M)(h, k) \mid (h, k) \in H \times K\} \\ &= \{(n, m)(h, k) \mid (n, m) \in N \times M \wedge (h, k) \in H \times K\}. \end{aligned}$$

A su vez,

$$\begin{aligned} \frac{H}{N} &= \{Nh \mid h \in H\} \quad \wedge \quad \frac{K}{M} = \{Mk \mid k \in K\} \\ \implies \frac{H}{N} \times \frac{K}{M} &= \{(Nh, Mk) \mid h \in H \wedge k \in K\}. \end{aligned}$$

Ahora, definimos la función:

$$\begin{aligned} \phi : H \times K &\longrightarrow \frac{H}{N} \times \frac{K}{M} \\ (h, k) &\longmapsto (Nh, Mk). \end{aligned}$$

Veamos que ϕ es un homomorfismo:

Si $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$. entonces,

$$\begin{aligned}\phi[(h_1, k_1)(h_2, k_2)] &= \phi(h_1 h_2, k_1 k_2) \\ &= (Nh_1 h_2, Mk_1 k_2) \\ &= (Nh_1 N h_2, M k_1 M k_2) \\ &= (Nh_1, M k_1)(N h_2, M k_2) \\ &= \phi(h_1, k_1)\phi(h_2, k_2).\end{aligned}$$

Y, por el 1^{er} Teorema de isomorfismos,

$$\text{Núcleo}[\phi] \triangleleft H \times K \quad \wedge \quad \frac{H \times K}{\text{Núcleo}[\phi]} \cong \text{Im}[\phi]. \quad (1.110)$$

La identidad de $\frac{H}{N} \times \frac{K}{M}$ es $(N1, M1)$. Entonces,

$$\text{Núcleo}[\phi] = \{(h, k) \mid \phi(h, k) = (N1, M1)\}.$$

Tomando $n \in N, m \in M$, tenemos $(n, m) \in N \times M \subset H \times K$. Más aún,

$$\begin{aligned}\phi(n, m) &= (Nn, Mm) = (N1, M1). \\ \implies \text{Núcleo}[\phi] &= N \times M.\end{aligned}$$

Ahora, veamos que ϕ es sobreyectiva:

Sea $(Nh, Mk) \in \frac{H}{N} \times \frac{K}{M}$ arbitrario.

$$\begin{aligned}\implies Nh &\in \frac{H}{N} \quad \wedge \quad Mk \in \frac{K}{M}. \\ \implies h &\in H \quad \wedge \quad k \in K.\end{aligned}$$

Entonces, existe $(h, k) \in H \times K$ tal que $\phi(h, k) = (Nh, Mk)$.

Por lo tanto, la imagen de ϕ es todo $\frac{H}{N} \times \frac{K}{M}$. Sustituyendo en la Ecuación (1.110):

$$N \times M \triangleleft H \times K \quad \wedge \quad \frac{H \times K}{N \times M} \cong \frac{H}{N} \times \frac{K}{M}.$$

■

Concluimos esta sección con un par de ejemplos:

Ejemplo 1.5.2. Sea U_1 el **Círculo unitario en el plano complejo**, dado por:

$$U_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

U_1 es un grupo bajo la operación de multiplicación escalar. Asimismo, el conjunto de números reales positivos forma el grupo multiplicativo (\mathbb{R}^+, \cdot) .

Ahora, consideremos el **grupo multiplicativo de números complejos**, que consta de los números complejos distintos de cero, junto con la multiplicación escalar:

$$(\mathbb{C}, \cdot) = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{re^{i\theta} \mid r \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

Entonces, (\mathbb{C}, \cdot) es isomorfo al producto directo $(\mathbb{R}^+, \cdot) \times U_1$:

$$(\mathbb{R}^+, \cdot) \times U_1 = \{(r, e^{i\theta}) \mid r \in \mathbb{R}^+, e^{i\theta} \in U_1\} \cong (\mathbb{C}, \cdot).$$

Lo cual significa que todo número complejo puede obtenerse a partir del círculo unitario, multiplicando por algún real positivo para determinar su radio o *módulo* [9].

***Nota:** El grupo de números complejos con módulo igual a 1 se denota por U_1 porque coincide con el **grupo unitario en 1 dimensión**:

$$(e^{i\theta})^\dagger = (e^{i\theta})^* = (e^{i\theta})^{-1} \wedge |\det(e^{i\theta})| = |e^{i\theta}| = 1.$$

Ejemplo 1.5.3. De manera similar al ejemplo anterior, podemos probar que el grupo unitario U_n es isomorfo al producto directo del grupo especial unitario SU_n con el círculo unitario U_1 .

Para ello, recordemos que toda transformación unitaria $T \in SU_n$ satisface:

$$|\det(T)| = 1 \implies \det(T) = e^{i\theta}, \text{ con } \theta \in [0, 2\pi).$$

Además, notemos que todo elemento de U_n se puede expresar como el producto Au , con $A \in SU_n$ y $u \in U_1$:

$$\begin{aligned} (Au)^\dagger &= u^* A^\dagger = u^{-1} A^{-1} = (Au)^{-1}. \\ \det(Au) &= \det(A)\det(u) = \det(A)e^{i\theta} = e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos establecer el isomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : U_n &\longrightarrow SU_n \times U_1 \\ T = Au &\longmapsto (A, u). \end{aligned}$$

$$\therefore U_n \cong SU_n \times U_1.$$

***Nota:** En la literatura, comúnmente se usa un símbolo de igualdad en vez del símbolo de congruencia, bajo el argumento de que dos grupos que tienen la misma estructura son prácticamente iguales.

Siguiendo esta convención, tendríamos:

$$\begin{aligned} V &= C_{2_a} \times C_{2_b}, \\ (\mathbb{C}, \cdot) &= (\mathbb{R}^+, \cdot) \times U_1, \\ U_n &= SU_n \times U_1, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

1.6. Clases de Conjugación

Dedicamos la última sección del capítulo a las conjugadas y clases de conjugación, que nos permiten estudiar al grupo a partir de sus características generales. En muchas ocasiones, basta analizar un solo elemento, para conocer todas las propiedades de la clase de conjugación a la que pertenece.

Definición 1.6.1. Sea G un grupo y $g \in G$. Entonces, llamamos **conjugación** a una función de la forma:

$$\begin{aligned}\gamma_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gxg^{-1}\end{aligned}$$

Y decimos que gxg^{-1} es una **conjugada** de $x \in G$.

Equivalentemente, x y y son **conjugadas** si existe $g \in G$ tal que $y = \gamma_g(x)$.

Proposición 1.6.1. Toda conjugada γ_g , con $g \in G$, es un isomorfismo.

Dem. Sean $x, y \in G$; entonces

$$\begin{aligned}\gamma_g(xy) &= g(xy)g^{-1} \\ &= (gxg^{-1})(gyg^{-1}) \\ &= \gamma_g(x)\gamma_g(y).\end{aligned}$$

Por lo tanto, γ_g es un homomorfismo.

Ahora, supongamos que $\gamma_g(x) = \gamma_g(y)$; entonces,

$$\begin{aligned}gxg^{-1} &= gyg^{-1} \\ \iff (g^{-1}g)x(g^{-1}g) &= (g^{-1}g)y(g^{-1}g) \\ \iff x &= y.\end{aligned}$$

Por lo tanto, γ_g es inyectiva.

Finalmente, veamos que γ_g es sobreyectiva, pues cualquier $z \in G$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}z &= g(g^{-1}zg)g^{-1} = \gamma_g(g^{-1}zg). \\ \therefore \gamma_g &\text{ es un isomorfismo.}\end{aligned}$$

■

Proposición 1.6.2. Consideremos el grupo general lineal $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Entonces, las matrices $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ son conjugadas si y sólo si son **matrices similares**:

$$A = DBD^{-1} \wedge B = MAM^{-1},$$

Con $D, M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

De la Proposición anterior, vemos que la similaridad de matrices es una relación de equivalencia, pues

$$\begin{aligned}A = DBD^{-1} &\iff D^{-1}AD = D^{-1}(DBD^{-1})D \\ &\iff MAM^{-1} = B, \text{ con } M = D^{-1}.\end{aligned}$$

Es decir, si A es similar a B , entonces B es similar a A .
Generalizamos este resultado en el siguiente lema:

Lema 1.6.3. Sea G un grupo y $x, g \in G$. Entonces, la conjugación $y = gxg^{-1}$, es una **relación de equivalencia**.

Dem. Escribimos la conjugación en G como:

$$\gamma_g : x \mapsto gxg^{-1}, \text{ con } g \in G.$$

Para ser una relación de equivalencia, esta función debe ser *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*. Revisemos que cumpla cada una de estas propiedades:

i. Reflexividad: ¿ y es conjugada de sí misma?

Si $y = \gamma_g(y) = gyg^{-1}$, para alguna $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} yg &= gy \\ \iff g &= 1 \text{ ó } g \text{ conmuta con } y. \end{aligned}$$

A priori, el único elemento que podemos asegurar que conmuta con toda $y \in G$, es la identidad.

$$\therefore y = \gamma_1(y) = (1)y(1)^{-1}.$$

Por lo tanto, la relación de conjugación es reflexiva.

ii. Simetría: Si y es conjugada de x , entonces ¿ x también es conjugada de y ?

$$\begin{aligned} y &= gxg^{-1} \\ \iff g^{-1}y &= xg^{-1} \\ \iff g^{-1}yg &= x \\ \iff x &= (g^{-1})y(g^{-1})^{-1}; \end{aligned}$$

$\therefore x$ es conjugada de y .

Por lo tanto, la relación de conjugación es simétrica.

iii. Transitividad: Sea z conjugada de y y y , conjugada de x . Entonces, ¿ z es conjugada de x ?

Si $z = hyh^{-1}$ y $y = gxg^{-1}$, con $h, g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} z &= hyh^{-1} \\ &= h(gxg^{-1})h^{-1} \\ &= kxk^{-1}. \end{aligned}$$

Con $k := hg \in G$ y $k^{-1} = g^{-1}h^{-1}$, por el Corolario (1.13).

Por lo tanto, z es conjugada de x y la relación de conjugación es transitiva.

\therefore La conjugación γ_g es una relación de equivalencia. ■

Definición 1.6.2. Sea G un grupo y $x \in G$. Entonces, la **clase de conjugación** de x en G , denotada por x^G , es el conjunto de conjugadas de x en G :

$$x^G := \{gxg^{-1} \mid g \in G\} \tag{1.111}$$

Explícitamente, $x^G = \{g_1xg_1^{-1}, g_2xg_2^{-1}, g_3xg_3^{-1}, \dots\}$, donde $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots\}$.

Proposición 1.6.4. El elemento identidad de un grupo forma una clase por sí solo, pues $g1g^{-1} = 1 \forall g \in G$.

Más aún, $\{1\}$ es la única clase de conjugación que también es un subgrupo.

Es fácil ver que ninguna otra clase de conjugación de G es un subgrupo, pues no poseen al elemento identidad.

***Nota:** Si G es un grupo **abeliano**, entonces cada elemento $x \in G$ forma una clase por sí solo, pues todas sus conjugadas satisfacen:

$$\begin{aligned} g x g^{-1} &= x g g^{-1} = x. \\ \implies x^G &= x, \quad \forall x \in G. \end{aligned}$$

Proposición 1.6.5. Las clases de conjugación de un grupo finito G inducen una partición en G . Es decir, cada elemento de G pertenece a una única clase de conjugación.

Dem. Sea G un grupo finito, y sean $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$ las clases de conjugación de G , que satisfacen:

$$\zeta_i = \{g x_i g^{-1} \mid g \in G\} \tag{1.112}$$

$$\zeta_i \neq \zeta_j, \quad \forall i \neq j. \tag{1.113}$$

Supongamos que existe $y \in G$ tal que $y \in \zeta_i \cap \zeta_j$.

$$\begin{aligned} \implies y &= g x_i g^{-1} = h x_j h^{-1}, \quad \text{para ciertos } h, g \in G. \\ \implies x_i &= (g^{-1} h) x_j (h^{-1} g) \in \zeta_j; \\ \implies \zeta_i &\subset \zeta_j, \end{aligned}$$

pues todas las conjugadas de x_i también pertenecerían a ζ_j . Análogamente,

$$\begin{aligned} x_j &= (h^{-1} g) x_i (g^{-1} h) \in \zeta_i; \\ \implies \zeta_j &\subset \zeta_i \\ \implies \zeta_i &= \zeta_j, \end{aligned}$$

pero esto contradice la hipótesis (1.113).

$$\therefore \zeta_i \cap \zeta_j = \emptyset.$$

Además, todo elemento $y \in G$ pertenece a alguna clase de conjugación, pues $y = 1 y 1^{-1}$; específicamente, $y \in y^G$.

$$\therefore \bigcup_{i=1}^m \zeta_i = G.$$

$\therefore \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m\}$ son una partición de G . ■

En general, la conjugación **preserva la estructura de ciclo** de una permutación: si α es un r -ciclo, entonces $\gamma = \beta \alpha \beta^{-1}$ también es un r -ciclo. Así, todas las permutaciones $\sigma \in S_n$ que tienen la misma estructura de ciclo, pertenecen a la misma clase.

Ilustraremos esta propiedad con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.6.1 (Clases de conjugación de S_3). Como vimos en el Ejemplo (1.4.1),

$$S_3 = \{(1), (1\ 2), (2\ 3), (3\ 1), (1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1)\}.$$

Las conjugadas de las trasposiciones también son trasposiciones y las conjugadas de los 3-ciclos también son 3-ciclos. Explícitamente:

- $(1\ 2)$, $(2\ 3)$ y $(3\ 1)$ son conjugadas:

$$(1\ 2) = (2\ 3)(3\ 1)(2\ 3)^{-1}.$$

$$(3\ 1) = (2\ 3)(1\ 2)(2\ 3)^{-1}.$$

$$(2\ 3) = (3\ 1)(1\ 2)(3\ 1)^{-1}.$$

- $(1\ 2\ 3)$ y $(3\ 2\ 1)$ son conjugadas:

$$(3\ 2\ 1) = (1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2)^{-1}.$$

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(3\ 2\ 1)(1\ 2)^{-1}.$$

Por lo tanto, las clases de conjugación de S_3 son:

$$\zeta_1 = \{(1)\},$$

$$\zeta_2 = \{(1\ 2), (2\ 3), (3\ 1)\},$$

$$\zeta_3 = \{(1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1)\}.$$

Como se vio en la sección 1.2, también las clases laterales inducen una partición en el grupo. En el caso de S_3 , sus subgrupos *no triviales* son:

$$H_1 = \{(1), (1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1)\}.$$

$$H_2 = \{(1), (1\ 2), (2\ 3), (3\ 1)\}.$$

Por lo tanto, podemos partir S_3 en clases laterales de H_1 y en clases laterales de H_2 .

La siguiente imagen muestra las particiones de S_3 en sus clases laterales y en sus clases de conjugación:

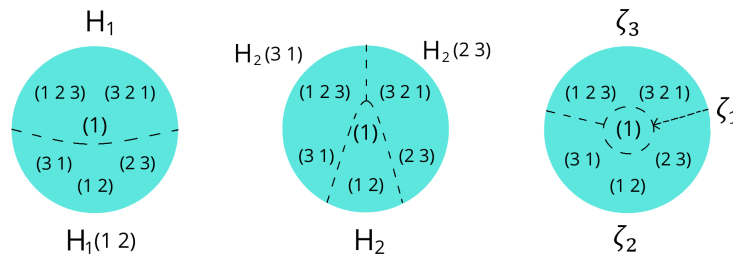


Figura 1.28: Particiones de S_3 en: (a) clases laterales de H_1 , (b) clases laterales de H_2 , (c) clases de conjugación [3].

Ejemplo 1.6.2. Retomemos el grupo de matrices del Ejemplo (1.1.6):

$$\mathcal{G} = \{\mathbb{1}, A, B, C, D, E\}.$$

De acuerdo con la Tabla (1.1.6), las matrices A, B, C son de orden 2 y las matrices D, E son de orden 3. Explícitamente:

$$A^2 = B^2 = C^2 = \mathbb{1}.$$

$$D^3 = E^3 = \mathbb{1}.$$

Para hallar la clase de conjugación de A , calculamos todas sus conjugadas:

i. $1A1^{-1} = A.$

ii. $AAA^{-1} = A.$

$$\begin{aligned} \text{iii. } BAB^{-1} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } CAC^{-1} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{v. } DAD^{-1} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{vi. } EAE^{-1} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= C. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la clase de conjugación de A es $\{A, B, C\}$.

Calculando el resto de conjugadas del grupo, podemos probar que las **clases de conjugación** de \mathcal{G} son [5]:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \{\mathbb{1}\}. \\ \zeta_2 &= \{A, B, C\}. \\ \zeta_3 &= \{D, E\}.\end{aligned}$$

En general, todos los elementos de un grupo que pertenecen a la misma clase de conjugación tienen el **mismo orden**. Esto se puede probar fácilmente, suponiendo que cierto $x \in G$ es de orden $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\implies x^n &= 1 \\ \implies (gxg^{-1})^n &= g^{-n}x^n g^n = (g^{-1}g)^n = 1.\end{aligned}$$

En el caso de \mathcal{G} , los elementos de ζ_2 son de orden 2 y los de ζ_3 , de orden 3:

$$\begin{aligned}A^2 &= B^2 = C^2 = \mathbb{1}. \\ D^3 &= E^3 = \mathbb{1}.\end{aligned}$$

También se puede probar que, si G es un grupo de matrices, entonces todos los elementos de una clase tienen la **misma traza**. En el caso de \mathcal{G} , las clases de conjugación satisfacen:

$$\begin{aligned}\chi(\zeta_1) &= \text{Tr}(\mathbb{1}) = 2. \\ \chi(\zeta_2) &= \text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = \text{Tr}(C) = 0. \\ \chi(\zeta_3) &= \text{Tr}(D) = \text{Tr}(E) = -1.\end{aligned}$$

Ahora, veremos que existe una relación entre subgrupos normales y clases de conjugación:

Teorema 1.6.6. Sea G un grupo y $g \in G$ arbitrario. Entonces,

$$S \triangleleft G \iff gsg^{-1} \in S, \quad \forall s \in S.$$

En otras palabras, un subgrupo normal contiene a todas sus conjugadas.

Denotando por $\gamma_g(S)$ al conjunto de conjugadas de S bajo g , podemos reformular el Teorema anterior como:

$$S \triangleleft G \iff \gamma_g(S) \leq S, \quad \forall g \in G. \tag{1.114}$$

Veamos que, si x es el único elemento de su clase de conjugación x^G , entonces $x = gxg^{-1}$ para toda $g \in G$. Esto significa que x **conmuta** con todos los elementos de G :

$$x = gxg^{-1} \quad \forall g \in G \iff gx = xg \quad \forall g \in G. \tag{1.115}$$

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.6.3. El **centro** de un grupo G , denotado por $Z(G)$, es el conjunto de elementos que conmutan con todos los demás elementos del grupo:

$$\begin{aligned}Z(G) &:= \{z \in G \mid gz = zg, \forall g \in G\}. \\ &= \{z \in G \mid z = gzg^{-1}, \forall g \in G\}.\end{aligned}$$

Y decimos que un grupo G **no tiene centro** (*centerless*) si $Z(G) = 1$; es decir, si el único elemento conmutativo del grupo es la identidad.

Lema 1.6.7. $Z(G)$ es un subgrupo normal abeliano de G .

Dem. Primero, veamos que $Z(G)$ es un subgrupo de G :

Sabemos que $1 \in Z(G)$, pues $1g = g1 = g$, $\forall g \in G$.

Ahora, si $a, b \in Z(G)$, entonces $ag = ga$ y $bg = gb$, para toda $g \in G$.

$$\begin{aligned} &\implies (bg)^{-1} = (gb)^{-1} \\ &\iff g^{-1}b^{-1} = b^{-1}g^{-1} \\ &\implies b^{-1} \in Z(G). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies ab^{-1}g = agb^{-1} = gab^{-1} \\ &\implies ab^{-1} \in Z(G). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Z(G) \leq G$.

Ahora, para cualesquiera $z \in Z(G)$ y $g \in G$, tenemos

$$\begin{aligned} &gzg^{-1} = zgg^{-1} = z \in Z(G) \\ &\implies gZ(G)g^{-1} \subset Z(G), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Y z = g(g^{-1}zg)g^{-1} \in gZ(G)g^{-1} \\ &\implies Z \subset gZ(G)g^{-1} \\ &\implies Z = gZ(G)g^{-1}, \forall g \in G. \end{aligned}$$

$$\therefore Z(G) \triangleleft G. \tag{1.116}$$

Finalmente, notemos que $Z(G)$ es abeliano, por su misma definición como un conjunto de elementos conmutativos de G . ■

Definición 1.6.4. Si G es un grupo y $x \in G$, entonces llamamos **centralizador** de x al conjunto de elementos de G que conmutan con x , y lo denotamos por $C_G(x)$:

$$C_G(x) := \{g \in G \mid gx = xg\} = \{g \in G \mid x = g x g^{-1}\}. \tag{1.117}$$

***Nota:** Es importante diferenciar entre el centro de un grupo y el centralizador de un elemento: $Z(G)$ consta de todos los elementos conmutativos en G , mientras que $C_G(x)$ consta de todos aquellos que conmutan con cierta x en particular.

Lema 1.6.8. $C_G(x)$ es un subgrupo de G .

Dem. Por su definición, $C_G(x)$ es un subconjunto de G . Además, $1 \in C_G(x)$, pues $1x = x1 = x$, para toda $x \in G$.

Ahora, sean $g, h \in C_G(x)$;

$$\begin{aligned} &\implies hx = xh \\ &\iff (hx)^{-1} = (xh)^{-1} \\ &\iff x^{-1}h^{-1} = h^{-1}x^{-1} \\ &\iff x(x^{-1}h^{-1})x = x(h^{-1}x^{-1})x \\ &\iff h^{-1}x = xh^{-1}; \end{aligned}$$

Por lo tanto, h^{-1} conmuta con x .

$$\begin{aligned} \implies h^{-1} &\in C_G(x) \\ \implies gh^{-1}x &= gxh^{-1} = xgh^{-1} \\ \implies gh^{-1} &\in C_G(x); \end{aligned}$$

$$\therefore C_G(x) \leq G, \quad \forall x \in G. \quad (1.118)$$

■

Con el siguiente teorema, establecemos una relación entre la clase de conjugación x^G y el centralizador $C_G(x)$:

Teorema 1.6.9. Sean G un grupo y $x \in G$. Entonces, el número de conjugadas de x en G es igual al **índice** de su centralizador; es decir,

$$|x^G| = [G : C_G(x)] \quad (1.119)$$

y, si G es finito, entonces este número es un divisor de $|G|$.

Dem. Denotemos por \tilde{C} al conjunto de clases laterales de $C_G(x)$ en G , es decir:

$$\tilde{C} = \{gC_G(x) \mid g \in G\}.$$

Entonces, definimos la función:

$$\begin{aligned} f : x^G &\longrightarrow \tilde{C} \\ gxg^{-1} &\longmapsto gC_G(x) \end{aligned}$$

Es decir, f asigna a cada conjugada en x^G un clase lateral en \tilde{C} .

Veamos que f es inyectiva: si existen $gxg^{-1}, hxh^{-1} \in x^G$ tales que $f(gxg^{-1}) = f(hxh^{-1})$, entonces

$$gC_G(x) = hC_G(x) \iff gh^{-1} \in C_G(x),$$

usando la condición de igualdad de clases laterales.

$$\begin{aligned} \implies x &= (gh^{-1})x(gh^{-1})^{-1}, \\ \iff g^{-1}xg &= g^{-1}(gh^{-1})x(gh^{-1})^{-1}g = g^{-1}g(h^{-1}xh)g^{-1}g, \\ \iff g^{-1}xg &= h^{-1}xh. \end{aligned}$$

Ahora, veamos que f es sobreyectiva:

Sea $yC_G(x) \in \tilde{C}$ arbitrario. Entonces, existe $xyx^{-1} \in x^G$ tal que $f(yxy^{-1}) = yC_G(x)$.

$$\implies \text{Im}[f] \subset \tilde{C}.$$

Por propiedad de los mapeos biyectivos, tenemos que:

$$\begin{aligned} |\text{Dom}[f]| &= |\text{Im}[f]| \\ \therefore |x^G| &= |\tilde{C}| = [G : C_G(x)]. \end{aligned}$$

Y, por el Teorema de Lagrange,

$$\frac{|G|}{[G : C_G(x)]} = \frac{|G|}{|x^G|} = |C_G(x)|,$$

por lo que $|x^G|$ es un divisor de $|G|$. ■

Definición 1.6.5. Sea G un grupo y $H \leq G$. Entonces, llamamos **conjugada de H** al conjunto:

$$H^g := gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\} \quad (1.120)$$

Así, hay una conjugada de H por cada elemento $g \in G$ que no pertenece a H .

Esta definición nos permite generalizar la conjugación γ_g de elementos, a la conjugación de subgrupos.

Lema 1.6.10. La conjugada H^g es un subgrupo de G isomorfo a H .

Más aún, si $\gamma_g : G \rightarrow G$ es la conjugación bajo g , entonces $\gamma_g|_H$ es un **isomorfismo** entre H y H^g .

Dem. De acuerdo con la Definición (1.6.5), $H \leq G$, por lo que $1 \in H$.

$$\implies g1g^{-1} = 1 \in gHg^{-1}.$$

Además, $st^{-1} \in H$, para cualesquiera $s, t \in H$.

$$\begin{aligned} \implies (gsg^{-1})(gtg^{-1})^{-1} &= gs(g^{-1}g)t^{-1}g^{-1} \\ &= g(st^{-1})g^{-1} \in H^g. \end{aligned}$$

$$\therefore H^g \leq G.$$

Ahora, consideremos la conjugación γ_g , con $g \in G$, restringida a H :

$$\begin{aligned} \gamma_g|_H : H &\longrightarrow H^g \\ h &\longmapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

Si $h_1, h_2 \in H$, entonces

$$\begin{aligned} \gamma_g(h_1h_2) &= g(h_1h_2)g^{-1} \\ &= gh_1(g^{-1}g)h_2g^{-1} \\ &= (gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) \\ &= \gamma_g(h_1)\gamma_g(h_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\gamma_g|_H$ es un homomorfismo.

Veamos que $\gamma_g|_H$ es biyectiva:

Sean $h, h' \in H$ tales que $\gamma_g(h) = \gamma_g(h')$. Entonces,

$$ghg^{-1} = gh'g^{-1} \iff h = h'.$$

Ahora, tomando $gxg^{-1} \in H^g$ arbitraria, tenemos

$$\begin{aligned} x &\in H \\ \implies \gamma_g(x) &= gxg^{-1} \\ \implies H^g &\subset \text{Im}[\gamma_g|_H]. \end{aligned}$$

$\therefore \gamma_g|_H$ es un isomorfismo y $H \cong H^g$.

■

Corolario 1.6.11. H es un subgrupo normal de G , si y sólo si H tiene una sola conjugada gHg^{-1} .

Este corolario indica que todas las conjugadas de un subgrupo normal $H \triangleleft G$ coinciden con H mismo, y se sigue inmediatamente de la definición de subgrupo normal.

Definición 1.6.6. Sea G un grupo y $H \leq G$. Entonces, llamamos **normalizador** de H en G al conjunto:

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} = \{g \in G \mid H^g = H\}. \quad (1.121)$$

Notemos la similitud entre las definiciones (1.6.4) y (1.6.6): tanto el centralizador $C_G(x)$ como el normalizador $N_G(H)$ son subconjuntos de G ; pero el primero consta de los elementos que conmutan con cierto $x \in G$ (*centralizan* al elemento), mientras que el segundo consta de los elementos ante los cuales H se comporta como un subgrupo normal (*normalizan* al subgrupo).

Ahora revisaremos las propiedades de $N_G(H)$, y veremos que también guardan similitud con las de $C_G(x)$.

Lema 1.6.12. Si G es un grupo y $H \leq G$, entonces

- i. $N_G(H) \leq G$.
- ii. $H \triangleleft N_G(H)$.

Dem. i. Veamos que $1 \in N_G(H)$, pues $1H1^{-1} = H$.

Además, si $a, b \in N_G(H)$,

$$\begin{aligned} \implies aHa^{-1} &= bHb^{-1} = H. \\ \implies (ab^{-1})H(ab^{-1})^{-1} &= a(b^{-1}Hb)a^{-1} = aHa^{-1} = H. \\ \implies ab^{-1} &\in N_G(H). \end{aligned}$$

$$\therefore N_G(H) \leq G.$$

ii. Primero, veamos que $H \subset N_G(H)$, pues $hHh^{-1} = H, \forall h \in H$.

Además, $H \leq G$, por lo que posee a la identidad, a los inversos y a los productos entre sus elementos.

Por lo tanto, $H \leq N_G(H)$.

Por último, veamos que si $x \in N_G(H)$, entonces $xHx^{-1} = H$.

$$\therefore H \triangleleft N_G(H). \quad \blacksquare$$

Podemos visualizar el Lema anterior en la siguiente imagen:

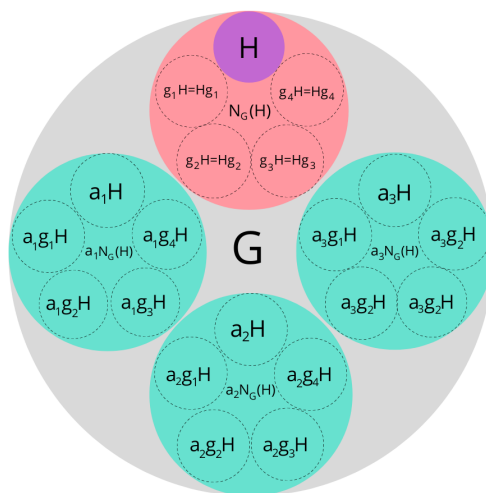


Figura 1.29: Partición de G en clases laterales de $N_G(H)$ (círculos grandes) y en clases laterales de H (círculos pequeños).

La definición del normalizador de H puede reformularse como:

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\}.$$

Como $H \triangleleft N_G(H) \leq G$, el grupo G puede partirse en clases laterales de $N_G(H)$ y $N_G(H)$ puede, a su vez, partirse en clases laterales de H . Tomando en cuenta que todas las clases laterales tienen la misma cantidad de elementos, tenemos:

$$\begin{aligned} [G : N_G(H)] = 4 \quad \wedge \quad [N_G(H) : H] = 5 \\ \implies [G : H] = 20, \end{aligned}$$

Para el grupo representado en la Figura (1.29).

Ahora, veremos que las clases laterales de $N_G(H)$ en G también están relacionados con las conjugadas de H :

Teorema 1.6.13. Sea $H \leq G$ y sea c el número de conjugadas de H en G . Entonces,

$$c = [G : N_G(H)] \tag{1.122}$$

Y, si G es finito, entonces c es un divisor de $|G|$.

Dem. Denotemos por \mathbf{H} al conjunto de conjugadas de H en G , y por \mathbf{N} al conjunto de clases laterales de $N_G(H)$ en G :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \{gHg^{-1} \mid g \in G\} \\ \mathbf{N} &= \{gN_G(H) \mid g \in G\} \end{aligned}$$

Entonces, podemos definir la función:

$$f : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{N}$$

$$gHg^{-1} \longmapsto gN_G(H)$$

Veamos que f es inyectiva: si existen $aHa^{-1}, bHb^{-1} \in \mathbf{H}$ tales que $f(aHa^{-1}) = f(bHb^{-1})$, entonces

$$\begin{aligned} aN_G(H) &= bN_G(H) \\ \implies ab^{-1} &\in N_G(H) \\ \implies ab^{-1}H(ab^{-1})^{-1} &= ab^{-1}Hba^{-1} = H \\ \implies (a^{-1}a)b^{-1}Hb(a^{-1}a) &= a^{-1}Ha \\ \implies aHa^{-1} &= bHb^{-1}. \end{aligned}$$

Además, f es sobreyectiva: si tomamos $xN_G(H) \in \mathbf{N}$ arbitrario, entonces $x \in G$ y existe $xHx^{-1} \in \mathbf{H}$ tal que

$$\begin{aligned} f(xHx^{-1}) &= xN_G(H). \\ \implies \text{Im}[f] &= \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es biyectiva y podemos igualar el número de elementos en su dominio al número de elementos en su imagen:

$$\therefore |\mathbf{H}| = |\mathbf{N}| = [G : N_G(H)] = c.$$

Finalmente, si G es finito, podemos aplicar el Teorema de Lagrange para ver que c es un divisor de $|G|$:

$$\frac{|G|}{|N_G(H)|} = [G : N_G(H)] \iff |N_G(H)| = \frac{|G|}{c}.$$

■

Proposición 1.6.14. i. Sean $a, x \in G$ arbitrarias. Entonces,

$$C_G(axa^{-1}) = aC_G(x)a^{-1}. \quad (1.123)$$

ii. Además, si $H \leq G$, entonces

$$N_G(aHa^{-1}) = aN_G(H)a^{-1}. \quad (1.124)$$

Dem. i. Primero, veamos que:

$$\begin{aligned} C_G(axa^{-1}) &= \{y \in G \mid y(axa^{-1}) = (axa^{-1})y\}. \\ aC_G(x)a^{-1} &= \{aga^{-1} \mid g \in C_G(x)\} = \{aga^{-1} \mid gx = xg\}. \end{aligned}$$

Sea $y \in C_G(axa^{-1})$ arbitraria.

$$\begin{aligned} \implies y(axa^{-1})y^{-1} &= axa^{-1} \\ \iff a^{-1}y(axa^{-1})y^{-1}a &= a^{-1}axa^{-1}a = x \\ \iff (a^{-1}ya)x(a^{-1}ya)^{-1} &= x \\ \implies a^{-1}ya &\in C_G(x). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} y &= a(a^{-1}ya)a^{-1} \in aC_G(x)a^{-1} \\ \implies C_G(axa^{-1}) &\subset aC_G(x)a^{-1}, \end{aligned}$$

Ahora, tomemos $z \in aC_G(x)a^{-1}$ arbitraria. Entonces, existe $g \in C_G(x)$ tal que $z = aga^{-1}$, con $xgx^{-1} = g$.

$$\begin{aligned} \implies a^{-1}za &= a^{-1}aga^{-1}a = g \\ \iff (ax)a^{-1}za(ax)^{-1} &= (ax)g(ax)^{-1} \\ \iff (axa^{-1})z(ax^{-1}a^{-1}) &= a(xgx^{-1})a^{-1} = aga^{-1} = z \\ \implies z &\in C_G(axa^{-1}). \\ \implies aC_G(x)a^{-1} &\subset C_G(axa^{-1}). \end{aligned}$$

$$\therefore C_G(axa^{-1}) = aC_G(x)a^{-1}.$$

ii. Ahora, recordemos que:

$$\begin{aligned} N_G(aHa^{-1}) &= \{g \in G \mid g(aHa^{-1})g^{-1} = aHa^{-1}\}. \\ aN_G(H)a^{-1} &= \{axa^{-1} \in G \mid x \in N_G(H)\} = \{axa^{-1} \in G \mid xHx^{-1} = H\}. \end{aligned}$$

Consideremos $g \in N_G(aHa^{-1})$ arbitraria.

$$\begin{aligned} \implies aHa^{-1} &= g(aHa^{-1})g^{-1} \\ \iff a^{-1}aHa^{-1}a &= a^{-1}g(aHa^{-1})g^{-1}a \\ \iff H &= (a^{-1}ga)H(a^{-1}ga)^{-1} \\ \implies a^{-1}ga &\in N_G(H); \\ \implies a(a^{-1}ga)a^{-1} &= g \in aN_G(H)a^{-1}. \\ \implies N_G(aHa^{-1}) &\subset aN_G(H)a^{-1}. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $y \in aN_G(H)a^{-1}$, entonces existe $x \in N_G(H)$ tal que $y = axa^{-1}$. Entonces,

$$\begin{aligned} H &= xHx^{-1} \\ \iff aHa^{-1} &= axHx^{-1}a^{-1} \\ &= ax(a^{-1}a)H(a^{-1}a)x^{-1}a^{-1} \\ &= (axa^{-1})(aHa^{-1})(axa^{-1})^{-1} \\ \implies y &= axa^{-1} \in N_G(aHa^{-1}) \\ \implies aN_G(H)a^{-1} &\subset N_G(aHa^{-1}). \\ \therefore aN_G(H)a^{-1} &= N_G(aHa^{-1}). \end{aligned}$$

■

Para concluir la sección, retomaremos el grupo de rotaciones continuas en 3 dimensiones, SO_3 , definido en la Ecuación (1.72).

Ejemplo 1.6.3 (Clases de SO_3). Como vimos en el Ejemplo (1.3.4), podemos describir completamente una rotación $R \in SO_3$ conociendo el **ángulo de rotación** ψ y la **dirección del eje** de rotación \hat{n} .

A su vez, \hat{n} está determinado por dos ángulos: el azimutal ϕ (sobre el plano XY) y el polar θ (subtendido desde el eje Z). Por lo tanto, requerimos de tres parámetros para especificar cada rotación:

$$R(\phi, \theta, \psi) \sim R_{\hat{n}}(\psi) = \text{Rotación de } \psi \text{ radianes, alrededor del eje } \hat{n}.$$

Y la acción de $R_{\hat{n}}(\psi)$ sobre un vector cualquiera $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ es:

$$R_{\hat{n}}(\psi) : \vec{x} \mapsto \vec{x}' = R_{\hat{n}}(\psi)(\vec{x}).$$

Denotemos por ζ_ψ al conjunto de rotaciones en un ángulo ψ , alrededor de todos los ejes posibles:

$$\zeta_\psi = \{R_{\hat{n}}(\psi) : \phi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi)\}.$$

Entonces, ζ_ψ es una clase de conjugación de SO_3 , ya que todas las conjugadas de $R_{\hat{n}}(\psi)$ son también rotaciones en ψ radianes.

Explícitamente, si $R_{\hat{m}}(\beta) \in SO_3$, entonces

$$R_{\hat{m}}(\beta)R_{\hat{n}}(\psi)[R_{\hat{m}}(\beta)]^{-1} = R_{\hat{n}'}(\psi),$$

siendo \hat{n}' el vector unitario que indica la dirección de la nueva rotación.

Por lo tanto, todas las rotaciones en un mismo ángulo, pero alrededor de diferentes ejes, pertenecen a la misma clase.

Como las clases de conjugación inducen una partición en SO_3 , tenemos:

$$SO_3 = \bigcup_{\psi} \zeta_\psi, \text{ con } \psi \in [0, 2\pi).$$

***Nota:** En la sección 1.4, estudiamos los grupos diedrales, que incluyen a las rotaciones de un polígono de n lados. Estos grupos son **finitos** y **discretos**, ya que las rotaciones se realizan en múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$ radianes.

Sin embargo, como ya habíamos comentado, el grupo SO_3 es un **grupo de Lie**, por lo que es parametrizable de manera continua. Sus parámetros (ϕ, θ, ψ) pueden tomar una infinidad de valores en un intervalo en \mathbb{R} , y cada elección determina una rotación diferente $R_{\hat{n}}(\psi)$.

Capítulo 2

Teoría de Representaciones

En el capítulo anterior, estudiamos diferentes tipos de grupos: finitos e infinitos, aditivos, multiplicativos, abelianos, cíclicos, etc. Particularmente, mencionamos que las permutaciones $\sigma \in S_n$ suelen representarse como ciclos o como matrices, de manera que podamos operarlas y conocer el efecto que tienen sobre las n letras.

Esta es la idea clave de la teoría de representaciones: identificar a cada elemento del grupo como una transformación lineal, para así hacerlo actuar sobre cierto objeto.

Por ejemplo, en el caso del grupo diedral D_n , se asigna a cada elemento $U \in D_n$ una matriz de permutación, la cual se hace actuar sobre un polígono de n lados. De manera similar, cada elemento del grupo de rotaciones continuas $SO(3)$ suele representarse como una matriz de tamaño 3×3 , que actúa sobre vectores en \mathbb{R}^3 .

Este principio ha sido aplicado a otras estructuras algebraicas, como las álgebras asociativas y las álgebras de Lie; pero, en todos los casos, el propósito es el mismo: trasladar un problema de álgebra abstracta, a uno de álgebra lineal. Los objetos abstractos son representados como transformaciones lineales, las cuales obedecen las leyes del álgebra y análisis que ya conocemos.

Al observar la acción de las transformaciones sobre un espacio vectorial V , obtendremos más conocimiento sobre el grupo. Por ejemplo: podemos decir que σ es una permutación en n letras, pero no conocer la forma exacta de σ . Así, si escribimos σ como una matriz de permutación $n \times n$ y la hacemos actuar sobre un vector $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \hat{e}_i \in E^n$, obtendremos un nuevo vector en E^n , cuyas entradas son una permutación de las coordenadas x_i .

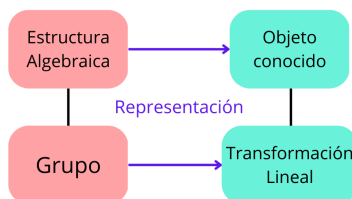


Figura 2.1: Intuición para la teoría de representaciones.

Sabemos que, habiendo elegido una base del espacio vectorial V , podemos representar cualquier transformación lineal sobre V de manera matricial. Es por ello que, en muchos textos, se dice que

las representaciones son matrices, o se habla de matrices y transformaciones lineales de manera indistinta.

El propósito de este capítulo es conocer los postulados más importantes de la teoría de representaciones, así como aplicar sus técnicas a grupos concretos que tienen relevancia en la física.

Las representaciones de un grupo serán definidas como transformaciones lineales, pero se expresarán de manera matricial en la mayoría de los ejemplos, explicitando la base cuando sea necesario. Asimismo, se abordarán los 2 tipos de representaciones más importantes: las matrices y los caracteres, aunque estos últimos también pueden verse como matrices de tamaño 1×1 .

La mayoría de definiciones y teoremas del capítulo están basados en *Representation Theory of Finite Groups*, de Benjamin Steinberg [12]. De manera suplementaria se usan *Linear-Representations of Finite Groups* de Jean-Pierre Serre [13], y *Group Theory in Physics* de Wu Ki Tung [3]. Los ejemplos que involucran grupos de Lie son extraídos de *An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists* de Nadir Jeevanjee [10].

2.1. Representaciones de Grupos

Para comenzar, recordemos la Definición (1.1.8): si V es un espacio vectorial, entonces el conjunto de transformaciones lineales invertibles sobre V es llamado **grupo general lineal**, y se denota por $GL(V)$.

Definición 2.1.1. Una **representación** de un grupo G es un homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, donde V es un espacio vectorial.

Si V es de dimensión n , entonces se dice que φ es una representación de **grado** n ; es decir,

$$\text{Dim}[V] = \text{Grado}[\varphi]. \quad (2.1)$$

Por ahora, nos limitaremos al caso en que la dimensión de V es finita.

Veamos que una representación φ asigna a cada elemento del grupo una transformación lineal sobre V :

$$\begin{aligned} \varphi : g &\longmapsto \varphi_g \in GL(V) \\ \implies \varphi_g : V &\longrightarrow V \quad \wedge \quad \exists \varphi_g^{-1} \in GL(V) \text{ tal que } \varphi_g^{-1} \circ \varphi_g = id. \end{aligned}$$

Y, además, φ preserva la estructura de G :

$$\varphi(gh) = \varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h. \quad (2.2)$$

$$\varphi(1) = id = \text{mapeo identidad}. \quad (2.3)$$

$$\varphi(g^{-1}) = \varphi_{g^{-1}} = \varphi_g^{-1}. \quad (2.4)$$

***Nota:** De acuerdo con la Definición (2.1.1), la representación de G es el **homomorfismo** φ ; sin embargo, también se les llama representaciones a las **imágenes** $\{\varphi_g \mid g \in G\}$.

Usualmente, denotaremos a las representaciones por letras griegas: $\varphi, \rho, \psi, \dots$

Sabemos que toda transformación lineal puede escribirse como una matriz. Específicamente, si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, donde V es un espacio de dimensión n y W es un espacio de dimensión m , entonces T tiene una matriz asociada \mathcal{T} de tamaño $m \times n$:

$$T : V \rightarrow W \implies T \simeq \mathcal{T} \in \mathcal{M}_{m \times n}.$$

Debido a esta relación, es común que las representaciones de un grupo se definan directamente como matrices. Así, si φ es una representación de grado n , entonces podemos asignarle una **matriz cuadrada** $\mathcal{U} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, una vez que hayamos elegido una base de \mathbb{C}^n .

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : G &\longrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \\ g &\longmapsto \mathcal{U}_g. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_g : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ \vec{x} &\longmapsto \mathcal{U}_g(\vec{x}) = \vec{y}. \end{aligned}$$

Las transformaciones $\{\varphi_g\}$ y sus matrices asociadas $\{\mathcal{U}_g\}$ serán tratadas como iguales durante el texto.

Notemos que no necesariamente φ es biyectiva, por lo que varios elementos del grupo pueden ser asignados a la misma transformación. Particularmente, existe una representación que asocia a todos los elementos del grupo con la identidad:

Definición 2.1.2. La **representación trivial** de un grupo G es el homomorfismo de grado 1 que asigna el número $1 \in \mathbb{C}$ a todos los elementos del grupo; es decir,

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow GL(\mathbb{C}) \\ g &\longmapsto \mathbf{1}, \\ \text{donde } \mathbf{1} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ c &\longmapsto 1 \cdot c = c. \end{aligned}$$

En notación matricial, $\mathbf{1} = 1$, pues las matrices de tamaño 1×1 son simplemente escalares. Así, podemos reformular la definición de la representación trivial como:

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto 1, \end{aligned}$$

denotando al grupo multiplicativo de números complejos por \mathbb{C} en vez de (\mathbb{C}, \cdot) , para simplificar la notación.

***Nota:** Si $n > 1$, entonces la representación $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ dada por $\rho_g(v) = \mathbf{1}(v) = v$, $\forall g \in G$ y $v \in V$, **no** es la representación trivial, sino la transformación identidad sobre un espacio n -dimensional.

Así, $\rho : g \mapsto \mathbf{1} \in GL_n(\mathbb{C})$ equivale a n copias de la representación trivial.

Ejemplo 2.1.1. Otros ejemplos de **representaciones de grado 1** son los siguientes:

- Sea φ una función sobre el grupo aditivo de enteros módulo 4 \mathbb{Z}_4 , dada por:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}_4 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [a]_4 &\longmapsto i^b. \end{aligned}$$

Sabemos que \mathbb{Z}_4 consta de cuatro elementos:

$$\mathbb{Z}_4 = \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\}$$

y las imágenes de \mathbb{Z}_4 bajo φ son $\{1, i, -1, -i\}$.

Para probar que φ es una representación de grado 1 de \mathbb{Z}_4 , veamos que es un homomorfismo:

$$\begin{aligned}\varphi([a]_4 [b]_4) &= \varphi([a+b]_4) \\ &= i^{a+b} \\ &= (i^a)(i^b) \\ &= \varphi([a]_4)\varphi([b]_4).\end{aligned}$$

- Ahora consideremos el grupo aditivo de enteros módulo n \mathbb{Z}_n , y definamos la función:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Z}_n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [a]_n &\longmapsto e^{i2\pi a/n}\end{aligned}$$

Las imágenes de \mathbb{Z}_n bajo φ son las **raíces n-ésimas de la unidad** en el plano complejo.

Probemos que φ es un homomorfismo:

$$\begin{aligned}\varphi([a]_n [b]_n) &= \varphi([a+b]_n) \\ &= e^{i2\pi(a+b)/n} \\ &= e^{i2\pi a/n} e^{i2\pi b/n} \\ &= \varphi([a]_n)\varphi([b]_n).\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ es una representación de grado 1 de \mathbb{Z}_n .

También podemos comprobar la validez de las Ecuaciones (2.3), (2.4):

$$\begin{aligned}\varphi([0]_n) &= e^{i2\pi/n \cdot 0} = 1. \\ \varphi([-a]_n) &= e^{i2\pi(-a)/n} = (e^{i2\pi a/n})^{-1} = (\varphi[a]_n)^{-1}.\end{aligned}$$

Definición 2.1.3. Sea φ una representación de un grupo G . Si φ es inyectiva, entonces decimos que la representación es **fiel**; de lo contrario, decimos que es **degenerada**.

Notemos que la representación trivial es degenerada, pero las representaciones del Ejemplo (2.1.1) son fieles, pues ningún par de elementos del grupo tienen la misma imagen bajo φ .

Teorema 2.1.1. Sea G un grupo y $H \triangleleft G$ no trivial. Entonces, cualquier representación del grupo cociente $\frac{G}{H}$ es también una representación de G , pero **degenerada**.

Además, si φ es una representación degenerada de G , entonces existe al menos un subgrupo normal $H \triangleleft G$ tal que φ es una representación **fiel** de $\frac{G}{H}$.

Dem. Si $H \triangleleft G$, entonces el conjunto de clases laterales $\{Hg \mid g \in G\}$ forma un grupo, $\frac{G}{H}$.

Supongamos que ρ es una representación de $\frac{G}{H}$; entonces,

$$\begin{aligned} \rho : \frac{G}{H} &\longrightarrow GL(V) \\ Hg &\longmapsto \rho_{Hg} \end{aligned}$$

Ahora, definimos:

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \varphi_g = \rho_{Hg} \end{aligned}$$

Es decir, $\varphi_g(v) = \rho_{Hg}(v)$, para todo $v \in V$.

Veamos que φ es un homomorfismo: si $a, b \in G$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(ab) &= \varphi_{ab} \\ &= \rho_{Hab} \\ &= \rho_{HaHb} \\ &= \rho_{Ha}\rho_{Hb} \\ &= \varphi(a)\varphi(b), \end{aligned}$$

tomando en cuenta que $Hab = HaHb$ y que ρ es un homomorfismo.

Por lo tanto, φ es una representación de G ; sin embargo, φ no es inyectiva, pues todos los elementos que pertenecen a la misma clase lateral $Hg \subset G$, tienen la misma imagen bajo φ :

$$\varphi_g = \varphi_{hg} = \rho_{Hg}, \quad \forall h \in H.$$

Por lo tanto, φ es una representación degenerada de G .

Ahora, supongamos que φ es una representación degenerada de G . Entonces, el homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ no es inyectivo, es decir,

$$\exists a, b \in G, \quad a \neq b, \quad \text{tales que } \varphi(a) = \varphi(b).$$

Llamemos H al núcleo de φ . Por el 1^{er} Teorema de isomorfismos,

$$H \triangleleft G \quad \wedge \quad \frac{G}{H} \cong \text{Im}[\varphi],$$

por lo que se puede establecer un homomorfismo inyectivo entre $\frac{G}{H}$ y $GL(V)$:

$$\begin{aligned} \rho : \frac{G}{H} &\longrightarrow GL(V) \\ Hg &\longmapsto \rho_{Hg} = \varphi_g. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ρ es una representación fiel de $\frac{G}{H}$. ■

Ejemplo 2.1.2. Consideremos el grupo simétrico S_3 , cuyos elementos se pueden escribir en notación de ciclos:

$$S_3 = \{(1), (1\ 2), (3\ 1), (1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1)\}.$$

S_3 tiene un subgrupo normal H , que consta de los 3-ciclos y la identidad:

$$H = \{1, (1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1)\} \triangleleft S_3.$$

Como se ve en la Figura (1.28), el grupo cociente $\frac{S_3}{H}$ consta sólo de dos elementos, por lo que es isomorfo a C_2 :

$$\frac{S_3}{H} = \{H, H(1\ 2)\}.$$

Introducimos la representación unidimensional estándar de $C_2 \cong \frac{S_3}{H}$:

$$\begin{aligned} \rho : \frac{S_3}{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ H &\longmapsto 1, \quad H(1\ 2) \longmapsto -1 \end{aligned}$$

y definimos un homomorfismo $\tilde{\rho}$ sobre S_3 , de modo que sus imágenes coincidan con las de ρ :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : S_3 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \sigma &\longrightarrow \tilde{\rho}(\sigma) = \rho(H\sigma). \end{aligned}$$

$$\implies \tilde{\rho}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma \in H. \\ -1, & \text{si } \sigma \in H(1\ 2). \end{cases}$$

Por lo tanto, ρ es una representación fiel de $\frac{S_3}{H}$, pero degenerada de S_3 .

En la sección 1.4, vimos que las permutaciones en n letras pueden escribirse como un arreglo de 2 filas o como ciclos. También introducimos las matrices $\{R_k, U_k : k = 1, 2, \dots, n\}$, que corresponden a los elementos del grupo diedral $D_n \leq S_n$.

Enseguida veremos que toda permutación puede ser representada de manera matricial.

Definición 2.1.4. Sea $\mathbb{1}$ la matriz identidad de tamaño $n \times n$ sobre el campo \mathbb{C} , y denotemos por $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n\}$ las filas de $\mathbb{1}$. Entonces, una **matriz de permutación** sobre \mathbb{C} es una matriz obtenida al permutar las filas $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n\}$.

En otras palabras, \mathcal{P} es una matriz de permutación si y sólo si existe $\sigma \in S_n$ tal que $\{\hat{e}_{\sigma(1)}, \hat{e}_{\sigma(2)}, \dots, \hat{e}_{\sigma(n)}\}$ sean las filas de \mathcal{P} .

Al conjunto de matrices de permutación de tamaño $n \times n$ con entradas sobre \mathbb{C} , se le denota por $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$.

Proposición 2.1.2. Toda permutación $\sigma \in S_n$ puede representarse mediante una matriz de permutación $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$, a la que también llamamos **representación estándar** de σ .

Si σ está dada por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Entonces establecemos la relación:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : S_n &\longrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \\ \sigma &\longmapsto \mathcal{P}_\sigma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\sigma : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ \hat{e}_i &\longmapsto \hat{e}_{\sigma(i)}, \end{aligned}$$

donde $\{\hat{e}_i \mid i = 1, \dots, n\}$ son los vectores unitarios que forman la base estándar de \mathbb{C}^n .

Denotando por (p_{ij}) las entradas de \mathcal{P}_σ , tenemos:

$$\begin{aligned}\sigma(i) = j &\implies p_{ij} = 1. \\ \sigma(i) \neq j &\implies p_{ij} = 0.\end{aligned}$$

Como toda permutación es biyectiva, existe una única j tal que $\sigma(i) = j$. Por lo tanto, cada fila de \mathcal{P} tiene una sola entrada igual a 1 y todas las demás entradas iguales a 0.

Notemos que, efectivamente, \mathcal{P} es un homomorfismo: si $\alpha, \beta \in S_n$, entonces $\mathcal{P}(\alpha \circ \beta) = \mathcal{P}_{\alpha \circ \beta}$. Tomando $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \hat{e}_i \in \mathbb{C}^n$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\alpha\beta}(\vec{x}) &= \mathcal{P}_{\alpha\beta} \left(\sum_{i=1}^n x_i \hat{e}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \hat{e}_{\alpha(\beta(i))} \\ &= \mathcal{P}_\alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i \hat{e}_{\beta(i)} \right) \\ &= \mathcal{P}_\alpha \circ \mathcal{P}_\beta \left(\sum_{i=1}^n x_i \hat{e}_i \right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\implies \mathcal{P}_{\alpha\beta} &= \mathcal{P}_\alpha \circ \mathcal{P}_\beta \\ \therefore \mathcal{P}(\alpha\beta) &= \mathcal{P}(\alpha)\mathcal{P}(\beta).\end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.3 (Matriz de permutación). Consideremos $\sigma \in S_5$ dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las entradas de \mathcal{P}_σ :

$$\begin{aligned}\sigma(1) = 1 &\implies p_{11} = 1 \\ \sigma(2) = 4 &\implies p_{24} = 1 \\ \sigma(3) = 2 &\implies p_{32} = 1 \\ \sigma(4) = 5 &\implies p_{45} = 1 \\ \sigma(5) = 3 &\implies p_{53} = 1\end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{P}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_4 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_5 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Con este ejemplo, podemos ver que las filas de \mathcal{P}_σ son una permutación de las filas de $\mathbb{1}_{5 \times 5}$.

Teorema 2.1.3. El conjunto de matrices de permutación $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ es un subgrupo de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, isomorfo al grupo simétrico S_n .

Dem. i. Primero probaremos que $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ es subgrupo de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Veamos que $\mathbf{1} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$, pues es la matriz que resulta de aplicar la permutación identidad $1 \in S_n$ a las filas $\{\hat{e}_i\}$.

Ahora, consideremos $A, B \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$; entonces, existen $\alpha, \beta \in S_n$ tales que:

$$A = \begin{pmatrix} \hat{e}_{\alpha(1)} \\ \hat{e}_{\alpha(2)} \\ \dots \\ \hat{e}_{\alpha(n)} \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} \hat{e}_{\beta(1)} \\ \hat{e}_{\beta(2)} \\ \dots \\ \hat{e}_{\beta(n)} \end{pmatrix}.$$

Primero, veamos que B^\dagger también es una matriz de permutación, pues:

$$B^\dagger = B^T = \begin{pmatrix} \hat{e}_{\beta(1)}^T & \hat{e}_{\beta(2)}^T & \dots & \hat{e}_{\beta(n)}^T \end{pmatrix}$$

Siendo $\hat{e}_{\beta(i)}^T$ el traspuesto del vector fila $\hat{e}_{\beta(i)}$ (es decir, $\hat{e}_{\beta(i)}^T$ es un vector columna).

Ahora, tomando en cuenta que:

$$\hat{e}_i = (\delta_{i1} \quad \delta_{i2} \quad \dots \quad \delta_{in}) \tag{2.5}$$

Y denotando por b_{ik} la entrada ik -ésima de B , calculamos el producto BB^\dagger :

$$\begin{aligned} (BB^\dagger)_{ij} &= \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n \delta_{\alpha(i)k} \delta_{\alpha(j)k} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha(i) \neq k \vee \alpha(j) \neq k. \\ 1, & \text{si } \alpha(i) = \alpha(j) = k. \end{cases} \end{aligned}$$

Esto significa que todas las entradas fuera de la diagonal se anulan y las entradas diagonales $(BB^\dagger)_{ii}$ son iguales a 1. Lo mismo se puede probar para $B^\dagger B$.

$$\begin{aligned} \implies BB^\dagger &= B^\dagger B = \mathbf{1}. \\ \therefore B^\dagger &= B^{-1} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}), \end{aligned}$$

para toda $B \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$.

Igualmente, el producto es cerrado en $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n \delta_{\alpha(i)k} \delta_{k\beta(j)} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha(i) \neq k \vee \beta(j) \neq k. \\ 1, & \text{si } \alpha(i) = \beta(j) = k. \end{cases} \end{aligned}$$

Como α, β son biyectivas, existe un único par i, j tal que $\alpha(i) = \beta(j) = k$, por lo que AB tiene un sólo 1 en cada fila. Esto significa que las filas de AB son una permutación de las filas de $\mathbf{1}$; más aún,

$$AB = \begin{pmatrix} \hat{e}_{(\alpha\circ\beta)(1)} \\ \hat{e}_{(\alpha\circ\beta)(2)} \\ \dots \\ \hat{e}_{(\alpha\circ\beta)(n)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB &\in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}). \\ \therefore \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) &\leq \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

ii. Ahora, probaremos que $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ es isomorfo a S_n . Para ello, definimos la función:

$$\begin{aligned}\phi : \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow S_n \\ \mathcal{P}_\sigma &\longmapsto \sigma.\end{aligned}$$

Si $\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{P}_\beta \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$, entonces

$$\begin{aligned}\phi(\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta) &= \phi(\mathcal{P}_{\alpha \circ \beta}) \\ &= \alpha \circ \beta \\ &= \phi(\mathcal{P}_\alpha) \phi(\mathcal{P}_\beta).\end{aligned}$$

Por lo tanto, ϕ es un homomorfismo.

Ahora, supongamos que existen $\mathcal{P}_\sigma, \mathcal{P}_\tau \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ tales que $\phi(\mathcal{P}_\sigma) = \phi(\mathcal{P}_\tau)$.

$$\begin{aligned}\implies \sigma &= \tau \\ \iff \hat{e}_{\sigma(i)} &= \hat{e}_{\tau(i)}, \forall i = 1, \dots, n. \\ \iff \mathcal{P}_\sigma &= \mathcal{P}_\tau.\end{aligned}$$

Por lo tanto, ϕ es inyectiva.

Igualmente, si γ es una permutación arbitraria en S_n , entonces podemos aplicar γ a las columnas de $\mathbb{1}$ y obtener \mathcal{P}_γ . Así,

$$\forall \gamma \in S_n, \exists \mathcal{P}_\gamma \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \text{ tal que } \phi(\mathcal{P}_\gamma) = \gamma.$$

Por lo que ϕ es sobreyectiva.

$$\therefore \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \cong S_n. \tag{2.7}$$

■

Como consecuencia del Teorema (2.1.3) y del Teorema de Cayley (1.4.8), todo grupo G de orden n puede *insertarse* dentro de $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$; es decir, si $|G| = n$, entonces G es isomorfo a un subgrupo de $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$. Esto implica que todo elemento de G puede ser representado como una matriz de permutación.

En ocasiones, 2 representaciones de un grupo son similares, en el sentido de que actúan sobre espacios de la misma dimensión y una puede obtenerse a partir de la otra.

Formalizamos esta relación de similitud con la siguiente:

Definición 2.1.5. Sean φ, ρ representaciones de un grupo G , sobre los espacios V y W , respectivamente. Decimos que φ y ρ son **representaciones equivalentes** si existe un isomorfismo $T : V \longrightarrow W$ tal que

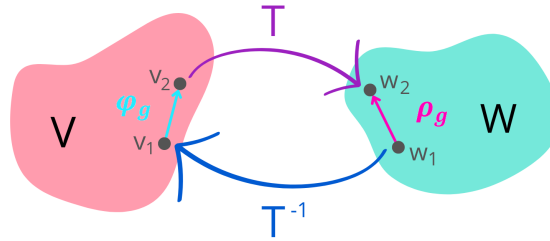
$$\rho_g = T \circ \varphi_g \circ T^{-1}, \forall g \in G \tag{2.8}$$

y denotamos esta relación de equivalencia por $\varphi \sim \rho$.

Notemos que, para que T sea un isomorfismo, V y W deben tener la misma dimensión. También notemos que la Ecuación (2.8) es una **transformación de similaridad** entre operadores lineales; en el caso de representaciones matriciales, T corresponde a la matriz de cambio de base [22].

Usualmente, dos representaciones equivalentes son tratadas como iguales: el isomorfismo T funge como un *traductor* entre ellas, pues la información que proporcionan ambas es la misma.

Gráficamente:



$$\rho_g(w_1) = T\varphi_g T^{-1}(w_1) = w_2.$$

Figura 2.2: Representación gráfica de la Definición (2.1.5).

Así,

$$\begin{aligned}\varphi : G &\longrightarrow GL(V) \implies \varphi_g : V \longrightarrow V, \\ \rho : G &\longrightarrow GL(W) \implies \rho_g : W \longrightarrow W, \\ T : V &\longrightarrow W \implies T^{-1} : W \longrightarrow V.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\implies \rho_g &= T\varphi_g T^{-1} : W \longrightarrow V \longrightarrow W, \\ \varphi_g &= T^{-1}\rho_g T : V \longrightarrow W \longrightarrow V.\end{aligned}$$

Donde se han omitido los símbolos (\circ) para simplificar la notación.

Ejemplo 2.1.4. Revisaremos dos representaciones equivalentes del grupo de enteros módulo n .

Sea $\rho : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por:

$$\rho_{[a]} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi a}{n} & -\text{sen} \frac{2\pi a}{n} \\ \text{sen} \frac{2\pi a}{n} & \cos \frac{2\pi a}{n} \end{pmatrix}$$

Y sea $\varphi : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por:

$$\varphi_{[a]} = \begin{pmatrix} e^{i2\pi a/n} & 0 \\ 0 & e^{-i2\pi a/n} \end{pmatrix}$$

Tanto $\varphi_{[a]}$ como $\rho_{[a]}$ representan una **rotación** sobre el círculo unitario, en un ángulo $\frac{2\pi a}{n}$; lo que las distingue es que están expresadas en diferentes bases de \mathbb{C}^2 [12].

Para ver que φ y ρ son equivalentes, introducimos la **matriz de cambio de base**, cuyas columnas son los vectores de la base $\{(i, 1), (-i, 1)\}$:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\implies \mathcal{T}^{-1}\rho_{[a]}\mathcal{T} &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi a}{n} & -\operatorname{sen} \frac{2\pi a}{n} \\ \operatorname{sen} \frac{2\pi a}{n} & \cos \frac{2\pi a}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \left[\cos \frac{2\pi a}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi a}{n} \right] & -i \left[\cos \frac{2\pi a}{n} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi a}{n} \right] \\ \cos \frac{2\pi a}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi a}{n} & \cos \frac{2\pi a}{n} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi a}{n} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ie^{i2\pi a/n} & -ie^{-i2\pi a/n} \\ e^{i2\pi a/n} & e^{-i2\pi a/n} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 2ie^{i2\pi a/n} & 0 \\ 0 & 2ie^{-i2\pi a/n} \end{pmatrix} \\
&= \varphi_{[a]}.
\end{aligned}$$

$$\therefore \rho \sim \varphi.$$

Las representaciones equivalentes de un grupo forman una clase de equivalencia:

$$\zeta_\varphi = \{\rho : G \longrightarrow GL(V) \mid \rho \sim \varphi\}. \quad (2.9)$$

Más adelante veremos que podemos reducir el problema de encontrar todas las representaciones de G , al de encontrar una representación de cada clase.

Definición 2.1.6. Sea $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ una representación. Entonces, decimos que un subespacio W de V es **G-invariante respecto de φ** si, para cualesquiera $g \in G$ y $w \in W$, $\varphi_g(w) \in W$.

Es decir, la acción de φ_g sobre W permanece en W .

Si V no tiene ningún subespacio G-invariante no trivial, entonces decimos que V es un espacio **mínimo** o **propio** respecto de φ .

Ejemplo 2.1.5. Volvamos a considerar las representaciones matriciales del Ejemplo (2.1.4).

Denotemos por $\mathbb{C}\hat{e}_1$ y $\mathbb{C}\hat{e}_2$ a los subespacios de \mathbb{C}^2 , generados por los ejes $\hat{e}_1 = (1, 0)$, $\hat{e}_2 = (0, 1)$:

$$\mathbb{C}\hat{e}_i = \{c\hat{e}_i : c \in \mathbb{C}\}, \quad i = 1, 2.$$

Veamos que $\mathbb{C}\hat{e}_1$ es un subespacio \mathbb{Z}_n -invariante respecto de φ :

$$\begin{aligned}
\varphi_{[a]}(\hat{e}_1) &= \begin{pmatrix} e^{i2\pi a/n} & 0 \\ 0 & e^{-i2\pi a/n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= ce^{i2\pi a/n}\hat{e}_1 \in \mathbb{C}\hat{e}_1.
\end{aligned}$$

Y, como $c \in \mathbb{C}$, $[a] \in \mathbb{Z}_n$ son arbitrarias, tenemos que la acción de φ sobre $\mathbb{C}\hat{e}_1$ permanece en $\mathbb{C}\hat{e}_1$. De la misma manera, se puede probar que $\mathbb{C}\hat{e}_2$ es un subespacio \mathbb{Z}_n -invariante respecto de φ .

Finalmente, notemos que $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\hat{e}_1 \times \mathbb{C}\hat{e}_2$, donde (\times) denota al producto cartesiano usual.

En general, trataremos de encontrar subespacios invariantes cuyo producto cartesiano sea el espacio vectorial completo de la representación. Esto nos permitirá *separar* o *partir* la representación en funciones más simples, facilitando el estudio del grupo.

Definición 2.1.7. Sean φ^1, φ^2 representaciones sobre los espacios V_1, V_2 , respectivamente. Entonces, su **suma directa** está definida como:

$$\begin{aligned}\varphi^1 \oplus \varphi^2 : G &\longrightarrow GL(V_1 \times V_2) \\ g &\longmapsto (\varphi^1 \oplus \varphi^2)_g,\end{aligned}$$

donde, si $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$, entonces:

$$(\varphi^1 \oplus \varphi^2)_g(v_1, v_2) = (\varphi_g^1(v_1), \varphi_g^2(v_2)). \quad (2.10)$$

Es decir, la representación de suma directa está definida sobre el producto cartesiano de los espacios vectoriales individuales.

En el caso de representaciones matriciales, tenemos:

$$\begin{aligned}\varphi^1 : G &\longrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), & \varphi^2 : G &\longrightarrow \mathcal{GL}_m(\mathbb{C}); \\ \implies \varphi^1 \oplus \varphi^2 : G &\longrightarrow \mathcal{GL}_{n+m}(\mathbb{C}).\end{aligned}$$

Y cada $(\varphi^1 \oplus \varphi^2)_g$ tiene forma de **bloques diagonales**:

$$(\varphi^1 \oplus \varphi^2)_g = \begin{pmatrix} \varphi_g^1 & 0 \\ 0 & \varphi_g^2 \end{pmatrix}; \quad (2.11)$$

Como φ_g^1 es de tamaño $n \times n$ y φ_g^2 es de tamaño $m \times m$, $(\varphi^1 \oplus \varphi^2)_g$ es de tamaño $(n+m) \times (n+m)$.

Ejemplo 2.1.6. Volviendo a la discusión del Ejemplo (2.1.5), definimos las representaciones unidimensionales:

$$\begin{aligned}\varphi^1 : \mathbb{Z}_n &\longrightarrow \mathbb{C} & \varphi^2 : \mathbb{Z}_n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [a] &\longmapsto e^{i2\pi a/n}. & [a] &\longmapsto e^{-i2\pi a/n}.\end{aligned}$$

Podemos comprobar que φ^1, φ^2 son representaciones válidas de \mathbb{Z}_n , pues son homomorfismos.

De acuerdo con la Ecuación (2.11),

$$\begin{aligned}(\varphi^1 \oplus \varphi^2)_{[a]} &= \begin{pmatrix} e^{i2\pi a/n} & 0 \\ 0 & e^{-i2\pi a/n} \end{pmatrix}. \\ \therefore \varphi^1 \oplus \varphi^2 &= \varphi.\end{aligned}$$

Con este ejemplo, vemos que una representación sobre V se puede partir en representaciones de menor grado, las cuales actúan en los subespacios invariantes de V .

Definición 2.1.8. Sea $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ una representación y $W \leq V$ un subespacio G -invariante respecto de φ . Entonces, la restricción de φ a W es una **subrepresentación** de G .

Es decir,

$$\begin{aligned}\varphi|_W : G &\longrightarrow GL(W); \\ (\varphi|_W)_g(w) &= \varphi_g(w) \in W, \quad \forall w \in W.\end{aligned}$$

Definición 2.1.9. Decimos que una representación $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ es **irreducible** si V no tiene subespacios G -invariantes no triviales respecto de φ . De lo contrario, decimos que φ es **reducible**.

Uno de los principales problemas de la Teoría de representaciones es reducir una representación φ en sus **constituyentes** φ^j . En ocasiones, será necesario obtener todas las representaciones irreducibles de un grupo y, en otras, *componerlas* para obtener una representación más general.

Notemos que toda representación de grado 1 es irreducible, pues los espacios de dimensión 1 no poseen subespacios no triviales.

También, veamos que la representación de grado 2 φ del Ejemplo (2.1.4) es reducible, pues $\mathbb{C}\hat{e}_1, \mathbb{C}\hat{e}_2 \leq \mathbb{C}^2$ son subespacios \mathbb{Z}_n -invariantes respecto de φ . Por otro lado, las constituyentes φ^1, φ^2 son **irreducibles**, pues son de grado 1.

En la siguiente tabla, enlistamos los conceptos anteriores y establecemos una analogía entre grupos, espacios vectoriales y representaciones:

Grupo	Espacio vectorial	Representación
Subgrupo	Subespacio	Subrepresentación
Grupo simple	Subespacio 1-dimensional	Representación irreducible
Producto directo	Producto cartesiano	Suma directa
Isomorfismo	Isomorfismo	Equivalencia

Tabla 2.1: Analogías entre diferentes objetos matemáticos.

***Nota:** Tomemos en cuenta que los grupos y los espacios vectoriales son estructuras algebraicas, mientras que las representaciones son homomorfismos entre dichas estructuras.

Después de la representación trivial, las representaciones de grado 2 son las más sencillas y aparecen en varios problemas de la física. Por ello, proponemos un método para verificar si una representación de grado 2 es irreducible:

Proposición 2.1.4. Sea $\varphi : G \rightarrow GL_2(V)$ una representación de grado 2. Entonces, φ es irreducible si y sólo si las transformaciones $\{\varphi_g \mid g \in G\}$ no tienen ningún eigenvector común.

Dem. (\implies) Primero, supongamos que φ es una representación irreducible de grado 2. Entonces, V es de dimensión 2 y no posee ningún subespacio G -invariante no trivial.

Ahora, supongamos que $\vec{v} \in V$ es un eigenvector común de todas las representaciones φ_g y que el espacio V está definido sobre un campo \mathbb{K} . Entonces, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que:

$$\varphi_g(\vec{v}) = \lambda\vec{v}, \quad \forall g \in G.$$

Consideremos el espacio unidimensional generado por \vec{v} :

$$W := \{k\vec{v} \mid k \in \mathbb{K}\} < V.$$

Tomando $g \in G, \vec{w} \in W$ arbitrarias, tenemos:

$$\varphi_g(\vec{w}) = \varphi_g(k\vec{v}) = k\lambda\vec{v} \in W.$$

Entonces, W es un subespacio invariante de V respecto de φ , lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto, las representaciones φ_g no tienen ningún eigenvector común.

(\impliedby) Ahora, supongamos que existe $\vec{v} \in V$ que es eigenvector de todas las representaciones $\{\varphi_g \mid g \in G\}$.

Si φ es reducible, entonces V tiene algún subespacio invariante respecto de φ , al que denotaremos por W .

Como V es de dimensión 2, W debe ser unidimensional. Explícitamente, W es de la forma:

$$W = \{k\vec{v} \mid k \in \mathbb{K}\},$$

Para algún $\vec{v} \in V$.

$$\begin{aligned} \implies \varphi_g(k\vec{v}) &\in W, \quad \forall g \in G, k\vec{v} \in W. \\ \implies \varphi_g(k\vec{v}) &= k\varphi_g(\vec{v}) = \lambda k\vec{v}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Entonces, $k\vec{v}$ es un eigenvector común a todas las representaciones φ_g , lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto, φ es irreducible. ■

La siguiente definición presenta el caso ideal en que una representación es irreducible o puede descomponerse en representaciones irreducibles:

Definición 2.1.10. Decimos que una representación $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ es **completamente reducible** o **descomponible** si

$$V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m, \tag{2.12}$$

donde $\{V_j \mid j = 1, 2, \dots, m\}$ son subespacios G -invariantes respecto de φ y las subrepresentaciones $\varphi^j := \varphi|_{V_j}$ son irreducibles.

En este caso, escribimos:

$$\varphi \sim \varphi^1 \oplus \varphi^2 \oplus \cdots \oplus \varphi^m. \tag{2.13}$$

Y, en notación matricial,

$$[\varphi_g]_B = \begin{pmatrix} [\varphi_g^1]_{B_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [\varphi_g^2]_{B_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & [\varphi_g^m]_{B_m} \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

siendo B_j una base del subespacio V_j y $B = \bigcup_{j=1}^m B_j$ es una base de V .

Ejemplo 2.1.7 (Representaciones de SO_2). Consideremos el **grupo de rotaciones continuas en 2 dimensiones**, denotado por SO_2 , y su representación matricial sobre \mathbb{C}^2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : SO_2 &\rightarrow \mathcal{GL}_2(\mathbb{C}) \\ R_\phi &\mapsto \mathcal{R}_\phi \end{aligned}$$

Es decir, \mathcal{R} asigna a cada transformación lineal $R_\phi \in SO_2$ una matriz \mathcal{R}_ϕ de tamaño 2×2 , dada por [12]:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\phi &= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ \text{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}; \\ \mathcal{R}_\phi(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ \text{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \vec{x}' \in \mathbb{C}^2. \end{aligned}$$

Notemos la similitud entre \mathcal{R}_ϕ y la matriz ρ_a del Ejemplo (2.1.4): la única diferencia entre ambas es que ϕ toma valores en un intervalo continuo $[0, 2\pi)$ y a toma valores discretos en \mathbb{Z} . En otras palabras, SO_2 es un grupo continuo y \mathbb{Z}_n es un grupo discreto, pero ambos constan de

rotaciones sobre en un plano.

Ahora, sean $\mathbb{C}\hat{e}_1, \mathbb{C}\hat{e}_2$ los subespacios de \mathbb{C}^2 generados por los vectores de la base canónica \hat{e}_1, \hat{e}_2 . Veremos que $\mathbb{C}\hat{e}_1, \mathbb{C}\hat{e}_2$ **no son** SO_2 -invariantes:

Si $k, p \in \mathbb{C}$, entonces

$$\mathcal{R}_\phi(p\hat{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\cos\phi \\ \operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}.$$

La única forma de que $\mathcal{R}_\phi(p\hat{e}_1) \in \mathbb{C}\hat{e}_1$ es que ϕ sea un múltiplo entero de π . Como existe una infinidad de rotaciones $R_\phi \in SO_2$ con $\phi \neq m\pi$, siendo m un entero, el subespacio $\mathbb{C}\hat{e}_1$ no es SO_2 -invariante respecto de ρ .

De la misma manera, se prueba que $\mathcal{R}_\phi(k\hat{e}_2) \in \mathbb{C}\hat{e}_2$ si y sólo si ϕ es un múltiplo entero de $\frac{\pi}{2}$, es decir, si $\phi = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots$.

Por lo tanto, $\mathbb{C}\hat{e}_2$ no es un subespacio SO_2 -invariante respecto de \mathcal{R} .

Por otro lado, consideremos los vectores unitarios:

$$\begin{aligned} \hat{e}_+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 + i\hat{e}_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \\ \hat{e}_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Sean $\mathbb{C}\hat{e}_+, \mathbb{C}\hat{e}_-$ los subespacios de \mathbb{C}^2 generados por \hat{e}_+, \hat{e}_- . Tomando $c\hat{e}_+ \in \mathbb{C}\hat{e}_+$, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\phi(c\hat{e}_+) &= -\frac{p}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right] \\ &= -\frac{p}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ &= -\frac{p}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\phi - i\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi + i\cos\phi \end{pmatrix} \\ &= -\frac{p}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \\ ie^{-i\phi} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} p e^{-i\phi} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} p e^{-i\phi} (\hat{e}_1 + i\hat{e}_2) \in \mathbb{C}\hat{e}_+. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbb{C}\hat{e}_+$ es un subespacio SO_2 -invariante de \mathbb{C}^2 . De la misma manera, se puede probar que:

$$\mathcal{R}_\phi(k\hat{e}_-) = k e^{i\phi} \hat{e}_- \in \mathbb{C}\hat{e}_-,$$

Por lo que $\mathbb{C}\hat{e}_-$ es un subespacio SO_2 -invariante de \mathbb{C}^2 .

Como los espacios $\mathbb{C}\hat{e}_\pm$ son unidimensionales, no poseen subespacios invariantes no triviales; por lo tanto, $\mathcal{R}|_{\mathbb{C}\hat{e}_\pm}$ son **representaciones irreducibles**, que satisfacen:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^+ \oplus \mathcal{R}^-, \text{ con } \mathcal{R}^\pm := \mathcal{R}|_{\mathbb{C}\hat{e}_\pm}.$$

Para ver que las matrices \mathcal{R}_ϕ obedecen la Ecuación (2.11), debemos realizar el cambio de base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\} \mapsto \{\hat{e}_+, \hat{e}_-\}$, dado por la matriz:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}, \\ \implies \mathcal{S}^{-1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \mathcal{R}'_\phi &= \mathcal{S} \mathcal{R}_\phi \mathcal{S}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi + i\operatorname{sen}\phi & -\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi - i\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi - i\cos\phi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\cos\phi + 2i\operatorname{sen}\phi & 0 \\ 0 & 2\cos\phi - 2i\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}. \\ \therefore \mathcal{R}'_\phi &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\phi^+ & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\phi^- \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

siendo $\mathcal{R}_\phi^\pm = e^{\pm i\phi}$ las análogas continuas de las representaciones φ^1, φ^2 del Ejemplo (2.1.6).

Tanto en mecánica clásica como en mecánica cuántica, es común representar las simetrías de un sistema mediante transformaciones unitarias, ya que éstas preservan la norma y el producto interno de vectores.

Veremos que este tipo de transformaciones también tiene un papel relevante en la Teoría de representaciones.

Definición 2.1.11. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ definido. Entonces, $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ es una **representación unitaria** si φ_g es una transformación unitaria, para toda $g \in G$.

Es decir, φ es unitaria si

$$\langle \varphi_g(v) | \varphi_g(w) \rangle = \langle v | w \rangle, \quad \forall v, w \in V, g \in G. \quad (2.15)$$

En este caso, escribimos $\varphi : G \rightarrow U(V)$, donde $U(V)$ denota al grupo de transformaciones unitarias sobre V .

Ejemplo 2.1.8. En el Ejemplo (1.5.2), vimos que el círculo unitario sobre el plano complejo es un grupo, bajo la operación de multiplicación escalar:

$$U_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \leq \mathbb{C}.$$

Consideremos la función

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow U_1 \\ x &\longmapsto e^{i2\pi x}, \end{aligned}$$

donde $(\mathbb{R}, +)$ es el grupo aditivo de números reales.

Viendo a los elementos de U_1 como transformaciones lineales, podemos probar que φ es una representación unidimensional de $(\mathbb{R}, +)$:

$$\begin{aligned} x, y \in \mathbb{R} &\implies \varphi(x+y) = e^{i2\pi(x+y)} \\ &= e^{i2\pi x} e^{i2\pi y} \\ &= \varphi(x)\varphi(y). \end{aligned}$$

Además, tomando en cuenta que el producto interno en \mathbb{C} está definido como:

$$\langle u|v \rangle = uv^*,$$

Y escribiendo $u = r_1 e^{i\theta_1}$, $v = r_2 e^{i\theta_2}$, vemos que φ es una **representación unitaria** [12]:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_x(u)|\varphi_x(v) \rangle &= \langle e^{i2\pi x} r_1 e^{i\theta_1} | e^{i2\pi x} r_2 e^{i\theta_2} \rangle \\ &= \langle r_1 e^{i(2\pi x + \theta_1)} | r_2 e^{i(2\pi x + \theta_2)} \rangle \\ &= r_1 e^{i(2\pi x + \theta_1)} \left[r_2 e^{i(2\pi x + \theta_2)} \right]^* \\ &= r_1 r_2 e^{i(2\pi x + \theta_1)} e^{-i(2\pi x + \theta_2)} \\ &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{-i\theta_2} \\ &= \langle u|v \rangle. \end{aligned}$$

$\therefore \varphi$ es unitaria.

Enseguida veremos algunas propiedades importantes de las representaciones unitarias:

Teorema 2.1.5. Si $\varphi : G \longrightarrow U(V)$ es una representación unitaria, entonces φ es irreducible o completamente reducible.

Es decir, si una representación es unitaria y reducible, entonces se puede expresar como suma directa de representaciones irreducibles.

Dem. Supongamos que φ es reducible; entonces, existe un subespacio no trivial $W < V$ que es G -invariante respecto de φ .

Sea W^\perp el complemento ortogonal de W . Entonces, $V = W \times W^\perp$ y

$$\langle v|w \rangle = 0, \quad \forall v \in V, w \in W^\perp,$$

siendo $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un producto interno definido en V .

Tomando en cuenta que φ es unitaria y W es G -invariante, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \varphi_g(v)|w \rangle \\ &= \langle (\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g)(v) | \varphi_{g^{-1}}(w) \rangle \\ &= \langle v, \varphi_{g^{-1}}(w) \rangle \\ \implies \varphi_{g^{-1}}(w) &\in W^\perp. \end{aligned}$$

Como g es arbitraria, esto implica que W^\perp es G -invariante respecto de φ .

$\therefore \varphi$ es completamente reducible y $\varphi \sim \varphi|W \oplus \varphi|W^\perp$. ■

Teorema 2.1.6. Toda representación de un grupo finito G es **equivalente** a una representación unitaria de G .

Dem. Sea $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ una representación de grado n y sea B una base de V . Entonces, podemos inducir coordenadas en V respecto a la base B , mediante el isomorfismo:

$$\begin{aligned} T : V &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ v &\mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Definimos una representación de G sobre \mathbb{C}^n :

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ g &\mapsto \rho_g = T\varphi_g T^{-1}. \\ \Rightarrow \rho &\sim \varphi. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\langle \cdot | \cdot \rangle$ el producto interno estándar y $(\cdot | \cdot)$ un nuevo producto interno en \mathbb{C}^n , dado por:

$$(v|w) := \sum_{g \in G} \langle \rho_g(v) | \rho_g(w) \rangle, \text{ con } v, w \in \mathbb{C}^n. \quad (2.16)$$

Verifiquemos que ρ es una representación unitaria respecto al producto interno $(\cdot | \cdot)$:

$$\begin{aligned} (\rho_g(v) | \rho_g(w)) &= \sum_{h \in G} \langle \rho_h(\rho_g(v)) | \rho_h(\rho_g(w)) \rangle \\ &= \sum_{h \in G} \langle (\rho_h \circ \rho_g)(v) | (\rho_h \circ \rho_g)(w) \rangle \\ &= \sum_{h \in G} \langle \rho_{hg}(v) | \rho_{hg}(w) \rangle \\ &= \sum_{g \in G} \langle \rho_g(v) | \rho_g(w) \rangle \quad (\text{Lema de reordenamiento}) \\ &= (v|w). \end{aligned}$$

$\therefore \rho$ es unitaria.

Como la representación φ y el espacio V son arbitrarios, concluimos que toda representación de un grupo finito es equivalente a una representación unitaria. ■

Podemos agrupar las representaciones de G en **clases de equivalencia**, formadas por todas las representaciones equivalentes entre sí. Entonces, por el teorema anterior, cada clase de equivalencia posee al menos una representación unitaria.

***Nota:** Que una representación $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ no sea irreducible ni descomponible, significa que no es posible expresar a V como un producto cartesiano de subespacios G -invariantes.

Es decir, puede que φ tenga subrepresentaciones φ^j sobre subespacios $V_j < V$, pero

$$\begin{aligned} \varphi &\simeq \varphi^1 \oplus \varphi^2 \oplus \dots \\ V &\neq V_1 \times V_2 \times \dots \end{aligned}$$

***Nota:** El Teorema (2.1.6) también es válido para ciertos grupos infinitos. En particular, se pueden encontrar representaciones unitarias para los siguientes grupos de Lie (continuos y, por tanto, infinitos):

- Grupo ortogonal O_n y grupo especial ortogonal SO_n .
- Grupo unitario U_n y grupo especial unitario SU_n .

Como consecuencia de los teoremas (2.1.5) y (2.1.6), tenemos el siguiente:

Teorema 2.1.7 (Teorema de Maschke). Toda representación de un grupo finito es completamente reducible.

Antes de concluir esta sección, obtendremos las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones continuas en 2 dimensiones SO_2 y del grupo de traslaciones continuas en una dimensión \mathcal{T}_1 [3]. Pero, para ello, debemos introducir algunas de sus propiedades básicas.

Una propiedad de algunos grupos de Lie es que el comportamiento **local** del grupo alrededor de la identidad determina la mayoría de sus propiedades. Para estudiar este comportamiento *infinitesimal*, es necesario introducir un operador auxiliar, independiente de los parámetros del grupo, llamado **generador infinitesimal**.

Representaciones irreducibles de SO_2

Consideremos una rotación infinitesimal $R_{d\phi} \in SO_2$. La estructura de variedad diferenciable de SO_2 exige que toda R_ϕ sea diferenciable respecto de ϕ .

$$\implies R_{d\phi} = \mathbf{1} - id\phi J, \quad (2.17)$$

donde J el **generador de SO_2** , un operador independiente del ángulo de rotación.

Ahora, obtengamos una ecuación diferencial para R_ϕ , sujeta a la condición de frontera $R_0 = \mathbf{1}$:

$$\begin{aligned} R_{\phi+d\phi} &= R_\phi R_{d\phi} \\ &= R_\phi(\mathbf{1} - id\phi J) \\ &= R_\phi - id\phi R_\phi J. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} R_{\phi+d\phi} &= R_\phi + \frac{dR_\phi}{d\phi} d\phi. \\ \implies R_\phi - id\phi R_\phi J &= R_\phi + \frac{dR_\phi}{d\phi} d\phi. \\ \therefore \frac{dR_\phi}{d\phi} &= -iR_\phi J. \end{aligned} \quad (2.18)$$

***Nota:** La Ecuación (2.18) es una derivada de R respecto a su argumento ϕ . En algunos textos, los elementos de SO_2 se denotan por $R(\phi)$, para explicitar esta dependencia.

La función que satisface la ecuación diferencial (2.18) es de la forma $ke^{-i\phi J}$, con k una constante y J independiente de ϕ .

Enunciamos este resultado en la siguiente:

Proposición 2.1.8. Toda transformación $R_\phi \in SO_2$ puede ser expresada como:

$$R_\phi = e^{-i\phi J}, \quad (2.19)$$

Donde J es el generador de SO_2 .

Verifiquemos que la Ecuación (2.19) obedece la operación del grupo:

$$\begin{aligned} R_{\phi_1} R_{\phi_2} &= (e^{-i\phi_1 J})(e^{-i\phi_2 J}) \\ &= e^{-i(\phi_1 + \phi_2)J} \\ &= R_{\phi_1 + \phi_2}. \end{aligned}$$

Para obtener las expresiones matriciales de $R_{d\phi}$ y J , hacemos las aproximaciones:

$$\begin{aligned} \text{Cos}(d\phi) &= 1 - \frac{(d\phi)^2}{2!} + \frac{(d\phi)^4}{4!} - \dots \approx 1. \\ \text{Sen}(d\phi) &= d\phi - \frac{(d\phi)^3}{3!} + \frac{(d\phi)^5}{5!} - \dots \approx d\phi. \\ \implies R_{d\phi} &= \begin{pmatrix} 1 & -d\phi \\ d\phi & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Sustituyendo este resultado en (2.17):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -d\phi \\ d\phi & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - id\phi \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - id\phi J_{11} & -id\phi J_{12} \\ -id\phi J_{21} & 1 - id\phi J_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} J_{11} &= J_{22} = 0, \\ J_{12} &= -i = -J_{21}. \\ \therefore J &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Ahora, veamos algunas propiedades del generador de rotaciones J :

i. $\text{Tr}[J] = 0$.

ii. $J^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = J$.
 $\therefore J$ es hermitiana.

iii. $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$,

$J^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = J$,

$J^4 = J^2 = \mathbf{1}$,

$J^5 = \mathbf{1}J = J$,

...

En general, $J^{2n} = \mathbf{1}$ y $J^{2n-1} = J$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Comprobemos que las ecuaciones (1.49), (2.19) para R_ϕ coinciden:

$$\begin{aligned}
\implies e^{-i\phi J} &= \mathbb{1} - iJ\phi + \frac{(i\phi J)^2}{2!} - \frac{(i\phi J)^3}{3!} + \frac{(i\phi J)^4}{4!} - \dots \\
&= \mathbb{1} - i\phi J - \frac{\phi^2}{2!} + iJ\frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} - iJ\frac{\phi^5}{5!} + \dots \\
&= \mathbb{1} \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots \right) - iJ \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \dots \right) \\
&= \mathbb{1} \cos\phi - iJ \operatorname{sen}\phi \\
&= \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 \\ 0 & \cos\phi \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & -i\operatorname{sen}\phi \\ i\operatorname{sen}\phi & 0 \end{pmatrix}. \\
\therefore R_\phi = e^{-i\phi J} &= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ahora que conocemos la expresión de R_ϕ en términos del generador J , podemos obtener las representaciones irreducibles de SO_2 .

Fijándonos en que SO_2 es un grupo abeliano (Ecuación 1.52), sabemos que todas sus representaciones irreducibles serán de grado 1 y, por ende, cualquier subespacio SO_2 -invariante mínimo será unidimensional.

Así, si $V \leq \mathbb{C}^2$ un subespacio SO_2 -invariante mínimo, entonces

$$\begin{aligned}
R_\phi(v) &\in V, \quad \forall v \in V. \\
\implies (\mathbb{1} - i\phi J)(v) &= e^{-i\phi J}(v) \in V. \\
\implies J(v) \propto v \wedge e^{-i\phi J}(v) &\propto v,
\end{aligned}$$

pues V es unidimensional.

Esto significa que todos los elementos de V son **eigenvectores** de R_ϕ y de J .

Tomando en cuenta que los eigenvalores de operadores hermitianos son números reales, tenemos:

$$J(v) = \alpha v \wedge R_\phi(v) = e^{-i\phi\alpha}v, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Además, $R_\phi = R_{\phi \pm 2\pi}$ y $R_0 = R_{\pm 2\pi} = \mathbb{1}$, por lo que:

$$\begin{aligned}
R_\phi(v) = R_{\phi \pm 2\pi}(v) &\iff e^{-i\phi\alpha}v = e^{-i(\phi \pm 2\pi)\alpha}v. \\
1v = R_0(v) = R_{\pm 2\pi}(v) &= e^{-i(\pm 2\pi)\alpha}v. \\
&\iff e^{\pm i2\pi\alpha} = 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, α es un entero cualquiera. La representación de R_ϕ sobre V , correspondiente a cada $m \in \mathbb{Z}$, será denotada por χ^m :

$$\chi_\phi^m(v) = e^{-im\phi}v \wedge J(v) = mv.$$

En particular,

- i. Si $m = 0$, entonces χ^m es la representación identidad: $R_\phi^0 = 1$.
- ii. Si $m = 1$, entonces $\chi_\phi^1 = e^{-i\phi}$, con $\phi \in [0, 2\pi)$.

En este caso, χ^1 es un isomorfismo entre los elementos de SO_2 y los números sobre el círculo unitario en \mathbb{C} . Por el signo negativo en la exponencial, χ^1 barre el círculo unitario una sola vez en sentido del reloj (convencionalmente negativo).

iii. Si $m = -1$, entonces $\chi_\phi^{-1} = e^{i\phi}$, con $\phi \in [0, 2\pi)$.

En este caso, χ^{-1} cubre el círculo unitario en \mathbb{C} una sola vez, en sentido contrarreloj (convencionalmente positivo).

iv. Si $m = \pm 2$, entonces $\chi_\phi^{\pm 2} = e^{-i(\pm 2\phi)}$.

Al igual que en los incisos (ii), (iii), esta representación cubre el círculo unitario, pero ahora lo hace 2 veces: χ^2 en sentido negativo y χ^{-2} , en sentido positivo. Por lo tanto, $\chi^{\pm 2}$ no es un isomorfismo.

Si seguimos evaluando $\{\chi_\phi^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, veremos que todas son homomorfismos entre SO_2 y el círculo unitario; por lo tanto, sólo es necesario considerar las que cubren el círculo una vez.

Teorema 2.1.9. Las **representaciones irreducibles y univalueadas** de SO_2 se obtienen de la Ecuación (2.19), tomando $J = m \in \mathbb{Z}$:

$$\chi_\phi^m = e^{-im\phi}. \quad (2.22)$$

De estas, las únicas representaciones **confiables** corresponden a $m = \pm 1$.

La representación matricial usual de R_ϕ , dada por la Ecuación (1.49), es de tamaño 2×2 , por lo que debe ser reducible.

Veremos que, efectivamente, esta matriz es equivalente al producto directo de las representaciones confiables $\chi_\phi^{\pm 1}$; es decir, que $R_\phi = e^{-i\phi} \oplus e^{i\phi}$. Para ello, debemos diagonalizar tanto J como R_ϕ .

i. Hallamos los eigenvalores de J :

$$\begin{aligned} J(\vec{x}) &= \lambda\vec{x}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{C}^2. \\ J - \lambda\mathbb{1} &= \begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix}. \\ \implies \det(J - \lambda\mathbb{1}) &= \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1) \\ \implies \lambda_+ &= 1, \lambda_- = -1. \end{aligned}$$

ii. Ahora, hallemos los eigenvectores de J correspondientes a λ_\pm :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\lambda_+ & -i \\ i & -\lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \iff -x_1 - ix_2 &= 0 \quad \wedge \quad ix_1 - x_2 = 0 \\ \iff x_1 &= -ix_2. \end{aligned}$$

$\therefore \left\{ k_+ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \mid k_+ \in \mathbb{C} \right\}$ son los eigenvectores correspondientes a $\lambda_+ = 1$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\lambda_- & -i \\ i & -\lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \iff x_1 - ix_2 &= 0 \quad \wedge \quad ix_1 + x_2 = 0 \\ \iff x_1 &= ix_2. \end{aligned}$$

$\therefore \left\{ k_- \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \mid k_- \in \mathbb{C} \right\}$ son los eigenvectores correspondientes a $\lambda_- = -1$.

iii. Las columnas de la matriz de cambio de base D están dadas por dos eigenvectores **ortonormales** de J . Elegimos como base ortonormal:

$$\begin{aligned}\vec{x}_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \\ \implies D &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

D es una matriz unitaria, como usualmente lo son las transformaciones de similitud:

$$\begin{aligned}D^\dagger &= (D^T)^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}. \\ D^{-1} &= \frac{1}{|D|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = D^\dagger. \\ \therefore DD^\dagger &= D^\dagger D = \mathbb{1} : D \text{ es unitaria.}\end{aligned}$$

iv. Diagonalizamos J :

$$\begin{aligned}\tilde{J} = D^{-1}JD &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tilde{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es la representación diagonal del generador de SO_2 .

v. Diagonalizamos R_ϕ :

$$\begin{aligned}D^{-1}R_\phi D &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi - i\operatorname{sen}\phi & \cos\phi + i\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi + i\cos\phi & \operatorname{sen}\phi - i\cos\phi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & e^{i\phi} \\ ie^{-i\phi} & -ie^{i\phi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & 2e^{i\phi} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{R}_\phi = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_\phi^1 & 0 \\ 0 & U_\phi^{-1} \end{pmatrix} = \chi_\phi^1 \oplus \chi_\phi^{-1}. \quad (2.23)$$

Representaciones irreducibles de \mathcal{T}_1

Al igual que otros grupos de transformaciones continuas, el comportamiento general de \mathcal{T}_1 puede estudiarse a partir de las traslaciones alrededor de la identidad. Así, para un desplazamiento infinitesimal dx , tenemos:

$$T_{dx} = \mathbb{1} - iPdx, \quad (2.24)$$

Donde P es el **generador infinitesimal de traslaciones**, un operador independiente del desplazamiento.

Para hallar P , nos fijamos en:

$$\begin{aligned} T_{x+dx} &= T_x + \frac{dT_x}{dx} dx, \\ \text{Y } T_{x+dx} &= T_{dx} T_x = (\mathbf{1} - iPdx) T_x. \\ \implies T_x + \frac{dT_x}{dx} dx &= T_x - iPdx T_x \\ \iff \frac{dT_x}{dx} &= -iP T_x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos una ecuación diferencial para T_x , sujeta a la condición de frontera $T_0 = 1$. La solución de esta ecuación es:

$$T_x = e^{-iPx}. \quad (2.25)$$

Verifiquemos que (2.25) satisface las propiedades del grupo:

$$\begin{aligned} T_{x_1} T_{x_2} &= e^{-iPx_1} e^{-iPx_2} = e^{-iP(x_1+x_2)} = T_{x_1+x_2}. \\ T_0 &= e^{-iP(0)} = 1. \\ T_x^{-1} &= (e^{-iPx})^{-1} = e^{-iP(-x)} = T_{-x}. \end{aligned}$$

Al igual que en el grupo SO_2 , los **representaciones irreducibles** de \mathcal{T}_1 son de grado 1, pues \mathcal{T}_1 es abeliano. Así, si $V \leq \mathbb{C}$ es un subespacio \mathcal{T}_1 -invariante mínimo, entonces

$$P(v) \propto v \quad \wedge \quad T_x(v) = e^{-iPx}(v) \propto v, \quad \forall v \in V.$$

Esto significa que todos los elementos de V son eigenvectores de P y de T_x .

Ahora, notemos que:

$$T_x^{-1} = (e^{-iPx})^* = T_x^\dagger,$$

Por lo que las traslaciones son transformaciones **unitarias**. Entonces,

$$\begin{aligned} 1 &= T_x (T_x)^\dagger = (e^{-iPx})(e^{iP^\dagger x}) = e^{-i(P-P^\dagger)x} \\ &\iff P - P^\dagger = 0 \\ &\iff P = P^\dagger. \end{aligned}$$

Entonces, el generador de traslaciones P es **hermitiano**, por lo que sus eigenvalores serán números reales.

Denotando por χ^p a la representación irreducible de \mathcal{T}_1 correspondiente al eigenvalor $p \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$P(v) = pv \quad \wedge \quad \chi_x^p(v) = e^{-ipx} v. \quad (2.26)$$

Por lo tanto, $\{\chi^p \mid p \in \mathbb{R}, \chi_x^p = e^{-ipx}\}$ son las representaciones irreducibles de \mathcal{T}_1 .

Más adelante, veremos que las funciones χ_ϕ^m y χ_x^p , correspondientes a SO_2 y \mathcal{T}_1 , respectivamente, están normalizadas y son ortogonales.

2.2. Lema de Schur

Uno de los problemas que buscaba resolver la Teoría de representaciones era el de relacionar representaciones distintas de un grupo. En 1905, el matemático ruso Issai Schur formuló el lema que lleva su nombre, con lo que introdujo un criterio para identificar si dos representaciones son o no equivalentes.

En este capítulo revisaremos el Lema de Schur y las relaciones de ortogonalidad de Schur, que son consecuencia del lema y proporcionan una base ortogonal de funciones que actúan sobre el grupo.

Comencemos con una definición que será relevante a lo largo del capítulo:

Definición 2.2.1. Sean $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ y $\rho : G \rightarrow GL(W)$ representaciones de G . Entonces, decimos que una función lineal $T : V \rightarrow W$ es un **morfismo de φ a ρ** si:

$$T \circ \varphi_g = \rho_g \circ T, \quad \forall g \in G. \tag{2.27}$$

Denotaremos al conjunto de morfismos de φ a ρ por $\mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$.

En particular, $\mathcal{M}_G(\varphi, \varphi)$ consta de todas las transformaciones lineales $T : V \rightarrow V$ que conmutan con φ_g , para toda $g \in G$. A este tipo de morfismos se les llama **endomorfismos**; es decir, un endomorfismo es un morfismo de un espacio sobre sí mismo.

A los endomorfismos que son invertibles se les llama **automorfismos**.

Podemos visualizar la acción de un morfismo con el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi_g} & V \\ \Upsilon \downarrow & & \downarrow \Upsilon \\ W & \xrightarrow{\rho_g} & W \end{array}$$

Figura 2.3: Ilustración de la ecuación $(T \circ \varphi_g)(\vec{v}) = (\rho_g \circ T)(\vec{v})$. [12]

Proposición 2.2.1 (Propiedades de los morfismos).

- i. Sea $Hom(V, W)$ el conjunto de homomorfismos entre V y W , es decir, el conjunto de transformaciones lineales $T : V \rightarrow W$. Entonces,

$$\mathcal{M}_G(\varphi, \rho) \subset Hom(V, W). \tag{2.28}$$

- ii. Si un morfismo $T \in \mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$ es invertible, entonces T es un isomorfismo y φ es equivalente a ρ :

$$\begin{aligned} T\varphi_g T^{-1} &= \rho_g T T^{-1} = \rho_g, \\ \iff \varphi &\sim \rho. \end{aligned}$$

- iii. Si $T \in \mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$, entonces el núcleo de T es un subespacio G -invariante de V respecto de φ , y la imagen de T es un subespacio G -invariante de W respecto de ρ .

Dem. Probaremos sólo el enunciado (iii). Tomando $v \in \text{Núcleo}[T]$ y $g \in G$ arbitrarias, tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= T(v) \\ &= \rho_g(T(v)) \\ &= T(\varphi_g(v)) \\ \implies \varphi_g(v) &\in \text{Núcleo}[T]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el núcleo de T es G -invariante respecto de φ .

Ahora, sea $w \in \text{Im}[T]$. Entonces, existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$.

$$\implies \rho_g(w) = \rho_g(T(v)) = T(\varphi_g(v)) \in \text{Im}[T].$$

Por lo tanto, la imagen de T es G -invariante respecto de ρ . ■

Ahora que conocemos el concepto de morfismo y sus propiedades, podemos abordar el tema central de la sección:

Teorema 2.2.2 (Lema de Schur). Sean $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ y $\rho : G \rightarrow GL(W)$ representaciones irreducibles de G , y sea $T \in \mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$. Entonces, T es invertible o $T = \mathbf{0}$ (el mapeo nulo).

Más aún,

- a) Si $\varphi \approx \rho$, entonces $\mathcal{M}_G(\varphi, \rho) = \{\mathbf{0}\}$.
 - b) Si $\varphi \sim \rho$, entonces $\mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$ es de dimensión 1.
- En particular, si $\varphi = \rho$, entonces T es un múltiplo del mapeo identidad.

Dem. Primero, veamos que $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$, pues, para toda $g \in G$ y $v \in V$,

$$(\mathbf{0} \circ \varphi_g)(v) = \mathbf{0} = (\rho_g \circ \mathbf{0})(v).$$

Ahora, supongamos que $T \neq \mathbf{0}$. De acuerdo con la Proposición (2.2.1), el núcleo de T es G -invariante respecto de φ ; no obstante, como φ y ρ son irreducibles, los únicos subespacios G -invariantes de V son $\{0\}$ y V mismo.

$$\implies \text{Núcleo}[T] = V \vee \text{Núcleo}[T] = 0.$$

En el primer caso, $T = \mathbf{0}$, y en el segundo, T es inyectiva.

De igual manera, la imagen de T es G -invariante respecto de ρ , por lo que:

$$\text{Im}[T] = 0 \vee \text{Im}[T] = W.$$

En el primer caso, $T = \mathbf{0}$, y en el segundo, T es sobreyectiva. Por lo tanto, si $T \neq 0$, entonces T es invertible.

Ahora, probaremos la contrarrecíproca del inciso (a).

Supongamos que $\mathcal{M}_G(\varphi, \rho) \neq \{\mathbf{0}\}$. Entonces, existe $T \neq \mathbf{0}$ en $\mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$ y, por la discusión anterior, T es invertible.

$$\begin{aligned} \implies T\varphi_g T^{-1} &= \rho_g \iff \varphi \sim \rho; \\ \therefore \mathcal{M}_G(\varphi, \rho) \neq \{\mathbf{0}\} &\implies \varphi \sim \rho. \\ \therefore \varphi \approx \rho &\implies \mathcal{M}_G(\varphi, \rho) = \{\mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

Para probar (b), primero consideremos el caso particular en que $\varphi = \rho$, y consideremos un morfismo $T \neq \mathbf{0}$ en $\mathcal{M}_G(\varphi, \varphi)$. Como T es un mapeo invertible de V a V , T es un automorfismo.

También, veamos que $id \in \mathcal{M}_G(\varphi, \varphi)$, pues:

$$id \circ \varphi_g = \varphi_g \circ id \quad \forall g \in G.$$

Recordemos que toda transformación lineal tiene al menos un eigenvalor complejo y supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un eigenvalor de T . Entonces,

$$\det(T - \lambda \mathbf{1}) = 0,$$

por lo que $T - \lambda \mathbf{1}$ no es invertible. Sin embargo,

$$\begin{aligned} (T - \lambda \mathbf{1})\varphi_g &= T\varphi_g - \lambda \mathbf{1}\varphi_g = \varphi_g T - \varphi_g \lambda \mathbf{1} = \varphi_g(T - \lambda \mathbf{1}). \\ \implies T - \lambda \mathbf{1} &\in \mathcal{M}_G(\varphi, \varphi). \end{aligned}$$

Esto implica que $T - \lambda \mathbf{1}$ sea invertible o igual a $\mathbf{0}$, por la discusión anterior.

$$\therefore T - \lambda \mathbf{1} = 0 \iff T = \lambda \mathbf{1}. \quad (2.29)$$

Por lo tanto, si φ es irreducible, entonces toda $T \in \mathcal{M}_G(\varphi, \varphi)$ es un múltiplo de la identidad.

Ahora, consideremos el caso general en que $\varphi \sim \rho$. Si $T \in \mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$ y $S \in \mathcal{M}_G(\rho, \varphi)$, entonces

$$\begin{aligned} S : W &\longrightarrow V \wedge S\rho_g = \varphi_g S. \\ \implies ST : V &\longrightarrow V \wedge ST\varphi_g = S\rho_g T = \varphi_g ST \\ \implies ST &\in \mathcal{M}_G(\varphi, \varphi). \end{aligned}$$

Pero, por la Ecuación (2.29), $\mathcal{M}_G(\varphi, \varphi)$ consta de endomorfismos que son múltiplos de la identidad. Entonces, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\begin{aligned} ST &= \lambda \mathbf{1} \\ \iff T &= \lambda S^{-1} \circ S^{-1}. \end{aligned}$$

Por tanto, toda $T \in \mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$ es un múltiplo de S^{-1} , por lo que $\mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$ consta de 1 sola función independiente; es decir, $\mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$ es de dimensión 1. ■

Ahora, revisaremos algunas consecuencias útiles del Lema de Schur:

Corolario 2.2.3. Si G es un grupo abeliano, entonces toda representación irreducible de G es de grado 1.

Dem. Sea $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ una representación irreducible de G . Entonces,

$$\begin{aligned} \varphi_h \varphi_g &= \varphi_{hg} = \varphi_{gh} = \varphi_g \varphi_h, \quad \forall g, h \in G. \\ \implies \varphi_h &\in \mathcal{M}_G(\varphi, \varphi). \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que φ es un homomorfismo y que G es abeliano.

Ahora, por el Lema de Schur, φ es un múltiplo del mapeo identidad; si V es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , entonces existe $\lambda_h \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi_h = \lambda_h id$.

Denotando por $\mathbb{C}\vec{v}$ al subespacio de V generado por un vector $\vec{v} \in V$ y tomando $k\vec{v} \in \mathbb{C}\vec{v}$, tenemos:

$$\varphi_h(k\vec{v}) = \lambda_h k\vec{v} \in \mathbb{C}\vec{v}.$$

Entonces, $\mathbb{C}\vec{v}$ es un subespacio G -invariante respecto de φ , pues h y $k\vec{v}$ son arbitrarios. No obstante, φ es irreducible, por lo que V no tiene subespacios invariantes no triviales.

$$\begin{aligned} \therefore \mathbb{C}\vec{v} &= V. \\ \therefore \dim(V) &= 1, \end{aligned}$$

Pues V es generado por un sólo vector \vec{v} .

Por lo tanto, todas las representaciones irreducibles de un grupo abeliano son de grado 1. Esto permite que podamos representar a cada elemento $g \in G$ como un escalar $\lambda_g \in \mathbb{C}$. ■

Corolario 2.2.4. Sea G un grupo finito abeliano y $\varphi : G \rightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ una representación matricial. Entonces, existe una matriz invertible \mathcal{T} tal que $\mathcal{T}^{-1}\varphi_g\mathcal{T}$ es diagonal para toda $g \in G$, siendo \mathcal{T} independiente de G .

Dem. Por el Teorema (2.1.7), φ es irreducible o completamente reducible. En el primer caso, φ es de grado 1, por el Corolario (2.2.3); en el segundo, tenemos:

$$\implies \varphi \sim \varphi^1 \oplus \varphi^2 \oplus \cdots \oplus \varphi^m, \quad (2.30)$$

Donde cada φ^j es irreducible, de grado 1. Por tanto, si φ es de dimensión n , entonces $m = n$; es decir, la descomposición de φ dada por (2.30) tendrá n términos.

Además, $\varphi_g^j \in \mathbb{C}$, para cualesquiera $g \in G$, $j = 1, \dots, n$.

Ahora, por la relación de equivalencia (2.30), existe $\mathcal{T} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tal que

$$\mathcal{T}^{-1}\varphi_g\mathcal{T} = \varphi_g^1 \oplus \varphi_g^2 \oplus \cdots \oplus \varphi_g^n, \quad \forall g \in G.$$

Y, como las φ^j son independientes, $\mathcal{T}^{-1}\varphi_g\mathcal{T}$ tiene la siguiente forma de bloques diagonales:

$$\mathcal{T}^{-1}\varphi_g\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \varphi_g^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_g^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_g^n \end{pmatrix}.$$

■

***Nota:** La matriz \mathcal{T} del corolario anterior representa una transformación de cambio de base. Por lo tanto, cualquier representación de un grupo finito abeliano puede diagonalizarse, habiendo encontrado una base apropiada.

Para continuar nuestra discusión, debemos introducir un concepto que es fundamental en la Teoría de representaciones. Particularmente, es a partir de él que se construyen las álgebras de Lie y las álgebras de Banach, que tienen varias aplicaciones en física.

Definición 2.2.2. Si G es un grupo, entonces llamamos **álgebra del grupo** al conjunto de funciones que van de G al campo \mathbb{K} , y la denotamos por \mathbb{K}_G :

$$\mathbb{K}_G := \{f \mid f : G \rightarrow \mathbb{K}\}. \quad (2.31)$$

En general, trabajaremos con el campo de los números complejos y denotaremos por \mathbb{C}_G al álgebra del Grupo.

\mathbb{C}_G es un espacio vectorial de producto interno, con la suma y multiplicación escalar dadas por:

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(g) &= f_1(g) + f_2(g), \text{ con } f_1, f_2 \in \mathbb{C}_G, g \in G. \\ (cf)(g) &= c \cdot f(g), \text{ con } c \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

y un **producto interno** definido como:

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) [f_2(g)]^*. \quad (2.32)$$

Las siguientes proposiciones pueden parecer muy técnicas, pero serán necesarias para deducir las relaciones de ortogonalidad de Schur:

Proposición 2.2.5. Sean $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ y $\rho : G \rightarrow GL(W)$ representaciones de G y sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Si definimos las funciones \tilde{T} , \mathbf{P} como:

$$\tilde{T} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T \varphi_g. \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : Hom(V, W) &\rightarrow \mathcal{M}_G(\varphi, \rho) \\ T &\mapsto \tilde{T}. \end{aligned}$$

Entonces,

- i. $\tilde{T} \in \mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$.
- ii. Si $T \in \mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$, entonces $\tilde{\tilde{T}} = T$.
- iii. La función \mathbf{P} es lineal y sobreyectiva.

Dem. i. Sean $h \in G$ y \tilde{T} dada por la Ecuación (2.33). Entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{T} \varphi_h &= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T \varphi_g \right) \varphi_h \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T \varphi_g \varphi_h \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{hh^{-1}g^{-1}} T \varphi_{gh} \\ &= \rho_h \left(\frac{1}{|G|} \sum_{gh \in G} \rho_{h^{-1}g^{-1}} T \varphi_{gh} \right) \\ &= \rho_h \tilde{T}, \end{aligned}$$

usando el Lema de reordenamiento y las propiedades de los homomorfismos.

$$\therefore \tilde{T} \in \mathcal{M}_G(\varphi, \rho).$$

ii. Supongamos que T es un morfismo entre φ y ρ . Entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T \varphi_g \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} \rho_g T \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} T \\ &= T. \end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{\tilde{T}} = T.$$

iii. Sean $T_1, T_2 \in Hom(V, W)$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(c_1 T_1 + c_2 T_2) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} (c_1 T_1 + c_2 T_2) \varphi_g \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho_g^{-1} c_1 T_1 \varphi_g + \rho_g^{-1} c_2 T_2 \varphi_g) \\ &= \frac{c_1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T_1 \varphi_g + \frac{c_2}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} T_2 \varphi_g \\ &= c_1 \mathbf{P}(T_1) + c_2 \mathbf{P}(T_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, \mathbf{P} es lineal.

Además, si tomamos $S \in \mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$ arbitrario, entonces $S = \tilde{S} = \mathbf{P}(S)$, por el inciso (ii). Por lo tanto, $\text{Im}[\mathbf{P}] = \mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$ y \mathbf{P} es sobreyectiva. ■

De acuerdo con el Lema de Schur, todo automorfismo $T \in \mathcal{M}_G(\varphi, \varphi)$ es de la forma $\lambda \mathbb{1}$. Ahora, usando la Proposición anterior, obtendremos la constante $\lambda \in \mathbb{C}$:

Corolario 2.2.6. Sean $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ y $\rho : G \rightarrow GL(W)$ representaciones irreducibles de G y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces,

- a) Si $\varphi \approx \rho$, entonces $\tilde{T} = 0$.
- b) Si $\varphi = \rho$, entonces $\tilde{T} = \frac{\text{Tr}(T)}{\dim(V)} \mathbb{1}$.

Dem. De acuerdo con la Proposición (2.2.5), siempre es posible encontrar un morfismo \tilde{T} a partir de una transformación lineal T , dado por la Ecuación (2.33).

Entonces, (a) se cumple trivialmente, pues

$$\tilde{T} \in \mathcal{M}_G(\varphi, \rho) \wedge \varphi \approx \rho \implies \tilde{T} = 0,$$

por el Lema de Schur.

Ahora, para probar (b), supongamos que $\varphi = \rho$; entonces $\tilde{T} = \lambda \mathbb{1}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$. Eligiendo una base de V , podemos calcular la traza del morfismo:

$$\text{Tr}(\tilde{T}) = \text{Tr}(\lambda \mathbb{1}) = \lambda \text{Tr}(\mathbb{1}) = \lambda \dim(V),$$

Pues $\mathbb{1}$ tiene una representación matricial de tamaño $\dim(V) \times \dim(V)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\tilde{T}) &= \text{Tr} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_{g^{-1}} T \varphi_g \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}(\varphi_{g^{-1}} T \varphi_g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} [\text{Tr}(\varphi_g)^{-1} \text{Tr}(T) \text{Tr}(\varphi_g)] \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}(T) \\ &= \text{Tr}(T). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \text{Tr}(T) &= \lambda \dim(V) \\ \iff \lambda &= \frac{\text{Tr}(T)}{\dim(V)}. \\ \therefore \tilde{T} &= \frac{\text{Tr}(T)}{\dim(V)} \mathbb{1}. \end{aligned}$$

■

Antes de abordar los siguientes teoremas, debemos hacer una observación: si φ, ρ son representaciones matriciales sobre los espacios $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$, respectivamente, entonces el espacio de homomorfismos de \mathbb{C}^n a \mathbb{C}^m es isomorfo al espacio de matrices $m \times n$ sobre \mathbb{C} :

$$\text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) = \{T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m \mid T(c\vec{x} + \vec{y}) = cT(\vec{x}) + T(\vec{y})\} \cong \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C}),$$

pues los homomorfismos entre espacios vectoriales son transformaciones lineales.

Entonces, el conjunto de morfismos $\mathcal{M}_G(\varphi, \rho)$ puede verse como un subconjunto de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, al que denotaremos por $\tilde{\mathcal{M}}_{m \times n}(\mathbb{C})$.

Así, la función \mathbf{P} , definida en la Proposición (2.2.5), puede reformularse como una función entre espacios matriciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{m \times n}(\mathbb{C}) \\ \mathcal{T} &\longmapsto \tilde{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Ahora, consideremos las mn matrices $\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, \dots, E_{m1}, \dots, E_{mn}\}$, con entradas dadas por:

$$(E_{ki})_{lj} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = l \wedge i = j. \\ 0, & \text{si } k \neq l \vee i \neq j. \end{cases} \quad (2.34)$$

Es decir, E_{ki} es la matriz de tamaño $m \times n$ cuya entrada ki -ésima es 1 y las demás son 0.

Entonces, cualquier matriz $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ se puede escribir en términos de esta base:

$$\mathcal{A} = \sum_i^m \sum_j^n a_{ki} E_{ki}, \text{ con } a_{ki} \in \mathbb{C}.$$

Haciendo actuar a \mathbf{P} sobre $\{E_{ki} \mid k = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n\}$, obtenemos las matrices $\tilde{E}_{ki} \in \tilde{\mathcal{M}}_{m \times n}(\mathbb{C})$:

$$\mathbf{P}(E_{ki}) = \tilde{E}_{ki} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} E_{ki} \varphi_g,$$

Donde se asume que $\rho_{g^{-1}}, \varphi_g$ están expresadas en forma matricial. Más aún, si φ es de grado n , entonces su forma matricial es de tamaño $n \times n$, y si ρ es de grado m , entonces su forma matricial es $m \times m$.

Las n^2 entradas de φ_g (así como las m^2 entradas de ρ_g) son números complejos:

$$(\varphi_g)_{ij}, (\rho_g)_{kl} \in \mathbb{C}, \forall g \in G.$$

Así, hay n^2 funciones $\varphi_{ij} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ asociadas a φ y m^2 funciones $\rho_{kl} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ asociadas a ρ . Veremos que, si las representaciones ρ, φ son irreducibles y unitarias, entonces estas funciones forman una base ortogonal del álgebra del grupo.

Teorema 2.2.7 (Relaciones de ortogonalidad de Schur). Sean $\varphi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ y $\rho : G \longrightarrow U_m(\mathbb{C})$ representaciones irreducibles, unitarias y no equivalentes de G . Entonces,

- a) $\langle \varphi_{ij} | \rho_{kl} \rangle = 0$.
- b) $\langle \varphi_{ij} | \varphi_{kl} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } i = j \wedge j = l. \\ 0, & \text{si } i \neq j \vee j \neq l. \end{cases}$

Es decir, tanto las entradas de representaciones distintas $\varphi \not\sim \rho$, como las de una sola representación, son linealmente independientes.

Dem. a) Consideremos el elemento E_{ki} de la base estándar de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$; podemos reformular su definición (2.34) como:

$$E_{ki} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m; \quad (E_{ki})_{lj} = \delta_{kl}\delta_{ij}.$$

Por hipótesis, $\varphi \approx \rho$. Entonces, de acuerdo con el Corolario (2.2.6), $\tilde{E}_{ki} = 0$.

Además, como ρ es unitaria,

$$\rho_{g^{-1}} = \rho_g^{-1} = \rho_g^\dagger \implies (\rho_{g^{-1}})_{lk} = (\rho_g)_{kl}^*.$$

$$\begin{aligned} \implies 0 = (\tilde{E}_{ki})_{lj} &= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{g^{-1}} E_{ki} \varphi_g \right)_{lj} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\nu}^m \sum_{\mu}^n (\rho_{g^{-1}})_{l\nu} (E_{ki})_{\nu\mu} (\varphi_g)_{\mu j} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\nu}^m \sum_{\mu}^n (\rho_{g^{-1}})_{l\nu} \delta_{k\nu} \delta_{i\mu} (\varphi_g)_{\mu j} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho_{g^{-1}})_{lk} (\varphi_g)_{ij} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho_g)_{kl}^* (\varphi_g)_{ij} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_{ij}(g) [\rho_{kl}(g)]^* \\ &= \langle \varphi_{ij} | \rho_{kl} \rangle, \end{aligned}$$

Donde el producto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ de \mathbb{C}_G está dado por la Ecuación (2.32).

$$\therefore \langle \varphi_{ij} | \rho_{kl} \rangle = 0. \quad (2.35)$$

b) Si $\varphi = \rho$, entonces $m = n$ y E_{ki} es una matriz de tamaño $n \times n$. Usando nuevamente el Corolario (2.2.6), tenemos:

$$\begin{aligned} (\tilde{E}_{ki})_{lj} &= \left[\frac{\text{Tr}(E_{ki})}{n} \mathbb{1} \right]_{lj} \\ &= \frac{\text{Tr}(E_{ki})}{n} \delta_{lj} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n} \text{Tr}(E_{ki}), & \text{si } j = l. \\ 0, & \text{si } j \neq l. \end{cases} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\text{Tr}(E_{ki}) = \sum_{l=1}^n (E_{ki})_{ll} = \sum_{l=1}^n \delta_{kl}\delta_{il} = \delta_{ki}.$$

Además, es un resultado general que $(\tilde{E}_{ki})_{lj} = \langle \varphi_{ij} | \rho_{kl} \rangle$, como vimos en la demostración del inciso (a).

$$\therefore \langle \varphi_{ij} | \varphi_{kl} \rangle = \frac{1}{n} \delta_{ki} \delta_{lj} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } i = k \wedge j = l. \\ 0, & \text{si } i \neq k \vee j \neq l. \end{cases} \quad (2.36)$$

■

Normalizando las funciones φ_{ij} , obtenemos un conjunto ortonormal:

Corolario 2.2.8. Sea $\varphi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ irreducible. Entonces, las n^2 funciones $\{\sqrt{n}\varphi_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$ son un conjunto ortonormal de \mathbb{C}_G .

Dem. De acuerdo con la Ecuación (2.36), las funciones $\{\varphi_{ij}\}$ son ortogonales. Ahora, probemos que $\{\sqrt{n}\varphi_{ij}\}$ son de norma unitaria:

$$\begin{aligned} \langle \sqrt{n}\varphi_{ij} | \sqrt{n}\varphi_{kl} \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sqrt{n}\varphi_{ij}(g) [\sqrt{n}\varphi_{kl}(g)]^* \\ &= n \langle \varphi_{ij} | \varphi_{kl} \rangle \\ &= \frac{n}{n} \delta_{ik} \delta_{jl} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \wedge j = l. \\ 0, & \text{si } i \neq k \vee j \neq l. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Hemos probado que $\{\varphi_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$ son funciones ortogonales en \mathbb{C}_G ; sin embargo, esto no significa que sean una base de \mathbb{C}_G , pues, en general, la dimensión de \mathbb{C}_G es distinta de n^2 .

Con el siguiente Teorema, obtenemos una base ortonormal de \mathbb{C}_G :

Teorema 2.2.9. Sea G un grupo finito y sean $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^s$ representaciones irreducibles y no equivalentes de G . Si d_k es el grado de φ^k , entonces las funciones

$$\{\sqrt{d_k}\varphi_{ij}^k \mid k = 1, \dots, s \wedge i, j = 1, \dots, d_k\} \quad (2.37)$$

forman una **base ortonormal** de \mathbb{C}_G .

De acuerdo con este Teorema, toda función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ puede escribirse como:

$$f = \sum_{k=1}^s \sum_{i,j=1}^{d_k} f_{ij}^k \varphi_{ij}^k, \text{ con } f_{ij}^k \in \mathbb{C}.$$

Notemos que el conjunto (2.37) consta de $d_1^2 + \dots + d_s^2$ funciones (cada φ^k tiene d_k^2 entradas φ_{ij}^k). Por tanto, la demostración del Teorema (2.2.9) reside en el hecho de que:

$$\text{Dim}(\mathbb{C}_G) = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_s^2. \quad (2.38)$$

2.3. Teoría de Caracteres

Desarrollada inicialmente por I. Schur y F. G. Frobenius, la Teoría de caracteres puede considerarse el corazón de la Teoría de representaciones. Como veremos, nos permite representar al grupo mediante funciones unidimensionales, ortonormales e irreducibles. Es decir, nos permite insertar toda la información de una representación $\varphi : G \rightarrow GL(V)$, en una función $\chi_\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$.

Definición 2.3.1. Sea $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ una representación. Entonces, llamamos **caracter** de φ a la función:

$$\begin{aligned} \chi_\varphi : G &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \chi_\varphi(g) = \text{Tr}(\varphi_g). \end{aligned}$$

Si φ es de grado n y $(\varphi_g)_{ij}$ son las entradas de la matriz asociada a φ_g , entonces

$$\chi_\varphi(g) = \sum_{i=1}^n (\varphi_g)_{ii}.$$

Si φ es irreducible, entonces decimos que χ_φ es un **caracter irreducible**.

***Nota:** Siempre que deseemos calcular la traza de una transformación lineal, debemos conocer su matriz asociada. Por lo tanto, para hallar el caracter de una representación de grado n , es necesario expresarla en forma matricial, respecto de una base de \mathbb{C}^n .

Revisamos algunas propiedades de los caracteres:

Proposición 2.3.1.

- i. Si $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ es una representación de grado 1, entonces $\chi_\varphi = \varphi$, pues la traza de un escalar es igual al escalar mismo.
- ii. El grado de una representación $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ es igual al caracter χ_φ evaluado en la identidad:

$$\chi_\varphi(1) = Tr(\varphi_1) = Tr(\mathbf{1}) = \text{Dim } [V] = \text{Grado } [\varphi].$$

Teorema 2.3.2.

- i. Si φ es una representación de G y $g, h \in G$, entonces

$$\chi_\varphi(g) = \chi_\varphi(hgh^{-1}).$$

- ii. Si φ y ρ son representaciones **equivalentes** de G , entonces sus caracteres son iguales:

$$\varphi \sim \rho \implies \chi_\varphi = \chi_\rho.$$

Los incisos (i), (ii) implican que los caracteres son funciones **constantes** en las **clases de conjugación** del grupo: $\zeta_g = \{xgx^{-1} \mid x \in G\}$, y en las **clases de equivalencia** de una representación: $\xi_\varphi = \{\rho : G \rightarrow GL(V) \mid \rho \sim \varphi\}$.

Dem.

- i. Sean $g, h \in G$. Usando las propiedades de los homomorfismos y de la traza,

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(hgh^{-1}) &= Tr(\varphi_{hgh^{-1}}) \\ &= Tr(\varphi_h \varphi_g \varphi_{h^{-1}}) \\ &= Tr(\varphi_h) Tr(\varphi_g) Tr(\varphi_h)^{-1} \\ &= Tr(\varphi_g) \\ &= \chi_\varphi(g). \end{aligned}$$

Por lo tanto, χ_φ es constante en las clases de conjugación de G .

- ii. Sean $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ y $\rho : G \rightarrow GL(W)$; entonces, existe una transformación $T : V \rightarrow W$ tal que:

$$\varphi_g = T\rho_g T^{-1}, \forall g \in G.$$

$$\begin{aligned} \implies \chi_\varphi(g) &= Tr(\varphi_g) \\ &= Tr(T\rho_g T^{-1}) \\ &= Tr(T) Tr(\rho_g) Tr(T)^{-1} \\ &= Tr(\rho_g) \\ &= \chi_\rho(g); \\ \therefore \chi_\varphi &= \chi_\rho. \end{aligned}$$

Por lo tanto, χ_φ es constante en su clase de equivalencia. ■

Los caracteres pertenecen a un tipo especial de funciones:

Definición 2.3.2. Si $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es una función constante en las clases de conjugación de G , entonces decimos que f es una **función de clase**.

El conjunto de funciones de clase forma un espacio vectorial, al que denotamos por $\mathcal{C}(\mathbb{C}_G)$. Así, fijando $g \in G$,

$$f(g) = g(hgh^{-1}), \forall h \in G \implies f \in \mathcal{C}(\mathbb{C}_G).$$

Si ζ es una clase de conjugación de G , entonces nos referiremos por $f(\zeta)$ al valor constante que f toma en ζ .

Ahora, reformulamos las relaciones de ortogonalidad de Schur en términos de caracteres:

Teorema 2.3.3 (1^{as} Relaciones de ortogonalidad de los caracteres). Sean $\varphi : G \rightarrow U_n(\mathbb{C})$ y $\rho : G \rightarrow U_m(\mathbb{C})$ irreducibles. Entonces,

$$\langle \chi_\varphi | \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } \varphi \sim \rho. \\ 0, & \text{si } \varphi \not\sim \rho. \end{cases} \quad (2.39)$$

Más aún, si $\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^s\}$ son representaciones unitarias e irreducibles de G , entonces los caracteres irreducibles $\{\chi_{\varphi^1}, \chi_{\varphi^2}, \dots, \chi_{\varphi^s}\}$ son un conjunto ortonormal de funciones de clase.

Dem.

$$\begin{aligned} \langle \chi_\varphi | \chi_\rho \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\varphi(g) [\chi_\rho(g)]^* \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}(\varphi_g) [\text{Tr}(\rho_g)]^* \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\varphi_g)_{ii} [(\rho_g)_{jj}]^* \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle \varphi_{ii} | \rho_{jj} \rangle. \end{aligned}$$

Si $\varphi \not\sim \rho$, entonces $\langle \varphi_{ii} | \rho_{jj} \rangle = 0$, por las relaciones de ortogonalidad de Schur.

$$\therefore \varphi \not\sim \rho \implies \langle \chi_\varphi | \chi_\rho \rangle = 0.$$

Por otro lado, consideremos el caso particular $\varphi = \rho$:

$$\begin{aligned} \langle \chi_\varphi | \chi_\varphi \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_{ii} | \varphi_{jj} \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \\ &= \frac{n}{n} = 1. \end{aligned}$$

Sin embargo, el caracter de una representación φ es igual al de cualquier representación equivalente a ella.

$$\therefore \varphi \sim \rho \implies \langle \chi_\varphi | \chi_\rho \rangle = \langle \chi_\varphi | \chi_\varphi \rangle = 1.$$

El resultado anterior se puede generalizar a un conjunto de representantes irreducibles y unitarias $\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^s\}$, calculando los productos internos entre todas ellas. ■

***Nota:** Si G es finito, entonces sólo es necesario suponer que φ y ρ son irreducibles. Esto se debe al Teorema (2.1.6), que indica que toda representación de un grupo finito es equivalente a una representación unitaria.

Para seguir con nuestra discusión, debemos introducir la siguiente notación:
Si V es un espacio vectorial, φ es una representación y $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} mV &:= V \times V \times \cdots \times V \quad (\text{m veces}). \\ m\varphi &:= \varphi \oplus \varphi \oplus \cdots \oplus \varphi \quad (\text{m veces}). \end{aligned}$$

Definición 2.3.3. Sean $\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^s\}$ representaciones irreducibles, unitarias y no equivalentes de G . Si la representación ρ satisface:

$$\rho \sim m_1\varphi^1 \oplus m_2\varphi^2 \oplus \cdots \oplus m_s\varphi^s, \quad \text{con } m_1, m_2, \dots, m_s \in \mathbb{N}, \quad (2.40)$$

Entonces llamamos **multiplicidad** de φ^j en ρ al natural m_j . Además, si $m_j > 0$, entonces decimos que φ^j es una **constituyente irreducible** de ρ .

Proposición 2.3.4. Sea ρ una representación de G que satisface la Ecuación (2.40). Si d_j es el grado de la constituyente φ^j , entonces:

$$\text{Grado}[\rho] = m_1d_1 + m_2d_2 + \cdots + m_sd_s.$$

Esto se puede ver del hecho de que, si V^j es el espacio vectorial sobre el que actúa φ^j , entonces:

$$\begin{aligned} V &= m_1V^1 \times \cdots \times m_sV^s \\ &= (V^1 \times \cdots \times V^1) \times \cdots \times (V^s \times \cdots \times V^s) \quad (\text{con } m_j \text{ factores de cada } V^j), \end{aligned}$$

Es el espacio sobre el que actúa ρ .

Lema 2.3.5. Sean $\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^s\}$ representaciones irreducibles de G . Si $\rho \sim \varphi^1 \oplus \varphi^2 \oplus \cdots \oplus \varphi^s$, entonces

$$\chi_\rho = \chi_{\varphi^1} + \chi_{\varphi^2} + \cdots + \chi_{\varphi^s}.$$

Dem. Como $\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^s\}$ son irreducibles, ρ_g es equivalente a una matriz en bloques diagonales:

$$\rho_g \sim \begin{pmatrix} \varphi_g^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_g^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_g^s \end{pmatrix},$$

donde cada φ^j en la diagonal es una matriz de tamaño $d_j \times d_j$.

Como el caracter es constante en las clases de equivalencia, tenemos:

$$\begin{aligned} \chi_\rho(g) &= \text{Tr}(\rho_g) \\ &= \text{Tr}(\varphi_g^1 + \varphi_g^2 + \cdots + \varphi_g^s) \\ &= \text{Tr}(\varphi_g^1) + \text{Tr}(\varphi_g^2) + \cdots + \text{Tr}(\varphi_g^s) \\ &= \chi_{\varphi^1}(g) + \chi_{\varphi^2}(g) + \cdots + \chi_{\varphi^s}(g). \end{aligned}$$

$$\therefore \chi_\rho = \chi_{\varphi^1} + \chi_{\varphi^2} + \cdots + \chi_{\varphi^s}.$$

■

De acuerdo con el Lema anterior, el caracter de una representación cualquiera ρ es una combinación lineal de caracteres irreducibles. Veremos que esto nos permite hallar la descomposición de ρ en constituyentes irreducibles.

Teorema 2.3.6. Sean $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_s$ las clases de equivalencia de las representaciones irreducibles de G , y sean $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^s$ representantes de cada clase.

Si $\rho \sim m_1\varphi^1 \oplus m_2\varphi^2 \oplus \dots \oplus m_s\varphi^s$, con $m_1, m_2, \dots, m_s \in \mathbb{N}$, entonces

$$m_j = \langle \chi_\rho | \chi_{\varphi^j} \rangle, \quad \forall j = 1, \dots, s. \quad (2.41)$$

Más aún, la descomposición de ρ en constituyentes irreducibles es única y puede determinarse a partir de su caracter (tomando en cuenta que representaciones equivalentes tienen caracteres iguales).

Dem. Por ahora, sólo demostraremos la Ecuación (2.41).

Usando el Lema (2.3.5) y la linealidad de la traza, tenemos:

$$\chi_\rho = m_1\chi_{\varphi^1} + m_2\chi_{\varphi^2} + \dots + m_s\chi_{\varphi^s}.$$

$$\begin{aligned} \implies \langle \chi_\rho | \chi_{\varphi^j} \rangle &= \langle m_1\chi_{\varphi^1} + m_2\chi_{\varphi^2} + \dots + m_s\chi_{\varphi^s} | \chi_{\varphi^j} \rangle \\ &= m_1 \langle \chi_{\varphi^1} | \chi_{\varphi^j} \rangle + \dots + m_j \langle \chi_{\varphi^j} | \chi_{\varphi^j} \rangle + \dots + m_s \langle \chi_{\varphi^s} | \chi_{\varphi^j} \rangle \\ &= m_j. \\ \therefore m_j &= \langle \chi_\rho | \chi_{\varphi^j} \rangle, \quad \forall j = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

tomando en cuenta que $\varphi^i \approx \varphi^j$ para toda $i \neq j$, y aplicando el Teorema (2.3.3).

Por lo tanto, la descomposición de ρ en caracteres irreducibles es:

$$\rho \sim \langle \chi_\rho | \chi_{\varphi^1} \rangle \varphi^1 \oplus \langle \chi_\rho | \chi_{\varphi^2} \rangle \varphi^2 \oplus \dots \oplus \langle \chi_\rho | \chi_{\varphi^s} \rangle \varphi^s. \quad \blacksquare$$

Este resultado es similar al caso más general de vectores $\vec{v} \in E^n$: para expresarlos en términos de la base estándar $\{\hat{e}_j \mid j = 1, \dots, n\}$, debemos calcular los productos internos $\langle \vec{v} | \hat{e}_j \rangle$, que funcionan como coeficientes de la combinación lineal:

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \hat{e}_1 \rangle \hat{e}_1 + \dots + \langle \vec{v}, \hat{e}_n \rangle \hat{e}_n.$$

Los coeficientes $\langle \vec{v} | \hat{e}_j \rangle$ pueden entenderse como las **proyecciones** del vector en cada una de las componentes \hat{e}_j .

Así, si vemos a los caracteres irreducibles $\{\chi_{\varphi^j} \mid j = 1, \dots, s\}$ como base de un espacio de funciones, podemos expresar a cualquier otro caracter χ_ρ en términos de ellos:

$$\chi_\rho = \langle \chi_\rho | \chi_{\varphi^1} \rangle \chi_{\varphi^1} + \dots + \langle \chi_\rho | \chi_{\varphi^s} \rangle \chi_{\varphi^s}.$$

***Nota:** Recordemos que, si $\rho \sim \sigma \implies \chi_\rho = \chi_\sigma$. Entonces, ambas representaciones tendrán los mismos coeficientes de multiplicidad:

$$m_j = \langle \chi_\rho | \chi_{\varphi^j} \rangle = \langle \chi_\sigma | \chi_{\varphi^j} \rangle,$$

y, por tanto, sus descomposiciones en representaciones irreducibles serán equivalentes.

A esto nos referimos cuando decimos que la descomposición de ρ está *determinada hasta la equivalencia*: cada representación tiene una sola descomposición, pero ésta puede ser la misma para representaciones equivalentes.

Corolario 2.3.7. Una representación ρ de un grupo finito es irreducible, si y sólo si $\langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = 1$.

Dem. (\implies) Por el Teorema (2.1.6), toda representación de un grupo finito es equivalente a una representación unitaria. Por tanto, si ρ es irreducible, entonces existe una representación unitaria U tal que:

$$\begin{aligned} \rho \sim U &\implies \chi_\rho = \chi_U \\ &\therefore \langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = 1, \end{aligned}$$

por el Teorema (2.3.3).

(\impliedby) Supongamos que $\langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = 1$. Si ρ es reducible, entonces se puede escribir en términos de representaciones irreducibles:

$$\begin{aligned} \rho &\sim m_1 \varphi^1 \oplus \cdots \oplus m_s \varphi^s. \\ \implies 1 = \langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle &= \left\langle \sum_{\oplus i=1}^s m_i \varphi^i \middle| \sum_{\oplus j=1}^s m_j \varphi^j \right\rangle \\ &= \sum_{\oplus i=1}^s \sum_{\oplus j=1}^s m_i m_j \langle \varphi^i | \varphi^j \rangle \\ &= \sum_{i=j}^s \sum_{j=1}^s m_i m_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^s m_i^2 \\ &= m_1^2 + \cdots + m_s^2. \end{aligned}$$

Pero $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$, por lo que la única forma de que $m_1^2 + \cdots + m_s^2 = 1$ es que $m_j = 1$ para alguna j , y $m_i = 0$ para toda $i \neq j$.

$$\implies \rho \sim m_j \varphi^j.$$

Por lo tanto, ρ es irreducible. ■

El Corolario anterior es útil para verificar si una representación es o no irreducible, como veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3.1 (Caracteres de S_3). De acuerdo con el Ejemplo (1.6.1), S_3 tiene 3 clases de conjugación.

Para calcular los caracteres de S_3 , sólo necesitamos conocer una representante de cada clase, escrita en forma matricial; entonces, nos fijaremos en:

$$\begin{aligned} (1) &\in \zeta_1 \\ (1\ 2) &\in \zeta_2 \\ (1\ 2\ 3) &\in \zeta_3. \end{aligned}$$

Consideremos la representación bidimensional $\rho : S_3 \longrightarrow \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ de estas permutaciones:

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rho(1\ 2) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rho(1\ 2\ 3) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Y calculemos sus caracteres correspondientes:

$$\chi_\rho(1) = 2; \quad \chi_\rho(1\ 2) = 0; \quad \chi_\rho(1\ 2\ 3) = -1.$$

Ahora, si n_i es el número de elementos de la clase ζ_i , entonces

$$\begin{aligned} \langle \chi_\varphi | \chi_\varphi \rangle &= \frac{1}{|S_3|} \sum_{g \in S_3} [\chi_\rho(g)]^2 \\ &= \frac{1}{|S_3|} \sum_{i=1}^3 [\chi_\rho(\zeta_i)]^2 n_i \\ &= \frac{1}{6} [(2)^2(1) + (0)^2(3) + (-1)^2(2)] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por el Corolario (2.3.7), esto significa que φ es irreducible.

Teorema 2.3.8. Sean $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^s$ representaciones irreducibles, no equivalentes, de un grupo finito G . Entonces, sus respectivos caracteres $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_s$ son una **base ortonormal** de $\mathcal{C}(\mathbb{C}_G)$.

De acuerdo con este Teorema, cualquier función de clase se puede escribir como:

$$f = \sum_{j=1}^s f_j \chi_j, \quad \text{con } f_j \in \mathbb{C}.$$

Más aún, se puede probar que los coeficientes de la combinación lineal f_j están dados por $\langle f | \chi_j \rangle$. Así,

$$f = \sum_{j=1}^s \langle f | \chi_j \rangle \chi_j. \tag{2.42}$$

Para demostrar el Teorema (2.3.8), es necesario ver que la dimensión del espacio de funciones de clase, $\mathcal{C}(\mathbb{C}_G)$, es igual al número de clases de equivalencia s .

Ejemplo 2.3.2 (Representaciones irreducibles de \mathbb{Z}_n). Las representaciones irreducibles de \mathbb{Z}_n son unidimensionales, por lo que coinciden con sus respectivos caracteres.

Definimos n funciones:

$$\begin{aligned} \chi_k : \mathbb{Z}_n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [m] &\longmapsto \omega_n^{km}, \end{aligned}$$

donde $k = 1, \dots, n$ y ω_n son las raíces n -ésimas de la unidad, dadas por $\omega_n = e^{i2\pi/n}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \chi_1([m]) &= \omega_n^m = e^{i2\pi m/n} \\ \chi_2([m]) &= \omega_n^{2m} = e^{i4\pi m/n} \\ &\dots \\ \chi_n([m]) &= \omega_n^{nm} = e^{i2\pi nm/n} = e^{i2\pi m}. \end{aligned}$$

Pero $e^{i2\pi m} = 1$ para toda $m \in \mathbb{Z}$, por lo que χ_n coincide con la representación trivial $\chi_0 : [m] \longmapsto 1$.

Notemos que estas representaciones no son equivalentes, pues no existe ningún número $t \in \mathbb{C}$ tal que $t\chi_j t^{-1} = \chi_k$.

$$\therefore \chi_j \not\sim \chi_k, \forall j \neq k.$$

Ahora, introduciremos un recurso gráfico que nos ayuda a visualizar todos los caracteres irreducibles de un grupo:

Definición 2.3.4. Sea G un grupo finito con clases de conjugación $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_s$, y sean $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_s$ los caracteres irreducibles correspondientes a cada clase.

Entonces, llamamos **tabla de caracteres** de G al arreglo cuadrado de $(s \text{ filas}) \times (s \text{ columnas})$, cuya ij -ésima entrada es el i -ésimo caracter, evaluado en la j -ésima clase.

En notación matricial, si \mathbf{X} es la tabla de caracteres, entonces

$$\mathbf{X}_{ij} = \chi_i(\zeta_j).$$

Ejemplo 2.3.3 (Tabla de caracteres de S_3). Como vimos en el Ejemplo (1.6.1), S_3 tiene 3 clases de conjugación.

Además de la representación bidimensional e irreducible $\varphi : S_3 \rightarrow \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$, introducida en el Ejemplo (2.3.1), S_3 tiene otras 2 representaciones irreducibles:

- La representación trivial:

$$\pi : \sigma \mapsto 1, \forall \sigma \in S_3.$$

Como π es de grado 1, coincide con su caracter: $\chi_\pi(\sigma) = 1, \forall \sigma \in S_3$.

- La representación de grado 1 dada por:

$$\rho : \sigma \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma \text{ es par.} \\ -1, & \text{si } \sigma \text{ es impar.} \end{cases}$$

Nuevamente, la representación coincide con su caracter: $\chi_\rho(\sigma) = \rho(\sigma), \forall \sigma \in S_3$.

Esta representación también es llamada **representación alternante** y, al evaluarla sobre σ , coincide con la función signo.

Como el caracter es una función de clase, basta evaluarlo en 1 elemento de cada clase de conjugación de S_3 .

Los valores de χ_φ ya fueron calculados en el Ejemplo (2.3.1); para χ_π y χ_ρ , tenemos:

$$\begin{aligned} \chi_\pi(1) &= \chi_\pi(1\ 2) = \chi_\pi(1\ 2\ 3) = 1. \\ \chi_\rho(1) &= 1, \quad \chi_\rho(1\ 2) = -1, \quad \chi_\rho(1\ 2\ 3) = 1. \end{aligned}$$

Ahora, desplegamos esta información en una tabla de caracteres:

	(1)	(1 2)	(1 2 3)
χ_π	1	1	1
χ_ρ	1	-1	1
χ_φ	2	0	-1

Tabla 2.2: Tabla de caracteres de S_3 .

Ejemplo 2.3.4 (Tabla de caracteres de \mathbb{Z}_4). Como $\mathbb{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$ es un grupo abeliano, todas sus representaciones irreducibles son de grado 1 y coinciden con sus respectivos caracteres. Además, cada elemento de \mathbb{Z}_4 forma una clase por sí solo.

Las representaciones irreducibles de \mathbb{Z}_4 son:

$$\begin{aligned} \text{i. } \chi_1 : [m] &\mapsto 1 \\ \implies \chi_1([m]) &= 1 \quad \forall [m] \in \mathbb{Z}_4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \chi_2 : [m] &\mapsto (-1)^m \\ \implies \chi_2([0]) = \chi_2([2]) &= 1; \quad \chi_2([1]) = \chi_2([3]) = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } \chi_3 : [m] &\mapsto i^m \\ \implies \chi_3([0]) = 1, \quad \chi_3([1]) &= i \\ \chi_3([2]) = -1, \quad \chi_3([3]) &= -i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } \chi_4 : [m] &\mapsto (-i)^m \\ \implies \chi_4([0]) = 1, \quad \chi_4([1]) &= -i \\ \chi_4([2]) = -1, \quad \chi_4([3]) &= i. \end{aligned}$$

Reunimos esta información en la tabla:

	[0]	[1]	[2]	[3]
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	i	-1	-i
χ_4	1	-i	-1	i

Tabla 2.3: Tabla de caracteres de \mathbb{Z}_4 .

Si vemos a las columnas de la tabla de caracteres como vectores, podemos probar que son un conjunto ortogonal respecto al producto interno estándar en \mathbb{C}^n .

Por ejemplo, la tabla (2.3) tiene columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \\ i \end{pmatrix}.$$

Calculemos el producto interno de dos columnas diferentes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \quad -1 \quad -i \quad i)^* = 1 - 1 + i - 1 = 0.$$

Lo mismo se obtendrá para el resto de productos entre columnas diferentes. En cambio, el

producto de una columna consigo misma resulta en:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} (1 \quad -1 \quad i \quad -i)^* = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Formalizaremos estos resultados en el siguiente teorema:

Teorema 2.3.9 (2^{as} Relaciones de ortogonalidad de los caracteres). Sean $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_s$ caracteres irreducibles de G , y sean ζ, ζ' clases de conjugación de G tales que $g \in \zeta, h \in \zeta'$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^s \chi_i(g) [\chi_i(h)]^* = \begin{cases} \frac{|G|}{|\zeta|}, & \text{si } \zeta = \zeta'. \\ 0, & \text{si } \zeta \neq \zeta'. \end{cases} \quad (2.43)$$

En consecuencia, las columnas de la tabla de caracteres son ortogonales y la tabla de caracteres es invertible.

Dem. Supongamos que G tiene s clases de conjugación ζ_1, \dots, ζ_s y que χ_1, \dots, χ_s son sus respectivos caracteres irreducibles. Entonces, la tabla de caracteres de G tiene la forma:

	ζ_1	ζ_2	\dots	ζ_s
χ_1	$\chi_1(\zeta_1)$	$\chi_1(\zeta_2)$	\dots	$\chi_1(\zeta_s)$
χ_2	$\chi_2(\zeta_1)$	$\chi_2(\zeta_2)$	\dots	$\chi_2(\zeta_s)$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
χ_s	$\chi_s(\zeta_1)$	$\chi_s(\zeta_2)$	\dots	$\chi_s(\zeta_s)$

Denotemos por \vec{v}_j al vector formado por las entradas de la columna j -ésima de la tabla, y calculemos el producto interno:

$$\begin{aligned} \vec{v}_j \cdot \vec{v}_k &= \begin{pmatrix} \chi_1(\zeta_j) \\ \chi_2(\zeta_j) \\ \dots \\ \chi_s(\zeta_j) \end{pmatrix} (\chi_1(\zeta_k) \quad \chi_2(\zeta_k) \quad \dots \quad \chi_s(\zeta_k))^* \\ &= \chi_1(\zeta_j) [\chi_1(\zeta_k)]^* + \chi_2(\zeta_j) [\chi_2(\zeta_k)]^* + \dots + \chi_s(\zeta_j) [\chi_s(\zeta_k)]^* \\ &= \sum_{i=1}^s \chi_i(\zeta_j) [\chi_i(\zeta_k)]^*. \end{aligned}$$

Tomando $g \in \zeta_j$ y $h \in \zeta_k$, tenemos

$$\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = \sum_{i=1}^s \chi_i(g) [\chi_i(h)]^*. \quad (2.44)$$

Por otro lado, definimos la función $\delta_{\zeta'} \in \mathbb{C}_G$ como:

$$\delta_{\zeta'}(g) = \begin{cases} 1, & \text{si } g \in \zeta'. \\ 0, & \text{si } g \notin \zeta'. \end{cases}$$

De acuerdo con el Teorema (2.3.8) y la Ecuación (2.42), podemos expresar a $\delta_{\zeta'}$ como:

$$\begin{aligned}
 \delta_{\zeta'} &= \sum_{i=1}^s \langle \delta_{\zeta'} | \chi_i \rangle \chi_i. \\
 \implies \delta_{\zeta'}(g) &= \sum_{i=1}^s \langle \delta_{\zeta'} | \chi_i \rangle \chi_i(g) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^s \sum_{h \in G} \delta_{\zeta'}(h) [\chi_i(h)]^* \chi_i(g) \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^s \sum_{h \in \zeta'} [\chi_i(h)]^* \chi_i(g) \\
 &= \frac{|\zeta'|}{|G|} \sum_{i=1}^s \chi_i(g) [\chi_i(h)]^*,
 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $\chi_i(h)$ vale lo mismo para toda $h \in \zeta'$.

Pero, por la definición de $\delta_{\zeta'}$ y la Ecuación (2.44), tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{|\zeta'|}{|G|} \sum_{i=1}^s \chi_i(g) [\chi_i(h)]^* &= \frac{|\zeta'|}{|G|} \vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = \begin{cases} 1, & \text{si } g \in \zeta'. \\ 0, & \text{si } g \notin \zeta'. \end{cases} \\
 \therefore \sum_{i=1}^s \chi_i(g) [\chi_i(h)]^* &= \begin{cases} |G|, & \text{si } \zeta = \zeta'. \\ 0, & \text{si } \zeta \neq \zeta'. \end{cases}
 \end{aligned}$$

■

***Nota:** En algunos textos, las relaciones (2.43) son llamadas **relaciones de completez**. Este tipo de ecuación es planteada en mecánica cuántica, en la forma:

$$\sum_i |a_i\rangle \langle a_i| = 1,$$

donde $\{|a_i\rangle\}$ son vectores llamados **kets** y $\{\langle a_i|\}$ son sus respectivos vectores duales, llamados **bras** [11].

Los kets constituyen una base del espacio vectorial de estados del sistema, asociados con una observable A tal que $A|a_i\rangle \propto |a_i\rangle$ y $\langle a_i|A \propto \langle a_i|$. Los objetos $|a_i\rangle \langle a_i|$ son operadores, formados por un *producto exterior* entre kets y bras y llamados *ket-bras*.

Fijando $g \in \zeta$ y escribiendo la Ecuación (2.43) como:

$$\frac{|\zeta|}{|G|} \sum_{i=1}^s \chi_i(g) [\chi_i(g)]^* \approx \frac{|\zeta|}{|G|} \sum_{i=1}^s |\chi_i\rangle \langle \chi_i| = 1,$$

podemos notar la similitud entre las relaciones de completez que satisfacen los caracteres irreducibles de un grupo, y las que satisfacen los *ket-bras* $|a_i\rangle \langle a_i|$ en mecánica cuántica.

A continuación, veremos cómo hallar las representaciones irreducibles del producto directo de dos grupos:

Proposición 2.3.10. Sean G_1 y G_2 grupos abelianos de orden m y n , respectivamente.

Si $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m\}$ y $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ son sus respectivas representaciones irreducibles, entonces las funciones:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{ij} : G_1 \times G_2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\
 (g_1, g_2) &\longmapsto \chi_i(g_1)\xi_j(g_2),
 \end{aligned}$$

con $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$, son un conjunto completo de representaciones irreducibles de $G_1 \times G_2$.

Dem. Recordemos que:

$$\begin{aligned} G_1 \times G_2 &= \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1 \wedge g_2 \in G_2\}. \\ |G_1 \times G_2| &= |G_1||G_2| = mn. \end{aligned}$$

También tomemos en cuenta que las representaciones irreducibles de G_1 y G_2 son unidimensionales, pues son grupos abelianos.

Ahora, si $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} [(g_1, g_2)(h_1, h_2)] &= \varphi_{ij}(g_1 h_1, g_2 h_2) \\ &= \chi_i(g_1 h_1) \xi_j(g_2 h_2) \\ &= \chi_i(g_1) \chi_i(h_1) \xi_j(g_2) \xi_j(h_2) \\ &= [\chi_i(g_1) \xi_j(g_2)] [\chi_i(h_1) \xi_j(h_2)] \\ &= \varphi_{ij}(g_1, g_2) \varphi_{ij}(h_1, h_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, las funciones $\{\varphi_{ij}\}$ son homomorfismos. Además, como $\{\chi_i\}$ y $\{\xi_j\}$ son de grado 1, también $\{\varphi_{ij}\}$ son de grado 1.

$\therefore \{\varphi_{ij} \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ son representaciones irreducibles de $G_1 \times G_2$.

Notemos que hay mn funciones φ_{ij} . De acuerdo con el Ecuación (2.38), la dimensión de \mathbb{C}_G , con G abeliano, coincide con el número de representaciones irreducibles que posee:

$$\begin{aligned} \implies \text{Dim}(\mathbb{C}_{G_1 \times G_2}) &= d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_{mn}^2 \\ &= 1 + 1 + \dots + 1 \\ &= mn. \end{aligned}$$

Además, las mn funciones φ_{ij} son distintas entre sí, pues, si $\varphi_{ij} = \varphi_{kl}$,

$$\begin{aligned} \implies \varphi_{ij}(g, 1) &= \varphi_{kl}(g, 1) \wedge \varphi_{ij}(1, h) = \varphi_{kl}(1, h) \\ \iff \chi_i(g) &= \chi_k(g) \wedge \xi_j(h) = \xi_l(h) \\ \iff \chi_i &= \chi_k \wedge \xi_j = \xi_l. \end{aligned}$$

Pero $\{\chi_1, \dots, \chi_m\}$ es un conjunto completo de representaciones irreducibles, por lo que $\chi_i \neq \chi_k \forall i \neq k$. Lo mismo se puede decir de $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

Por lo tanto, $\{\varphi_{ij}\}$ es un conjunto completo de representaciones irreducibles, en el sentido de que:

$$\text{Dim}(\mathbb{C}_{G_1 \times G_2}) = |\{\varphi_{ij}\}|.$$

■

El siguiente ejemplo ilustra la proposición anterior:

Ejemplo 2.3.5 (Caracteres del grupo de Klein). El grupo de klein o 4-grupo $V = \{1, a, b, c\}$ es abeliano e isomorfo al producto directo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (o al producto $C_2 \times C_2$, como vimos en el Ejemplo 1.5.1).

Así, cada elemento de V puede verse como un par $([p], [q]) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ [12]:

$$\begin{aligned} 1 &\cong ([0], [0]) \\ a &\cong ([0], [1]) \\ b &\cong ([1], [0]) \\ c &\cong ([1], [1]). \end{aligned}$$

Las representaciones irreducibles de V pueden obtenerse a partir de las de \mathbb{Z}_2 , de acuerdo con la Proposición (2.3.10). Estas representaciones son:

$$\begin{aligned}\chi_1 : [p] &\mapsto 1, \\ \chi_2 : [p] &\mapsto (-1)^p, \quad \forall [p] \in \mathbb{Z}_2.\end{aligned}$$

Por lo que la tabla de caracteres de \mathbb{Z}_2 es:

	[0]	[1]
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

Denotando por ξ_{ij} a las representaciones irreducibles de V , tenemos:

$$\xi_{11}(g) = \chi_1([p])\chi_1([q]) = 1, \quad \forall g \in V.$$

$$\begin{aligned}\xi_{12}(1) &= \chi_1([0])\chi_2([0]) = 1 \\ \xi_{12}(a) &= \chi_1([0])\chi_2([1]) = -1 \\ \xi_{12}(b) &= \chi_1([1])\chi_2([0]) = 1 \\ \xi_{12}(c) &= \chi_1([1])\chi_2([1]) = -1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_{21}(1) &= \chi_2([0])\chi_1([0]) = 1 \\ \xi_{21}(a) &= \chi_2([0])\chi_1([1]) = 1 \\ \xi_{21}(b) &= \chi_2([1])\chi_1([0]) = -1 \\ \xi_{21}(c) &= \chi_2([1])\chi_1([1]) = -1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_{22}(1) &= \chi_2([0])\chi_2([0]) = 1 \\ \xi_{22}(a) &= \chi_2([0])\chi_2([1]) = -1 \\ \xi_{22}(b) &= \chi_2([1])\chi_2([0]) = -1 \\ \xi_{22}(c) &= \chi_2([1])\chi_2([1]) = 1.\end{aligned}$$

Reunimos esta información en la tabla de caracteres de V :

	1	a	b	c
ξ_{11}	1	1	1	1
ξ_{12}	1	-1	1	-1
ξ_{21}	1	1	-1	-1
ξ_{22}	1	-1	-1	1

Para finalizar la sección, retomaremos nuestra discusión sobre los grupos de Lie SO_2 y \mathcal{T}_1 , formulando las relaciones de ortogonalidad y completéz para sus respectivas representaciones irreducibles.

Relaciones de ortogonalidad de SO_2

Primero, notemos que las representaciones irreducibles de SO_2 están normalizadas:

$$\|e^{-i\phi}\| = e^{-i\phi}(e^{-i\phi})^* = 1 = \|e^{i\phi}\|.$$

Por lo tanto, podemos decir que satisfacen *relaciones de ortonormalidad*.

Para formular dichas relaciones, debemos tomar en cuenta que ϕ es una variable continua en $[0, 2\pi)$, así que la suma sobre los elementos del grupo será reemplazada por una integral.

Teorema 2.3.11. Las representaciones irreducibles de SO_2 , dadas por la Ecuación (2.22), satisfacen las siguientes relaciones:

$$\text{Ortonormalidad: } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\chi_\phi^n)^\dagger \chi_\phi^m d\phi = \delta_n^m. \quad (2.45)$$

$$\text{Completez: } \sum_n \chi_\phi^n (\chi_{\phi'}^n)^\dagger = \delta(\phi - \phi'). \quad (2.46)$$

La Ecuación (2.46) implica que:

$$\int_0^{2\pi} \sum_n \chi_\phi^n (\chi_{\phi'}^n)^\dagger d\phi = \int_0^{2\pi} \delta(\phi - \phi') d\phi = 1.$$

Esto significa que cualquier función χ^m puede ser escrita como una combinación lineal de las demás, ya que $\{\chi^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ es una base del álgebra del grupo, esto es, del conjunto de funciones $f : SO_2 \rightarrow \mathbb{C}$.

Relaciones de ortogonalidad de \mathcal{T}_1

Al igual que en el grupo de rotaciones, las representaciones irreducibles de \mathcal{T}_1 están normalizadas, por lo que podemos formular las siguientes relaciones:

Teorema 2.3.12. Las representaciones irreducibles del grupo de traslaciones en una dimensión, dadas por la Ecuación (2.26), satisfacen:

$$\text{Ortonormalidad: } \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_x^p)^\dagger \chi_{x'}^{p'} dx = N\delta(p - p'). \quad (2.47)$$

$$\text{Completez: } \int_{-\infty}^{\infty} \chi_x^p (\chi_{x'}^p)^\dagger dp = N\delta(x - x'), \quad (2.48)$$

donde N es una constante de normalización.

Fijémonos en que la integración se realiza en $(-\infty, \infty)$, pues tanto p como x son variables continuas en \mathbb{C} .

Las Ecuaciones (2.47), (2.48) implican que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_x^p)^\dagger \chi_{x'}^{p'} dx dp &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_x^p (\chi_{x'}^p)^\dagger dp dx \\ \iff N \int_{-\infty}^{\infty} \delta(p - p') dp &= N \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx = N. \end{aligned}$$

Sustituyendo $\chi_x^p = e^{-ipx}$, obtenemos la **transformada de Fourier** entre las variables x y p :

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} e^{-ip'x} dx dp = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(p-p')} dx dp. \quad (2.49)$$

Comparando con la formulación usual de una transformada de Fourier, deducimos que $N = 2\pi$.

En mecánica cuántica, la Ecuación (2.49) se presenta como una relación entre la función de onda de posición $\psi(x)$ y la función de onda de momento lineal $\phi(p)$. Permite transformar entre el espacio de coordenadas y el espacio de momentos, es decir, entre el espacio generado por los kets $|x\rangle$ tales que $X|x\rangle = x'|x\rangle$, con X la observable de posición y $x' \in \mathbb{R}$, y el espacio generado por los kets $|p\rangle$ tales que $X|p\rangle = p'|p\rangle$, con P la observable de momento lineal y $p' \in \mathbb{R}$.

2.4. Representación Regular

En esta sección, profundizaremos en las representaciones regulares, introducidas en la sección (1.4). Primero, veamos que es posible construir un espacio vectorial a partir de los elementos de un grupo:

Si G es un grupo de orden n , entonces podemos contruir un espacio vectorial $\mathbb{C}G$ a partir de la base:

$$\{\hat{e}_{g_1}, \hat{e}_{g_2}, \dots, \hat{e}_{g_n}\},$$

donde cada vector unitario \hat{e}_g está asociado a un elemento $g \in G$. Esta asociación entre elementos del grupo y vectores unitarios es **biyectiva**, por lo que $\mathbb{C}G$ es un espacio de **dimensión** n .

Así, cualquier vector $\vec{v} \in \mathbb{C}G$ se puede escribir en la forma:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \hat{e}_{g_i}, \text{ con } v_i \in \mathbb{C}.$$

Ahora, reformulamos la Definición (1.4.12) para ver que, efectivamente, los homomorfismos L y R actúan sobre un espacio vectorial:

Definición 2.4.1. Sea G un grupo de orden n . Entonces, definimos la **Representación regular izquierda** de G como el homomorfismo:

$$\begin{aligned} L : G &\longrightarrow GL(\mathbb{C}G) \\ g &\longrightarrow L_g, \quad \text{donde:} \\ L_g \left(\sum_{h \in G} v_h \hat{e}_h \right) &= \sum_{h \in G} v_h L_g(\hat{e}_h) \\ &= \sum_{h \in G} v_h \hat{e}_{gh} \\ &= \sum_{x \in G} v_{g^{-1}x} \hat{e}_x, \end{aligned}$$

con $x = gh$.

Es decir, L_g permuta a los elementos de la base canónica de $\mathbb{C}G$, ya que $\{\hat{e}_{gh} \mid gh \in G\}$ es un reordenamiento de $\{\hat{e}_h \mid h \in G\}$.

Análogamente, definimos la **representación regular derecha** como:

$$\begin{aligned} R : G &\longrightarrow GL(\mathbb{C}G) \\ g &\longrightarrow R_g, \quad \text{donde:} \end{aligned}$$

$$R_g : \sum_{h \in G} v_h \hat{e}_h \longmapsto \sum_{h \in G} v_h \hat{e}_{hg}.$$

Usualmente, trabajaremos con la representación L , y la llamaremos simplemente representación regular.

Como se vio en la demostración del Teorema (1.4.8), L es efectivamente una representación de G . Además, como $\mathbb{C}G$ es de dimensión n , L es de grado n .

Recordemos que, de acuerdo con el Teorema de Cayley, todo grupo G puede verse como un subgrupo de un grupo de permutaciones. En particular, si $|G| = n$, entonces G es isomorfo a un subgrupo de $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$, el grupo de matrices de permutación $n \times n$.

Resulta que el subgrupo de $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ isomorfo a G es el conjunto de matrices asociadas a las representaciones L_g . Denotando dichas matrices por \mathcal{L}_g , tenemos:

$$\{\mathcal{L}_g \mid g \in G\} \leq \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \quad \wedge \quad \{\mathcal{L}_g \mid g \in G\} \cong G.$$

Si $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, entonces cada par de elementos $g_i, g_j \in G$ satisface una relación de tipo $g_i g_j = g_k$, que determina la estructura del grupo.

Si denotamos por \mathcal{L}_i a la **representación regular matricial** correspondiente a g_i , entonces sus entradas están dadas por:

$$(\mathcal{L}_i)_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{si } g_k = g_i g_j. \\ 0, & \text{si } g_k \neq g_i g_j. \end{cases} \quad (2.50)$$

Cada renglón de \mathcal{L}_i tiene una sola entrada igual a 1 y todas las demás, iguales a 0. Así, si $g_1 = 1$, entonces

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_i)_{1k} &= 1, \quad \text{si } k = i. \\ (\mathcal{L}_i)_{2k} &= 1, \quad \text{si } g_k = g_i g_2. \\ &\dots \\ (\mathcal{L}_i)_{nk} &= 1, \quad \text{si } g_k = g_i g_n. \end{aligned}$$

Podemos calcular la acción de \mathcal{L} sobre $\mathbb{C}G$, escribiendo a $\vec{v} \in \mathbb{C}$ como un vector columna, respecto de la base $\{\hat{e}_{g_1}, \hat{e}_{g_2}, \dots, \hat{e}_{g_n}\}$:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n)^T. \\ \implies (\mathcal{L}_i \vec{v})_j &= \sum_{k=1}^n (\mathcal{L}_i)_{jk} v_k. \end{aligned}$$

Así, las entradas del vector $\mathcal{L}_i \vec{v}$ estarán determinadas por la regla de multiplicación del grupo, $g_i g_j = g_k$.

Ejemplo 2.4.1 (Representación regular de un grupo cíclico). Consideremos el grupo cíclico de n elementos:

$$C_n = \{g^0, g^1, g^2, \dots, g^{n-1}\},$$

donde $g^0 = 1 = g^n$.

Tomando en cuenta que $g^k g^i = g^{k+i}$, para cualesquiera $g^k, g^i \in C_n$, veamos que la representación regular de C_n es: [17]

$$L_{g^k} : \sum_{i=0}^{n-1} v_i \hat{e}_i \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} v_i \hat{e}_{k+i},$$

siendo los vectores $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{n-1}\}$ la base canónica de $\mathbb{C}C_n$.

Podemos expresar a la representación regular como una matriz $n \times n$, cuyas entradas no nulas son sólo $(i, i+k)$ para cada $i = 1, \dots, n$. Es decir,

$$(\mathcal{L}_{g^k})_{ij} = \delta_{j, i+k}.$$

Si $k = 0$, entonces $\mathcal{L}_{g^0} = \mathbb{1}$.

Si $k = 1$, $L_{g^1} : \hat{e}_i \mapsto \hat{e}_{i+1}$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{g^1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

y \mathcal{L}_{g^1} permuta las entradas del vector $\vec{v} \in \mathbb{C}C_n$ como:

$$\mathcal{L}_{g^1} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \cdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_{n-1} \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Si $k = 2$, $L_{g^2} : \hat{e}_i \mapsto \hat{e}_{i+2}$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{g^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

y, en este caso,

$$\mathcal{L}_{g^2} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \cdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \cdots \\ v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Podemos seguir aplicando este proceso para encontrar todas las demás matrices regulares $\{\mathcal{L}_{g^i} \mid g^i \in C_n\}$.

En particular, las representaciones del grupo cíclico de 3 elementos, $C_3 = \{1, g, g^2\}$ son:

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_{g^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices permutan de manera **cíclica** las entradas de un vector $\vec{v} \in \mathbb{C}C_3 \cong \mathbb{C}^3$, y representan las transformaciones de rotación de un triángulo equilátero, como se vio en el Ejemplo (1.1.8).

Ahora, veremos algunas propiedades que revelan la utilidad de la representación regular:

Proposición 2.4.1. La representación regular es **unitaria**.

Dem. Sea $L : G \rightarrow GL(\mathbb{C}G)$ la representación regular de G , siendo $\mathbb{C}G$ el espacio vectorial en correspondencia biyectiva con G , esto es:

$$\mathbb{C}G = \left\{ \sum_{g \in G} c_g \hat{e}_g \mid g \in G, c_g \in \mathbb{C} \right\}.$$

Para simplificar la notación, denotaremos a cada vector unitario \hat{e}_g de la base de $\mathbb{C}G$, por g . Entonces, el **producto interno** usual en $\mathbb{C}G$ está definido como:

$$\left\langle \sum_{g \in G} a_g g \mid \sum_{g \in G} b_g g \right\rangle = \sum_{g \in G} a_g b_g^*.$$

Ahora, consideremos $v, w \in \mathbb{C}G$ dadas por:

$$v = \sum_{h \in G} c_h h, \quad w = \sum_{h \in G} k_h h.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle L_g(v) \mid L_g(w) \rangle &= \left\langle L_g \left(\sum_{h \in G} c_h h \right) \mid L_g \left(\sum_{h \in G} k_h h \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{x \in G} c_{g^{-1}x} x \mid \sum_{x \in G} k_{g^{-1}x} x \right\rangle \\ &= \sum_{x \in G} c_{g^{-1}x} (k_{g^{-1}x})^*, \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $y = g^{-1}x$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in G} c_{g^{-1}x} (k_{g^{-1}x})^* &= \sum_{y \in G} c_y k_y^* \\ &= \left\langle \sum_{y \in G} c_y y \mid \sum_{y \in G} k_y y \right\rangle \\ &= \langle v \mid w \rangle. \end{aligned}$$

$$\therefore \langle L_g(v) \mid L_g(w) \rangle = \langle v \mid w \rangle.$$

Por la Definición (2.1.11), esto significa que L_g es unitaria, para toda $g \in G$. ■

Proposición 2.4.2. El **caracter** de la representación regular $L : G \rightarrow \mathbb{C}G$ es:

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G|, & \text{si } g = 1. \\ 0, & \text{si } g \neq 1. \end{cases}$$

Dem. Supongamos que G es de orden n .

Por la Ecuación (2.50), sabemos que $\mathcal{L}_1 = \mathbf{1}$, por lo que su caracter es:

$$\chi_L(\mathbf{1}) = \text{Tr}(\mathbf{1}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} = n = |G|.$$

El resto de las matrices $\{\mathcal{L}_g \mid g \in G\}$ resultan de permutar las filas de $\mathbf{1}$. Si existiera $g \neq 1$ tal que $\chi_L(g) \neq 0$, entonces

$$(\mathcal{L}_g)_{jj} = 1, \text{ para alguna } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Entonces, de acuerdo con la Ecuación (2.50), $g \cdot g_j = g_j$, siendo g_j el elemento de G que corresponde a la fila j -ésima. Pero, por la unicidad de la identidad, esto implica que $g = 1$.

$$\therefore \chi_L(g) = \begin{cases} |G|, & \text{si } g = 1. \\ 0, & \text{si } g \neq 1. \end{cases}$$

■

Notemos que las representaciones regulares de C_3 , introducidas en el Ejemplo (2.4.1), satisfacen:

$$\chi_L(\mathbf{1}) = 3 = |C_3|, \quad \chi_L(g) = 0, \quad \chi_L(g^2) = 0,$$

Lo cual concuerda con la Proposición (2.4.2).

Una de las propiedades más importantes de la representación regular es que contiene a todas las representaciones irreducibles y no equivalentes del grupo; más aún, el número de veces que cada representación irreducible aparece en la descomposición de L , es igual al grado de dicha representación.

Teorema 2.4.3. Sean G un grupo de orden n y $\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^s\}$ un conjunto completo de representaciones irreducibles y no equivalentes de G .

Si d_j es el grado de la representación φ^j , para cada $j = 1, \dots, s$, entonces

$$L \sim d_1\varphi^1 \oplus d_2\varphi^2 \oplus \dots \oplus d_s\varphi^s.$$

Es decir, cada φ^j aparece d_j veces en la descomposición de la representación regular de G . Además,

$$d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_s^2 = n.$$

Dem. De acuerdo con el Teorema (2.1.5), L es irreducible o completamente reducible.

Si L es irreducible, entonces no existe subespacio no trivial $V < \mathbb{C}G$ que sea G -invariante respecto de L . Sin embargo, consideremos el subespacio generado por $\vec{v} = \hat{e}_{g_1} + \hat{e}_{g_2} + \dots + \hat{e}_{g_n}$:

$$\mathbb{C}\vec{v} = \left\{ c \sum_{i=1}^n \hat{e}_{g_i} \mid c \in \mathbb{C} \right\}$$

y veamos que:

$$\begin{aligned} L_{g_j}(c\vec{v}) &= cL_{g_j} \left(\sum_{i=1}^n \hat{e}_{g_i} \right) \\ &= c \sum_{i=1}^n \hat{e}_{g_j g_i} \\ &= c \sum_{k=1}^n \hat{e}_{g_k} \\ &= c\vec{v}, \text{ siendo } g_k = g_j g_i. \end{aligned}$$

$$\implies L_{g_j}(c\vec{v}) \in \mathbb{C}\vec{v}, \quad \forall g_j \in G, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, $\mathbb{C}\vec{v}$ es un subespacio G -invariante respecto de L , por lo que L debe ser completamente reducible.

Sean $\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^s\}$ las representaciones irreducibles de G , y sean $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_s\}$ sus respectivos caracteres. Entonces,

$$L \sim m_1\varphi^1 \oplus m_2\varphi^2 \oplus \dots \oplus m_s\varphi^s, \text{ con } m_1, m_2, \dots, m_s \in \mathbb{N}.$$

Tomando en cuenta los Teoremas (2.3.6) y (2.4.2), hallamos las multiplicidades m_i :

$$\begin{aligned} m_j &= \langle \chi_L | \chi_j \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_L(g) [\chi_j(g)]^* \\ &= \frac{1}{|G|} \chi_{L(1)} [\chi_j(1)]^* \\ &= \frac{|G|}{|G|} \text{Tr}(\mathbf{1}) \\ &= d_j, \end{aligned}$$

pues d_j es el grado de la representación φ^j , por lo que $\mathbf{1}$ es de tamaño $j \times j$.

$$\therefore L \sim d_1\varphi^1 \oplus d_2\varphi^2 \oplus \dots \oplus d_s\varphi^s.$$

Ahora, evaluemos χ_L en la identidad:

$$\begin{aligned} \chi_L(1) &= d_1\chi_1(1) + d_2\chi_2(1) + \dots + d_s\chi_s(1) \\ \iff |G| &= d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_s^2. \\ \therefore n &= \sum_{j=1}^s d_j^2. \end{aligned}$$

■

De acuerdo con el teorema anterior, es posible obtener todas las representaciones irreducibles y no equivalentes de un grupo finito, reduciendo la representación regular en sus componentes.

Con una elección apropiada de base, las matrices \mathcal{L}_g pueden llevarse a una forma de bloques diagonales: el primer bloque será la representación trivial. Los siguientes d_2 bloques corresponderán a la representación φ^2 ; los siguientes d_3 , a φ^3 , y así sucesivamente.

$$\mathcal{L}_g \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varphi^s \end{pmatrix}.$$

Así, la forma diagonal de \mathcal{L}_g tiene $1 + d_2 + \dots + d_s$ bloques.

Ejemplo 2.4.2. Retomemos la **representación regular de C_3** , introducida en el Ejemplo (2.4.1).

Como toda representación regular, $L : C_3 \rightarrow \mathbb{C}C_3$ es reducible; esto significa que existen subespacios de $\mathbb{C}C_3$ que son invariantes respecto de L .

i. Consideremos el subespacio generado por $\vec{v}_1 = \hat{e}_1 + \hat{e}_g + \hat{e}_{g^2}$:

$$\mathbb{C}\vec{v}_1 = \{k(\hat{e}_1 + \hat{e}_g + \hat{e}_{g^2}) \mid k \in \mathbb{C}\} < \mathbb{C}C_3.$$

Tomando $kv_1 \in \mathbb{C}v_1$ arbitrario, vemos que:

$$\begin{aligned} L_g(kv_1) &= kL_g(\hat{e}_1 + \hat{e}_g + \hat{e}_{g^2}) = k(\hat{e}_g + \hat{e}_{g^2} + \hat{e}_1) = kv_1. \\ L_{g^2}(kv_1) &= kL_{g^2}(\hat{e}_1 + \hat{e}_g + \hat{e}_{g^2}) = k(\hat{e}_{g^2} + \hat{e}_1 + \hat{e}_g) = kv_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbb{C}v_1$ es C_3 -invariante respecto de L . [17]

- ii. Ahora, consideremos el subespacio generado por $v_\omega = \hat{e}_1 + \omega\hat{e}_g + \omega^2\hat{e}_{g^2}$, siendo ω una raíz cúbica de la unidad:

$$\mathbb{C}v_\omega = \{p(\hat{e}_1 + \omega\hat{e}_g + \omega^2\hat{e}_{g^2}) \mid p \in \mathbb{C}\} < \mathbb{C}C_3.$$

Tomando en cuenta que:

$$\begin{aligned} \omega &= e^{i2\pi/3}, \\ \omega^2 &= e^{i4\pi/3}, \\ \omega^3 &= e^{i6\pi/3} = e^{i2\pi} = 1, \\ \implies \omega^{-1} &= e^{-i2\pi/3} = e^{-i2\pi/3}e^{i6\pi/3} = e^{i4\pi/3} = \omega^2, \end{aligned}$$

vemos que:

$$\begin{aligned} L_g(pv_\omega) &= pL_g(\hat{e}_1 + \omega\hat{e}_g + \omega^2\hat{e}_{g^2}) \\ &= p(\hat{e}_g + \omega\hat{e}_{g^2} + \omega^2\hat{e}_1) \\ &= p\omega^{-1}(\hat{e}_1 + \omega\hat{e}_g + \omega^2\hat{e}_{g^2}) \in \mathbb{C}v_\omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{g^2}(pv_\omega) &= pL_{g^2}(\hat{e}_1 + \omega\hat{e}_g + \omega^2\hat{e}_{g^2}) \\ &= p(\hat{e}_{g^2} + \omega\hat{e}_1 + \omega^2\hat{e}_g) \\ &= p\omega(\hat{e}_1 + \omega\hat{e}_g + \omega^2\hat{e}_{g^2}) \in \mathbb{C}v_\omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbb{C}v_\omega$ es C_3 -invariante respecto de L .

- iii. Por último, consideremos el subespacio generado por $v_{\omega^2} = \hat{e}_1 + \omega^2\hat{e}_g + \omega^4\hat{e}_{g^2}$:

$$\mathbb{C}v_{\omega^2} = \{q(\hat{e}_1 + \omega^2\hat{e}_g + \omega^4\hat{e}_{g^2}) \mid q \in \mathbb{C}\} < \mathbb{C}C_3.$$

Tomando en cuenta que:

$$\begin{aligned} \omega^4 &= e^{i8\pi/3} = e^{i2\pi/3}e^{i6\pi/3} = \omega, \\ \omega^5 &= e^{i10\pi/3} = e^{i4\pi/3}e^{i6\pi/3} = \omega^2, \end{aligned}$$

vemos que:

$$\begin{aligned} L_g(pv_{\omega^2}) &= pL_g(\hat{e}_1 + \omega^2\hat{e}_g + \omega^4\hat{e}_{g^2}) \\ &= p(\hat{e}_g + \omega^2\hat{e}_{g^2} + \omega^4\hat{e}_1) \\ &= p\omega(\hat{e}_1 + \omega^2\hat{e}_g + \omega^4\hat{e}_{g^2}) \in \mathbb{C}v_{\omega^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{g^2}(pv_{\omega^2}) &= pL_{g^2}(\hat{e}_1 + \omega^2\hat{e}_g + \omega^4\hat{e}_{g^2}) \\ &= p(\hat{e}_{g^2} + \omega^2\hat{e}_1 + \omega^4\hat{e}_g) \\ &= p\omega^2(\hat{e}_1 + \omega^2\hat{e}_g + \omega^4\hat{e}_{g^2}) \in \mathbb{C}v_{\omega^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbb{C}v_{\omega^2}$ es C_3 -invariante respecto de L .

Los subespacios $\mathbb{C}v_1, \mathbb{C}v_\omega, \mathbb{C}v_{\omega^2}$ son unidimensionales, por lo que las subrepresentaciones que resulten de restringir L a cada $\mathbb{C}v_i$ serán irreducibles.

Además, $v_1, v_\omega, v_{\omega^2}$ son linealmente independientes, por lo que podemos ver que:

$$\mathbb{C}C_3 = \mathbb{C}v_1 \times \mathbb{C}v_\omega \times \mathbb{C}v_{\omega^2}.$$

Denotando por L^i a la representación regular restringida a $\mathbb{C}v_i$, tenemos:

$$L \sim L^1 \oplus L^\omega \oplus L^{\omega^2}.$$

Entonces, existe una transformación $T : \mathbb{C}C_3 \rightarrow \mathbb{C}C_3$ tal que $T^{-1}L_gT = L_g^1 \oplus L_g^\omega \oplus L_g^{\omega^2}$, para toda $g \in C_3$.

Es un resultado del álgebra lineal que la **matriz de diagonalización** de L_g está formada por los eigenvectores de L_g [22].

Como ya vimos, $(1, 1, 1)$, $(1, \omega, \omega^2)$ y $(1, \omega^2, \omega^4)$ son los eigenvectores de L_g y de L_{g^2} , por lo que la matriz de diagonalización es:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{pmatrix}. \\ \implies \mathcal{T}^{-1} &= \frac{1}{3\omega^2 - 3\omega} \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega & \omega^2 - \omega & \omega^2 - \omega \\ \omega^2 - \omega & \omega - 1 & 1 - \omega^2 \\ \omega^2 - \omega & 1 - \omega^2 & \omega - 1 \end{pmatrix}. \\ \implies \mathcal{T}^{-1}L_g\mathcal{T} &\propto \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega & \omega^2 - \omega & \omega^2 - \omega \\ \omega^2 - \omega & \omega - 1 & 1 - \omega^2 \\ \omega^2 - \omega & 1 - \omega^2 & \omega - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\omega^2 - 3\omega & 0 & 0 \\ 0 & 3 - 3\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega - 3 \end{pmatrix}. \\ \therefore \mathcal{T}^{-1}L_g\mathcal{T} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_g^1 & 0 & 0 \\ 0 & L_g^\omega & 0 \\ 0 & 0 & L_g^{\omega^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De igual manera,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{-1}L_{g^2}\mathcal{T} &\propto \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega & \omega^2 - \omega & \omega^2 - \omega \\ \omega^2 - \omega & \omega - 1 & 1 - \omega^2 \\ \omega^2 - \omega & 1 - \omega^2 & \omega - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\omega^2 - 3\omega & 0 & 0 \\ 0 & 3\omega - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 - 3\omega^2 \end{pmatrix}. \\ \therefore \mathcal{T}^{-1}L_{g^2}\mathcal{T} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{g^2}^1 & 0 & 0 \\ 0 & L_{g^2}^\omega & 0 \\ 0 & 0 & L_{g^2}^{\omega^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En algunos textos, las subrepresentaciones irreducibles de la Representación Regular L son llamadas **ideales** (*ideals*), y están definidas sobre los subespacios de $\mathbb{C}G$ generados por vectores llamados **idempotentes** (*idempotents*) [3]. Así, las constituyentes L^1, L^2, L^3 de L en el ejemplo anterior son los ideales de C_3 y actúan sobre los subespacios generados por los idempotentes $\vec{v}_1, \vec{v}_\omega, \vec{v}_{\omega^2}$.

2.5. Tablas de Young

Para concluir el capítulo, revisaremos una herramienta combinatorial, introducida por Alfred Young en 1900, que nos permite representar al grupo simétrico S_n y al grupo general lineal GL_n .

Los diagramas y las tablas de Young son ampliamente usadas en las áreas de física de partículas, química cuántica y estado sólido. Nos permiten conocer la dimensión de una representación, así como encontrar todas las representaciones irreducibles de los subgrupos de GL_n que más se emplean en física: SO_n y SU_n .

El propósito de esta sección es conocer las definiciones y técnicas básicas para escribir tablas de Young, y así aplicarlas en el estudio de grupos concretos.

Definición 2.5.1. Una **partición** de $n \in \mathbb{N}$ es una tupla $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$, con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l \in \mathbb{N}$, que satisface:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{l-1} \geq \lambda_l. \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l &= n. \end{aligned}$$

Es decir, si λ es una partición de n , entonces λ es una tupla de números naturales ordenados de forma descendente, cuya suma es igual a n . En este caso, escribimos:

$$\lambda \vdash n.$$

Por ejemplo, si $n = 6$, entonces $(2, 2, 1, 1)$ es una partición de n , pues:

$$2 \geq 2 \geq 1 \geq 1 \quad \wedge \quad 2 + 2 + 1 + 1 = 6.$$

Por otro lado, si $n = 4$, entonces $(3, 1)$ es una partición de n , pero $(1, 2, 1)$ **no** es una partición de n , pues no está ordenada de forma descendente.

Ahora, consideremos el grupo simétrico S_n . Como vimos en la sección (1.4), toda permutación $\sigma \in S_n$ puede escribirse como un producto de ciclos disjuntos:

$$\sigma = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_l, \tag{2.51}$$

Donde cada ciclo β_i tiene longitud λ_i . Esto motiva la siguiente:

Definición 2.5.2. Sea σ una permutación en S_n , cuya factorización en ciclos disjuntos está dada por la Ecuación (2.51). Entonces, podemos asignar a σ una partición:

$$\Lambda(\sigma) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l),$$

donde las λ_i corresponden a las longitudes de los ciclos de σ , escritos en orden descendente. Entonces, a $\Lambda(\sigma)$ se le llama **tipo de ciclo de σ** .

***Nota:** Es necesario que incluyamos los ciclos de longitud 1 en la factorización (2.51) para que, efectivamente, $\Lambda(\sigma) \vdash n$. De lo contrario, no se cumpliría que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = n$.

Ejemplo 2.5.1. Consideremos el grupo S_5 , que consta de $5! = 120$ permutaciones.

Encontraremos los tipos de ciclo de algunas permutaciones en particular, denotando por Λ_i a la tupla $\Lambda(\sigma_i)$:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (1 \ 2) (5 \ 3 \ 4) \implies \Lambda_1 = (3, 2). \\ \sigma_2 &= (1 \ 2 \ 3) = (1 \ 2 \ 3) (4)(5) \implies \Lambda_2 = (3, 1, 1). \\ \sigma_3 &= (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5) \implies \Lambda_3 = (5). \\ \sigma_4 &= (1 \ 2) (3 \ 4) = (1 \ 2) (3 \ 4) (5) \implies \Lambda_4 = (2, 2, 1). \end{aligned}$$

Notemos que el tipo de ciclo es una partición que se obtiene de manera natural para cada permutación $\sigma \in S_n$. Esto indica que la relación $\sigma \mapsto \Lambda$ es **inyectiva**, pero no siempre será **sobreyectiva**, pues dos particiones con la misma estructura de ciclo serán asignadas a la misma partición.

En la sección (1.4), vimos que dos permutaciones son conjugadas si y sólo si tienen la misma estructura de ciclo. Como consecuencia de esto, tenemos el siguiente:

Proposición 2.5.1. Sean $\sigma, \tau \in S_n$. Entonces,

$$\sigma = \beta \tau \beta^{-1} \iff \Lambda(\sigma) = \Lambda(\tau). \tag{2.52}$$

Esto implica que Λ es **constante** en las **clases de conjugación** y que el número de representaciones irreducibles y no equivalentes de S_n es igual al número de particiones de n .

La Ecuación (2.52) se sigue del hecho de que σ y τ tienen la misma estructura de ciclo, y Λ sólo depende de las longitudes de los ciclos que aparecen en sus factorizaciones.

Además, si $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_s$ son las clases de equivalencia de S_n , entonces existe al menos una representación irreducible φ^j en cada ζ_j , por los Teoremas (2.1.6), (2.1.5). Por lo tanto, la relación entre representaciones irreducibles de S_n y particiones de n es biyectiva:

$$|\{\Lambda(\sigma) \mid \sigma \in S_n\}| = |\{\varphi^1, \dots, \varphi^s \mid \varphi^j \text{ es irreducible} \wedge \varphi^j \in \zeta_j\}| = s.$$

Comúnmente, las particiones de un natural n se representan mediante diagramas de n cuadrados.

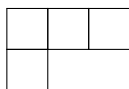
Definición 2.5.3. Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ una partición de n . Entonces, llamamos **diagrama de Young de λ** al diagrama de n cuadrados acomodados en l filas, donde la fila i -ésima consta de λ_i cuadrados.

El diagrama de Young de cada partición es **único**. Es decir, cualquier diagrama que conste de n cuadrados en l filas, acomodados de manera que el número de cuadrados en cada fila sea **no creciente** (de arriba hacia abajo), es el diagrama de Young de una única partición de n .

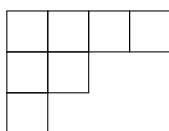
Por lo tanto, es posible hallar un diagrama a partir de su partición asociada, o una partición a partir de su respectivo diagrama.

Ejemplo 2.5.2.

- i. Consideremos la partición $\lambda = (3, 1)$ de $n = 4$. Su diagrama de Young tendrá tres cuadrados en la primera fila y un cuadro en la segunda:



- ii. Ahora, encontremos la partición correspondiente al siguiente diagrama de Young:



Veamos que el número total de cuadrados es $n = 7$; la primera fila tiene $\lambda_1 = 4$ cuadrados, la segunda tiene $\lambda_2 = 2$, y la tercera tiene $\lambda_3 = 1$. Por lo tanto,

$$\lambda = (4, 2, 1) \vdash 7$$

Es la partición que corresponde a este diagrama.

Definición 2.5.4. Si $\lambda \vdash n$, entonces llamamos **partición conjugada de λ** a la partición cuyo diagrama de Young es el traspuesto del diagrama de λ , y la denotamos por λ^T .

Es decir, el diagrama de λ^T se obtiene intercambiando las filas y las columnas de λ .

Ejemplo 2.5.3. Encontremos las conjugadas de las particiones del Ejemplo (2.5.2).

- i. Llamemos λ_{ij} al cuadrado en la fila i -ésima y la columna j -ésima del diagrama de λ . Entonces, λ_{ji} serán las entradas del diagrama de λ^T .

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \hline \lambda_{21} & & \\ \hline \end{array} \implies \lambda^T = \begin{array}{|c|c|} \hline \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \hline \lambda_{12} & \\ \hline \lambda_{13} & \\ \hline \end{array}$$

Por lo tanto, $\lambda^T = (2, 1, 1)$ es la conjugada de $\lambda = (3, 1)$. Notemos que, si λ es una partición de n , λ^T también.

- ii. Ahora, encontremos la partición conjugada de $\lambda = (4, 2, 1)$:

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \hline \lambda_{21} & \lambda_{22} & & \\ \hline \lambda_{31} & & & \\ \hline \end{array} \implies \lambda^T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \hline \lambda_{12} & \lambda_{22} & \\ \hline \lambda_{13} & & \\ \hline \lambda_{14} & & \\ \hline \end{array}$$

Por lo tanto, $\lambda^T = (3, 2, 1, 1)$.

Con el propósito de comparar las diferentes particiones de un número, inducimos un criterio de orden:

Definición 2.5.5 (Orden de dominación). Dadas 2 particiones $\lambda, \mu \vdash n$, decimos que λ **domina** a μ si, para toda $i \in \mathbb{N}$, las primeras i filas del Diagrama de Young de λ poseen tantos o más cuadrados que las primeras i filas del Diagrama de Young de μ .

De ser así, escribimos $\lambda \geq \mu$.

En otras palabras, si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ y $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ son particiones de n , entonces $\lambda \geq \mu$ si

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.53}$$

Si $i > l$, entonces tomamos $\lambda_i = 0$, y si $i > m$, entonces tomamos $\mu_i = 0$.

Proposición 2.5.2. El orden de dominación de las particiones tiene las siguientes propiedades:

- **Reflexividad:** $\lambda \geq \lambda$.
- **Antisimetría:** $\lambda \geq \mu \wedge \mu \geq \lambda \implies \lambda = \mu$.
- **Transitividad:** $\lambda \geq \mu \wedge \mu \geq \nu \implies \lambda \geq \nu$.

Ejemplo 2.5.4.

- i. Consideremos las siguientes particiones de $n = 6$:

$$\lambda = (5, 1) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array}, \quad \mu = (3, 3) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}.$$

Para $i = 1 : \lambda_1 = 5 \wedge \mu_1 = 3 \implies \lambda_1 > \mu_1$.

Para $i = 2 : \lambda_1 + \lambda_2 = 6 = \mu_1 + \mu_2$.

$\therefore \lambda \geq \mu$.

ii. Ahora, consideremos las siguientes particiones de $n = 7$:

$$\lambda = (3, 3, 1) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}, \quad \mu = (4, 1, 1, 1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}.$$

Para $i = 1 : \lambda_1 = 4 \wedge \mu_1 = 3 \implies \lambda_1 > \mu_1$.

Para $i = 2 : \lambda_1 + \lambda_2 = 5 \wedge \mu_1 + \mu_2 = 6 \implies \lambda_1 + \lambda_2 < \mu_1 + \mu_2$.

Para $i = 3 : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6 \wedge \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 7 \implies \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$.

Por lo tanto, no es posible establecer un orden en estas particiones, pues no se satisface la Ecuación (2.53) para toda i .

iii. Las siguientes particiones de $n = 4$ pueden ordenarse como:

$$(4) \geq (3, 1) \geq (2, 2) \geq (2, 1, 1) \geq (1, 1, 1, 1).$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \geq \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \geq \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \geq \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \geq \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

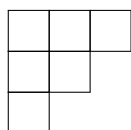
Como ya vimos, es posible obtener un diagrama de Young $\Lambda(\sigma)$ a partir de una permutación $\sigma \in S_n$. Ahora, veremos que es posible **representar** a la permutación σ mediante este tipo de arreglo.

Definición 2.5.6. Sea λ una partición de n . Entonces, una **tabla de Young** de forma λ o **λ -tabla** es un arreglo obtenido al acomodar los números $\{1, 2, \dots, n\}$ en los cuadrados del diagrama de Young de λ .

Existen $n!$ λ -tablas: cada una corresponde a un ordenamiento diferente de $\{1, 2, \dots, n\}$, es decir, a una permutación en S_n .

Ejemplo 2.5.5. Consideremos $\lambda = (3, 2, 1) \vdash 6$.

Existen $6! = 720$ tablas de Young de forma λ , que pueden obtenerse al acomodar los números $\{1, 2, \dots, 6\}$ en los cuadrados del siguiente diagrama:



Algunas tablas de Young de forma λ son:

1	2	3
4	5	
6		

,

3	5	1
4	2	
6		

,

6	2	1
3	4	
5		

, etc.

Introduciremos un tipo particular de λ -tablas, que serán necesarias para encontrar las representaciones irreducibles de S_n :

Definición 2.5.7. Una **tabla de Young estándar** es aquella cuyas entradas tienen un orden ascendente en cada una de sus filas y columnas.

Por ejemplo, las únicas tablas de Young estándar para $\lambda = (2, 1)$ son:

1	2
3	

,

1	3
2	

.

En el caso $\lambda = (3, 3, 2, 1) \vdash 9$, una tabla de Young estándar es:

1	2	4
3	5	6
7	8	
9		

y una tabla no estándar es:

3	1	4
2	9	6
8	5	
7		

.

Como mencionamos al inicio de la sección, las tablas de Young se usan para representar al grupo simétrico S_n y, por tanto, a cualquier grupo de orden n , ya que, por el Teorema de Cayley, éste puede insertarse como subgrupo de S_n (1.4.8).

Para poder hallar la forma explícita de tales representaciones, serán necesarias las siguientes proposiciones (por ahora omitiremos sus pruebas, pues resultan demasiado técnicas):

Proposición 2.5.3. Sean $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ particiones de n .

Si T^λ es una λ -tabla y S^μ es una μ -tabla, tales que las entradas en la misma fila de S^μ están localizadas en diferentes columnas de T^λ , entonces podemos hallar una λ -tabla U^λ tal que:

- i. Las columnas j -ésimas de T^λ y de U^λ contienen los mismos elementos, para cada $j = 1, 2, \dots, l$.

Esto significa que cada columna de U^λ se puede obtener permutando los elementos en cada columna de T^λ .

- ii. Las entradas de las primeras i filas de S^μ pertenecen a las primeras i filas de U^λ , para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

Ilustremos esta Proposición con un ejemplo:

Ejemplo 2.5.6. Sean $\lambda, \mu \vdash 8$ y T^λ, S^μ tablas de forma λ, μ , dadas por:

$$T^\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 8 & 5 & 4 & 2 & 7 \\ \hline 1 & 3 & & & \\ \hline 6 & & & & \\ \hline \end{array}, \quad S^\mu = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & & \\ \hline 7 & 8 & & \\ \hline \end{array}.$$

Notemos que ningún par de elementos en la misma fila de S^μ pertenece a la misma columna de T^λ .

Ahora, ¿cómo encontramos la tabla U^λ ?

Debemos permutar los elementos de la misma columna de T^λ de manera apropiada, para que las primeras i filas de U^λ tengan los mismos elementos que las primeras i filas de S^μ .

Para la primera fila ($i = 1$), intercambiamos $1 \leftrightarrow 8, 3 \leftrightarrow 5$.

Para la segunda fila ($i = 2$), intercambiamos $6 \leftrightarrow 8$.

$$T^\lambda \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 2 & 7 \\ \hline 8 & 5 & & & \\ \hline 6 & & & & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 2 & 7 \\ \hline 6 & 5 & & & \\ \hline 8 & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore U^\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 2 & 7 \\ \hline 6 & 5 & & & \\ \hline 8 & & & & \\ \hline \end{array}.$$

La principal aplicación de la proposición anterior es el siguiente criterio de orden:

Lema 2.5.4 (Lema de dominación). Sean λ y μ particiones de n y sean T^λ, S^μ Tablas de Young de formas λ y μ , respectivamente.

Si los números en la misma fila de S^μ están localizados en columnas diferentes de T^λ , entonces $\lambda \geq \mu$.

Dem. Sean $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$. Por la Proposición (2.5.3), podemos encontrar una λ -tabla U_λ , tal que las entradas de las primeras i filas de S_μ estén en las primeras i filas de U_λ .

Como $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i$ es el número de entradas en las primeras i filas de U_λ y $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i$ es el número de entradas en las primeras i filas de S_μ , tenemos:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\therefore \lambda \geq \mu,$$

Por la Definición (2.5.5). ■

Si $\lambda \vdash n$, entonces S_n actúa sobre el conjunto de λ -tablas. Así, denotamos por σT a la tabla que resulta de aplicar σ a las entradas de T .

Por ejemplo:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \quad \sigma = (1\ 3\ 2)$$

$$\implies \sigma T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 4 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}.$$

Es decir, si T_{ij} es el valor del cuadro j -ésimo en la fila i -ésima, entonces $\sigma(T_{ij})$ será el valor de σT en esa posición.

Ahora, consideremos $X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces, S_X es el subgrupo de S_n que permuta a los elementos de X y fija todos los que están fuera de X . Por ejemplo, $S_{\{2,3\}} = \{(1), (2\ 3)\}$ es el subgrupo de S_n que fija $\{1, 4, 5, \dots, n\}$.

Tomando esto en cuenta, formulamos la siguiente:

Definición 2.5.8. Sea T una Tabla de Young. Entonces, llamamos **estabilizador de columna** de T al subgrupo de S_n que consta de todas las permutaciones que preservan las columnas de T , y lo denotamos por C_T .

Es decir, $\sigma \in C_T$ si y sólo si $\sigma(i)$ pertenece a la misma columna que i , para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

De manera análoga, definimos al **estabilizador de fila** de T como el subgrupo de S_n que consta de todas las permutaciones que preservan las filas de T , y lo denotamos por F_T .

Ejemplo 2.5.7. Sea $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline \end{array}$. Entonces, los subgrupos de S_7 que preservan las columnas

de T son:

$$S_{\{1,4,2\}} = \{(1), (1\ 4\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4), (4\ 2), (1\ 2)\}.$$

$$S_{\{3,5,6\}} = \{(1), (3\ 5\ 6), (3\ 6\ 5), (3\ 5), (3\ 6), (5\ 6)\}.$$

$$S_{\{7\}} = (1).$$

$$\implies C_T = S_{\{1,4,2\}} \times S_{\{3,5,6\}},$$

$$|C_T| = |S_{\{1,4,2\}}| |S_{\{3,5,6\}}| = 36.$$

De la misma manera, se puede ver que los subgrupos de S_7 que preservan las filas de T son $S_{\{1,3,7\}}$, $S_{\{4,5\}}$ y $S_{\{2,6\}}$, por lo que:

$$F_T = S_{\{1,3,7\}} \times S_{\{4,5\}} \times S_{\{2,6\}},$$

$$|F_T| = (3!)(2!)(2!) = 24.$$

Ahora veremos que es posible agrupar las λ -tablas de acuerdo a un criterio de equivalencia, el cual nos permitirá desarrollar el resto de la sección.

Definición 2.5.9 (Equivalencia de λ -tablas). Sean T_1, T_2 Tablas de Young de forma λ , cuyas entradas en cada fila son iguales; es decir, T_2 puede obtenerse de T_1 reordenando los números en sus filas.

Entonces, decimos que T_1 y T_2 son **equivalentes**, y lo denotamos por $T_1 \sim T_2$.

Por ejemplo, las siguientes tablas de forma $\lambda = (3, 2)$ son equivalentes:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array} \sim \dots$$

Definición 2.5.10. Una **clase de equivalencia** de las λ -tablas, dada por la Definición (2.5.9), es llamada **λ -tabloide** o tabloide de Forma λ .

Denotamos por $[T]$ al tabloide de una tabla T , y por \mathcal{T}^λ al conjunto de todos los tabloides de forma λ :

$$[T] = \{S \mid S \sim T\}.$$

$$\mathcal{T}^\lambda = \{[T] \mid T \text{ es una } \lambda\text{-tabla}\}.$$

Así, si T es una tabla de forma $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$, dada por:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline T_{11} & T_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & T_{1\lambda_1} \\ \hline T_{21} & T_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & & T_{2\lambda_2} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \hline T_{l1} & T_{l2} & \cdots & T_{l\lambda_l} & & & \\ \hline \end{array},$$

Entonces escribimos el tabloide asociado a T como:

$$[T] = \frac{\begin{array}{cccccc} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \cdots & & T_{1\lambda_1} \end{array}}{\begin{array}{cccccc} T_{21} & T_{22} & \cdots & & & T_{2\lambda_2} \end{array}} \cdot \dots \frac{\begin{array}{cccc} T_{l1} & \cdots & & T_{l\lambda_l} \end{array}}{\dots}$$

Además, denotamos por $[T]_\lambda$ al tabloide de forma λ que tiene los números $\{1, 2, \dots, \lambda_1\}$ en la primera fila, los números $\{\lambda_1 + 1, \lambda_1 + 2, \dots, \lambda_1 + \lambda_2\}$ en la segunda, y, en general, los números

$$\{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + 1, \lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + 2, \dots, \lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_i\}$$

en la fila i -ésima.

En otras palabras, $[T]_\lambda$ es el tabloide correspondiente a la tabla que tiene el número j en el cuadro j -ésimo.

Ejemplo 2.5.8.

i. Consideremos la tabla de forma $\lambda = (3, 2)$, dada por:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}.$$

Entonces, $[T]_{(3,2)}$ consta de todas las tablas que tienen los números $\{1, 2, 3\}$ en la primera fila y $\{4, 5\}$ en la segunda:

$$[T]_{(3,2)} = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline \end{array}, \dots \right\}.$$

$$\implies |[T]_{(3,2)}| = |S_{\{1,2,3\}}| |S_{\{4,5\}}| = (3!)(2!) = 24,$$

pues existen tantas λ -tablas equivalentes a T como permutaciones de $\{1, 2, 3\}$ y de $\{4, 5\}$.

ii. Ahora, consideremos $\lambda = (4, 2, 1)$. Entonces,

$$[T]_{(4,2,1)} = \left\{ T : T \sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\implies |[T]_{(4,2,1)}| = |S_{\{1,2,3,4\}}| |S_{\{5,6\}}| = (4!)(2!) = 48.$$

Como podemos ver en el ejemplo anterior, si aplicamos todas las permutaciones $\sigma \in F_T$ a la tabla T , siendo F_T el estabilizador de fila de T , obtenemos todos los elementos del tabloide $[T]_\lambda$.

Formalizamos este resultado en la siguiente:

Proposición 2.5.5. Sean $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n$ y T una λ -tabla. Entonces, el **estabilizador de fila F_T preserva** al tabloide $[T]$.

Esto es:

$$\begin{aligned} T \in [T] \wedge \sigma \in F_T \\ \implies \sigma T \in [T]. \end{aligned}$$

Más aún, el estabilizador de fila correspondiente a $[T]_\lambda$ es:

$$F_{[T]_\lambda} = S_{\{1,2,\dots,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1, \lambda_1+2, \dots, \lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times S_{\{\lambda_1+\dots+\lambda_{l-1}+1, \lambda_1+\dots+\lambda_{l-1}+2, \dots, n\}}.$$

Como $F_T \leq S_n$, podemos considerar las clases laterales de F_T en S_n :

$$\sigma F_T = \{\sigma\tau \mid \tau \in F_T\}, \text{ para cada } \sigma \in S_n.$$

A excepción de la clase lateral identidad, las clases laterales de F_T en S_n sí permutan a las columnas de la tabla T y, por tanto, no dejan invariantes al tabloide $[T]$.

Entonces, podemos obtener todos los tabloides de forma λ aplicando $\sigma \notin F_T$ a la λ -tabla T .

$$\therefore |\mathcal{T}^\lambda| = [S_n : F_T].$$

Es decir, hay tantos λ -tabloides como clases laterales de F_T en S_n .

Además, notemos que existen $\lambda_1!$ maneras de permutar los elementos de la primera fila de T , $\lambda_2!$ maneras de permutar los elementos de la segunda, etc. Por lo tanto, la cantidad de permutaciones en F_T es $\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_l!$.

Así, tomando en cuenta el Teorema de Lagrange (1.2.4), tenemos:

$$|\mathcal{T}^\lambda| = \frac{|S_n|}{|F_T|} = \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_l!}.$$

Ejemplo 2.5.9. Volvamos a considerar el tabloide $[T]_{(3,2)}$ del Ejemplo (2.5.8), que es invariante ante:

$$F_T = S_{\{1,2,3\}} \times S_{\{4,5\}} < S_5.$$

Tomando $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline \end{array} \in [T]_{(3,2)}$ y $\sigma = (1\ 2)(4\ 5) \in F_T$, vemos que:

$$\sigma T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array} \sim T \implies \sigma T \in [T]_{(3,2)}.$$

Otro tabloide de forma $\lambda = (3, 2)$ es la clase de equivalencia de:

$$U = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 1 & \\ \hline \end{array}.$$

$$\implies [U] = \left\{ U, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 4 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array}, \dots \right\}.$$

Podemos hallar el número de λ -tabloides con:

$$|\mathcal{T}^{(3,2)}| = \frac{|S_5|}{|F_T|} = \frac{5!}{(3!)(2!)} = 20.$$

Las clases laterales de F_T en S_5 son de la forma:

$$\tau F_T = \{\tau\sigma \mid \tau \text{ permuta las filas de } T \text{ y } \sigma \text{ las fija}\}.$$

Por ejemplo, una clase lateral de F_T en S_5 es $(1\ 2\ 4)F_T$. Tomando $(1\ 2\ 4)(1\ 2)(4\ 5) \in (124)F_T$, vemos que:

$$(1\ 2\ 4)(1\ 2)(4\ 5)T = (1\ 2\ 4) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline \end{array} \notin [T]_{(3,2)}.$$

Finalmente, fijémonos en 2 tablas $U \sim U' \in [U]$:

$$\tau U = (1\ 2\ 4) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 1 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline \end{array}.$$

$$\tau U' = (1\ 2\ 4) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}.$$

$$\implies \tau U \sim \tau U' \in [\tau U].$$

Generalizamos este resultado para dos tablas equivalentes cualesquiera en la siguiente proposición:

Proposición 2.5.6. Sean T_1 y T_2 tablas de Young equivalentes. Entonces, $\sigma T_1 \sim \sigma T_2$, para toda $\sigma \in S_n$.

Además, S_n actúa en el conjunto de λ -tabloides \mathcal{T}^λ como:

$$\sigma [T] = [\sigma T] = \text{Clase de equivalencia de } \sigma T.$$

Recordemos que toda representación de un grupo debe actuar sobre un espacio vectorial. Para definir las representaciones de nuestro interés, será necesario construir un espacio vectorial a partir de los λ -tabloides:

Proposición 2.5.7. Sea $\mathcal{T}^\lambda = \{[T_1], [T_2], \dots, [T_m]\}$ el conjunto de tabloides de forma λ . Entonces, el conjunto de combinaciones lineales de tipo:

$$c_1 [T_1] + c_2 [T_2] + \dots + c_m [T_m], \text{ con } c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{C},$$

forma un espacio vectorial, al que denotamos por \mathcal{M}^λ ó $\mathbb{C}\mathcal{T}^\lambda$.

Así, \mathcal{M}^λ es un espacio de dimensión m , con base $\mathcal{T}^\lambda = \{[T_1], [T_2], \dots, [T_m]\}$.

En algunos textos, \mathcal{M}^λ es llamado **módulo de permutaciones** correspondiente a λ , pues, formalmente, se trata de un módulo sobre el anillo de los números complejos.

Proposición 2.5.8. Si $\lambda \vdash n$, entonces el homomorfismo $\varphi^\lambda : S_n \longrightarrow GL(\mathcal{M}^\lambda)$ dado por:

$$\varphi_\sigma^\lambda : [T] \longmapsto \sigma [T] = [\sigma T]$$

es una **representación de S_n** sobre el espacio de tabloides \mathcal{M}^λ .

Es decir, φ^λ asigna a cada $\sigma \in S_n$ una transformación lineal que **permuta** a los tabloides en \mathcal{T}^λ .

Podemos probar que, efectivamente, φ^λ es una representación de S_n , pues

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma\tau}^\lambda([T_i]) &= [\sigma\tau T_i] = \sigma [\tau T_i] = \varphi_\sigma^\lambda \varphi_\tau^\lambda [T_i] \\ \implies \varphi^\lambda(\sigma\tau) &= \varphi^\lambda(\sigma)\varphi^\lambda(\tau), \end{aligned}$$

para cualesquiera $\sigma, \tau \in S_n$.

Ejemplo 2.5.10. Consideraremos diferentes particiones de $n = 5$; cada una proporcionará una representación diferente de S_5 sobre \mathcal{M}^λ .

- Sean $\lambda = (5)$ y T una (5)-Tabla.

Entonces, existe un sólo (5)-tabloide $[T]$, pues toda permutación $\sigma \in S_5$ preserva la única fila de T . Así, $[T]$ consta de $5!$ tablas y $\mathcal{T}^{(5)}$ consta de un solo tabloide.

De la misma manera, si $\lambda = (n)$, entonces existe un solo (n)-tabloide, que a su vez cuenta con $n!$ (n)-tablas:

$$|[T]| = n!, \quad |\mathcal{T}^{(n)}| = 1.$$

Por lo tanto, $\mathcal{M}^{(n)}$ es un espacio de dimensión 1 y $\varphi^{(n)}$ es la **representación trivial** de S_n , pues:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(n)} &\cong \mathbb{C} \\ \varphi_\sigma^{(n)} : [T] &\mapsto [\sigma T] = [T]. \\ \implies \varphi^{(n)} &= id. \end{aligned}$$

- Ahora, consideremos $\lambda = (4, 1)$. Entonces, dos (4, 1)-tablas son equivalentes si y sólo si tienen la misma entrada en su segunda fila; por ejemplo:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array} \sim \dots$$

Por tanto, la entrada de la segunda fila determina completamente al (4, 1)-tabloide.

Existen $4!$ tablas en cada tabloide $[T]$ y cinco tabloides en $\mathcal{T}^{(4,1)}$:

$$\mathcal{T}^{(4,1)} = \left\{ \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array}}, \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}}, \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}}, \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}}, \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}} \right\}.$$

De la misma manera, si $\lambda = (n - 1, 1)$, entonces existen $(n - 1)!$ λ -tablas equivalentes y $\mathcal{T}^{(n-1,1)}$ consta de n tabloides, obtenidos al colocar cada $i = 1, 2, \dots, n$ en la segunda fila de $[T]$.

Entonces, podemos establecer una biyección entre $\mathcal{T}^{(n-1,1)}$ y el conjunto de naturales $\{1, 2, \dots, n\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Dim. } \mathcal{M}^{(n-1,1)} = n &\implies \mathcal{M}^{(n-1,1)} \sim \mathbb{C}^n. \\ \implies \varphi^{(n-1,1)} : S_n &\longrightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ \sigma &\longmapsto \varphi_\sigma^{(n-1,1)}. \end{aligned}$$

Denotando por $[T_i]$ al tabloide que tiene el número i en la segunda fila, vemos que la acción de σ sobre $\mathcal{M}^{(n-1,1)}$ está dada por:

$$\varphi_\sigma^{(n-1,1)}([T_i]) = \sigma [T_i] = \begin{cases} [T_i], & \text{si } \sigma(i) = i. \\ [T_j], & \text{si } \sigma(i) = j. \end{cases}$$

Recordemos que las matrices de permutación actúan sobre la base de \mathbb{C}^n como:

$$\mathcal{P}_\sigma(\hat{e}_i) = \begin{cases} \hat{e}_i, & \text{si } \sigma(i) = i. \\ \hat{e}_j, & \text{si } \sigma(i) = j. \end{cases}$$

Por lo tanto, $\varphi^{(n-1,1)}$ coincide con la representación estándar de S_n , dada por las matrices de permutación $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$.

- Ahora, consideremos $\lambda = (3, 2)$. Entonces, los $(3, 2)$ -tabloides son:

$$[T]_{1,2} = [T]_{2,1} = \frac{\overline{3 \ 4 \ 5}}{\overline{1 \ 2}}$$

$$[T]_{1,3} = [T]_{3,1} = \frac{\overline{2 \ 4 \ 5}}{\overline{1 \ 3}}$$

$$[T]_{1,4} = [T]_{4,1} = \frac{\overline{2 \ 3 \ 5}}{\overline{1 \ 4}}$$

...

Cada $(3, 2)$ -tabloide cuenta con $(3!)(2!) = 12$ tablas.

Además, la elección de dos elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ determina a cada tabloide y $[T]_{ij} = [T]_{ji}$, por lo que existen $\frac{1}{2} \binom{5}{2} = 10$ tabloides de forma $(3, 2)$.

En general, si $\lambda = (n-2, 2)$, entonces se puede establecer una biyección entre los $(n-2, 2)$ -tabloides y los subconjuntos de dos elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$. Así:

$$\begin{aligned} |[T]_{i,j}| &= (n-2)!2! \\ |\mathcal{F}^{(n-2,2)}| &= \frac{1}{2} \binom{n}{2} = \frac{n!}{(2)(2!)(n-2)!}. \end{aligned}$$

La acción de $\varphi^{(n-2,2)}$ está dada por:

$$\varphi_\sigma^{(n-2,2)}([T]_{i,j}) = [T]_{k,l}, \text{ si } \sigma(i) = k \wedge \sigma(j) = l.$$

Así, $[T]_{i,j}$ es invariante ante $\varphi_\sigma^{(n-2,2)}$ si y sólo si $\sigma(i), \sigma(j) \in \{i, j\}$.

En conclusión, cada partición $\lambda \vdash n$ brinda una representación φ^λ del grupo simétrico S_n , asignando a cada $\sigma \in S_n$ una transformación lineal φ_σ^λ que actúa sobre los λ -tabloides $[T]$.

Proposición 2.5.9. Las representaciones $\{\varphi^\lambda : S_n \longrightarrow GL(\mathcal{M}^\lambda) \mid \lambda \vdash n\}$ son **unitarias**.

Dem. Recordemos que una representación sobre V es unitaria si y sólo si preserva el producto interno de V .

Podemos definir un producto interno sobre $\mathcal{M}^\lambda = \mathbb{C}\mathcal{T}^\lambda$, que coincida con el producto (2.32):

$$\langle [T] | [S] \rangle = \frac{1}{|S_n|} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma [T] (\sigma [S])^*,$$

con $[T], [S] \in \mathcal{T}^\lambda$.

$$\begin{aligned} \implies \langle \varphi_\tau^\lambda([T]) | \varphi_\tau^\lambda([S]) \rangle &= \frac{1}{|S_n|} \sum_{\sigma \in S_n} \varphi_\tau^\lambda(\sigma [T]) [\varphi_\tau^\lambda(\sigma [S])]^* \\ &= \frac{1}{|S_n|} \sum_{\sigma \in S_n} \tau \sigma [T] (\tau \sigma [S])^* \\ &= \frac{1}{|S_n|} \sum_{\pi \in S_n} \pi [T] (\pi [S])^* \\ &= \langle [T] | [S] \rangle, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $\pi = \tau \sigma$.

Por lo tanto, φ^λ es una representación unitaria, para toda $\lambda \vdash n$. ■

En general, las representaciones $\{\varphi^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ no son irreducibles; sin embargo, es posible hallar su descomposición en constituyentes irreducibles. Para ello, generaremos un subespacio S_n -invariante a partir de ciertos elementos de \mathcal{M}^λ .

Definición 2.5.11. Sean λ, μ particiones de n , T una λ -tabla y S una μ -tabla. Entonces, definimos la transformación lineal $A_T : \mathcal{M}^\mu \rightarrow \mathcal{M}^\mu$ como:

$$\begin{aligned} A_T &= \sum_{\sigma \in C_T} \text{sgn}(\sigma) \varphi_\sigma^\mu. \\ \implies A_T([S]) &= \sum_{\sigma \in C_T} \text{sgn}(\sigma) \varphi_\sigma^\mu([S]) = \sum_{\sigma \in C_T} \text{sgn}(\sigma) [\sigma S]. \end{aligned}$$

En particular, si $\lambda = \mu$, entonces llamamos **politabloide asociado a T** a la imagen de $[T]$ bajo A_T , y lo denotamos por E_T :

$$E_T := A_T([T]) = \sum_{\sigma \in C_T} \text{sgn}(\sigma) \varphi_\sigma^\lambda([T]) = \sum_{\sigma \in C_T} \text{sgn}(\sigma) [\sigma T].$$

Notemos que $E_T \in \mathcal{M}^\lambda$, para toda λ -tabla T .

Ejemplo 2.5.11. Sean $\lambda = (4, 1)$ y $\mu = (3, 2)$, y sean T y S tablas de forma λ y μ , respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned} T &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}, & S &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 1 & \\ \hline \end{array}. \\ \implies [T] &= \frac{\overline{2 \ 3 \ 4 \ 5}}{\underline{1}}, & [S] &= \frac{\overline{2 \ 3 \ 4}}{\underline{5 \ 1}}. \end{aligned}$$

El estabilizador de columna C_T consta de dos permutaciones: $C_T = S_{\{1,2\}} = \{(1), (1\ 2)\}$.

$$\begin{aligned} \implies A_T([S]) &= \sum_{\sigma \in S_{\{1,2\}}} \text{sgn}(\sigma) \varphi_\sigma^{(3,2)}([S]) \\ &= (1)[S] - (1\ 2)[S] \\ &= \overline{\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & \end{array}} - \overline{\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & \end{array}} \in \mathcal{M}^{(3,2)}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} E_T &= \sum_{\sigma \in S_{\{1,2\}}} \text{sgn}(\sigma) \varphi_\sigma^{(4,1)}([T]) \\ &= (1)[T] - (1\ 2)[T] \\ &= \overline{\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & & & \end{array}} - \overline{\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & & & \end{array}} \in \mathcal{M}^{(4,1)}. \end{aligned}$$

Como A_T y E_T son transformaciones lineales sobre \mathcal{M}^μ y \mathcal{M}^λ , respectivamente, podemos multiplicarlas por las transformaciones φ_σ^μ y φ_σ^λ . Particularmente, el producto de φ_σ^λ con E_T tiene la siguiente propiedad:

Proposición 2.5.10. Si $\lambda \vdash n$, T es una λ -tabla y $\sigma \in S_n$, entonces $\varphi_\sigma^\lambda(E_T) = E_{\sigma T}$.

Dem. Sean $X_i = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ las entradas de la columna i -ésima de T .

Si $\sigma(i_\mu) = i_\nu$, entonces σ coloca al número i_ν en el cuadro donde se ubicaba i_μ . Por tanto, $\sigma(X_i)$ son las entradas de la columna i -ésima de σT .

Ahora, supongamos que $\tau \in C_T$. Entonces,

$$\begin{aligned} \tau(X_i) &= X_i \\ \implies \sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma X_i) &= \sigma\tau(X_i) = \sigma X_i \\ \implies \sigma\tau\sigma^{-1} &\in C_{\sigma T} \\ \implies C_{\sigma T} &= \sigma C_T \sigma^{-1}, \forall \sigma \in S_n. \end{aligned}$$

Pues $\tau \in C_T$ y $\sigma \in S_n$ son arbitrarias.

Ahora, veamos que:

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma^\lambda A_T &= \varphi_\sigma^\lambda \left(\sum_{\pi \in C_T} \text{sgn}(\pi) \varphi_\pi^\lambda \right) \\ &= \sum_{\pi \in C_T} \text{sgn}(\pi) \varphi_\sigma^\lambda \varphi_\pi^\lambda \\ &= \sum_{\pi \in C_{\sigma T}} \text{sgn}(\sigma^{-1}\pi\sigma) \varphi_\sigma^\lambda \varphi_{\sigma^{-1}\pi\sigma}^\lambda \\ &= \sum_{\pi \in C_{\sigma T}} \text{sgn}(\sigma^{-1}\pi\sigma) \varphi_{\sigma\sigma^{-1}\pi}^\lambda \varphi_\pi^\lambda \varphi_\sigma^\lambda \\ &= \left(\sum_{\pi \in C_{\sigma T}} \text{sgn}(\pi) \varphi_\pi^\lambda \right) \varphi_\sigma^\lambda \\ &= A_{\sigma T} \varphi_\sigma^\lambda, \end{aligned}$$

Donde se tomó en cuenta que φ^λ es un homomorfismo y que $\sigma^{-1}\pi\sigma$ y π tienen la misma estructura de ciclo.

Evaluando en un λ -tabloide $[T]$:

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma^\lambda A_T([T]) &= A_{\sigma T} \varphi_\sigma^\lambda([T]) \\ \iff \varphi_\sigma^\lambda(E_T) &= A_{\sigma T}([\sigma T]) = E_{\sigma T} \\ \therefore \varphi_\sigma^\lambda(E_T) &= E_{\sigma T}.\end{aligned}$$

■

Ilustremos la proposición anterior con un ejemplo:

Ejemplo 2.5.12. Sea T una $(4, 2)$ -tabla, dada por:

1	2	3	4
5	6		

Consideremos $\sigma = (2\ 4)(1\ 6) \in S_6$. Entonces, $\sigma T =$

6	4	3	2
5	1		

El estabilizador de columna de T consta de las permutaciones en $\{1, 5\}$ y en $\{2, 6\}$. Por otro lado, el estabilizador de columna de $C_{\sigma T}$ consta de las permutaciones en $\{6, 5\}$ y en $\{4, 1\}$.

Calculemos el politabloide asociado a T :

$$\begin{aligned}E_T &= \sum_{\pi \in S_{\{1,5\}} \times S_{\{2,6\}}} \text{sgn}(\pi) \pi [T] \\ &= (1) [T] - (1\ 5) [T] - (2\ 6) [T] + (1\ 5)(2\ 6) [T] \\ &= \overline{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & & \end{array}} - \overline{\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & & \end{array}} - \overline{\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & & \end{array}} + \overline{\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & & \end{array}}.\end{aligned}$$

$$\implies \varphi_\sigma^\lambda(E_T) = (2\ 4)(1\ 6)E_T$$

$$= \overline{\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & & \end{array}} - \overline{\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & & \end{array}} - \overline{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & & \end{array}} - \overline{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & & \end{array}}.$$

Ahora, calculemos el politabloide asociado a σT :

$$\begin{aligned}E_{\sigma T} &= \sum_{\pi \in S_{\{5,6\}} \times S_{\{1,4\}}} \text{sgn}(\pi) [\sigma T] \\ &= (1) [\sigma T] - (5\ 6) [\sigma T] - [\sigma T] (1\ 4) + (5\ 6)(1\ 4) [\sigma T] \\ &= \overline{\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & & \end{array}} - \overline{\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & & \end{array}} - \overline{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & & \end{array}} + \overline{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & & \end{array}}.\end{aligned}$$

Notemos que este resultado coincide con $\varphi_\sigma^\lambda(E_T)$.

$$\therefore \varphi_\sigma^\lambda(E_T) = E_{\sigma T}.$$

Con la Definición (2.5.11) y la Proposición (2.5.10), podemos definir una subrepresentación de φ^λ :

Definición 2.5.12 (Representación de Sprech). Sea $\lambda \vdash n$ y sea \mathcal{E}^λ el subespacio de \mathcal{M}^λ generado por los politabloides E_T , con T una λ -tabla; es decir:

$$\mathcal{E}^\lambda = \left\{ \sum_i c_i E_{T_i} \mid c_i \in \mathbb{C} \wedge T_i \text{ es una } \lambda\text{-Tabla} \right\}.$$

Entonces, llamamos **representación de Sprech** asociada a λ , a la representación de S_n dada por:

$$\begin{aligned} \psi^\lambda : S_n &\longrightarrow GL(\mathcal{E}^\lambda) \\ \sigma &\longmapsto \psi_\sigma^\lambda, \quad \text{con } \psi_\sigma^\lambda(E_T) = E_{\sigma T}. \end{aligned}$$

Es decir, ψ^λ es la representación φ^λ , restringida a \mathcal{E}^λ .

Teorema 2.5.11. El espacio vectorial \mathcal{E}^λ es un subespacio S_n -invariante de \mathcal{M}^λ , respecto de ψ^λ . Por lo tanto, la representación de Sprech ψ^λ es una subrepresentación de φ^λ .

Dem. Consideremos $\sigma \in S_n$ y $\vec{v} \in \mathcal{E}^\lambda$. Entonces, existen $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{C}$ tales que:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \sum_i c_i E_{T_i}. \\ \implies \psi_\sigma^\lambda(\vec{v}) &= \sum_i c_i \psi_\sigma^\lambda(E_{T_i}) = \sum_i E_{\sigma T_i} \in \mathcal{E}^\lambda. \\ \implies \text{Im} [\psi_\sigma^\lambda] &\subset \mathcal{E}^\lambda, \quad \forall \sigma \in S_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, \mathcal{E}^λ es S_n -invariante respecto de ψ^λ y, de acuerdo con la Definición (2.1.8), ψ^λ es una subrepresentación de φ^λ . ■

Veamos algunos ejemplos para familiarizarnos con las representaciones de Sprech:

Ejemplo 2.5.13.

■ Representación trivial

Consideremos $\lambda = (n)$. Como vimos en el Ejemplo (2.5.10), existe un solo (n) -tabloide, pues todas las (n) -tablas son equivalentes:

$$\begin{aligned} E_T &= \sum_{\sigma \in C_T} \text{sgn}(\sigma) [\sigma T] = [T]. \\ \implies \psi_\sigma^{(n)}(E_T) &= E_{\sigma T} = E_T, \quad \forall \sigma \in S_n. \\ \therefore \psi^{(n)} &= \varphi^{(n)} = \text{id}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\psi^{(n)}$ es la representación trivial y, evidentemente, es irreducible.

■ **Representación alternante**

Consideremos $\lambda = (1^n) := (1, 1, \dots, 1) \vdash n$. En este caso, cada (1^n) -tabla forma un tabloide por sí sola.

Es posible obtener **todos** los (1^n) -tabloides a partir de la tabla $T = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \dots \\ \hline n \\ \hline \end{array}$, aplicando todas

las permutaciones $\sigma \in S_n$ a T . Por ejemplo:

$$(i \ j)T = (i \ j) \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \dots \\ \hline i \\ \hline \dots \\ \hline j \\ \hline \dots \\ \hline n \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \dots \\ \hline j \\ \hline \dots \\ \hline i \\ \hline \dots \\ \hline n \\ \hline \end{array}.$$

Es decir, $\{\sigma T \mid \sigma \in S_n\}$ es el conjunto de todos los (1^n) -tabloides.

Además, veamos que todas las permutaciones $\sigma \in S_n$ preservan la única columna de T , por lo que $C_T = S_n$ y E_T es la suma de todas las (1^n) -tablas, multiplicadas por el signo de la permutación con la que se obtienen.

Si T' es otra (1^n) -tabla, entonces:

$$E_T = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma [T] \quad \wedge \quad E_{T'} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \sigma [T'].$$

$$\implies E_T = \pm E_{T'}.$$

Es decir, $E_T = E_{T'}$ si el número de trasposiciones necesarias para obtener T' a partir de T es **par**, y $E_T = -E_{T'}$ si es **impar**.

$$\implies \psi_\sigma^{(n)}(E_T) = E_{\sigma T} = \begin{cases} E_T, & \text{si } \text{sgn}(\sigma) = 1. \\ -E_T, & \text{si } \text{sgn}(\sigma) = -1. \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\therefore \psi^{(n)} : \sigma \longmapsto \text{sgn}(\sigma). \quad (2.55)$$

Es decir, $\psi^{(n)}$ es la representación de signo o representación alternante, que también es de grado 1 e irreducible.

Por ejemplo, si $n = 3$ y $T = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$, entonces:

$$\begin{aligned}
 E_T &= \sum_{\pi \in S_3} \text{sgn}(\pi) \pi [T] \\
 &= (1) [T] - (1\ 2) [T] - (1\ 3) [T] - (2\ 3) [T] + (1\ 2\ 3) [T] + (1\ 3\ 2) [T] \\
 &= \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}.
 \end{aligned}$$

Aplicando $\sigma = (1\ 2)$ a E_T , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \psi_\sigma^{(1,1,1)}(E_T) &= E_{\sigma T} = \sum_{\pi \in S_3} \text{sgn}(\pi) \pi [\sigma T] \\
 &= \sigma T - (1\ 2)\sigma T - (1\ 3)\sigma T - (2\ 3)\sigma T + (1\ 2\ 3)\sigma T + (1\ 3\ 2)\sigma T \\
 &= \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = -E_T.
 \end{aligned}$$

De la misma manera, podemos ver que $\psi_\tau^{(1,1,1)}(E_T) = E_T$, con $\tau = (1\ 2\ 3)$. Más aún,

$$\psi_\sigma^{(1,1,1)}(E_T) = \begin{cases} E_T, & \text{si } \sigma \text{ es un 3-Ciclo o la identidad.} \\ -E_T, & \text{si } \sigma \text{ es un 2-Ciclo.} \end{cases}$$

■ Representación estándar

Sea $\lambda = (n-1, 1)$. Como probamos en el Ejemplo (2.5.10), φ^λ coincide con la representación estándar de S_n , expresada mediante matrices de permutación.

Sin embargo, estas matrices suelen ser reducibles: encontrando una base apropiada, pueden expresarse en forma de bloques diagonales, donde cada bloque es una constituyente irreducible.

Consideremos la $(n-1, 1)$ -Tabla $T_i^1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline & & & i \\ \hline \end{array}$, con $i \in \{1, \dots, n\}$. Las únicas permutaciones que preservan las columnas de T_i^1 son (1) y $(1\ i)$; de la misma manera:

$$T_i^j = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline j & a & b & \cdots & w \\ \hline & & & & i \\ \hline \end{array} \implies C_{T_i^j} = \{(1), (j\ i)\}.$$

Con $j, a, \dots, w \in \{1, \dots, n\}$.

El $(n-1, 1)$ -tabloide $[T_i]$ está constituido por todas las $(n-1, 1)$ -tablas T_i^1, T_i^2, \dots

Denotando por E_i^j al politabloide correspondiente a T_i^j , tenemos:

$$\begin{aligned} E_i^j &= \sum_{\pi \in C_{T_i^j}} \text{sgn}(\pi) \pi [T_i] \\ &= (1) [T_i] - (i \ j) [T_i] \\ &= [T_i] - [T_j]. \\ \implies E_i^j &= -E_j^i. \end{aligned}$$

Ahora, consideremos $\sigma \in S_n$, y veamos que

$$\sigma([T_i]) = \begin{cases} [T_i], & \text{si } \sigma \text{ fija a } j. \\ [T_k], & \text{si } \sigma(i) = k. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \implies \psi_\sigma^{(n-1,1)}(E_i^j) &= \psi_\sigma^{(n-1,1)}([T_i] - [T_j]) \\ &= \sigma [T_i] - \sigma [T_j] \\ &= \begin{cases} [T_i] - [T_j] = E_i^j, & \text{si } \sigma \text{ fija a } i \text{ y a } j. \\ [T_i] - [T_k] = E_i^k, & \text{si } \sigma \text{ fija a } i \text{ y } \sigma(j) = k. \\ [T_l] - [T_j] = E_l^j, & \text{si } \sigma(i) = l \text{ y } \sigma \text{ fija a } j. \\ [T_l] - [T_k] = E_l^k, & \text{si } \sigma(i) = l \text{ y } \sigma(j) = k. \end{cases} \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $n = 3$, entonces los $(2, 1)$ -tabloides son:

$$[T_1] = \frac{\overline{2 \ 3}}{\underline{1}}, \quad [T_2] = \frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{2}}, \quad [T_3] = \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{3}}.$$

Calculemos el politabloide asociado a $T_3^1 \in [T_3]$:

$$\begin{aligned} E_3^1 &= \sum_{\pi \in C_{T_3^1}} \text{sgn}(\pi) \pi [T_3] \\ &= (1) [T_3] - (1 \ 3) [T_3] \\ &= \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{3}} - \frac{\overline{3 \ 2}}{\underline{1}} \\ &= [T_3] - [T_1]. \end{aligned}$$

Ahora, tomando $\sigma = (1 \ 2 \ 3) \in S_3$:

$$\begin{aligned} \psi_\sigma^{(2,1)}(E_3^1) &= (1 \ 2 \ 3)([T_3] - [T_1]) \\ &= \frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{2}} - \frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{2}} = 0. \end{aligned}$$

$$\implies E_3^1 \in \text{Núcleo} \left[\psi_\sigma^{(2,1)} \right].$$

En general, $\psi_\sigma^{(2,1)}(E_i^j) = 0$, siempre que $\sigma [T_i] = \sigma [T_j]$.

Por otro lado, si $\tau = (2\ 3)$, entonces

$$\begin{aligned} \psi_\tau^{(2,1)}(E_3^1) &= (2\ 3)([T_3] - [T_1]) \\ &= \overline{\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & \end{array}} - \overline{\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & \end{array}} \\ &= [T_2] - [T_1] = E_2^1. \end{aligned}$$

Notemos que, en general, los politabloides $\{E_T \mid T \text{ es una } \lambda\text{-tabla}\}$ **no** son linealmente independientes. Por ejemplo, en el caso de la representación alternante, dada por $\lambda = (1^n)$, tenemos $E_{T_i} = \pm E_{T_j}$ para cualesquiera (1^n) -Tablas T_i, T_j (Ecuación 2.54).

Por lo tanto, los politabloides $\{E_T \mid T \text{ es una } \lambda\text{-tabla}\}$ **no** pueden ser una base de \mathcal{E}^λ , a pesar de generar al espacio; sin embargo, es posible probar que los politabloides correspondientes a tablas estándar son linealmente independientes.

Teorema 2.5.12. Sea $\lambda \vdash n$. Entonces, el subconjunto de \mathcal{E}^λ dado por:

$$\{E_T \mid T \text{ es una } \lambda\text{-tabla estándar}\} \tag{2.56}$$

Es una **base** de \mathcal{E}^λ .

Para probar este Teorema, es necesario verificar que la cantidad de *politabloides estándar* (2.56) es igual a la dimensión de \mathcal{E}^λ y que son linealmente independientes.

Es decir, si r_λ es el número de λ -tablas estándar, entonces

$$\text{Dim} [\mathcal{E}^\lambda] = r_\lambda. \tag{2.57}$$

El número r_λ suele ser de gran utilidad porque indica el **grado** de la representación de Specht ψ^λ . Más adelante, formularemos un método para calcularlo, llamado *fórmula de longitud de gancho* (hook length formula).

Por otro lado, la dimensión D_λ del espacio \mathcal{M}^λ coincide con el número de λ -tabloides linealmente independientes, y proporciona el **grado** de φ^λ .

Con la siguiente proposición, podremos hallar D_λ para cualquier $\lambda \vdash n$:

Proposición 2.5.13. Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n$. Entonces,

$$D_\lambda := \text{Dim} [\mathcal{M}^\lambda] = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_l!}. \tag{2.58}$$

Dem. \mathcal{M}^λ es el espacio vectorial generado por los tabloides $[T] \in \mathcal{T}^\lambda$; por tanto, la base de \mathcal{M}^λ es el conjunto de λ -tabloides linealmente independientes.

Ahora, sabemos que hay $n!$ maneras de asignar los números $\{1, 2, \dots, n\}$ a los cuadrados del diagrama de Young correspondiente a λ , por lo que existen $n!$ λ -tablas diferentes.

Si consideramos un elemento σ del estabilizador de fila de T , tenemos:

$$\sigma([T_i]) = [T_i].$$

La primera fila de T tiene λ_1 entradas, por lo que existen $\lambda_1!$ permutaciones que la preservan; asimismo, existen $\lambda_i!$ permutaciones que preservan la fila i -ésima.

Por lo tanto, el número de λ -tabloides linealmente independientes será el número total de λ -tablas, dividido entre el número de λ -tablas equivalentes:

$$\therefore D_\lambda = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_l!}.$$

■

Ejemplo 2.5.14. Como vimos anteriormente, si $\lambda = (2, 1)$, las únicas λ -tablas estándar son:

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, & T_2 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}. \\ \implies C_{T_1} &= \{(1), (1\ 3)\}, & C_{T_2} &= \{(1), (1\ 2)\}. \\ \implies E_{T_1} &= \sum_{\sigma \in C_{T_1}} \text{sgn}(\sigma) \sigma [T_1] = \overline{\frac{1\ 2}{3}} - \overline{\frac{2\ 3}{1}}. \\ E_{T_2} &= \sum_{\sigma \in C_{T_2}} \text{sgn}(\sigma) \sigma [T_2] = \overline{\frac{1\ 3}{2}} - \overline{\frac{2\ 3}{1}}. \end{aligned}$$

Evidentemente, E_{T_1} y E_{T_2} son linealmente independientes. Entonces,

$$r_{(2,1)} = \text{Dim} \left[\mathcal{E}^{(2,1)} \right] = \text{Grado} \left[\psi^{(2,1)} \right] = 2.$$

Por otro lado, $\mathcal{M}^{(2,1)}$ es de dimensión 3, pues existen 3 $(2, 1)$ -tabloides linealmente independientes:

$$\begin{aligned} [T_1] &= \overline{\frac{1\ 2}{3}}, & [T_2] &= \overline{\frac{1\ 3}{2}}, & [T_3] &= \overline{\frac{2\ 3}{1}}. \\ \implies \text{Grado} \left[\varphi^{(2,1)} \right] &= 3, \end{aligned}$$

Lo cual coincide con la fórmula $D_{(2,1)} = \frac{3!}{(2!)(1!)}$.

De acuerdo con la teoría de caracteres (sección 2.3), el número de representaciones irreducibles de S_n coincide con su número de clases de conjugación. A su vez, este número es igual a la cantidad de particiones de n , como mencionamos en la Proposición (2.5.1).

Veremos que las representaciones de Sprech are un conjunto **completo** de representaciones **irreducibles** de S_n ; para ello, debemos probar que no poseen subespacios invariantes y que existen tantas ψ^λ diferentes, como particiones $\lambda \vdash n$.

Antes de ello, será necesario revisar las siguientes proposiciones:

Lema 2.5.14. Sean $\lambda, \mu \vdash n$, T^λ una λ -tabla y S^μ una μ -tabla, tales que $A_{T^\lambda}([S^\mu]) \neq 0$. Entonces:

$$\lambda \geq \mu.$$

Más aún, si $\lambda = \mu$, entonces:

$$A_{T^\lambda}([S^\lambda]) = \pm E_{T^\lambda}.$$

Lema 2.5.15. Sea T una λ -tabla. Entonces, la **imagen** de la transformación lineal A_T , restringida a \mathcal{M}^λ , es $\mathbb{C}E_T$. Es decir,

$$A_T([T_i]) \propto E_T, \quad \forall [T_i] \in \mathcal{M}^\lambda.$$

Dem. De acuerdo con la Definición (2.5.11), si $\mu = \lambda$, entonces

$$\begin{aligned} A_T : \mathcal{M}^\lambda &\longrightarrow \mathcal{M}^\lambda \\ [S] &\longmapsto \sum_{\sigma \in C_S} \text{sgn}(\sigma) \varphi_\sigma^\lambda([S]). \end{aligned}$$

Si $A_T([S]) = 0$, entonces $A_T([S]) \in \mathbb{C}E_T$.

Por otro lado, si $A_T([S]) \neq 0$, entonces $A_T([S]) = \pm E_T \in \mathbb{C}E_T$, por el Lema (2.5.14).

Entonces, la imagen de A_T está contenida en $\mathbb{C}E_T$; también podemos ver fácilmente que $\mathbb{C}E_T$ está contenido en la imagen de A_T .

$$\therefore \text{Im}[A_T] = \mathbb{C}E_T. \quad \blacksquare$$

Proposición 2.5.16. Las transformaciones lineales A_T , definidas en (2.5.14), son **hermitianas** para toda λ -tabla T .

Dem. Sabemos que una transformación lineal es hermitiana si y sólo si coincide con su adjunta.

Sea T una λ -tabla. Recordando que φ^μ es unitaria, para toda $\mu \vdash n$, y que una permutación tiene la misma estructura que su inversa, obtenemos:

$$\begin{aligned} A_T^\dagger &= \left(\sum_{\sigma \in C_T} \text{sgn}(\sigma) \varphi_\sigma^\mu \right)^\dagger \\ &= \sum_{\sigma \in C_T} \text{sgn}(\sigma) (\varphi_\sigma^\mu)^\dagger \\ &= \sum_{\sigma^{-1} \in C_T} \text{sgn}(\sigma^{-1}) \varphi_{\sigma^{-1}}^\mu \\ &= A_T. \end{aligned}$$

Por lo tanto, A_T es hermitiana, para toda T . ■

Lema 2.5.17. Sea $\lambda \vdash n$. Si \mathcal{V} es un subespacio S_n -invariante de \mathcal{M}^λ , respecto de φ^λ , entonces

$$\mathcal{E}^\lambda \subset \mathcal{V} \quad \vee \quad \mathcal{V} \subset (\mathcal{E}^\lambda)^\perp.$$

Dem. Supongamos que $\mathcal{V} \leq \mathcal{M}^\lambda$ es un subespacio S_n -invariante respecto de φ^λ . Es decir,

$$\varphi_\sigma^\lambda(v) \in \mathcal{V} \quad \forall \sigma \in S_n, v \in \mathcal{V}.$$

Sean T una λ -tabla y $v \in \mathcal{V}$ tales que $A_T(v) \neq 0$; entonces,

$$A_T(v) = \sum_{\sigma \in C_T} \text{sgn}(\sigma) \varphi_\sigma^\lambda(v) \in \mathcal{V} \cap \mathbb{C}E_T,$$

Pues la imagen de A_T está contenida en $\mathbb{C}E_T$, por el Lema (2.5.15), y cada término de la sumatoria pertenece a \mathcal{V} .

Como $\mathbb{C}E_T$ es un subespacio **mínimo** de \mathcal{M}^λ , tenemos que $\mathcal{V} \cap \mathbb{C}E_T \neq \emptyset$ (poseen al menos al elemento neutro). Entonces, $E_T \in \mathcal{V}$, por la propiedad de cerradura de los espacios vectoriales.

Ahora, notemos que todas las λ -tablas pueden obtenerse permutando las entradas de una λ -tabla T en particular:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\lambda &= \left\{ \sum_i a_i E_{T_i} \mid a_i \in \mathbb{C} \wedge T_i \text{ es una } \lambda\text{-tabla} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma E_{\sigma T} \mid c_\sigma \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\sigma \in S_n} c_\sigma \varphi_\sigma^\lambda(E_T) \mid c_\sigma \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Como cada $\varphi_\sigma^\lambda(E_T) = E_{\sigma T} \in \mathcal{V}$, esto implica que $\mathcal{E}^\lambda \subset \mathcal{V}$.

Por otro lado, si $A_T(v) = 0$ para cualquier λ -tabla T y $v \in \mathcal{V}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle v | E_T \rangle &= \langle v | A_T([T]) \rangle = \langle A_T(v) | [T] \rangle = 0 \\ &\implies v \perp E_T \\ &\implies \mathcal{V} \perp \mathcal{E}^\lambda \\ &\implies \mathcal{V} \subset (\mathcal{E}^\lambda)^\perp, \end{aligned}$$

usando propiedades de las transformaciones hermitianas.

Por lo tanto, todo subespacio S_n -invariante de \mathcal{M}^λ contiene a \mathcal{E}^λ o está contenido en $(\mathcal{E}^\lambda)^\perp$. ■

Teorema 2.5.18. Las representaciones de Sprech $\{\psi^\lambda : S_n \longrightarrow GL(\mathcal{E}^\lambda) \mid \lambda \vdash n\}$ son **irreducibles**.

Dem. Supongamos que ψ^λ es reducible, para alguna $\lambda \vdash n$. Entonces, existe un subespacio no trivial \mathcal{V} de \mathcal{E}^λ que es S_n -invariante respecto de ψ^λ . Es decir,

$$\psi_\sigma^\lambda(\vec{v}) \in \mathcal{V}, \quad \forall \sigma \in S_n, \vec{v} \in \mathcal{V}.$$

Entonces, por el Lema (2.5.17),

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\lambda &\subset \mathcal{V} \vee \mathcal{V} \subset (\mathcal{E}^\lambda)^\perp \\ \implies \mathcal{V} &= \mathcal{E}^\lambda \vee \mathcal{V} \subset (\mathcal{E}^\lambda)^\perp \cap \mathcal{E}^\lambda \\ \iff \mathcal{V} &= \mathcal{E}^\lambda \vee \mathcal{V} = \{0\}, \end{aligned}$$

contradiciendo que \mathcal{V} sea un subespacio no trivial.

Por lo tanto, ψ^λ es una representación irreducible de S_n , para toda $\lambda \vdash n$. ■

Hemos probado que cada partición $\lambda \vdash n$ brinda una representación irreducible de S_n . Si las ψ^λ correspondientes a diferentes particiones **no son equivalentes**, entonces forman un conjunto completo, es decir:

$$|\{\lambda \vdash n\}| = |\{\psi^\lambda : S_n \longrightarrow GL(\mathcal{E}^\lambda) \mid \lambda \vdash n\}| = \text{Núm. de representaciones irreducibles de } S_n.$$

Para demostrar esta propiedad, serán necesarios los siguientes lemas:

Lema 2.5.19. Sean $\lambda, \mu \vdash n$ y $f \in \mathcal{M}_{S_n}(\varphi^\lambda, \varphi^\mu)$; es decir, f es un morfismo de \mathcal{M}^λ a \mathcal{M}^μ , tal que:

$$f\varphi_\sigma^\lambda = \varphi_\sigma^\mu f, \quad \forall \sigma \in S_n.$$

Si \mathcal{E}^λ no está contenido en el núcleo de f , entonces $\lambda \geq \mu$.

Si $\lambda = \mu$, entonces $f|_{\mathcal{E}^\lambda}$ es un múltiplo escalar del mapeo identidad.

El Lema (2.5.19) brinda un criterio de dominación: si existe $E_T \in \mathcal{E}^\lambda$ tal que $f(E_T) \neq 0$, entonces λ domina a μ .

Si $\lambda = \mu$, entonces $f\varphi^\lambda = \varphi^\lambda f$; es decir, f conmuta con φ^λ . En este caso, $f(E_T) \propto E_T$.

Teorema 2.5.20. Las representaciones de Sprech $\{\psi^\lambda : S_n \longrightarrow GL(\mathcal{E}^\lambda) \mid \lambda \vdash n\}$ son un conjunto **completo** de representaciones **irreducibles** y **no equivalentes** de S_n .

Dem. Ya probamos que las representaciones de Sprech son irreducibles.

Para completar la demostración, veamos que $(\mathcal{E}^\lambda)^\perp$ es un subespacio S_n -invariante de \mathcal{M}^λ , respecto de φ^λ . De lo contrario, existirían $v \in (\mathcal{E}^\lambda)^\perp$ y $\sigma \in S_n$ tales que $\varphi_\sigma^\lambda(v) \in \mathcal{E}^\lambda$, pero

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v | E_T \rangle = \langle \varphi_\sigma^\lambda(v) | \varphi_\sigma^\lambda(E_T) \rangle = \langle \varphi_\sigma^\lambda(v) | E_{\sigma T} \rangle, \\ &\implies \varphi_\sigma^\lambda(v) \perp E_{\sigma T} \\ &\implies \varphi_\sigma^\lambda(v) \in (\mathcal{E}^\lambda)^\perp. \end{aligned}$$

Entonces, tanto \mathcal{E}^λ como $(\mathcal{E}^\lambda)^\perp$ son subespacios S_n -invariantes respecto de φ^λ . Por lo tanto, podemos expresar a \mathcal{M}^λ como:

$$\mathcal{M}^\lambda = \mathcal{E}^\lambda \times (\mathcal{E}^\lambda)^\perp.$$

Ahora, supongamos que λ y μ son particiones de n tales que $\psi^\lambda \sim \psi^\mu$. Entonces, existe $f \in \mathcal{M}_{S_n}(\psi^\lambda, \psi^\mu)$ tal que:

$$f\psi_\sigma^\lambda = \psi_\sigma^\mu f, \quad \forall \sigma \in S_n.$$

El morfismo f está definido sobre \mathcal{E}^λ , pero podemos extenderlo a \mathcal{M}^λ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}^\lambda &\longrightarrow \mathcal{E}^\mu \\ v + w &\longmapsto f(v + w) = f(v), \end{aligned}$$

Para cualesquiera $v \in \mathcal{E}^\lambda$, $w \in (\mathcal{E}^\lambda)^\perp$.

Como $\psi_\sigma^\lambda = \varphi_\sigma^\lambda|_{\mathcal{E}^\lambda}$ y tanto \mathcal{E}^λ como $(\mathcal{E}^\lambda)^\perp$ son S_n -invariantes respecto de φ^λ , tenemos:

$$\begin{aligned} f\varphi_\sigma^\lambda(v + w) &= f\varphi_\sigma^\lambda(v) + f\varphi_\sigma^\lambda(w) \\ &= f(v') + f(w') \\ &= f(v') \\ &= f\varphi_\sigma^\lambda(v), \text{ donde } v' \in \mathcal{E}^\lambda \text{ y } w' \in (\mathcal{E}^\lambda)^\perp. \\ \implies f\varphi_\sigma^\lambda &= f\psi_\sigma^\lambda = \psi_\sigma^\mu f, \quad \forall \sigma \in S_n. \\ \implies f &\in \mathcal{M}_{S_n}(\varphi^\lambda, \psi^\mu). \end{aligned}$$

Además, notemos que $(\mathcal{E}^\lambda)^\perp \subset \text{Núcleo}[f]$. Entonces, si $\mathcal{E}^\lambda \not\subset \text{Núcleo}[f]$, tenemos que $\lambda \geq \mu$, por el Lema (2.5.19).

De la misma manera, $\psi^\lambda \sim \psi^\mu$ implica que existe $\phi \in \mathcal{M}_{S_n}(\psi^\mu, \psi^\lambda)$ tal que $\phi\psi_\sigma^\mu = \psi_\sigma^\lambda\phi$, para toda $\sigma \in S_n$.

Por ser $\mathcal{E}^\mu, (\mathcal{E}^\mu)^\perp$ subespacios S_n -invariantes de \mathcal{M}^μ , podemos escribir $\mathcal{M}^\mu = \mathcal{E}^\mu \times (\mathcal{E}^\mu)^\perp$ y extender la definición de ϕ como:

$$\begin{aligned} \phi: \mathcal{M}^\mu &\longrightarrow \mathcal{E}^\lambda \\ x + y &\longmapsto \phi(x + y) = \phi(x), \end{aligned}$$

Con $x \in \mathcal{E}^\mu$ y $y \in (\mathcal{E}^\mu)^\perp$.

$$\begin{aligned} &\implies (\mathcal{E}^\mu)^\perp \subset \text{Núcleo}[\phi] \\ &\implies \mathcal{E}^\mu \not\subset \text{Núcleo}[\phi] \\ &\implies \mu \geq \lambda. \\ &\therefore \psi^\lambda \sim \psi^\mu \implies \lambda = \mu. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Por lo tanto, hay tantas representaciones de Specht no equivalentes, como particiones distintas de n . Es decir, $\{\psi^\lambda : S_n \longrightarrow GL(\mathcal{E}^\lambda) \mid \lambda \vdash n\}$ es un conjunto completo de representaciones irreducibles y no equivalentes de S_n . ■

Como \mathcal{M}^λ posee subespacios invariantes, la representación φ^λ se puede descomponer en constituyentes irreducibles. La representación de Specht ψ^λ debe aparecer una sola vez en esta descomposición:

$$\varphi^\lambda = m_1\chi^1 \oplus m_2\chi^2 \oplus \cdots \oplus \psi^\lambda \oplus \cdots \oplus m_s\chi^s.$$

Para hallar la descomposición de φ^λ , se requiere de más conocimientos en combinatoria y teoría de módulos. Específicamente, se debe realizar una *descomposición de \mathcal{M}^λ en módulos* e introducir los *números de Kostka* [18].

Para quienes deseen profundizar, se recomiendan los artículos *Decomposition of Certain $\mathbb{C}[S_n]$ -modules into Specht Modules* de Valentina Chapovalova y *Young Tableaux* de Harry Rainbird.

Por ahora, enunciemos esta propiedad sin demostración, pues queda fuera de los propósitos de esta monografía:

Proposición 2.5.21. Si $\mu \vdash n$, entonces la representación de Specht $\psi^\mu : S_n \longrightarrow GL(\mathcal{E}^\mu)$ es una constituyente irreducible de $\varphi^\mu : S_n \longrightarrow GL(\mathcal{M}^\mu)$, con multiplicidad $m_\mu = 1$.

Si otra representación de Specht ψ^λ es una constituyente irreducible de φ^μ , entonces $\lambda \geq \mu$.

Ahora, recordemos que el orden de un grupo es igual a la suma de los cuadrados de los **grados** de sus representaciones irreducibles (Teorema 2.4.3). Tomando en cuenta que $|S_n| = n!$, tenemos el siguiente:

Corolario 2.5.22. Sean $n \in \mathbb{N}$ y r_λ el grado de ψ^λ . Entonces,

$$\sum_{\lambda \vdash n} (r_\lambda)^2 = n! \tag{2.60}$$

donde se suma sobre todas las particiones de n .

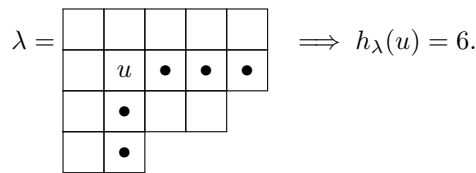
Para finalizar el capítulo, revisaremos una herramienta que nos permite calcular el grado de las representaciones de Sprech; este principio es también el que se utiliza en física de partículas para hallar el grado de las representaciones irreducibles de los grupos de Lie SO_n y SU_n .

Definición 2.5.13. Sea $\lambda \vdash n$ y sea u un cuadro del diagrama de Young asociado a λ .

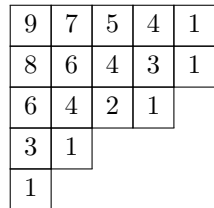
Entonces, definimos el **gancho de u** como el conjunto de cuadrados ubicados directamente a la derecha de u , junto con u mismo, más el número de cuadrados ubicados directamente debajo de u .

El número de cuadrados en el gancho es llamado **longitud de gancho de u** (*hook length*), y se denota por $h_\lambda(u)$.

Ejemplo 2.5.15. Sea $\lambda = (5, 5, 4, 2, 1)$. Entonces, podemos representar el gancho de un cuadro u como:



En el siguiente diagrama, escribimos las longitudes de gancho correspondientes a cada cuadro:



***Nota:** Debemos prestar especial atención al contar las longitudes de gancho de los cuadrados en el extremo derecho: se incluye al propio u en la cuenta *horizontal*, pero no en la *vertical*.

Así, en el ejemplo anterior, el quinto cuadrado de la primera fila tiene $h_\lambda = (0 \text{ cuadrados a la derecha}) + (1 \text{ cuadrado debajo}) = 1$; pero el cuarto cuadrado de la segunda fila tiene $h_\lambda = (1 \text{ cuadrado a la derecha} + \text{sí mismo}) + (1 \text{ cuadro debajo}) = 3$.

Teorema 2.5.23. Sea $\lambda \vdash n$ y sean $\{u \in \lambda\}$ los cuadrados del diagrama de Young asociado a λ . Entonces,

$$r_\lambda = \text{Dim } [\mathcal{C}^\lambda] = \frac{n!}{\prod_{u \in \lambda} h_\lambda(u)}. \tag{2.61}$$

La Ecuación (2.61) es llamada **fórmula de longitud de gancho** (*hook's length formula*).

Para ilustrar este Teorema, volvamos a considerar la partición del Ejemplo (2.5.15):

$$\begin{aligned} \lambda &= (5, 5, 4, 2, 1) \vdash 17 \\ \implies r_\lambda &= \frac{17!}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6^2 \cdot 5 \cdot 4^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 1^5} = 3403400. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ¡existen 3403400 representaciones irreducibles y linealmente independientes ψ^λ del grupo simétrico S_{17} ! El resultado no es tan sorprendente si tomamos en cuenta que

$|S_{17}| \approx 3,557 \times 10^{14}$.

Por último, enunciaremos dos fórmulas que nos permiten evaluar los caracteres de las representaciones φ^λ y ψ^λ . Al igual que la fórmula de longitud de gancho, éstas son útiles en el estudio de grupos de permutaciones y de grupos de Lie.

Proposición 2.5.24. Sean $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ particiones de n , y sea $\sigma \in S_n$ una permutación cuya estructura de ciclo está dada por μ ; es decir, σ es el producto de un μ_1 -ciclo, un μ_2 -ciclo, etc.

Entonces, el **caracter** de $\varphi^\lambda : S_n \rightarrow GL(\mathcal{M}^\lambda)$ evaluado en σ , es igual al **coeficiente** de $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_l^{\lambda_l}$ en el producto:

$$\prod_{i=1}^m (x_1^{\mu_i} + x_2^{\mu_i} + \dots + x_l^{\mu_i}). \quad (2.62)$$

Por otro lado, el **caracter** de $\psi^\lambda : S_n \rightarrow GL(\mathcal{E}^\lambda)$ evaluado en σ , es igual al **coeficiente** de $x_1^{\lambda_1+l-1} x_2^{\lambda_2+l-2} \dots x_l^{\lambda_l}$ en:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq l} (x_i - x_j) \prod_{i=1}^m (x_1^{\mu_i} + x_2^{\mu_i} + \dots + x_l^{\mu_i}). \quad (2.63)$$

***Nota:** Las productorias (2.62), (2.63) son *funciones generadoras*, cuyas variables x_i no significan nada en especial; sólo fungen como variables auxiliares en la determinación de los caracteres de φ^λ y ψ^λ .

Para esclarecer el significado de la Proposición (2.5.24), calculemos los caracteres de φ^λ y de ψ^λ sobre cierta permutación σ :

Ejemplo 2.5.16. Sea $\lambda = (3, 2) \vdash 5$. Entonces,

$$\text{Dim} \left[\mathcal{M}^{(3,5)} \right] = \frac{5!}{(3!)(2!)} = 10.$$

Es decir, existen diez tabloides diferentes de forma

.

Ahora, consideremos $\sigma = (1\ 2\ 3) \in S_5$. Para hallar el caracter de $\varphi^{(3,2)}$ sobre σ , debemos tomar en cuenta los 1-ciclos:

$$\begin{aligned} \sigma &= (1\ 2\ 3)(4)(5). \\ \implies \mu_1 &= 3, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1. \end{aligned}$$

El caracter de $\varphi_\sigma^{(3,2)}$ estará dado por el coeficiente de $x_1^3 x_2^2$ en:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^3 (x_1^{\mu_i} + x_2^{\mu_i}) &= (x_1^3 + x_2^3)(x_1 + x_2)(x_1 + x_2) \\ &= x_1^5 + 2x_1^4 x_2 + x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 + 2x_1 x_2^4 + x_2^5. \end{aligned}$$

$$\therefore \chi_{\varphi^{(3,2)}}(1\ 2\ 3) = 1.$$

Podemos calcular los demás caracteres de $\varphi^{(3,2)}$ en S_5 con el mismo procedimiento.

Ahora, calculemos el caracter de la representación de Sprech $\psi^{(3,2)}$ en $(1\ 2\ 3)$.
Las longitudes de gancho de cada cuadrado $u \in \lambda$ son:

4	3	1
2	1	

Entonces, sustituyendo en la Ecuación (2.61):

$$\text{Dim} \left[\mathcal{E}^{(3,2)} \right] = \frac{5!}{(4)(3)(2)} = 5.$$

Es decir, existen cinco representaciones de Sprech linealmente independientes de S_5 .

Ahora, debemos obtener el coeficiente de $x_1^{3+2-1}x_2^{2+2-2} = x_1^4x_2^2$ en la Ecuación (2.63):

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_i - x_j) \prod_{i=1}^3 (x_1^{\mu_i} + x_2^{\mu_i}) &= (x_1 - x_2)(x_1^3 + x_2^3)(x_1 + x_2)(x_1 + x_2) \\ &= x_1^6 + x_1^5x_2 - x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4 - x_1x_2^5 - x_1x_2^5 - x_2^6. \\ \therefore \chi_{\psi^{(3,2)}}(1\ 2\ 3) &= -1. \end{aligned}$$

2.6. Tablas de Young para SU_n

Los mismos principios que hemos usado para hallar las representaciones del grupo simétrico S_n mediante tablas de Young, son utilizados en física de partículas para hallar las representaciones de SO_n y SU_n . Sin embargo, para poder deducir las fórmulas que nos permiten hallar las tablas correspondientes a estos grupos de Lie, requerimos de un mayor conocimiento en análisis tensorial y del algoritmo de Glebsch-Gordan.

La explicación rigurosa de esta teoría queda fuera del alcance de esta tesis, pero se puede estudiar en *Lie Algebras in Particle Physics* de H. Georgi, e *Introduction to Group Theory for Physicists* de M. von Steinkirch.

Por ahora, sólo describiremos el procedimiento general para representar al **grupo especial unitario** SU_n mediante diagramas de Young y calcular los grados de dichas representaciones. Después, calcularemos explícitamente las representaciones irreducibles de algunos elementos de SU_3 .

Sean ψ^λ, ψ^μ representaciones de SU_n , que veremos como tensores de rango n . Entonces, éstas pueden ser representadas mediante **diagramas de Young** de n cuadros, correspondientes a los n índices del tensor. Más aún, los diagramas de Young nos ayudan a descomponer un **producto tensorial** $\psi^\lambda \otimes \psi^\mu$ en sus constituyentes irreducibles. [19]

Recordemos que:

$$\begin{aligned}
 (\psi^\lambda)_{ij} = (\psi^\lambda)_{ji} &\implies \psi^\lambda \text{ es un tensor } \mathbf{simétrico}. \\
 (\psi^\lambda)_{ij} = -(\psi^\lambda)_{ji} &\implies \psi^\lambda \text{ es un tensor } \mathbf{antisimétrico}.
 \end{aligned}$$

Para hallar la descomposición de $\psi^\lambda \otimes \psi^\mu$, se debe realizar una *simetrización* de índices en cada fila del diagrama y una *antisimetrización* en cada columna.

En física, la representación simétrica o **fundamental** de SU_n es llamada **representación de espinor**; su diagrama asociado consta de un solo cuadro y su dimensión es igual a n :

$$\psi^\lambda = [1, 0, \dots, 0] \approx \boxed{}.$$

Por su parte, la representación antisimétrica o **antifundamental** es el tensor dual de ψ^λ y se conoce como **representación de espinor dual**:

$$\overline{\psi^\lambda} = \psi_\lambda = [0, 1, 0, \dots, 0] \approx \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}.$$

La notación $[k_1, k_2, \dots, k_n]$ significa que ψ^λ corresponde al diagrama que posee k_i columnas de i cuadros. Así, la representación fundamental posee una columna de un solo cuadro, y la antifundamental, una columna de dos cuadros.

La fórmula para hallar el **grado** de una representación irreducible ψ^λ de SU_n es similar a la *fórmula de longitud de gancho* (2.61), pero con un numerador distinto:

$$\text{Grado} [\psi^\lambda] = d_\lambda = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) \cdots}{\prod_{u \in \lambda} h^\lambda(u)}, \quad (2.64)$$

donde $u \in \lambda$ son los cuadrados del λ -diagrama y $h^\lambda(u)$ es el gancho de u .

***Nota:** En la bibliografía, se suele llamar *dimensión* de ψ^λ al número d_λ , refiriéndose de manera indistinta a una representación y al espacio vectorial sobre el que ésta actúa.

El numerador en la Ecuación (2.64) se obtiene colocando los siguientes números en la primera fila del diagrama: n en el primer cuadro, $n+1$ en el segundo, $n+2$ en el tercero, etc.

Después, se numera la segunda fila de la misma manera, pero comenzando la cuenta en $n-1$:

n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	\dots	\dots	\dots
$n-1$	n	$n+1$	\dots	\dots		
$n-2$	$n-1$	n	\dots			
\dots						

Entonces, el numerador de (2.64) es el producto de todos los números anotados en el λ -diagrama.

Por ejemplo:

$$\lambda = (2, 2) \sim \begin{array}{|c|c|} \hline n & n+1 \\ \hline n-1 & n \\ \hline \end{array} \implies d_\lambda = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1).$$

$$\lambda = (4) \sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline n & n+1 & n+2 & n+3 \\ \hline \end{array} \implies d_\lambda = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

$$\lambda = (2, 1, 1) \sim \begin{array}{|c|c|} \hline n & n+1 \\ \hline n-1 & \\ \hline n-2 & \\ \hline \end{array} \implies d_\lambda = \frac{1}{8}n(n^2 - 1)(n - 2).$$

Enseguida, enlistamos las dimensiones de algunas de las representaciones más útiles de SU_n :

$$\begin{aligned} \text{Dim } \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} &= n. \\ \text{Dim } \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} &= \frac{1}{2}n(n+1). \\ \text{Dim } \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} &= \frac{1}{2}n(n-1). \\ \text{Dim } \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} &= n^3. \\ \text{Dim } \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} &= \binom{n+2}{3}. \\ \text{Dim } \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} &= \binom{n}{3}. \end{aligned}$$

Para estudiar sistemas o ensambles de objetos físicos, se suele representar cada objeto de manera individual y luego tomar su producto directo o tensorial.

En cuanto a las representaciones de SU_n en diagramas de Young, se deben seguir una serie de reglas para calcular su producto y su respectiva dimensión.

Detallaremos tales reglas a partir de un ejemplo sencillo: [20]

- i. Sean $\psi^\lambda = [1, 0, \dots, 0] \approx \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ y $\psi^\mu = [1, 1, 0, \dots, 0] \approx \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$. Entonces, para realizar el producto, etiquetamos los cuadros de ψ^μ de la siguiente manera:

$$\psi^\lambda \otimes \psi^\mu \approx \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array}.$$

Es decir, escribimos la misma letra en las filas, que representan índices simétricos, y letras diferentes en las columnas, que representan índices antisimétricos.

- ii. Nos fijamos en el primer cuadro, de derecha a izquierda, que tiene una a , y lo colocamos al lado y debajo del primer diagrama \square , creando todos los diagramas de Young posibles.

Los diagramas resultantes se sumarán, por lo que reemplazamos el símbolo \otimes por un símbolo de suma directa \oplus :

$$\psi^\lambda \otimes \psi^\mu = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}.$$

Hacemos lo mismo con los siguientes cuadros, empezando con la a y concluyendo con la b . Si hubiera más letras, se debería proceder en el orden a, b, c, \dots , tomando en cuenta que primero se acomodan los cuadros *simétricos* y luego los *antisimétricos*.

- iii. Si obtenemos dos tablas iguales, sólo las contamos una vez, tomando como iguales las tablas que tienen la misma configuración e índices.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \psi^\lambda \otimes \psi^\mu &= \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & a \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline & a \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \\ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & b \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & a \\ \hline & b & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & b \\ \hline & a & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}. \end{aligned}$$

Además de las tablas repetidas, se deben eliminar aquellas cuyo número de b 's llegue a ser, en cualquier momento, mayor que el número de a 's.

Más precisamente, se deben contar las a 's, b 's, c 's, \dots del diagrama, empezando por el primer renglón, de derecha a izquierda, y continuando hacia abajo. Si en cualquier punto de la cuenta (en cualquier cuadro) el número de b 's excede el número de a 's, el de c 's excede el de b 's, etc., esa tabla debe anularse.

En este ejemplo, debemos omitir la primera y la tercera tabla, pues la cuenta inicia con una b ; por lo tanto, en el primer cuadro, el número de b 's excede el de a 's.

$$\therefore \psi^\lambda \otimes \psi^\mu = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & a & a \\ \hline b & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}.$$

- iv. Finalmente, hallamos la dimensión de cada componente, con la Ecuación (2.64).

Numeramos las tablas de izquierda a derecha y denotamos por d_i al grado de la tabla i -ésima. Entonces:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{n(n+1)(n+2)(n-1)}{4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{1}{8}n(n+2)(n^2-1). \\ d_2 &= \frac{n(n+1)(n-1)n}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{12}n^2(n^2-1). \\ d_3 &= \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{8}n(n-2)(n^2-1). \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Grado}(\psi^\lambda \otimes \psi^\mu) = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3. \tag{2.65}$$

Comúnmente, la Ecuación (2.65) se escribe como:

$$d_\lambda \otimes d_\mu = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3,$$

donde d_λ y d_μ son los grados de ψ^λ y ψ^μ , respectivamente.

Calculemos explícitamente $\psi^\lambda \otimes \psi^\mu$, para el caso $n = 3$:

En SU_3 , la representación fundamental \square es de grado 3. La antifundamental también es de grado 3, pero comúnmente se escribe como $\bar{3}$.

Las columnas de tres cuadros son iguales a la identidad y aquellas con más de tres cuadros no están permitidas, pues es imposible tener más de tres índices antisimétricos en SU_3 :

$$[1, 0, 0] = \square \approx 3; \quad [0, 1, 0] = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \approx \bar{3}; \quad [0, 0, 1] = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \approx 1;$$

$[0, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1], \dots$ no son representaciones válidas.

Por esta razón, podemos representar a todos los tensores de SU_3 como $[a, b]$, y siempre que tengamos una columna de tres cuadros, la escribiremos como un 1.

Ahora, calculemos el grado de ψ^μ con la fórmula (2.64) y los grados d_1, d_2, d_3 , sustituyendo $n = 3$ en el inciso (iv):

$$d_\mu = \text{Dim} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 1 \cdot 1} = 8.$$

$$d_1 = 15, \quad d_2 = 6, \quad d_3 = 3.$$

$$\therefore \psi^\lambda \otimes \psi^\mu \approx 3 \otimes 8 = 15 \oplus 6 \oplus 3.$$

Una forma de saber si nuestro resultado es correcto, es verificando que el producto escalar $d_\lambda \cdot d_\mu$ coincida con la suma escalar los grados de las constituyentes irreducibles, $d_1 + d_2 + \dots + d_m$.

Particularmente, en este ejemplo se cumple que $3 \cdot 8 = 15 + 6 + 3 = 24$.

Sabemos que la representación fundamental en SU_3 es $[1, 0] = \square \approx 3$, y en SU_2 es $[1] = \square \approx 2$. Entonces, el producto $3 \otimes 3$ no significa lo mismo en SU_3 que en SU_2 .

• En SU_3 :

$$[1, 0] \otimes [1, 0] = \square \otimes \square = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

$$\implies d_1 = \frac{1}{2}n(n+1) = 6; \quad d_2 = \frac{1}{2}n(n-1) = 3.$$

$$\therefore 3 \otimes 3 = 6 \oplus 3.$$

- En SU_2 , $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \approx 3$, $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \approx 1$ y las columnas con más de dos elementos no pueden existir.

Entonces:

$$\begin{aligned}
 [2] \otimes [2] &= \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline \end{array} \\
 &= \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline a & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline a \\ \hline a \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \implies d_1 &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 5; & d_2 &= \frac{n(n+1)(n+2)(n-1)}{4 \cdot 2} = 3. \\
 & \therefore 3 \otimes 3 = 5 \oplus 3 \oplus 1.
 \end{aligned}$$

En ambos casos, se cumple que $d_\lambda \cdot d_\mu = d_1 + d_2 + \dots$.

Para finalizar, calculamos las representaciones irreducibles del producto $[1, 1] \otimes [1, 1]$ en SU_3 [21]:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \square \\ \hline \end{array} &= \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \\
 &= \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline a & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline a \\ \hline a \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline \square \\ \hline b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & b \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline a & b \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & a & \\ \hline b & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & b \\ \hline & a & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & a & b \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & a & \\ \hline b & & \\ \hline \end{array} \\
 & \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & b \\ \hline a & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & a & b \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & b \\ \hline a & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \\
 & = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & & & \\ \hline & b & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & a & a \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & a & b \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline a & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline & b \\ \hline \end{array} \oplus 1.
 \end{aligned}$$

Numerando las constituyentes irreducibles, obtenemos sus respectivas dimensiones:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= 27, \quad d_2 = 10, \quad d_3 = 10, \quad d_4 = 8, \quad d_5 = 8. \\
 \therefore 8 \otimes 8 &= 27 \oplus 10 \oplus \overline{10} \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1,
 \end{aligned}$$

donde escribimos $\overline{10}$ para el tercer término porque corresponde al tensor antisimétrico $[0, 3]$. Podemos notar que, efectivamente, $8 \cdot 8 = 27 + 10 + 10 + 8 + 8 + 1 = 64$.

Así como calculamos las representaciones de elementos de SU_2 y SU_3 , se puede trabajar con SU_n , aplicando de manera sistemática las propiedades y reglas enunciadas en esta sección. El procedimiento puede parecer contraintuitivo y causar confusión, pero será útil para todas aquellas y aquellos que deseen realizar un posgrado en el área de física de partículas.

Epílogo

A pesar de haber dejado muchas cosas en el tintero, el contenido de esta monografía sienta las bases para quienes quieran enfocarse en cierto grupo o aplicación. En cuanto a los grupos importantes en física, faltó mencionar los grupos puntuales y espaciales de los cristales, los grupos de Lorentz y de Poincaré, importantes en relatividad y gravitación, entre otros. También se tuvieron que dejar de lado algunos resultados matemáticos relevantes, como los Teoremas de Frobenius y de Burnside.

Debo admitir que me llevó bastante tiempo entender los Teoremas de isomorfismos, los grupos de permutaciones y las tablas de Young; fue precisamente por ello que se les dedicó una mayor cantidad de páginas.

A pesar de que las demostraciones de los Teoremas de isomorfismos pueden encontrarse en varios textos, suelen ser enredadas o imprecisas; el concepto de grupo cociente puede ser muy confuso, y aún más, el de cosets de un grupo cociente. Por ello, me pareció necesario explicar detalladamente la notación y cada paso de las pruebas.

También puede que estos teoremas parezcan demasiado matemáticos o irrelevantes para la física, pero es necesario comprenderlos por su generalidad, su relevancia histórica y el nivel de abstracción que demandan, una cualidad que prepara a las estudiantes para una formación más avanzada.

Los grupos de permutaciones son ampliamente abordados en un sinfín de libros y artículos; sin embargo, una cuestión tan simple como la notación de ciclos y el producto de permutaciones, puede resultar bastante contraintuitiva. En general, la existencia de una estructura algebraica finita puede ser difícil de comprender para estudiantes en física, pues inmediatamente pensamos en grupos de transformaciones lineales, campos o espacios vectoriales.

Pienso que, una vez que se entiende a las permutaciones como funciones biyectivas y que se mira la trascendencia del Lema de reordenamiento, es posible tener una comprensión completa del concepto de simetría y de los grupos en general.

Finalmente, introduje las tablas de Young como herramientas para representar al grupo de permutaciones en n letras, pues ese fue su propósito inicial y porque resulta más intuitivo relacionar una permutación $\sigma \in S_n$ con una tabla de n cuadros.

Las fórmulas que se emplean para obtener las representaciones de grupos de Lie vía tablas de Young, se deducen a partir del contenido de la sección (2.5); particularmente, son necesarias las representaciones de Sprech y la fórmula de longitud de gancho.

Este texto no pudo abarcar más, pero recomiendo a las lectoras y lectores que continúen con el estudio de grupos de Lie y álgebras de Lie, una vez que se conozcan la teoría de variedades diferenciables y la herramienta de análisis tensorial.

Deseo que la lectura de esta tesis haya sido ligera y fructífera, que motive a las y los estudiantes de física a revisar sus bases matemáticas e incentive la búsqueda de nuevas aplicaciones. También

quiero decirles a mis compañeras y compañeros que trabajar dentro del marco de la física matemática puede asemejarse a la siembra de un árbol, cuyos frutos quizá sólo verán las generaciones futuras. Sin embargo, aunque la belleza de la teoría no garantice la paciencia, sí proporciona una lente distinta; y sólo desde el lugar de *lo distinto* han surgido siempre los cambios.

Bibliografía

- [1] J. J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups* (1995). 4a Edición. Springer-Verlag, New York.
- [2] M. Hall Jr. *The Theory of Groups* (1963). 4a Edición. The Macmillan Company, New York.
- [3] Wu-Ki Tung. *Group Theory in Physics* (1985). World Scientific Publishing Company, Singapore.
- [4] N. C. Carter. *Visual Group Theory* (2009). Mathematical Association of America, Washington DC.
- [5] E. P. Wigner. *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (1959). Academic Press, New York.
- [6] J. Lee. *The Intuition Behind the Isomorphism Theorems* (2018). Consultado el 15/11/2022 en <https://www.grenmester.com/post/isomorphism-theorems/>.
- [7] I. Kleiner. *The Evolution of Group Theory: A Brief Survey* (1986). Mathematics Magazine, Vol. 59, No. 4. Mathematical Association of America.
- [8] Matthew Towers. *2.14) Products of disjoint cycles* (2021). [Archivo de video]. Consultado el 16/11/2022 en <https://www.youtube.com/watch?v=0lVufmeKQqY>.
- [9] J. Chen, J. Ping & F. Wang. *Group Representation Theory for Physicists* (2002). 2a Edición. World Scientific Publishing Company, Singapore.
- [10] N. Jeevanjee. *An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists* (2015). 2a Edición. Springer International Publishing Switzerland.
- [11] J. J. Sakurai, J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics* (1994). 2a Edición. Addison-Wesley (Pearson Education Inc.), San Francisco, CA.
- [12] B. Steinberg. *Representation Theory of Finite Groups. An Introductory Approach* (2012). Springer, New York.
- [13] J. P. Serre. *Linear Representations of Finite Groups* (1977). Springer-Verlag, New York.
- [14] Y. Zhao. *Young Tableaux and the Representations of the Symmetric Group* (2008). Harvard College Mathematics Review Vol. 2, pp 33-45.
- [15] J. Booher. *Representations of the Symmetric Group via Young Tableaux* (2011). Recuperado de <https://people.clas.ufl.edu/jeremybooher/expository-writing/>.
- [16] J. J. Angoa, A. Contreras, et al. *Matemáticas Elementales* (2014). Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

- [17] T. Schedler. *Group representation theory, Lecture Notes* (2021). Recuperado de <https://www.imperial.ac.uk/people/t.schedler/page/talks-and-lectures.html>.
- [18] V. Chapirovalova. *Decomposition of Certain $\mathbb{C}[S_n]$ -modules into Specht Modules* (2008). Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Universidad de Uppsala, Suecia.
- [19] M. von Steinkirch. *Introduction to Group Theory for Physicists* (2011). State University of New York, Stony Brook.
- [20] M. A. Wicks. *Some Notes on Young Tableaux as useful for irreps of $su(n)$* (2011). McGill University, Montreal. Recuperado de <http://www.physics.mcgill.ca/~keshav/673IV/youngtableaux.pdf>.
- [21] H. Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics* (1999). 2a Edición. Westview Press, United States of America.
- [22] S. H. Friedberg, A. J. Insel, et al. *Álgebra Lineal* (1982). 1a Edición en español. Publicaciones Cultural S.A., México.
- [23] J. F. Lucas. *Introduction to Abstract Mathematics* (1990). Rowman & Littlefield. New York.

Índice alfabético

- Algebra de Lie, 63
- Algebra de un Grupo, 136
- Automorfismo, 133

- Caracter, 141
- Caracter de la representación regular, 158
- Caracter irreducible, 142
- Centralizador, 101
- Centro de un grupo, 100
- Ciclo finito ó r-ciclo, 67
- Ciclo infinito, 68
- Cierre normal, 34
- Clase de congruencia, 4, 29
- Clase de conjugación, 96
- Clase de equivalencia, 119, 171
- clase lateral, 24
- Conjugada, 95
- Constituyente irreducible, 144

- Descomposición de la representación regular, 159
- Descomposición de una Representación en Constituyentes Irreducibles, 145
- Determinante, 41
- Diagonalización de una matriz, 130
- Diagrama de Young, 165

- Endomorfismo, 133
- Espacio euclideo, 11
- Estabilizador de columna, 170
- Estabilizador de fila, 170
- Exponente, 21

- Factorización en ciclos disjuntos, 70
- Factorización en trasposiciones, 72
- Función de clase, 143
- Función signo, 73
- Fórmula de longitud de gancho, 190

- Gancho (hook), 190
- Generador infinitesimal, 127
- Grado de una representación, 110

- Grupo, 2
- Grupo abeliano, 4
- Grupo alternante, 74
- Grupo alternante en cuatro letras, 75
- Grupo cociente, 34
- Grupo cíclico, 21
- Grupo cíclico de 2 elementos, 10
- Grupo cíclico de 3 elementos, 22, 158
- Grupo de enteros módulo n , 4, 35
- Grupo de isometrías real, 19
- Grupo de Klein o 4-grupo, 85, 90, 152
- Grupo de permutaciones, 64
- Grupo de rotaciones discretas, 82
- Grupo de traslaciones continuas, 12
- Grupo diedral, 77
- Grupo diedral del triángulo, 78
- Grupo especial lineal, 18
- Grupo especial ortogonal, 36
- Grupo especial ortogonal SO_2 , 37, 122
- Grupo especial ortogonal SO_3 , 60
- Grupo especial unitario, 37
- Grupo especial unitario SU_2 , 60
- Grupo general lineal, 16
- Grupo ortogonal real, 19
- Grupo simple, 35
- Grupo simétrico, 65
- Grupo simétrico en 3 letras, 65, 97, 113, 146
- Grupo unitario, 20
- Grupos isomorfos, 41

- Homomorfismo, 39

- Ideal, 163
- Idempotente, 163
- Identidad de un grupo, 6
- Índice, 30
- Inverso de un elemento, 7
- Isometría, 18
- Isomorfismo, 40

- Lema de dominación, 169
- Lema de reordenamiento, 13

Lema de Schur, 134
 Longitud de gancho (hook's length), 190
 Línea recta, 25

Mapeo natural, 43
 Matrices de Pauli, 61
 Matrices similares, 95
 Matriz anti-hermitiana, 61
 Matriz de cambio de base, 118, 136
 Matriz de diagonalización, 162
 Matriz de permutación, 114
 Matriz de reflexión o inversión, 83
 Matriz de rotación, 81
 Matriz diagonal, 7
 Matriz en bloques diagonales, 120
 Misma estructura de ciclo, 72, 164
 Morfismo, 133
 Multiplicidad, 144
 Módulo de permutaciones, 174

Orden, 21
 Orden de dominación, 166

Partición, 27, 163
 Partición conjugada, 165
 Permutaciones disjuntas, 69
 Permutación, 63
 Permutación identidad, 68
 Permutación impar, 73
 Permutación par, 73
 Politabloide, 177
 Potencias, 9
 Producto de ciclos, 69
 Producto de permutaciones, 65
 Producto de subconjuntos, 32
 Producto directo, 87

Raíces de la unidad, 21, 112, 147
 Reflexión o inversión, 79, 83
 Relaciones de completez, 151
 Relaciones de ortogonalidad de los caracteres, 143
 Relaciones de ortogonalidad de Schur, 139
 Relación de equivalencia, 95
 Representaciones equivalentes, 117
 Representaciones irreducibles de SO_2 , 127
 Representaciones irreducibles de SU_n , 192
 Representaciones irreducibles del grupo de traslaciones, 131
 Representación, 110
 Representación alternante, 148, 181
 Representación antifundamental o representación de espinor dual, 193

Representación completamente reducible, 122
 Representación de Sprech, 180
 Representación degenerada, 112
 Representación estándar, 114, 182
 Representación estándar de S_n , 176
 Representación fiel, 112
 Representación fundamental o representación de espinor, 193
 Representación matricial, 110
 Representación reducible o irreducible, 120
 Representación regular, 77, 155
 Representación regular de un grupo cíclico, 157
 Representación regular matricial, 156
 Representación trivial, 111, 180
 Representación unitaria, 124
 Representante, 24
 Rotación continua, 36
 Rotación discreta, 79

Semigrupo, 2
 Simetría, 77
 Subespacio invariante, 119
 Subespacio mínimo o propio, 119
 Subgrupo, 15
 Subgrupo generado, 22
 Subgrupo normal, 33
 Subgrupo normal máximo, 59
 Subgrupo propio, 16
 Subgrupo trivial, 16
 Subrepresentación, 120
 Suma directa de representaciones, 120

Tabla de caracteres, 148
 Tabla de productos, 13
 Tabla de Young estándar, 168, 184
 Tablas de Young, 163, 167
 Tablas de Young equivalentes, 171
 Tabloide, 171
 Tensor Simétrico o Antisimétrico, 193
 Teorema de Cayley, 76
 Teorema de correspondencia, 52
 Teorema de Lagrange, 30
 Teorema de Maschke, 127
 Teorema de Zassenhaus, 57
 Teoremas de isomorfismos, 44
 Tipo de ciclo de una permutación, 164
 Transformación de similaridad, 117, 136
 Transformación ortogonal, 19
 Transformación unitaria, 20, 124
 Traslación, 66
 Trasposición, 68