



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Posgrado en Física Aplicada

“Interacción de dos sistemas cuánticos con un mismo medio ambiente a temperatura $T=0$ ”

Tesis presentada para obtener el título de
Maestría en Ciências - Física Aplicada

Presenta:

Gustavo Enrique Mejía Salas

Director de Tesis: Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar

Puebla, Pue. Diciembre de 2014

Título: Interacción de dos sistemas cuánticos con un mismo medio ambiente

Estudiante: Gustavo Enrique Mejía Salas

COMITÉ

Dr. Martín Rodolfo Palomino Merino
Presidente

Dr. Javier Miguel Hernández López
Secretario

Dr. Benito Flores Desirena
Vocal

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Suplente

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar
Asesor

Índice general

Introducción

1. Conceptos Básicos de Mecánica Cuántica
 - 1.1. La ecuación de Schrödinger
 - 1.2. El oscilador armónico mecánico-cuántico
 - 1.3. Propiedades de la función de onda
 - 1.4. Notación de Dirac
 - 1.5. El operador de densidad
2. Cuantización del Campo Electromagnético
 - 2.1. Teoría del potencial para el campo electromagnético clásico
 - 2.2. El campo electromagnético libre
 - 2.3. Cuantización del campo electromagnético
3. La Ecuación Maestra
 - 3.1. Derivación de la ecuación maestra
 - 3.2. La ecuación maestra para la interacción de dos sistemas cuánticos interactuando en un mismo medio ambiente a $T = 0$
 - 3.3. Factorización del operador de evolución del tiempo
 - 3.4. El conmutador de los super-operadores $\hat{J}$ y $\hat{L}$
 - 3.5. Solución de la ecuación maestra
4. Aplicando la Solución de la Ecuación Maestra
 - 4.1. Aplicación del estado inicial $\hat{\rho}(0) = |\alpha\rangle_{11}\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle_{11}\langle\beta|$
 - 4.2. Estado final de la ecuación maestra
5. Análisis y Conclusiones
6. Bibliografía

INTRODUCCIÓN

En este proyecto de tesis se estudiará la interacción y evolución de dos sistemas cuánticos en un mismo medio ambiente. Este es un modelo de gran interés en Óptica Cuántica, Computación Cuántica y Teoría de Enredamiento. Los sistemas cuánticos de interés son dos osciladores armónicos y el medio ambiente se modela como un número infinito de osciladores armónicos. Se estudiará la evolución del sistema considerando un estado inicial apropiado para el caso y se propondrá expandir la idea mediante inducción para contemplar la interacción y evolución de un número infinito de sistemas cuánticos en un mismo medio ambiente.

Capítulo 1

Conceptos de la Mecánica Cuántica

§ 1.1. La Ecuación de Schrödinger

El objetivo principal de la Mecánica Cuántica es el de resolver la ecuación de Schrödinger dada una función de potencial $V(q,t)$. Nos enfocaremos en la solución de la ecuación de Schrödinger para el caso unidimensional por su simplicidad y porque es fácil de generalizar para el caso de 3D. También, se supondrá que el potencial es independiente del tiempo ya que casi todos los sistemas tienen potenciales de esa forma. Esto es, $V(q,t) = V(q)$.

La ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial parcial de segundo orden que depende del espacio-tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(q,t)}{\partial q^2} + V(q,t) \Psi(q,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(q,t)}{\partial t} \quad [1.1.1]$$

Se resolverá la ecuación de Schrödinger mediante la técnica estándar de separación de variables.

Primero, suponemos que $\Psi(q,t) = \psi(q)\phi(t)$ [1.1.2]

$$\text{Entonces, } \frac{\partial^2 \Psi(q,t)}{\partial q^2} = \frac{d^2 \psi(q)}{dq^2} \phi(t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Psi(q,t)}{\partial t} = \psi(q) \frac{d\phi(t)}{dt} \quad [1.1.3]$$

Sustituyendo las expresiones [1.1.3] en [1.1.1] se obtiene la ecuación:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(q)}{dq^2} \phi(t) + V(q) \cdot \psi(q) \cdot \phi(t) = i\hbar \psi(q) \frac{d\phi(t)}{dt} \quad [1.1.4]$$

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.1. LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

Dividiendo ambos lados de la ecuación [1.1.4] por [1.1.2], reducimos la ecuación anterior a la expresión:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(q)}{dq^2\psi(q)} + V(q) = i\hbar \frac{d\phi(t)}{dt\phi(t)} \quad [1.1.5]$$

La única forma de que se cumpla la igualdad anterior es que ambas expresiones sean iguales a una constante, a la que por simplicidad llamaremos E .

Es decir,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(q)}{dq^2\psi(q)} + V(q) = E \quad [1.1.6]$$

y

$$i\hbar \frac{d\phi(t)}{dt\phi(t)} = E \quad [1.1.7]$$

Re-escribiremos las expresiones anteriores de la siguiente manera:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(q)}{dq^2} + V\psi(q) = E\psi(q) \quad [1.1.8]$$

y

$$\frac{d\phi(t)}{\phi(t)} = -\frac{i}{\hbar} E dt \quad [1.1.9]$$

La solución de la ecuación [1.1.9] se obtiene mediante integración directa:

$$\int \frac{d\phi(t)}{\phi(t)} = \int -\frac{i}{\hbar} E dt \Rightarrow \ln \phi(t) = -\frac{i}{\hbar} Et + C \Rightarrow \phi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \quad [1.1.10]$$

Una vez que se encuentra la solución para la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo [1.1.6], se puede construir la solución de la ecuación [1.1.2] multiplicando $\psi(q) \cdot \phi(t)$.

La solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo [1.1.6] depende del potencial $V(q)$. En general, existen soluciones a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo solamente para ciertos valores de la energía, los cuales se enlistan en el orden de energía creciente como $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n, \dots$

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.1. LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

A estas energías se les llama *eigenvalores* del potencial $V(q)$; un potencial particular tiene un conjunto particular de *eigenvalores*.

Para cada eigenvalor existe una *eigenfunción* correspondiente

$$\psi_1(q), \psi_2(q), \psi_3(q), \dots, \psi_n(q), \dots$$

la cual es una solución a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo [1.1.6] para el potencial $V(q)$.

Para cada eigenvalor y eigenfunción también existe una función de onda correspondiente

$$\Psi_1(q, t) = \psi_1(q)e^{-iE_1t/\hbar}, \Psi_2(q, t) = \psi_2(q)e^{-iE_2t/\hbar}, \dots, \Psi_n(q, t) = \psi_n(q)e^{-iE_nt/\hbar} \quad \mathbf{[1.1.11]}$$

Si el sistema está descrito por la función de onda $\Psi_n(q, t)$, se dice que el sistema está en el estado cuántico n .

Cada una de las funciones de onda $\Psi_n(q, t)$ es una solución particular a la ecuación de Schrödinger para el potencial $V(q)$. Ya que esta ecuación es lineal se espera que cualquier combinación lineal de estas funciones también sea solución:

$$\Psi(q, t) = c_1\Psi_1(q, t) + c_2\Psi_2(q, t) + \dots = c_1\psi_1(q)e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\psi_2(q)e^{-iE_2t/\hbar} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\Psi_n(q, t) \quad \mathbf{[1.1.12]}$$

La expresión [1.1.12] es la solución más general a la ecuación de Schrödinger para un potencial $V(q)$.

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.2. EL OSCILADOR ARMÓNICO MECÁNICO-CUÁNTICO

§ 1.2. El Oscilador Armónico Mecánico-Cuántico

La energía potencial del oscilador armónico simple está dada por

$$V(q) = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad [1.2.1]$$

Sustituyendo el potencial [1.2.1] en la ecuación [1.1.5] tenemos que:

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2 \psi(q)}{dq^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \psi(q) = E \psi(q) \quad [1.2.2]$$

Se re-escribirá la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el caso del oscilador armónico simple en términos de los operadores p, q y de sus respectivos conmutadores como se muestra a continuación:

Re-escribiendo la ecuación [1.2.2] tenemos que

$$\frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega q)^2] \psi = E \psi, \quad [1.2.3]$$

donde $p \equiv \left(\frac{\hbar}{i}\right) \frac{d}{dq}$ es el operador del momentum.

La idea básica es la de factorizar el Hamiltoniano,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega q)^2] \quad [1.2.4]$$

Como p y q son operadores, y como los operadores no necesariamente conmutan, se proponen las siguientes expresiones:

$$\hat{a}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (-ip + m\omega q) \quad \text{y} \quad \hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (ip + m\omega q) \quad [1.2.5]$$

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.2. EL OSCILADOR ARMÓNICO MECÁNICO-CUÁNTICO

Ahora bien,

$$\hat{a} \cdot \hat{a}^\dagger = \frac{1}{2\hbar m\omega} (ip + m\omega q)(-ip + m\omega q) = \frac{1}{2\hbar m\omega} [p^2 + (m\omega q)^2 - im\omega(qp - pq)] \quad [1.2.6]$$

Este resultado contiene el término $qp - pq$, al cual llamaremos conmutador de q y p

En general, el conmutador de dos operadores A y B se expresa como

$$[A, B] = AB - BA \quad [1.2.7]$$

Usando esta notación, tenemos que

$$\hat{a} \cdot \hat{a}^\dagger = \left[\frac{p^2 + (m\omega q)^2}{2\hbar m\omega} \right] - \frac{i}{2\hbar} [q, p] \quad [1.2.8]$$

Utilizando la relación $p = \left(\frac{\hbar}{i} \right) \frac{d}{dq}$, se puede comprobar que $[q, p] = i\hbar$, permitiendo re-escribir la ecuación [1.2.8] como

$$\hat{a} \cdot \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\hbar\omega} \hat{H} + \frac{1}{2}, \quad \text{o} \quad \hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a} \cdot \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \right) \quad [1.2.9]$$

De las expresiones [1.2.5] tenemos que:

$$\hat{a}^\dagger \cdot \hat{a} = \frac{1}{2\hbar m\omega} (-ip + m\omega q)(ip + m\omega q) = \frac{1}{2\hbar m\omega} [p^2 + (m\omega q)^2 - im\omega(pq - qp)] \quad [1.2.10]$$

Este resultado contiene el término $pq - qp$, al cual llamaremos conmutador de p y q . En seguida se demostrará que $[p, q] = -i\hbar$

$$[p, q]f(q) = \left(\frac{\hbar}{i} \right) \frac{d}{dq} (q \cdot f(q)) - q \left(\frac{\hbar}{i} \right) \frac{df(q)}{dq} = \left(\frac{\hbar}{i} \right) f(q) + q \left(\frac{\hbar}{i} \right) \frac{df(q)}{dq} - q \left(\frac{\hbar}{i} \right) \frac{df(q)}{dq} = -i\hbar f(q).$$

Por lo tanto, $[p, q] = -i\hbar$

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.2. EL OSCILADOR ARMÓNICO MECÁNICO-CUÁNTICO

Por lo anterior, podemos concluir que

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \left[\frac{p^2 + (m\omega q)^2}{2\hbar m\omega} \right] - \frac{1}{2} = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad [1.2.11]$$

En términos de los operadores de creación $\hat{a}^\dagger$ y de aniquilación $\hat{a}$, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el oscilador armónico toma la forma:

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \psi = E \psi \quad \text{ó} \quad \hbar\omega \left(\hat{a} \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \right) \psi = E \psi \quad [1.2.12]$$

Como $\hat{H}\psi = E\psi$, entonces

$$\begin{aligned} \hat{H}(\hat{a}^\dagger \psi) &= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \cdot \hat{a} + \frac{1}{2} \right) (\hat{a}^\dagger \psi) = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} \cdot \hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger \right) \psi \\ &= \hbar\omega \hat{a}^\dagger \left(\hat{a} \cdot \hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} \right) \psi = \hat{a}^\dagger \left[\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \cdot \hat{a} + 1 + \frac{1}{2} \right) \psi \right] \\ &= \hat{a}^\dagger (H + \hbar\omega) \psi = \hat{a}^\dagger (E + \hbar\omega) \psi = (E + \hbar\omega) (\hat{a}^\dagger \psi) \Rightarrow \hat{H}(\hat{a}^\dagger \psi) = (E + \hbar\omega) (\hat{a}^\dagger \psi) \end{aligned} \quad [1.2.13]$$

Similarmente, para $\hat{a} \psi$ tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{H}(\hat{a} \psi) &= \hbar\omega \left(\hat{a} \cdot \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \right) (\hat{a} \psi) = \hbar\omega \hat{a} \left(\hat{a}^\dagger \cdot \hat{a} - \frac{1}{2} \right) \psi \\ &= \hat{a} \left[\hbar\omega \left(\hat{a} \cdot \hat{a}^\dagger - 1 - \frac{1}{2} \right) \psi \right] = \hat{a} (H - \hbar\omega) \psi = \hat{a} (E - \hbar\omega) \psi = (E - \hbar\omega) (\hat{a} \psi). \end{aligned} \quad [1.2.14]$$

Para determinar las eigenfunciones, las cuales son soluciones a la ecuación de Schrödinger, debemos encontrar primero la solución para la

energía más baja $\hat{a} \psi_0 = 0$. $\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\hbar \frac{d}{dq} + m\omega q \right) \psi_0 = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d\psi_0}{dq} = -\frac{m\omega}{\hbar} q \psi_0$

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.2. EL OSCILADOR ARMÓNICO MECÁNICO-CUÁNTICO

$$\int \frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar} \int q dq \rightarrow \ln \psi_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar} q^2 + C \rightarrow \psi_0 = Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar} q^2} \quad [1.2.15]$$

Normalizando la función [1.2.15] se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^* \psi_0 dq = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\omega q^2}{\hbar}} dq = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi \cdot \hbar}{m \cdot \omega}} = 1$$
$$A = \left(\frac{m \cdot \omega}{\pi \cdot \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \rightarrow \psi_0(q) = \left(\frac{m \cdot \omega}{\pi \cdot \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m \cdot \omega \cdot q^2}{2\hbar}} \quad [1.2.16]$$

Ahora, para determinar la energía de este estado, sustituimos el resultado [1.2.16] en la primera ecuación de [1.2.12] y simplificando se obtiene:

$$\hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \psi_0 = E_0 \psi_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \psi_0 \rightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad [1.2.17]$$

Para generar los estados n , simplemente se aplica el operador de creación sucesivamente:

$$\psi_n(q) = A_n (a^\dagger)^n \psi_0(q), \quad [1.2.18]$$

donde

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad [1.2.19]$$

Se puede demostrar que:

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \psi_0 \quad [1.2.20]$$

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.3. ALGUNAS PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE ONDA

§ 1.3. Algunas Propiedades de La Función de Onda $\Psi(q,t)$.

Densidad de Probabilidad

La conexión básica entre las propiedades de la función de onda $\Psi(q,t)$ y el comportamiento de la partícula asociada queda expresada en términos de la *densidad de probabilidad* $P(q,t)$. Esta cantidad especifica la probabilidad, por unidad de longitud del eje q de encontrar a la partícula en la vecindad de la coordenada q al tiempo t . En 1926 Max Born postuló la relación entre la densidad de probabilidad y la función de onda

$$P(q,t) = \Psi^*(q,t) \cdot \Psi(q,t) \quad [1.3.1]$$

El postulado dice: *Si en el instante t se realiza una medición para localizar a la partícula asociada con la función de onda $\Psi(q,t)$ entonces la probabilidad $P(q,t)dq$ de encontrar a la partícula en una coordenada entre q y $q + dq$ es igual a* $\Psi^*(q,t) \cdot \Psi(q,t)dq$ [1.3.2]

Si la partícula existe, la probabilidad total de encontrar a la partícula en algún lugar sobre todo el eje q es necesariamente igual a uno. Esta probabilidad total se puede obtener matemáticamente integrando la función de densidad de probabilidad sobre toda q y se expresa como

$$\int_{-\infty}^{\infty} Pdq = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi dq = 1 \quad [1.3.3]$$

Valores Esperados

Las funciones de onda son útiles ya que contienen bastante información acerca del comportamiento de la partícula asociada. Considérese a una partícula y a su función de onda asociada $\Psi(q,t)$. En una medición de la posición de la partícula en el sistema descrito por la función de onda, existirá una probabilidad finita de encontrarla en cualquier coordenada q en el intervalo de q a $q + dq$ siempre que la función de onda no sea cero en este intervalo. En general la función de onda no es cero sobre una región extensa del eje q , por lo tanto, generalmente no somos capaces de establecer que la coordenada q de la partícula tiene cierto valor definido.

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.3. ALGUNAS PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE ONDA

Sin embargo, es posible especificar algún tipo de posición promedio para la partícula de la manera siguiente: Se hace una medición de la posición de la partícula en el instante t . La probabilidad de encontrarla entre q y $q + dq$, de acuerdo con el postulado de Born es:

$$P(q,t)dq = \Psi^*(q,t)\Psi(q,t)dq$$

Estas mediciones se realizan cierto número de veces sobre sistemas idénticos descritos por la misma función de onda $\Psi(q,t)$ y siempre para el mismo valor de t , registrando los valores de q en los cuales se encontró la partícula. Un ejemplo sería un conjunto de mediciones de las coordenadas q de las partículas en los estados de menor energía de osciladores armónicos simples idénticos. Se puede utilizar el promedio de los valores observados para caracterizar la posición de una partícula asociada con la función de onda $\Psi(q,t)$ para el tiempo t . Este valor promedio se le denominará el valor esperado de la coordenada q de la partícula al instante t y está dado por:

$$\langle q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} qP(q,t)dq = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(q,t)q\Psi(q,t)dq \quad [1.3.4]$$

El valor esperado de cualquier cantidad dinámica que está en función de $f(q,p,t)$ esta dado por:

$$\langle f(q,p,t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(q,t)f_{op}\left(q,-i\cdot\hbar\frac{\partial}{\partial q},t\right)\Psi(q,t)dq, \quad [1.3.5]$$

donde el operador $f_{op}\left(q,-i\cdot\hbar\frac{\partial}{\partial q},t\right)$ se obtiene a partir de la función

$f(q,p,t)$ al sustituir p por $-i\cdot\hbar\frac{\partial}{\partial q}$.

§ 1.4. Notación de Dirac

En la mecánica cuántica el estado de un sistema se representa mediante un vector de estado en un espacio vectorial complejo (Espacio de Hilbert) . Dirac le dio el nombre de *ket* a este vector de estado y se denota por $|\Psi\rangle$ (análogo a la función de onda $\Psi(q,t)$). El vector *ket*, o simplemente el *ket* contiene toda la información acerca del estado del sistema tal y como lo como la contiene la función de onda $\Psi(q,t)$.

Un observable como el momento o energía pueden ser representados por un operador A en el espacio vectorial en cuestión. Un operador “actúa” sobre un ket desde la izquierda del ket y dicha operación resulta en otro ket:

$$A \cdot (|\alpha\rangle) = A|\alpha\rangle \mapsto A(\Psi(q,t)) \quad [1.4.1]$$

Existen *kets* particulares, conocidos como *eigenkets* del operador A , denotados por

$$|\alpha'\rangle, |\alpha''\rangle, |\alpha'''\rangle, \dots \quad [1.4.2]$$

que cumplen con la propiedad

$$A|\alpha'\rangle = \alpha'|\alpha'\rangle, A|\alpha''\rangle = \alpha''|\alpha''\rangle, \dots \quad [1.4.3]$$

donde $\alpha', \alpha'', \dots$ son los eigenvalores. Nótese que aplicando el operador A sobre un eigenket produce justamente el mismo ket multiplicado por un número complejo.

Al conjunto de los números $\{\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots\}$ se le llama el conjunto de eigenvalores del operador A . Al estado físico descrito por un eigenket se le denomina eigenestado.

Un ket arbitrario $|\alpha\rangle$ puede ser escrito como $|\alpha\rangle = \sum_{\alpha'} c_{\alpha'} |\alpha'\rangle$, $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(N)}$,

donde $c_{\alpha'}$ es un coeficiente complejo, que es análogo a la función de onda:

$$\Psi(q,t) = c_1 \Psi_1(q,t) + c_2 \Psi_2(q,t) + c_3 \Psi_3(q,t) + \dots = c_1 \psi_1(q) e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2(q) e^{-iE_2 t/\hbar} + c_3 \psi_3(q) e^{-iE_3 t/\hbar} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Psi_n(q,t)$$

Bras, Productos Internos y Productos Externos

El espacio vectorial con el que hemos estado trabajando es un “espacio ket”. En seguida introducimos la noción de un espacio bra, un espacio vectorial dual al espacio ket. Postulamos que para cada ket $|\alpha\rangle$ existe un bra, denotado por $\langle\alpha|$, en un espacio dual al espacio ket, llamado espacio bra. El espacio bra es generado por eigenbras $\langle\alpha'|$ que corresponden a los eigenkets $|\alpha'\rangle$. Existe una correspondencia dual (C.D.) uno-a-uno entre el espacio ket y el espacio bra:

$$|\alpha\rangle \xleftrightarrow{\text{C.D.}} \langle\alpha|$$

El bra dual a $c|\alpha\rangle$ se representa como $c^*\langle\alpha| \mapsto c\Psi(q,t) \xleftrightarrow{\text{C.D.}} c^*\Psi^*(q,t)$

En general $c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle \xleftrightarrow{\text{C.D.}} c_\alpha^*\langle\alpha| + c_\beta^*\langle\beta|$ [1.4.4]

Un operador X actúa siempre sobre un bra desde la derecha $(\langle\alpha|) \cdot X = \langle\alpha|X$ y el producto resultante es otro bra. El ket $X|\alpha\rangle$ y el bra $\langle\alpha|X$ no son generalmente duales uno del otro.

Definimos el símbolo $X^\dagger$ como $X|\alpha\rangle \xleftrightarrow{\text{D.C.}} \langle\alpha|X^\dagger$. [1.4.5]

El operador $X^\dagger$ se conoce como el operador adjunto Hermitiano, o simplemente el adjunto, de X . Un operador es Hermitiano si $X = X^\dagger$.

Ahora definimos el **producto interno** de un bra y un ket. El producto se escribe como un bra a la izquierda y un ket a la derecha, por ejemplo,

$$\langle\beta|\alpha\rangle = (\langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle). \quad \text{[1.4.6]}$$

Este producto interno es en general un número complejo. Note que al formar un producto interno siempre tomamos un vector del espacio bra y un vector del espacio ket.

Postulamos dos propiedades fundamentales de los productos internos que nos serán útiles. Primero, $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$ [1.4.7]

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.4. NOTACIÓN DE DIRAC

En otras palabras, $\langle \beta | \alpha \rangle$ y $\langle \alpha | \beta \rangle$ son complejos conjugados uno del otro.

Segundo, $\langle \alpha | \alpha \rangle \geq 0$ [1.4.8]

Dos kets $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son ortogonales si $\langle \alpha | \beta \rangle = 0$. Podemos normalizar un ket $|\tilde{\alpha}\rangle$, donde $|\tilde{\alpha}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}} \right) |\alpha\rangle$, con la propiedad $\langle \tilde{\alpha} | \tilde{\alpha} \rangle = 1$. $\mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi dq = 1$

Al producto $(|\beta\rangle) \cdot (\langle \alpha|) = |\beta\rangle\langle \alpha|$ [1.4.9]

se le conoce como el **producto externo**. El producto antes mencionado resulta en un operador que rota un ket $|\gamma\rangle$ arbitrario en la dirección de $|\beta\rangle$.

Ej. $(|\beta\rangle\langle \alpha|)|\gamma\rangle = |\beta\rangle\langle \alpha|\gamma\rangle = \langle \alpha|\gamma\rangle|\beta\rangle$.

Si $X = |\beta\rangle\langle \alpha|$, $X^\dagger = |\alpha\rangle\langle \beta|$.

$\langle \beta | X | \alpha \rangle = \langle \beta | \cdot (X | \alpha \rangle) = \{ (\langle \alpha | X^\dagger) \cdot |\beta\rangle \}^* = \langle \alpha | X^\dagger | \beta \rangle^*$ y para un operador X

Hermitiano tenemos $\langle \beta | X | \alpha \rangle = \langle \alpha | X | \beta \rangle^*$. [1.4.10]

Bases Kets

Eigenkets de un Observable.

Teorema: Los eigenvalores de un operador Hermitiano A son reales; los eigenkets de A correspondientes a eigenvalores distintos, son ortogonales.

$$A|\alpha'\rangle = \alpha'|\alpha'\rangle.$$

$$\alpha' = \text{real}, \quad \langle \alpha'' | \alpha' \rangle = 0$$

Es conveniente normalizar $|\alpha'\rangle$ de tal manera que $\{|\alpha'\rangle\}$ formen un

conjunto ortonormal: $\langle \alpha'' | \alpha' \rangle = \delta_{\alpha'' \alpha'}$ [1.4.11]

Eigenkets

Un ket arbitrario en el espacio ket se puede expandir en términos de los eigenkets de A. En otras palabras los eigenkets de A se utilizarán como bases ket análogo a los vectores unitarios en el espacio Euclidiano.

Dado un ket arbitrario $|\alpha\rangle$ en el espacio ket de A, intentemos expandir el ket como sigue:

$$|\alpha\rangle = \sum_a c_a |a\rangle$$

Si multiplicamos por la izquierda la igualdad por $\langle a|$ y utilizando la propiedad de ortonormalidad, encontramos los coeficientes de expansión $c_a = \langle a|\alpha\rangle$.

En otras palabras, tenemos $|\alpha\rangle = \sum_a |a\rangle \langle a|\alpha\rangle$, que es análogo a la expansión de un vector V en el espacio Euclidiano:

$$V = \sum_i \hat{e}_i (\hat{e}_i \cdot V) \text{ donde } \{\hat{e}_i\} \text{ forman un conjunto ortonormal.}$$

De la expansión del ket α podemos deducir que $\sum_a |a\rangle \langle a| = 1$ [1.4.12]
conocido como el operador de identidad.

Representación Matricial

En la base dada por $\{|u_i\rangle\}$, el ket $|\psi\rangle$ se representa mediante el conjunto de sus componentes, o sea por el conjunto de números $c_i = \langle u_i|\psi\rangle$. Estos números se pueden ordenar verticalmente para formar una matriz columna:

$$\begin{pmatrix} \langle u_1|\psi\rangle \\ \langle u_2|\psi\rangle \\ \vdots \\ \langle u_i|\psi\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \quad [1.4.13]$$

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.4. NOTACIÓN DE DIRAC

Ahora, sea $\langle\varphi|$ un bra arbitrario. En términos de las bases $\{|u_i\rangle\}$, podemos escribir $\langle\varphi| = \sum_i \langle\varphi|u_i\rangle\langle u_i|$. **[1.4.14]**

Los componentes de $\langle\varphi|$, $\langle\varphi|u_i\rangle$, son los complejos conjugados de los componentes $b_i = \langle u_i|\varphi\rangle$ del ket $|\varphi\rangle$ asociado al bra $\langle\varphi|$.

Los componentes $\langle\varphi|u_i\rangle$ del bra $\langle\varphi|$ se pueden ordenar horizontalmente para formar una matriz de hilera o renglón (compuesta por una hilera o renglón y un número infinito de columnas)

$$(\langle\varphi|u_1\rangle\langle\varphi|u_2\rangle\cdots\langle\varphi|u_i\rangle\cdots) \quad \mathbf{[1.4.15]}$$

Utilizando esta convención, $\langle\varphi|\psi\rangle$ es la matriz resultante del producto de la matriz columna que representa $|\psi\rangle$ y la matriz renglón que representa $\langle\varphi|$. El resultado es una matriz que contiene un renglón por una columna, o sea un número.

Representación del operador lineal A

Dado un operador lineal A, podemos asociar a la base $|u_i\rangle$ una serie de números definido por $A_{ij} = \langle u_i|A|u_j\rangle$. **[1.4.16]**

Estos números dependen de dos índices y por lo tanto pueden ser ordenados en una matriz cuadrada que contiene un número infinito de hileras y columnas de manera convencional.

Así, en la base $\{|u_i\rangle\}$, el operador A se representa por medio de la matriz

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \quad \mathbf{[1.4.17]}$$

Representación matricial del ket $|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$

Se plantea el siguiente problema: Conociendo los componentes del ket $|\psi\rangle$ y los elementos de la matriz A en una representación dada, ¿Cómo podemos calcular los componentes de $|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$ en la misma representación?

La matriz columna que representa a $|\psi'\rangle$ es igual al producto de la matriz columna representada por $|\psi\rangle$ y la matriz cuadrada representada por A:

$$|\psi'\rangle = A|\psi\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ A_{j1} & A_{j2} & \cdots & A_{jj} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad [1.4.18]$$

Expresión del número $\langle\phi|A|\psi\rangle$

La expresión $\langle\phi|A|\psi\rangle$ es un número, es decir, una matriz de un renglón por una columna, la cual se obtiene al multiplicar la matriz columna $|\psi\rangle$ por la matriz cuadrada A y al final por la matriz renglón $\langle\phi|$.

$$\langle\phi|A|\psi\rangle = \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* & \cdots & b_i^* & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ A_{j1} & A_{j2} & \cdots & A_{jj} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad [1.4.19]$$

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.4. NOTACION DE DIRAC

Usando la convención anterior podemos expresar el producto externo de $|\psi\rangle\langle\psi|$ mediante la matriz cuadrada

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* & \cdots & c_j^* & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* & \cdots & c_1 c_j^* & \cdots \\ c_2 c_1^* & c_2 c_2^* & \cdots & c_2 c_j^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ c_i c_1^* & c_i c_2^* & \cdots & c_i c_j^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \quad \textbf{[1.4.20]}$$

§ 1.5. El Operador de Densidad

Para determinar el estado de un sistema en un instante dado, se toman una serie de mediciones. Sin embargo, en la práctica, el estado de un sistema no se encuentra perfectamente determinado. Esto es cierto, por ejemplo, para el estado de polarización de fotones provenientes de una fuente natural de luz y para los átomos de un haz emitidos de un horno a temperatura T , donde la energía cinética de los átomos se conoce estadísticamente. El problema que presenta la descripción mecánico-cuántica de tales sistemas es el siguiente: Como podemos incorporar en el formalismo la información incompleta que tenemos del estado del sistema, de tal manera que nuestras predicciones hagan el uso máximo de esta información parcial. Para hacer esto, debemos introducir una herramienta matemática conocida como el operador de densidad, el cual facilita la aplicación simultánea de los postulados de la mecánica cuántica y los resultados de los cálculos de probabilidades.

El concepto de una mezcla estadística de estados.

Cuando uno tiene información incompleta acerca de un sistema, uno típicamente apela al concepto de probabilidad. Por ejemplo, sabemos que un fotón emitido por una fuente de luz natural puede tener cualquier estado de polarización con idéntica probabilidad. Similarmente, un sistema en equilibrio termodinámico a temperatura T tiene una probabilidad proporcional a $e^{-E_n/kT}$ de encontrarse en un estado de energía E_n .

Generalmente, la información incompleta que se tiene acerca del sistema usualmente se presenta de la siguiente manera: el estado del sistema puede estar en el estado $|\psi_1\rangle$ con probabilidad p_1 o en el estado $|\psi_2\rangle$ con probabilidad p_2 , etc. Obviamente:

$$p_1 + p_2 + \cdots = \sum_k p_k = 1 \quad [1.5.1]$$

Se dice entonces que se está trabajando con una mezcla estadística de estados $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$ con probabilidades $p_1, p_2, \dots$. Si el estado del sistema $|\psi_k\rangle$ tiene probabilidad p_k , la probabilidad de obtener uno u otro resultado debe ser pesado por p_k y sumado sobre los valores de k , o sea sobre todos los estados de la mezcla estadística de estados.

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.5. EL OPERADOR DE DENSIDAD

El estado del sistema compuesto por una mezcla estadística de estados se puede escribir como:

$$|\psi\rangle = p_1|\psi_1\rangle + p_2|\psi_2\rangle = \sum_k p_k|\psi_k\rangle \quad [1.5.2]$$

y no deberá ser confundido con un sistema cuyo estado $|\psi\rangle$ esta compuesto por una superposición de estados: $|\psi\rangle = \sum_k c_k|\psi_k\rangle$.

Introducción al operador de densidad

Se examina en seguida el caso donde el estado del sistema es perfectamente conocido (todas las probabilidades p_k son cero excepto una, la cual es igual a 1. Se dice que el sistema se encuentra en un estado puro. Se demostrará que al caracterizar el sistema por su vector de estado es equivalente que al caracterizarlo mediante un operador que actúa en el espacio del estado y que se conoce como el operador de densidad.

Descripción del sistema mediante el vector de estado.

Se considera un sistema cuyo vector de estado en el tiempo t es:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|u_n\rangle \quad [1.5.3]$$

donde $\{|u_n\rangle\}$ es una base ortonormal del espacio de estado discreto.

Los coeficientes $c_n(t)$ satisfacen la relación

$$\sum_n |c_n(t)|^2 = 1 \quad [1.5.4]$$

lo que indica que $|\psi(t)\rangle$ se encuentra normalizado.

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.5. EL OPERADOR DE DENSIDAD

Si A es un observable y sus elementos de matriz son

$$\langle u_n | A | u_p \rangle = A_{np} \quad [1.5.5]$$

el valor esperado de A en el instante t esta dado por

$$\langle A \rangle(t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \sum_{n,p} c_n^*(t) c_p(t) A_{np} \quad [1.5.6]$$

Finalmente, la evolución en el tiempo de $|\psi(t)\rangle$ se describe por medio de la

ecuación de Schrödinger: $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad [1.5.7]$

donde $H(t)$ es el Hamiltoniano del sistema.

Descripción de un estado mediante el operador de densidad:

La relación [1.5.6] muestra que los coeficientes $c_n(t)$ entran en los valores promedio a través de expresiones cuadráticas del tipo $c_n^*(t) c_p(t)$.

$$\langle u_p | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | u_n \rangle = c_n^*(t) c_p(t) \quad [1.5.8]$$

Estos valores son simplemente los elementos de matriz del operador $|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$, el operador proyector sobre el estado $|\psi(t)\rangle$.

Por lo tanto, es natural introducir el operador de densidad $\rho(t)$ definido por:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \quad [1.5.9]$$

El operador de densidad se representa mediante una matriz llamada la matriz de densidad cuyos elementos son:

$$\rho_{pn}(t) = \langle u_p | \rho(t) | u_n \rangle = c_n^*(t) c_p(t) \quad [1.5.10]$$

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

1.5. EL OPERADOR DE DENSIDAD

Se demostrará que especificando $\rho(t)$ es suficiente para caracterizar el estado cuántico del sistema y además nos permite obtener todas las predicciones físicas que pueden ser calculadas del $|\psi(t)\rangle$.

De acuerdo a [1.5.4], la suma de los elementos diagonales de la matriz de densidad es 1:

$$\sum_n |c_n(t)|^2 = \sum_n p_{nn}(t) = \text{Tr}\rho(t) = 1 \quad [1.5.11]$$

Además,

$$\langle A \rangle(t) = \sum_{n,p} \langle u_p | \rho(t) | u_n \rangle \langle u_n | A | u_p \rangle = \sum_p \langle u_p | \rho(t) A | u_p \rangle = \text{Tr}\{\rho(t)A\} \quad [1.5.12]$$

Finalmente, la evolución del tiempo del operador $\rho(t)$ puede deducirse a partir de la ecuación de Schrödinger como se muestra a continuación:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \left(\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right) \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t)| \right) = \frac{1}{i\hbar} H(t) |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| + \frac{1}{(-i\hbar)} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| H(t) = \frac{1}{i\hbar} [H(t), \rho(t)]$$

[1.5.13]

Por lo tanto, en términos del operador de densidad, la conservación de probabilidad se expresa como:

$$\text{Tr}\rho(t) = 1 \quad [1.5.14]$$

El valor promedio de un observable A se calcula usando la fórmula:

$$\langle A \rangle(t) = \text{Tr}\{A\rho(t)\} = \text{Tr}\{\rho(t)A\} \quad [1.5.15]$$

La evolución del tiempo cumple con la ecuación:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [H(t), \rho(t)] \quad [1.5.16]$$

Capítulo 2

Cuantización del Campo Electromagnético

§ 2.1 Teoría del Potencial del Campo Electromagnético Clásico

El paso principal en la cuantización del campo electromagnético consiste en reemplazar el oscilador armónico clásico por el oscilador armónico cuántico. Primero, se re-escribirán las ecuaciones de Maxwell de tal manera que la dependencia de las variables de campo del oscilador armónico clásico sean apropiadas para la conversión a la mecánica cuántica.

Las ecuaciones de Maxwell en un medio para los campos electromagnéticos son:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad [2.1.1]$$

$$\mu_0^{-1} \nabla \times B = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right) + J, \quad [2.1.2]$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot E = \sigma, \quad [2.1.3]$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad [2.1.4]$$

donde σ y J son las densidades de carga y corriente, respectivamente. Los campos y las densidades clásicas son funciones de la posición y del tiempo, por ejemplo $E \equiv E(r, t)$.

La cuantización del campo electromagnético se facilita si las ecuaciones de Maxwell se re-escriben en términos de los vectores escalares y potenciales ϕ y A . La ecuación [2.1.4] se satisface si B se deriva a partir de un potencial A de acuerdo a

$$B = \nabla \times A. \quad [2.1.5]$$

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

2.1 TEORÍA DEL POTENCIAL PARA EL CAMPO E-M CLÁSICO

Cuando se utiliza la identidad $\nabla \times \nabla \phi \equiv 0$, [2.1.6]

donde ϕ es una función escalar, se puede demostrar que la primera de las ecuaciones de Maxwell se satisface si ϕ se define como

$$\nabla \phi = -E - \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) \quad [2.1.7]$$

ó
$$E = -\nabla \phi - \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) \quad [2.1.8]$$

Las ecuaciones [2.1.5] y [2.1.8] nos permiten encontrar los campos electromagnéticos si los potenciales escalar ϕ y vectorial A se conocen.

Los potenciales se determinan, en principio, al sustituir los campos [2.1.5] y [2.1.8] en las ecuaciones de Maxwell dando como resultado:

$$\mu_0^{-1} \nabla \times (\nabla \times A) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) \right) + J \Rightarrow \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu_0 J \quad [2.1.9]$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) \right) = \sigma \Rightarrow -\varepsilon_0 \nabla^2 \phi - \varepsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) = \sigma, \quad [2.1.10]$$

Donde
$$c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}} \quad [2.1.11]$$

y se utiliza la identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times A \equiv \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \quad [2.1.12]$$

Las ecuaciones [2.1.9] y [2.1.10] son las ecuaciones de campo, las cuales determinan los campos que resultan a partir de las distribuciones de carga σ y de corriente J .

Las ecuaciones de campo son algo complicadas de usar debido a la combinación de términos A y ϕ . Estas ecuaciones se simplifican si se impone a los potenciales condiciones adicionales.

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

2.1 TEORÍA DEL POTENCIAL PARA EL CAMPO E-M CLÁSICO

Los campos que se obtienen de las ecuaciones [2.1.5] y [2.1.8] son los mismos para los potenciales A, ϕ y A', ϕ' relacionados por una transformación de gauge definida como:

$$A = A' - \nabla \Xi \quad [2.1.13]$$

$$\phi = \phi' + \frac{\partial \Xi}{\partial t}, \quad [2.1.14]$$

donde la función gauge Ξ es una función de la posición r y tiempo t .

Un gauge para el campo electromagnético se especifica mediante una condición impuesta en A y ϕ que se puede realizar por una transformación gauge a partir de un par de soluciones arbitrarias de las ecuaciones de campo para J y σ dadas.

El campo electromagnético se dice que se encuentra en el gauge de Coulomb cuando el vector de potencial satisface la condición

$$\nabla \cdot A = 0. \quad [2.1.15]$$

Es posible transformar un potencial arbitrario a un gauge de Coulomb A' mediante el uso de una función de gauge que satisface

$$\nabla^2 \Xi = \nabla \cdot A' \quad [2.1.16]$$

El uso del gauge de Coulomb simplifica las ecuaciones de campo [2.1.9] y [2.1.10], las cuales se expresan como:

$$-\nabla^2 A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu_0 J \quad [2.1.17]$$

$$-\nabla^2 \phi = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [2.1.18]$$

Por lo anterior, el escalar potencial ahora satisface las ecuaciones de Poisson de la electrostática, cuyas soluciones son conocidas.

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

2.1 TEORÍA DEL POTENCIAL PARA EL CAMPO E-M CLÁSICO

Las ecuaciones de campo [2.1.17] que determinan A quedan expresadas de tal manera que es complicado utilizarlas ya que aparece el término ϕ , pero este inconveniente se elimina mediante los siguientes argumentos. De acuerdo al teorema de Helmholtz, cualquier campo vectorial puede ser escrito como la suma de dos componentes, uno que tiene divergencia de cero y el otro que tiene rotacional de cero. Para la densidad de corriente, la suma se escribe como:

$$J = J_T + J_L \quad [2.1.19]$$

donde $\nabla \cdot J_T = 0 \quad [2.1.20]$

y $\nabla \times J_L = 0 \quad [2.1.21]$

A J_T se le conoce como el componente transversal o solenoide y a J_L como el componente longitudinal o no-rotacional. Definiciones y nomenclatura similar aplica para otros campos vectoriales. Por ejemplo, es evidente que de la ecuación [2.1.5] el campo magnético B se determina solamente por la parte transversal A_T del vector potencial. De la ecuación [2.1.6] se sigue que $\nabla \Xi$ es longitudinal para toda función gauge Ξ . La transformación gauge de la ecuación [2.1.13] afecta solo la parte longitudinal A_L del vector potencial y la parte transversal A_T es gauge-invariante, dejando el campo magnético observable sin cambio. La definición de Coulomb gauge en la ecuación [2.1.15] identifica a A como transversal, con la parte longitudinal completamente transformada.

Con el uso de estas definiciones y suponiendo la condición gauge de Coulomb [2.1.15], la ecuación completa del campo [2.1.17] es separada en sus partes transversal y longitudinal como:

$$-\nabla^2 A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu_0 J_T \quad [2.1.22]$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi = \mu_0 J_L, \quad [2.1.23]$$

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

2.1 TEORÍA DEL POTENCIAL PARA EL CAMPO E-M CLÁSICO

El vector potencial se determina entonces por su parte transversal de la densidad de corriente y la ecuación [2.1.22] tiene soluciones formales bien conocidas. El potencial escalar satisface las ecuaciones [2.1.18] y [2.1.23] eliminándolas una de otra genera la ecuación de la conservación de la carga.

$$\nabla \cdot J_L = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad [2.1.24]$$

El vector eléctrico puede también dividirse en sus componentes transversal y longitudinal, donde el uso de la ecuación [2.1.8] muestra que las partes son identificadas en el gauge de Coulomb como

$$E_T = -\frac{\partial A}{\partial t} \quad [2.1.25]$$

$$E_L = -\nabla \phi. \quad [2.1.26]$$

De acuerdo a la ecuación de Maxwell [2.1.4], el vector magnético B es enteramente transverso. La gran ventaja del gauge de Coulomb para el campo de radiación y su interacción con las cargas y corrientes reside en las separaciones sencillas de las ecuaciones de campo y las ecuaciones de Maxwell en dos conjuntos distintos.

En resumen, las ecuaciones transversas están asociadas con el vector potencial A como en las ecuaciones [2.1.25]. La ecuación de campo [2.1.22] tiene la forma de una ecuación de onda y las ecuaciones de Maxwell [2.1.1] a [2.1.4] se convierten en:

$$\nabla \times E_T = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad [2.1.27]$$

$$\mu_0^{-1} \nabla \times B = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right) + J_T \quad [2.1.28]$$

$$\nabla \cdot E_T = 0 \quad [2.1.29]$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad [2.1.30]$$

Estas ecuaciones transversales describen ondas electromagnéticas, las cuales son influenciadas por la parte transversa de la densidad de corriente.

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

2.1 TEORÍA DEL POTENCIAL PARA EL CAMPO E-M CLÁSICO

Las ecuaciones longitudinales, por otro lado, están asociadas con el potencial escalar ϕ como en la ecuación [2.1.26] y la ecuación de campo relevante es [2.1.18]. La ecuación de Maxwell [2.1.3] da como resultado

$$\nabla \cdot E_L = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [2.1.31]$$

y la densidad de corriente longitudinal se obtiene a partir de las ecuaciones [2.1.23] y [2.1.26]

$$J_L = -\epsilon_0 \frac{\partial E_L}{\partial t} \quad [2.1.32]$$

Las ecuaciones longitudinales describen los campos eléctricos que emanan de la densidad de carga, como se determinan mediante las ecuaciones de la electrostática.

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

2.2 EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO LIBRE

§ 2.2. El Campo Electromagnético Libre

Ya se ha considerado el campo electromagnético en una región del espacio donde

$$J_T = 0 \quad [2.2.1]$$

de la ecuación [2.1.22] se sigue que
$$-\nabla^2 A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad [2.2.2]$$

Se dice que el campo en esta región del espacio es libre. La teoría de la interacción de la radiación con los átomos requiere la solución al problema donde J_T representa la corriente transversal producida por los electrones de los átomos.

La cuantización del campo electromagnético se obtiene al re-emplazar el potencial vectorial clásico A por un operador mecánico-cuántico $\hat{A}$. Ponemos la teoría clásica en una forma tal que la transición a la mecánica-cuántica es directa. Consideremos una región cúbica en el espacio de lado L . La cavidad se considera como una región en el espacio sin fronteras reales y que se conoce como la cavidad de cuantización.

En lugar de las soluciones de onda estática para los campos, tomamos ondas sujetas a condiciones de la frontera que son periódicas. Se trabajará con el vector potencial en lugar del campo eléctrico. Con estas notas preliminares, el vector potencial se expande como una suma de las contribuciones de los modos de la cavidad,

$$A(r,t) = \sum_k \sum_{\lambda=1,2} e_{k\lambda} A_{k\lambda}(r,t), \quad [2.2.3]$$

donde
$$A_{k\lambda}(r,t) = A_{k\lambda}(t) \exp(ik \cdot r) + A_{k\lambda}^*(t) \exp(-ik \cdot r). \quad [2.2.4]$$

Aquí, los componentes del vector de onda k toman los valores

$$k_x = \frac{2\pi v_x}{L}, k_y = \frac{2\pi v_y}{L}, k_z = \frac{2\pi v_z}{L}, \quad [2.2.5]$$

$$v_x, v_y, v_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad [2.2.6]$$

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

2.2 EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO LIBRE

Los $e_{k\lambda}$ en la ecuación son los vectores de polarización unitarios y la condición de gauge de Coulomb se satisface si ambos son transversos, con

$$e_{k\lambda} \bullet k = 0 \quad [2.2.7]$$

Las polarizaciones se eligen perpendiculares una de otra con

$$e_{k1} \bullet e_{k2} = 0 \quad [2.2.8]$$

La normalización y ortogonalidad de los dos vectores de polarización para cada k se expresan por medio de la condición

$$e_{k\lambda} \bullet e_{k\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'} \quad [2.2.9]$$

donde la función Kronecker-delta es igual a uno cuando los índices son idénticos y cero de otra forma.

Los componentes modales del vector potencial son independientes y satisfacen las ecuaciones de campo,

$$k^2 A_{k\lambda}(t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{k\lambda}(t)}{\partial t^2} = 0 \quad [2.2.10]$$

Los coeficientes modales y sus complejos conjugados satisfacen la ecuación del movimiento armónico simple,

$$\frac{\partial^2 A_{k\lambda}(t)}{\partial t^2} + \omega_k^2 A_{k\lambda}(t) = 0, \quad [2.2.11]$$

donde es conveniente escribir la frecuencia angular del modo como:

$$\omega_k = ck. \quad [2.2.12]$$

El campo electromagnético se cuantiza mediante la conversión del oscilador armónico clásico en su contraparte mecánico-cuántica. La naturaleza de la conversión se sugiere por la forma de la energía del campo, la cual se evalúa a continuación.

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

2.2 EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO LIBRE

La solución de la ecuación [2.2.11] se puede escribir como

$$A_{k\lambda}(t) = A_{k\lambda} \exp(-i\omega_k t), \quad [2.2.13]$$

y la contribución modal al vector potencial de la ecuación [2.2.4] toma la forma

$$A_{k\lambda}(r, t) = A_{k\lambda} \exp(-i\omega_k t + ik \cdot r) + A_{k\lambda}^* \exp(i\omega_k t - ik \cdot r) \quad [2.2.14]$$

El vector potencial completo se obtiene al sustituir [2.2.14] esta expresión en la ecuación [2.2.3]

El campo eléctrico transversal se obtiene de la ecuación [2.1.25] y se expresa como

$$E_T(r, t) = \sum_k \sum_{\lambda=1,2} e_{k\lambda} E_{k\lambda}(r, t), \quad [2.2.15]$$

$$\text{Donde} \quad E_{k\lambda}(r, t) = i\omega_k \{ A_{k\lambda} \exp(-i\omega_k t + ik \cdot r) - A_{k\lambda}^* \exp(i\omega_k t - ik \cdot r) \} \quad [2.2.16]$$

Y el campo magnético se obtiene de la ecuación [2.1.5]

$$\text{Como} \quad B(r, t) = \sum_k \sum_{\lambda=1,2} \frac{k \times e_{k\lambda}}{k} B_{k\lambda}(r, t), \quad [2.2.17]$$

$$\text{donde} \quad B_{k\lambda}(r, t) = ik \{ A_{k\lambda} \exp(-i\omega_k t + ik \cdot r) - A_{k\lambda}^* \exp(i\omega_k t - ik \cdot r) \} \quad [2.2.18]$$

La razón de las amplitudes de estos campos eléctricos y magnéticos es igual a la velocidad de la luz, como debe de esperarse para una onda electromagnética libre.

La energía total del campo electromagnético de radiación en la cavidad es

$$E_R = \frac{1}{2} \int_{\text{cavidad}} dV [\epsilon_0 E_T(r, t) \cdot E_T(r, t) + \mu^{-1} B(r, t) \cdot B(r, t)] \quad [2.2.19]$$

La integral se evalúa sustituyendo las ecuaciones de campo [2.2.15] y [2.2.17]

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

2.2 EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO LIBRE

Las integrales que ocurren tienen las formas

$$\int_{cavidad} dV \exp[\pm i(k - k') \cdot r] = V \delta_{k, k'} \quad [2.2.20]$$

$$\int_{cavidad} dV \exp[\pm i(k + k') \cdot r] = V \delta_{k, -k'} \quad \text{donde } V = L^3 \quad [2.2.21]$$

La energía de la ecuación [2.2.19] es

$$\begin{aligned} E_R = \frac{1}{2} \sum_k \sum_{\lambda, \lambda'} V \{ & (A_{k\lambda} A_{k\lambda'}^* + A_{k\lambda}^* A_{k\lambda'}) \times (\epsilon_0 \omega_k^2 e_{k\lambda} \cdot e_{k\lambda'} + \mu_0^{-1} k \times e_{k\lambda} \cdot k \times e_{k\lambda'}) - \\ & (A_{k\lambda} A_{-k\lambda} e^{-2i\omega_k t} + A_{k\lambda}^* A_{-k\lambda} e^{2i\omega_k t}) \times \\ & \times (\epsilon_0 \omega_k^2 e_{k\lambda} \cdot e_{-k\lambda} - \mu_0^{-1} k \times e_{k\lambda} \cdot k \times e_{-k\lambda}) \} \end{aligned} \quad [2.2.22]$$

debido a que los modos $k\lambda$ y $-k\lambda$ tienen la misma frecuencia ω_k .

Los factores que incluyen los modos de los vectores de polarización se simplifican considerablemente conforme las propiedades del producto vectorial arrojan

$$k \times e_{k\lambda} \cdot k \times e_{\pm k\lambda'} = k^2 e_{k\lambda} \cdot e_{\pm k\lambda'} \quad [2.2.23]$$

Con ayuda de las ecuaciones [2.1.11], [2.2.9], y [2.1.12] se encuentra que los términos dependientes del tiempo en la ecuación [2.2.22] se eliminan como resultado de la cancelación entre las partes relevantes de las energías de los campos eléctrico y magnético. La energía de radiación total se reduce a la suma de las contribuciones dependientes del tiempo de los modos individuales

$$E_R = \sum_k \sum_{\lambda} E_{k\lambda} \quad [2.2.24]$$

$$\text{siendo } E_{k\lambda} = \epsilon_0 V \omega_k^2 (A_{k\lambda} A_{k\lambda}^* + A_{k\lambda}^* A_{k\lambda}) \quad [2.2.25]$$

Los coeficientes del modo $A_{k\lambda}$ y $A_{k\lambda}^*$ se muestran en el orden en que ocurren en los cuadrados de las amplitudes de los campos, aunque estos coeficientes clásicos conmutan y pueden ser combinados en un solo término.

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

2.3 CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

§ 2.3. Cuantización del Campo Electromagnético

El campo electromagnético se cuantiza al asociar el oscilador armónico mecánico-cuántico con cada modo $k\lambda$ del campo de radiación en la cavidad. Los modos a los que se refieren los operadores mecánico-cuánticos se indican por los subíndices $k\lambda$. Así, las relaciones de los operadores de creación y aniquilación para el modo $k\lambda$ de la cavidad toman las formas

$$\hat{a}_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle = n_{k\lambda}^{1/2}|n_{k\lambda}-1\rangle \quad [2.3.1]$$

$$\text{y } \hat{a}_{k\lambda}^\dagger|n_{k\lambda}\rangle = (n_{k\lambda}+1)^{1/2}|n_{k\lambda}+1\rangle, \quad [2.3.2]$$

junto con la interpretación física que los operadores destruyen y crean un fotón de energía $\hbar\omega_k$ en el modo $k\lambda$ respectivamente.

Nótese que la frecuencia angular del fotón depende solo de la magnitud de su vector de onda, independiente del modo de polarización especificado por los índices $\lambda=1,2$. El número $n_{k\lambda}$ de fotones excitados en el modo de la cavidad esta dado por el eigenvalor del operador del número de fotón apropiado.

$$\hat{n}_{k\lambda} = \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda}, \quad [2.3.3]$$

junto con la relación de eigenvalores

$$\hat{n}_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle = \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle = n_{k\lambda}|n_{k\lambda}\rangle \quad n_{k\lambda} = 0,1,2,\dots, \quad [2.3.4]$$

Los eigenestados ortonormales $|n_{k\lambda}\rangle$ se conocen como los estados de número de fotón o estados Fock del campo electromagnético. Un estado de número del campo electromagnético total en la cavidad se especifica por una seguidilla de número de fotones, uno para cada de los modos permitidos, con la convención de que los índices de los modos se arreglan en un orden particular. Los diferentes modos de cavidad son independientes, y sus operadores asociados conmutan, así que la relación se generaliza como

$$[\hat{a}_{k\lambda}, \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger] = \delta_{k,k'} \delta_{\lambda,\lambda'}. \quad [2.3.5]$$

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

2.3 CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

El estado del campo total se escribe como el producto de los estados de los modos individuales

$$|n_{k_1 1}, n_{k_1 2}, n_{k_2 1}, n_{k_2 2}, \dots\rangle = |n_{k_1 1}\rangle |n_{k_1 2}\rangle |n_{k_2 1}\rangle |n_{k_2 2}\rangle \dots = |\{n_{k\lambda}\}\rangle. \quad [2.3.6]$$

La notación a la derecha es una simplificación de la notación en la izquierda, donde $\{n_{k\lambda}\}$ denota el conjunto de números que especifican los niveles de excitación de todos los osciladores armónicos asociados con los modos de la cavidad. Existen como siempre, un número infinito de osciladores. Los estados de número multi-modales definidos en la ecuación [2.3.6] forman un conjunto de estados para el campo electromagnético en la cavidad cuando cada elemento del conjunto $\{n_{k\lambda}\}$ toma los valores 0, 1, 2,

La acción de un operador de modo específico en el estado multi-modal selecciona el estado de modo simple correspondiente de tal forma que los efectos de los operadores de aniquilación y creación pueden ser evaluados utilizando las ecuaciones [2.3.1] y [2.3.2]

El Hamiltoniano del campo de radiación se obtiene mediante la suma de las contribuciones del oscilador armónico:

$$\hat{H}_R = \sum_k \sum_{\lambda} \hat{H}_{k\lambda}, \quad [2.3.7]$$

$$\text{donde } \hat{H}_{k\lambda} = \frac{1}{2} \hbar \omega_k (\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^{\dagger} + \hat{a}_{k\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{k\lambda}) \quad [2.3.8]$$

Comparando con la expresión [2.2.25] para la energía cíclica promediada implica que las conversiones de las amplitudes del vector potencial hacia los operadores de modo mecánico-cuánticos deben ser

$$A_{k\lambda} \rightarrow (\hbar/2\varepsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \hat{a}_{k\lambda} \quad \text{y} \quad A_{k\lambda}^* \rightarrow (\hbar/2\varepsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \hat{a}_{k\lambda}^{\dagger}. \quad [2.3.9]$$

Con estas sustituciones, el vector potencial clásico de la ecuación [2.2.3] se convierte al operador

$$\hat{A}(r, t) = \sum_k \sum_{\lambda=1,2} e_{k\lambda} \hat{A}_{k\lambda}(r, t), \quad [2.3.10]$$

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

2.3 CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Donde $\hat{A}_{k\lambda}(r,t) = (\hbar/2\varepsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \{ \hat{a}_{k\lambda} \exp(-i\omega_k t + ik \cdot r) + a_{k\lambda}^\dagger \exp(i\omega_k t - ik \cdot r) \}$ **[2.3.11]**

Es la contribución a la magnitud del operador del vector potencial del modo $k\lambda$.

Los resultados correspondientes para los operadores del campo eléctrico y magnético se obtienen a partir de los operadores de las ecuaciones [2.1.25] y [2.1.5] o al convertir [2.2.15] en [2.2.18].

Las expresiones para los operadores se simplifican al definir el ángulo de fase para el modo de las formas de onda por medio de

$$\chi_k(r,t) = \omega_k t - k \cdot r - \frac{\pi}{2} \quad \mathbf{[2.3.12]}$$

$$\hat{E}_T(r,t) = \hat{E}_T^+(r,t) + \hat{E}_T^-(r,t) \quad \mathbf{[2.3.13]}$$

donde las dos contribuciones

$$\hat{E}_T^+(r,t) = \sum_k \sum_\lambda e_{k\lambda} (\hbar \omega_k / 2\varepsilon_0 V)^{1/2} \hat{a}_{k\lambda} \exp[-i\chi_k(r,t)] \quad \mathbf{[2.3.14]}$$

y
$$\hat{E}_T^-(r,t) = \sum_k \sum_\lambda e_{k\lambda} (\hbar \omega_k / 2\varepsilon_0 V)^{1/2} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \exp[i\chi_k(r,t)] \quad \mathbf{[2.3.15]}$$

se conocen como las partes positiva y negativa de las frecuencias del operador del campo eléctrico, respectivamente. Estos términos son algo contra-intuitivos, ya que el signo de más se asocia con los componentes de aniquilación del operador y el signo de menos con los componentes de creación. El operador del campo magnético se escribe de forma análoga

$$\hat{B}(r,t) = \hat{B}^+(r,t) + \hat{B}^-(r,t), \quad \mathbf{[2.3.16]}$$

donde
$$\hat{B}^+(r,t) = \sum_k \sum_\lambda k \times e_{k\lambda} (\hbar / 2\varepsilon_0 \omega_k V)^{1/2} \hat{a}_{k\lambda} \exp[-i\chi_k(r,t)] \quad \mathbf{[2.3.17]}$$

y
$$\hat{B}^-(r,t) = \sum_k \sum_\lambda k \times e_{k\lambda} (\hbar / 2\varepsilon_0 \omega_k V)^{1/2} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \exp[i\chi_k(r,t)] \quad \mathbf{[2.3.18]}$$

Los operadores de los campos eléctrico y magnético en las ecuaciones [2.3.13] y [2.3.16] son Hermitianos y representan los campos electromagnéticos observables en la cavidad.

Capítulo 3

La Ecuación Maestra

§ 3.1 Derivación de la Ecuación Maestra

En esta sección se muestra el método de Louisell [1] para derivar la ecuación maestra, que describe la interacción de un sistema cuántico con su medio ambiente. Mediante sustitución directa de los operadores de creación y aniquilación de dos sistemas cuánticos, se expresará la ecuación maestra que describe la interacción de dichos sistemas con el medio ambiente y se resolverá la ecuación en la siguiente sección.

El Hamiltoniano del sistema se escribe como

$$H_0 = \hbar\omega_c a^\dagger a + \sum_j \hbar\omega_j b_j^\dagger b_j \quad [3.1.1]$$

donde $\hbar\omega_c a^\dagger a$ es la energía del oscilador armónico y $\sum_j \hbar\omega_j b_j^\dagger b_j$ es la energía de los osciladores que componen el medio ambiente.

La energía de interacción entre el sistema y el medio ambiente está dada por

$$V = \hbar \sum_l (\kappa_l b_l a^\dagger + \kappa_l^* b_l^\dagger a) \quad [3.1.2]$$

y como la energía de interacción se puede escribir como $V = \hbar \sum_i Q_i F_i$

$$\text{Tenemos que} \quad Q_1 = a^\dagger \quad Q_2 = a = Q_1^\dagger \quad [3.1.3]$$

$$F_1 = \sum \kappa_l b_l \quad F_2 = \sum \kappa_l^* b_l^\dagger = F_1^\dagger$$

$$\text{Se toma} \quad W = \hbar [v(t) a^\dagger + v^*(t) a], \quad [3.1.4]$$

donde $v(t)$ es una función clásica que excita el modo ω_c mediante un generador externo.

Se puede escribir la ecuación maestra de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [W^\dagger, \rho(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i, -\omega_j) \times \{ [Q_i^\dagger Q_j^\dagger \rho - Q_j^\dagger \rho Q_i^\dagger] w_{ij}^+ - [Q_i^\dagger \rho Q_j^\dagger - \rho Q_j^\dagger Q_i^\dagger] w_{ji}^- \} \quad [3.1.5]$$

CAPÍTULO 3. LA ECUACIÓN MAESTRA

3.1. DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN MAESTRA

Donde $Q_i^I = e^{(i/\hbar)H(t-t_0)} Q_i e^{-(i/\hbar)H(t-t_0)}$ **[3.1.6]**

$$W^I = e^{(i/\hbar)H(t-t_0)} W e^{-(i/\hbar)H(t-t_0)}$$

De la expresión anterior se puede ver que

$$Q_1^I = a^\dagger e^{i\omega_c(t-t_0)} = Q_2^{\dagger I}$$

$$F_1^I = \sum_l \kappa_l b_l e^{-i\omega_l(t-t_0)} = F_2^{\dagger I} \quad \text{[3.1.7]}$$

$$W^I = \hbar \left[a^\dagger v(t) e^{i\omega_c(t-t_0)} + a v^*(t) e^{-i\omega_c(t-t_0)} \right]$$

Se calculará la densidad espectral w_{21}^+ en detalle y se enunciarán las densidades espectrales restantes.

$$w_{21}^+ = \int_0^\infty e^{i\omega_2 \tau} \langle F_2(\tau) F_1 \rangle_R d\tau \quad \text{[3.1.8]}$$

Tenemos que

$$\omega_2 = -\omega_c$$

y

$$\langle F_2(\tau) F_1 \rangle_R = \left\langle \sum_l \kappa_l^* e^{i\omega_l \tau} b_l^\dagger \sum_m \kappa_m b_m \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l^* \kappa_m e^{i\omega_l \tau} \langle b_l^\dagger b_m \rangle_R \quad \text{[3.1.9]}$$

Pero, $\langle b_l^\dagger b_m \rangle_R = \frac{Tr_R e^{-\beta R} b_l^\dagger b_m}{Tr_R e^{-\beta R}}$, donde $R = \sum_j \hbar \omega_j b_j^\dagger b_j$

CAPÍTULO 3. LA ECUACIÓN MAESTRA

3.1. DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN MAESTRA

Ahora, $\langle b_l^\dagger b_m \rangle = \delta_{lm} \bar{n}_l$, donde $\bar{n}_l = \frac{1}{e^{\lambda_l} - 1}$ y $\lambda_l = \frac{\hbar \omega_l}{kT}$ [3.1.10]

Por lo tanto, utilizando [3.1.9] y [3.1.10] tenemos que

$$w_{21}^+ = \sum_l |\kappa_l|^2 \bar{n}_l \int_0^\infty e^{i(\omega_l - \omega_c)\tau} d\tau, \quad [3.1.11]$$

donde se intercambia el orden de la sumatoria y de integración. Como se supone que los modos del reservorio se encuentran cercanamente espaciados con $g(\omega_l)d\omega_l$ el número de modos entre ω_l y $\omega_l + d\omega_l$, se puede cambiar la suma a una integral:

$$\sum_l \{ \} \rightarrow \int_0^\infty d\omega_l g(\omega_l) \{ \},$$

por lo que

$$w_{21}^+ = \int_0^\infty d\omega_l g(\omega_l) |\kappa(\omega_l)|^2 \bar{n}(\omega_l) I \quad [3.1.12]$$

donde

$$I = \int_0^\infty e^{i(\omega_l - \omega_c)\tau} d\tau$$

Ahora, $\int_0^\infty e^{\pm i\Omega\tau} d\tau = \pi\delta(\Omega) \pm iP \frac{1}{\Omega}$ [3.1.13]

donde P es la parte principal de Cauchy definida por

$$\int_{-a}^{+b} P \frac{f(\Omega)}{\Omega} d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{f(\Omega)}{\Omega} d\Omega + \int_{\varepsilon}^{+b} \frac{f(\Omega)}{\Omega} d\Omega \right\} \quad [3.1.14]$$

CAPÍTULO 3. LA ECUACIÓN MAESTRA

3.1. DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN MAESTRA

Por lo tanto, [3.1.12] se convierte en

$$w_{21}^+ = \int_0^\infty d\omega_l g(\omega_l) |\kappa(\omega_l)|^2 \bar{n}(\omega_l) \left\{ \pi \delta(\omega_l - \omega_c) + iP \frac{1}{\omega_l - \omega_c} \right\} \equiv \left(\frac{\gamma}{2} - i\Delta\omega \right) \bar{n} \quad [3.1.15]$$

$$\text{donde } \gamma = 2\pi g(\omega_c) |\kappa(\omega_c)|^2, \quad \Delta\omega = -P \int_0^\infty \frac{d\omega_l g(\omega_l) |\kappa(\omega_l)|^2}{\omega_l - \omega_c} \quad \text{y} \quad \bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_c/kT} - 1} \quad [3.1.16]$$

La parte imaginaria de w_{21}^+ representa el corrimiento de Lamb en la frecuencia de la cavidad debido a su acoplamiento con el reservorio y puede ser ignorado.

El resto de las w 's se encuentran de la misma manera y están dadas por

$$\begin{aligned} w_{21}^+ &= \left(\frac{\gamma}{2} - i\Delta\omega \right) \bar{n} = w_{21}^{-*} \\ w_{12}^+ &= \left(\frac{\gamma}{2} + i\Delta\omega \right) (1 + \bar{n}) = w_{12}^{-*} \end{aligned} \quad [3.1.17]$$

$$w_{11}^\pm = w_{22}^\pm = 0$$

Si usamos estas expresiones y las ecuaciones [3.1.3] y [3.1.4] en [3.1.5] tenemos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i(\omega_c + \Delta\omega) [a^\dagger a, \rho] - i\nu(t) [a^\dagger, \rho] - i\nu^*(t) [a, \rho] + \frac{\gamma}{2} [2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a] + \gamma \bar{n} [a^\dagger \rho a + a \rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a a^\dagger]$$

Cuando $T = 0$, tenemos que $\bar{n} = 0$, por lo que la ecuación maestra se reduce a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} (2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a) \quad [3.1.18]$$

CAPÍTULO 3. LA ECUACIÓN MAESTRA

3.2. INTERACCIÓN DE DOS SISTEMAS EN UN MISMO MEDIO AMBIENTE

§ 3.2 La Ecuación Maestra Para la Interacción de dos Sistemas Cuánticos con un Mismo Medio Ambiente a Temperatura $T = 0$

Consideramos como nuestro sistema a dos cavidades cuánticas, cada una de las cuales contiene un modo del campo electromagnético. Los operadores de aniquilación y creación para las dos modos son:

$$\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{b}, \hat{b}^\dagger, \quad \text{respectivamente} \quad [3.2.1]$$

El medio ambiente consta de un número infinito de osciladores armónicos simples a temperatura $T = 0$, cuyos operadores de aniquilación y creación son:

$$\hat{c}_j, \hat{c}_j^\dagger \quad [3.2.2]$$

El Hamiltoniano que describe el sistema está dado por

$$\hat{H}_T = \hat{H}_0 + \hat{H}_I \quad [3.2.3]$$

donde,

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b} + \sum_{j=0}^{\infty} \hbar\omega_j\hat{c}_j^\dagger\hat{c}_j \quad [3.2.4]$$

y

$$\hat{H}_I = \hbar\sum_l g_l(\hat{c}_l\hat{a}^\dagger + \hat{c}_l^\dagger\hat{a}) + \hbar\sum_s g_s(\hat{c}_s\hat{b}^\dagger + \hat{c}_s^\dagger\hat{b}) \quad [3.2.5]$$

Es importante mencionar que los modos interactúan con el ambiente a través de $\hat{H}_I$ y que no existe interacción entre ellos.

Se utiliza la ecuación [3.1.18] derivada en la sección anterior

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} (2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a)$$

y se sustituye $a \rightarrow \hat{a} + \hat{b}$ y $a^\dagger \rightarrow \hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger$ para obtener la ecuación maestra que describe la interacción de dos sistemas cuánticos con un mismo medio ambiente:

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} [2(\hat{a} + \hat{b})\hat{\rho}(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) - (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} + \hat{b})\hat{\rho} - \hat{\rho}(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} + \hat{b})] \quad [3.2.6]$$

CAPÍTULO 3. LA ECUACIÓN MAESTRA

3.2. INTERACCIÓN DE DOS SISTEMAS EN UN MISMO MEDIO AMBIENTE

En seguida definimos los superoperadores $\hat{J}$ y $\hat{L}$:

$$\hat{J}\rho = \gamma(\hat{a} + \hat{b})\rho(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) \quad [3.2.7]$$

$$\hat{L}\rho = -\frac{\gamma}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} + \hat{b})\rho - \frac{\gamma}{2}\rho(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} + \hat{b}) \quad [3.2.8]$$

En términos de los superoperadores $\hat{J}$ y $\hat{L}$ podemos re-escribir la ecuación maestra como sigue:

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = \hat{J}\rho + \hat{L}\rho = (\hat{J} + \hat{L})\rho \quad [3.2.9]$$

Mediante el método de separación de variables se obtiene la solución:

$$\hat{\rho}(t) = e^{(\hat{J} + \hat{L})t} \rho(0) \quad [3.2.10]$$

§ 3.3 Factorización del Operador de Evolución del Tiempo

En esta sección se demostrará como factorizar la exponencial $e^{(J+\hat{L})t}$ para poder aplicar, en la siguiente sección, la solución de la ecuación maestra a un estado inicial $\rho(0)$.

Tenemos que **[3.3.1]**

$$e^{t(J+\hat{L})} = e^{t\hat{L}} F(t)$$

Derivando ambos lados de [3.3.1] con respecto de t se obtiene:

$$\begin{aligned} (\hat{J} + \hat{L})e^{t(J+\hat{L})} &= \hat{L}e^{t\hat{L}} F(t) + e^{t\hat{L}} \frac{dF(t)}{dt} \\ \rightarrow (\hat{J} + \hat{L})e^{t\hat{L}} F(t) &= \hat{L}e^{t\hat{L}} F(t) + e^{t\hat{L}} \frac{dF(t)}{dt} \\ \rightarrow \hat{J}e^{t\hat{L}} F(t) + \hat{L}e^{t\hat{L}} F(t) &= \hat{L}e^{t\hat{L}} F(t) + e^{t\hat{L}} \frac{dF(t)}{dt} \end{aligned}$$

Por lo tanto, **[3.3.2]**

$$e^{t\hat{L}} \frac{dF(t)}{dt} = \hat{J}e^{t\hat{L}} F(t)$$

Multiplicando ambos lados de la expresión [3.3.2] por $e^{-t\hat{L}}$ obtenemos

$$\begin{aligned} e^{-t\hat{L}} e^{t\hat{L}} \frac{dF(t)}{dt} &= e^{-t\hat{L}} \hat{J}e^{t\hat{L}} F(t) \\ \rightarrow \frac{dF(t)}{dt} &= e^{-t\hat{L}} \hat{J}e^{t\hat{L}} F(t) \end{aligned} \quad \text{[3.3.3]}$$

Utilizando el Teorema de Baker-Campbell-Hausdorf

$$e^{-\xi\hat{A}} \hat{B} e^{\xi\hat{A}} = \hat{B} - \xi[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\xi^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] - \frac{\xi^3}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \quad \text{[3.3.4]}$$

en la expresión [3.3.3] se tiene que

$$\frac{dF(t)}{dt} = \left[\hat{J} - t[\hat{L}, \hat{J}] + \frac{t^2}{2!}[\hat{L}, [\hat{L}, \hat{J}]] - \frac{t^3}{3!}[\hat{L}, [\hat{L}, [\hat{L}, \hat{J}]]] + \dots \right] F(t) \quad \text{[3.3.4]}$$

CAPÍTULO 3. LA ECUACIÓN MAESTRA
3.4. EL CONMUTADOR DE LOS SUPEROPERADORES $\hat{J}$ Y $\hat{L}$

§ 3.4 El Conmutador de los Superoperadores $\hat{J}$ y $\hat{L}$.

Ahora se requiere encontrar el conmutador de los Superoperadores $\hat{J}$ y $\hat{L}$.

$$[\hat{J}, \hat{L}] \rho = [\hat{J}\hat{L} - \hat{L}\hat{J}] \rho = \hat{J}\hat{L}\rho - \hat{L}\hat{J}\rho \quad [3.4.1]$$

$$\begin{aligned} &= \hat{J} \left\{ -\frac{\gamma}{2} (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a} + \hat{b}) \rho - \frac{\gamma}{2} \rho (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a} + \hat{b}) \right\} - \hat{L} \{ \gamma (\hat{a} + \hat{b}) \rho (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) \} \\ &= -\frac{\gamma}{2} \{ \hat{J} ((\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a} + \hat{b}) \rho) + \hat{J} (\rho (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a} + \hat{b})) \} - \gamma \hat{L} \{ (\hat{a} + \hat{b}) \rho (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) \} \\ &= -\frac{\gamma}{2} \{ \gamma (\hat{a} + \hat{b}) (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a} + \hat{b}) \rho (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) + \gamma (\hat{a} + \hat{b}) \rho (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a} + \hat{b}) (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) \} \\ &\quad - \gamma \left\{ -\frac{\gamma}{2} (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a} + \hat{b}) (\hat{a} + \hat{b}) \rho (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) - \frac{\gamma}{2} (\hat{a} + \hat{b}) \rho (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a} + \hat{b}) \right\} \\ &= -\frac{\gamma^2}{2} \{ (\hat{a} + \hat{b}) (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a} + \hat{b}) \rho (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) + (\hat{a} + \hat{b}) \rho (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a} + \hat{b}) (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) \\ &\quad - (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a} + \hat{b}) (\hat{a} + \hat{b}) \rho (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) - (\hat{a} + \hat{b}) \rho (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a} + \hat{b}) \} \quad [3.4.2] \end{aligned}$$

En seguida, se demuestra que el conmutador $[(\hat{a} + \hat{b}), (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)] = 2$.

$$\begin{aligned} [(\hat{a} + \hat{b}), (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)] &= (\hat{a} + \hat{b}) (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) - (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) (\hat{a} + \hat{b}) = \hat{a} (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) + \hat{b} (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) - \hat{a}^\dagger (\hat{a} + \hat{b}) - \hat{b}^\dagger (\hat{a} + \hat{b}) \\ &= \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{b}^\dagger + \hat{b} \hat{a}^\dagger + \hat{b} \hat{b}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b} = \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b} \hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger \hat{b} = [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 2 \end{aligned}$$

Lo anterior debido a que $\hat{a}$ y $\hat{b}$ se encuentran en diferentes espacios de Hilbert y por lo tanto $\hat{a} \hat{b} = \hat{b} \hat{a}$ i.e. $\hat{a} \hat{b}^\dagger + \hat{b} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a} = 0$.

CAPÍTULO 3. LA ECUACIÓN MAESTRA
3.4. EL CONMUTADOR DE LOS SUPEROPERADORES $\hat{J}$ Y $\hat{L}$

Sustituyendo $[(\hat{a} + \hat{b})(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)] = 2$ en [3.4.1] tenemos que

$$\begin{aligned}
 [\hat{J}, \hat{L}] \rho &= -\frac{\gamma^2}{2} \{[(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} + \hat{b}) + 2](\hat{a} + \hat{b})\rho(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) + (\hat{a} + \hat{b})\rho(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)[(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} + \hat{b}) + 2] \\
 &\quad - (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} + \hat{b})(\hat{a} + \hat{b})\rho(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) - (\hat{a} + \hat{b})\rho(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} + \hat{b})\} \\
 &= -\frac{\gamma^2}{2} \{(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} + \hat{b})(\hat{a} + \hat{b})\rho(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) + 2(\hat{a} + \hat{b})\rho(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) + (\hat{a} + \hat{b})\rho(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} + \hat{b}) \\
 &\quad + 2(\hat{a} + \hat{b})\rho(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) - (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} + \hat{b})(\hat{a} + \hat{b})\rho(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) - (\hat{a} + \hat{b})\rho(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} + \hat{b})\} \\
 &= -2\gamma \{\gamma(\hat{a} + \hat{b})\rho(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)\} = -2\gamma \hat{J} \rho
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[\hat{J}, \hat{L}] = -2\gamma \hat{J} \leftrightarrow [\hat{L}, \hat{J}] = 2\gamma \hat{J}$ **[3.4.3]**

CAPÍTULO 3. LA ECUACIÓN MAESTRA

3.5. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN MAESTRA

§ 3.5 Solución de la Ecuación Maestra

Regresando a la ecuación [3.3.4]

$$\frac{dF(t)}{dt} = \left[\hat{J} - t[\hat{L}, \hat{J}] + \frac{t^2}{2!} [\hat{L}, [\hat{L}, \hat{J}]] - \frac{t^3}{3!} [\hat{L}, [\hat{L}, [\hat{L}, \hat{J}]]] + \dots \right] F(t)$$

y sustituyendo el valor obtenido $[\hat{L}, \hat{J}] = 2\gamma\hat{J}$, tenemos que

$$\frac{dF(t)}{dt} = \left[\hat{J} - t(2\gamma\hat{J}) + \frac{t^2}{2!} [\hat{L}, 2\gamma\hat{J}] - \frac{t^3}{3!} [\hat{L}, [\hat{L}, (2\gamma\hat{J})]] + \dots \right] F(t)$$

$$\frac{dF(t)}{dt} = \left[\hat{J} - (2t\gamma)\hat{J} + \frac{(2t\gamma)^2}{2!} \hat{J} - \frac{(2t\gamma)^3}{3!} \hat{J} + \dots \right] F(t) = \hat{J}e^{-2t\gamma} F(t)$$

Nuevamente, recurrimos a la técnica de separación de variables para resolver la ecuación diferencial con la condición inicial $F(0)=1$, obteniéndose la solución:

$$F(t) = e^{\frac{\hat{J}}{2\gamma} \{1 - e^{-2t\gamma}\}} \quad [3.5.1]$$

La solución de la ecuación maestra para la interacción de dos sistemas cuánticos con un mismo medio ambiente es:

$$\hat{\rho}(t) = e^{t\hat{L}} e^{\frac{\hat{J}}{2\gamma} \{1 - e^{-2t\gamma}\}} \hat{\rho}(0) \quad [3.5.2]$$

Capítulo 4

Aplicando la Solución de la Ecuación Maestra

§ 4.1 Aplicación del estado inicial $\hat{\rho}(0) = |\alpha\rangle_{11}\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle_{11}\langle\beta|$

En esta sección se aplica la solución de la ecuación maestra [3.5.2] de la sección anterior a un estado inicial dado por:

$$\hat{\rho}(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| \quad [4.1.1]$$

Se puede re-escribir la ecuación $\hat{\rho}(t) = e^{tL} e^{\frac{\hat{J}}{2\gamma} \{1 - e^{-2t\gamma}\}} \hat{\rho}(0)$ como

$$\hat{\rho}(t) = e^{f_1 L} e^{f_2 \hat{J}} \hat{\rho}(0) \quad [4.1.2.]$$

Primero se evaluará $e^{f_2 \hat{J}} \hat{\rho}(0) = e^{f_2 \hat{J}} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_2^n}{n!} \hat{J}^n |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|$.

Tenemos que $\hat{J} \hat{\rho}(0) = \gamma (\hat{a} + \hat{b}) |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) \quad [4.1.3]$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^* \langle\alpha| \quad \text{y} \quad \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^* \langle\alpha| \quad [4.1.4]$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{J}}{\gamma} &= \hat{a} [|\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|] (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) + \hat{b} [|\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|] (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger) \\ &= \hat{a} [|\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|] \hat{a}^\dagger + \hat{a} [|\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|] \hat{b}^\dagger + \hat{b} [|\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|] \hat{a}^\dagger + \hat{b} [|\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|] \hat{b}^\dagger \\ &= \hat{a} |\alpha\rangle\langle\alpha| \hat{a}^\dagger \otimes |\beta\rangle\langle\beta| + \hat{a} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| \hat{b}^\dagger + |\alpha\rangle\langle\alpha| \hat{a}^\dagger \otimes \hat{b} |\beta\rangle\langle\beta| + |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes \hat{b} |\beta\rangle\langle\beta| \hat{b}^\dagger \\ &= \alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| \alpha^* \langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| + \alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| \beta^* \langle\beta| + |\alpha\rangle\langle\alpha| \alpha^* \langle\alpha| \otimes \beta |\beta\rangle\langle\beta| + |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes \beta |\beta\rangle\langle\beta| \beta^* \langle\beta| \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4. APLICANDO LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN MAESTRA
4.1. APLICACIÓN DEL ESTADO INICIAL

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{J}}{\gamma} &= \alpha|\alpha\rangle\alpha^*\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\langle\beta| + \alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\beta^*\langle\beta| + |\alpha\rangle\alpha^*\langle\alpha|\otimes\beta|\beta\rangle\langle\beta| + |\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes\beta|\beta\rangle\beta^*\langle\beta| \\
 &= \alpha\alpha^*|\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\langle\beta| + \alpha\beta^*|\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\langle\beta| + \alpha^*\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\langle\beta| + \beta\beta^*|\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\langle\beta| \\
 &= (\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \alpha\beta^* + \alpha^*\beta)|\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\langle\beta| = (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\beta^* + \alpha^*\beta)|\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\langle\beta| \quad [4.1.5]
 \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
 \hat{J}\hat{\rho}(0) &= (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\beta^* + \alpha^*\beta)\hat{\rho}(0) \Rightarrow \hat{J}[\hat{J}\hat{\rho}(0)] = [(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\beta^* + \alpha^*\beta)\gamma]^2 \cdot \hat{\rho}(0) \\
 &= (\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \alpha\beta^* + \alpha^*\beta)|\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\langle\beta| = (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\beta^* + \alpha^*\beta)|\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\langle\beta| \\
 \hat{J}\hat{\rho}(0) &= (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\beta^* + \alpha^*\beta)\hat{\rho}(0) \Rightarrow \hat{J}[\hat{J}\hat{\rho}(0)] = [(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\beta^* + \alpha^*\beta)\gamma]^2 \cdot \hat{\rho}(0) \quad [4.1.6]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\hat{J}^n \cdot \hat{\rho}(0) = [(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\beta^* + \alpha^*\beta)\gamma]^n \cdot \hat{\rho}(0) \quad [4.1.7]$$

Sustituyendo [4.1.7] en la ecuación

$$e^{f_2 \hat{J}} \hat{\rho}(0) = e^{f_2 \hat{J}} |\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\langle\beta| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_2^n}{n!} \hat{J}^n |\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\langle\beta| \quad [4.1.8]$$

Se tiene que:

$$e^{f_2 \hat{J}} \hat{\rho}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_2^n}{n!} [(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\beta^* + \alpha^*\beta)\gamma]^n |\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\langle\beta| \quad [4.1.9]$$

$$= e^{\gamma(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\beta^* + \alpha^*\beta)f_2(t)} |\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\beta\rangle\langle\beta| \quad [4.1.10]$$

CAPÍTULO 4. APLICANDO LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN MAESTRA
4.1. APLICACIÓN DEL ESTADO INICIAL

En seguida se aplica el exponencial del superoperador $\hat{L}$

$$e^{f_1 \hat{L}} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| = e^{-\frac{\gamma}{2} f_1(t) (a^\dagger + b^\dagger)(a+b)} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| e^{-\frac{\gamma}{2} f_1(t) (a^\dagger + b^\dagger)(a+b)} \quad [4.1.11]$$

Se puede factorizar el exponencial de la siguiente manera:

$$e^{-\frac{\gamma}{2} f_1(t) (a^\dagger + b^\dagger)(a+b)} = e^{-\frac{\gamma}{2} f_1(t) (a^\dagger a + b^\dagger b + a^\dagger b + b^\dagger a)} = e^{-\frac{\gamma}{2} f_1(t) (a^\dagger a + b^\dagger b)} e^{-\frac{\gamma}{2} f_1(t) (a^\dagger b + b^\dagger a)} \quad [4.1.12]$$

Por lo tanto,

$$e^{f_1 \hat{L}} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)(1 - e^{-\gamma f_1})} \times e^{-\frac{\gamma}{2} f_1(t) (a^\dagger b + b^\dagger a)} |\tilde{\alpha}\rangle_{11} \langle\tilde{\alpha}| \otimes |\tilde{\beta}\rangle_{22} \langle\tilde{\beta}| e^{-\frac{\gamma}{2} f_1(t) (a^\dagger b + b^\dagger a)} \quad [4.1.13]$$

Donde

$$|\tilde{\alpha}\rangle_1 = \left| \alpha e^{-\frac{\gamma}{2} f_1} \right\rangle_1 \quad |\tilde{\beta}\rangle_2 = \left| \beta e^{-\frac{\gamma}{2} f_1} \right\rangle_2 \quad [4.1.14]$$

§ 4.2 Estado Final de la Ecuación Maestra

De la aplicación de la solución de la ecuación maestra para un estado inicial, se tiene que el estado final del sistema está dado por:

$$\begin{aligned} \rho(t) = & \sum_{s,k} \frac{(-2f_1(t))^k (-2f_1(t))^s}{k!s!} \sum_{l=0}^s \sum_{j=0}^k \binom{s}{l} \binom{k}{j} \tilde{\alpha}^{s-l} \tilde{\alpha}^s \tilde{\beta}^{j-k} \tilde{\beta}^j \\ & \otimes \sum_{s'}^l \sum_{k'}^j \frac{(-2f_2(t))^{s'} (-2f_2(t))^{k'}}{s'!k'!} \sum_{u=0}^{s'} \sum_{v=0}^{k'} \binom{s'}{u} \binom{k'}{v} \tilde{\alpha}^u \tilde{\beta}^v \frac{l!j!}{(l-s+u)!(j-k+v)!} \\ & \otimes \sum_{\mu=0}^{j'} \frac{(-2f_1(t))^\mu}{\mu!} \sum_{u'=0}^{\mu} \sum_{v'=0}^{\mu} \binom{\mu}{u'} \binom{\mu}{v'} \tilde{\alpha}^u \tilde{\beta}^v \frac{j!}{(j'-\mu+v')!} \tilde{\alpha}^{*\mu} \tilde{\beta}^\mu c_\mu \\ & \otimes \sum_{\mu=0}^{j'} \frac{(-2f_1(t))^\phi}{\phi!} \sum_{m=0}^{\phi=0} \sum_{m'=0}^{\phi=0} \frac{k!}{(k'-\phi+m)!} \tilde{\alpha}^\phi \tilde{\beta}^\phi \binom{\phi}{m} \binom{\phi}{m'} \\ & \otimes |\tilde{\alpha}, \mu - u' + l - s + u\rangle_{11} \langle k' - \phi + m, \tilde{\alpha}| \otimes |\tilde{\beta}, j' - \mu + v'\rangle_{22} \langle \phi - m' + j - k' + v, \tilde{\beta}| \end{aligned}$$

donde

$|\tilde{\alpha}, \mu - u' + l - s + u\rangle_1$ es el número de estado desplazado,

$$|\tilde{\alpha}, \mu - u' + l - s + u\rangle = \tilde{D}(\tilde{\alpha}) |\mu - u' + l - s + u\rangle \quad [4.2.1]$$

El número de estado desplazado se define como:

$$|\tilde{\alpha}, n\rangle = \tilde{D}(\tilde{\alpha}) |n\rangle, \quad [4.2.2]$$

$$\text{donde } \tilde{D}(\tilde{\alpha}) \text{ es el operador de desplazamiento } \tilde{D}(\tilde{\alpha}) = \exp(\tilde{\alpha}\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) \quad [4.2.3]$$

Para $n=0$, el número de estado Desplazado se reduce al estado coherente. Algunas propiedades estadísticas del número de estado desplazado se pueden derivar utilizando las transformaciones de los operadores de creación y aniquilación operados por un desplazamiento como se muestra a continuación:

$$\tilde{D}(\tilde{\alpha})\hat{a}\tilde{D}^\dagger(\tilde{\alpha}) = \hat{a} - \tilde{\alpha} \quad \text{y} \quad \tilde{D}(\tilde{\alpha})\hat{a}^\dagger\tilde{D}^\dagger(\tilde{\alpha}) = \hat{a}^\dagger - \tilde{\alpha}^* \quad [4.2.4]$$

En seguida se definen los operadores de cuadratura como:

$$\hat{X}_1 = \hat{a} + \hat{a}^\dagger \quad [4.2.5]$$

$$\hat{X}_2 = -i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad [4.2.6]$$

Con el uso de las definiciones del número de estado Desplazado y del operador de desplazamiento, las varianzas

$$\langle (\Delta \hat{X}_i)^2 \rangle = \langle \hat{X}_i^2 \rangle - \langle \hat{X}_i \rangle^2 \quad [4.2.7]$$

de los operadores de cuadratura en el estado $|\tilde{\alpha}, n\rangle$ están dadas por

$$\langle (\Delta \hat{X}_i)^2 \rangle = \langle \tilde{\alpha}, n | (\Delta \hat{X}_i)^2 | \tilde{\alpha}, n \rangle = (2n+1) \quad (i=1,2) \quad [4.2.8]$$

Las varianzas son independientes de la amplitud coherente del estado, pero linealmente depende del número inicial n del fotón. La varianza del número de fotón está dada por

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = (2n+1) |\tilde{\alpha}|^2, \quad [4.2.9]$$

y siempre es mayor que para un número de estado o un estado coherente. Con el uso de las ecuaciones [4.2.7] y [4.2.8], se obtiene el parámetro de Mandel Q , que mide la desviación en la estadística de Poisson para el estado $|\tilde{\alpha}, n\rangle$

$$Q = \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} = n \left[\frac{2|\tilde{\alpha}|^2 - 1}{n + |\tilde{\alpha}|^2} \right] \quad [4.2.10]$$

donde el promedio del número de fotones es

$$\langle \hat{n} \rangle = n + |\tilde{\alpha}|^2 \quad [4.2.11]$$

y donde las contribuciones de las características del número de estado y de coherencia del campo se muestran explícitamente.

CAPÍTULO 4. APLICANDO LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN MAESTRA

4.2. ESTADO FINAL DE LA ECUACIÓN MAESTRA

Para estadísticas de Poisson, $Q=0$. Si $Q<0$, se dice que la luz es de estadística sub-Poisson, de otra manera es sobre-Poisson.

De la ecuación [4.2.8], encontramos que el estado $|\tilde{\alpha}, n\rangle$ obedece a la estadística de sub-Poisson siempre y cuando $|\tilde{\alpha}|^2 < \frac{1}{2}$.

Por último, se menciona que existe una relación entre el número de estado desplazado $|\tilde{\alpha}, n\rangle$ y el Hamiltoniano del oscilador armónico. Aplicando el operador de desplazamiento a la ecuación de eigenvalores

$$\hat{H}_0|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle, \quad [4.2.12]$$

se obtiene
$$\hat{H}_d|\tilde{\alpha}, n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|\tilde{\alpha}, n\rangle \quad [4.2.13]$$

donde
$$\hat{H}_d = \tilde{D}(\tilde{\alpha})\hat{H}_0\tilde{D}^\dagger(\tilde{\alpha}) = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger - \tilde{\alpha}^*)(\hat{a} - \tilde{\alpha}) + \frac{1}{2} \quad [4.2.14]$$

El número de estado Desplazado aparenta ser un eigenestado de el Hamiltoniano desplazado del oscilador armónico.

Capítulo 5

Análisis y Conclusiones

En este proyecto de tesis se ha analizado la evolución de la interacción de dos sistemas cuánticos con un mismo medio ambiente a temperatura $T = 0$. El sistema contempla dos modos del campo electromagnético dentro de una cavidad rodeada de un ambiente a temperatura $T = 0$. Se puede representar el problema propuesto de la siguiente manera: Dos espejos cóncavos forman una cavidad y atrapan a dos modos del campo electromagnético los cuales interactúan con su medio ambiente, este último está compuesto por un número infinito de osciladores armónicos.

Se cuantizan los modos del campo electromagnético de tal forma que estos corresponden a dos osciladores armónicos cuánticos mediante el reemplazo de los operadores de posición y momento por los operadores de aniquilación y creación. De esta manera se pueden utilizar las herramientas de la Mecánica Cuántica para expresar la evolución en el tiempo del sistema mediante la Ecuación Maestra.

Se utiliza el operador de densidad para expresar la ecuación de Schrödinger en términos de bras y de kets. Es decir, se unifican la Mecánica Cuántica Ondulatoria de Schrödinger con la Mecánica Cuántica Matricial de Dirac al mismo tiempo que se fusionan las interpretaciones ondulatorias y cuánticas del campo electromagnético.

Al resolver la ecuación maestra para este sistema se obtuvo una expresión analítica en términos de los super-operadores $\hat{J}$ y $\hat{L}$. Se recurrió al método de factorización del operador de evolución del tiempo para expresar la solución como el producto de dos exponenciales y se aplicó la solución a un estado inicial.

El método utilizado en el presente proyecto puede ser utilizado para generalizar la interacción de un número infinito de sistemas cuánticos con un mismo medio ambiente ya sea a temperatura igual o diferente de cero.

6 Bibliografía

- [1] Louisell W H 1973 Quantum Statistical Properties of Radiation (New York: Wiley)
- [2] LM Arevalo-Aguilar and H Moya-Cessa Solution to the master equation for a quantized cavity mode Quantum Semiclass 1998
- [3] PC Garcia-Quijas and LM Arevalo Aguilar Factorizing the time evolution operator Institute of Physics Publishing 2007
- [4] Simon J.D. Phoenix Wave-packet evolution in the damped oscillator Physical Review 1989
- [5] Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë Waves and particles. Introduction to the fundamental ideas of quantum mechanics 1973
- [6] Griffiths D 1995 Introduction to Quantum Mechanics (Englewood cliffs, NJ: Prentice-Hall)
- [7] L.M. Arevalo Aguilar and M.L. Arroyo-Carrasco Dynamics of two qubits under a common environment Quantum Information Processing and Computing Conference poster 2013
- [8] Loudon, Rodney 2000 The Quantum Theory of Light Third Edition Oxford University Press
- [9] J.J. Sakurai Modern Quantum Mechanics Addison-Wesley Publishing Company 1994
- [10] F.A.M. de Oliveira, M.S. Kim and P.L. Knight Properties of displaced number states Physical Review A March, 1990