



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Las matemáticas del arte: una introducción al estudio
matemático de la simetría

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

por

Dana Andrea García Carrillo

Asesorada por

Dr. Agustín Contreras Carreto

Puebla Pue.
Enero de 2023

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia por sus palabras de apoyo y no dejar de creer en mí durante todo este proceso. En especial, a mi mamá, por tu paciencia y amor incondicional; por no cerrarte a aprender conmigo y animarme a continuar creciendo siempre que lo necesitaba. Gracias a Benny, por tu compañía que siempre me motivaba a seguir adelante.

A las amistades que me acompañan aún en la distancia: Esmeralda y "la Nube". También a esos amigos que encontré en la facultad, a los que aún están y los que nos dejaron en el camino.

Agradezco a los profesores que me despertaron el amor a la ciencia, a la divulgación y el hambre por aprender. En especial al M.C. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez y al Lic. Jaime Badillo Márquez, por sus clases y charlas que me dejaron muchísimas enseñanzas.

A mis sinodales: M.C. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez, Dr. Iván Martínez Ruiz y el Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, por tomarse el tiempo de leer esta tesis, sugerir cambios, darme consejos y estar abiertos a responder mis dudas.

Finalmente, al Dr. Agustín Contreras Carreto, por aceptar ser mi asesor, por sugerir un tema tan acorde a mis intereses personales, por sus recomendaciones y reuniones que funcionaron no sólo para realizar esta tesis, sino que dieron el impulso para concluirla.

Índice general

Introducción	VIII
1. Antecedentes	1
1.1. Funciones	1
1.2. Grupos	3
1.3. El plano euclidiano	6
2. Isometrías en el plano euclidiano	11
2.1. Isometrías	11
2.1.1. Transformaciones	11
2.1.2. Isometrías en el plano	13
2.2. Traslación	14
2.3. Rotación	16
2.3.1. Semigiro	20
2.4. Reflexión	22
2.5. Reflexión deslizada	27
2.6. Clasificación de isometrías en el plano	30
2.6.1. El teorema de las tres reflexiones	33
2.6.2. Clasificación de isometrías en el plano	35
2.7. Ejemplos	35
3. Simetría en el plano euclidiano	37
3.1. La matemática de la simetría	38
3.2. Grupos de simetría	39
3.3. Rosetas	41
3.4. Frisos	45
3.4.1. Grupos de frisos	45
3.4.2. Ejemplos	49
3.5. Teselados	50
3.5.1. Teselaciones regulares	56
3.5.2. Teselaciones semirregulares	57
3.5.3. Teselaciones demirregulares	60
3.5.4. Teselados irregulares	61
3.5.5. Teselaciones con otros polígonos	64
3.5.6. Teselaciones periódicas	69
3.5.7. Teselaciones aperiódicas	70
3.5.8. Ejemplos	77
3.6. Grupos del papel pintado	79
4. Reflexiones en el plano hiperbólico	89

5. Conclusiones

91

Bibliografía

93

Introducción

La matemática posee no solo verdad, sino también belleza suprema; una belleza fría y austera, como aquella de la escultura, sin apelación a ninguna parte de nuestra naturaleza débil, sin los adornos magníficos de la pintura o la música, pero sublime y pura, y capaz de una perfección severa como solo las mejores artes pueden presentar.

Bertrand Russell

Una de las frases que más escucho cuando digo que “estudio matemáticas” es: «¡pero claro, las matemáticas están en todo!». Una oración que, de vez en cuando, trasciende en ese hermoso momento en el que me doy cuenta, es cierto; a lo largo de mi formación académica me he topado los más bellos ejemplos, no tan sólo los que están en los libros, sino también aquellos que están ahí, escondidos en nuestra vida cotidiana.

Sin embargo, aún no dejo de sorprenderme cuando veo matemáticas en sitios que jamás imaginé. Uno de ellos, el arte. Es usual pensar que las matemáticas y el arte son entes completamente ajenos. Por un lado, para el ojo común, las matemáticas son rigurosas, duras y difíciles; por otro, el arte es lo bello, lo estético, lo humano. Sin embargo, algunos matemáticos afirman que la matemática es una forma de arte, dotada de una belleza reservada para aquellos dispuestos a sumergirse en sus vastas aguas.

En mi opinión, las y los matemáticos deben tener una dosis de imaginación para resolver los problemas que día a día enfrentamos desde nuestras trincheras. Es por ello que cuando el doctor Contreras Carreto me habló sobre este tema no pude dejar pasar la oportunidad.

La **simetría** es un rasgo que ha acompañado a la humanidad de manera continua. Existe aún si nosotros como especie no lo hiciéramos, pues no sólo la encontramos en expresiones humanas, sino que también está implícita en la naturaleza: desde la formación de pétalos de una margarita hasta el ADN. Tomando esto como punto de partida, el presente trabajo busca profundizar en la matemática detrás de la simetría y el cómo, con ayuda de esta, es posible crear expresiones visuales estéticamente agradables para el ser humano, desde pintura, escultura, o arquitectura, hasta obras cinematográficas.

En el capítulo 1 mostramos conceptos básicos de cálculo, teoría de grupos y geometría analítica los cuales son esenciales para la comprensión del resto de esta tesis.

En el segundo capítulo exponemos las transformaciones isométricas en el plano euclidiano: traslaciones, rotaciones, reflexiones y reflexiones deslizadas. También abordamos algunos teoremas importantes los cuales involucran a dichas transformaciones como, por ejemplo, el Teorema de las

Tres Reflexiones. Al concluir damos una clasificación de las mismas.

El tercer capítulo es el más extenso. Una vez planteadas las bases de los capítulos anteriores procedemos a definir qué es la simetría desde un punto de vista matemático. Después, estudiamos los grupos de simetría para que, con base a estos, reflexionemos sobre las rosetas, los frisos y los patrones repetitivos. De igual manera se analiza la simetría de las teselaciones del plano y cómo generarlas a partir de su clasificación.

Finalmente, en el último capítulo realizamos un comentario sobre otras geometrías y el cómo influyen en la simetría.

Capítulo 1

Antecedentes

El estudio de la simetría empieza construyéndose con nociones básicas tales como función y grupo. Iniciamos dando definiciones sobre funciones, después sobre teoría de grupos y finalmente abordamos algunos resultados propios de la geometría. Puede consultar [3], [11] y [15] para mayor profundidad en cada tema.

1.1. Funciones

Las funciones son sumamente útiles ya que es posible encontrarlas y aplicarlas en diversas áreas como lo son la física, química, psicología e incluso, el arte.

Definición 1.1.1 Dados dos conjuntos A y B , una función entre estos es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento de A un único elemento de B .

El nombre más común para el concepto anterior es *función*, sin embargo también se le conoce como *mapeo* o *aplicación*.

La manera habitual de denotar una función es $f : A \rightarrow B$ o bien, $A \rightarrow B$, donde f es la regla de correspondencia (o relación). A es el dominio de f (el conjunto de partida); y B es el codominio de f , el conjunto de llegada.

Definición 1.1.2

1. Sea $f : A \rightarrow B$ una función. La imagen de f está denotada por $Im_f = \{f(x) : x \in A\}$.
2. Sean C un subconjunto de A y $f : A \rightarrow B$ una función. La imagen de C bajo f está definida por $f(C) = \{f(x) : x \in C\}$.

Definición 1.1.3 La función $id_A : A \rightarrow A$, donde para todo $a \in A$, $id_A(a) = a$, es llamada la *función identidad* de A .

Ejemplo 1.1.4 La función $f : R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x^2 + 3$ es aquella a la que cada número real, le asigna el cuadrado del número y luego, suma tres. Así, $f(1) = 1 + 3 = 4$.

Definición 1.1.5 Dadas dos funciones $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$. La composición de f con g está definida por la función $g \circ f : A \rightarrow C$, tal que para cada $a \in A$, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Ejemplo 1.1.6 Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = 5x + 2$. Entonces, la composición $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 + 3) \\ &= 5(x^2 + 3) \\ &= 5x^2 + 15\end{aligned}$$

Por otro lado, la composición $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(5x + 2) \\ &= (5x + 2)^2 + 3 \\ &= 25x^2 + 10x + 7\end{aligned}$$

A partir de lo anterior se concluye que la composición de funciones no es conmutativa.

Definición 1.1.7 Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es inyectiva si $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$, donde a, b son elementos del conjunto A .

Ejemplo 1.1.8 La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 6x - 3$ es inyectiva pues si $f(x) = f(x')$, para $x, x' \in \mathbb{R}$, entonces $6x - 3 = 6x' - 3$, y luego $6x = 6x'$; en consecuencia $x = x'$.

Teorema 1.1.9 Sean $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ funciones, entonces:

1. Si $g \circ f$ es una composición de funciones inyectiva, entonces f es inyectiva.
2. Si f y g son inyectivas, entonces la composición $g \circ f$ también es inyectiva.

Demostración.

1. Sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$. Luego, aplicando la composición de funciones obtenemos: $g(f_1) = g(f_2)$, entonces $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. Por hipótesis $g \circ f$ es inyectiva, así que $a_1 = a_2$.
2. Sean $a_1, a_2 \in A$ donde $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. Por definición lo anterior es igual a $g(f_1) = g(f_2)$; ya que g es una función inyectiva, entonces: $f(a_1) = f(a_2)$; f también es inyectiva, así que $a_1 = a_2$.

Definición 1.1.10 Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es sobreyectiva si, para todo $b \in B$ existe $a \in A$, tal que $f(a) = b$.

Las funciones que cumplen con la propiedad anterior también son llamadas *suprayectivas* o *sobre*.

Ejemplo 1.1.11 La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 6x - 3$ es sobreyectiva ya que, para todo $b \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, donde $x = \frac{(y + 3)}{6}$.

Teorema 1.1.12 Sean $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ funciones, entonces:

1. Si la composición de funciones $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.
2. Si f y g son sobreyectivas, también lo será su composición.

Demostración.

1. Por hipótesis, $g \circ f$ es sobreyectiva, así que existe un $a \in A$ tal que $(g \circ f)(a) = c$, para $c \in C$. Luego, $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$. Por ende, el elemento $b \in B$ que cumple que $g(b) = c$, es $f(a)$.
2. Sea $c \in C$. Como g es sobreyectiva, entonces existe $b \in B$, tal que $g(b) = c$. Luego, como f es sobreyectiva, entonces existe $a \in A$, tal que $f(a) = b$. Así, para todo $c \in C$, existe $a \in A$ tal que $g(f(a)) = c$. Por ende, $g \circ f$ es sobreyectiva.

Definición 1.1.13 Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo 1.1.14 La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 6x - 3$ es biyectiva pues anteriormente se comprobó que es inyectiva y sobreyectiva.

Definición 1.1.15 Sea $f : A \rightarrow B$ una función biyectiva. La función $g : B \rightarrow A$ se dice inversa si cumple que $g(b) = a$ si, y sólo si, $f(a) = b$.

La función inversa g es comúnmente denotada por f^{-1} .

Lema 1.1.16 Si la función $f : A \rightarrow B$ es invertible, sólo puede tener una única función inversa.

Demostración.

Se procederá por contradicción. Sean g, z funciones inversas de f entonces,

$$g \circ f = f \circ g = Id_f$$

y

$$z \circ f = f \circ z = Id_f$$

Luego,

$$f \circ g = f \circ z$$

componiendo por la izquierda,

$$g \circ (f \circ g) = z \circ (f \circ z)$$

de lo cual,

$$(g \circ f) \circ g = (z \circ f) \circ z$$

así,

$$Id_f \circ g = Id_f \circ z$$

Por lo tanto,

$$g = z$$

.

Ejemplo 1.1.17 La inversa de la función $f(x) = 6x - 3$ es $f^{-1}(x) = \frac{(x+3)}{6}$ pues, $y = 6x - 3$ implica que $y + 3 = 6x$, de lo cual se sigue que $x = \frac{(y+3)}{6}$.

1.2. Grupos

La teoría de grupos permite estudiar desde raíces de polinomios hasta la noción de simetría. Es sumamente útil en la teoría matemática actual y su desarrollo significó un gran avance para esta ciencia. En este apartado se estudian las definiciones y teoremas necesarios para el desarrollo de esta tesis.

Definición 1.2.1 Una operación binaria $*$ en un conjunto no vacío G es una función $*$: $G \times G \rightarrow G$, tal que $(x, y) \rightarrow *(x, y) = x * y$.

Definición 1.2.2 Una operación binaria $*$ en un conjunto no vacío G se dice asociativa si, para cada x, y, z en G , cumple que $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Definición 1.2.3 Un grupo es un conjunto G con una operación binaria tal que satisface:

- a. Asociatividad: para todo $x, y, z \in G$, se cumple $x * (y * z) = (x * y) * z$.
- b. Identidad: existe un elemento $e \in G$, tal que $e * x = x = x * e$, para toda $x \in G$.
- c. Inverso: toda $x \in G$ tiene un elemento $x' \in G$ tal que, $x * x' = e = x' * x$.

Los anteriores son denominados *axiomas de grupo*, mientras que G es llamado un *grupo con respecto a $*$* .

Ejemplo 1.2.4 El conjunto \mathbb{Z} de los números enteros, \mathbb{Q} de los racionales y \mathbb{R} de los reales son un grupo con la suma usual.

Ejemplo 1.2.5 Sea $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$. El conjunto $(\mathbb{Z}^*, *)$ no es un grupo pues, para cualquier $x \in G$, tenemos que $x \notin \{-1, 1\}$ en \mathbb{Z}^* .

Definición 1.2.6 Se dice que un grupo G es abeliano (o conmutativo) si satisface: $x * y = y * x$, para toda $x, y \in G$. Es decir, si satisface la ley conmutativa.

Ejemplo 1.2.7 Sea $G = \{-1, 1\}$ y $*$ definida por la multiplicación usual, el conjunto $(G, *)$ es un grupo abeliano.

Ejemplo 1.2.8 El conjunto \mathbb{Z} de los números enteros, \mathbb{Q} de los racionales y \mathbb{R} de los reales son un grupo abeliano con la suma usual.

Lema 1.2.9 Sea G un grupo.

- a. Si $x * y = x * z$ o, $y * x = z * x$, entonces $y = z$.
- b. El elemento $e \in G$ es único tal que cumple con $e * x = x = x * e$, para cada $x \in G$.
- c. Cada $x \in G$ tiene un único inverso, es decir existe un único elemento $x' \in G$, tal que $x * x' = e = x' * x$. Usualmente este elemento es denotado por x^{-1} .
- d. Para toda $x \in G$, $(x^{-1})^{-1} = x$.

Demostración.

- a. Sea $x' \in G$ tal que, $x' * x = e = x * x'$, luego

$$\begin{aligned} a &= e * a \\ &= (x' * x) * a \\ &= x' * (x * a) \\ &= x' * (x * b) \\ &= (x' * x) * b \\ &= e * b \\ &= b \end{aligned}$$

- b. Sea $e_0 \in G$, donde $e_0 * x = x = x * e_0$ para cada $x \in G$. Sea $x = e$, entonces $e = e * e_0$. Por otro lado, $e * e_0 = e_0$. Finalmente $e = e_0$.

- c. Supongamos que $x'' \in G$, la cual satisface que $x * x'' = e = x' * x$.
Si multiplicamos la ecuación $e = x * x'$ por x'' , entonces:

$$\begin{aligned} x'' &= x'' * e \\ &= x'' * (x * x') \\ &= (x'' * x) * x' \\ &= e * x' = x' \end{aligned}$$

- d. Por definición tenemos que $(x^{-1})^{-1} * x^{-1} = e = x^{-1} * (x^{-1})^{-1}$.
Sin embargo, $x * x^{-1} = e = x^{-1} * x$, luego $(x^{-1})^{-1} = x$, esto por el inciso anterior.

Definición 1.2.9 Se dice que un subconjunto H de un grupo G es un subgrupo si satisface las siguientes condiciones:

1. $e \in H$.
2. Si $x, y \in H$, entonces $x * y \in H$.
3. Si $x \in H$, entonces $x^{-1} \in H$.

La manera común para denotar a un subgrupo es: $H \leq G$. Si H es un subgrupo propio de G , entonces se denota mediante: $H < G$.

Ejemplo 1.2.10 El conjunto $n\mathbb{Z} = \{nx : x \in \mathbb{Z}\}$, donde $n \in \mathbb{Z}$, es un subgrupo de \mathbb{Z} bajo la suma usual.

Ejemplo 1.2.11 El conjunto \mathbb{Z} de enteros es un subgrupo del conjunto \mathbb{Q} de los números racionales bajo la suma usual.

Definición 1.2.12 Sean $(G, *)$ un grupo y x un elemento de G , definimos:

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

$\langle a \rangle$ es llamado el *subgrupo cíclico* de G generado por a .
Un grupo G es llamado cíclico si $G = \langle a \rangle$, para alguna $a \in G$.

Definición 1.2.13 Si G es un grupo finito, entonces el orden del grupo está definido por el número de elementos en G . Esto es denotado por $|G|$.

Definición 1.2.14 Sean G un grupo, H un subgrupo de G y a un elemento cualquiera de G . Se dice que:

- a. El conjunto $aH = \{ah : h \in H\}$, es llamado la clase lateral izquierda de H en G .
- b. El conjunto $Ha = \{ha : h \in H\}$, es llamado la clase lateral derecha de H en G .

Usualmente, si la clase lateral izquierda y derecha coinciden se referirá únicamente como clase lateral.

Definición 1.2.15 Sea G un grupo y H un subgrupo de G . Se dice que H es un subgrupo normal de G si, para todo $g \in G$, se satisface que $ghg^{-1} = h$.

Teorema 1.2.16 Sea G un grupo y H un subgrupo normal de G , entonces las clases laterales de H forman un grupo con la operación: $aH \circ bH = (a * b)H$, para todo $a, b \in H$. Este grupo es llamado el *grupo cociente* de G y es denotado por $\frac{G}{H}$.

Demostración.

1. Sean aH, bH, cH elementos de $\frac{G}{H}$, entonces

$$\begin{aligned} (aH)((bH)(cH)) &= (aH)((bc)H) \\ &= (a(bc))H \\ &= ((ab)c)H \\ &= ((ab)H)(cH) \\ &= ((aH)(bH))(cH) \end{aligned}$$

esto último por la propiedad asociativa de G .

2. Sea $eH \in \frac{G}{H}$, veamos que este es el elemento neutro:

$$\begin{aligned} (aH)(eH) &= (ae)H = aH, \\ (eH)(aH) &= (ea)H = aH, \end{aligned}$$

entonces, $eH = H$. Así, eH es el elemento identidad.

3. Sea $aH \in \frac{G}{H}$, el elemento $a^{-1}H \in \frac{G}{H}$ satisface:

$$\begin{aligned} (aH)(a^{-1}H) &= (aa^{-1})H = eH, \\ (a^{-1}H)(aH) &= (a^{-1}a)H = eH, \end{aligned}$$

entonces el elemento inverso de aH es $a^{-1}H$.

Ejemplo 1.2.17 Sea G un grupo. $\{e\}$ y G son subgrupos normales de G .

Proposición 1.2.18 Todo subgrupo de un grupo abeliano es normal.

Demostración.

Sea G un grupo abeliano y g un elemento de dicho grupo. Luego, $gHg^{-1} = Hgg^{-1} = H$.

Definición 1.2.18 Sean $(G, *)$ y (H, \circ) grupos, donde $*$ y \circ son sus respectivas operaciones binarias, entonces la función $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo si:

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y)$$

para todo $x, y \in G$.

Si además, la función f es biyectiva, entonces se dice que f es un *isomorfismo*. Así, dos grupos G y H son llamados isomorfos si existe un isomorfismo $f : G \rightarrow H$, entre ellos. Esto es denotado mediante: $G \cong H$.

Ejemplo 1.2.19 Sean G y H grupos cíclicos, ambos con el mismo orden m , entonces G y H son isomorfos.

1.3. El plano euclidiano

La presente tesis se realiza bajo el plano \mathbb{R}^2 , es decir:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

En la última sección haremos un breve comentario sobre cómo se comporta la simetría que exploraremos en las siguientes páginas en *otras* geometrías.

A continuación damos algunas definiciones y lemas básicos para el desarrollo de esta tesis.

Definición 1.3.1 Cada punto P del plano \mathbb{R}^2 puede representarse por un par ordenado (x, y) , donde $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$. Así, el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) constituyen al plano \mathbb{R}^2 .

Definición 1.3.2 Un vector \mathbf{v} en el plano \mathbb{R}^2 es un par ordenado (x, y) . El vector *nulo*, denotado por $\mathbf{0}$, está definido como $\mathbf{0} = (0, 0)$, este vector se representa geoméricamente mediante un punto. El vector $-\mathbf{v} = (-x, -y)$ es el *inverso aditivo* de \mathbf{v} .

Definición 1.3.3 Sean $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ dos vectores de \mathbb{R}^2 ; la adición $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ es:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Por otro lado, la diferencia entre los vectores está definida por:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2) \\ &= (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) \\ &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2)\end{aligned}$$

Lema 1.3.4 La adición de vectores en \mathbb{R}^2 cumple además con las siguientes propiedades: Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vectores en \mathbb{R}^2 :

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
4. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$.
5. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u}$.

Demostración.

1. Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1), \mathbf{v} = (x_2, y_2)$ vectores en \mathbb{R}^2 .

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Ya que $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$ y $y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$, entonces, $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1), \mathbf{v} = (x_2, y_2)$ vectores en \mathbb{R}^2 .

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Luego, por la conmutatividad de la adición en \mathbb{R} , entonces

$$\begin{aligned}&= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}\end{aligned}$$

3. Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1), \mathbf{v} = (x_2, y_2), \mathbf{w} = (x_3, y_3)$ vectores en \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)\end{aligned}$$

Por la asociatividad de la adición en \mathbb{R} , tenemos que:

$$\begin{aligned}&= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \\ &= (x_1 + y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})\end{aligned}$$

4. Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{0} = (0, 0)$ vectores en \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{0} &= (x_1 + y_1) + (0, 0) \\ &= (x_1 + 0, y_1 + 0) = (x_1, y_1) \\ &= \mathbf{u}\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\mathbf{0} + \mathbf{u} &= (0, 0) + (x_1, y_1) \\ &= (0 + x_1, 0 + y_1) = (x_1, y_1) \\ &= \mathbf{u}\end{aligned}$$

5. Sea $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, $-\mathbf{u} = -(x_1, y_1)$ vectores en \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) &= (x_1, y_1) + (-(x_1, y_1)) \\ &= (x_1 - x_1, y_1 - y_1) = (0, 0) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}-\mathbf{u} + \mathbf{u} &= (-(x_1, y_1)) + (x_1, y_1) \\ &= (-x_1 + x_1, -y_1 + y_1) = (0, 0) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.5 Sean $\mathbf{u} = (8, 4)$, $\mathbf{v} = (10, 7)$ vectores en \mathbb{R}^2 . La suma de estos vectores es:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (8, 4) + (10, 7) = (8 + 10, 4 + 7) \\ &= (18, 11)\end{aligned}$$

Definición 1.3.7 Sea $\mathbf{v} = (x_1, y_1)$ un vector en \mathbb{R}^2 y $k \in \mathbb{R}$. La multiplicación de \mathbf{v} por k está dada por:

$$k\mathbf{v} = k(x, y) = (kx, ky)$$

Esta multiplicación recibe el nombre de *múltiplo escalar*.

Lema 1.3.7 Sean \mathbf{u}, \mathbf{v} vectores en \mathbb{R}^2 y k, m escalares en \mathbb{R} ; la multiplicación escalar cumple con las siguientes propiedades:

1. $k\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$.
2. $(km)\mathbf{u} = k(m\mathbf{u})$.
3. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.
4. $r\mathbf{u} = \mathbf{0}$ si y sólo si $r = 0$ o $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
5. $-1\mathbf{u} = -\mathbf{u}$.
6. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ y $(k + m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$.

Demostración. Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ vectores en \mathbb{R}^2 y k, m escalares en \mathbb{R} .

1.

$$k\mathbf{u} = k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1)$$

Ya que kx_1, ky_1 están en \mathbb{R} , entonces $(kx_1, ky_1) \in \mathbb{R}^2$.

2.

$$(km)\mathbf{u} = (km)(x_1, y_1) = (kmx_1, kmy_1)$$

Por la asociatividad en \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} &= (k(mx_1), k(my_1)) \\ &= k(mx_1, my_1) \\ &= k(m\mathbf{u}) \end{aligned}$$

3. Sea $1 \in \mathbb{R}$,

$$1\mathbf{u} = 1(x_1, y_1) = (1x_1, 1y_1) = (x_1, y_1) = \mathbf{u}$$

4. Tenemos dos casos:

Caso 1: si $k = 0$,

$$k\mathbf{u} = 0(x_1, y_1) = (0x_1, 0y_1) = (0, 0) = \mathbf{0}.$$

Caso 2: si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

$$k\mathbf{u} = k(0, 0) = (k0, k0) = (0, 0) = \mathbf{0}$$

5. Sea $-1 \in \mathbb{R}$,

$$-1\mathbf{u} = -1(x_1, y_1) = (-1x_1, -1y_1) = (-x_1, -y_1) = -\mathbf{u}.$$

6.

$$\begin{aligned} k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= k(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (kx_1 + kx_2, ky_1 + ky_2) \\ &= k(x_1, y_1) + k(x_2, y_2) \\ &= k\mathbf{u} + k\mathbf{v} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (k + m)\mathbf{u} &= (k + m)(x_1, y_1) \\ &= (kx_1, ky_1) + (mx_1, my_1) \\ &= k(x_1, y_1) + m(x_1, y_1) \\ &= k\mathbf{u} + m\mathbf{u} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.5 Sea $k = 7$ un escalar y $\mathbf{u} = (3, 9) \in \mathbb{R}^2$,

$$k\mathbf{u} = 7(3, 9) = (7 \cdot 3, 7 \cdot 9) = (21, 63)$$

Para mayor información sobre este tema, recomendamos [15], el cual fue la fuente principal de esta subsección.

Capítulo 2

Isometrías en el plano euclidiano

En este capítulo se estudia la *isometría*, así como las transformaciones isométricas en el plano euclidiano: traslación, rotación, reflexión y reflexión deslizada, empezando desde conceptos básicos para culminar con resultados que empleen una o más transformaciones isométricas. Finalmente, en la última sección se muestran diversos ejemplos de piezas artísticas que hacen uso de éstas. Puede consultar [14] y [8].

2.1. Isometrías

La palabra isométrico proviene del griego: *iso*(igual), *metron*(medida), *ico*(relativo a); significa “de dimensiones iguales”. Esta conserva las distancias entre dos puntos en el plano. Por otro lado, una transformación isométrica se refiere a la intervención de una figura en el plano, la cual no sufre cambios de forma o tamaño pero sí de posición, de tal modo que la figura inicial y la final sean congruentes y semejantes en un sentido geométrico.

2.1.1. Transformaciones

Definición 2.1.1 Una transformación del plano es una función biyectiva $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Lema 2.1.2 Sean f y g dos transformaciones en el plano, la composición $g \circ f$ es también una transformación.

Demostración. Primero comprobemos que $g \circ f$ es inyectiva. Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, supongamos que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$, entonces $g(f(x)) = g(f(y))$. Ya que g es inyectiva entonces, $f(x) = f(y)$. Ya que f es inyectiva, entonces $x = y$. Por lo tanto, la composición $g \circ f$ es inyectiva.

Ahora veamos que $g \circ f$ es sobre. Para todo $z \in \mathbb{R}^2$ existe $y \in \mathbb{R}^2$ tal que $g(y) = z$ y para todo y existe x tal que $f(x) = y$, esto por la sobreyectividad de f y g . Entonces, para todo z existe x tal que $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Por ende, $g \circ f$ es sobre.

En conclusión, $g \circ f$ es una transformación.

Proposición 2.1.3 El conjunto de todas las transformaciones del plano forman un grupo bajo la composición.

Demostración. Sea G el conjunto de todas las transformaciones del plano. Ya hemos comprobado que, dadas dos transformaciones $f, g \in G$, la composición también es una transformación, por lo cual está en G . Es decir, el conjunto cumple con la propiedad de clausura.

Sea f una transformación y f^{-1} su inverso, luego $f^{-1} \circ f(x) = x$ y $f \circ f^{-1}(x) = x$, para todo

$x \in \mathbb{R}^2$, entonces $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id$.

Veamos que es asociativa. Sean f, g y h transformaciones en G y $x \in \mathbb{R}^2$, luego

$$\begin{aligned} [h \circ (g \circ f)](x) &= h([(g \circ f)(x)]) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= h \circ g(f(x)) \\ &= [(h \circ g) \circ f](x) \end{aligned}$$

Por ende, el conjunto G cumple con los axiomas de grupo. Concluimos así que este conjunto es un grupo.

Definición 2.1.4. Sean $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos en \mathbb{R}^2 . La distancia entre p_1 y p_2 está definida mediante:

$$d(p_1, p_2) = |p_1 - p_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Además, satisface las siguientes propiedades:

1. $d(p_1, p_2) \geq 0$,
2. $d(p_1, p_2) = 0$ si y sólo si $p_1 = p_2$,
3. $d(p_1, p_2) = d(p_2, p_1)$,
4. $d(p_1, p_3) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3)$.

Ejemplo 2.1.5 Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$, donde $p_1 = (-5, 2)$, $p_2 = (-2, 6)$. La distancia entre p_1, p_2 está dada por:

$$\begin{aligned} d(p_1, p_2) &= |p_1 - p_2| \\ &= \sqrt{(-2 + 5)^2 + (6 - 2)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \\ &= |Id_f(p_1) - Id_f(p_1)| \end{aligned}$$

Definición 2.1.6 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación en el plano,

- a. Un punto $p \in \mathbb{R}^2$ es invariante de f si $f(p) = p$.
- b. Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A es un conjunto invariante puntual de f si, para todo $p \in A$, p es un punto invariante de f .
- c. Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A es invariante global de f si $f(A) = A$.

Definición 2.1.7 Sea f una transformación, f es involución si y solo si $f^2 = id$, pero $f \neq id$. En otras palabras, una involución es su propia inversa.

Ejemplo 2.1.8. La transformación $f(x, y) = (x, -y)$ es una involución.

$$f \circ f(x, y) = f(f(x, y)) = f(x, -y) = (x, -(-y)) = (x, y)$$

2.1.2. Isometrías en el plano

Definición 2.1.6 Una transformación f es llamada isometría si preserva la distancia euclidiana. En otras palabras, es una función biyectiva $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con la propiedad:

$$d(p_1, p_2) = d(f(p_1), f(p_2))$$

Donde $d(p_1, p_2)$ es la distancia usual en \mathbb{R}^2 ; es decir, si $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$, entonces:

$$d(p_1, p_2) = |p_1 - p_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Lema 2.1.7

- a. La función identidad $Id_f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría.
- b. La inversa de una isometría es también una isometría.
- c. La composición de isometrías es una isometría.

Demostración.

- a. En efecto, sean $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ e $Id_f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} |p_1 - p_2| &= d(p_1, p_2) \\ &= d(Id_f(p_1), Id_f(p_2)) \\ &= |Id_f(p_1) - Id_f(p_2)| \end{aligned}$$

- b. Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una isometría, con $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ su inversa y $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$. Debido a que el dominio de f^{-1} es igual al rango de f , entonces existen $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^2$ tal que $p_1 = f(q_1)$ y $p_2 = f(q_2)$; en otras palabras, $q_1 = f^{-1}(p_1)$ y $q_2 = f^{-1}(p_2)$.
Ya que f es una isometría, entonces

$$\begin{aligned} |p_1 - p_2| &= |f(p_1) - f(p_2)| \\ &= |q_1 - q_2| \\ &= |f^{-1}(p_1) - f^{-1}(p_2)| \end{aligned}$$

Por lo tanto, f^{-1} es una isometría.

- c. Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometrías en el plano y $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$.
Luego,

$$\begin{aligned} |p_1 - p_2| &= |f(p_1) - f(p_2)| \\ &= |g(f(p_1)) - g(f(p_2))| \\ &= |(g \circ f)(p_1) - (g \circ f)(p_2)| \\ &= d[(g \circ f)(p_1), (g \circ f)(p_2)] \end{aligned}$$

En conclusión, la composición es isometría.

Corolario 2.1.8 El conjunto de las isometrías del plano forman un grupo no abeliano bajo la composición. Tal grupo es denotado por: $\text{Isom} = (\{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : f \text{ es isometría}\}, \circ)$.

Demostración. Resta comprobar que el grupo no es abeliano.

Sean $F_1(x) = x + 1$ y $F_2(x) = 3x + 2$ dos isometrías en el plano.

Por un lado, $(F_2 \circ F_1)(x) = F_2(F_1(x)) = F_2(x + 1) = 3x + 5$.

Por otra parte, $(F_1 \circ F_2)(x) = F_1(F_2(x)) = F_1(3x + 2) = 3x + 3$.

Por ende, $f_2 \circ f_1 \neq f_1 \circ f_2$.

Proposición 2.1.9 Cualquier isometría $f \in \mathbb{R}^2$ manda rectas a rectas.

Demostración. Para demostrar esto basta probar que F manda puntos colineales a puntos colineales.

Sean $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ tres puntos colineales. Sin pérdida de generalidad supóngase que $P_2 \in \overline{P_1P_3}$, luego

$$\begin{aligned} d(F(P_1), F(P_3)) &= d(P_1, P_3) \\ &= d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) \\ &= d(F(P_1), F(P_2)) + d(F(P_2), F(P_3)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F(P_1), F(P_2), F(P_3)$ son colineales.

Lema 2.1.11 Las isometrías en el plano son funciones continuas.

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una isometría y p_1, p_2 puntos de \mathbb{R}^2 . Entonces, $d(p_1, p_2) = d(f(p_1), f(p_2)) = |p_1 - p_2|$.

Luego, para todo $\epsilon > 0$, $|p_1 - p_2| = |f(p_1) - f(p_2)|$.

Tomando $\epsilon = \delta$, tenemos que $|f(p_1) - f(p_2)| = |p_1 - p_2| < \delta = \epsilon$.

Por lo tanto, f es continua.

Con estas bases iniciamos el estudio de los cuatro tipos de transformaciones isométricas en el plano.

2.2. Traslación

No es una palabra desconocida; desde la infancia nos enseñaron que la Tierra, nuestro planeta, tiene un movimiento de traslación. La traslación en el plano es un movimiento que actúa sobre todos los puntos de una figura, los cuales se desplazan a la misma distancia y dirección, sin alterar su tamaño, forma o sentido. Así, el resultado final será otra figura idéntica a la primera.



Figura 2.1: Traslación de una figura en el plano

Definición 2.2.1 Una traslación en el plano es una función $T_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde $v = (a, b)$ es llamado *vector de traslación*, tal que para todo punto $p \in \mathbb{R}^2$, $T_v(p) = p + v$.

La traslación puede expresarse mediante notación matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

La figura final no sufre cambios en su forma o tamaño, es idéntica a la original. Nótese además, que en general ningún punto es enviado a sí mismo bajo la traslación, es decir, no hay puntos fijos en la traslación, salvo la identidad.

Proposición 2.2.2 Toda traslación T_v es una isometría en el plano.

Demostración. Sean $p_1, p_2, v \in \mathbb{R}^2$, tales que $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2)$ y \mathbf{v} un vector fijo.

Entonces, $T_v(p_1) = (x_1 + v, y_1 + v)$ y $T_v(p_2) = (x_2 + v, y_2 + v)$.

Luego,

$$\begin{aligned} |T_v(p_1) - T_v(p_2)| &= \sqrt{(x_2 + v - v - x_1)^2 + (y_2 + v - v - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= |p_1 - p_2| \end{aligned}$$

Lema 2.2.3

- a. La identidad $Id_{T_v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $Id = T_0$, con $0 = (0, 0)$ es una traslación.
- b. Toda traslación T_v tiene inverso.
- c. $T_{v+u} = T_v \circ T_u$. Es decir, la composición de traslaciones es una traslación.

Demostración

- a. Sea $v = (0, 0)$ y $p \in \mathbb{R}^2$, entonces:
 $T_v = p + v$, luego $x' = x + 0 = x$ y $y' = y + 0 = y$.
- b. Ya que las traslaciones son transformaciones (pues son isometrías), entonces su inverso está bien definido.
En efecto, sea T_v^{-1} , tal que $T_v^{-1} = p - v$ entonces, $T_v^{-1} \circ T_v(p) = p$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$.
- c. Sean $p, v, u \in \mathbb{R}^2$, T_v y T_u dos traslaciones, donde $T_v(p) = (x+v, y+v)$ y $T_u(p) = (x+u, y+u)$.
Entonces, $T_u(p) = (x+u, y+u)$,
luego,

$$\begin{aligned} T_v(T_u(p)) &= [v + (x+u), v + (y+u)] \\ &= [x + (u+v), y + (u+v)] \\ &= T_{u+v} \end{aligned}$$

Por ende, la composición es una traslación.

Corolario 2.2.4 El conjunto de todas las traslaciones del plano forma un grupo abeliano bajo la composición. Tal grupo es denotado por: $T = (f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : f \text{ es traslación}, \circ)$.

Corolario 2.2.5 El conjunto de las traslaciones del plano forman un subgrupo de $Isom$ bajo la composición.

Algunas propiedades que son invariantes bajo la traslación son las siguientes:

- Distancias.
- Magnitud del ángulo.
- Área de objetos en el plano.
- Paralelismo.
- Orientación.

Ejemplo 2.2.6 La imagen del punto $p = (-3, 4)$ con el vector $v = (2, -5)$ es $p' = (-1, -1)$.

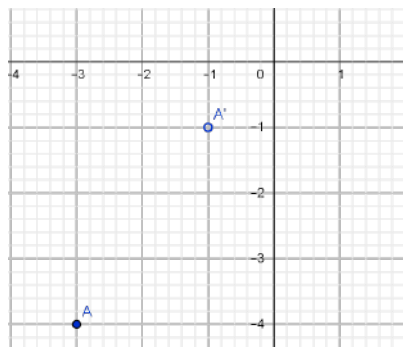


Figura 2.2

Ejemplo 2.2.7 Sean $p_1 = (-3, 3)$, $p_2 = (-1, -3)$, $p_3 = (-3, 0)$ los vértices de un triángulo. La traslación bajo el vector $v = (2, 3)$ es: $p'_1 = (-1, 0)$, $p'_2 = (1, 0)$, $p'_3 = (-1, 3)$.

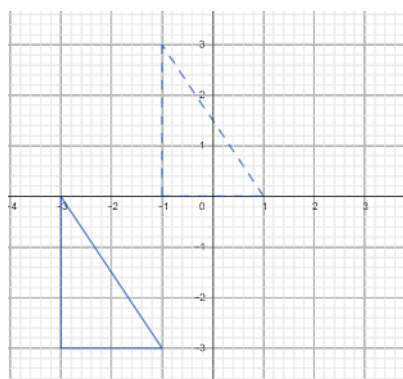


Figura 2.3

A partir de un objeto es posible construir diversos patrones aplicando únicamente la traslación. En la figura 2.4 se observa un patrón geométrico creado a partir de la aplicación de diferentes traslaciones.



Figura 2.4: Patrón geométrico.

2.3. Rotación

En la vida cotidiana es común encontrar ejemplos de rotación: al abrir una puerta, las llantas de un automóvil al moverse, e incluso la Tierra misma describe dos movimientos rotatorios, uno alrededor del Sol, como centro de rotación, y otro alrededor de un eje polar. La rotación es un movimiento alrededor de un punto fijo o de una recta fija, el cual mantiene la estructura del objeto original; es decir: los puntos del objeto permanecen a la misma distancia del punto o recta fijas,

aún después de la rotación.

Además, utilizamos “giro” como sinónimo de “rotación”.

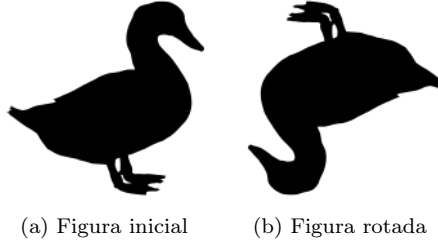


Figura 2.5: Ejemplo de rotación

Un giro está definido por tres elementos:

- Un punto fijo llamado centro u origen.
- Un ángulo, el cual determina la amplitud del giro.
- Un sentido de la rotación, pues este movimiento puede ser en el sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario.

Definición 2.3.1 Sea θ un ángulo dirigido. La rotación con centro en $\bar{o} = (0, 0)$ y ángulo θ , es la transformación $R_{\bar{o}, \theta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, la cual fija al punto \bar{o} y envía a cualquier otro punto $p \in \mathbb{R}^2$ a $p' \in \mathbb{R}^2$, tal que, si $p = (x, y)$,

$$p' = R_{\bar{o}, \theta}(p) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

y además, $d(p, \bar{o}) = d(p', \bar{o})$.

En efecto, si $\theta = \angle(p \bar{o} p')$, entonces $d(p', \bar{o}) = |p'| = \sqrt{(x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |p| = d(p, \bar{o})$.

Toda rotación $R_{\bar{o}, \theta}$ puede escribirse mediante notación matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Esta matriz es denominada matriz de la rotación $R_{\bar{o}, \theta}$.

Cuando el giro es en sentido antihorario el ángulo es positivo, mientras que cuando es en sentido horario, este es negativo.

Nótese que el único punto que permanece fijo bajo la rotación es el centro de rotación.

Definición 2.3.2 Si $c \neq \bar{o}$, la rotación con centro c y ángulo θ se define como la función $R_{c, \theta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $R_{c, \theta}(p) = c + R_{\bar{o}, \theta}(p - c)$, para cada $p \in \mathbb{R}^2$. Es decir, $R_{c, \theta} = T_c \circ R_{\bar{o}, \theta} \circ T_{-c}$.

Ejemplo 2.3.3 Sea $p = (3, 4)$. La rotación alrededor de \bar{o} del punto p con $\theta = 90^\circ$ es: $p' = (-4, 3)$.

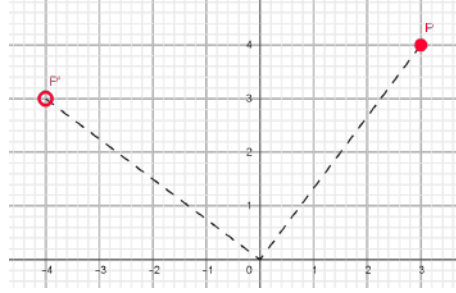


Figura 2.6

Nótese que, en general, para todo punto $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $R_{\bar{o}, 90^\circ}(x, y) = (-y, x)$.

Proposición 2.3.4 El producto de dos rotaciones con mismo origen y ángulos $\theta, \varphi \in \mathbb{R}^2$, respectivamente, es la suma de los ángulos.

Demostración.

$$\begin{aligned} R_{\bar{o}, \theta + \varphi} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta + \varphi) & -\sin(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) & \cos(\theta + \varphi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi & -\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \end{bmatrix} \\ &= R_{\bar{o}, \theta} R_{\bar{o}, \varphi} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.5 Sean $p_1 = (1, 3)$, $p_2 = (4, 3)$, $p_3 = (4, -1)$, $p_4 = (1, -1)$ los vértices de un rectángulo en el plano. La rotación por el ángulo $\theta = 180^\circ$ es: $p'_1 = (-1, -3)$, $p'_2 = (-4, -3)$, $p'_3 = (-1, 1)$, $p'_4 = (-4, 1)$.

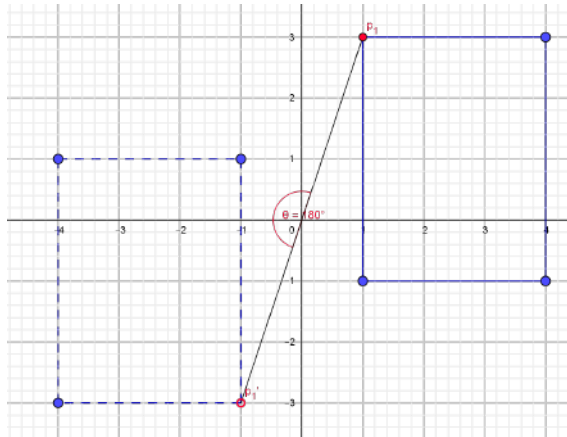


Figura 2.7

Nótese que, en general, $R_{\bar{o}, 180^\circ} = R_{\bar{o}, 90^\circ} \circ R_{\bar{o}, 90^\circ}(x, y) = R_{\bar{o}, 90^\circ}(-y, x) = (-x, -y)$; es decir, $R_{\bar{o}, 180^\circ}$ lleva cada punto p a $-p$.

Lema 2.3.6

1. Para todo $c \in \mathbb{R}^2$, $R_{c, 0} = p$.

2. Toda rotación $R_{c,p}$ tiene inversa, la cual está definida por $R^{-1}(p') = p$.

Demostración.

1. a. Sea $c = \bar{o}$. Entonces,

$$\begin{aligned} R_{\bar{o},0} &= \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $R_{\bar{o},0} = 1_{\mathbb{R}^2}$

b. Si $c \neq \bar{o}$ entonces, por la definición 2,3,2, $R_{c,\theta} \circ R_{\bar{o},\theta} \circ T_{-c} = T_c \circ T_{-c} = 1_{\mathbb{R}^2}$

2. Sea

$$\begin{aligned} R'_{c,\theta} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Verifiquemos que esta es la matriz inversa de R .

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así, $R' = R_{\bar{o},\theta}^{-1}$ es la inversa de $R_{\bar{o},\theta}$ y $R_{\bar{o},\theta}^{-1} = R_{\bar{o}}(-\theta)$. También, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, $R_{p,\theta}^{-1} = (T_p \circ R_{\bar{o},\theta} \circ T_{-p})^{-1} = T_{-p}^{-1} \circ R_{\bar{o},\theta}^{-1} \circ T_p^{-1} = T_p \circ R_{\bar{o},\theta} \circ T_{-p} = R_{p,-\theta}$.

Corolario 2.3.7 El conjunto de las rotaciones alrededor de c del plano forma un grupo bajo la composición, el cual es denotado por: $R_{o,\theta} = (\{R_{o,\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}, \circ)$.

Corolario 2.3.8 Para todo $c \in \mathbb{R}^2$, el conjunto de las rotaciones alrededor de c del plano forman un subgrupo de $Isom$ bajo la composición.

Cabe destacar que los corolarios anteriores se cumplen solo si $c \in \mathbb{R}^2$ es un punto fijo, de lo contrario la composición de rotaciones no sería una operación cerrada y por ende, no cumpliría con la definición de grupo y subgrupo.

Ejemplo 2.3.9 Sean $p_1 = (2, 2)$, $p_2 = (8, 2)$, $p_3 = (5, 5)$ los vértices de un triángulo y $\theta = 180^\circ$, $\varphi = 90^\circ$. Luego, $R_{\theta+\varphi} = R_{\bar{o},\theta}R_{\bar{o},\varphi}$. Así, $p'_1 = (2, -2)$, $p'_2 = (2, -8)$, $p'_3 = (5, -5)$.

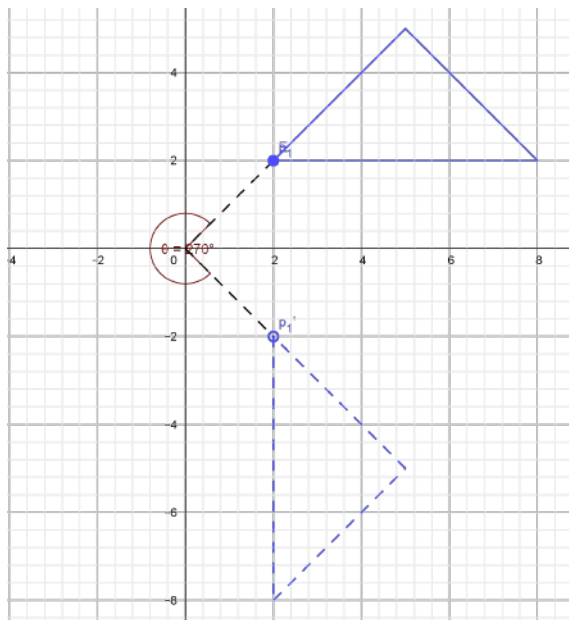


Figura 2.8

Nótese que, en general, para cualquier punto $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $R_{\bar{o}, \theta + \varphi}(x, y) = R_{\bar{o}, \theta} R_{\bar{o}, \varphi}(x, y) = R_{\bar{o}, \theta}(-y, x) = (y, -x)$.

Las propiedades que permanecen invariantes bajo la rotación son las siguientes:

- Distancias.
- Magnitud del ángulo.
- Área de objetos en el plano.
- Paralelismo.
- Orientación.

2.3.1. Semigiros

Definición 2.3.10 Sean $c \in \mathbb{R}^2$ el centro de una rotación y $\theta = \pi$. Un semigiro con centro en c es la rotación dada por $R_{c, \pi}$. La denotaremos por R_c .

Notemos que, dado un punto $q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, el cual se rota por π alrededor de $p \in \mathbb{R}^2$, entonces obtenemos un punto $q' = (x', y')$, tal que p es el punto medio de $\overline{qq'}$. Por las ecuaciones del punto medio de $\overline{qq'}$ obtenemos $\frac{x+x'}{2} = a$ y $\frac{y+y'}{2} = b$, donde $(a, b) = p$. Entonces, el semigiro es la transformación dada por:

$$x' = -x + 2a$$

$$y' = -y + 2b$$

Es decir, $q' = -1 + 2p(*)$. En particular, $R_{\bar{o}}(x, y) = (-x, -y)$. Observemos que por, $(*)$, $R_p = T_{2p}R_{\bar{o}}$.

Proposición 2.3.11

- a. Un semigiros es involución.
- b. [8] El producto de dos semigiros es una traslación.

Demostración.

- a. Esto ocurre ya que $\pi \cdot \pi = 2\pi$ lo cual equivale a un giro completo.
- b. Sean $p_1 = (a, b)$ y $p_2 = (c, d)$, entonces

$$\begin{aligned} R_{p_2} R_{p_1}((x, y)) &= R_{p_2}((-x + 2a, -y + 2b)) \\ &= (-[-x + 2a] + 2c, -[-y + 2b] + 2d) \\ &= (x + 2[c - a], y + 2[d - b]) \end{aligned}$$

El producto $R_{p_2} R_{p_1}$ es de la forma:

$$\begin{aligned} x' &= x + 2(c - a) \\ y' &= y + 2(d - b) \end{aligned}$$

Por lo cual es una traslación.

Con lo anterior, sabemos que el producto de dos semigiros es una traslación. ¿Qué ocurre con el producto de tres semigiros?

Proposición 2.3.12 El producto de tres semigiros es un semigiros.

Demostración. Sean $R_{p_1}, R_{p_2}, R_{p_3}$ tres semigiros, tales que $p_1 = (a, b)$, $p_2 = (c, d)$ y $p_3 = (e, f)$, entonces,

$$[R_{p_3} \circ (R_{p_2} \circ R_{p_1})](x, y) = [-(x + 2(c - a)) + 2e, -(y + 2(d - b)) + 2f]$$

Por lo tanto, el producto es un semigiros.

Proposición 2.3.13 La unión de las traslaciones y los semigiros del plano forman un grupo bajo la composición.

Demostración. Hemos comprobado que el producto par de semigiros es una traslación y viceversa, una traslación es el producto par de semigiros. Además, el producto impar de semigiros puede ser descompuesto como una traslación seguida por un semigiros, lo cual da como resultado un semigiros. Con esto, el grupo es cerrado bajo la composición. El resto de los axiomas ya fueron exhibidos anteriormente, por lo cual este conjunto cumple con ellos y por ello concluimos que es un grupo.

Al igual que en la traslación, aplicando una secuencia de rotaciones y sus respectivos inversos sobre un objeto determinado, es posible crear diversos patrones circulares. Un ejemplo de esto se encuentra en la figura 2.9.

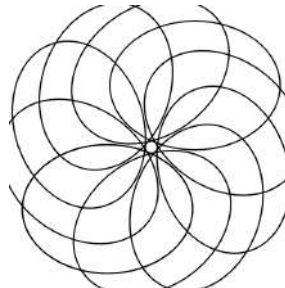


Figura 2.9: Patrón circular.

2.4. Reflexión

Si una persona se coloca frente al espejo observará un reflejo de su cuerpo: una copia *casí* exacta de sus rasgos. Sin embargo, la imagen estará invertida. Una reflexión actúa de manera similar al espejo. Intercambia todos los puntos de una figura original por los puntos que están al *otro lado* de la recta o eje de reflexión, de tal modo que los puntos iniciales y los finales se ubiquen a la misma distancia de dicha recta.

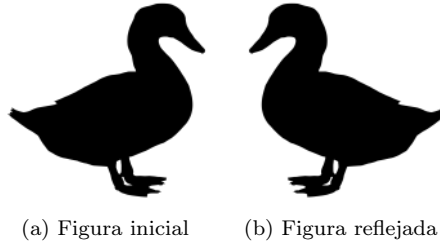


Figura 2.10: Ejemplo de reflexión

El eje de reflexión puede estar en cualquier dirección: vertical, horizontal, inclinada, etc. Además, las reflexiones tienen un papel muy importante en el estudio de las isometrías del plano, pues cada isometría es una combinación de ellas, como se mostrará más adelante.

Definición 2.4.1. Sean $l \in \mathbb{R}^2$ una recta y $p \in \mathbb{R}^2$ un punto, la reflexión $R_l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación tal que:

- si p está en l , entonces $p = p'$, es decir $p' = R_l(p)$.
- si p no está en l , entonces l es la mediatriz del segmento $\overline{pp'}$, es decir la recta perpendicular a $\overline{pp'}$

El tipo de reflexión más sencillo de estudiar es la reflexión sobre el eje x : sea $p \in \mathbb{R}^2$, tal que $p = (x, y)$, entonces $p' = (x, -y)$. Su notación matricial es:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ya que,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1x + 0y \\ 0x + -1y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por otro lado, la reflexión sobre el eje y está dada por $p' = (-x, y)$, donde $p \in \mathbb{R}^2$ es tal que $p = (x, y)$. Su notación matricial es:

$$R_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1x + 0y \\ 0x + 1y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La reflexión en la recta $y = x$ está dada por $p' = (y, x)$, cuya notación matricial es:

$$R_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pues,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0x + 1y \\ 1x + 0y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mientras que la reflexión en la recta $y = -x$ está dada por $p' = (-y, -x)$. Su notación matricial es:

$$R_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pues,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0x - 1y \\ -1x + 0y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Así mismo, es posible reflejar sobre cualquier recta l . Supongamos que $l = Ax + By + C = 0$, $p = (x, y)$ un punto en el plano y que $R_l(p) = (x', y') = p'$. Supongamos además que el punto p no está sobre l , lo cual implica que la recta que pasa por los puntos (x, y) y (x', y') es perpendicular a la recta l . Esto se expresa mediante $B(x' - x) = A(y' - y)$.

Además, $\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2}$ es el punto medio del segmento $\overline{pp'}$ el cual está sobre la recta l . Esto se expresa mediante:

$$A \frac{x + x'}{2} + B \frac{y + y'}{2} + C = 0$$

Podemos reescribir estas ecuaciones como el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} Bx' - Ay' &= Bx - Ay \\ Ax' + By' &= -2C - Ax - By \end{aligned}$$

Al resolver estas ecuaciones para x', y' , obtenemos:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{B^2x + A^2x - 2A^2x - 2ABy - 2AC}{A^2 + B^2} \\ y' &= \frac{A^2y + B^2y - 2B^2y - 2BAx - 2BC}{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

Con lo cual formamos,

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{2A(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \\ y' &= y - \frac{2B(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones también son válidas para el caso en que el punto p esté sobre l . Así, podemos expresar la reflexión con respecto a cualquier recta l como:

$$R_l(x, y) = \left(\left(x - \frac{2A(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \right), \left(y - \frac{2B(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \right) \right)$$

Proposición 2.4.2 Toda reflexión R_l es una isometría en el plano.

Demostración. Sean $l, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ una recta de reflexión y dos puntos del plano, respectivamente. (figura 2.10).

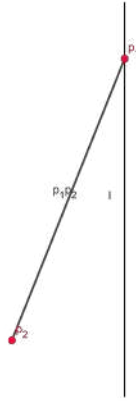


Figura 2.11: recta l , puntos p_1, p_2

Aplicando la reflexión sobre la recta l , obtenemos la figura 2.11

Por definición de reflexión, ya que $p_1 \in l$, entonces $p_1 = p'_1$, $\angle p_1 Q p_2 = \angle p'_1 Q p'_2$, $\overline{p_2 Q} = \overline{Q p'_2}$ y $\overline{p_1 Q} = \overline{Q p'_1}$. Por la propiedad $l\alpha l$, se sigue que $\triangle p_1 Q p_2 \cong \triangle p'_1 Q p'_2$, en particular $\overline{p_1 p_2} = \overline{p'_1 p'_2}$. Por lo tanto, la reflexión es isometría.

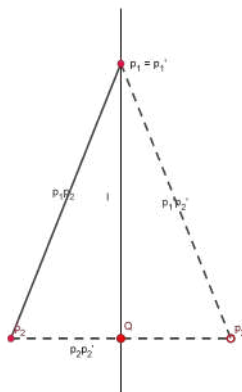


Figura 2.12: Reflexión

Ejemplo 2.4.3 La reflexión de un pentágono con vértices $p_1 = (2, 1)$, $p_2 = (3, 1)$ sobre el eje x , está dada por $p'_1 = (2, -1)$ y $p'_2 = (3, -1)$.

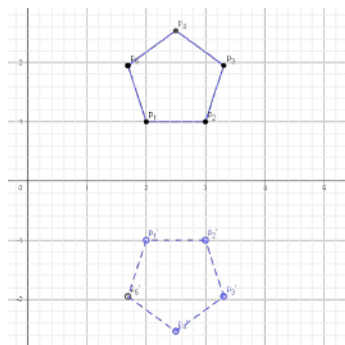


Figura 2.13

En general, para cualquier punto $p_n = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, la reflexión sobre el eje x da como resultado $p'_n = (x, -y)$.

Ejemplo 2.4.4 La reflexión de un pentágono con vértices $p_1 = (-5, 2)$, $p_2 = (-4, 2)$ con la recta de reflexión $y = x + 3$, está dada por $p'_1 = (-1, -2)$, $p'_2 = (-1, -1)$. Esto debido a que $(x, y) \rightarrow (y - 3, x + 3)$.

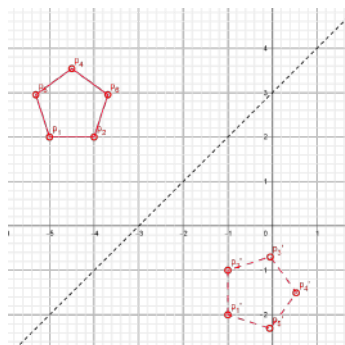


Figura 2.14

Lema 2.4.5

- a. Toda reflexión R_l es una involución.
- b. La reflexión R_l fija a un punto p si y solo si p está en l .
- c. Si m es una recta perpendicular a la recta de reflexión l , m permanece invariante bajo R_l , es decir, $R_l(m) = m$.

Demostración.

- a. Sean R_l una reflexión cualquiera del plano y $p \in \mathbb{R}^2$. Notemos que $R_l \neq id$, pero $(R_l)^2 = id$ ya que la mediatriz de $\overline{pp'}$ es la mediatriz de $\overline{p'p}$. Luego, $(R_l \circ R_l)(p) = p$.
- b. Este resultado se sigue a partir de la definición.
- c. Queremos probar que $R_l(m) = m$.
Para todo $p \in \mathbb{R}^2$, tal que $p \in m$, entonces tenemos dos casos:
 - a) si $p \in l$ entonces, $p' = p \in m$.

b) si $p \notin l$ entonces, $p' \neq p$, y además l es la mediatriz del segmento $\overline{pp'}$.
 Luego, l es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{pp'}$; además esta recta pasa por p , por ende es la única perpendicular a l que pasa por p . En consecuencia, $\overleftrightarrow{pp'} = m$. Así, $p' \in m$.

Así, concluimos que $R_l(m) \subseteq m$.
 Por otro lado, dado que R_l es involución se sigue que:

$$m = R_l^{-1}(R_l(m)) = R_l(R_l(m)) \subseteq R_l(m)$$

Por ende, $m \subseteq R_l(m)$.
 En conclusión, $R_l(m) = m$.

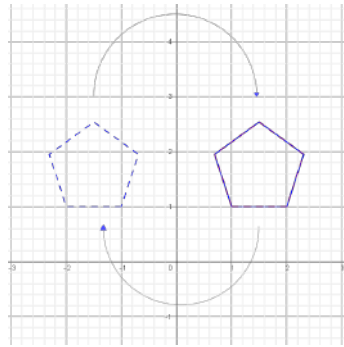


Figura 2.15: La reflexión es involución.

Ejemplo 2.4.7 El punto $p = (-2, 0)$ es invariante bajo la reflexión en el eje x . Esto debido a que los puntos invariantes sobre el eje x deben tener coordenada $y = 0$ pues solo los puntos que están en la recta x permanecen invariantes.

Las propiedades que se preservan bajo la reflexión son las siguientes:

- Distancias.
- Magnitud del ángulo.
- Área de objetos en el plano.
- Paralelismo.

Es decir, estas son invariantes bajo la reflexión. Sin embargo, ¿qué ocurre con la orientación? El siguiente lema muestra que esta no es invariante en la reflexión.

Lema 2.4.8 La orientación no se preserva bajo la reflexión.

Demostración.

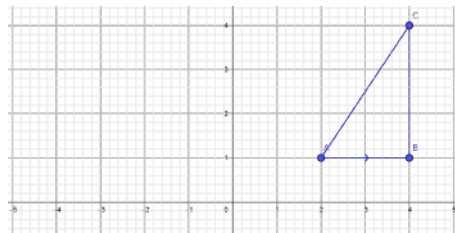


Figura 2.16

Sea $\triangle ABC$ un triángulo en el plano (figura 2.15). Rotando dicho triángulo sobre el eje y , obtenemos el triángulo $\triangle A'B'C'$ (figura 2.16). Nótese que este triángulo tiene un sentido anti-horario mientras que el original tiene un sentido horario.

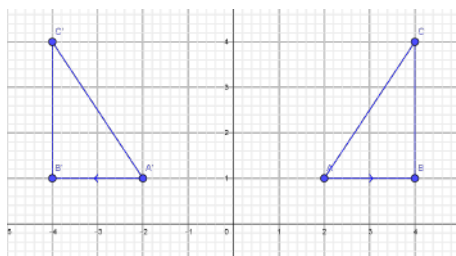


Figura 2.17

Proposición 2.4.9 El producto de dos reflexiones es una rotación o una traslación. Por otro lado, cualquier traslación o rotación es el producto de dos reflexiones.

Demostración. Una demostración completa de este hecho se encuentra en [8].

En particular, cuando las rectas l y m son paralelas entonces el producto $R_m \circ R_l$ es una traslación cuyo vector es el doble de la distancia entre l y m . En cambio, cuando las rectas son perpendiculares entonces tenemos una rotación cuyo centro de rotación está en el punto en que las rectas l y m se intersectan.

Corolario 2.4.10 Un semigiros es el producto de dos reflexiones cuyas rectas de reflexión son perpendiculares.

2.5. Reflexión deslizada

También conocida como traslaxreflexión o reflexión con deslizamiento. Esta es el resultado de realizar una traslación, diferente a la identidad, seguida por una reflexión sobre la recta que es paralela al sentido de la traslación.

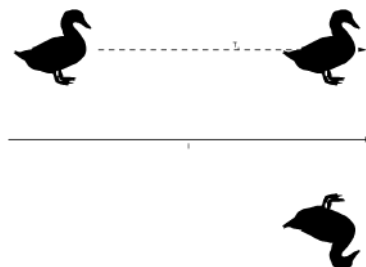


Figura 2.18: Reflexión deslizada de una figura

Definición 2.5.1 Sean $v, l \in \mathbb{R}^2$, tales que v es un vector no nulo y l una recta paralela a dicho vector. La reflexión deslizada respecto a (v, l) es la transformación $RT_{(v,l)} = R_l \circ T_v$.

Proposición 2.5.2

- a. Toda reflexión deslizada $RT_{(v,l)}$ es isometría.

- b. La identidad de $RT_{(v,l)}$ es la composición de las identidades de R_l y T_v .
- c. El inverso de $RT_{(v,l)}$ tiene la misma recta de reflexión que R_l , pero la traslación está en la dirección opuesta al vector v , es decir $-v$.

Lo anterior se sigue fácilmente, ya que una reflexión deslizada es la composición de dos isometrías. Además, al igual que la traslación, no tiene puntos fijos salvo la identidad.

Ya que la reflexión deslizada es la composición de dos transformaciones isométricas, surge la siguiente pregunta: ¿por qué se considera a las reflexiones deslizadas como un tipo más de isometría?

En *The four pillars of geometry*, (2005), John Stillwell afirma: Una reflexión deslizada con traslación distinta de cero, es diferente de los tres tipos de isometrías consideradas anteriormente.

- No es una traslación, pues la traslación mapea cualquier línea en la dirección de la traslación en ella misma, mientras que una reflexión deslizada mapea únicamente una línea en ella misma (la línea de reflexión).
- No es una rotación, pues la rotación tiene un punto fijo y la reflexión deslizada no.
- No es una reflexión, ya que la reflexión también tiene puntos fijos.

Lema 2.5.3 La reflexión deslizada es conmutativa, es decir $R_l \circ T_v = T_v \circ R_l$.

Demostración. Sea $R_l \circ T_v$ una reflexión deslizada. Sin pérdida de generalidad, supóngase que R_l está sobre el eje x y que $v = (a, b)$, en consecuencia $b = 0$. Sea $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto en el plano.

Por un lado,

$$\begin{aligned} T_v \circ R_l(x, y) &= T_{(a,0)}(x, -y) \\ &= (x + a, -y) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} R_l \circ T_{(a,0)}(x, y) &= R_l(x + a, y) \\ &= (x + a, -y) \end{aligned}$$

Por lo tanto, es conmutativa.

Ejemplo 2.5.4. Sean $p_1 = (-2, -2)$, $p_2 = (-2, -5)$, $p_3 = (-6, -5)$ los vértices de un triángulo. La reflexión deslizada sobre el eje x con $T_v = (x, y) + v$, donde $v = (7, 1)$ está dada por: $p_1'' = (5, 1)$, $p_2'' = (5, 4)$, $p_3'' = (1, 4)$.

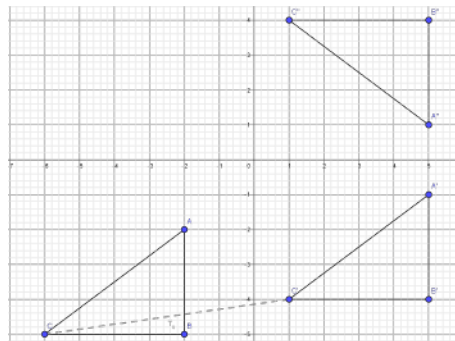


Figura 2.19: Ejemplo de reflexión deslizada

Las propiedades que permanecen invariantes bajo la reflexión deslizada son:

- Distancias.
- Magnitud del ángulo.
- Área de objetos en el plano.
- Paralelismo.

¿Qué ocurre con la orientación? El siguiente lema muestra que la orientación no es invariante bajo la reflexión deslizada.

Lema 2.5.5 La orientación no se preserva bajo la reflexión deslizada.

Demostración. Nótese que el polígono ABCD tiene sentido anti horario. Al trasladarlo sobre T_v , el polígono A'B'C'D' mantiene el sentido original. Sin embargo, al reflejar esta figura sobre el eje x , el polígono A''B''C''D'' cambia de sentido, teniendo esta un sentido horario.

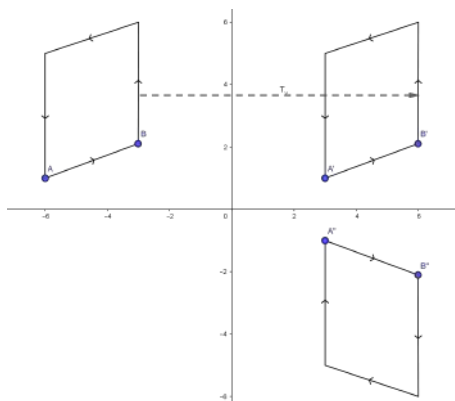


Figura 2.20: La reflexión deslizada no preserva orientación.

Lema 2.5.6

- a. La composición de una reflexión deslizada con ella misma es una traslación.
- b. La composición de dos diferentes reflexiones deslizadas es una rotación.

Demostración.

- a. Sea RT una reflexión deslizada. Sin pérdida de generalidad, supóngase que la reflexión R_l está sobre el eje y y que $v = (a, b)$, además sea $p = (x, y)$ un punto en el plano. Luego,

$$\begin{aligned} T_v \circ R_l(x, y) &= T_v(x + a, y + b) \\ &= (-x + a, y + b) \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente RT ,

$$\begin{aligned} T_v \circ R_l(-x + a, y + b) &= T_v(x - a, y + b) \\ &= (x, y + 2b) \end{aligned}$$

Así, $(RT)^2$ es una traslación paralela al eje x .

- b. Sean $R_l T_v$, $R_m T_u$ dos reflexiones deslizadas diferentes entre sí.
Luego,

$$\begin{aligned} R_l T_v \circ R_m T_u &= (R_l \circ T_v) \circ (R_m \circ T_u) \\ &= T_v \circ (R_l \circ R_m) \circ T_u. \end{aligned}$$

Ya que las reflexiones deslizadas son diferentes, entonces las rectas de reflexión l , m se intersectan en un punto o . Este punto es el centro de rotación, donde θ es el ángulo que mide el doble al ángulo entre las dos rectas de reflexión, esto por la proposición 2.4.10.

Los patrones creados por la reflexión deslizada de algún objeto son más elaborados y estéticos. Un ejemplo común de esto son las huellas de los pies al caminar sobre la nieve o arena. Así, al aplicar múltiples reflexiones deslizadas sobre uno o varios objetos se crean bellas piezas artísticas.

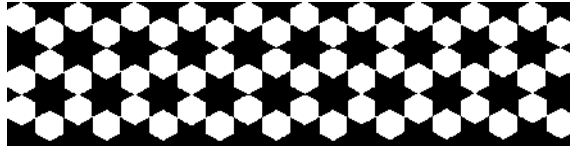


Figura 2.21: Patrón creado a partir de la reflexión deslizada de un hexágono sobre un fondo negro.

2.6. Clasificación de isometrías en el plano

Antes de profundizar en resultados más completos, se estudian un par de proposiciones que hacen uso de los conceptos revisados en las secciones anteriores.

Lema 2.6.1 Sean $p, l, m \in \mathbb{R}^2$ donde p es un punto y l, m son rectas, entonces existen rectas $n_1, n_2 \in \mathbb{R}^2$, donde n_1 pasa por el punto p_1 tal que $R_m R_l = R_{n_2} R_{n_1}$

Demostración. Tenemos dos casos:

1. Si l y m son rectas paralelas, entonces n_1 es la recta que pasa por p_1 la cual es paralela a l .
2. Si l y m intersectan en el punto p_2 , sea n_1 la recta a través de p_1 y p_2 . Entonces l, m, n_1 son paralelas o concurrentes.

En cualquier caso, existe una recta n_2 tal que $R_m R_l R_{n_1} = R_{n_2}$, entonces $R_m R_l = R_{n_2} R_{n_1}$.

Proposición 2.6.2 El producto de cuatro reflexiones puede expresarse como el producto de dos reflexiones.

Demostración. Sean R_a, R_b, R_c, R_d , cuatro reflexiones con producto $R_a R_b R_c R_d$.

Sea p_1 un punto de la recta a . Por el lema anterior, existen rectas b', c' tales que $R_c R_b = R_{c'} R_{b'}$ donde p_1 está en b' . Nuevamente, por el lema anterior existen rectas c'', m tales que $R_d R_{c'} = R_m R_{c''}$ donde p_1 está en c'' . Ya que a, b' y c'' son congruentes en p_1 , entonces existe una recta l tal que $R_{c''} R_{b'} R_a = R_l$. Por lo tanto,

$$R_d R_c R_b R_a = R_d R_{c'} R_{b'} R_a = R_m R_{c''} R_{b'} R_a = R_m R_l$$

Proposición 2.6.3 Una isometría par es el producto de dos reflexiones.

Demostración. Podemos utilizar el resultado de la proposición anterior de manera repetida sobre un producto de varias reflexiones, de tal modo que al finalizar obtendremos el resultado deseado.

Proposición 2.6.4 Los productos de un número par de reflexiones forman un subgrupo de $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$, denominado $\text{Isom}^2(\mathbb{R}^2)$.

Demostración. Recordemos que las isometrías pares son las traslaciones y rotaciones.

- La identidad es el producto $R_L R_L$, donde L es la recta de reflexión (lema 2.4.5). Así, la identidad preserva orientación.
- Sean L, M las rectas de reflexión de R_L, R_M respectivamente. Nuevamente, por el lema 2.4.5, toda reflexión tiene inverso, así:

$$(R_L R_M)^{-1} = R_L^{-1} R_M^{-1} = R_L R_M$$

lo cual preserva orientación.

- Finalmente, considérense las reflexiones $R_{L_1} R_{L_2}, R_{L_3} R_{L_4}$ las cuales preservan orientación. Se tienen dos casos:
 1. Si alguna de las reflexiones es la identidad, entonces la composición $R_{L_1} R_{L_2} \circ R_{L_3} R_{L_4}$ preserva orientación.
 2. Si ninguna de las reflexiones es la identidad, entonces la composición es una traslación o una reflexión.
 - a. Por un lado, si $R_{L_1} R_{L_2}, R_{L_3} R_{L_4}$ son traslaciones, entonces su composición es una traslación.
 - b. Por otro lado, si $R_{L_1} R_{L_2}, R_{L_3} R_{L_4}$ son rotaciones, entonces su composición es una rotación.
 - c. Supóngase que $R_{L_1} R_{L_2}$ es una rotación y $R_{L_3} R_{L_4}$ una traslación. Debido a que $R_{L_3} R_{L_4}$ es una traslación entonces L_3, L_4 son paralelas. Supóngase que L_1, L_2 se rotan de tal modo que L_2 sea paralela a L_3, L_4 . Traslado de manera adecuada a L_3 y L_4 , se obtiene que $L_2 = L_3$. Usando un argumento similar, si $R_{L_1} R_{L_2}$ es una traslación y $R_{L_3} R_{L_4}$ una rotación, entonces $L_2 = L_3$. Así,

$$\begin{aligned} R_{L_1} R_{L_2} \circ R_{L_3} R_{L_4} &= R_{L_1} \circ (R_{L_2} R_{L_3}) \circ R_{L_4} \\ &= R_{L_1} \circ (R_{L_2} R_{L_2}) \circ R_{L_4} \\ &= R_{L_1} R_{L_4} \end{aligned}$$

Lo cual es una rotación, esto por la proposición 2.4.10.

Proposición 2.6.5 La composición de tres reflexiones es una reflexión o una reflexión deslizada.

Demostración.

Sean L_1, L_2, L_3 las rectas de reflexión de $R_{L_1}, R_{L_2}, R_{L_3}$. Se tienen dos casos:

1. Si las tres rectas de reflexión son paralelas.
Por la proposición 2.4.10 el producto de dos reflexiones es una traslación, en este caso, considérese el producto de $L_1 \circ L_2$. Así, L_1 es trasladada a L'_1 y L_2 a L'_2 , donde esta última coincide con L_3 . Así,

$$R_{L_3} \circ R_{L_2} \circ R_{L_1} = R_{L_3} \circ R_{L'_2} \circ R_{L'_1} = R_{L'_1}$$

Es decir $R_{L_3} \circ R_{L_2} \circ R_{L_1} = R_{L'_1}$ es la reflexión a través de L_1 .

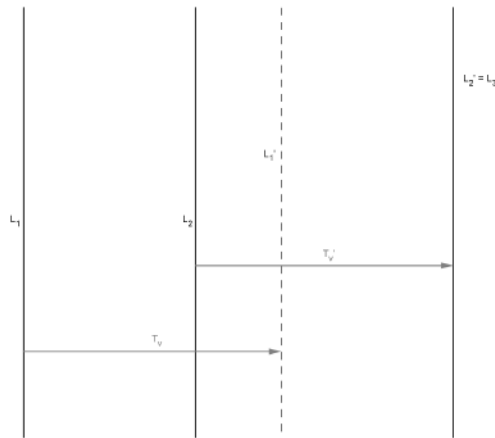


Figura 2.22

2. Si al menos dos rectas de reflexión no son paralelas.

Por la proposición 2.4.10, la composición de dos reflexiones es una rotación cuyo centro es su punto de intersección, en este caso considérese el producto $L_3 \circ L_2$. Así, $R_{L_3} \circ R_{L_2}$ es una rotación con centro P .

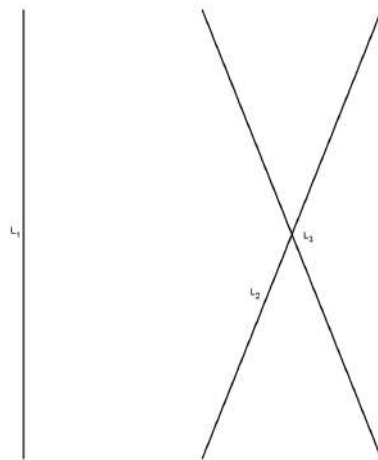


Figura 2.23

Aplicando una rotación adecuada, L'_2 es perpendicular a L_1 . Rotando nuevamente a L'_2 y L_1 al rededor de su punto de intersección Q , se tiene que L'_3 es paralela a L'_2 .

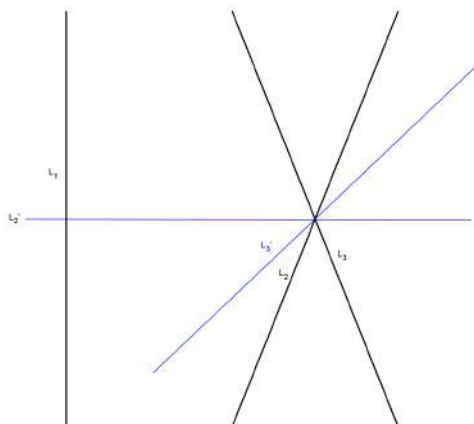


Figura 2.24

Finalmente, se tiene que L_2'' y L_3' son paralelas y L_1' es perpendicular a ellas. Por lo tanto, la composición $R_{L_3'} \circ R_{L_2''} \circ R_{L_1'}$ es una reflexión deslizada.

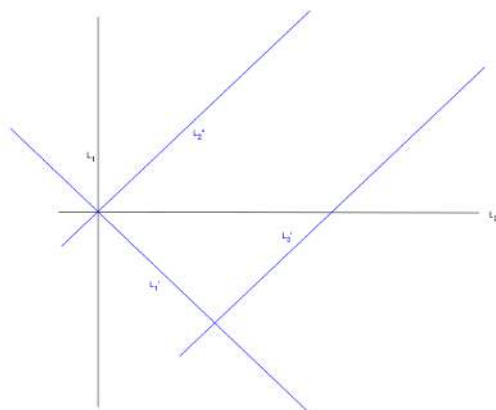


Figura 2.25

Corolario 2.6.6 Una isometría impar es una reflexión o una reflexión deslizada.

2.6.1. El teorema de las tres reflexiones

La proposición 2.4.10 y la proposición 2.6.2 comparten una propiedad en común: son el resultado de multiplicar reflexiones. Como se mencionó en la sección 2.4, las reflexiones juegan un papel fundamental en el estudio de las isometrías en el plano, pues toda transformación isométrica es derivada de la composición de reflexiones. Antes de demostrar este hecho, se revisan algunos resultados previos.

Lema 2.6.7 El conjunto de todos los puntos equidistantes de dos puntos dados es una recta.
Demostración. Sean $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P = (a, b)$ puntos en el plano. P equidista de P_1 y P_2 si $d(P, P_1) = d(P, P_2)$.
 Así,

$$\sqrt{(a - x_1)^2 + (b - y_1)^2} = \sqrt{(a - x_2)^2 + (b - y_2)^2}$$

elevando al cuadrado ambos lados,

$$(a - x_1)^2 + (b - y_1)^2 = (a - x_2)^2 + (b - y_2)^2$$

desarrollando los cuadrados,

$$a^2 - 2x_1a + x_1^2 + b^2 - 2y_1b + y_1^2 = a^2 - 2x_2a + x_2^2 + b^2 - 2y_2b + y_2^2$$

anulando términos iguales,

$$2(x_2 - x_1)a + 2(y_2 - y_1)b + (y_1^2 - y_2^2) = 0$$

Finalmente, esta última igualdad es la ecuación de una recta. En consecuencia, los puntos $P = (a, b)$ equidistantes de P_1 y P_2 forman una recta.

Proposición 2.6.8 Sean $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una isometría y $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ tres puntos no colineales. F está determinada por la imagen de $F(A), F(B), F(C)$.

Demostración. Basta probar que cualquier punto $P \in \mathbb{R}^2$ está determinado por su distancia con los puntos A, B, C . Para esto, supóngase que existe un punto $Q \in \mathbb{R}^2$, tal que $P \neq Q$, donde Q tiene la misma distancia de A, B, C . Entonces, A, B, C están en el conjunto de puntos equidistantes de P, Q ; por el lema 2.6.4 los puntos A, B, C están en una recta, lo cual es una contradicción pues por hipótesis estos no son colineales.

Ya que F preserva rectas (por proposición 2.1.9) entonces $F(P)$ está determinado por la misma distancia de $F(A), F(B), F(C)$.

Notemos que los puntos A, B, C de la proposición anterior forman un triángulo. Ya que F es una isometría, entonces los lados del triángulo son mapeados a $AB = F(A)F(B)$, $BC = F(B)F(C)$, $CA = F(C)F(A)$. Así, el triángulo $\triangle ABC$ es congruente con el triángulo $\triangle F(A)F(B)F(C)$.



Figura 2.26

Ahora procedemos a mostrar el **teorema de las tres reflexiones**.

Teorema 2.6.9 [14]. Cualquier isometría F de \mathbb{R}^2 es la combinación de una, dos, o tres reflexiones.

Demostración. Sean F una isometría y $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ tres puntos no colineales. Buscamos el producto de reflexiones las cuales manden A a $F(A)$, B a $F(B)$ y C a $F(C)$, la cual debe ser igual a F .

Notemos que podemos mandar A a $F(A)$ usando la reflexión que está en la recta de puntos equidistantes de A a $F(A)$. A esta reflexión la denominaremos R_A .

Luego, R_A manda B a $R_A(B)$, entonces tenemos dos casos.

1. Si $R_A(B) = F(B)$ nada que probar.
2. Si $R_A(B) \neq F(B)$, entonces podemos mandar $R_A(B)$ a $F(B)$ mediante la reflexión que está en la recta de puntos equidistantes de $R_A(B)$ y $F(B)$, a esta la denominaremos como R_B . Notemos que la distancia de $F(A)$ a $F(B)$ es igual a la distancia de $R_A(A)$ a $R_A(B)$, pues F y R_A son isometrías, esto implica que $F(A) = R_A(A)$. Luego, R_B no mueve a $F(A)$ y el producto R_A seguido por R_B manda A a $F(A)$ y B a $F(B)$.

De manera similar para el punto C . Si C es enviado a $F(C) = R_A(C)$ entonces no tenemos nada que probar. En caso contrario, reflejamos en la recta de puntos equidistantes de $F(C)$ a C . Notemos además que $F(A)$ y $F(B)$ ya están sobre esa recta, por lo cual no se mueven.

Con esto tenemos el producto de exactamente tres reflexiones las cuales mandan A a $F(A)$, B a $F(B)$ y C a $F(C)$.

2.6.2. Clasificación de isometrías en el plano

Las transformaciones isométricas estudiadas en las secciones anteriores conservaban algunas propiedades mientras que otras cambiaban. En particular, se tiene la siguiente definición que permite clasificar a dichas transformaciones en dos tipos:

Definición 2.6.10 Una isometría F es denominada *propia* si preserva orientación. Si F invierte orientación se le llama *impropia*.

Con los resultados vistos en este capítulo sabemos que es posible clasificar a las transformaciones isométricas del plano de la siguiente manera.

- La traslación y rotación son isometrías propias.
- La reflexión y la reflexión deslizada son isometrías impropias.

De igual manera, considerando los resultados de este capítulo obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.6.11 Toda isometría del plano puede clasificarse en: la identidad, reflexión, rotación, traslación o reflexión deslizada.

2.7. Ejemplos

Para finalizar este capítulo se muestran algunos ejemplos visuales sobre el uso de transformaciones isométricas, tanto de manera individual como la combinación de estas, para la elaboración de obras artísticas. Algunos conceptos, como teselados y frisos, se estudiarán en el capítulo siguiente.

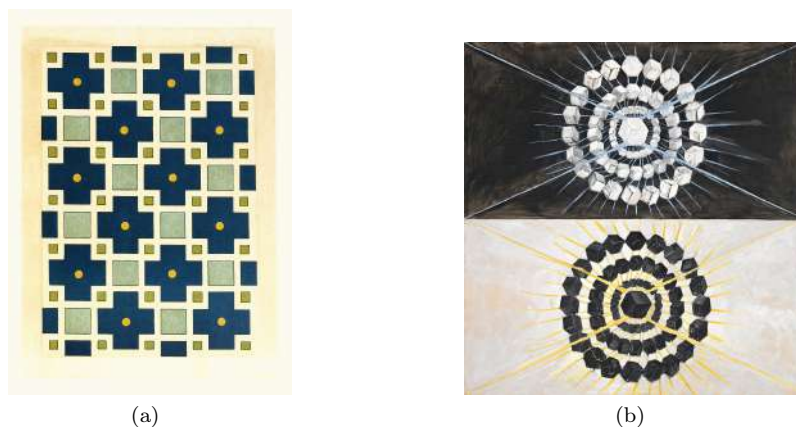


Figura 2.27: ¹

En la figura 2.27 (a) destacamos el uso de traslaciones sobre diferentes figuras; con esta transformación isométrica se genera un patrón geométrico.

¹18 plates of ornamental tiles from the Afghan Boundary Commission Pl 18. (1884) Afghan Boundary Commission. Group IX, SUW No. 8, The Swan, No. 8. (1915). Hilma af Klint.

En 2.27 (b) notemos el uso de la rotación sobre una forma de apariencia cúbica, cuyo punto de rotación se ubica en la figura central. De esta manera se crea un patrón circular.



(a)



(b)

Figura 2.28: ²

En 2.28 (a) la parte superior de esta obra observamos el uso de rotaciones (flor blanca y rosas). En la parte inferior notamos reflexión y traslación. En 2.28 (b) observamos reflexiones, traslaciones, rotaciones y en particular semigiros.

²Childhood Group IV. (1907). Hilma af Klint. Deutliche Verbindung (Clear Connection). (1925). Wassily Kandinsky.

Capítulo 3

Simetría en el plano euclidiano

Uno de los artistas más conocidos por basar su obra en conceptos matemáticos es Maurits Cornelis Escher (1898-1972). La obra de Escher es sumamente popular entre la comunidad científica pues esta juega con el infinito, el equilibrio, lo blanco y negro, la dualidad y la simetría.

Escher veía el mundo con una peculiar mirada artística. Encontró arte en la vida cotidiana y entendió la matemática de manera estética; jugó con las dimensiones y transformaciones. Mezcló figuras geométricas según sus rotaciones, traslaciones y demás propiedades que, si bien no entendía de manera formal, eso no le impidió involucrarlas en sus creaciones.



Figura 3.1: ¹

En la figura 3.1 se muestra un detalle del piso del museo *Escher en Het Paleis*, ubicado en Países Bajos. Este detalle ofrece al espectador la sensación de belleza y equilibrio. Pero, ¿por qué?

M.C. Escher no es el único artista cuya obra está salpicada de matemática. De hecho, la matemática y el arte están más relacionados de lo que aparentan. Por ejemplo, en obras arquitectónicas tan antiguas como el Partenón, construido entre los años 447 a. n. E. y 432 a. n. E., ubicado en la actual Atenas, Grecia; o en el trabajo de diversos artistas, sobre todo de aquellos que pertenecen al movimiento Op-art.

¹Tomado de Escher Floor Pattern [Fotografía], por Stanley Zimny, 2009, Flickr (<https://flic.kr/p/XwnaFb>). CC BY-NC 2.0

Observemos las siguientes imágenes:



Figura 3.2: ²

Imaginemos que trazamos una línea vertical a la mitad de la primera figura. ¿Qué sucede con esta? A excepción de algunos detalles propios de la mano del artista, el dibujo es igual del lado derecho que del lado izquierdo. Se dice que este es *simétrico* respecto a la línea vertical. Sin embargo, si se repite este ejercicio en la segunda figura esto no ocurre, es *asimétrica*.

Sin embargo, desde un punto de vista matemático la simetría va mucho más allá de una característica estética. No es una forma, sino una transformación que permite mover y comparar objetos. En este capítulo nos adentramos a las nociones matemáticas que estudian la simetría y dónde se utilizan tales nociones con el fin de crear motivos artísticos tales como rosetas, frisos, mosaicos y patrones repetitivos. Puede consultar [8], [6] y [13].

3.1. La matemática de la simetría

Definición 3.1.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un subconjunto. Una simetría de A es una isometría $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que A permanezca invariante, es decir $T(A) = A$.

Cuando decimos que un objeto es simétrico nos referimos a que podemos aplicarle ciertas isometrías las cuales dejarán a la figura sin cambios pero que a su vez, puede mover cada uno de sus puntos. A este tipo de isometrías les llamamos *operaciones simétricas*. Si una figura tiene únicamente a la identidad como simetría decimos que tiene simetría trivial.

Definición 3.1.2 Decimos que una figura F del plano tiene simetría rotacional si y sólo si alguna rotación, diferente de la identidad, es simetría de F . El centro de dicha rotación es llamado el punto de simetría de F .

Definición 3.1.3 Decimos que una figura F del plano tiene simetría especular o de reflexión si y sólo si alguna reflexión es simetría de F . La recta de reflexión de la misma es denominada eje de simetría de F .

Definición 3.1.4 Decimos que una figura F del plano tiene simetría bilateral si y sólo si F tiene una única recta de reflexión.

Ejemplo 3.1.5 Las simetrías de la letra “E” son la identidad y una reflexión horizontal, por lo cual tiene simetría bilateral y dos operaciones simétricas.

²Skt.Adolf,=Ringen=Hall (1922). Adolf Wölffi. Netz=Schlange, vom Wili=Wald,=Skt. Adolf=Thurm,=Hoof=Ring,=Uhrwald, in Amerika (1921). Adolf Wölffi.

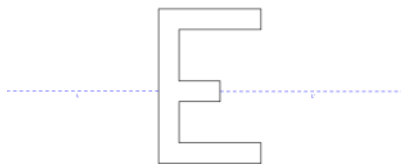


Figura 3.3

Una figura en el plano puede admitir diversas simetrías, por ejemplo:

Ejemplo 3.1.6 Las simetrías de la letra “H” son la identidad, una reflexión horizontal, una reflexión vertical y un semigiro cuyo centro de rotación está en el punto en que las dos reflexiones se intersectan. Es decir, tiene cuatro operaciones simétricas.

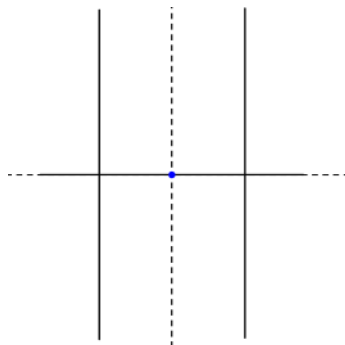


Figura 3.4

3.2. Grupos de simetría

Proposición 3.2.1 El conjunto $\mathcal{S}(A) = \{T \mid T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ es una isometría, y } T(A) = A\}$ es llamado el *grupo de simetría* de A bajo el producto.

Demostración.

- Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{S}(A)$, donde $T_1(A) = A$ y $T_2(A) = A$, entonces $T_2T_1(A) = A$; es decir, el producto de simetrías es una simetría.
- Sea $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la isometría identidad. Luego, $I(A) = A$; es decir, I es una simetría para cualquier conjunto A de \mathbb{R}^2 .
- Sea $T \in \mathcal{S}(A)$, ya que esta es una isometría entonces tiene inversa, denotada por T^{-1} , la cual también es una isometría. Así, $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.
Multiplicando a $A = T(A)$ por T^{-1} en ambos lados se sigue que:

$$T^{-1}(A) = T^{-1}T(A) = I(A) = A$$

es decir, $T^{-1}(A) = A$. Así, el inverso de una simetría es una simetría.

- Sean $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{S}(A)$. Veamos que $\mathcal{S}(A)$ satisface la asociatividad del producto:

$$\begin{aligned} [(T_1T_2)T_3](A) &= T_1[(T_2T_3)](A) \\ &= T_1[T_2(T_3)](A) \\ &= [T_1T_2](T_3)(A) \\ &= [(T_1T_2)T_3](A) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{S}(A)$ es un grupo.

En el caso que una figura tenga simetría trivial, su grupo de simetría será de orden uno y consistirá únicamente de la identidad.

Corolario 3.2.2 Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces $\mathcal{S}(A)$ es un subgrupo de $Isom$ en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 3.2.3 Sea $A = \triangle ABC$ un triángulo equilátero. Las simetrías de A son:

- a. La identidad.
- b. Las rotaciones $R_{1,\theta}$, $R_{2,\theta}$, $R_{3,\theta}$, donde $\theta = 120^\circ, 240^\circ$ respectivamente, alrededor del centro O del triángulo.
- c. Las reflexiones R_{m_1} , R_{m_2} , R_{m_3} , donde m_1 es la mediatriz de \overline{AB} , m_2 es la mediatriz de \overline{BC} y m_3 es la mediatriz de \overline{CA} .

Así, el grupo de simetrías de A es:

$$\mathcal{S}(A) = \{(R_{1,\theta}, R_{2,\theta}, R_{3,\theta}) \cup (R_{m_1}, R_{m_2}, R_{m_3}), I\}$$

Note que este grupo es de orden 6.

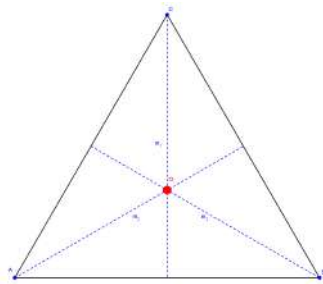


Figura 3.5

Ejemplo 3.2.4 Sea $A = \square ABCD$. Las simetrías de A son:

- a. La identidad.
- b. Las rotaciones $R_{1,\theta}$, $R_{2,\theta}$, $R_{3,\theta}$, donde $\theta = 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ respectivamente, alrededor del centro de A , en un sentido antihorario.
- c. La reflexión R_{AC} en la diagonal \overline{AC} .
- d. La reflexión R_{BD} en la diagonal \overline{BD} .
- e. Las reflexiones R_m, R_{m_1} , donde m es la mediatriz de \overline{AB} y m_1 es la mediatriz de \overline{BC} .

Así, el grupo de simetrías de A es:

$$\mathcal{S}(A) = \{(R_{AC}, R_{BD}, R_m, R_{m_1}) \cup (R_{1,\theta}, R_{2,\theta}, R_{3,\theta}), I\}$$

El orden de este grupo es 8.

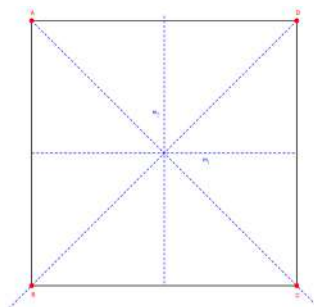


Figura 3.6

Es posible analizar un patrón geométrico mediante las transformaciones isométricas que lo preservan, es decir, mediante sus grupos de simetría. Los patrones geométricos del plano se dividen en tres grupos:

1. Grupos de Rosetas, el cual no contiene traslaciones.
2. Grupos de Frisos, el cual contiene traslaciones paralelas a una dirección dada.
3. Grupos del Papel pintado, el cual contiene traslaciones en direcciones no paralelas.

En las siguientes secciones analizaremos cada uno de estos grupos.

3.3. Rosetas

Retomando el ejemplo 3.2.5, consideremos únicamente el conjunto de las rotaciones del triángulo equilátero:

$$\mathcal{S}(A) = \{R_{1,0^\circ}, R_{2,\theta}, R_{2,\theta}\}$$

donde $\theta = 120^\circ, 240^\circ$; este conjunto sigue siendo un grupo bajo la composición.

Notemos que los elementos de este grupo pueden obtenerse tomando un elemento del conjunto y combinando a este mismo varias veces. Supongamos que r denota la rotación por 120° , reescribiendo al conjunto de las rotaciones quedaría:

$$\mathcal{S}(A) = \{r^0, r^1, r^2\}$$

Este tipo de grupo recibe el nombre de grupo cíclico (definición 1.x.x).

Definición 3.3.1 Sean $p \in \mathbb{R}^2$ un punto fijo y $n \geq 1$. El grupo C_n es el grupo cíclico de orden n , el cual consta de las rotaciones alrededor de p , por un ángulo $\frac{2\pi k}{n}$, donde $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Ejemplo 3.3.2 Las simetrías del conjunto C_2 son la identidad y un semigiro alrededor del centro.

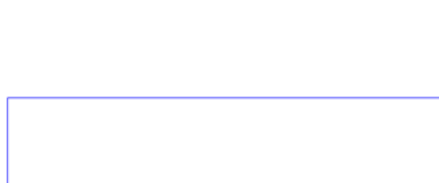


Figura 3.7: C_2

En particular, al grupo de rotaciones del triángulo equilátero se le denomina C_3 . Así mismo, el grupo de rotaciones del cuadrado del ejemplo 3.2.6 es $C_4 = \{r^0, r^1, r^2, r^3\}$, donde $r = 90^\circ$.

Es importante recalcar que el grupo cíclico C_n tiene únicamente n rotaciones y ninguna reflexión.



Figura 3.8: Ejemplo de C_3 . El triskelion, es una figura presente en muchas culturas. Forma parte esencial del arte céltico donde representa equilibrio, al principio y fin, la evolución y el crecimiento.³

Pero, ¿qué pasa cuando también se considera a las reflexiones del objeto? Analicemos ahora el grupo $\mathcal{S}(A) = \{(R_{AC}, R_{BD}, R_m, R_{m_1}) \cup (R_{1,\theta}, R_{2,\theta}, R_{3,\theta}), I\}$, es decir, el grupo de simetría del $\square ABCD$. ¿Es este grupo cíclico? Por los resultados de la sección 2.4 se sabe que el inverso de una reflexión es ella misma y que el producto de dos reflexiones no es otra reflexión. Con esto, se concluye que el grupo no es cíclico. Esta clase de grupo recibe el nombre de *grupo diédrico*.

Lema 3.3.3 Las $2n$ simetrías de un polígono regular de n -lados forman un grupo llamado D_n , para $n \geq 3$.

Demostración. Para $n \geq 3$, un polígono regular de n -lados tiene n ejes de simetría y n simetrías rotacionales alrededor del punto de simetría, con los cuales se forma un grupo.

Además, como este grupo contiene n rotaciones y n reflexiones, el orden de D_n es $2n$. Así, se obtiene la siguiente definición.

Definición 3.3.4 D_n es el grupo que contiene a todos los elementos de C_n más las reflexiones en n rectas las cuales tienen el mismo ángulo de inclinación. Este grupo se denomina grupo diédrico y su orden es $2n$.

Ejemplo 3.3.5 El grupo de simetrías de $\triangle ABC$ del ejemplo 3.2.5 es D_3 y su orden es 6. El grupo de simetrías de $\square ABCD$ del ejemplo 3.2.6 es D_4 cuyo orden es 8.

Ejemplo 3.3.6 El grupo diédrico D_1 es el grupo de simetría de un segmento \overline{AB} , que está formado por: la identidad y un semigiros alrededor del punto medio de \overline{AB} ; su orden es 2.



Figura 3.9

Ejemplo 3.3.7 El grupo diédrico D_2 es el grupo de simetría de un rectángulo $ABCD$ formado por: la identidad, las reflexiones R_m, R_{m_1} , donde m es la mediatriz de \overline{AB} y m_1 es la mediatriz de \overline{BC} , la rotación R de 180° alrededor del punto de intersección de m, m_1 ; su orden 4.

³Triskele Symbol by AnonMoos. CC BY-SA 3.0.

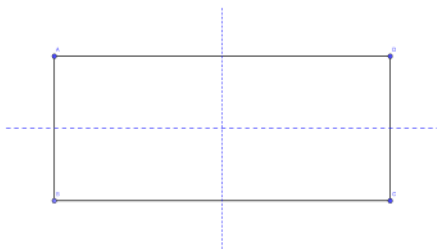


Figura 3.10

Es importante recalcar que, aún cuando estos grupos fueron construidos a partir de polígonos regulares, también son el grupo de simetría de diversos objetos.

Notemos que los grupos D_1 y C_2 son isomorfos: pese a que su representación geométrica es diferente, ambos consisten en un semigiros y la identidad y son de orden dos. Sin embargo, el grupo cíclico C_4 y el grupo diédrico D_2 no son isomorfos pese a compartir el mismo orden, 4. Su estructura es diferente pues, mientras C_4 contiene dos operaciones de periodo cuatro, las operaciones de D_2 son de periodo dos, exceptuando a la identidad.

Ya que D_n contiene a los elementos de C_n , para $n \geq 3$, podemos concluir que toda figura invariante en D_n permanecerá invariante en C_n . Esto no ocurre en sentido contrario. Observemos las siguientes figuras:



Figura 3.11

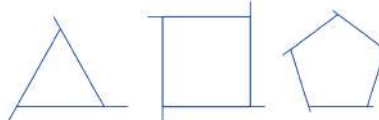


Figura 3.12

La primera fila es una simetría de C_n , donde $n = 3, 4, 5$, pero no lo es de D_n pues debido a los “picos” de las figuras, la reflexión no deja invariante a estas. En cambio, si eliminamos estos “picos” (segunda fila), estas ya son simetrías de D_n .

Los grupos cíclicos y diédricos son herramientas básicas para el estudio de la simetría de las rosetas. Las **rosetas** son motivos decorativos, usualmente en forma de flor. Han sido utilizadas en la escultura y arquitectura desde tiempos Mesopotámicos, aunque alcanzaron su mayor auge en la antigua Grecia. Pueden encontrarse también en Asia y Egipto.

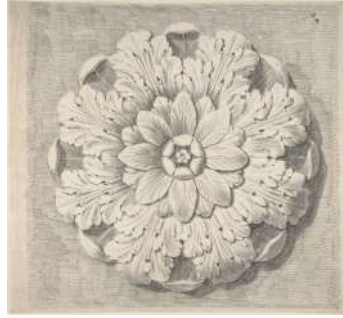


Figura 3.13: Roseta⁴

Definición 3.3.8 Una roseta es una figura F del plano la cual tiene al menos una simetría rotacional diferente de la identidad, donde todas las rotaciones comparten el mismo centro c .

Definición 3.3.9 El grupo de simetrías de una roseta es denominado el grupo de roseta.

Las rosetas y sus grupos de simetría están presentes en muchos ámbitos aparte del arte, por ejemplo en la naturaleza con las flores y algunas plantas, los copos de nieve y los minerales, donde son empleados para estudiar la estructura de los cristales.

Para finalizar esta sección presentamos el siguiente teorema, el cual se atribuye a Leonardo DaVinci.

Teorema 3.3.10 Sea G un grupo de isometrías. Si G es finito entonces es C_n o D_n para $n \geq 1$.

Demostración. Sea G un grupo finito de isometrías, entonces G contiene únicamente rotaciones y reflexiones.

Caso 1. G contiene únicamente rotaciones.

1. G es el grupo C_1 , es decir, el grupo identidad.
2. Supongamos que G contiene una rotación diferente de la identidad $R_{p,\theta}$ y que $R_{q,\alpha}$ es una rotación diferente de la identidad la cual también está en G , tal que $p \neq q$. Entonces, G debe contener a $R_{q,\alpha}^{-1}R_{p,\theta}^{-1}R_{q,\alpha}R_{p,\theta}$, la cual es una traslación (proposición 2.4.10). Pero, G contiene únicamente rotaciones, por lo que $p = q$ y todas las rotaciones diferentes a la identidad tiene su centro de rotación en p .

Ya que $R_{p,\theta}$ está en G , también lo está $R_{p,-\theta}$. Notemos además que todos los elementos de G pueden escribirse de la forma $R_{p,\theta}$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Sea $R = R_{p,\theta}$, donde θ toma el mínimo valor positivo. Si $R_{p,\beta}$ está en G , con $\beta > 0$, entonces $\beta - k\theta$ no es positivo ni menor que θ , donde $k \in \mathbb{Z}$. Por lo cual $\beta = k\theta$ y $R_{p,\beta} = R^k$. Es decir, los elementos del grupo G son las potencias de R , con lo cual se satisface la definición de grupo cíclico. Por lo tanto G es un grupo C_n para $n \geq 1$.

Caso 2. G contiene rotaciones y al menos una reflexión.

Por el corolario 2.6.7 sabemos que el subgrupo de todas las isometrías pares de G forman un subgrupo finito de G . Dicho grupo debe ser cíclico C_n , generado por alguna rotación $R_{p,\theta}$. Entonces las isometrías pares de G son las n rotaciones de la forma R, R^2, \dots, R^n , donde $R^n = f$, con f una isometría par.

Supongamos que G contiene m reflexiones. Si H es una reflexión en G , entonces la n -ésima isometría impar RH, R^2H, \dots, R^nH está en G , por lo que $n \leq m$. Por otro lado, la m ésima isometría impar multiplicada por la izquierda por H da m isometrías pares distintas, por lo que

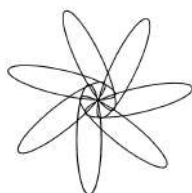
⁴Study of a Classical Rosette, (1776–79). Thomas Hardwick.

$m \leq n$. Por lo tanto $m = n$ y G contiene $2n$ elementos generados por la rotación R y la reflexión H .

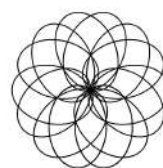
Si $n = 1$, entonces $G = \langle H \rangle$, si $n > 1$, entonces RH debe ser una reflexión cuya recta de reflexión cruza el centro de la rotación. Por lo tanto, el grupo satisface la definición de grupo diédrico, con lo cual concluimos que el grupo G es diédrico D_n para $n \geq 1$.

Con lo cual tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.3.11 Los grupos de rosetas son C_n o D_n , para $n \geq 1$.



(a) C_7



(b) D_7

Figura 3.14: Ejemplos del grupo C_7 y D_7 .

3.4. Frisos

Los frisos son franjas delimitadas por un par de rectas paralelas, por ende su longitud es infinita y su ancho finito, dentro de la cual un objeto se mueve sucesivamente conforme a la traslación y su combinación con las diferentes transformaciones isométricas del plano, dependiendo del tipo de friso que se busque generar.



Figura 3.15: Frisos del Gran Palacio Real de Bangkok, Tailandia.

Los frisos son comúnmente empleados en la arquitectura como ornamento de edificios, tanto antiguos como modernos, de igual manera pueden utilizarse como motivos decorativos en interiores. Algunos ejemplos notables pueden encontrarse en edificios antiguos de Grecia, Roma y Egipto.

3.4.1. Grupos de frisos

Definición 3.4.1 El grupo de simetría de un friso F consiste en el conjunto de isometrías del plano, el cual deja invariante a la recta l y que contienen a las traslaciones T_{nv} , donde $n \in \mathbb{N}$ y v

es el vector no nulo de traslación cuya longitud es x y además, es paralelo a l .

Es decir, es el grupo de simetrías de un patrón sobre una franja el cual permanece invariante bajo una traslación sobre la franja. Además de las traslaciones, las demás simetrías que dejan invariante al patrón pueden ser semigiros, reflexiones tanto horizontales como verticales y reflexiones deslizadas.

Proposición 3.4.2 Existen siete grupos de frisos.

Demostración. Los grupos de frisos se generan al combinar las transformaciones isométricas mencionadas anteriormente. Vamos a denotar a la traslación, reflexión horizontal, reflexión vertical, semigiro y reflexión deslizada con las letras T, H, V, S y G respectivamente. Al combinarlas sin restricciones obtendremos un total de 16 grupos de simetría, a saber: $T, TH, TV, TS, TG, THV, TVG, THG, THS, TSG, TVS, THVS, THSG, TSVG, THVG, THSVG$. Para obtener los siete grupos se hace un proceso de eliminación.

Caso 1: No puede ocurrir TH, THS y THVS.

Por definición, una reflexión deslizada es el resultado de componer una traslación con una reflexión o viceversa, pues el orden no importa. En consecuencia G puede ser descrita como $T \circ H$ o $H \circ T$, por ende estos casos se descartan.

Caso 2: No ocurre TVG.

Bajo argumentos similares al anterior, la reflexión deslizada G puede ser descrita como $T \circ V$ o $V \circ T$, con lo cual este caso se descarta.

Caso 3: no ocurre THV ni THVG.

Por resultados del capítulo anterior (proposición 2.4.10), la composición de dos reflexiones diferentes es una rotación, cuyo centro de rotación se ubica en el punto de intersección de ambas. Luego, $H \circ V = S = V \circ H$.

Caso 4: no ocurre TVS.

Ya que S tiene su centro de rotación en el punto medio del friso, este punto es la intersección de dos reflexiones. Tomemos la reflexión V como una de estas reflexiones, entonces necesariamente H debe ser la otra reflexión.

Caso 5: no ocurre TSG ni THSG.

Al construir un friso utilizando únicamente a S, T y G de manera inmediata surge la reflexión vertical V .

Descartando estos casos nos quedan únicamente siete opciones: $T, TS, TV, TG, THG, TSVG$ y $THVSG$.

Ahora que hemos comprobado que existen únicamente siete grupos de frisos procedemos a detallar cada uno de ellos. Nuestra figura base es asimétrica, en este caso una hoja de árbol.

F_1 : T.

Es el tipo de friso más simple, consiste en la traslación de una longitud x a la derecha de una determinada figura sin la intervención de ninguna otra transformación. Este grupo es denotado por:

$$F_1 = \{(T)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$



Figura 3.16

F_2 : TG.

Consiste en la aplicación sucesiva de la reflexión deslizada $T \circ R_l$, donde T es la traslación original y cuya recta de reflexión es la recta invariante l .

$$F_2 = \{(T \circ R_l)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

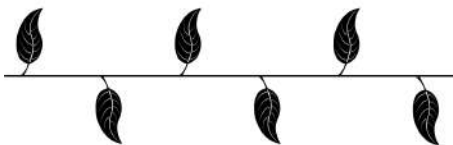


Figura 3.17

F_3 : TV.

Consiste en trazar un eje vertical a la derecha del objeto inicial, mismo que posteriormente se refleja sobre dicho eje; así $F' = F \cup V(F)$. Luego se traslada F' sucesivamente bajo T_v .

$$F_3 = \{(T_v)^n (V)^m \mid n \in \mathbb{Z}, m = 0, 1\}$$

Donde R_y denota a la reflexión sobre el eje vertical.



Figura 3.18

F_4 : TS.

Sea P el punto medio en la base de la figura; se hace un semigiros alrededor de P . Posteriormente se traslada este nuevo patrón aplicando sucesivamente T .

$$F_4 = \{(T)^n (S)^m \mid n \in \mathbb{Z}, m = 0, 1\}$$

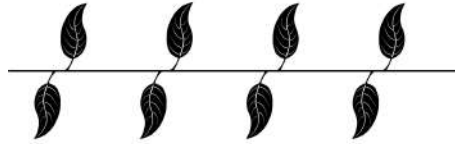


Figura 3.19

F_5 : TSVG.

Es generado por una reflexión deslizada $R_l \circ T$ y un semigiro alrededor de P .

$$F_5 = \{S^m(T \circ R_l)^n \mid n \in \mathbb{Z}, m = 0, 1\}$$



Figura 3.20

F_6 : THG.

Es generado por la reflexión horizontal en l del objeto inicial, donde l es la recta invariante, obteniendo así $F' = F \cup H(F)$. A este nuevo objeto se le aplica sucesivamente la traslación T .

$$F_6 = \{(T)^n(H)^m \mid n \in \mathbb{Z}, m = 0, 1\}$$



Figura 3.21

F_7 : TSHVG.

Es generado por una reflexión vertical sobre el objeto inicial. Uniendo ambos objetos: $F' = F \cup V(F)$. Posteriormente a F' se le aplica una reflexión horizontal: $H(F')$. Finalmente, se aplica de manera sucesiva T al nuevo patrón generado.

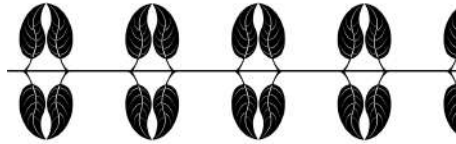


Figura 3.22

3.4.2. Ejemplos

Ahora que conocemos los siete tipos de frisos nos preguntamos, ¿cómo puedo identificarlos? El siguiente diagrama, adaptado de [13] muestra una manera rápida de analizar un friso con el fin de ubicar a qué tipo pertenece.

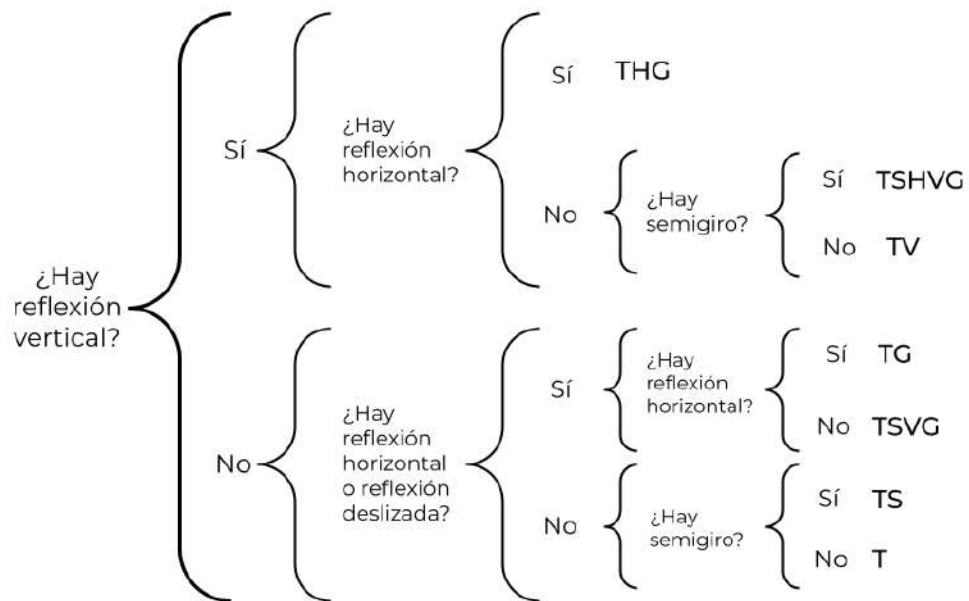


Figura 3.23

Con ayuda del diagrama anterior mostramos algunos ejemplos de frisos así como el grupo al que pertenece cada uno de estos.



Figura 3.24: ⁵

En la parte superior y lado izquierdo de la figura anterior se observan diferentes frisos, siendo estos del tipo F_1 y F_2 .



Figura 3.25: Friso del tipo F_3 .



Figura 3.26: ⁶

El friso de la figura 3.26 es uno de los más completos pues es una combinación del tipo F_7 y F_3 .

3.5. Teselados

Los teselados nacen después de que el ser humano empezara a construir inmuebles como templos o viviendas. Motivados por diseños estéticos que fueran agradables a la vista, antiguas civilizaciones cubrieron las paredes de dichos inmuebles con diversas figuras planas. Uno de los primeros registros se encuentra en los patrones repetitivos hechos con arcilla por los sumerios, hace aproximadamente 4000 años a.n.e.

⁵Portion of the Lions Frieze from the Ancient Persian Palace at Susa. (1912). James Ward.

⁶Tomado de Ornate Plaster Freize Detail [Fotografía], por Dominic Alves, 2010, Flickr (<https://flic.kr/p/83N1RW>). CC BY 2.0



Figura 3.27: Teselación como decorado en un edificio de la ciudad de Puebla, México.

Cada cultura representaba diferentes motivos en sus decorados. Los romanos, por un lado, enaltecían la figura del hombre y la naturaleza, mientras que los árabes utilizaban figuras geométricas de diversos colores.

A partir de entonces los teselados han permeado a través de los años. En el arte contemporáneo no sólo sirven como decoración, sino que artistas, como M.C. Escher o Koloman Moser, los han introducido en su obra.

Etimológicamente, la palabra “tesela” procede del latín “tesella”(azulejo) que a su vez proviene de la palabra griega “tessares”(cuatro). Según la RAE una tesela es “cada una de las piezas que forma un mosaico”.



Figura 3.28: Fachada de edificio en Puebla, México.

De manera informal, una teselación consta en cubrir una superficie con un patrón repetitivo de figuras geométricas, de tal manera que las figuras no se superpongan ni dejen huecos sobre la superficie.

Definición 3.5.1 Una teselación \mathcal{T} en el plano es una familia numerable de subconjuntos cerrados en \mathbb{R}^2 , los cuales satisfacen las siguientes condiciones:

1. Los elementos de \mathcal{T} recubren al plano, es decir:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i \in \mathcal{T}} T_i$$

2. Cualesquiera dos elementos de \mathcal{T} no se superponen, es decir, el interior de los subconjuntos cerrados de \mathcal{T} son disjuntos dos a dos.

La teselación también es llamada *mosaico* o *embaldosado*, mientras que a cada elemento de una teselación se le denomina *tesela*.

Nótese que la suma de los ángulos interiores de las figuras que coinciden en cada vértice debe ser igual a 360° . ¿Por qué? Obsérvese las siguientes figuras.

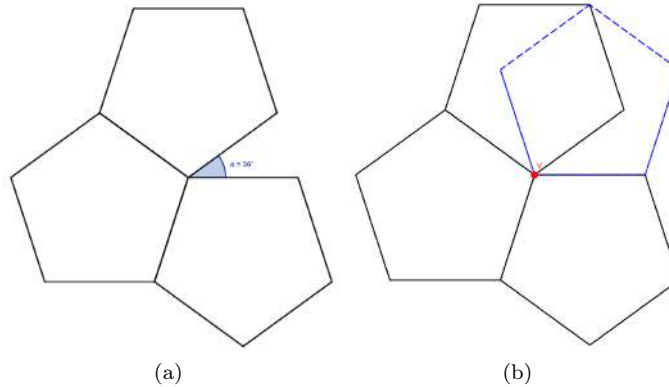


Figura 3.29

El que los ángulos interiores sumen 360° garantiza que no habrá huecos y que las figuras en cuestión no se sobrepondrán; en cambio, si la suma es inferior entonces habrá espacios, si es mayor las figuras se sobrepondrán.

Definición 3.5.2 Dos teselas son congruentes si tienen el mismo tamaño y forma o bien, si coinciden a través de una transformación isométrica del plano.

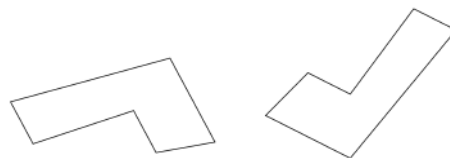


Figura 3.30: Teselas congruentes

Al construir una teselación hay diversos polígonos que son congruentes entre sí. El conjunto de estos polígonos congruentes funge como “modelo” de las teselas y es con base a este que la teselación se forma. A estos elementos se les denomina como “*prototeselas*”. Con esto, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.5.3 Dada una teselación $\mathcal{T} = \{T_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, el conjunto \mathcal{S} de prototeselas es un subconjunto de \mathcal{T} donde cada tesela $T \in \mathcal{T}$ es congruente con una prototesela $S \in \mathcal{S}$ y además, los elementos de \mathcal{S} no son congruentes entre sí.

Definición 3.5.4 Una teselación se denomina monoedra si es posible obtenerla mediante una prototesela.

La definición anterior puede extenderse a un mayor número de prototeselas. Cuando la teselación se genera por medio de dos prototeselas se denomina diedra. De manera sucesiva, al tener n -prototeselas decimos que la teselación es n -edra, para $n \geq 1$.

Al inicio de este capítulo definimos qué es una simetría. Este concepto puede extenderse a conjuntos más elaborados como las teselaciones. De manera informal, cuando una persona analiza una teselación, si al girarla o moverse al lado, la teselación permanece igual que en un inicio, decimos que esta es simétrica.

Definición 3.5.5 Una isometría f es una simetría de \mathcal{T} si mapea a toda tesela de \mathcal{T} en una tesela de \mathcal{T} , es decir $f(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.

De hecho, el concepto de simetría es extenso y puede llevarse más allá. Por ejemplo, para las teselaciones que tienen algún decorado en sus teselas, una simetría es aquella isometría que mapea a toda tesela decorada de \mathcal{T} a una tesela decorada de \mathcal{T} , de tal modo que el decorado permanezca invariante. El estudio de la simetría del color es muy amplio y rico. Para la persona interesada en este tema puede consultar [6] y [7].

Al igual que en el caso de los frisos, el concepto de grupo de simetría puede extenderse hasta las teselaciones.

Definición 3.5.6 El conjunto $S(\mathcal{T})$ es el grupo de simetría de \mathcal{T} .

Como se mencionó en la sección 3.1, si una teselación admite una simetría aparte de la identidad, decimos que es simétrica.

Definición 3.5.7 Sean \mathcal{T} una teselación del plano y T una tesela de \mathcal{T} , cualquier simetría de \mathcal{T} que mapee a T en ella misma es también una simetría de T .

Lo contrario a la definición anterior no es estrictamente cierto. Por ejemplo, en la figura 3.31 la única simetría de \mathcal{T} que mapea a cualquier tesela T en ella misma es la identidad, pero la tesela T al ser un cuadrado tiene un conjunto de 4 simetrías.

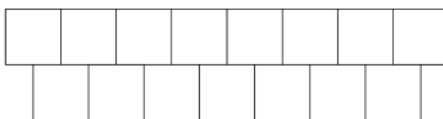


Figura 3.31

Definición 3.5.8 Dos teselas $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ son equivalentes si el grupo de simetría $S(\mathcal{T})$ contiene una transformación isométrica que mapee a T_1 en T_2 .

El conjunto de todas las teselas de \mathcal{T} que son equivalentes a T es llamado la *clase transitiva* de T .

Definición 3.5.9 [6] Si todas las teselas de \mathcal{T} forman una clase transitiva de \mathcal{T} , decimos que \mathcal{T} es isoedral. Es decir, que es transitiva respecto a todas sus teselas.

Definición 3.5.10 Si una teselación \mathcal{T} tiene n -clases transitivas, entonces \mathcal{T} es denominado n -isoedral, para $n \geq 1$.

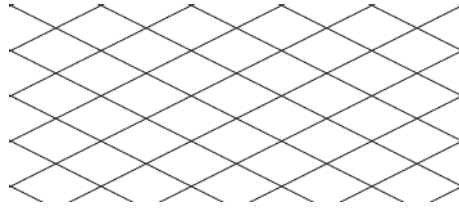


Figura 3.32: Teselación isoedra

Definición 3.5.11 Sean \mathcal{T} una teselación en el plano y $S(\mathcal{T})$ su grupo de simetría. Si este grupo contiene transformaciones que mapean a un vértice cualquiera de \mathcal{T} en otro vértice de \mathcal{T} , entonces los vértices forman una clase transitiva. Así, la teselación \mathcal{T} es denominada isogonal.

Al igual que en casos anteriores, el concepto anterior puede generalizarse a una teselación n -isogonal cuando los vértices forman n -clases transitivas, para $n \geq 1$.

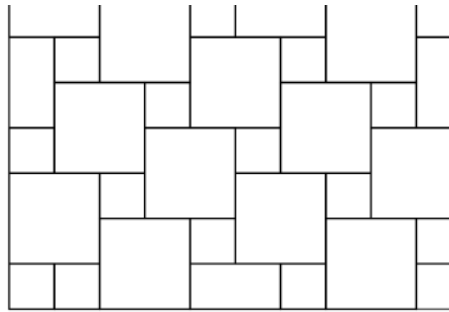


Figura 3.33: Teselación isogonal

Definición 3.5.12 Una teselación \mathcal{T} es monógona cuando todo vértice y sus respectivos lados incidentes, forman una figura congruente a cualquier otro vértice y sus lados incidentes. Finalmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.5.13 Sean \mathcal{T} una teselación en el plano y $S(\mathcal{T})$ su grupo de simetría. Si este grupo contiene transformaciones que mapean a una arista cualquiera de \mathcal{T} en otra arista de \mathcal{T} , entonces las aristas forman una clase transitiva. En este caso la teselación \mathcal{T} es denominada isotoxal.

Las definiciones anteriores pueden causar confusión al momento de diferenciarlas. Cabe notar que estos conceptos no son iguales entre sí.

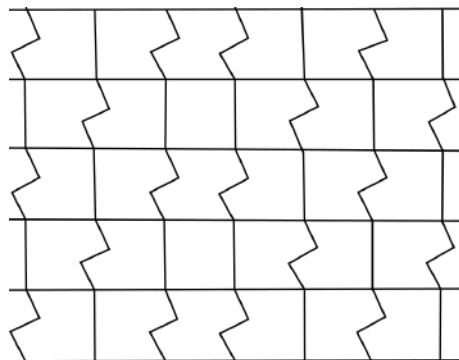


Figura 3.34: [6] Teselado monógono, no isogonal.

Antes de estudiar conceptos más elaborados, exhibimos un par de teselaciones básicas.

Lema 3.5.14 Todo triángulo puede teselar el plano.

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera y P el punto medio del segmento BC . Aplicando un semigiros alrededor de P el vértice B coincidirá con el vértice C del triángulo rotado. De esta manera obtenemos un cuadrilátero (figura 3.35).

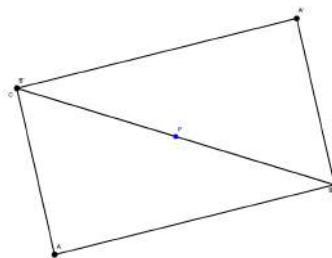


Figura 3.35

Recordemos que los ángulos interiores de un cuadrilátero cualquiera suman 360° . Para comprobar esto bastará descomponer al cuadrilátero en dos triángulos de manera similar al proceso del lema anterior. Ya que los ángulos interiores de todo triángulo suman 180° , al multiplicar esta cantidad obtenemos 360° .

Lema 3.5.15 Todo cuadrilátero puede teselar el plano.

Demostración. Sean $ABCD$ un cuadrilátero arbitrario y P el punto medio de alguno de sus lados. Al realizar un semigiros en torno a P de manera repetitiva se construye una teselación. Los ángulos de cada una de las teselas serán los mismos ángulos de la figura original. Además, como notamos anteriormente, la suma de los ángulos de cada cuadrilátero es de 360° , por lo que la teselación no tendrá huecos ni figuras sobrepuestas.

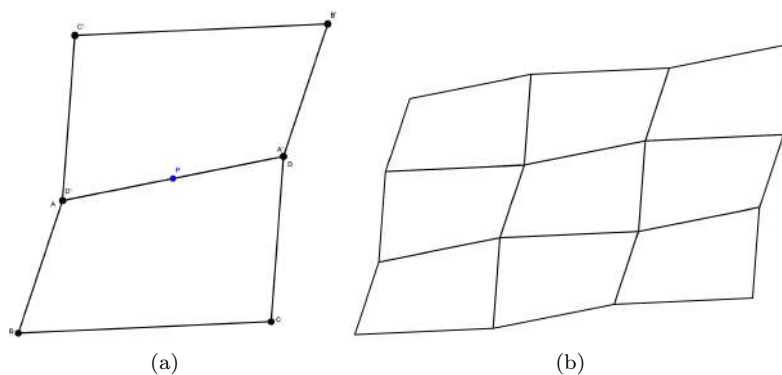


Figura 3.36

Con los lemas anteriores surge una pregunta: ¿todos los polígonos pueden teselar el plano? La respuesta es *no*. Un ejemplo de esto puede observarse en la figura 3.29. En las siguientes subsecciones estudiaremos qué polígonos *sí* pueden formar teselaciones.

La notación que utilizaremos es el código Schläfli: sea V un vértice cualquiera del teselado, ¿qué figuras coinciden en V ? En la figura 3.37 son cuatro cuadrados de cuatro lados, esto se denota mediante **4.4.4.4**.

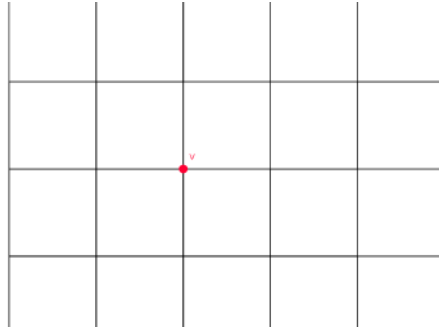


Figura 3.37

Es decir, se enumeran los lados de los polígonos regulares que rodean cada vértice.

3.5.1. Teselaciones regulares

Definición 3.5.16 Una teselación monoedral es regular si sus prototeselas son polígonos regulares.

Proposición 3.5.17 Si \mathcal{T} es una teselación monoedral regular en el plano \mathbb{R}^2 , entonces \mathcal{T} está formada por triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos regulares.

Demostración. Sea un polígono de n -lados cuyo ángulo interior mide $\beta = \frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n}$. Para que una teselación se forme requerimos que la suma de los ángulos en cada vértice sea 2π o 360° ; es decir,

$$\frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\frac{(n-2)\pi}{n}} = \frac{2n}{n-2}$$

Ahora, veamos para qué valores esto se cumple,

$$\frac{2n}{n-2} = \frac{2(n-2) + 4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$$

Notemos que, para que $\frac{2n}{n-2}$ sea entero, necesitamos que $\frac{4}{n-2}$ también lo sea. Los divisores enteros de 4 son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Luego, $n-2 = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. De esta manera, los valores que puede tomar n son $-2, 0, 1, 3, 4, 6$. Sin embargo, buscamos un polígono, por lo que el mínimo valor de n debe ser 3.

Por lo tanto, $n = 3, 4, 6$.

La suma de los ángulos en cada vértice es:

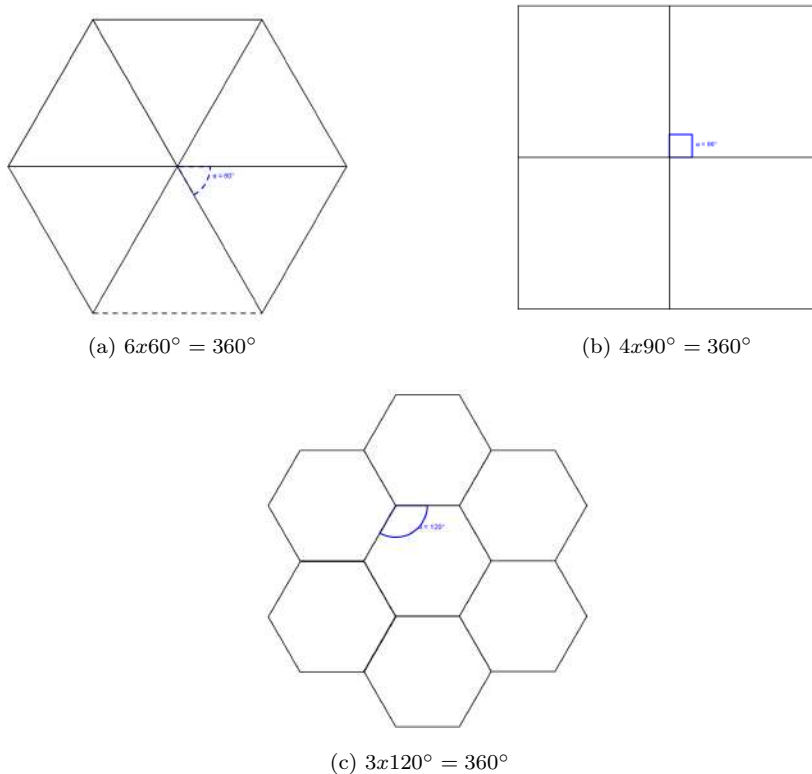


Figura 3.38

En la figura 3.37 se exhibe una teselación del tipo 4.4.4.4 y en la figura 3.39 las teselaciones 6.6.6 y 3.3.3.3.3.3.

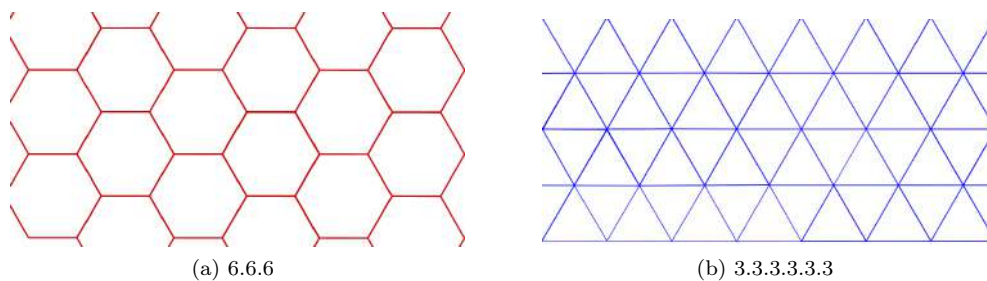


Figura 3.39

3.5.2. Teselaciones semirregulares

Definición 3.5.18 Una teselación \mathcal{T} semirregular es aquella que está formada por dos o más polígonos regulares tales que el mismo tipo de polígonos sigan el mismo orden alrededor de cada vértice.

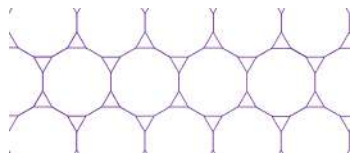
En cada vértice debe haber al menos tres polígonos y máximo seis. Nuevamente, la suma de los ángulos interiores en cada vértice debe ser 360° .

Los teselados semirregulares se crean mediante la combinación de triángulos equiláteros, cuadrados, hexágonos regulares, octágonos regulares y dodecágonos regulares. En la siguiente tabla se muestran las combinaciones posibles.

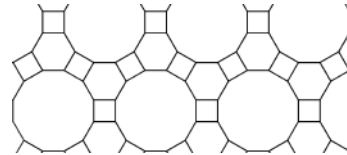
Lados	Ángulos
3-12-12	$60^\circ + (150^\circ \times 2)$
4-6-12	$90^\circ + 120^\circ + 150^\circ$
4-8-8	$90^\circ + (135^\circ \times 2)$
3-3-6-6	$(60^\circ \times 2) + (120^\circ \times 2)$
3-4-4-6	$60^\circ + (90^\circ \times 2) + 120^\circ$
3-3-3-4-4	$(60^\circ \times 3) + (90^\circ \times 2)$
3-3-3-3-6	$(60^\circ \times 4) + 120^\circ$

Nótese que 3-3-3-4-4 puede acomodarse de dos formas: 3-3-3-4-4 y 3-3-4-3-4.

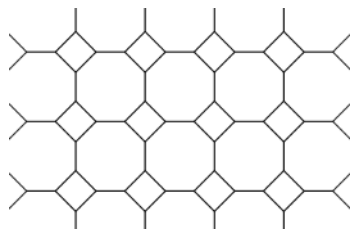
Enseguida se presentan los ocho tipos de teselaciones semirregulares con su respectiva notación.



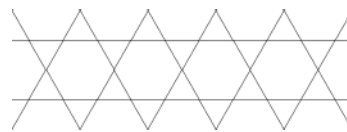
(a) 3.12.12



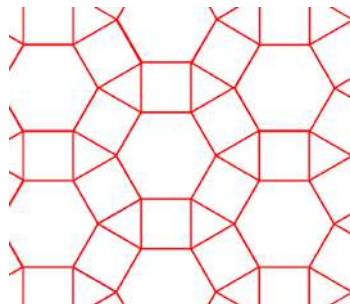
(b) 4.6.12



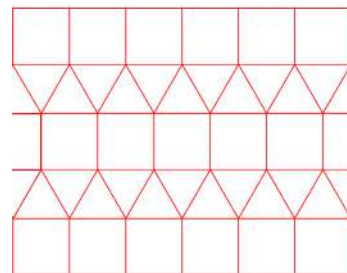
(c) 4.8.8



(d) 3.6.3.6



(e) 3.4.6.4



(f) 3.3.3.4.4

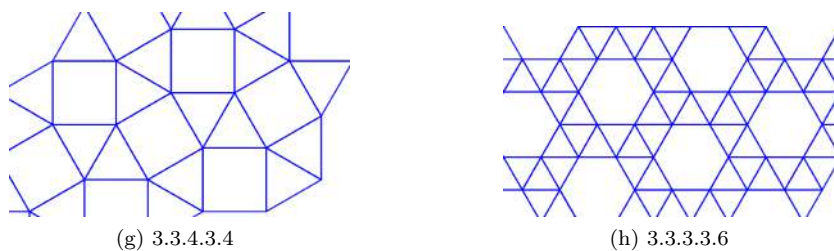


Figura 3.40: Los ocho tipos de teselaciones semirregulares.

Si una serie de k -polígonos regulares de n_1, n_2, \dots, n_k lados coinciden en un punto sin dejar ningún intervalo o hueco, entonces,
para $k = 3$,

$$\left(\frac{n_1 - 2}{n_1} + \frac{n_2 - 2}{n_2} + \frac{n_3 - 2}{n_3}\right)180^\circ = 360^\circ$$

o bien,

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$

para $k = 4$,

$$\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_4} = 1$$

para $k = 5$,

$$\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$$

para $k = 6$,

$$\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_6} = 2$$

A partir de las cuales se obtienen las siguientes soluciones:

Para n_1, n_2, n_3 , donde $n_1 \leq n_2 \leq n_3$,

n_1	n_2	n_3
6	6	6
4	6	12
4	8	8
3	12	12

Para n_1, n_2, n_3, n_4 , donde $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$,

n_1	n_2	n_3	n_4
4	4	4	4
3	3	6	6
3	4	4	6
3	3	4	12

Nótese que $3 - 3 - 4 - 12 = 3 - 3 - 3 - 4 - 4$.

Para n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 , donde $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$,

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
3	3	3	3	6
3	3	3	4	4

Para $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$, donde $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5 \leq n_6$,

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
3	3	3	3	3	3

Con esto hemos probado la siguiente proposición:

Proposición 3.5.19 Existen 11 formas posibles de teselar al plano mediante polígonos regulares, tal que todos los vértices sean del mismo tipo.

Notemos que, de estas 11 combinaciones, tres corresponden a las teselaciones regulares. Las otras ocho corresponden a las teselaciones semirregulares. Así, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.5.20 Existen ocho teselaciones semirregulares uniformes.

3.5.3. Teselaciones demirregulares

En diversos libros de matemáticas se introduce este tipo de teselaciones. Sin embargo, al ser una clasificación joven, de no más de un siglo, hay diferencias entre autores y sus definiciones.

Algunos autores como Ghyka (1946, [4]), comparten que el número de teselaciones demirregulares son 14, sin embargo el listado presenta diferencias entre sí. Por otro lado, Grünbaum y Shephard (1987, [6]) señalan un listado de 20 teselaciones de este tipo, mismas que fueron enumeradas anteriormente por Krötenheerdt en 1969. Estos 20 tipos también presentan diferencias con los demás listados.

Exhibimos el listado de Grünbaum y Shephard, el cual se basa en el trabajo de Krötenheerdt.

Definición 3.5.21 Una teselación \mathcal{T} es k -uniforme si y solo si es k -isogonal y además, sus teselas son polígonos regulares, para $k \geq 1$.

Es decir, una teselación arista a arista de polígonos regulares es n -uniforme si sus vértices forman exactamente n -clases transitivas respecto al grupo de simetrías de la teselación.

Lema 3.5.22 Existen 20 tipos distintos de teselaciones arista a arista de polígonos regulares que son 2-uniformes: $(3^6, 3^4, 6)_1$, $(3^6, 3^4, 6)_2$, $(3^6, 3^2, 4, 12)$, $(3^6, 3^2, 6^2)_1$, $(3^3, 4^2, 3, 4, 6, 4)$, $(3^3, 4^2, 4^2)_1$, $(3^3, 4^2, 4^2)_2$, $(3, 4, 3, 12, 3, 12^2)$, $(3, 4^2, 6, 3, 4, 6, 4)$, $(3^6, 3^3, 4^2)_1$, $(3^6, 3^3, 4^2)_2$, $(3^6, 3^2, 4, 3, 4)$, $(3^4, 6, 3^2, 6^2)$, $(3^3, 4^2, 3^2, 4, 3, 4)_1$, $(3^3, 4^2, 3^2, 4, 3, 4)_2$, $(3^2, 4, 3, 4, 3, 4, 6, 4)$, $(3^2, 6^2, 3, 6, 3, 6)$, $(3, 4^2, 6, 3, 6, 3, 6)_1$, $(3, 4^2, 6, 3, 6, 3, 6)_2$, $(3, 4, 6, 4, 4, 6, 12)$.

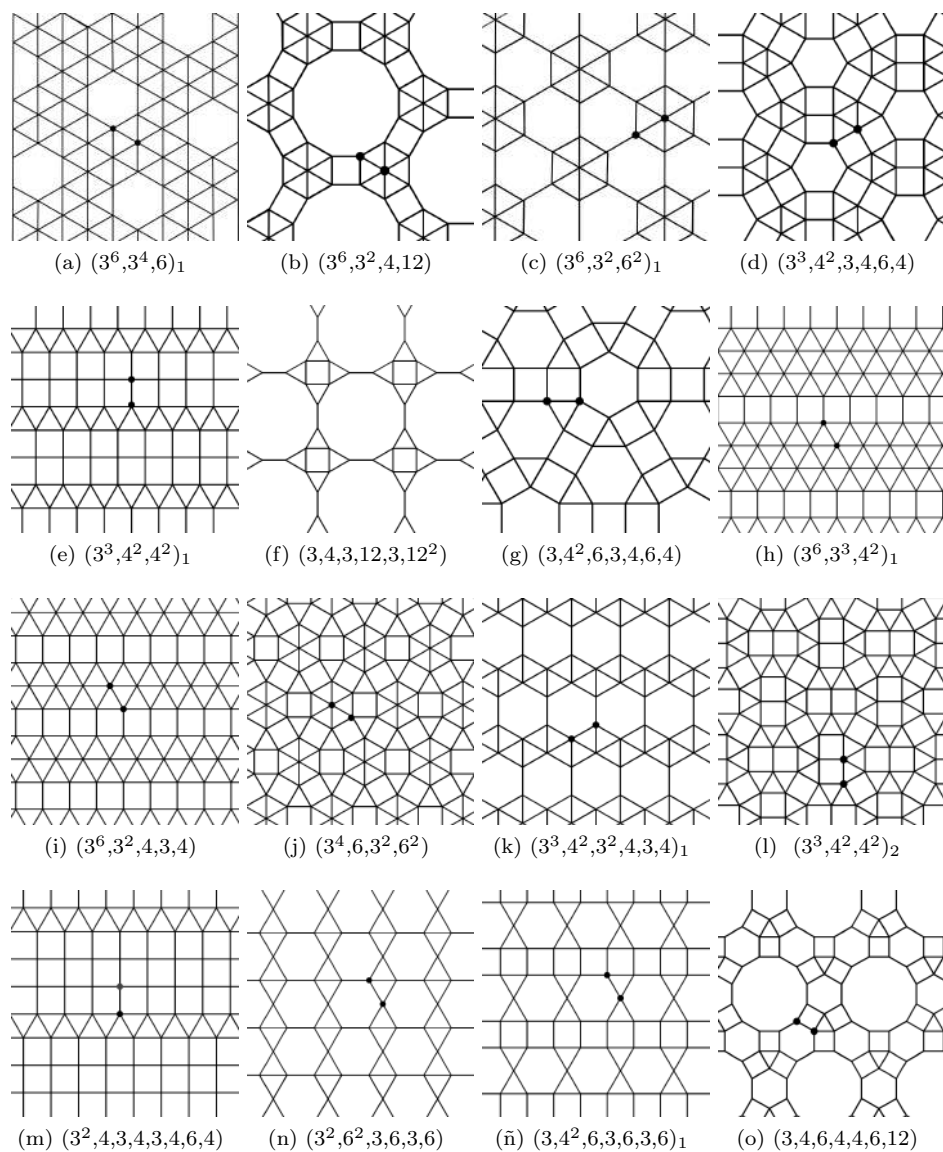


Figura 3.41

En esta sección mostramos únicamente a las teselaciones 2-regulares de Krötenheerdt, pero el análisis de este tipo de teselaciones puede extenderse hasta un número n -uniforme. Este tema es extenso e interesante, con sus respectivos problemas debido a la juventud del mismo. Para aquella persona interesada en los demás listados demirregulares así como la investigación de teselaciones n -uniformes le recomendamos consultar [4].

3.5.4. Teselados irregulares

Definición 3.5.23 Una teselación irregular es aquella que está construida por prototeselas de polígonos regulares e irregulares, de tal modo que la distribución de estos polígonos en los distintos vértices sea cíclica. Además, debe cubrir por completo el plano, sin dejar espacios ni sobreponerse y la suma de los ángulos interiores en cada vértice debe ser 360° .

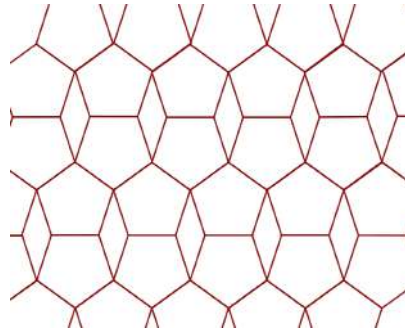


Figura 3.42: Ejemplo de teselado irregular

En seguida mostramos dos métodos para la creación de teselaciones irregulares.

Método de la malla invisible

En el lema 3.5.15 probamos que es posible teselar al plano mediante cualquier cuadrilátero. Ahora, presentamos un procedimiento para la creación de teselaciones irregulares mediante paralelogramos.

Teorema 3.5.24 (de Varignon). Sea $ABCD$ un cuadrilátero cualquiera, los puntos medios de cada lado forman un paralelogramo, cuya área es la mitad del área del cuadrilátero $ABCD$.

Demostración. Sean A, B, C, D los vértices de un cuadrilátero y P, Q, R, S los puntos medios de sus lados, los cuales además son vértices de otro cuadrilátero (figura 3.43).

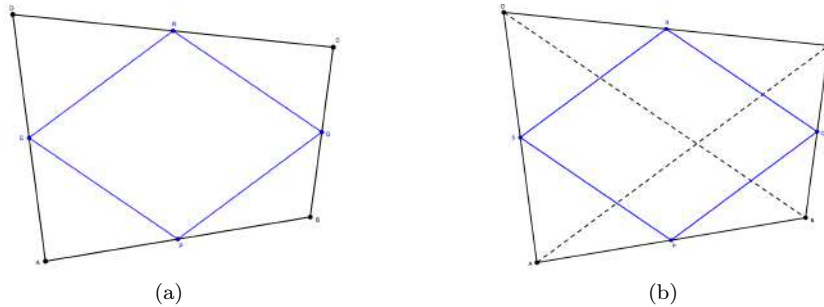


Figura 3.43

Trazamos las diagonales AC y BD . Con la primera diagonal se generan los triángulos ACD, SRD, ACB y PQB .

Notemos que los triángulos ACD y SRD son semejantes por la propiedad $l\alpha l$ y además los segmentos SR y AC son paralelos.

Por otro lado, bajo los mismos argumentos, los triángulos ACB y PQB son semejantes y los segmentos PQ y AC son paralelos.

De manera similar, con la diagonal BD se generan los triángulos ABD, RQC, BDC, SPA . Empleando los argumentos anteriores tenemos que los segmentos RQ y SP son paralelos. Además, PQ, SR tienen la misma longitud y RQ, SP tienen la misma longitud. Por ende, $PQRS$ es un paralelogramo.

Respecto a las áreas, notemos que el área del triángulo BPQ es una cuarta parte del triángulo ABC y el área del triángulo SDR es una cuarta parte del triángulo ACD . Al sumar las áreas de BPQ y SDR es un cuarto del área de $ABCD$. Similarmente, las áreas de los triángulos APS y QCR suman un cuarto del área de $ABCD$. Al sumar estas áreas tendremos la mitad del área de $ABCD$; es decir, el área del paralelogramo $PQRS$ es la mitad del área del cuadrilátero original.

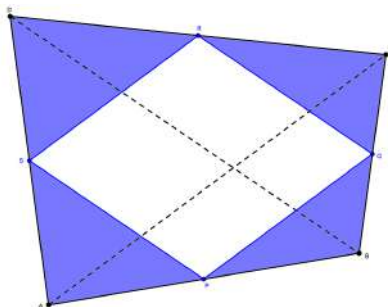


Figura 3.44

El teorema anterior satisface diversas propiedades, además es sumamente útil en el área de la física. Para los fines de esta tesis empleamos las siguientes consecuencias:

1. La unión de los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero dará un nuevo paralelogramo.
2. Dichos paralelogramos pueden emplearse para cubrir el plano; esto es llamado “malla invisible”.

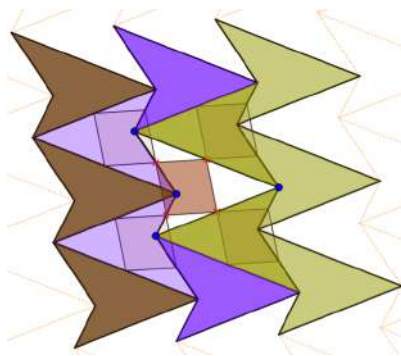


Figura 3.45: Ejemplo de teselado por método del paralelogramo⁷

La teselación se da mediante traslaciones sobre la figura original, así como un semigiro alrededor de los puntos medios de la malla de paralelogramos.

⁷Javier Cayetano Rodríguez. Geogebra. Recuperado de: <https://www.geogebra.org/m/Y6DV2V6J>

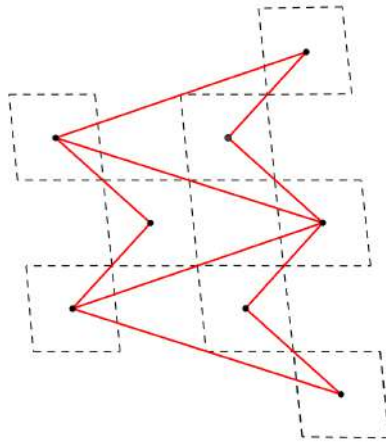


Figura 3.46

Método del triángulo

De manera similar, en el lema 3.5.14 hicimos notar que es posible teselar el plano mediante triángulos, pues estos pueden moverse de tal manera que se forme un paralelogramo.

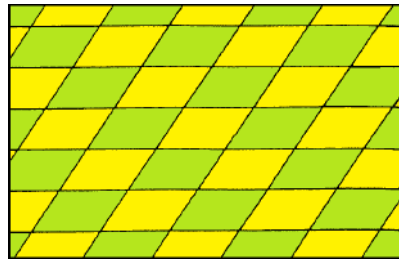


Figura 3.47: Ejemplo de teselado por método del triángulo

Proposición 3.5.25 Dado un triángulo cualquiera, es posible cubrir al plano con infinitos triángulos iguales al dado, de tal modo que estos no se sobrepongan.

Demostración. Recordemos que al realizar un semigiro en torno al punto medio de uno de los lados del triángulo original se formará un paralelogramo (figura 3.45). Así mismo, por el método anterior sabemos que cualquier paralelogramo tesela el plano.

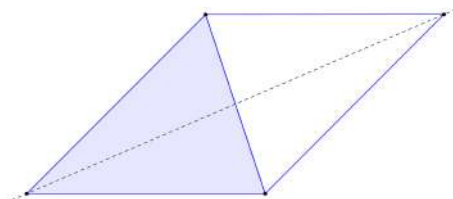


Figura 3.48

3.5.5. Teselaciones con otros polígonos

En esta sección exploraremos algunos otros tipos de polígonos con los cuales es posible teselar el plano.

Polígonos estrella

Hasta ahora la mayoría de las teselaciones que hemos estudiado han sido aquellas formadas mediante polígonos regulares convexos. Este análisis puede extenderse a otro tipo de polígonos regulares con forma de estrella. Estos son denominados *polígonos regulares estrella* o bien, *polígonos regulares generalizados*.

Históricamente las primeras interpretaciones formales de este tipo de polígonos fueron dadas por J. Kepler (1571 - 1630). En su libro *Harmonice Mundi* (1619), Kepler anuncia que los polígonos estrella se obtienen mediante la extensión de los lados de polígonos regulares convexos. Más adelante, Kepler refina esta definición, concentrándose únicamente en los puntos finales de los lados extendidos de la figura, así como en los vértices del polígono estrella en lugar de los vértices del polígono original.

La notación que utilizamos en esta sección se debe al matemático suizo L. Shälafi (1815 - 1895), la cual es de la forma $\{n/d\}$. En este caso $\{n\}$ representa a un polígono regular de n -lados.

Definición 3.5.26 [13] El polígono estrella $\{n/d\}$ se obtiene al considerar los vértices de un polígono regular de n -lados y los n -vértices se obtienen de un punto medio de rotaciones sucesivas que recorren $\frac{2\pi d}{n}$, y sus n -lados, que encierran al centro d -veces son: $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_0$.

Definición 3.5.27 Decimos que un n -ágono estrella es regular cuando es un $(2n)$ -ágono con $2n$ lados iguales los cuales tienen las mismas simetrías de $\{n\}$. Este tipo de estrella se denota por $\{n_\alpha\}$, con n -vértices de ángulo α , donde $0 < \alpha < \frac{(n-2)\pi}{n}$ en los “puntos” de la estrella y n -esquinas de ángulo $\frac{2(n-1)\pi}{n} - \alpha$ en los picos de la estrella.

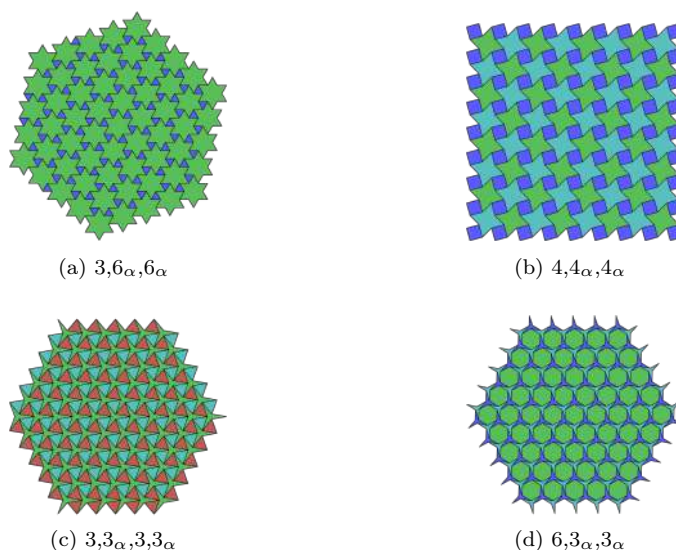


Figura 3.49: Teselaciones uniformes de ángulo α^8

Lema 3.5.28 Existen cuatro tipos de teselaciones uniformes mediante polígonos regulares y polígonos estrella en los cuales todo vértice de una tesela es un vértice de la teselación (figura 3.49).

⁸Tomruen. Trabajo propio, CC BY-SA 4.0

Demostración. Notemos que a lo más un tipo de polígono estrella puede ocurrir y que en cada vértice de la teselación \mathcal{T} debe incidir con un punto de los picos del polígono estrella.

Ya que cada vértice incide con un punto de un pico del polígono estrella, entonces el ángulo entre ellos es de $\frac{2(n-1)\pi}{n}$, de tal forma que las demás teselas que incidán con el vértice deben ser de un ángulo $\frac{2\pi}{n}$. Esto ocurre únicamente con $n = 3, 4$ o 6 .

Teselado pentagonal

Hemos visto que no es posible teselar el plano mediante pentágonos regulares, ¿qué ocurre con aquellos pentágonos no-regulares? Esta pregunta atrajo a algunos matemáticos y aficionados a la búsqueda de familias de pentágonos que lograsen teselar el plano. La tarea comenzó a principios del siglo XX y concluyó en 2017.

Definición 3.5.29 Un teselado pentagonal es una teselación del plano donde cada tesela tiene forma de pentágono.

El primer conjunto de pentágonos fue descubierto por el matemático alemán Karl Reinhardt (1895-1941) en su trabajo *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone* publicado en 1918, quien identificó cinco tipos de teselaciones. En la figura 3.50 mostramos estas prototeselas.

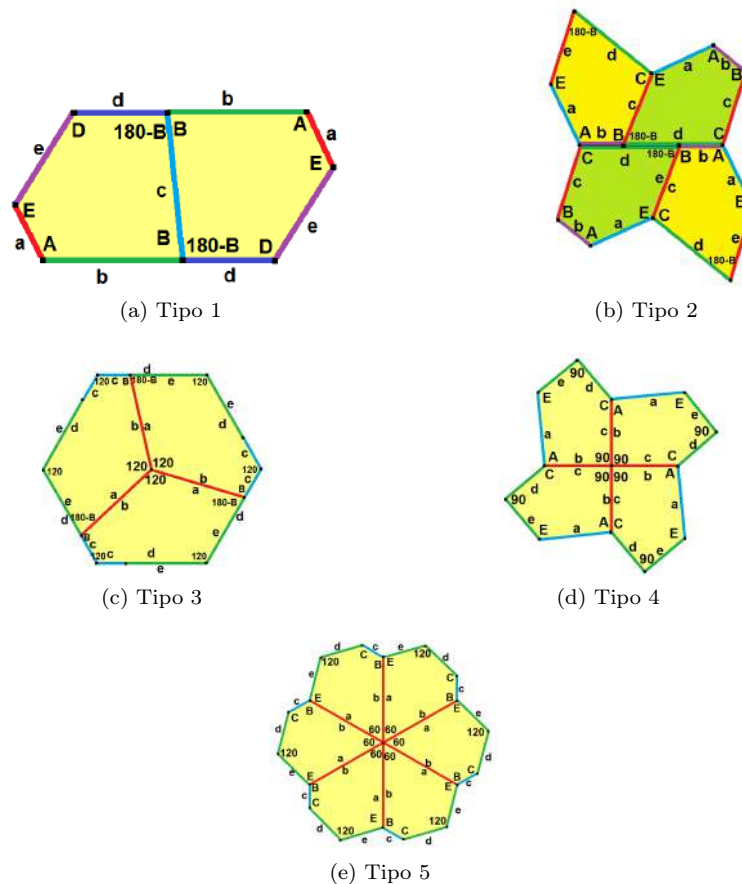


Figura 3.50

En 1968, R. Kershner (1913-1982) publica *On paving the plane* donde expone tres tipos más de teselas pentagonales. Además, anunció que el listado de teselados pentagonales estaba completo. En la figura 3.51 mostramos las prototeselas de Kershner.

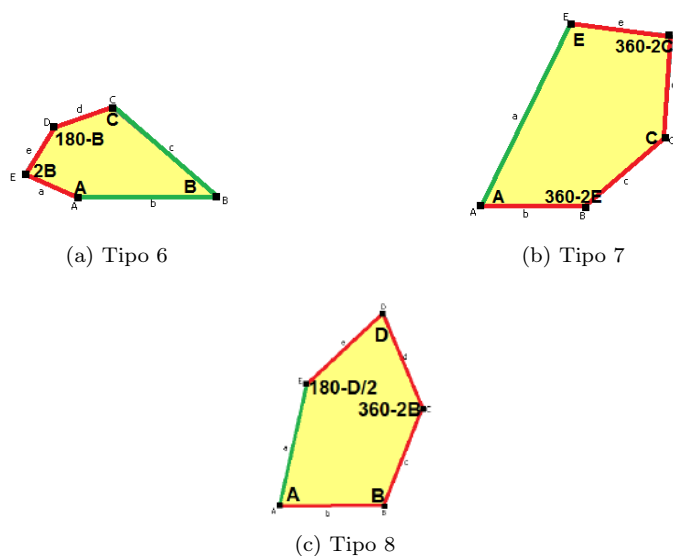


Figura 3.51

Pese a la aseveración de Kershner, en 1975 R. James encuentra un noveno tipo de tesela pentagonal (figura 3.52).

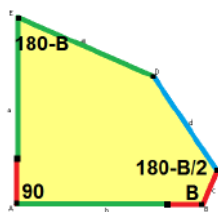


Figura 3.52: Tipo 9

Tan solo un año más tarde, la matemática aficionada Marjorie Rice (1923 - 2017) descubre otros cuatro tipos de teselas pentagonales (figura 3.53). Su trabajo puede consultarse en su blog de Google Sites⁹.

⁹<https://sites.google.com/site/intriguingtessellations/>

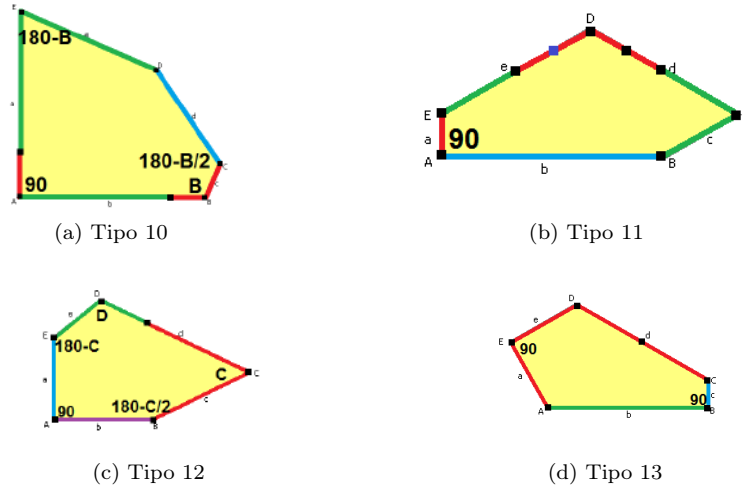


Figura 3.53

Rolf Stein en 1985 encuentra el 14avo tipo de teselado pentagonal (figura 3.54).

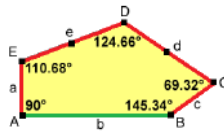


Figura 3.54: Tipo 14

En 2015 los matemáticos Casey Mann, Jennifer McLoud y David Von Derau de la Universidad de Washington Bothell publican *Convex pentagons that admit i-block transitive tilings*, donde mediante algoritmos computacionales, encontraron el 15avo tipo de teselación pentagonal (figura 3.55).

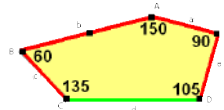


Figura 3.55: Tipo 15¹⁰

Con la continua ampliación del listado surgen algunas preguntas: ¿existirán más de 15 tipos de teselas pentagonales?, y si existen ¿cuáles son? En 2017 el matemático francés Michaël Rao publica el paper *Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane*, donde asegura que existen 371 familias de ángulos cuyas condiciones pueden considerarse para la resolución de las preguntas anteriores. Empleando métodos computacionales, Rao finalmente demuestra que el listado está completo, es decir, solo existen 15 tipos de teselados pentagonales. Este paper puede consultarse en [9].

¹⁰Tomruen. Trabajo propio, CC BY-SA 4.0

3.5.6. Teselaciones periódicas

Definición 3.5.30 Sean \mathcal{T} una teselación del plano y $S(\mathcal{T})$ su grupo de simetría. Si $S(\mathcal{T})$ contiene al menos dos traslaciones no paralelas, entonces decimos que \mathcal{T} es periódica.

Es decir, una teselación es periódica si existe una sección finita de ella misma tal que, mediante traslaciones en direcciones independientes, permita crear la teselación completa.

Para describir a las teselaciones periódicas tenemos lo siguiente: sean u y v vectores no paralelos, donde $u, v \in \mathbb{Z}^+$, entonces $S(\mathcal{T})$ contiene a todas las traslaciones de la forma $nu + mv$, donde $n, m \in \mathbb{Z}^+$. En otras palabras, es el resultado de combinar n -traslaciones bajo el vector u , con m -traslaciones bajo el vector v . Además, este tipo de teselación es el más sencillo de obtener.

Ejemplo 3.5.31 Las teselaciones regulares y semirregulares estudiadas anteriormente son periódicas.

Al estar frente a un teselado cualquiera puede surgirnos una sencilla pregunta: ¿cómo identificar si es periódico? Una manera de hacerlo es mediante *retículas*.

Definición 3.5.32 Sea P un punto fijo del plano, el conjunto de imágenes de P bajo el conjunto de traslaciones $nu + mv$ forma una retícula.

Ejemplo 3.5.33 La retícula de cuadrados unitarios está formada por el conjunto de puntos del plano euclidiano cuyas coordenadas son números enteros. (figura 3.56) Notemos además, que cada retícula puede verse como el conjunto de vértices de la teselación 4.4.4.4.



Figura 3.56

Anteriormente revisamos el “método de la malla invisible” mediante el cual comprobamos que todo paralelogramo puede teselar el plano. Ahora bien, una retícula puede ser vista como el conjunto de vértices del teselado mediante paralelogramos, al cual denotaremos por \mathcal{P} . A cada tesela de \mathcal{P} la denominamos como *paralelogramo periódico*.

Una teselación es periódica cuando podemos encontrar una retícula donde los paralelogramos periódicos contengan piezas idénticas de la teselación. Por otro lado, si identificamos el comportamiento de las teselas de \mathcal{T} que están contenidas en un paralelogramo periódico, entonces el resto de la teselación \mathcal{T} puede construirse mediante la repetición de tal comportamiento en el resto de los paralelogramos periódicos de \mathcal{P} . Cabe destacar que una teselación puede ser simétrica pero no periódica.

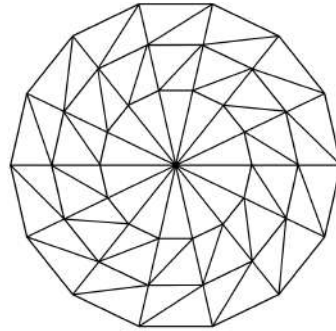


Figura 3.57: Teselación con simetría rotacional que no es periódica.

3.5.7. Teselaciones aperiódicas

El descubrimiento de las teselaciones aperiódicas es, relativamente, nuevo. Fue en 1964 que el matemático Robert Berger presentó en su tesis doctoral la primera teselación aperiódica. Berger utilizó un conjunto de 20 426 teselas de diferentes formas. Con este descubrimiento el interés por las teselaciones resurgió. Los estudiosos se plantearon entonces la siguiente pregunta: *¿existe alguna manera de crear teselaciones aperiódicas con menos teselas?*

Definición 3.5.34 Un conjunto de prototeselas es aperiódico si con los elementos del conjunto es posible crear infinitas teselaciones del plano sin que alguna de estas teselaciones sea periódica.

Debido a la juventud del tema aún existen algunas diferencias entre las mismas definiciones. En algunos textos se utiliza “*no-periódico*” como sinónimo de “*aperiódico*”; sin embargo, en esta tesis haremos énfasis en la diferencia de estos conceptos. Existen diversos conjuntos de prototeselas con los cuales pueden formarse teselaciones no periódicas pero, para que un conjunto de prototeselas sea aperiódico es preciso que **toda** teselación formada por estas necesariamente sea no periódica.

Informalmente, una teselación no periódica carece de simetría traslacional, es decir, no tiene traslaciones. Imaginemos que nos colocamos frente a una teselación no periódica, al observar diferentes secciones de esta siempre será una imagen diferente.

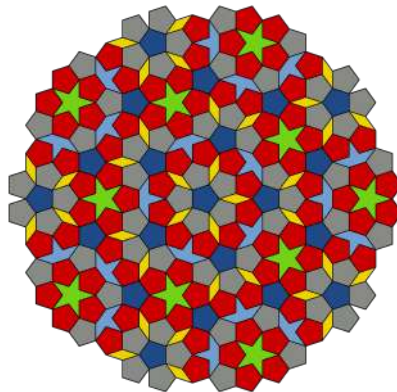


Figura 3.58: Ejemplo de una teselación aperiódica

Definición 3.5.35 Decimos que una teselación \mathcal{T}_2 es la composición de una teselación de \mathcal{T}_1 si toda tesela de \mathcal{T}_2 es la unión de teselas de \mathcal{T}_1 , donde cada arista de \mathcal{T}_2 es la unión de aristas de \mathcal{T}_1

y cada vértice de \mathcal{T}_2 es un vértice de \mathcal{T}_1 .

Es posible, además, que dos teselados diferentes sean iguales a composiciones del otro.

Al igual que en conceptos anteriores, podemos ampliar la definición 3.5.35 a un número de n -teselas: si toda tesela de \mathcal{T}_2 es la unión de n -teselas de \mathcal{T}_1 , entonces \mathcal{T}_2 es una n -composición de \mathcal{T}_1 , para $n \geq 1$.

Definición 3.5.36 Una teselación monoedra es n -similar si \mathcal{T} es igual a una n -composición de sí misma y además, ningún valor más pequeño a $n > 1$ tiene esta propiedad.

Ejemplo 3.5.37 [6] Una teselación isoedra $3^4.6$ (figura 3.59 b) es la composición de una teselación monoedra 3^6 (figura 3.59 a).

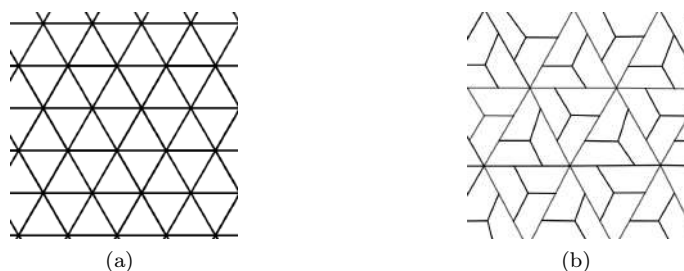


Figura 3.59: Teselas del ejemplo 3.4.x

Definición 3.5.38 Una n -repitesela es una tesela T' que puede ser diseccionada en n -partes congruentes T' donde cada parte es similar a una tesela T .

Para este tipo de teselas encontramos una similitud la cual manda a una de las partes de T' a una tesela T . Al aplicar esta operación de manera repetida a T entonces se formará una teselación n -similar. Es decir, utilizando la n -repitesela formamos una prototesela con la cual es posible formar un teselado aperiódico:

Lema 3.5.39 [6] Si la n -composición descrita anteriormente para un teselado monoedra n -similar es único, entonces T es no periódico.

Demostración. Queremos probar que \mathcal{T} no tiene traslaciones. Supongamos lo contrario, así existe una traslación T con el vector no nulo v . Debido a la unicidad de la composición, esto implica que T también es una simetría de la teselación n -compuesta. Al aplicar este argumento de manera repetida para más n -composiciones, obtenemos un conjunto de teselaciones con teselas arbitrariamente largas. Notemos que es imposible que T sea una simetría para cualquier teselación en la cual toda tesela contenga una forma circular cuyo diámetro sea más largo que v . Con lo cual arribamos a una contradicción y por ende, el lema queda demostrado.

El procedimiento anterior funge como modelo para la prueba de que las teselaciones que revisaremos a continuación son no periódicas.

Fue en 1961 que el matemático Hao Wang trabajó con el problema del dominó. Los dominós (figura 3.60), actualmente conocidos como teselas de Wang, son cuadrados del mismo tamaño, coloreados en sus aristas; las aristas pueden juntarse si sus colores coinciden. Wang demostró en *Proving theorems by pattern recognition—II* (1961) la existencia de un algoritmo cuya función era decidir si un conjunto de dominós es capaz de cubrir todo el plano o no. Dicho algoritmo funcionaba con la condición de que no existieran conjuntos de prototeselas aperiódicas.

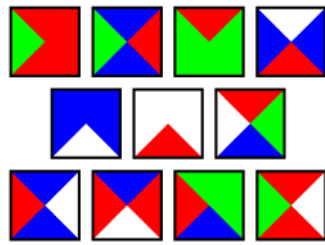


Figura 3.60: Teselas de Wang

Años más tarde Robert Berger, quien fuera alumno de Wang, mostró un conjunto de prototeselas aperiódicas hecho con 20 426 teselas de Wang, por lo cual se estableció que el problema del dominó era indecidible.

Posteriormente comenzaron a surgir más ejemplos. En 1971 Raphael Robinson (1911-1995) encontró un conjunto aperiódico de 6 piezas (figura 3.61) el cual se basa en teselas de Wang.

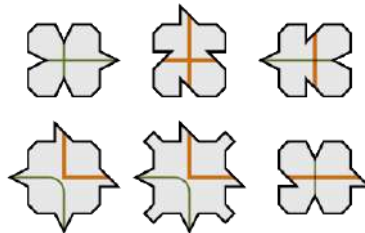


Figura 3.61: Teselas de Robinson

Después, Roger Penrose (1931 -) y Robert Ammann (1946 - 1994) encontraron, de manera independiente, diversos conjuntos aperiódicos. A continuación se detallan las teselaciones encontradas por Penrose y Ammann.

Teselaciones de Penrose

En las subsecciones anteriores hemos visto que no es posible teselar el plano empleando únicamente pentágonos regulares, pues al hacerlo quedarán espacios. Fue R. Penrose quien, entre los años 1973 y 1974, descubrió tres conjuntos de prototeselas aperiódicas con los cuales es posible formar teselaciones no periódicas. En *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research* (1974), R. Penrose expone el primer conjunto denominado como P_1 , este consta de seis prototeselas: un rombo diamante, una estrella de cinco picos, una estrella de tres picos y tres pentágonos regulares (figura 3.62). Debido a la naturaleza de las formas, es posible crear con ellas teselaciones periódicas, Penrose solucionó esto con las denominadas reglas de ensamble, donde especifica la manera en que las prototeselas deben unirse para así garantizar que la no-periodicidad de la teselación se cumpla.

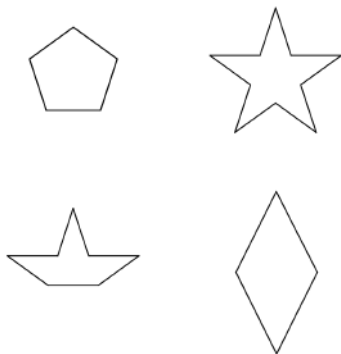


Figura 3.62

El conjunto P_2 fue descubierto en 1974. Este es mucho más elegante que el anterior ya que consta de únicamente dos piezas: papalote y flecha (figura 3.63), además permite hacer diversas modificaciones para la creación de teselaciones más elaboradas.

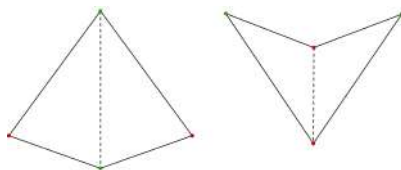


Figura 3.63

Como podemos observar, estas son figuras cuadrangulares. Ambas tienen dos lados de medida 1 y dos lados de medida ϕ , donde $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ la cual es la razón áurea; su diferencia está en los ángulos: el papalote tiene tres ángulos de 2θ y uno de 4θ , mientras que la flecha tiene dos ángulos de θ , uno de 2θ y uno de 6θ , donde $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

Nuevamente, R. Penrose hace uso de las reglas de ensamble, en estas la condición es que lados iguales vayan con lados iguales y, si involucramos un par de colores (dígase verde y rojo), entonces los colores de los vértices deben coincidir.

Un año más tarde, Robinson propuso “cortar” las piezas papalote y flecha por su eje de simetría. De esta manera se obtienen los denominados “triángulos de Robinson”. Las reglas de ensamble de estas nuevas piezas son un tanto más complicadas pues aquí se pide que la arista que une dos vértices del mismo color esté orientada.

El último conjunto es denominado P_3 el cual está formado por un par de prototeselas en forma de rombo (figura 3.64), donde el primer rombo tiene dos ángulos de 2θ y dos de 3θ y el segundo dos ángulos de medida θ y dos ángulos de 4θ . En este caso $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

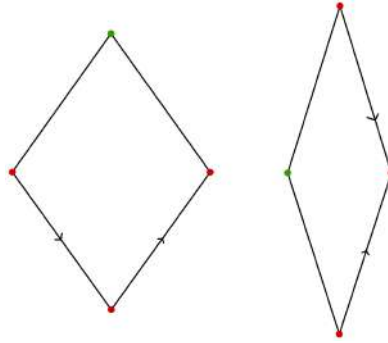


Figura 3.64

La condición para ensamblarlos es que la orientación y tamaño de las aristas coincida y además, los colores (verde y rojo) coincidan. De esta manera Penrose garantiza que no es posible unir dos rombos iguales para formar un paralelogramo.

A lo largo de los años se han desarrollado diversos métodos para demostrar que P_1 , P_2 y P_3 teselan el plano y además, que todas las teselaciones formadas con estos conjuntos son no periódicas. Uno de estos métodos es el de composición y descomposición el cual fue expuesto al inicio de este apartado.

Teselaciones de Ammann

Robert Ammann fue un matemático aficionado quien, alrededor de 1977, descubrió diversos conjuntos aperiódicos. Ammann se comunicó entonces con Branko Grünbaum y G. C. Shephard, autores del libro *Tilings and Patterns*[6], en el cual se hace una primera descripción de los conjuntos encontrados por Ammann, los cuales detallamos a continuación.

El primer conjunto es llamado A_2 . Este conjunto está formado por un par de prototeselas. En la figura 3.65 se muestran cuatro variantes que parten de este par de formas.

- En 3.65 a se muestra que las prototeselas pueden tomar cualquier valor positivo.
- En 3.65 b se sigue la regla de que las prototeselas deben juntarse de tal manera que las marcas negras se unan, formando así elipses.
- En 3.65 c ocurre algo similar al caso anterior. La prototesela elíptica pequeña garantiza que las otras dos piezas se junten de manera correcta.
- En 3.65 d la condición para unir las específicas que las prototeselas deben juntarse de tal manera que las líneas dentro de ellas formen rectas al unirse con las demás. Esto es posible sólo si $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = \phi$, la razón áurea.

En cualquier variante de este conjunto las reglas de ensamble previenen la rotación de $\frac{1}{2}\pi$.

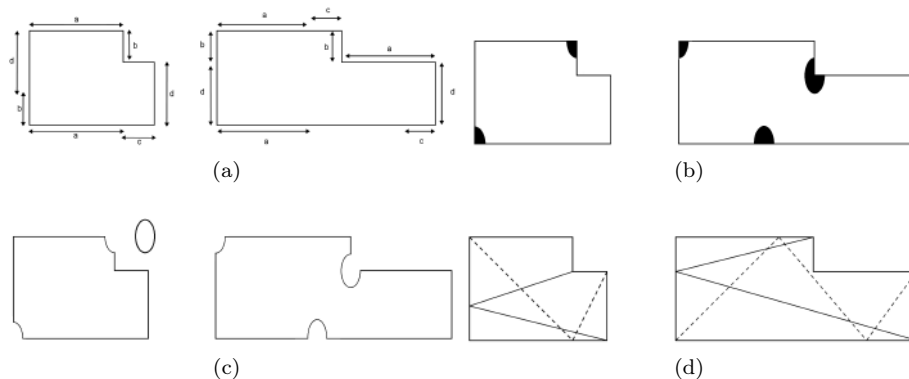


Figura 3.65

El segundo conjunto es A_3 . Está formado por tres prototeselas que, a su vez, generan diversas variaciones. Una vez más la razón áurea aparece, pues las prototeselas tienen lados de:

- La primera prototesela tiene lados de ϕ^3, ϕ^2, ϕ y 1.
- La segunda tiene lados de $2\phi^2, \phi, 1$.
- La tercera tiene lados de $1 + \phi^2, 1, \phi^2, \phi, \phi - 1$.

Presentamos tres variaciones en la figura 3.66

- a. En 3.66 (a) las prototeselas deben acomodarse de tal modo que los círculos se formen.
- b. En 3.66 (c) y (d) ocurre lo mismo que en 3.66 (d), es decir, las prototeselas deben juntarse de tal manera que las líneas dentro de ellas formen rectas.

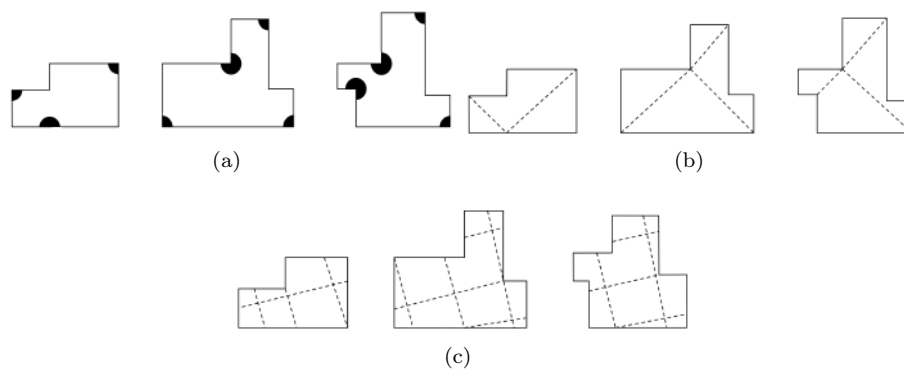


Figura 3.66

El conjunto A_4 está compuesto por dos prototeselas. La propiedad importante de estas es la flecha (figura 3.67), pues la condición de este conjunto es completar la flecha mediante la unión adecuada de las prototeselas.



Figura 3.67

El conjunto A_5 es el último conjunto aperiódico de Ammann. Este conjunto es el más conocido de todos. Es descrito por su creador como un par de prototeselas, donde la forma de flecha y semicírculo juegan un papel clave, pues gracias a ellos la condición de ensamble se garantiza: las flechas y los semicírculos deben completarse.

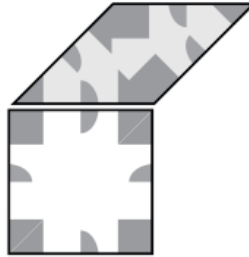


Figura 3.68

Años más tarde, en 1982, F. Beenger describe las propiedades algebraicas de este conjunto, en especial el método conocido como “corte y proyección”, el cual permite formar la teselación no periódica de manera diferente al método descrito por Ammann. Es debido a esto que este conjunto es llamado de Ammann - Beenker.

Al momento de publicar el libro, R. Amman no había probado formalmente que sus conjuntos son aperiódicos. Sin embargo, en 1992, en colaboración con Branko Grünbaum y G. C. Shephard, publican el paper titulado *Aperiodic Tiles*[1], donde los autores prueban la aperiodicidad de los conjuntos A_2, A_3, A_4 y A_5 .

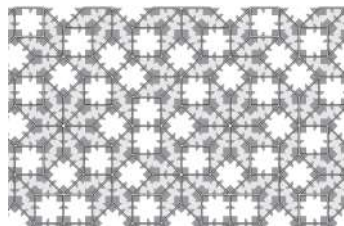


Figura 3.69: Teselación de Ammann-Beenker.¹¹

Actualmente el estudio de las teselaciones aperiódicas continúa en desarrollo.

¹¹Chaim Goodman-Strauss. Trabajo propio, CC BY-SA 4.0

3.5.8. Ejemplos

Como se mencionó anteriormente, las teselaciones han sido empleadas por una gran cantidad de diversas culturas a lo largo de los siglos. En este apartado se presentan algunos ejemplos notables.

Teselado de El Cairo

Una de las teselaciones más conocidas mundialmente es la de El Cairo, la capital de Egipto, ubicada cerca del río Nilo. Es común encontrar esta forma en el suelo de sus calles.

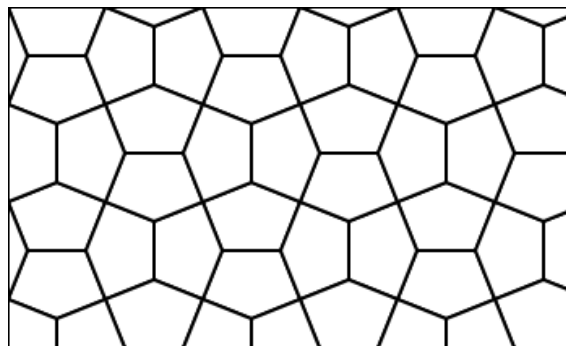


Figura 3.70: Teselación de El Cairo¹²

Está hecha a partir de un pentágono, el cual posee cuatro lados iguales y dos ángulos rectos. Sin embargo, también es posible construir este pentágono mediante un triángulo isósceles, donde a cada lado (exceptuando la base) se le unen triángulos rectángulos (figura 3.43). Posteriormente, para realizar la teselación basta rotar por 90° en los vértices de los ángulos rectos de la figura original.

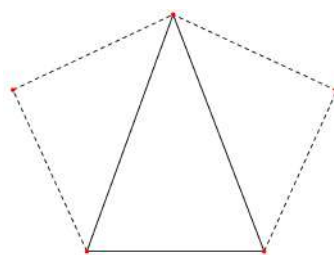


Figura 3.71

Teselados islámicos

Debido a sus creencias, el arte islámico evita el uso de figuras humanas, naturales y todas aquellas contrarias al arte abstracto. Es por ello que los artistas de dicha cultura buscaron otras formas de expresión y decoración, en la cual su estética se basa en figuras geométricas. Como resultado, los patrones islámicos son diversos y complejos, detrás de los cuales existen significados propios de la religión, yendo más allá de un simple motivo decorativo. Pese a su complejidad, los patrones islámicos tienen como base polígonos regulares. A continuación se presentan dos tipos de teselados islámicos.

Teselas Girih

Las teselas Girih son empleadas para la decoración de edificios y han sido utilizadas desde aproximadamente el año 1200 d.n.e. Consisten en un conjunto de cinco formas:

¹²De Graeme Bartlett. CC BY-SA 3.0.

1. Un decágono regular, cuyos ángulos interiores son de 144° cada uno.
2. Un pentágono regular, cuyos ángulos interiores son de 108° cada uno.
3. Un rombo con ángulos interiores de 72° y 108° .
4. Un hexágono con ángulos interiores de 72° y 144° .
5. Una figura en forma de moño con ángulos interiores de 72° y 108° .

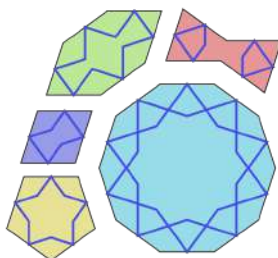


Figura 3.72: ¹³

Un bello ejemplo de este tipo de teselado se encuentra en la Mezquita Verde ubicada en Bursa, Turquía, construida entre 1419 y 1424.



Figura 3.73: Mezquita Verde de Bursa.

Patrones de estrella

Como se mencionó anteriormente, los patrones islámicos surgen de la combinación de polígonos regulares. Pero los arquitectos islámicos no se limitaban al uso de polígonos regulares, el uso de polígonos estrella fue sumamente popular en sus motivos decorativos.

¹³Cronholm144, CC BY-SA 3.0

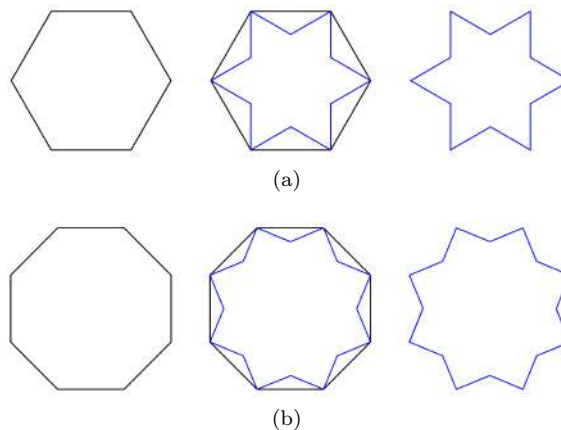


Figura 3.74: Polígonos estrella

El califato abasí fue una dinastía islámica. Su arquitectura alcanzó el apogeo entre los años 750 y 945 d.n.e. Los palacios eran decorados con este patrón estrellado, como puede verse en la figura 3.75.



Figura 3.75

3.6. Grupos del papel pintado

También son llamados *grupos de simetría plana* o *grupos cristalográficos planos*, es una clasificación matemática usada para describir y catalogar patrones repetitivos bidimensionales, esto mediante el tipo de simetría que presente el diseño. Este tipo de clasificación es sumamente útil para comparar diversos diseños. Los patrones que tengan el mismo tipo de simetría serán clasificados en el mismo grupo, aún cuando a simple vista parezcan diferentes entre sí.

Como hemos visto en secciones anteriores, los patrones repetitivos han sido utilizados con fines decorativos desde hace siglos. Uno de los ejemplos más bellos y conocidos es La Alhambra, ubicada en Granada, España. Los arquitectos de la Alhambra cubrieron decorativamente cada espacio del edificio; en su interior diversos arcos fungen únicamente como motivo decorativo, sus paredes están cubiertas por cerámica y el elemento decorativo más utilizado es la decoración vegetal. Estos exquisitos decorados han sido fuente de inspiración para diversos artistas, como M.C. Escher.



Figura 3.76: Detalle de La Alhambra.¹⁴

Fue en el siglo 19 que la clasificación de patrones bidimensionales empezó a tomar auge. Al inicio, fueron estudiados mediante latitudes para posteriormente involucrar a la simetría, esto con el fin de hacer distinciones más exactas.

Entre 1868 y 1869, C. Jordan descubrió 16 de los 17 grupos de papel pintado. Posteriormente, a finales del siglo 19, E.S Federov clasificó los 17 grupos de papel pintado en su obra *Symmetry of Crystals* (1971) aunque el trabajo no resultó ser trascendental en su época. En 1924, George Pólya redescubre estos grupos en *Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene*.

¿Cómo sabemos que hay exactamente 17 grupos? Al igual que en otros conceptos matemáticos, la demostración de esta afirmación tardó varios años en realizarse. Actualmente la prueba más aceptada por la comunidad matemática es la dada por R. L. E. Schwarzenberger en [12], 1974.

Ahora, ¿cuál es la diferencia entre los grupos del papel pintado y los grupos de frisos? Recordemos que la condición para los grupos de frisos es que posean una traslación. En el caso de los grupos del papel pintado, la condición necesaria es que sean dos traslaciones independientes, es decir, traslaciones cuya dirección no sea paralela ni opuesta.

Definición 3.6.1 Un subgrupo G de \mathbb{R}^2 es un grupo del papel pintado si su subgrupo de traslaciones es generado por dos traslaciones independientes y su grupo puntual es finito.

Anteriormente introdujimos el concepto de retículas, las cuales servían para distinguir a una teselación periódica de una no periódica. En este caso, las retículas también sirven para clasificar los grupos del papel pintado.

Definición 3.6.2 La retícula L (de “lattice”) de un grupo del papel pintado G , es el conjunto de todos los puntos en \mathbb{R}^2 , tal que el origen O es mapeado por las funciones del subgrupo de traslaciones T de G .

Proposición 3.6.3 El conjunto L consiste en todas las combinaciones $mu + nv$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $u, v \in \mathbb{R}^2$ tales que son los vectores del subgrupo de traslaciones de G .

Existen cinco tipos diferentes de retículas de acuerdo a la forma del paralelogramo determinado por los vectores u y v [2]:

- Oblicua: $\|u\| < \|v\| < \|u - v\| < \|u + v\|$
- Rectangular: $\|u\| < \|v\| < \|u - v\| = \|u + v\|$
- Rectangular centrada: $\|u\| < \|v\| = \|u - v\| < \|u + v\|$

¹⁴Foto de Xinyu Zhang en Unsplash.

- Cuadrada: $\|u\| = \|v\| < \|u - v\| = \|u + v\|$

- Hexagonal: $\|u\| = \|v\| = \|u - v\| < \|u + v\|$

Existen diversas maneras de denotar a los grupos del papel pintado. Una de ellas es la notación orbifold desarrollada por J. H Conway, la cual no se basa en la cristalografía sino en la topología. Sin embargo, utilizaremos la notación más popular, la notación IUC o de Hermann-Mauguin.

La notación es la siguiente: iniciando con **p** o **c**, para denotar a una celda primitiva o celda centrada.¹⁵ Después, se sigue un dígito **n**, que indica el máximo orden de rotación. Los siguientes símbolos pueden ser: **m** para indicar reflexión, **g** para indicar reflexión deslizada o 1 para indicar que no hay alguna. El último símbolo representa un eje de simetría en el ángulo α al eje de traslación principal.¹⁶ Además, si el tercer o cuarto símbolo se omiten, significa que no hay reflexiones ni reflexiones deslizadas. Por ejemplo:

p2: celda primitiva y rotación doble.

p4g: celda primitiva, un cuarto de rotación y un semigiro.

Con estas bases ya podemos exhibir cada uno de los elementos de los 17 grupos.

El grupo más sencillo es **p1**, este es generado por dos traslaciones T_v, T_u , donde $u, v \in \mathbb{R}^2$ vectores no nulos e independientes entre sí. Es un grupo debido a que el inverso de una traslación es una traslación y el producto de dos traslaciones, es una traslación. Su retícula es un paralelogramo por lo que sus ejes de traslación pueden tener un ángulo.

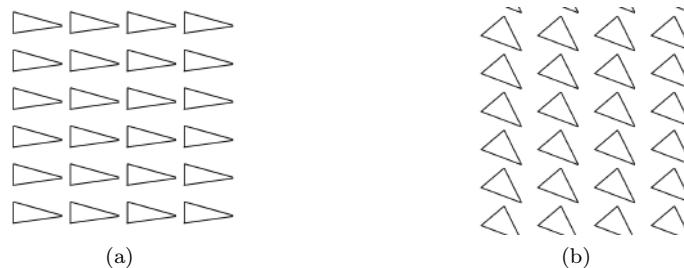


Figura 3.77: Grupo p1.

El siguiente grupo es **p2**. Este difiere del anterior en que contiene un semigiro, es decir, una rotación de orden dos (180°). Su retícula es un paralelogramo por lo que sus ejes de traslación pueden tener un ángulo.

¹⁵Una celda primitiva contiene puntos de la retícula únicamente en sus vértices, mientras que las celdas centradas tiene puntos de la retícula en sus vértices y uno en su centro.

¹⁶Llamamos “eje de traslación principal” a un eje horizontal.

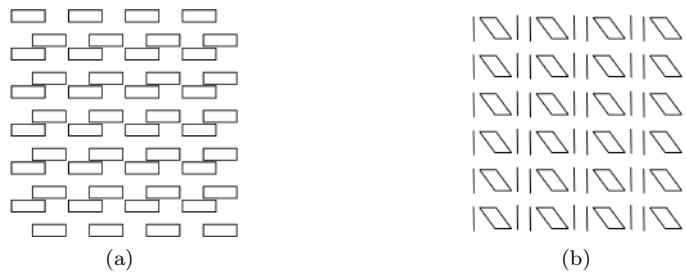


Figura 3.78: Grupo p2.

El grupo **pm** contiene, aparte de las traslaciones independientes, reflexiones, donde los ejes de reflexión son paralelos a un eje de traslación y perpendiculares al otro eje de traslación. Su retícula es rectangular.



Figura 3.79: Grupo pm.

El grupo **pg** contiene, aparte de las traslaciones independientes, reflexiones deslizadas. La dirección de la reflexión deslizada es paralela a uno de los ejes de traslación y perpendicular al otro eje de traslación. Su retícula es rectangular.

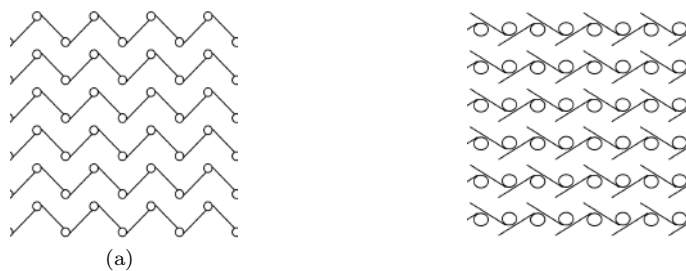


Figura 3.80: Grupo pg.

El grupo **cm** contiene reflexiones y reflexiones deslizadas con ejes paralelos. No hay rotaciones en este grupo y además, las traslaciones pueden estar inclinadas en un ángulo, pero los ejes de reflexión bisectan al ángulo formado por las traslaciones, por lo que la retícula es rómbica.



Figura 3.81: Grupo cm.

El grupo **pmm** contiene reflexiones cuyos ejes son perpendiculares; sus rotaciones son semigiros. Su retícula es rectangular.

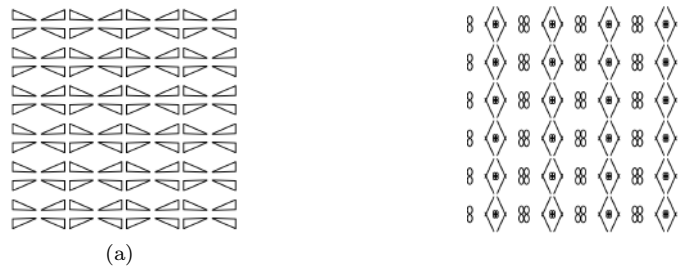


Figura 3.82: Grupo pmm.

El grupo **pmg** contiene reflexiones y reflexiones deslizadas las cuales son perpendiculares al eje de reflexión. Tiene rotaciones de orden dos en los ejes de deslizamiento. Su retícula es rectangular.



Figura 3.83: Grupo pmg.

El grupo **pgg** contiene reflexiones deslizadas y semigiros. Los ejes de la reflexión deslizada son perpendiculares y además, los centros de rotación de los semigiros no caen sobre dichos ejes. Su retícula es rectangular.



Figura 3.84: Grupo pgg.

El grupo **cmm** contiene reflexiones y semigiros, donde los ejes de reflexión son perpendiculares, y además sus rotaciones son de orden dos. Los centros de los semigiros no caen sobre los ejes de reflexión. Su retícula es rómbica.

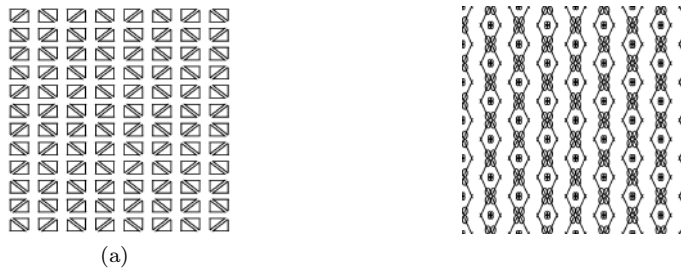


Figura 3.85: Grupo cmm.

El grupo **p4** contiene una rotación de orden 4, es decir, de 90° , además de otras rotaciones de orden 2. Los centros de rotación de los semigiros están ubicados entre los centros de la rotación de orden 4. Su retícula es cuadrada.

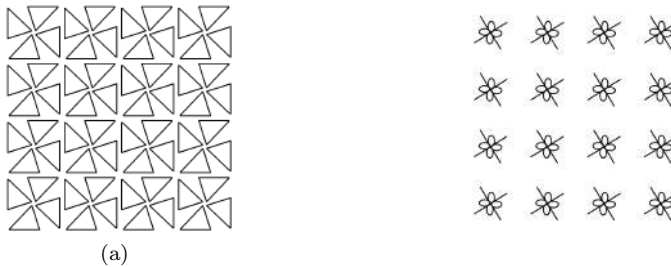


Figura 3.86: Grupo p4.

El grupo **p4m** también contiene los elementos del grupo p4 más reflexiones. El grupo tiene cuatro ejes de reflexión, los cuales están inclinados por 45° de tal manera que los cuatro ejes de reflexión pasen por cada centro de la rotación de orden 4. En este caso, todo centro de rotación cae en algún eje de reflexión. Además, contiene reflexiones deslizadas las cuales pasan por cada semigiro. Su retícula es cuadrada.

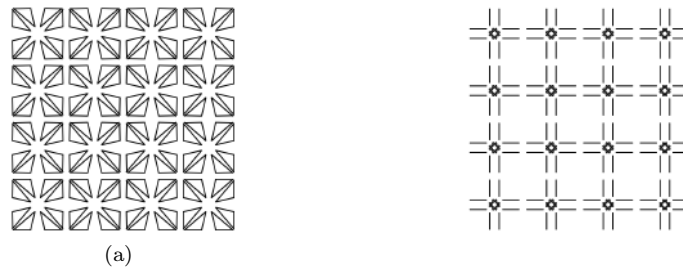


Figura 3.87: Grupo $p4m$.

El grupo $p4g$, al igual que el grupo $p4$, contiene rotaciones de orden 4 y 2, además de reflexiones y reflexiones deslizadas. Los ejes de reflexión son perpendiculares en los ángulos 90° y 180° . Su retícula es cuadrada.

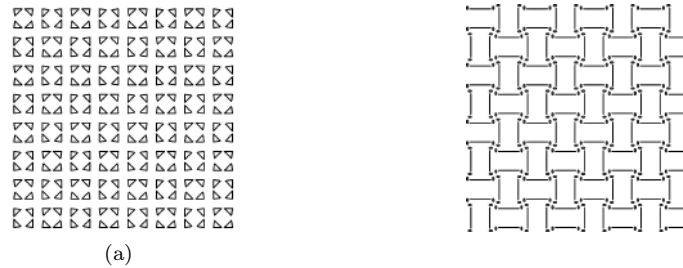


Figura 3.88: Grupo $p4g$.

El grupo $p3$ contiene rotaciones de orden tres, es decir, de 120° . Su retícula es hexagonal.

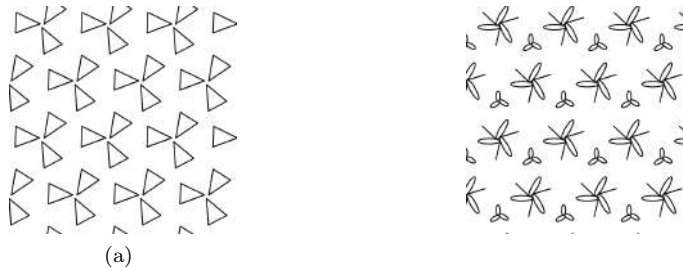


Figura 3.89: Grupo $p3$.

El grupo $p31m$ contiene reflexiones, rotaciones y reflexiones deslizadas. Sus reflexiones son de orden 3 y sus rotaciones de orden 3. Su retícula es hexagonal y los ejes de reflexión son paralelos, por lo que forman triángulos equiláteros. Los ejes de la reflexión deslizada están entre los ejes de reflexión.

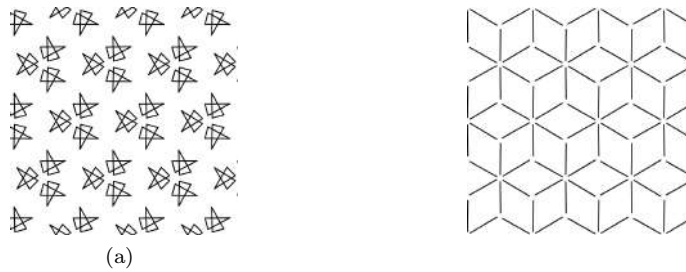


Figura 3.90: Grupo $p31m$.

El grupo $p3m1$ es similar al anterior con la diferencia que todos los centros de rotación caen en los ejes de reflexión. Su retícula es hexagonal.

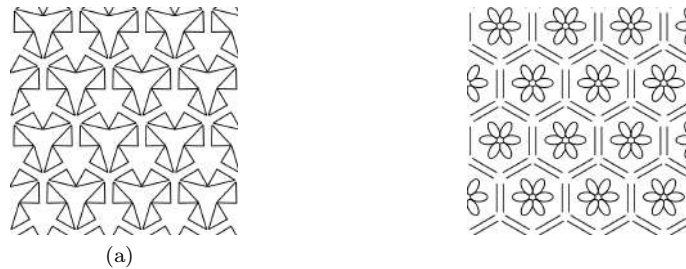


Figura 3.91: Grupo $p3m1$.

El grupo $p6$ contiene rotaciones de orden 6, 3 y 2. Su retícula es hexagonal.

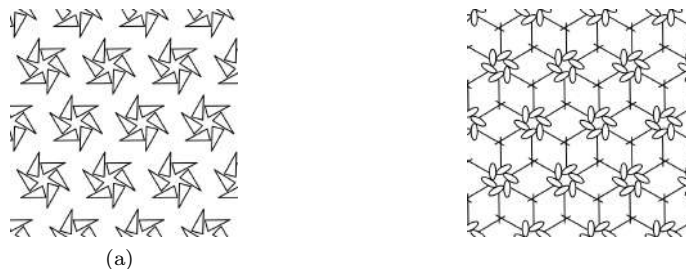


Figura 3.92: Grupo $p6$.

El grupo $p6m$ es el más complejo de todos. Contiene rotaciones de orden 2, 3 y 6, así como reflexiones. Los ejes de reflexión cruzan todos los centros de rotación. Hay también algunas reflexiones deslizadas, donde sus ejes están entre los ejes de reflexión paralelos; estas pasan a través de los centros de rotación de los semigiros. Su retícula es hexagonal.

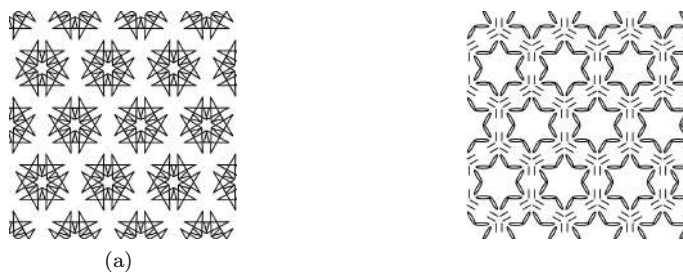


Figura 3.93: Grupo $p6m$.

Como observamos en las figuras anteriores, patrones que a simple vista parecen muy diferentes entre sí llegan a corresponder al mismo grupo. ¿Cómo diferenciamos que, matemáticamente, son iguales? Para esto tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.6.4 [2] Un isomorfismo entre grupos del papel pintado lleva traslaciones a traslaciones, rotaciones a rotaciones, reflexiones a reflexiones y reflexiones deslizadas a reflexiones deslizadas.

Demostración. Sean G_1, G_2 dos grupos de papel pintado, h un isomorfismo entre ellos y T_1 una traslación de G_1 .

$h(T_1)$ es una traslación o una reflexión deslizada, pues estas son de orden infinito. Supongamos que $h(T_1)$ es una reflexión deslizada y consideremos T_2 una traslación de G_2 , tal que esta no conmuta con $h(T_1)$. Si $h(g) = T_2$, entonces g es una traslación o una reflexión deslizada. Luego, g^2 es una traslación y por ende conmuta con T_1 , lo cual nos lleva a una contradicción. Por ende, las traslaciones van a traslaciones y reflexiones deslizadas a reflexiones deslizadas.

Sabemos que las reflexiones son de orden 2 por lo que la imagen de una reflexión bajo isomorfismo es una reflexión o un semigiros. Sea g una reflexión de G_1 y $h(g)$ un semigiros. Tomemos una traslación T_1 de G_1 cuya dirección no es perpendicular al eje de reflexión de g . Luego, T_1g es una reflexión deslizada, pero $h(T_1g) = h(T_1)h(g)$ es un semigiros, con lo cual tenemos una contradicción. Por lo cual las reflexiones van a reflexiones. Finalmente, las rotaciones van a rotaciones.

Además de brindarnos una herramienta para “comparar” los grupos de papel pintado, y tenemos la base suficiente para presentar una pieza clave en la clasificación de estos grupos; esta es llamada la *restricción cristalográfica*:

Teorema 3.6.5 La simetría rotacional de un grupo del papel pintado puede ser únicamente de orden 2, 3, 4 o 6.

Demostración. Supongamos que tenemos una recta de puntos en la retícula $P-O-Q$, donde O es el centro de rotación y P, Q son puntos separados de O mediante una distancia d . A continuación rotamos al punto P por $\frac{2\pi}{n}$ y al punto Q por $\frac{-2\pi}{n}$ alrededor de O , de tal modo que los puntos resultantes P', Q' , están sobre una recta paralela a la recta original. Ya que esta rotación debe preservar la retícula, para que esté en el grupo del papel pintado, la distancia entre P' y Q' debe ser $d' = md$, donde m es un entero. Aplicando trigonometría, $\cos \frac{2\pi}{n} = \frac{md}{2d}$ entonces, $2 \cos \frac{2\pi}{n} = m$. Para que m sea entera debe ocurrir que $\cos \frac{2\pi}{n} = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$, lo cual pasa cuando $n = 1, 2, 3, 4$ o 6.

Gracias al resultado anterior es posible clasificar a los grupos de papel pintado de la siguiente manera:

- Grupos que no poseen simetría rotacional: p1, pg, pm, cm.

Simetría en el plano euclidiano
3.6 Grupos del papel pintado

- Grupos que poseen simetría rotacional de orden 2: p2, pgg, pmm, cmm, pmg.
- Grupos que poseen simetría rotacional de orden 4: p4, p4m, p4g.
- Grupos que poseen simetría rotacional de orden 3: p3, p3m1, p31m.
- Grupos que poseen simetría rotacional de orden 6: p6, p6m.

Para resumir esta información, y con el fin de analizar rápidamente los distintos tipos de papel pintado, presentamos la siguiente tabla la cual es adaptada de [13].

Grupo	Retícula	Rotación Mínima	Reflexión
p1	Paralelogramo	0°	Ninguna
p2	Paralelogramo	180°	Ninguna
pm	Rectangular	Ninguna	Sí
pg	Rectangular	0°	Ninguna
cm	Rómbica	0°	Sí
pmm	Rectangular	180°	Sí
pmg	Rectangular	180°	Sí
pgg	Rectangular	180°	Ninguna
cmm	Rómbica	180°	Sí
p4	Cuadrada	90°	Ninguna
p4m	Cuadrada	90° *	Sí
p4g	Cuadrada	90° +	Ninguna
p3	Hexagonal	120°	Ninguna
p31m	Hexagonal	120° +	Sí
p3m1	Hexagonal	120° *	Sí
p6	Hexagonal	60°	Ninguna
p6m	Hexagonal	60°	Sí

* = Todos los centros de rotación están sobre los ejes de reflexión.

+ = No todos los centros de rotación están sobre los ejes de reflexión.

Capítulo 4

Reflexiones en el plano hiperbólico

En esta tesis desarrollamos el estudio de la simetría desde la geometría euclidiana. Sin embargo, sabemos que hay más de *una* geometría.

La geometría esférica fue la primera *otra* geometría en inventarse. El motivo principal de su invención fue el estudio de los objetos celestes. No es un descubrimiento nuevo pues desde tiempos egipcios y babilónicos los seres humanos ya discutían sobre estos temas. De hecho, fueron los astrónomos babilónicos quienes dividieron la eclíptica en 12 partes iguales, las cuales comprenden exactamente un arco de 30 grados de longitud elíptica. Más tarde, los griegos retomaron esta división, colocando el nombre de algunos de sus dioses y seres mitológicos en cada una de estas 12 partes.

Uno de los primeros trabajos formales sobre el estudio de la esfera es el de Autolycus (siglo IV a.n.e), quien en *On Rotating The Sphere* discute sobre la esfera celeste, además de dar diversas definiciones y 12 proposiciones.

El desarrollo de esta geometría se extendió a lo largo de los siglos. Fue en el siglo XIX que el matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866) hace un análisis profundo sobre esta geometría. Actualmente a este tipo de geometría se le conoce como **Geometría Elíptica** o Riemanniana.

Otro de los tipos de geometría es la **Hiperbólica** o Lobachevskiana. Esta surge a partir del gran debate que trajo consigo el quinto postulado de Euclides. Durante siglos diversos matemáticos trataron de probar dicho postulado o bien, modificarlo. En 1820, la carrera por lograr dicha demostración concluyó cuando Nikolay Lobachevsky (1792-1856) y János Bolyai (1802-1860) publicaron, de manera independiente, modelos en los cuales establecen la posibilidad de una geometría que no incluyera tal postulado.

Ahora bien, con tantas nuevas geometrías llegó un nuevo debate: *¿qué es la geometría?, ¿qué estudia exactamente?* En 1872, Felix Klein (1849-1925) publica el *Programa Erlangen* donde da una solución a estas preguntas. Define de manera formal lo que es la geometría, lo que estudia. Es gracias a este trabajo que actualmente podemos clasificar a las geometrías y a su vez, entenderla de manera general como un todo.

La historia del desarrollo de la Geometría es casi tan hermosa como la Geometría misma. Es un bello ejemplo de cómo la matemática evoluciona a través de los siglos, pasando por las manos de diversos estudiosos y estudiosas. Para aquella persona interesada en indagar más sobre este desarrollo histórico le recomendamos consultar [10] Así mismo, para adentrarse más en el trabajo de Klein recomendamos [5].

M. C. Escher y el geómetra, H.S.M Coxeter, intercambiaron correspondencia sobre la simetría y el infinito. Es en este intercambio que Coxeter muestra a Escher una teselación hiperbólica de su autoría. Con esta ilustración sobrevino una nueva etapa para el artista. Ese pequeño vistazo a la geometría hiperbólica fue suficiente para que Escher creara una serie de cinco obras inspiradas en esta geometría.

De igual manera, las diversas transformaciones isométricas que analizamos en el capítulo 3 pueden estudiarse de forma “general” a través de la propuesta de Klein. Por ejemplo, tanto en el plano euclidiano como en el hiperbólico, los únicos grupos finitos son C_n y D_n , para $n \leq 1$.

Con estos comentarios, queremos establecer que el estudio de la simetría no se limita solo al plano euclidiano.

Capítulo 5

Conclusiones

El objetivo de esta tesis es estudiar y analizar qué es la simetría en un ambiente más formal: el matemático. Para ello, revisamos diversos conceptos pertenecientes a diferentes *ramas* de la matemática, como son: cálculo, geometría o teoría de grupos. Con esto, logramos un análisis matemático de diferentes expresiones artísticas que han estado en la historia de la humanidad desde hace años, como lo son las *rosetas*, los *frisos*, las *teselaciones* y los *papeles tapiz*.

Esta clase de investigación resulta útil no solo para dar a conocer nuevos resultados matemáticos (como las prototeselas pentagonales, las teselaciones demirregulares o las teselaciones aperiódicas), sino que también proporciona herramientas funcionales para la creación de obras visuales estéticamente agradables para el ojo humano, mismas que podemos encontrar en la pintura, escultura, arquitectura e incluso en la cinematografía. Además, permite hacer un análisis detallado de diversas obras artísticas, pues provee las bases para entender el cómo el **arte** se relaciona con la **simetría** para la generación de dichas obras.

Asimismo, esta tesis puede utilizarse como herramienta de **divulgación científica**, pues es un tema que resulta llamativo y es sencillo adaptarlo a diferentes públicos, que pueden ir desde las infancias pertenecientes al último año de primaria hasta personas más versadas en matemáticas.

Bibliografía

- [1] Robert Ammann, Branko Grünbaum, and Geoffrey C Shephard. Aperiodic tiles. *Discrete & Computational Geometry*, 8(1):1–25, 1992.
- [2] Mark A Armstrong. *Groups and symmetry*. Springer Science & Business Media, 1997.
- [3] María Guadalupe Raggi Cárdenas. *Matemáticas básicas: fundamentos y problemas*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico . . . , 2016.
- [4] Matila Costiescu Ghyka. *The geometry of art and life*. Courier Corporation, 1977.
- [5] Marvin J Greenberg. *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. Macmillan, 1993.
- [6] Branko Grünbaum and Geoffrey Colin Shephard. *Tilings and patterns*. Courier Dover Publications, 1987.
- [7] Jay Kappraff. *Connections: The geometric bridge between art and science*, volume 25. World Scientific, 2001.
- [8] George E Martin. *Transformation geometry: An introduction to symmetry*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] Michael Rao. Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane. *arXiv preprint arXiv:1708.00274*, 2017.
- [10] Boris A Rosenfeld. *A history of non-Euclidean geometry: Evolution of the concept of a geometric space*, volume 12. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] Joseph J Rotman. *Advanced modern algebra*, volume 114. American Mathematical Soc., 2010.
- [12] RLE Schwarzenberger. The 17 plane symmetry groups. *The mathematical gazette*, 58(404):123–131, 1974.
- [13] Laura Hidalgo Solís. *Mosaicos*. UNAM, 2007.
- [14] John Stillwell. *The four pillars of geometry*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [15] William Wooton, Edwin F Beckenbach, Andrew M Gleason, and Enrique Daltabuit Gtodas. *Geometría analítica moderna*. Cultural, 1985.