



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análisis teórico-numérico de modos plasmónicos en sistemas
multicapa

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Emmanuel Velázquez Hermenegildo

Asesorado por

Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla Pue.
7 de marzo de 2023



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análisis teórico-numérico de modos plasmónicos en sistemas
multicapa

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Emmanuel Velázquez Hermenegildo

Asesorado por

Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla Pue.
7 de marzo de 2023

Título: Análisis teórico-numérico de modos plasmónicos en sistemas multicapa

Estudiante: EMMANUEL VELÁZQUEZ HERMENEGILDO

COMITÉ

María del Rosario Pastrana Sánchez
Presidente

Emma Vianey García Ramírez
Secretario

Ricardo Téllez Limón
Vocal

Maximino Luis Arroyo Carrasco
Asesor

Agradecimientos

Agradezco profundamente a cada uno de los miembros del jurado por su disposición y tiempo dedicado para la lectura y revisión de este trabajo, así como por sus valiosas observaciones para la realización del presente trabajo.

Agradezco mucho a mi asesor de tesis, el Dr. Arroyo, por sacar lo mejor de mí en las materias que estudié con él, y contagiarme el gusto por el estudio de la luz y su interacción con la materia; por aceptar colaborar con él para el Congreso Nacional de Física en el año 2021, trabajo que fue un preámbulo para el tema desarrollado de este proyecto; por su interminable asesoría, apoyo y orientación durante todo el proceso que llevó escribir esta tesis.

A mis abuelos paternos, quienes me dieron dónde vivir en su casa durante los dos primeros semestres de la licenciatura, a mis abuelos maternos por recibirme siempre con tanto cariño cuando regresaba a mi pueblo, y aunque no entendían sobre qué era mi carrera, me apoyaban de corazón; a mis papás y a mi hermana por apoyarme en cada momento de esta etapa académica en mi vida, que sin su apoyo todo esto no hubiera sido posible.

A todos los que me apoyaron en pequeña o gran medida y olvidé mencionar en este apartado o que no saben que me ayudaron y nunca leerán estas líneas (incluyendo a mis perros, que sin saberlo me ayudaron a mermar el estrés por el que a veces pasaba).

A Mariana, por su interminable apoyo desde que inicié la licenciatura; por siempre estar al pendiente de mi estadía en la ciudad de Puebla y su cariño, por su ayuda tan valiosa en momentos precisos, sus buenos deseos para este proyecto, y por ayudarme en la conversión de este trabajo hecho en LaTeX a HTML.

A Christos e Iván, por seguir siendo cercanos a mí y siempre darme ánimos; mención especial por ayudarme a resolver una dificultad crucial que tuvo este trabajo mientras comíamos tranquilamente.

A los amigos que hice en la universidad, a José Jorge por ser la primera persona con que hablé en mi atropellado primer día de clases y su posterior amistad; a mi gran amigo Beto, por estudiar conmigo y hacer menos pesadas las materias que nos eran difíciles, por darme muchos ánimos en la realización de este proyecto. A todo el “Cru” por hacerme pasar buenos ratos con sus ocurrencias.

A mi mejor amiga, Silvana, por su maravillosa amistad; por siempre invitarme a hacer equipo con ella, por su tiempo y disposición para explicarme y estudiar juntos, por su interminable apoyo dado a lo largo de toda la licenciatura, por impulsarme constantemente a alcanzar metas más altas y por sus ánimos invaluable para la realización de esta tesis; muchas gracias por estar siempre ahí presente sin importar qué, no sé que haría sin tí.

Índice general

Resumen	XI
1. Introducción	1
2. Teoría	3
2.1. Ecuaciones de Maxwell	4
2.1.1. Ecuaciones de Maxwell para la electrostática	4
2.2. La luz en la materia	4
2.2.1. Velocidad de la luz en la materia	4
2.2.2. Polarización	5
2.2.3. Ecuaciones de Maxwell dentro de la materia	6
2.3. Condiciones de frontera para los campos electromagnéticos	7
2.4. Propiedades ópticas de los metales	8
2.4.1. Relaciones constitutivas	8
2.4.2. Función dieléctrica de un gas de electrones libres	10
3. Plasmones Polaritones de Superficie en interfaces metal-dieléctrico	13
3.1. Sistemas de una sola interfaz	13
3.1.1. Ecuación de onda	13
3.1.2. Geometría de propagación	14
3.1.3. Modos electromagnéticos de polarización	16
3.2. Plasmones polaritones de superficie en una interfaz simple	17
3.2.1. Tratamiento sin absorción para los modos TM	17
3.2.2. Tratamiento para los modos TE	19
3.3. Sistemas multicapa	20
3.3.1. Configuraciones del sistema y ecuaciones	21
3.3.2. Relación de dispersión para un sistema multicapa	22
3.3.3. Sistemas multicapa simétricos	23
4. Análisis de la relación de dispersión en una sola interfaz	25
4.1. Tratamiento sin absorción en un sistema de una sola interfaz	25
4.2. Tratamiento con absorción en un sistema de una sola interfaz	28
5. Análisis de la relación de dispersión en un sistema multicapa	33
5.1. Modos plasmónicos	33
5.1.1. Paridad de los modos plasmónicos para sistemas multicapa	33
5.2. Sistemas multicapa simétricos sin absorción	36
5.2.1. Sistema IMI simétrico	36
5.2.2. Sistema MIM simétrico	37
5.3. Sistemas simétricos multicapa con absorción	38
5.3.1. Sistema IMI simétrico	39

5.3.2. Sistema MIM simétrico	40
5.4. Sistemas asimétricos sin absorción	40
5.4.1. Sistema IMI asimétrico	40
5.4.2. Sistema MIM asimétrico sin absorción	41
5.5. Sistemas asimétricos con absorción	42
5.5.1. Sistemas asimétricos IMI	42
5.5.2. Sistema asimétricos MIM	43
6. Análisis numérico	45
6.1. Sistema de una sola interfaz	45
6.1.1. Sistema de una sola interfaz sin absorción	45
6.1.2. Código en Python para un sistema de una sola interfaz sin absorción dentro del metal	46
6.1.3. Sistema de una sola interfaz con absorción	49
6.2. Sistemas multicapa simétricos	51
6.2.1. Sistema tricapa sin absorción	51
6.3. Código en Python para un sistema tricapa simétrico sin absorción dentro del metal	53
6.3.1. Sistema tricapa con absorción	58
6.3.2. Visualización distribución de carga para modos impares e impares	61
7. Conclusiones	63
Bibliografía	65

Índice de figuras

3.1. Geometría de propagación	14
3.2. Configuración IMI y MIM	21
4.1. Longitud de decaimiento $\hat{z}_i$ en una interfaz metal-dieléctrico. Se considera un metal de Drude sin absorción.	26
4.2. Relación de dispersión de los SPP entre un metal sin absorción y aire (curvas negras) y vidrio de sílice (curvas grises).	27
4.3. Relación de dispersión de los SPP para una interfaz aire-oro, aire-plata y aire-cobre con valores reales	30
4.4. Relación de dispersión de los SPP para una interfaz plata-dieléctrico con dos valores para ε_2	30
4.5. Relación de dispersión de los SPP para una interfaz oro-dieléctrico con tres valores para ε_2	31
4.6. Relación de dispersión de los SPP para una interfaz cobre-dieléctrico con tres valores para ε_2	31
5.1. Relación de dispersión para el sistema IMI sin absorción en modos par e impar, con espesores del medio central ($2a$) de 50 nm y 25 nm	37
5.2. Relación de dispersión para el sistema MIM sin absorción en modos par e impar, con espesores del medio central ($2a$) de 50 nm y 25 nm	37
5.3. Relación de dispersión para el sistema IMI con absorción en modos par e impar, con espesores del medio central ($2a$) de 50 nm y 25 nm (valores reales)	39
5.4. Relación de dispersión para el sistema MIM con absorción en modo impar, con espesores del medio central ($2a$) de 50 nm y 25 nm (valores reales)	40
5.5. Relación de dispersión para el sistema IMI asimétrico aire-plata-sílice, con espesores del medio central ($2a$) de 40 nm y 20 nm	41
5.6. Relación de dispersión para el sistema MIM asimétrico oro-aire-plata, con espesores del medio central ($2a$) de 60 nm y 40 nm	41
5.7. Relación de dispersión para el sistema IMI asimétrico $\varepsilon_2 = 1$ - oro - $\varepsilon_3 = 1.1$, con espesor del medio central de 40 nm (valores reales)	42
5.8. Relación de dispersión para el sistema IMI asimétrico $\varepsilon_2 = 1$ - plata - $\varepsilon_3 = 1.1$, con espesor del medio central de 40 nm (valores reales)	42
5.9. Relación de dispersión para el sistema MIM asimétrico plata - aire - oro, con espesor del medio central de 50 nm y 25 nm (valores reales)	43
6.1. Simulaciones del campo eléctrico para una sola interfaz aire-oro sin absorción . . .	48
6.2. Simulaciones del campo eléctrico para una sola interfaz aire-plata sin absorción . .	49
6.3. Simulaciones del campo eléctrico para una sola interfaz aire-oro y aire-plata con absorción a 633 nm	50

6.4. Simulaciones del campo eléctrico para una sola interfaz aire-oro y aire-plata con absorción a 400 nm	51
6.5. Simulación del campo magnético para un sistema tricapa en modo impar IMI aire-oro-aire sin absorción	56
6.6. Simulación del campo eléctrico para un sistema tricapa en modo impar MIM oro-aire-oro sin absorción	56
6.7. Simulación del campo eléctrico para un sistema tricapa en modo par IMI aire-oro-aire sin absorción	57
6.8. Simulación del campo eléctrico para un sistema tricapa en modo par MIM oro-aire-oro sin absorción	58
6.9. Simulación del campo eléctrico para un sistema tricapa en modo par IMI aire-oro-aire con absorción	58
6.10. Simulación del campo eléctrico para un sistema tricapa en modo par IMI aire-oro-aire con absorción	59
6.11. Simulación del campo eléctrico para un sistema tricapa en modo par MIM oro-aire-oro con absorción	59
6.12. Simulaciones del campo eléctrico con absorción para sistemas tricapa con luz incidente a 413 nm.	60
6.13. Dispersión de carga sistema tricapa	61

Resumen

En este trabajo de tesis de licenciatura, centrado en la plasmónica, rama de la nanofotónica, se estudian, deducen y analizan los modos plasmónicos en sistemas multicapa, comenzando por estudiar sus bases siendo las propiedades ópticas de los metales y ecuaciones de Maxwell para el tratamiento de la luz como onda electromagnética. Debido a que en los procesos plasmónicos interviene un gran número de electrones y las dimensiones de las celdas estructurales de los metales son pequeñas en comparación con la longitud de onda de la luz, es posible entender a esta rama de la nanofotónica con base en la teoría electromagnética clásica sin la necesidad de recurrir a la mecánica cuántica.

Posteriormente a revisar las bases, se estudia la manifestación de plasmones polaritones en una sola interfaz, que tiene lugar con la interacción entre la luz y los electrones libres de un metal en una interfaz plana metal-dieléctrico, siendo el caso ideal sin absorción dentro del metal. Se determinan las condiciones de acoplamiento de un campo electromagnético incidente con los electrones libres en un metal para generar los plasmones polaritones como ondas superficiales evanescentes confinadas a la interfaz y se deducen las ecuaciones que rigen dicho fenómeno. Se estudian los casos con y sin absorción para interfaces aire-oro y aire-plata con luz incidente a 633 nm y 400 nm.

Una vez comprendido el caso de una sola interfaz, se procede a desarrollar y estudiar los modos plasmónicos producidos en materiales estratificados, sistemas multicapa, con capas delgadas conductoras y dieléctricas alternadas en diferentes disposiciones, dieléctrico-metal-dieléctrico (IMI, por sus siglas en inglés) y metal-dieléctrico-metal (MIM). Este trabajo se centra en el caso especial donde los materiales superiores e inferiores del sistema son iguales en términos de su respuesta dieléctrica, que da como resultado a dos modos plasmónicos: impar y par, a los cuales se estudia en profundidad.

Para sistemas multicapa se revisan los casos con y sin absorción dentro del metal de la configuración en cuestión, en ambos modos plasmónicos. Se discuten sus propiedades para cada caso.

En las configuraciones de una sola interfaz y de sistemas multicapa, se deducen las relaciones de dispersión, que se grafican para estudiar diferentes características. Se explica cómo se obtienen dichas gráficas.

Con base en las ecuaciones deducidas para una sola interfaz y sistemas multicapa, se presenta un código base en Python, que se puede modificar para simular sistemas de una sola interfaz o sistemas multicapa, con absorción y sin absorción dentro del metal de la configuración, para visualizar el comportamiento del campo eléctrico en los diferentes sistemas y modos.

Capítulo 1

Introducción

Alrededor del principio del siglo XX, los físicos alemanes Sommerfeld y Zenneck estudiaban el problema de las ondas hertzianas, ya que se consideraba un problema fundamental para la física, con importantes aplicaciones para la telegrafía sin cables. Por una parte, Sommerfeld centró su trabajo en la propagación de ondas electromagnéticas a lo largo de un cable [1], complementando los desarrollos de J. J. Thomson, quien ya había trabajado previamente en la teoría de ondas de alambre; por otra parte, Zenneck centró su trabajo en la propagación de onda electromagnéticas a lo largo de la superficie plana de un conductor y su relación con la telegrafía inalámbrica [2]. Ambos científicos estudiaron la influencia del material del conductor sobre las ondas que se propagan sobre estos.

También a principios del siglo XX, de manera independiente, el físico estadounidense Robert W. Wood observaba anómalos comportamientos de la luz en rejillas metálicas, pues a distintos ángulos de incidencia de la luz visible observaba algunos colores pero también repentinas caídas de intensidad en diferentes posiciones [3]; Wood sospechaba que la polarización era la clave para la explicación de tan singular comportamiento, sin embargo, por esos años no se había introducido la polarización a la teoría de rejillas. Posteriormente, en 1941, U. Fano [4] estudió la intensidad de las ondas difractadas por una rejilla de difracción metálica y estableció una relación con las ondas superficiales de Sommerfeld.

En 1950, G. Goubau investigó dos tipos de ondas, siendo el primer tipo las ondas de Sommerfeld. El segundo tipo de ondas, que no habían sido tratadas hasta entonces en la literatura, se trataban de las ondas guiadas por un conductor con una capa dieléctrica externa, o con la superficie del metal modificada, por ejemplo, una superficie roscada, cuya modificación permitía controlar la extensión del campo electromagnético [5].

Posteriormente, en 1968, R. H. Ritchie analizó anomalías encontradas en la intensidad de luz en rejillas de difracción, dicho análisis, fue pensado ya en términos de la interacción entre fotones y la superficie del metal [6]. En ese mismo año Kretschmann y Raether lograron la excitación de ondas de superficie de Sommerfeld a través de un método conocido como acoplamiento de prisma (este método, que es uno de varios, lleva el nombre de Kretschmann) [7], el cual consiste básicamente en producir lo que hoy se conoce como plasmones polaritones aprovechando el fenómeno de reflexión total interna mediante el uso de un prisma de material dieléctrico y una placa conductora delgada, logrando así una descripción unificada de los fenómenos de pérdida de intensidad en la luz observados desde inicios del siglo XX por Wood y los trabajos contemporáneos de Sommerfeld y Zenneck.

Para la generación de plasmones polaritones de superficie se requiere la interacción de la luz con un metal, viajando la luz originalmente dentro de un dieléctrico, pero la plasmónica va más allá de la interacción entre estrictamente dos materiales, un dieléctrico y un conductor, pues se puede agregar una (o más capas) a una configuración metal-dieléctrico, dejando emparedada una delgada capa metálica o dieléctrica, dando lugar a sistemas más complejos con nuevas aplicaciones.

Por ejemplo, agregando una capa adicional a la configuración Kretschmann, es decir, formando un sistema multicapa, en 1989 los japoneses K. Matsubara, S. Kawata, y S. Minami diseñaron un sistema de resonancia plasmónico superficial multicapa para aplicaciones de sensores químicos de alta precisión [8].

Durante años la investigación sobre este campo se centró en la región visible del espectro electromagnético, fue hasta inicios del XXI que se tuvo un redescubrimiento en este campo para otros dominios del espectro, como las ondas de microondas [9]. Actualmente la excitación de plasmones en una sola interfaz y sistemas multicapa estratificados son clave para la plasmónica debido al interés de las aplicaciones prácticas y tecnológicas, por ejemplo, en biología (detección de virus), telecomunicaciones (guías de onda y tarjetas telefónicas), celdas fotovoltaicas o solares, entre otros [10].

Capítulo 2

Teoría

Ondas armónicas

Las ondas que tienen una forma simple, cuyo perfil es un seno o coseno, son llamadas *ondas armónicas*.

Sea un perfil de onda dado por la función:

$$\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x) = A \sin kx = f(x), \quad (2.1)$$

k es una constante positiva conocida como *número de onda*, cuyas unidades son m^{-1} , por lo cual, el producto kx está en radianes. El seno (o coseno) varía entre $+1$ y -1 , por lo que la función puede tener un valor máximo de A , dicho valor es conocido como *amplitud de la onda*.

En una onda armónica, se tendrá que dicha onda es periódica tanto en el espacio como en el tiempo. El periodo espacial de una onda es conocido como la *longitud de onda* y se denota por λ .

Un incremento o decremento en x por la cantidad de λ debería dejar a (2.1) inalterada, lo cual es equivalente a alterar el argumento de la función en $\pm 2\pi$, así:

$$|k\lambda| = 2\pi,$$

pero considerando que k y λ son números positivos:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.2)$$

Esta ecuación es de suma importancia, pues indica que la longitud de onda es inversamente proporcional al número de onda.

El *periodo* es el número de unidades de tiempo por onda, cuyo inverso es la *frecuencia temporal* ν , o el número de ondas por unidad de tiempo:

$$\nu = \frac{1}{\tau}, \quad (2.3)$$

que está en unidades de Hertz.

La ecuación que relaciona la velocidad de la luz con la frecuencia y longitud de onda de la luz es:

$$v = \nu\lambda. \quad (2.4)$$

Otra cantidad importante a mencionar es la frecuencia temporal angular [11]:

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu. \quad (2.5)$$

2.1. Ecuaciones de Maxwell

En esta sección se repasa a las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial e integral.

2.1.1. Ecuaciones de Maxwell para la electrostática

De las cuatro ecuaciones de la electrodinámica, las dos correspondientes a la electrostática son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad (2.6)$$

conocida como la ley de Gauss, y

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}. \quad (2.7)$$

Por otra parte, las dos ecuaciones correspondientes a la magnetostática son

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.8)$$

y la llamada ley de Ampère

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (2.9)$$

La primera de las constantes que aparece en las ecuaciones de Maxwell es la permitividad eléctrica en el vacío, que tiene un valor aproximado de:

$$\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m},$$

mientras que la segunda constante, la permeabilidad magnética en el vacío, tiene un valor aproximado de:

$$\mu_0 \approx 1.257 \times 10^{-6} \text{ H/m}.$$

Ecuaciones de Maxwell para la electrodinámica

Se tienen dos puntos importantes para la electrodinámica:

- Un campo magnético cambiante induce un campo eléctrico
- Un campo eléctrico cambiante induce un campo magnético

Tomando en cuenta esos dos puntos, se puede considerar la ley de inducción electromagnética de Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Nótese que la ecuación (2.7) es un caso especial de la ley de Faraday.

Maxwell corrigió la ley de Ampère, apareciendo así un término adicional al lado derecho de la ecuación (2.9):

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.11)$$

2.2. La luz en la materia

2.2.1. Velocidad de la luz en la materia

Se puede demostrar [11] que las cuatro ecuaciones de Maxwell para el vacío pueden ser manipuladas para obtener dos expresiones vectoriales que son vitales para el estudio de la luz como onda electromagnética:

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.12)$$

y

$$\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (2.13)$$

Cada componente de (2.12) y (2.13) obedece a la ecuación diferencial escalar de onda:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (2.14)$$

con la condición de que:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad (2.15)$$

donde c es la constante universal de la velocidad de la luz.

Considerando un dieléctrico homogéneo, isótropo y libre de cargas externas, la velocidad de fase en el medio para la onda es:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (2.16)$$

La razón de la velocidad de una onda electromagnética en el vacío con respecto a la velocidad de la luz en un medio se conoce como el *índice de refracción absoluto*:

$$n \equiv \frac{c}{v} = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (2.17)$$

En este trabajo sólo se considera la parte positiva de la ecuación (2.17).

2.2.2. Polarización

Cuando un dieléctrico está inmerso en un campo eléctrico aplicado, la distribución de su carga interna se distorsiona. Esto corresponde a la generación de momentos dipolares eléctricos, que a su vez contribuyen al campo interno total. Visto este efecto sobre un átomo individual, un campo eléctrico orienta el núcleo (positivo) y a los electrones (negativos); en un medio constituido de átomos neutrales, el campo eléctrico inducirá en cada uno de los átomos un pequeño momento dipolar apuntando en la misma dirección del campo.

Al momento dipolar resultante por unidad de volumen en óptica se conoce como *polarizabilidad*.

$$\vec{P} \equiv \text{momento dipolar por unidad de volumen.}$$

Para la mayoría de los materiales $\vec{P}$ y $\vec{E}$ son proporcionales y pueden ser relacionados mediante:

$$(\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} = \vec{P}. \quad (2.18)$$

Es conveniente recordar algunos conceptos relacionados con la carga en un medio: la corriente $\vec{I}$ en un cable es la *carga por unidad de tiempo* pasando por un punto dado, se mide en Coulombs por segundo, o *Ampères* (A). De manera similar, cuando la carga fluye a través de una superficie, es descrita por una densidad de corriente superficial, denotada por $\vec{K}$. De manera análoga, cuando se tiene un flujo de carga distribuido de manera uniforme en una región tridimensional, se describe como *densidad de corriente volumétrica*, denotada por $\vec{J}$, que es la *corriente por unidad de área*. En el caso estático una polarización eléctrica $\vec{P}$ producirá una densidad de carga ligada [12]:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}. \quad (2.19)$$

De manera similar, una polarización magnética $\vec{M}$ resulta en una corriente ligada

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}. \quad (2.20)$$

También, algo que debe considerarse es que en el caso estático, cualquier cambio en la polarización eléctrica involucra un flujo de carga, denotado por $\vec{J}_p$ que se debe incluir en la corriente total:

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (2.21)$$

2.2.3. Ecuaciones de Maxwell dentro de la materia

La densidad de carga total ρ puede ser separada en dos partes:

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}, \quad (2.22)$$

y la densidad de corriente en tres partes:

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_p = \vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (2.23)$$

De manera que la ley de Gauss puede ser escrita como:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}), \quad (2.24)$$

o

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad (2.25)$$

donde

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.26)$$

La ley de Ampère con la corrección de Maxwell puede ser escrita de la siguiente manera

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_p) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

o

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.27)$$

donde

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \quad (2.28)$$

Por lo tanto, en términos de cargas y corrientes libres las ecuaciones de Maxwell son:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_f, & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{aligned}} \quad (2.29)$$

que también son conocidas como las ecuaciones de **Maxwell del electromagnetismo macroscópico**.

Para este trabajo sólo se toman en cuenta medios no magnéticos, puesto que los efectos magnéticos resultantes de la interacción campo electromagnético-materia son despreciables a frecuencias ópticas, por lo cual

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B}. \quad (2.30)$$

La conservación de carga requiere que la carga interna y densidad de corriente sean relacionadas mediante:

$$\vec{J} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (2.31)$$

Esta aproximación tiene la ventaja de que en el campo eléctrico macroscópico se incluyen todos los efectos de polarización, lo cual conduce a

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0}. \quad (2.32)$$

En este trabajo sólo se consideran a medios lineales, isotrópicos y no magnéticos, por lo cual se pueden definir las siguientes relaciones constitutivas:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (2.33)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (2.34)$$

donde ε es llamada la constante dieléctrica o permitividad relativa y $\mu = 1$ la relación de permeabilidad de los medios no magnéticos.

La última relación lineal constitutiva vital para este trabajo es la que existe entre la densidad de corriente interna $\vec{J}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$, definida mediante:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (2.35)$$

donde σ es la conductividad del medio, una constante empírica que varía de un material a otro.

Es importante señalar que las ecuaciones (2.34) y (2.35) sólo son correctas si los medios no presentan dispersión espacial o temporal.

2.3. Condiciones de frontera para los campos electromagnéticos

En general, los campos $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ y $\vec{H}$ serán discontinuos en una frontera entre dos medios diferentes, o en una superficie que posea una densidad de carga σ o una densidad de corriente $\vec{K}$. La forma explícita de estas discontinuidades pueden ser deducidas de las ecuaciones de Maxwell (2.29) en su forma integral:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{f_{enc}}, \quad (2.36)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0, \quad (2.37)$$

donde $Q_{f_{enc}}$ es la carga libre encerrada en un volumen.

Las dos ecuaciones anteriores aplican sobre cualquier superficie cerrada S , mientras que

$$\oint_{\mathcal{P}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}, \quad (2.38)$$

$$\oint_{\mathcal{P}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{f_{enc}} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{a}, \quad (2.39)$$

aplican para cualquier superficie encerrada por un bucle cerrado $\mathcal{P}$. $I_{f_{enc}}$ es la corriente libre encerrada en la trayectoria de integración.

Aplicando (2.36) y (2.37) a una superficie gaussiana (una pequeña caja de pastillas) que se extiende apenas dentro de dos medios distintos, se obtienen dos condiciones de frontera:

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_f, \quad (2.40)$$

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0, \quad (2.41)$$

donde el superíndice $\perp$ indica que se trata de los componentes perpendiculares a la interfaz.

Por otra parte, un bucle amperiano muy delgado a lo largo de una superficie aplicado a (2.38), donde el límite del ancho del bucle tienda a cero, se obtiene otra condición de frontera:

$$\vec{E}_1^{\parallel} - \vec{E}_2^{\parallel} = \vec{0}. \quad (2.42)$$

Siguiendo un razonamiento similar para (2.39), se llega a la última condición de frontera:

$$\vec{H}_1^{\parallel} - \vec{H}_2^{\parallel} = \vec{K}_f \times \hat{n}, \quad (2.43)$$

donde el superíndice $\parallel$ indica que se trata de los componentes paralelos a la interfaz.

Las ecuaciones (2.40-2.43) son las condiciones de frontera generales para la electrodinámica. En el caso de medio lineales, pueden ser expresados en términos de $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Además, si no hay carga o corriente libres en la interfaz, entonces

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_1 E_1^{\perp} - \varepsilon_2 E_2^{\perp} &= 0, & \vec{E}_1^{\parallel} - \vec{E}_2^{\parallel} &= \vec{0}, \\ B_1^{\perp} - B_2^{\perp} &= 0, & \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^{\parallel} &= \vec{0}. \end{aligned}} \quad (2.44)$$

Las ecuaciones (2.44) son la base de toda la plasmónica.

2.4. Propiedades ópticas de los metales

2.4.1. Relaciones constitutivas

En los metales, la respuesta óptica depende de la frecuencia, así que se debe tomar en cuenta la no-localidad en el espacio y tiempo generalizando las ecuaciones lineales a:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \int dt' d\vec{r}' \varepsilon(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{E}(\vec{r}', t'), \quad (2.45)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \int dt' d\vec{r}' \sigma(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{E}(\vec{r}', t'), \quad (2.46)$$

$\varepsilon_0 \varepsilon$ y σ por lo tanto, describen la respuesta al impulso de la respectiva relación lineal.

Las ecuaciones (2.45) y (2.46) se simplifican de manera significativa al tomar la transformada de Fourier con respecto a $\int dt d\vec{r} e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r}' - \omega t)}$, convirtiendo a las convoluciones en multiplicaciones bajo el siguiente teorema:

Sean $F(t)$ y $G(t)$ las transformadas de Fourier de dos funciones f y g , respectivamente, se cumple que:

$$(f * g)^T(t) = G(t)F(t), \quad (2.47)$$

donde $(f * g)$ es la convolución de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ [13].

Lo anterior, quiere decir que la transformada de Fourier de una convolución es igual al producto de las transformadas de Fourier de las funciones f y g .

Esto conduce a las relaciones constitutivas en el dominio de Fourier:

$$\vec{D}(\vec{K}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{K}, \omega) \vec{E}(\vec{K}, \omega), \quad (2.48)$$

$$\vec{J}(\vec{K}, \omega) = \sigma(\vec{K}, \omega) \vec{E}(\vec{K}, \omega). \quad (2.49)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (2.26), (2.31), (2.48) y (2.49) y dado que en el dominio de Fourier $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$, se llega a la relación fundamental entre la permitividad relativa (que de ahora en adelante será llamada *función dieléctrica*) y la conductividad:

$$\varepsilon(\vec{K}, \omega) = 1 + \frac{i\sigma(\vec{K}, \omega)}{\varepsilon_0 \omega}. \quad (2.50)$$

En la interacción de luz con metales, la forma general de la respuesta dieléctrica $\varepsilon(\omega, \vec{K})$ puede ser simplificada al límite de respuesta espacialmente local mediante $\varepsilon(\vec{K} = \vec{0}, \omega) = \varepsilon(\omega)$ [9]. La simplificación es válida siempre y cuando la longitud de onda λ en el material sea significativamente más grande que todas las dimensiones características del material, por ejemplo, las celdas estructurales del metal.

La característica sobresaliente de los materiales conductores es la presencia de cargas eléctricas libres (es decir, son capaces de circular por dentro del material), siendo los electrones libres en el caso de los metales. Estos electrones constituyen una corriente, y como se mencionó previamente, la corriente por unidad de área está relacionada con la conductividad del medio por la ecuación (2.35). Para los dieléctricos no hay electrones libres o de conducción y $\sigma = 0$, mientras que para los metales reales la conductividad es diferente de cero ($\sigma \neq 0$) y finita.

Un conductor perfecto idealizado tendría una conductividad infinita, lo que equivale a decir que los electrones, impulsados a oscilar por una onda armónica, simplemente seguirían las alteraciones del campo, es decir, no habría fuerza de absorción. En la realidad, los electrones libres sufren de colisiones con la red agitada térmicamente o con imperfecciones, y al hacerlo, convierten de manera irreversible la energía electromagnética en calor. *La absorción de energía por un material es una función de su conductividad.*

Al aplicar el rotacional a la ecuación (2.10) se obtendrá lo siguiente:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right),$$

particularmente, para un medio libre de carga, donde $\rho = 0$, se tiene:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.51)$$

El cambio de $\vec{E}$ con el tiempo genera un voltaje, las corrientes circulan, lo que provoca que en un material resistivo la luz se convierta en energía térmica y que haya absorción. Esta expresión puede reducirse a la ecuación de onda no atenuada si la permitividad se reformula como una cantidad compleja, lo que lleva al índice de refracción complejo, que es equivalente a decir absorción:

$$\tilde{n} = n + i\kappa, \quad (2.52)$$

κ es llamado el coeficiente de extinción y determina la absorción óptica de las ondas electromagnéticas propagándose en un medio [11].

En general

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_r(\omega) + i\varepsilon_i(\omega), \quad (2.53)$$

y

$$\sigma(\omega) = \sigma_r(\omega) + i\sigma_i(\omega), \quad (2.54)$$

son funciones complejas que dependen de la frecuencia angular ω , relacionadas mediante la ecuación (2.50).

A frecuencias ópticas, ε puede ser determinado experimentalmente, por ejemplo, mediante estudios de reflectividad y la determinación del índice de refracción complejo $\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega)$ del medio, definido como $\tilde{n} = \sqrt{\varepsilon}$. Esto conduce a las siguientes relaciones:

$$\varepsilon_r = n^2 - \kappa^2, \quad (2.55)$$

$$\varepsilon_i = 2n\kappa, \quad (2.56)$$

$$n^2 = \frac{\varepsilon_r}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2}, \quad (2.57)$$

κ se relaciona con el coeficiente absorción de la Ley de Beer, la cual describe la atenuación exponencial de la intensidad de un haz propagándose dentro de un medio. Esta ley está escrita en términos de la irradiancia, donde la irradiancia es proporcional al cuadrado de la amplitud

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}, \quad (2.58)$$

donde

$$\alpha(\omega) = \frac{2\kappa(\omega)\omega}{c}. \quad (2.59)$$

Por lo tanto, la parte imaginaria ε_2 de la función dieléctrica determina la cantidad de absorción dentro del medio.

2.4.2. Función dieléctrica de un gas de electrones libres

En un amplio rango de frecuencias, las propiedades ópticas de los metales pueden ser explicadas mediante un *modelo de plasma*, donde un gas de electrones de densidad numérica n se mueve contra un fondo fijo de núcleos de iones positivos. Los electrones oscilan en respuesta a un campo electromagnético aplicado, y su movimiento es amortiguado mediante colisiones ocurriendo a una frecuencia de colisión característica $\gamma = \frac{1}{\tau}$. τ es conocido como el tiempo de relajación del gas de electrones, que suele ser del orden de 10^{-14} s a temperatura ambiente, correspondiendo a $\gamma = 100$ THz.

Se puede escribir una ecuación simple para el movimiento de un electrón en el mar de plasma sujeto a un campo eléctrico $\vec{E}$ externo:

$$m\ddot{\vec{x}} + m\gamma\dot{\vec{x}} = -e\vec{E}. \quad (2.60)$$

donde $m \approx 9.1 \times 10^{-31}$ kg es la masa de un electrón, y $e \approx -1.6 \times 10^{-19}$ C es la carga elemental del electrón.

Suponiendo dependencia temporal $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ del campo incidente, una solución particular de la ecuación es $x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$. La amplitud compleja x_0 incorpora cualquier cambio de fase entre el campo incidente y la respuesta mediante:

$$\vec{x}(t) = \frac{e}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)} \vec{E}(t). \quad (2.61)$$

Los electrones desplazados contribuyen a la polarización macroscópica $\vec{P} = -ne\vec{x}$, explícitamente dado por

$$\vec{P} = -\frac{ne^2}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)} \vec{E}, \quad (2.62)$$

Se inserta esta expresión para $\vec{P}$ en la ecuación (2.26):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \right) \vec{E}, \quad (2.63)$$

donde

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}, \quad (2.64)$$

es la *frecuencia de plasma* del gas de electrones libres. Así se llega al resultado deseado, la función dieléctrica del gas de electrones libres:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (2.65)$$

Los componentes reales e imaginarios de esta función dieléctrica están dados por:

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (2.66)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega (1 + \omega^2 \tau^2)}, \quad (2.67)$$

donde se usó $\gamma = \frac{1}{\tau}$.

La ecuación (2.65) puede ser estudiada en diferentes regímenes de frecuencias, pero este trabajo se limita a frecuencias tales que $\omega < \omega_p$, donde los metales retienen su carácter metálico. Para grandes frecuencias, cercanas a ω_p , el producto $\omega\tau \gg 1$, obteniendo así amortiguamiento despreciable. En este caso, $\varepsilon(\omega)$ es predominantemente real, de manera que

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (2.68)$$

puede ser tomada como la función dieléctrica del plasma de electrones libres sin amortiguación. La función dieléctrica del gas de electrones libres (2.65) también es conocida como el modelo de Drude de la respuesta óptica de los metales [9].

Capítulo 3

Plasmones Polaritones de Superficie en interfaces metal-dieléctrico

Los plasmones polaritones de superficie son excitaciones electromagnéticas que se propagan en la interfaz entre un metal y un dieléctrico confinadas de forma evanescente en la dirección perpendicular. Estas ondas “híbridas” surgen mediante el acoplamiento del campo electromagnético de la luz a las oscilaciones del plasma de electrones del conductor.

3.1. Sistemas de una sola interfaz

3.1.1. Ecuación de onda

Para analizar las propiedades físicas de los plasmones polaritones de superficie, se aplican las ecuaciones de Maxwell (2.29) a un problema de condiciones de frontera donde se tiene una interfaz plana entre un conductor y un dieléctrico, a la cual se llamará interfaz simple. Se combinarán las ecuaciones en una forma general aplicable para la guía de ondas electromagnéticas, la *ecuación de onda*.

En la ausencia de carga y densidad de corriente, se combina el rotacional de las ecuaciones (2.10) y (2.11) para obtener:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}. \quad (3.1)$$

Haciendo uso de las siguientes identidades:

- $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E},$
- $\nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \vec{E} \cdot \nabla \varepsilon + \varepsilon \nabla \cdot \vec{E},$

y recordando que debido a la ausencia de estímulos externos $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, (3.1) puede ser reescrita como

$$\nabla \left(-\frac{1}{\varepsilon} \vec{E} \cdot \nabla \varepsilon \right) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (3.2)$$

Para variaciones despreciables del perfil dieléctrico $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$ sobre distancias del orden de una longitud de onda óptica, (3.2) puede ser simplificada a la ecuación central de la teoría de ondas electromagnéticas:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.3)$$

Esta ecuación debe ser resuelta en regiones separadas de ε constante; para tenerla en una forma adecuada para la descripción de ondas confinadas que se propagan, se supone una dependencia armónica del tiempo del campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$, de manera que al insertar en (3.3), se obtiene

$$\nabla^2 \vec{E} + k_0^2 \varepsilon \vec{E} = 0, \quad (3.4)$$

donde $k_0 = \frac{\omega}{c}$, que es el vector de onda de la onda propagándose en el vacío. Esta ecuación es conocida como la *ecuación de Helmholtz*.

3.1.2. Geometría de propagación

Ahora, se define la geometría de propagación de los plasmones polaritones de superficie en una interfaz simple. Por simplicidad, se supone un problema de una dimensión, por ejemplo, ε sólo depende de una coordenada espacial. Las ondas se propagan a lo largo de la dirección x de un sistema de coordenadas cartesiano, y no muestran variación en la dirección y , de manera que $\varepsilon = \varepsilon(z)$. Para $z > 0$ se tiene el medio dieléctrico, con una constante dieléctrica ε_2 real y positiva, mientras que para $z < 0$ se tiene el medio conductor, con función dieléctrica $\varepsilon_1(\omega)$.

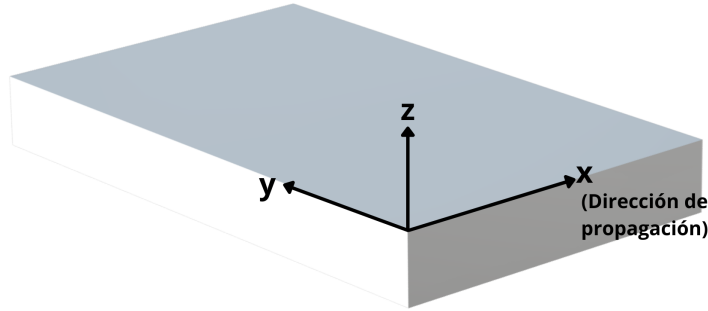


Figura 3.1: Geometría de propagación

El plano $z = 0$ coincide con la interfaz que contiene a las ondas que se propagan, las cuales se pueden describir mediante:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(z)e^{i\beta x}. \quad (3.5)$$

Es decir, la expresión completa para el campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(z)e^{i\beta x}e^{-i\omega t} = \vec{E}(z)e^{i(\beta x - \omega t)}. \quad (3.6)$$

Los efectos de derivar parcialmente a (3.6) son:

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{E}(z)e^{i(\beta x - \omega t)} = i\beta \vec{E}(z)e^{i(\beta x - \omega t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \vec{E}(z)e^{i(\beta x - \omega t)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \vec{E}(z)e^{i(\beta x - \omega t)} = \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}(z)e^{i(\beta x - \omega t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(z)e^{i(\beta x - \omega t)} = -i\omega \vec{E}(z)e^{i(\beta x - \omega t)}$$

de lo que se rescatan 3 puntos importantes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= i\beta, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= -i\omega.\end{aligned}\tag{3.7}$$

El parámetro complejo, $\beta = k_x$, es llamado *constante de propagación* de las ondas que se propagan, y corresponde al vector de onda en la dirección de propagación. Insertando (3.5) en la ecuación de Helmholtz se obtiene la forma deseada de la ecuación de onda, una ecuación de onda espacial:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(z)}{\partial z^2} + (k_0^2 \varepsilon - \beta^2) \vec{E} = 0.\tag{3.8}$$

Naturalmente, existe una ecuación análoga para el campo magnético $\vec{H}$. La ecuación (3.8) es el punto de partida para el análisis de modos electromagnéticos en guías de ondas.

Es necesario encontrar expresiones explícitas para todas las componentes de los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$, para lo cual simplemente se hace uso del rotacional de las ecuaciones (2.10) y (2.27). Se recuerda que:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

donde $\vec{F}$ es un campo vectorial. Además, dado que se trata con medios lineales y no magnéticos:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Primero, (2.10):

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= i\omega \mu_0 H_x,\end{aligned}\tag{3.9}$$

de manera similar para cada componente:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega \mu_0 H_y,\tag{3.10}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega \mu_0 H_z,\tag{3.11}$$

Siguiendo un razonamiento similar con (2.27):

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{\partial D_x}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_x,\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_y,\tag{3.13}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_z.\tag{3.14}$$

Tomando en consideración a (3.7), las ecuaciones (3.9-3.14) se reducen a:

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu_0 H_x, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - i\beta E_z = i\omega\mu_0 H_y, \quad (3.16)$$

$$i\beta E_y = i\omega\mu_0 H_z, \quad (3.17)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - i\beta H_z = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y, \quad (3.19)$$

$$i\beta H_y = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z. \quad (3.20)$$

3.1.3. Modos electromagnéticos de polarización

Se puede demostrar que este sistema de ecuaciones permite dos conjuntos de soluciones auto-consistentes con diferentes propiedades de polarización de las ondas que se propagan. El primer conjunto son los modos magnéticos transversales, llamados **TM** o **p** (por *parallel*, que significa paralelo en alemán), donde sólo los componentes de campo E_x , E_z y H_y son diferentes de cero, perteneciendo a este modo las ecuaciones (3.16), (3.18) y (3.20); el segundo conjunto son los modos eléctricos transversales, llamados **TE** o **s** (por *senkrecht*, que significa perpendicular en alemán), donde sólo los componentes de campo H_x , H_z y E_y son diferentes de cero, al cual le corresponden las ecuaciones (3.15), (3.17) y (3.19).

Modos TM

Para los modos TM, de (3.18) y (3.20) se despejan los componentes del campo eléctrico:

$$E_x = -i\frac{1}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad (3.21)$$

$$E_z = -\frac{\beta}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} H_y, \quad (3.22)$$

y se sustituyen en (3.16) para obtener la ecuación de onda para los modos TM

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + (k_0^2\varepsilon - \beta^2) H_y = 0. \quad (3.23)$$

Modos TE

Para los modos TE, de (3.15) y (3.17) se despejan los componentes del campo magnético:

$$H_x = i\frac{1}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (3.24)$$

$$H_z = \frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y, \quad (3.25)$$

y se sustituyen en (3.19) para obtener la ecuación de onda para los modos TE

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + (k_0^2\varepsilon - \beta^2) E_y = 0. \quad (3.26)$$

Solución de las ecuaciones de onda para los modos TM y TE

Nótese que (3.23) y (3.26) son similares, ambas tienen la forma

$$\frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} - k^2 F_y = 0,$$

donde se define $(k_0^2 \varepsilon - \beta^2) = -k^2$.

Se propone que la solución a la ecuación de onda sea de la forma $F_y = e^{i\beta x} e^{\lambda z}$, lo que lleva a dos posibles resultados:

$$\lambda_1 = k, \quad \lambda_2 = -k.$$

Entonces, la solución general a la ecuación de onda es:

$$F_y = A_1 e^{i\beta x} e^{kz} + A_2 e^{i\beta x} e^{-kz}, \quad (3.27)$$

cuyas soluciones particulares son

$$\begin{aligned} F_y &= A_1 e^{i\beta x} e^{kz}, \\ F_y &= A_2 e^{i\beta x} e^{-kz}. \end{aligned}$$

Se elige una solución particular, de manera que las ondas decaigan al alejarse de la interfaz. Para el medio dieléctrico en la región $z > 0$:

$$F_y = A_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 z}, \quad (3.28)$$

mientras que para el metal en la región $z < 0$

$$F_y = A_1 e^{i\beta x} e^{k_1 z}. \quad (3.29)$$

3.2. Plasmones polaritones de superficie en una interfaz simple

La geometría más simple para plasmones polaritones de superficie es aquella interfaz plana descrita en la figura (3.1), ubicada entre un medio espacio no absorbente ($z > 0$) con constante dieléctrica positiva ε_2 y un espacio conductor adyacente ($z < 0$) descrito mediante una función dieléctrica $\varepsilon_1(\omega)$. El requerimiento para que un material tenga su carácter metálico es $\text{Re}[\varepsilon_1] < 0$. Para los metales, esta condición se mantiene a frecuencias ω inferiores a la frecuencia de plasma ω_p . Se buscan soluciones de ondas que se propaguen confinadas a la interfaz, por ejemplo, con decaimiento evanescente conforme se alejan de la interfaz en la dirección z .

3.2.1. Tratamiento sin absorción para los modos TM

Para el medio dieléctrico $z > 0$ se toma la ecuación (3.28) para el componente H_y del campo magnético

$$H_y = A_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 z}, \quad (3.30)$$

y se sustituye en (3.21) y (3.22) para obtener

$$E_x(z) = iA_2 \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} k_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 z}, \quad (3.31)$$

$$E_z(z) = -A_2 \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} e^{i\beta x} e^{-k_2 z}. \quad (3.32)$$

Por otra parte, para el medio metálico $z < 0$ se toma la ecuación (3.29) para el componente H_y del campo magnético

$$H_y = A_1 e^{i\beta x} e^{k_1 z}, \quad (3.33)$$

Plasmones Polaritones de Superficie en interfaces metal-dieléctrico
3.2 Plasmones polaritones de superficie en una interfaz simple

y se sustituye en (3.21) y (3.22)

$$E_x(z) = -iA_1 \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} k_1 e^{i\beta x} e^{k_1 z}, \quad (3.34)$$

$$E_z(z) = -A_1 \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} e^{i\beta x} e^{k_1 z}. \quad (3.35)$$

Conviene resaltar que $k_i \equiv k_{iz}$ ($i = 1, 2$) es el componente del vector de onda perpendicular a la interfaz en los dos medios, cuyo valor recíproco, $\hat{z} = \frac{1}{|k_z|}$, define la longitud de decaimiento evanescente de los campos que son perpendiculares a la interfaz, que cuantifican el confinamiento de la onda. Los dos valores de k_i tienen que ser positivos para que la onda decaiga conforme se aleja de la interfaz.

Condiciones de frontera

Las soluciones tienen que ser iguales en la interfaz $z = 0$ para que los campos se acoplen, con este objetivo, se aplican las condiciones de frontera (2.44).

Se observa la continuidad de $\vec{H}^{\parallel}$:

Para este caso, sólo se tiene que $H_y(z) = H_y^{\parallel}$.

Se iguala (3.30) y (3.33) cuando $z = 0$

$$A_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 a} \Big|_{z=0} = A_1 e^{i\beta x} e^{k_1 a} \Big|_{z=0}$$

$$A_2 e^{i\beta x} e^{-k_2(0)} = A_1 e^{i\beta x} e^{k_1(0)}$$

$$A_2 e^{i\beta x} = A_1 e^{i\beta x}$$

llegando así a una importante conclusión:

$$A_1 = A_2. \quad (3.36)$$

Se observa la continuidad de $\varepsilon_i E_i^{\perp}$ ($i = 1, 2$):

En este caso, $E_z(z) = E_z^{\perp}$.

Se iguala (3.32) y (3.35) cuando $z = 0$

$$-\varepsilon_2 A_2 \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} e^{i\beta x} e^{-k_2 a} \Big|_{z=0} = -\varepsilon_1 A_1 \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} e^{i\beta x} e^{k_1 a} \Big|_{z=0}$$

$$-\varepsilon_2 A_2 \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} e^{i\beta x} e^{-k_2(0)} = -\varepsilon_1 A_1 \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} e^{i\beta x} e^{k_1(0)}$$

tras lo cual se llega a la misma conclusión de que

$$A_1 = A_2.$$

Por último, se observa la continuidad de $\vec{E}^{\parallel}$:

El único componente de $\vec{E}^{\parallel}$ es $E_x(z)$, por lo tanto $E_x(z) = E_x^{\parallel}$.

Se iguala (3.31) y (3.34) cuando $z = 0$

$$iA_2 \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} k_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 a} \Big|_{z=0} = E_x(z) = -iA_1 \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} k_1 e^{i\beta x} e^{k_1 a} \Big|_{z=0}$$

$$iA_2 \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} k_2 e^{i\beta x} e^{-k_2(0)} = E_x(z) = -iA_1 \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} k_1 e^{i\beta x} e^{k_1(0)}$$

$$A_2 \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} k_2 = -A_1 \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} k_1$$

pero dado que $A_1 = A_2$, se llega a la conclusión de que

$$\frac{k_2}{\varepsilon_2} = -\frac{k_1}{\varepsilon_1},$$

o

$$\frac{k_2}{k_1} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (3.37)$$

Es importante señalar que dada nuestra convención para los signos y para que las ondas decaigan conforme se alejan de la interfaz, k_1 y k_2 son cantidades positivas, por lo que en (3.37) se observa que si ε_2 es real y positiva, el confinamiento a la superficie exige que $\text{Re}[\varepsilon_1] < 0$ si $\varepsilon_2 > 0$, lo que se puede interpretar de la siguiente manera: *Las ondas superficiales sólo existen en interfaces entre materiales con signos opuestos en la parte real de sus permitividades dieléctricas, por ejemplo, entre un conductor y un aislante.*

La expresión para H_y tiene que satisfacer la ecuación (3.23), lo que tiene como requisito:

$$k_i^2 = \beta^2 - k_0^2 \varepsilon_i, \quad (3.38)$$

con $i = 1, 2$.

Al elevar al cuadrado (3.37) y sustituir en ella (3.38) considerando ambos medios del espacio, se llega a la que se llamará **relación de dispersión** de SPP que se propagan en la interfaz entre dos medios:

$$\beta = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}. \quad (3.39)$$

3.2.2. Tratamiento para los modos TE

Ahora se observa qué ocurre con los modos TE. Para el medio dieléctrico $z > 0$ se toma la ecuación (3.28) para el componente E_y del campo magnético

$$E_y = A_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 z}, \quad (3.40)$$

y se sustituye en (3.24) y (3.25) para obtener

$$H_x(z) = -iA_2 \frac{1}{\omega \mu_0} k_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 z}, \quad (3.41)$$

$$H_z(z) = A_2 \frac{\beta}{\omega \mu_0} e^{i\beta x} e^{-k_2 z}. \quad (3.42)$$

Por otra parte, para el medio conductor $z < 0$ se toma la ecuación (3.29) para el componente E_y del campo magnético

$$E_y = A_1 e^{i\beta x} e^{k_1 z}, \quad (3.43)$$

y se sustituye en (3.24) y (3.25)

$$H_x(z) = iA_1 \frac{1}{\omega \mu_0} k_1 e^{i\beta x} e^{k_1 z}, \quad (3.44)$$

$$H_z(z) = A_1 \frac{\beta}{\omega \mu_0} e^{i\beta x} e^{k_1 z}. \quad (3.45)$$

De nueva cuenta, las soluciones deben ser iguales cuando $z = 0$, así que se analizan las condiciones de frontera:

Para este caso, sólo se tiene que $H_x(z) = H_x^{\parallel}$.

Se igualan (3.41) y (3.44) cuando $z = 0$

$$\left. -iA_2 \frac{1}{\omega \mu_0} k_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 a} \right|_{z=0} = \left. iA_1 \frac{1}{\omega \mu_0} k_1 e^{i\beta x} e^{k_1 a} \right|_{z=0}$$

$$\begin{aligned}
 -iA_2 \frac{1}{\omega\mu_0} k_2 e^{i\beta x} e^{-k_2(0)} &= iA_1 \frac{1}{\omega\mu_0} k_1 e^{i\beta x} e^{k_1(0)} \\
 -iA_2 \frac{1}{\omega\mu_0} k_2 &= iA_1 \frac{1}{\omega\mu_0} k_1 \\
 -A_2 k_2 &= A_1 k_1
 \end{aligned}$$

llegando así a una relación importante

$$A_1 k_1 + A_2 k_2 = 0. \quad (3.46)$$

Para complementar la relación anterior, ahora se observa la continuidad de $B^\perp$:
Recordando que $B_i = \mu_0 H_i$, se tiene que $\mu_0 H_z(z) = B_z^\perp$.
Se iguala cuando (3.42) y (3.45) cuando $z = 0$

$$\begin{aligned}
 \mu_0 A_2 \frac{\beta}{\omega\mu_0} e^{i\beta x} e^{-k_2 a} \Big|_{z=0} &= \mu_0 A_1 \frac{\beta}{\omega\mu_0} e^{i\beta x} e^{k_1 a} \Big|_{z=0} \\
 \mu_0 A_2 \frac{\beta}{\omega\mu_0} e^{i\beta x} e^{-k_2(0)} &= \mu_0 A_1 \frac{\beta}{\omega\mu_0} e^{i\beta x} e^{k_1(0)}
 \end{aligned}$$

llegando así a una relación similar a la vista para los modos TM

$$A_2 = A_1.$$

Por último, se observa la continuidad de $\vec{E}^\parallel$:
La única componente de $\vec{E}^\parallel$ es $E_y(z)$, por lo tanto $E_y(z) = E_y^\parallel$.
Se iguala cuando (3.40) y (3.43) cuando $z = 0$.

$$\begin{aligned}
 A_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 a} \Big|_{z=0} &= A_1 e^{i\beta x} e^{k_1 a} \Big|_{z=0} \\
 A_2 e^{i\beta x} e^{-k_2(0)} &= A_1 e^{i\beta x} e^{k_1(0)}
 \end{aligned}$$

tras lo cual nuevamente se observa que

$$A_2 = A_1.$$

Esto lleva a la siguiente expresión:

$$A_1(k_1 + k_2) = 0. \quad (3.47)$$

Debido al confinamiento en la interfaz, se requiere que $\text{Re}[k_1] > 0$ y $\text{Re}[k_2] > 0$, esta condición sólo se cumple si $A_1 = A_2 = 0$, que es la amplitud de la onda que se propaga. Por lo tanto, *no existen modos de superficie para la polarización TE*.

3.3. Sistemas multicapa

Ahora se trabaja con los SPP en sistemas multicapa, consistiendo de películas delgadas conductoras y dieléctricas alternadas. Cuando la separación entre interfaces adyacentes es de longitud comparable o más pequeña que la longitud de decaimiento $\hat{z}$ del modo de interfaz, las interacciones entre SPP dan lugar a modos acoplados.

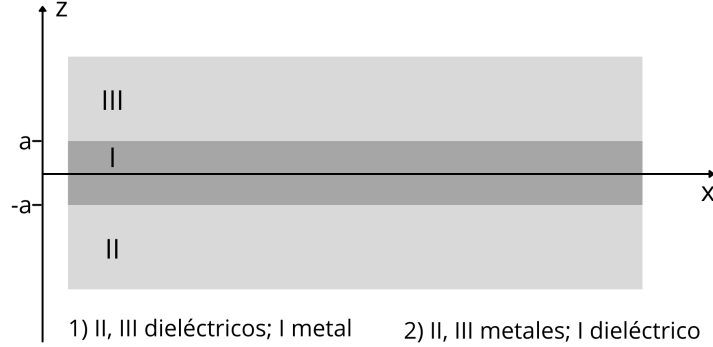


Figura 3.2: Configuración IMI y MIM

3.3.1. Configuraciones del sistema y ecuaciones

Esta sección se enfoca en dos sistemas específicos de tres capas. Primero, una fina capa metálica (I) emparedada entre dos revestimientos dieléctricos infinitamente gruesos (II,III), una heteroestructura aislante/metal/aislante (configuración IMI por sus siglas en inglés); y segundo, una fina capa de núcleo dieléctrico (I) emparedado entre dos revestimientos metálicos (II,III), una heteroestructura (MIM), véase figura (3.2).

En ambas configuraciones, IMI y MIM se busca que las ondas decaigan conforme se alejen de las interfaces en la dirección de z , ubicadas en a y $-a$. Para el medio III, $z > a$, se hace uso de un conjunto de ecuaciones similares a las vistas para una sola interfaz (3.30-3.32):

$$H_y = Ae^{i\beta x}e^{-k_3 z}, \quad (3.48)$$

$$E_x = iA \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_3} k_3 e^{i\beta x} e^{-k_3 z}, \quad (3.49)$$

$$E_z = -A \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_3} e^{i\beta x} e^{-k_3 z}. \quad (3.50)$$

Similarmente, para el medio II, $z < -a$, se hace uso de un conjunto de ecuaciones muy parecidas a las vistas para una sola interfaz (3.33-3.35):

$$H_y = Be^{i\beta x}e^{k_2 z}, \quad (3.51)$$

$$E_x = -iB \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} k_2 e^{i\beta x} e^{k_2 z}, \quad (3.52)$$

$$E_z = -B \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} e^{i\beta x} e^{k_2 z}. \quad (3.53)$$

En los sistemas multicapa, se establecen las ecuaciones de manera que las ondas avancen en la dirección positiva de x . Se denotan los componentes del vector de onda perpendicular a la superficie de las interfaces como $k_i = k_{z,i}$. El subíndice corresponde al número de material mostrado en la imagen (3.2). Para establecer las ecuaciones para el campo electromagnético en la región central $-a < z < a$, se recuerda la solución general a la ecuación de onda (3.27), en este caso, para los modos TM:

$$\begin{aligned} H_y &= Ce^{i\beta x}e^{k_1 z} + De^{i\beta x}e^{-k_1 z} \\ H_y &= e^{i\beta x}(Ce^{k_1 z} + De^{-k_1 z}), \end{aligned} \quad (3.54)$$

que se sustituye en (3.21) y (3.22) para obtener

$$E_x = -iC \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} k_1 e^{i\beta x} e^{k_1 z} + iD \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} k_1 e^{i\beta x} e^{-k_1 z}$$

$$E_x = i \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} k_1 e^{i\beta x} (-C e^{k_1 z} + D e^{-k_1 z}), \quad (3.55)$$

$$E_z = C \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} e^{i\beta x} e^{k_1 z} + D \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} e^{i\beta x} e^{-k_1 z}$$

$$E_z = \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} e^{i\beta x} (C e^{k_1 z} + D e^{-k_1 z}). \quad (3.56)$$

3.3.2. Relación de dispersión para un sistema multicapa

Se observa la continuidad de los campos en las interfaces para H_y y E_x , recordando a las condiciones de frontera (2.44).

Se observa las condiciones de frontera en $a = z$.

Primero H_y (única componente de $\vec{H}_i^{\parallel}$):

$$A e^{i\beta x} e^{-k_3 z} \Big|_{z=a} = e^{i\beta x} (C e^{k_1 z} + D e^{-k_1 z}) \Big|_{z=a}$$

$$A e^{i\beta x} e^{-k_3 a} = e^{i\beta x} (C e^{k_1 a} + D e^{-k_1 a})$$

$$A e^{-k_3 a} = C e^{k_1 a} + D e^{-k_1 a}. \quad (3.57)$$

Ahora E_x (única componente de $\vec{E}_i^{\parallel}$):

$$iA \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_3} k_3 e^{i\beta x} e^{-k_3 z} \Big|_{z=a} = i \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} k_1 e^{i\beta x} (-C e^{k_1 z} + D e^{-k_1 z}) \Big|_{z=a}$$

$$iA \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_3} k_3 e^{i\beta x} e^{-k_3 a} = i \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} k_1 e^{i\beta x} (-C e^{k_1 a} + D e^{-k_1 a})$$

$$A \frac{k_3}{\varepsilon_3} e^{-k_3 a} = \frac{k_1}{\varepsilon_1} (-C e^{k_1 a} + D e^{-k_1 a}). \quad (3.58)$$

De manera similar, se observan las condiciones de frontera en $z = -a$. Primero con H_y , después con E_x :

$$B e^{i\beta x} e^{k_2 z} \Big|_{z=-a} = e^{i\beta x} (C e^{k_1 z} + D e^{-k_1 z}) \Big|_{z=-a}$$

$$B e^{i\beta x} e^{-k_2 a} = e^{i\beta x} (C e^{-k_1 a} + D e^{k_1 a})$$

$$B e^{-k_2 a} = C e^{-k_1 a} + D e^{k_1 a}. \quad (3.59)$$

$$-iB \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} k_2 e^{i\beta x} e^{k_2 z} \Big|_{z=-a} = i \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} k_1 e^{i\beta x} (-C e^{k_1 z} + D e^{-k_1 z}) \Big|_{z=-a}$$

$$-iB \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} k_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 a} = i \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} k_1 e^{i\beta x} (-C e^{-k_1 a} + D e^{k_1 a})$$

$$-B \frac{k_2}{\varepsilon_2} e^{-k_2 a} = \frac{k_1}{\varepsilon_1} (-C e^{-k_1 a} + D e^{k_1 a}). \quad (3.60)$$

De esta manera, se cuenta con un sistema lineal de cuatro ecuaciones acopladas (3.57-3.60). H_y tiene que satisfacer la ecuación de onda (3.23) en las tres regiones distintas, a través de

$$k_i^2 = \beta^2 - k_0^2 \varepsilon_i, \quad (3.61)$$

para $i = 1, 2, 3$.

Se resuelve este sistema de ecuaciones lineales:

Se multiplica (3.57) por $\frac{k_3}{\varepsilon_3}$, y se iguala con (3.58):

$$\frac{k_3}{\varepsilon_3}(Ce^{k_1 a} + De^{-k_1 a}) = \frac{k_1}{\varepsilon_1}(-Ce^{k_1 a} + De^{-k_1 a}),$$

de donde se despeja $Ce^{k_1 a}$

$$Ce^{k_1 a} = De^{-k_1 a} \left(\frac{k_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_1 k_3}{k_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 k_3} \right). \quad (3.62)$$

Se multiplica (3.59) por $-\frac{k_2}{\varepsilon_2}$, y se iguala con (3.60):

$$-\frac{k_2}{\varepsilon_2}(Ce^{-k_1 a} + De^{k_1 a}) = \frac{k_1}{\varepsilon_1}(-Ce^{-k_1 a} + De^{k_1 a}),$$

de donde se despeja $Ce^{-k_1 a}$

$$Ce^{-k_1 a} = De^{k_1 a} \left(\frac{k_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 k_2}{k_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 k_2} \right). \quad (3.63)$$

Se divide (3.62) entre (3.63):

$$e^{2k_1 a} = e^{-2k_1 a} \frac{\left(\frac{k_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_1 k_3}{k_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 k_3} \right)}{\left(\frac{k_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 k_2}{k_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 k_2} \right)}$$

$$e^{-4k_1 a} = \frac{\left(\frac{k_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 k_2}{k_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 k_2} \right)}{\left(\frac{k_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_1 k_3}{k_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 k_3} \right)}.$$

Reacomodando, se obtiene una expresión implícita para la relación de dispersión en un sistema tricapa:

$$e^{-4k_1 a} = \frac{\frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_2}{\varepsilon_2} \frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_3}{\varepsilon_3}}{\frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_2}{\varepsilon_2} \frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_3}{\varepsilon_3}}. \quad (3.64)$$

Nótese que para un espesor infinito ($a \rightarrow \infty$):

$$0 = \frac{\frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_2}{\varepsilon_2} \frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_3}{\varepsilon_3}}{\frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_2}{\varepsilon_2} \frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_3}{\varepsilon_3}},$$

se tiene

$$\frac{k_2}{k_1} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \frac{k_3}{k_1} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}.$$

Es decir, la ecuación (3.64) se reduce a la ecuación (3.37), teniendo ahora las ecuaciones de dos SPP desacoplados en dos interfaces diferentes.

3.3.3. Sistemas multicapa simétricos

La relación de dispersión (3.64) funciona para materiales cuya respuesta dieléctrica en los tres materiales es diferente. Se considera el interesante caso especial donde los estratos (II) y (III) son iguales en términos de su respuesta dieléctrica, esto quiere decir que $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$, y por lo tanto $k_2 = k_3$, esto último es visible en la ecuación (3.61). A esa disposición de materiales se le llamará **Sistema multicapa simétrico**. En este caso, la relación de dispersión (3.64) puede ser dividida en un par de ecuaciones:

$$e^{-4k_1 a} = \frac{\frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_2}{\varepsilon_2} \frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_2}{\varepsilon_2}}{\frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_2}{\varepsilon_2} \frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_2}{\varepsilon_2}} = \left(\frac{\frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_2}{\varepsilon_2}}{\frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_2}{\varepsilon_2}} \right)^2,$$

$$e^{-2k_1 a} = \pm \frac{k_1 \varepsilon_2 + k_2 \varepsilon_1}{k_1 \varepsilon_2 - k_2 \varepsilon_1}. \quad (3.65)$$

Se busca una expresión conveniente, para lo cual se recuerda que:

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Tomando la parte positiva de (3.65) se tiene:

$$e^{-k_1 a} = \pm \sqrt{\frac{k_1 \varepsilon_2 + k_2 \varepsilon_1}{k_1 \varepsilon_2 - k_2 \varepsilon_1}},$$

de donde también se usará la parte positiva (de hecho, puede usarse la parte negativa, y se llegará al mismo resultado). Con un poco de álgebra, acomodando para que la expresión sea en términos de $\tanh k_1 a$ se obtiene:

$$\tanh k_1 a = -\frac{k_2 \varepsilon_1}{k_1 \varepsilon_2}. \quad (3.66)$$

Similarmente, tomando la parte negativa de (3.65) se tiene

$$e^{-k_1 a} = \pm \sqrt{\frac{k_1 \varepsilon_2 + k_2 \varepsilon_1}{k_2 \varepsilon_1 - k_1 \varepsilon_2}},$$

y siguiendo los mismos pasos para obtener (3.66) se llega a:

$$\tanh k_1 a = -\frac{k_1 \varepsilon_2}{k_2 \varepsilon_1}. \quad (3.67)$$

Capítulo 4

Análisis de la relación de dispersión en una sola interfaz

La expresión para la relación de dispersión (3.39) admite valores complejos para ε_1 , por lo cual, β puede ser un número complejo. Si cambian los roles de las respuestas dieléctricas de los materiales, siendo $\varepsilon_2(\omega)$ y ε_1 una constante, la ecuación sigue funcionando para el caso de una sola interfaz.

4.1. Tratamiento sin absorción en un sistema de una sola interfaz

La expresión (3.39) puede ser sustituida en la expresión (3.38) para obtener:

$$k_i^2 = -k_0^2 \left(\frac{\varepsilon_i^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right). \quad (4.1)$$

Como ya se mencionó, la parte imaginaria del índice de refracción complejo está directamente relacionada con la atenuación de una onda al penetrar en un medio. En una primera aproximación sin considerar la parte imaginaria del índice de refracción, y como consecuencia, donde la parte imaginaria de la función dieléctrica del metal es igual a cero, $\text{Im}[\varepsilon_1(\omega)] = 0$, se obtendrá de manera general $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 0$, es decir $|\varepsilon_1| > \varepsilon_2$, y como consecuencia se cumple la relación $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -|\varepsilon_1 + \varepsilon_2|$, con la posibilidad de escribir la ecuación (4.1) como

$$k_i^2 = k_0^2 \frac{\varepsilon_i^2}{|\varepsilon_1 + \varepsilon_2|}$$
$$k_i = k_0 \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{|\varepsilon_1 + \varepsilon_2|}}. \quad (4.2)$$

Comprobando así que, si $\text{Im}[\varepsilon_1(\omega)] = 0$ en la función dieléctrica correspondiente a la parte metálica de la configuración, los valores de k_{iz} son números reales y positivos.

Con esta información se reescribe la longitud de decaimiento de los campos que son perpendiculares a la interfaz:

$$\hat{z}_i = \frac{\sqrt{|\varepsilon_1 + \varepsilon_2|}}{k_0 |\varepsilon_i|}. \quad (4.3)$$

Como ya fue mencionado, $|\varepsilon_1| > \varepsilon_2$, notando así por la ecuación (4.3) que la distancia de decaimiento para el campo electromagnético será menor en el metal. Otra forma de explicar esto, es que el campo electromagnético decae más rápido dentro del metal.

Análisis de la relación de dispersión en una sola interfaz

4.1 Tratamiento sin absorción en un sistema de una sola interfaz

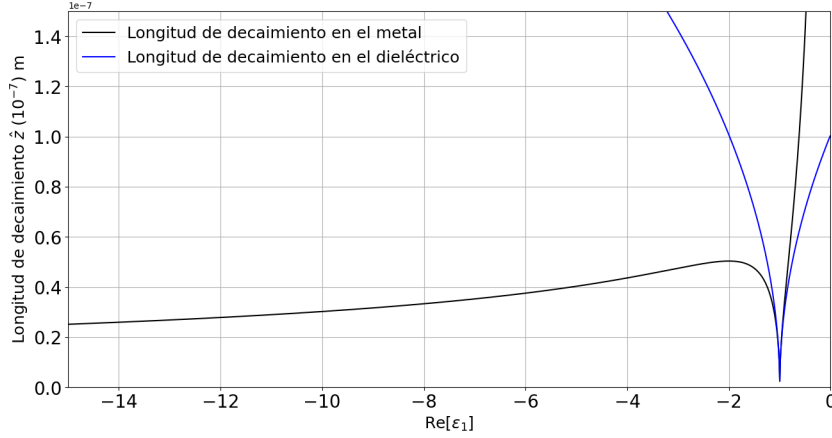


Figura 4.1: Longitud de decaimiento $\hat{z}_i$ en una interfaz metal-dieléctrico. Se considera un metal de Drude sin absorción.

El valor de ε_1 varía según el material y la frecuencia a la que incide la luz. En las gráficas de la figura (4.1) se considera la interfaz metal-aire y una frecuencia de 633 nm.

Se observa que la longitud de decaimiento es aproximadamente la misma dentro de ambos medios cuando la constante dieléctrica es aproximadamente la misma que el valor absoluto de la parte real de la función dieléctrica correspondiente al metal, es decir, $\varepsilon_2 \approx |\text{Re}[\varepsilon_1(\omega)]|$. Es importante resaltar que esto ocurre cuando se considera el modelo de Drude, sin absorción para los metales.

Gráfica de la relación de dispersión

Considerando un metal sin absorción para la relación de dispersión, se puede hacer uso de la ecuación (2.68):

$$\beta = k_0 \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \varepsilon_2}{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) + \varepsilon_2}}. \quad (4.4)$$

Se puede graficar esta relación de dispersión para observar el comportamiento de los SPP, para la gráfica se define:

$$\frac{\beta c}{\omega_p} = x,$$

y

$$\frac{\omega}{\omega_p} = y,$$

para escribir

$$x = y \sqrt{\frac{(1 - y^{-2}) \varepsilon_2}{(1 - y^{-2}) + \varepsilon_2}},$$

de donde, tras despejar a y , se obtendrán cuatro soluciones:

$$y_1 = \frac{\sqrt{1 + x^2 + \frac{x^2}{\varepsilon_2}} + \sqrt{\frac{-4\varepsilon_2 x^2 + (-\varepsilon_2 - x^2 - \varepsilon_2 x^2)^2}{\varepsilon_2}}}{\sqrt{2}},$$

Análisis de la relación de dispersión en una sola interfaz

4.1 Tratamiento sin absorción en un sistema de una sola interfaz

$$y_2 = \frac{\sqrt{1 + x^2 + \frac{x^2}{\varepsilon_2} - \frac{\sqrt{-4\varepsilon_2 x^2 + (-\varepsilon_2 - x^2 - \varepsilon_2 x^2)^2}}{\varepsilon_2}}}{\sqrt{2}},$$

$$y_3 = -\frac{\sqrt{1 + x^2 + \frac{x^2}{\varepsilon_2} + \frac{\sqrt{-4\varepsilon_2 x^2 + (-\varepsilon_2 - x^2 - \varepsilon_2 x^2)^2}}{\varepsilon_2}}}{\sqrt{2}},$$

$$y_4 = -\frac{\sqrt{1 + x^2 + \frac{x^2}{\varepsilon_2} - \frac{\sqrt{-4\varepsilon_2 x^2 + (-\varepsilon_2 - x^2 - \varepsilon_2 x^2)^2}}{\varepsilon_2}}}{\sqrt{2}},$$

pero sólo las primeras dos son relevantes, puesto que buscamos aquellas soluciones que contengan a ω y β positivas.

A continuación se grafica la relación de dispersión para dos dieléctricos diferentes con un metal sin absorción:

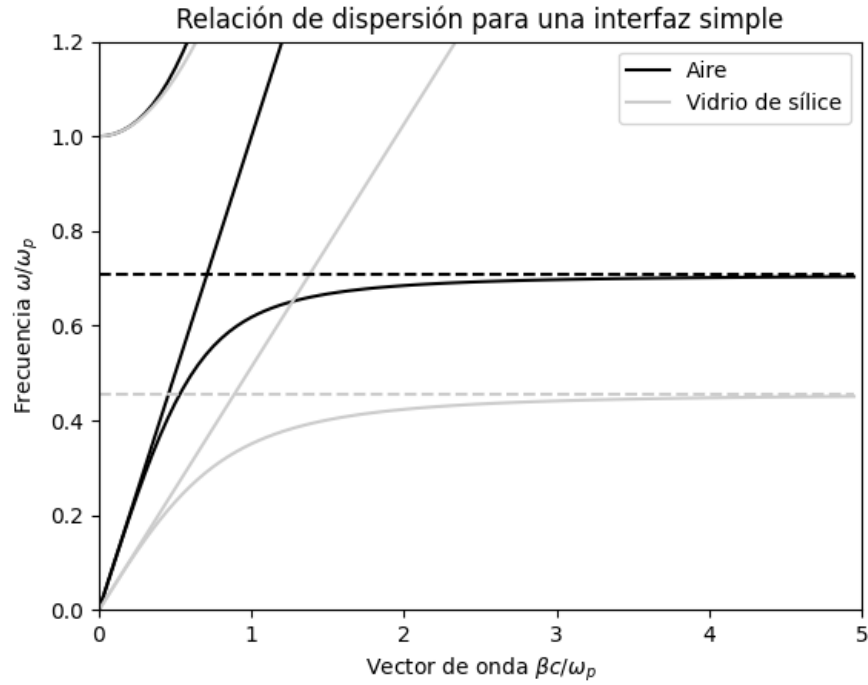


Figura 4.2: Relación de dispersión de los SPP entre un metal sin absorción y aire (curvas negras) y vidrio de sílice (curvas grises).

En la figura (4.2) se muestra una gráfica de frecuencia contra el vector de onda multiplicado por c para la relación de dispersión de la ecuación (3.39), ambas cantidades se encuentran normalizadas respecto a la frecuencia de plasma ω_p .

Las rectas que tienen cierta pendiente en las relaciones de dispersión, a las cuales se llama **líneas de luz**, representan lo que se espera si la luz viaja únicamente en el dieléctrico, los plasmones polaritones de superficie sólo existen a la derecha de la línea de luz. Las líneas de luz se grafican también mediante el uso de la ecuación (3.38), en este caso, como es lo que se espera si la luz viaja sólo en el dieléctrico, no se tiene una onda que se propague en una interfaz, por lo cual $k_2 = 0$:

$$0 = \beta^2 - k_0^2 \varepsilon_2$$

$$(\beta - k_0\sqrt{\varepsilon_2})(\beta + k_0\sqrt{\varepsilon_2}) = 0,$$

tomando la solución positiva

$$\beta = k_0\sqrt{\varepsilon_2},$$

y recordando que $\sqrt{\varepsilon_2} = n$ (índice de refracción), se tiene:

$$\beta = nk_0, \tag{4.5}$$

que para la gráfica se define

$$\begin{aligned} \beta &= n \frac{\omega}{c} \\ \frac{1}{n} \frac{\beta c}{\omega_p} &= \frac{\omega}{\omega_p} \\ y &= \frac{x}{n}. \end{aligned}$$

Las líneas punteadas muestran una cantidad importante, llamada *frecuencia del plasmón de superficie*, la cual es característica para valores de β muy grandes:

$$\omega_{sp} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \varepsilon_2}}, \tag{4.6}$$

esta expresión se obtiene acomodando la ecuación (3.39) de la siguiente manera:

$$\frac{k_0}{\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}},$$

y tomando el límite cuando $\beta \rightarrow \infty$, para posteriormente sustituir la ecuación (2.68).

En el caso idealizado, donde los metales no tienen propiedades de absorción, los SPP sólo existen hasta determinada ω . Entre los modos ligados y radiativos existe una banda prohibida, la cual prohíbe la propagación. Como ya se vio anteriormente, la radiación en los metales ocurre en el régimen de transparencia $\omega > \omega_p$. Para vectores de onda pequeños, correspondientes a frecuencias bajas, la constante de propagación de los SPP se acerca a la línea de luz k_0 , de manera que las ondas se extienden a lo largo de varias longitudes de onda en el dieléctrico. En este régimen, los SPP adquieren la naturaleza de un campo de luz de incidencia rasante, que son también conocidas como ondas de Sommerfeld-Zenneck.

Los Plasmones Polaritones de Superficie en una sola interfaz no pueden ser excitados si $k < \beta$, donde k es el vector de onda de la luz en el medio dieléctrico. Nótese que la proyección a lo largo de la interfaz del momento $\beta = k_x = k \sin \theta$, donde θ es el ángulo de incidencia normal a la superficie de los fotones, es siempre menor que la constante de propagación k , exceptuando el caso donde se tiene un vector de onda incidente paralelo al vector de propagación de los SPP, $k = \beta$. Esto es visible en la figura (4.2), donde la línea de luz nunca cruza la curva de la relación de dispersión de los SPP.

4.2. Tratamiento con absorción en un sistema de una sola interfaz

Como ya se vio, la relación de dispersión (3.39) admite valores complejos para $\varepsilon_1(\omega)$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1r} + i\varepsilon_{1i} \in \mathbb{C},$$

lo cual tiene como consecuencia que β también sea complejo

$$\beta = \beta_r + i\beta_i \in \mathbb{C}.$$

Se observa qué ocurre con el factor $e^{i\beta x}$ que contienen las ecuaciones (3.30-3.35):

$$e^{i(\beta_r + i\beta_i)x} = e^{i\beta_r x} e^{-\beta_i x} = e^{i\beta_r x} e^{-\beta_i x}.$$

Comparando con la expresión donde se desprecia la absorción, en específico el factor $e^{i\beta x}$, donde $\beta \in \mathbb{R}$, se observa que cuando β es complejo, aparece un factor extra que hace que el valor de la ecuación de onda decaiga exponencialmente conforme avanza sobre el material en la dirección de x . Físicamente, se interpreta que la onda se atenúa conforme más avance sobre la dirección x . A su vez, β puede ser insertado en las ecuaciones (3.38), que como consecuencia hará que k_1 y k_2 sean complejos.

$$k_1 = k_{1r} + ik_{1i} \in \mathbb{C},$$

$$k_2 = k_{2r} + ik_{2i} \in \mathbb{C}.$$

De manera similar, tendrá un efecto adicional en los factores que contengan a k_1 y k_2 ,

$$e^{k_1 z} = e^{(k_{1r} + ik_{1i})z} = e^{k_{1r}z} e^{ik_{1i}z},$$

$$e^{-k_2 z} = e^{-(k_{2r} + ik_{2i})z} = e^{-k_{2r}z} e^{-ik_{2i}z}.$$

donde observa que en ambos casos se conserva el factor que hace la onda decaiga conforme se aleja de la interfaz, es decir, las ondas que se propagan siguen siendo evanescentes.

Método para graficar una relación de dispersión de una sola interfaz con valores reales

Previamente se explicó cómo obtener la gráfica de la relación de dispersión de (3.39) en el caso donde no se considera la absorción dentro del metal, es decir, el caso donde se desprecia la parte imaginaria de la función dieléctrica $\varepsilon_1(\omega)$. Ahora se grafica la relación de dispersión tomando en cuenta la parte imaginaria de $\varepsilon_1(\omega)$.

Para generar las gráficas usando valores reales, se usan los valores del oro, plata y cobre extraídos de [14]. Se tabulan los datos, comenzando por convertir los valores dados en energía en eV a $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, con lo cual se obtiene la coordenada en y para cada punto a graficar. En la bibliografía suele encontrarse a la frecuencia de plasma en términos de energía en eV. Para recuperar la información de la frecuencia se toma en cuenta que es expresada de la siguiente forma:

$$h\nu = E(\text{eV})$$

$$\frac{h}{2\pi} 2\pi\nu = E(\text{eV})$$

$$\hbar\omega = E(\text{eV}), \tag{4.7}$$

Para obtener la coordenada en x , es decir, el valor de β que le corresponde a cada frecuencia del campo electromagnético incidente, con n y κ se calcula $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1r} + i\varepsilon_{1i}$, con las ecuaciones (2.55) y (2.56), para introducirla directamente en la relación de dispersión (3.39) y obtener β . Como ya se vio, si $\varepsilon_1 \in \mathbb{C}$, entonces β es un número complejo; para graficar sólo se toma en cuenta la parte real $\text{Re}[\beta]$.

Relaciones de dispersión para una sola interfaz con valores reales

A continuación se grafican diferentes relaciones de dispersión, primero para interfaces solas con cada uno de los tres metales ya mencionados, donde se considera una constante dieléctrica $\varepsilon_2 = 1$. Es decir, se grafican en conjunto las relaciones de dispersión para las tres interfaces solas aire-plata, aire-oro, y aire-cobre.

Análisis de la relación de dispersión en una sola interfaz

4.2 Tratamiento con absorción en un sistema de una sola interfaz

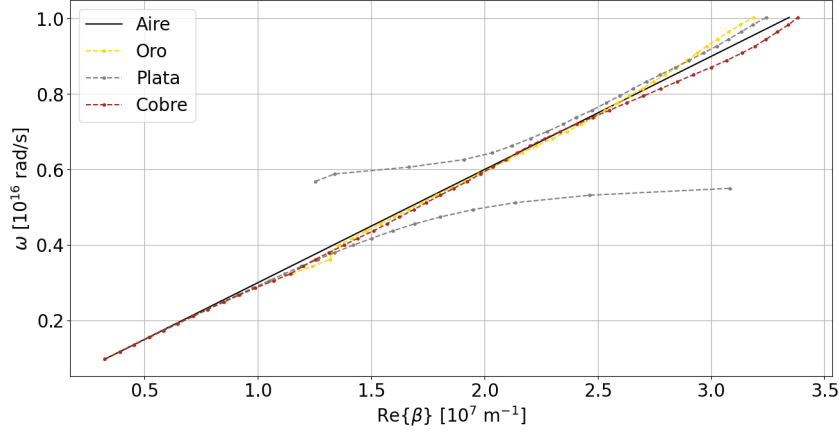


Figura 4.3: Relación de dispersión de los SPP para una interfaz aire-oro, aire-plata y aire-cobre con valores reales

A diferencia del caso donde se considera un metal de Drude sin absorción, en el caso donde se considera una función dieléctrica compleja, el vector de onda $\text{Re}[\beta]$ no alcanza valores infinitos cuando la frecuencia se acerca a la frecuencia de plasma del material, sino, alcanza un máximo y tras aumentar más la frecuencia, los valores para β disminuyen hasta aparecer a la izquierda de la línea de luz, siendo modos inaccesibles.

A continuación se muestra la gráfica de la relación de dispersión de una sola interfaz para la plata con dos valores para la constante dieléctrica ε_2 (figura 4.4).

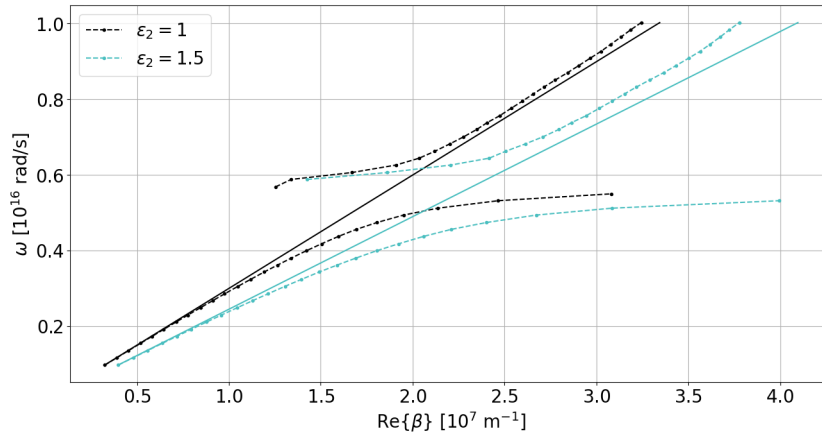


Figura 4.4: Relación de dispersión de los SPP para una interfaz plata-dieléctrico con dos valores para ε_2

Para la plata se observa que desde el mínimo valor posible que se le asigna a la constante dieléctrica ($\varepsilon_2 = 1$), los valores para β son más grandes respecto de los que se obtienen para los otros dos metales. Para la gráfica azul se tiene que el valor β máximo se obtiene para un valor de frecuencia por debajo del punto donde se obtuvo el valor máximo para la interfaz aire-plata.

Análisis de la relación de dispersión en una sola interfaz

4.2 Tratamiento con absorción en un sistema de una sola interfaz

También se muestra la gráfica de la relación de dispersión de una sola interfaz para el oro con tres valores diferentes para la constante dieléctrica.

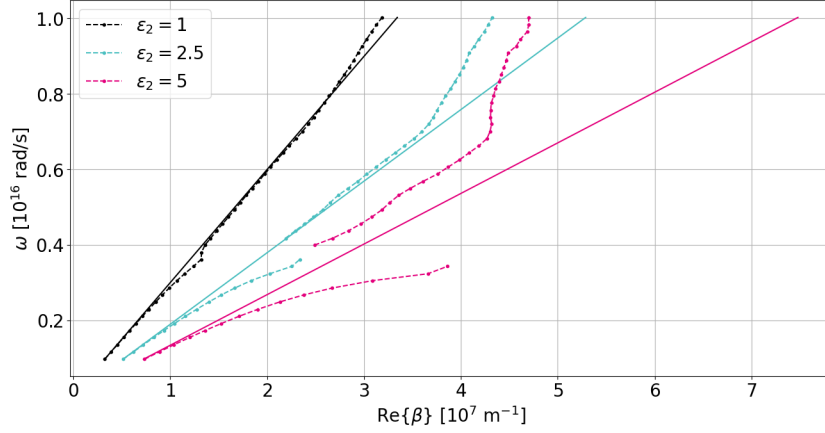


Figura 4.5: Relación de dispersión de los SPP para una interfaz oro-dieléctrico con tres valores para ε_2

Para las curvas resultantes de la interacción oro-dieléctrico (figura 4.5), se nota que entre más grande sea el valor de ε_2 , la curva de dispersión toma cierta similitud con las gráficas obtenidas para la plata, mostrando el pico característico que indica el valor máximo que se obtiene para $\text{Re}[\beta]$.

Se realiza lo mismo con el cobre, donde se grafica la relación de dispersión para una interfaz sola con tres constantes dieléctricas diferentes.

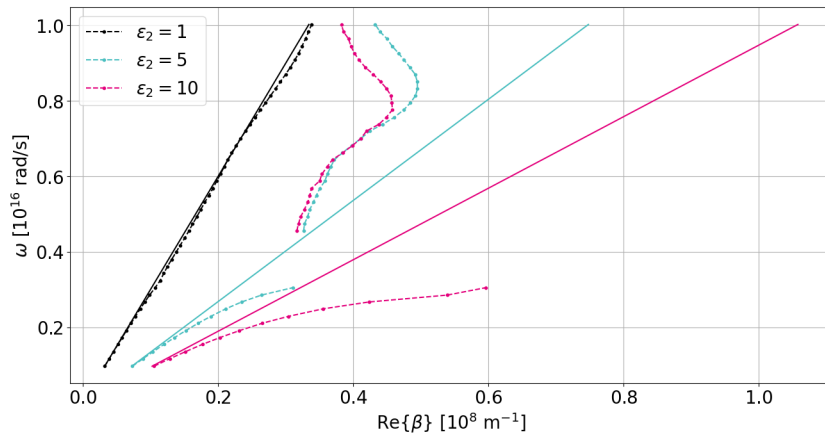


Figura 4.6: Relación de dispersión de los SPP para una interfaz cobre-dieléctrico con tres valores para ε_2

Para el cobre la excitación de plasmones aún es posible (figura 4.6), pero es necesario contar con un material dieléctrico cuyo valor de ε_2 sea considerablemente grande.

Para los tres metales se tiene el mismo comportamiento al aumentar el valor de la constante dieléctrica de la configuración: se alcanzan valores mayores para $\text{Re}[\beta]$, y es menor la frecuencia

Análisis de la relación de dispersión en una sola interfaz

4.2 Tratamiento con absorción en un sistema de una sola interfaz

requerida para alcanzarlo. De hecho, esto es observable por la ecuación (4.6), donde la frecuencia del plasmón de superficie ω_{sp} , que indica el límite donde los valores del vector de onda son máximos, disminuye si se aumenta el valor de ε_2 .

Capítulo 5

Análisis de la relación de dispersión en un sistema multicapa

Antes de analizar las relaciones de dispersión para un sistema de tres capas, se determinan las características principales de ambas relaciones de dispersión para un sistema multicapa.

5.1. Modos plasmónicos

Como ya se vio, cuando se consideran respuestas dieléctricas iguales en los materiales (II) y (III) en un sistema multicapa, la ecuación (3.64) puede ser dividida en dos relaciones de dispersión. A cada relación de dispersión le corresponden ciertas características, y se le asigna un modo. A la relación de dispersión (3.66) se le asigna el modo impar, y a la relación de dispersión (3.67) se le asigna el modo par. Estos modos se analizan a profundidad y por separado. A ambos modos se les estudia con las configuraciones IMI y MIM.

5.1.1. Paridad de los modos plasmónicos para sistemas multicapa

Se demuestra que la ecuación (3.66) describe modos de paridad vectorial impar, donde $E_x(z)$ es una función impar, y $H_y(z)$ y $E_z(z)$ son funciones pares; mientras que la ecuación (3.67) describe modos de paridad vectorial par, donde $E_x(z)$ es una función par, y $H_y(z)$ y $E_z(z)$ son funciones impares.

Pero antes, se deduce una propiedad muy interesante, para esto, es necesario recordar a las ecuaciones (3.57-3.60), donde se considera $k_2 = k_3$ y $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$.

Se divide (3.57) entre (3.59) para obtener:

$$\frac{A}{B} = \frac{Ce^{k_1 a} + De^{-k_1 a}}{Ce^{-k_1 a} + De^{k_1 a}}. \quad (5.1)$$

Se divide (3.58) entre (3.60):

$$\frac{A}{B} = \frac{-Ce^{k_1 a} + De^{-k_1 a}}{Ce^{-k_1 a} - De^{k_1 a}}. \quad (5.2)$$

Se igualan las dos ecuaciones anteriores para obtener:

$$\frac{Ce^{k_1 a} + De^{-k_1 a}}{Ce^{-k_1 a} + De^{k_1 a}} = \frac{-Ce^{k_1 a} + De^{-k_1 a}}{Ce^{-k_1 a} - De^{k_1 a}},$$

de donde, desarrollando se puede llegar a la corta pero importante relación:

$$C = \pm D. \quad (5.3)$$

Ahora, se examinan los dos casos para esta relación:

Al sustituir $C = D$ en (5.1) y (5.2), en ambos casos se obtiene que $A = B$.

$$\therefore \text{Si } C = D, A = B.$$

Por otra parte, al sustituir $C = -D$ en (5.1) y (5.2), es fácil notar que en ambos casos se obtiene que $A = -B$.

$$\therefore \text{Si } C = -D, A = -B.$$

Se profundiza en ambos casos de la ecuación (5.3), primero se examina el caso donde $C = D$, y posteriormente $C = -D$.

C=D

Se divide (3.57) entre (3.58):

$$\frac{Ae^{-k_2a}}{Ae^{-k_2a}} = \frac{C(e^{k_1a} + e^{-k_1a})}{C \frac{k_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 k_2} (-e^{k_1a} + e^{-k_1a})},$$

donde con un poco de álgebra se llega a la ecuación (3.66):

$$\tanh k_1a = -\frac{k_2\varepsilon_1}{k_1\varepsilon_2}.$$

Se toman las ecuaciones del medio central (3.54-3.56) y se escriben en una forma alterna recordando que:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$H_y = 2Ce^{i\beta x} \cosh(k_1z), \quad (5.4)$$

$$E_x = -2i \frac{k_1}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1} Ce^{i\beta x} \sinh(k_1z), \quad (5.5)$$

$$E_z = 2 \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1} Ce^{i\beta x} \cosh(k_1z). \quad (5.6)$$

Dado que $\sinh k_1z$ es una función impar y $\cosh k_1z$ es una función par, se comprueba que (3.66) describe modos de paridad vectorial impares, con $E_x(z)$ impar y $H_y(z)$ y $E_z(z)$ pares.

Además, es posible establecer una relación entre A , B , C y D . Para esto se toman las ecuaciones (3.57) y (3.59). Para cada ecuación, respectivamente se llega a

$$Ae^{-k_2a} = 2C \cosh(k_1a),$$

$$Be^{-k_2a} = Ae^{-k_2a} = 2C \cosh(k_1a),$$

de donde se deduce:

$$C = A \frac{e^{-k_2a}}{2 \cosh(k_1a)}. \quad (5.7)$$

C=-D

Se divide (3.59) entre (3.60):

$$\frac{Be^{-k_2a}}{Be^{-k_2a}} = \frac{C(e^{-k_1a} - e^{k_1a})}{C \frac{k_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 k_2} (e^{-k_1a} + e^{k_1a})},$$

donde con un poco de álgebra se llega a la ecuación (3.67):

$$\tanh k_1a = -\frac{k_1\varepsilon_2}{k_2\varepsilon_1}.$$

Se toman las ecuaciones del medio central (3.54-3.56) y también se escriben en una forma alterna en términos de senos y cosenos hiperbólicos:

$$H_y = 2Ce^{i\beta x} \sinh(k_1z), \quad (5.8)$$

$$E_x = -2i \frac{k_1}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1} Ce^{i\beta x} \cosh(k_1z), \quad (5.9)$$

$$E_z = 2 \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1} Ce^{i\beta x} \sinh(k_1z). \quad (5.10)$$

Dado que $\sinh k_1z$ es una función impar y $\cosh k_1z$ es una función par, se comprueba que (3.66) describe modos de paridad vectorial pares, con $E_x(z)$ par y $H_y(z)$ y $E_z(z)$ impares.

También se establece una relación entre A , B , C y D . Para esto se toman las ecuaciones (3.57) y (3.59). Para cada ecuación, respectivamente se llega a

$$Ae^{-k_2a} = 2C \sinh(k_1a),$$

$$Be^{-k_2a} = -Ae^{-k_2a} = -2C \sinh(k_1a),$$

de donde se concluye.

$$C = A \frac{e^{-k_2a}}{2 \sinh(k_1a)}. \quad (5.11)$$

A continuación se resumen los resultados de esta sección:

C=	D	-D
$A =$	B	$-B$
$\tanh k_1a =$	$-\frac{k_2\varepsilon_1}{k_1\varepsilon_2}$	$-\frac{k_1\varepsilon_2}{k_2\varepsilon_1}$
$H_y(z)$	Par	Impar
$E_x(z)$	Impar	Par
$E_z(z)$	Par	Impar
Paridad vectorial	Impar	Par
$C =$	$A \frac{e^{-k_2a}}{2 \cosh(k_1a)}$	$A \frac{e^{-k_2a}}{2 \sinh(k_1a)}$

5.2. Sistemas multicapa simétricos sin absorción

Dado que las ecuaciones (3.66) y (3.67) son relaciones implícitas, es complicado, por ejemplo, despejar β de las ecuaciones y graficar, tal como se hizo para relación de dispersión de una sola interfaz. Se reacomodan las relaciones de dispersión como una función de dos variables que se iguala a cero. Esto equivale a decir que se grafican las curvas de nivel cuando $f(\beta, \omega) = 0$. Las gráficas presentadas en esta sección se lograron con el software *Wolfram Mathematica*.

Método para graficar relaciones de dispersión a partir de ecuaciones implícitas (caso sin absorción)

Para generar las gráficas se usa el comando `ContourPlot`. Cuando es dada una función f , `ContourPlot` construye curvas de nivel correspondientes a diferentes valores constantes; por defecto, las regiones entre las curvas son sombreadas para ubicar las diferentes regiones cuyos valores están entre dos constantes. Cuando es dada una ecuación $f == g$, `ContourPlot` muestra las curvas de $\{x, y\}$ que satisfacen la ecuación, en este caso no se muestran regiones sombreadas, únicamente las curvas de nivel. Es posible introducir varias ecuaciones al mismo tiempo, que es útil, por ejemplo, para graficar la relación correspondiente a cada modo plasmónico (par o impar), y/o a diferentes espesores para el material del centro.

`ContourPlot` inicialmente evalúa f en una cuadrícula de puntos de muestra igualmente espaciados que es posible especificar por el comando `PlotPoints`, que es una opción para graficar funciones que especifica cuántos puntos de muestra iniciales usar. Luego utiliza un algoritmo adaptativo para generar contornos suaves [15].

Por ejemplo, para resolver $\tanh k_1 a = -\frac{k_2 \varepsilon_1}{k_1 \varepsilon_2}$, reacomodamos como

$$f(\beta, \omega) = \tanh k_1 a + \frac{k_2 \varepsilon_1}{k_1 \varepsilon_2} = 0 \quad (5.12)$$

Para poder resolver la ecuación (5.12) (y el resto de las ecuaciones implícitas que sea necesario resolver), se necesita el valor de ω_p . Para obtener la frecuencia de plasma inicialmente en términos de energía en eV, basta con considerar

$$\hbar \omega_p = E(\text{eV}), \quad (5.13)$$

con $\hbar = 6.582119569 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$, de donde puede ser despejada a ω_p , que en este caso, se usaron valores reales para generar las gráficas de dispersión. Se considera una energía de $E = 8.89 \text{ eV}$, extraída de [16], lo cual arroja $\omega_{p,\text{oro}} \approx 1.35063 \times 10^{16} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ para el oro. De la misma referencia se toma $E = 9.04 \text{ eV}$ para la plata, que arroja $\omega_{p,\text{plata}} \approx 1.37341 \times 10^{16} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

5.2.1. Sistema IMI simétrico

En el caso de una capa delgada para el modo IMI, los modos pares ω_- aparecen por debajo de la relación de dispersión correspondiente a una sola interfaz aire-oro, mientras que los modos impares ω_+ aparecen por arriba. Para ambos modos plasmónicos, a frecuencias muy bajas, se aproximan a la línea de luz, de manera similar a lo que ocurre con una sola interfaz. De igual manera, en ambos modos, para frecuencias cercanas a la frecuencia de plasma ω_p , los vectores de onda tienden a infinito, lo cual sólo es posible si se supone un metal sin absorción.

Es notorio que las curvas formadas para los modos pares e impares se alejan más de la curva de dispersión de una sola interfaz mientras sea más delgado el material entre los dos dieléctricos.

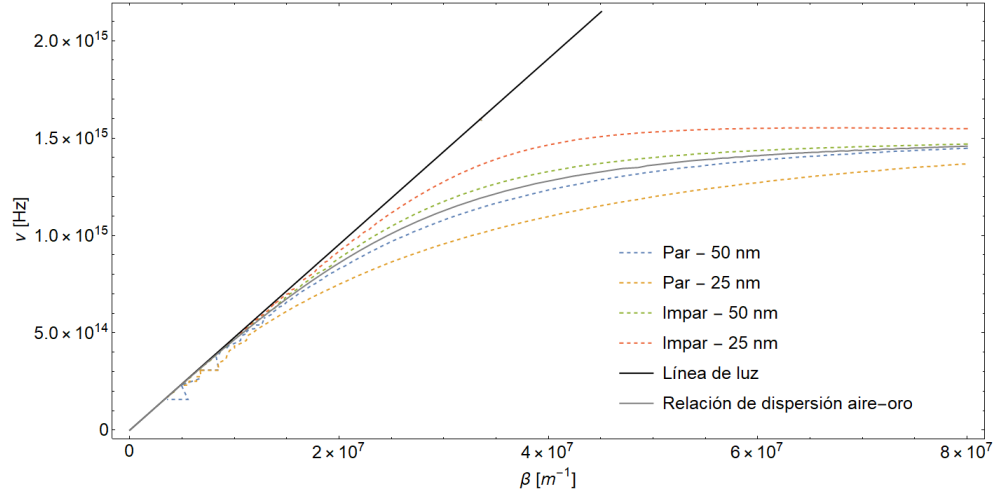


Figura 5.1: Relación de dispersión para el sistema IMI sin absorción en modos par e impar, con espesores del medio central ($2a$) de 50 nm y 25 nm

5.2.2. Sistema MIM simétrico

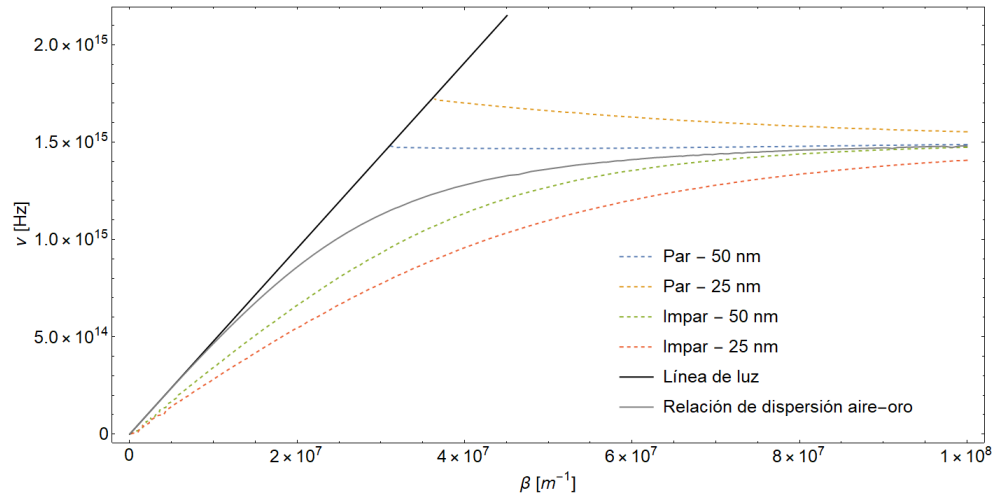


Figura 5.2: Relación de dispersión para el sistema MIM sin absorción en modos par e impar, con espesores del medio central ($2a$) de 50 nm y 25 nm

Moviendo el análisis al sistema MIM, ahora son los modos impares ω_+ , los que aparecen por debajo de la línea de dispersión para una sola interfaz, los modos pares ω_- aparecen por encima de esta última, es decir, se tiene el caso contrario a la configuración MIM. La similitud que tiene con el modo IMI, es que las curvas se alejan de la relación de dispersión de una sola interfaz entre más pequeño sea el medio del centro.

Para frecuencias muy bajas, los modos impares se pueden aproximar a la línea de luz. Por otra parte, la gráfica obtenida indica que para generar plasmones en el sistema multicapa para los modos pares, estos sólo son accesibles a partir de cierta frecuencia, que debe ser superior a la frecuencia de plasma ω_p . Para ambos modos, se sigue cumpliendo que para frecuencias próximas a la frecuencia de plasma ω_p , los vectores de onda β tienden a infinito.

5.3. Sistemas simétricos multicapa con absorción

De manera similar a lo que se hizo con una sola interfaz, se analiza el acoplamiento de ondas en sistemas multicapa cuando sí se toma en cuenta la parte imaginaria de la función dieléctrica del metal. Como ya se señaló, para los sistemas multicapa se cuenta con ecuaciones implícitas, lo que complica adquirir valores directamente para β . Observando el panorama completo, se trabaja con valores complejos dentro de ecuaciones implícitas.

Método para graficar una relación de dispersión de un sistema multicapa con valores reales

Para generar las gráficas usando valores reales para los sistemas multicapa IMI y MIM en ambos modos plasmónicos, de nueva cuenta se hace uso de los valores extraídos de [14]. Tal y como fue el proceso para el caso con absorción de una sola interfaz, se tabulan los datos, repitiendo el mismo paso para obtener la frecuencia ω . Para obtener $\text{Re}[\beta]$ el procedimiento se modifica un poco, ya que ahora se tienen que resolver ecuaciones implícitas. Para esto se recurre a solucionar las ecuaciones implícitas de manera numérica con el apoyo de *Python*. Se soluciona una ecuación implícita para cada valor a graficar, con este objetivo, se usa el comando `findroot()`.

Se puede especificar el método numérico para el comando `findroot()`, este usa por defecto el **método de la secante** para resolver ecuaciones, dicho método funciona para encontrar raíces complejas. La documentación de `findroot()` recomienda usar el **método de Muller** para encontrar raíces complejas, sin embargo, cuando se resolvieron las ecuaciones, proceso que se realizó con ambos métodos, se encontró que el método de la secante es un par de décimas de segundo más rápido que el método de Muller; con ambos métodos se llegaron a los mismos valores para cada ecuación. Además, el método de Muller no podía resolver algunas ecuaciones que el método de la secante sí. Las gráficas mostradas en este capítulo fueron obtenidas con el método de la secante.

El comando `findroot()` requiere un valor inicial aproximado a la raíz para encontrar la solución de la ecuación, esto para el método de la tangente y el método de Muller. Para la obtención de las gráficas se otorgó como valor inicial la $\text{Re}[\beta]$ de una sola interfaz.

A continuación se muestra el código utilizado para la obtención de los valores de $\text{Re}[\beta]$ para la relación de dispersión del sistema IMI, modo plasmónico impar.

```
1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  encoding='ISO-8859-1'
3  import matplotlib.pyplot as plt
4  import csv
5  import numpy as np
6  from matplotlib import animation
7  from mpmath import findroot, atanh, tanh, sqrt, mpc
8
9  for a in (2.5*10**(-8), 5*10**(-8)):
10     with open('Oro_r.csv', 'r', encoding='utf-8-sig') as csvfile:
11         lines = csv.reader(csvfile, delimiter=',')
12         for row in lines:
13             we=float(row[0])
14             n=float(row[1])
15             k=float(row[2])
16             B0=float(row[3])
17
18             w=we/(6.582119569*10**(-16))
19             c=299792458
20             k0=w/c
21             epr=n**2-k**2
22             epi=2*n*k #Parte imaginaria de la función dieléctrica
```

```

23  ep2=1
24  ep1=mpc(epr, epi)
25
26  def f(a,B):
27      k1=sqrt(B**2-k0**2*ep1)
28      k2=sqrt(B**2-k0**2*ep2)
29      return tanh(k1*a)+(k2*ep1)/(k1*ep2)
30  ans = findroot(lambda B: f(a,B), B0)
31  print(ans.real)
32  print()

```

De la línea 10 a la 16 del código, se leen desde un archivo CSV: línea 13, la frecuencia en eV; líneas 14 y 15, los valores de n y κ , correspondientes a las ecuaciones (2.55) y (2.56); línea 15, los valores aproximados iniciales, correspondientes a los valores de $\text{Re}[\beta]$ para una sola interfaz.

En la línea 18 se obtiene los valores para la frecuencia ω , en las líneas 21 y 22 se calculan las partes real e imaginaria, respectivamente, de la función dieléctrica. En la línea 23 se introduce la constante dieléctrica. En la línea 29 se define la función implícita a resolver, y en la línea 30 se resuelve. Lo que hace este código es imprimir los valores de $\text{Re}[\beta]$ dado un modo plasmónico (par o impar) y una constante dieléctrica.

5.3.1. Sistema IMI simétrico

Se comienza por el sistema IMI, donde se analizan ambos modos.

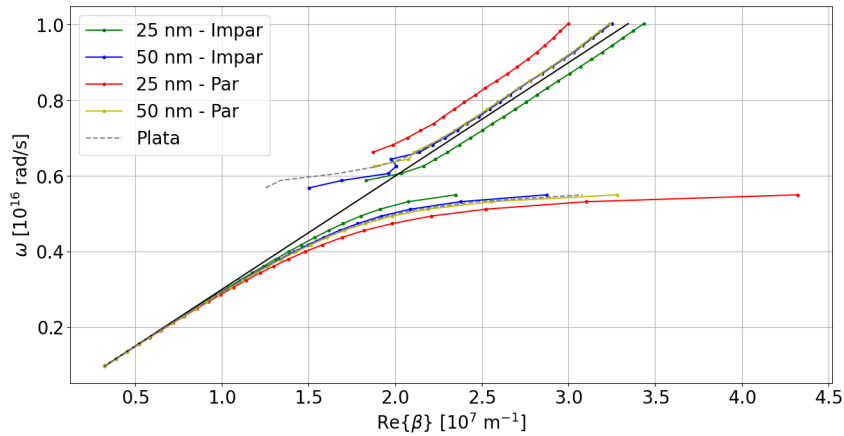


Figura 5.3: Relación de dispersión para el sistema IMI con absorción en modos par e impar, con espesores del medio central ($2a$) de 50 nm y 25 nm (valores reales)

Se observa (figura 5.3) que las curvas de dispersión para 50 nm en ambos modos se asemejan mucho a las líneas de dispersión esperada para una interfaz simple. Para la mitad del espesor del material del centro, las curvas se alejan más de la línea de dispersión esperada para una sola interfaz. Es notorio que para el modo par se alcanzan valores altos de β ; de hecho, a la misma frecuencia se obtiene un valor máximo de β para los dos espesores y ambos modos. Se sigue un comportamiento similar para los valores de β a lo visto para una sola interfaz con absorción: inicialmente, hasta determinada frecuencia, las líneas de dispersión se encuentran a la derecha de la línea de luz alcanzando sus valores máximos, después los valores decrecen súbitamente hasta aparecer la izquierda de esta, siendo imposible excitar los plasmones para esas frecuencias; sólo en el caso de un espesor de 25 nm para el modo impar vuelve a la derecha de la línea de luz, siendo

modos accesibles.

5.3.2. Sistema MIM simétrico

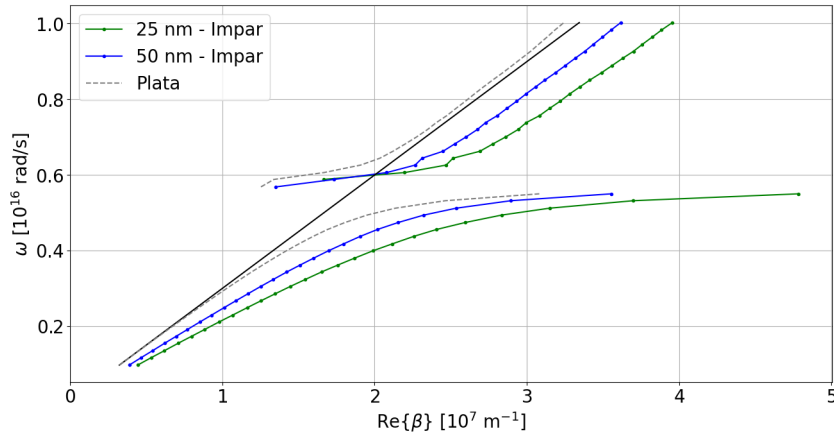


Figura 5.4: Relación de dispersión para el sistema MIM con absorción en modo impar, con espesores del medio central (2a) de 50 nm y 25 nm (valores reales)

Con esta configuración no se encuentran soluciones para el modo par en dos diferentes espesores (figura 5.4). Sin embargo, para el modo impar sí se cuenta con soluciones, ambas soluciones mostradas tienen similitud con las curvas de dispersión para los modos pares de la configuración IMI, ya que ambas aparecen a la derecha de la curva de dispersión para una sola interfaz aire-plata. Ambas curvas alcanzan un máximo antes de que los valores caigan súbitamente y aparezcan a la izquierda de la línea de luz, estando prohibida la excitación pero sólo en una pequeña región. Se repite la misma propiedad para la configuración IMI, donde el espesor más pequeño permite alcanzar valores de β más grandes.

5.4. Sistemas asimétricos sin absorción

En esta sección se estudia brevemente la relación de dispersión para materiales asimétricos con la ecuación (3.64). Esta sección se centra en los casos para los cuales el metal no es absorbente.

5.4.1. Sistema IMI asimétrico

Para una configuración IMI asimétrica se pueden excitar plasmones con frecuencias que se encuentren ya sea por debajo de la curva de la relación de dispersión sílice-plata, o por arriba de la curva de la relación de dispersión aire-plata. Aunado a las observaciones anteriores, la excitación de plasmones sólo ocurren a la derecha de la línea de luz del índice de refracción más alto, en este caso, el sílice. Es observable que entre más delgado sea el medio central, las curvas donde los plasmones son excitables, se alejan más de las relaciones de dispersión para cada dieléctrico. Otra observación notable es que los plasmones no se excitan para frecuencias ubicadas entre las dos curvas de dispersión.

Para vectores de onda β muy grandes, las frecuencias se aproximarán a ambas relaciones de dispersión, es decir, se aproximarán a las frecuencias de plasma para cada dieléctrico. Cabe resaltar que en este aspecto, guarda cierta similitud con el sistema IMI simétrico, pues las curvas en todo momento se mantienen próximas a las relaciones de dispersión.

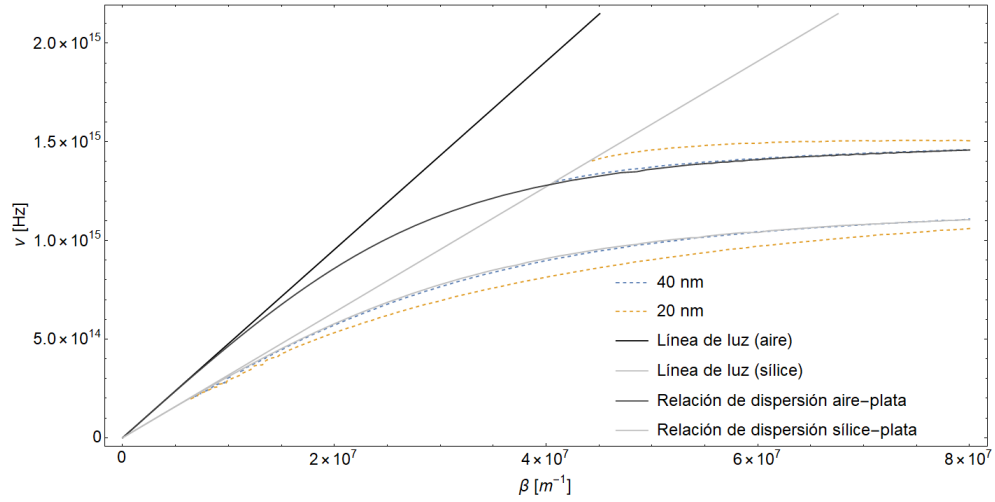


Figura 5.5: Relación de dispersión para el sistema IMI asimétrico aire-plata-sílice, con espesores del medio central ($2a$) de 40 nm y 20 nm

5.4.2. Sistema MIM asimétrico sin absorción

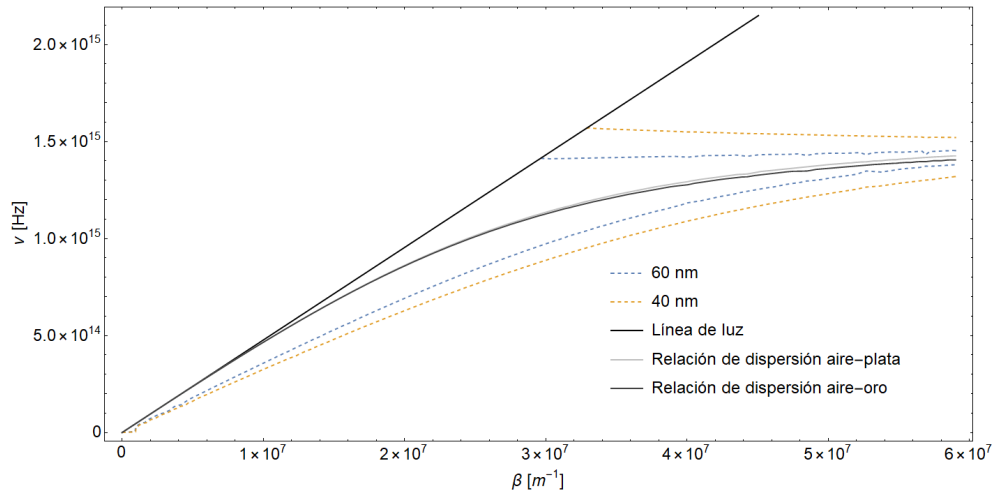


Figura 5.6: Relación de dispersión para el sistema MIM asimétrico oro-aire-plata, con espesores del medio central ($2a$) de 60 nm y 40 nm

Para este caso, se obtiene una gráfica (figura 5.6) similar a la vista para el sistema IMI simétrico, incluyendo que se cuentan con dos líneas de relación de dispersión para dos interfaces sencillas, las cuales pueden ser formadas por la configuración del sistema. Sólo existen curvas de dispersión por arriba o por debajo de estas dos curvas; de manera similar a lo obtenido para un sistema IMI asimétrico, cumpliéndose que estas líneas no aparecen entre las dos curvas para las dos líneas de dispersión. Las curvas se acercan más a las curvas de dispersión de las interfaces sencillas entre más grueso sea el medio del centro. La excitación de plasmones es permitida desde frecuencias muy bajas hasta llegar a un máximo. Se sigue cumpliendo que los plasmones solamente se pueden excitar a la derecha de la línea de luz, que en este caso sólo se cuenta con una línea de luz. Esta gráfica cuenta con curvas análogas a las correspondientes para el modo par en el sistema MIM sin absorción, que comienzan por arriba de la línea de dispersión de una interfaz sencilla.

5.5. Sistemas asimétricos con absorción

Se finaliza este capítulo analizando las gráficas obtenidas para sistemas asimétricos con absorción.

5.5.1. Sistemas asimétricos IMI

Para esta sección se muestran dos configuraciones diferentes para la configuración IMI. Primero un sistema $\varepsilon_2 = 1$ - oro - $\varepsilon_3 = 1.1$, y después un sistema $\varepsilon_2 = 1$ - plata - $\varepsilon_3 = 1.1$.

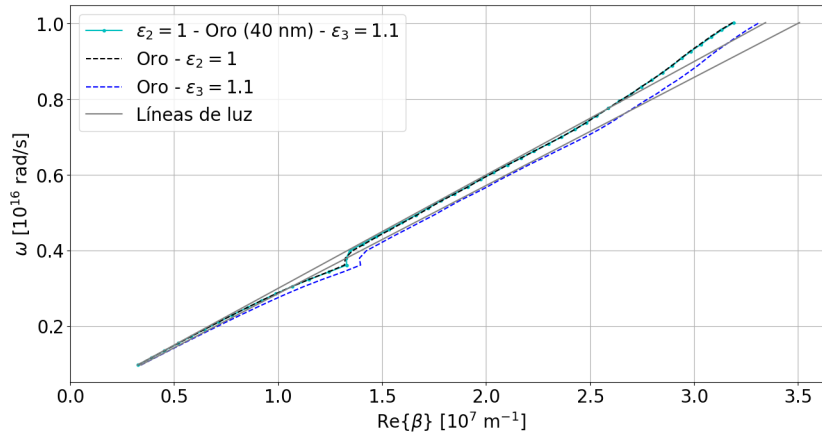


Figura 5.7: Relación de dispersión para el sistema IMI asimétrico $\varepsilon_2 = 1$ - oro - $\varepsilon_3 = 1.1$, con espesor del medio central de 40 nm (valores reales)

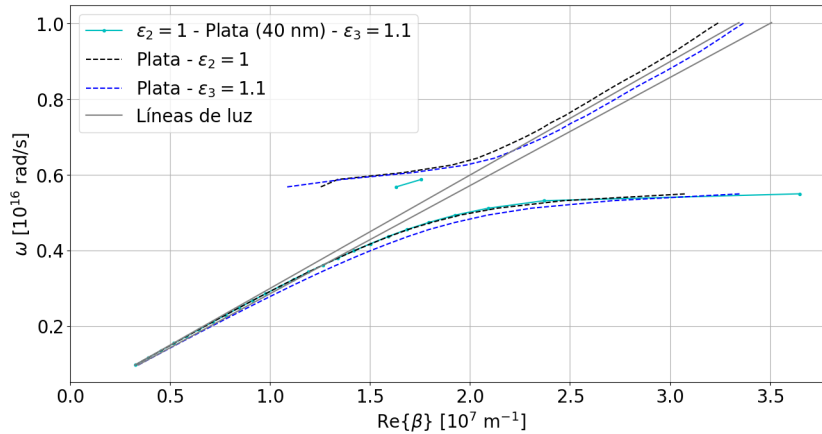


Figura 5.8: Relación de dispersión para el sistema IMI asimétrico $\varepsilon_2 = 1$ - plata - $\varepsilon_3 = 1.1$, con espesor del medio central de 40 nm (valores reales)

Para los sistemas asimétricos se cuenta con dos relaciones de dispersión diferentes (las cuales se muestran) para las dos interfaces individuales que pueden salir de la configuración. En ambos casos (figuras 5.7 y 5.8) la relación de dispersión para el sistema multicapa tiende a acercarse más

a la curva de dispersión cuya constante dieléctrica sea la menor, en ambos casos $\varepsilon_2 = 1$. En la configuración cuyo material central es la plata, se observan los valores grandes de $\text{Re}[\beta]$ que ya se vieron en casos anteriores.

5.5.2. Sistema asimétricos MIM

En la gráfica de dispersión para una interfaz plata-aire-oro aparecen sobrepuestas las curvas de dispersión para las interfaces individuales aire-plata y aire-oro (figura 5.9). Usando estas dos curvas es posible describir la relación de dispersión del sistema tricapa. Ambas líneas de dispersión para el sistema tricapa heredan características de las curvas de dispersión para la aire-plata y aire-oro, por una parte, para valores cercanos a $\omega = 0.4 \times 10^{16} \text{ rad/s}$, ambas curvas de dispersión muestran un pico donde los valores de β dejan de crecer abruptamente, cosa que se tiene en la relación de dispersión oro-aire; por otra parte, para ambos grosores del medio central, se tiene que están a la derecha de la curva aire-plata, alcanzando valores más grandes para β , característica de interfaces solas aire-plata. El valor máximo para β en cada grosor se obtiene a la misma frecuencia que en una interfaz aire-plata. Se cumple otra vez que para espesores más delgados, se obtienen valores de β mayores.

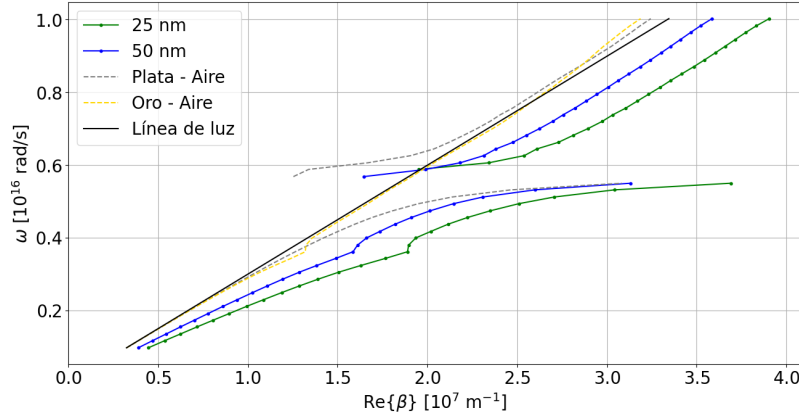


Figura 5.9: Relación de dispersión para el sistema MIM asimétrico plata - aire - oro, con espesor del medio central de 50 nm y 25 nm (valores reales)

Análisis del comportamiento de las curvas de dispersión de los sistemas multicapa asimétricos sin absorción para valores grandes de β

Se puede demostrar lo observado en la figura (5.5) para cuando β tiene valores muy grandes, para una configuración IMI asimétrica.

Se parte de la relación de dispersión para un sistema multicapa asimétrico:

$$e^{-4k_1 a} = \frac{\frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_2}{\varepsilon_2} \frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_3}{\varepsilon_3}}{\frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_2}{\varepsilon_2} \frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_3}{\varepsilon_3}}.$$

Se toma el límite cuando $\beta \rightarrow \infty$, primero el lado izquierdo:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{-4k_1 a} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{-4\sqrt{\beta^2 - k_0^2 \varepsilon_1} a} = 0.$$

Ahora el lado derecho:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_2}{\varepsilon_2} \frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_3}{\varepsilon_3}}{\frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_2}{\varepsilon_2} \frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_3}{\varepsilon_3}} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_2}{\varepsilon_2} \frac{1}{\beta} \frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_3}{\varepsilon_3} \frac{1}{\beta}}{\frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_2}{\varepsilon_2} \frac{1}{\beta} \frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_3}{\varepsilon_3} \frac{1}{\beta}}.$$

Nótese que para cada término se cumple:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{k_i}{\beta \varepsilon_i} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\beta^2 - k_0^2 \varepsilon_i}}{\beta \varepsilon_i} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 \varepsilon_i}{\beta^2 \varepsilon_i^2}} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_i^2} - \frac{k_0^2}{\beta^2 \varepsilon_i}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_i^2}} = \frac{1}{\varepsilon_i}$$

Por lo tanto, cuando β tiene valores muy grandes, la ecuación (3.64) queda

$$0 = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3}}{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_3}}, \quad (5.14)$$

de donde se obtienen dos soluciones

$$-\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad -\varepsilon_1 = \varepsilon_3$$

recordando que en el caso sin absorción se considera el modelo de Drude, $\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, con las dos soluciones se obtiene:

$$\omega_{sp2} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \varepsilon_2}}, \quad \omega_{sp3} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \varepsilon_3}}, \quad (5.15)$$

donde ω_{sp2} y ω_{sp3} son las frecuencias del plasmón de superficie para las interfaces solas aire-plata y aire-sílice. Las soluciones de los SPP en sistemas multicapa asimétricos IMI tienden a esos dos valores cuando $\beta \rightarrow \infty$.

De manera similar para la configuración MIM se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{-4k_1 a} &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_2}{\varepsilon_2} \frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_3}{\varepsilon_3}}{\frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_2}{\varepsilon_2} \frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_3}{\varepsilon_3}} \\ 0 &= \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3}}{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_3}}, \\ -\varepsilon_1 &= \varepsilon_2, \quad -\varepsilon_1 = \varepsilon_3, \end{aligned}$$

pero para la configuración MIM, $\varepsilon_2 = 1 - \frac{\omega_{pp}^2}{\omega^2}$, $\varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_{po}^2}{\omega^2}$, donde ω_{pp} y ω_{po} son las frecuencias de plasma de la plata y el oro, respectivamente. Con las dos soluciones se obtiene:

$$\omega_{sp2} = \frac{\omega_{pp}}{\sqrt{1 + \varepsilon_1}}, \quad \omega_{sp3} = \frac{\omega_{po}}{\sqrt{1 + \varepsilon_1}}, \quad (5.16)$$

donde ω_{sp2} y ω_{sp3} son las frecuencias del plasmón de superficie para las interfaces solas aire-plata y aire-oro. Las soluciones tienden a esos dos valores cuando $\beta \rightarrow \infty$. Las soluciones de los SPP en sistemas multicapa asimétricos MIM tienden a esos dos valores cuando $\beta \rightarrow \infty$.

Capítulo 6

Análisis numérico

Para complementar el análisis teórico realizado en secciones anteriores sobre las relaciones de dispersión para sistemas de una sola interfaz y sistemas multicapa, se simulan las componentes en x y z del campo electromagnético en un programa en Python, primero para los sistemas de una sola interfaz con y sin absorción dentro del metal. Luego para sistemas multicapa con ambos modos plasmónicos $\omega_{\pm}$ con y sin absorción dentro del metal, para este fin, se usan las ecuaciones vistas en la teoría. En algunas partes del código se describe la función de las líneas de código con comentarios dentro de Python, que dentro del mismo están denotadas por un $\#$. Para todas las simulaciones de una sola interfaz se visualiza el plano $x-z$, en un área que mide 7.2×10^{-7} m por 2.4×10^{-7} m.

6.1. Sistema de una sola interfaz

Para esta sección se retoma lo visto en la teoría de la sección 3.2.

6.1.1. Sistema de una sola interfaz sin absorción

Se toma en consideración la parte real de las ecuaciones (3.30-3.35), incluyendo la parte temporal que le corresponde a cada ecuación.

Para el medio dieléctrico $z > 0$:

$$H_y(x, z, t) > 0$$

$$H_y = A e^{i(\beta x - \omega t)} e^{-k_2 z}, \quad (6.1)$$

$$E_x(x, z, t) > 0$$

$$E_x = iA \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} k_2 e^{i(\beta x - \omega t)} e^{-k_2 z}, \quad (6.2)$$

$$E_z(x, z, t) > 0$$

$$E_z = -A \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} e^{i(\beta x - \omega t)} e^{-k_2 z}. \quad (6.3)$$

Similarmente para el medio conductor $z < 0$:

$$H_y(x, z, t) < 0$$

$$H_y = Ae^{i(\beta x - \omega t)}e^{k_1 z}, \quad (6.4)$$

$$E_x(x, z, t) < 0$$

$$E_x(z) = -iA \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} k_1 e^{i(\beta x - \omega t)} e^{k_1 z}, \quad (6.5)$$

$$E_z(x, z, t) < 0$$

$$E_z(z) = -A \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} e^{i(\beta x - \omega t)} e^{k_1 z}. \quad (6.6)$$

Para estas seis ecuaciones (6.1-6.6), se tienen que calcular las constantes β , k_1 y k_2 , lo cual se realiza con las ecuaciones (3.39) y (4.2).

6.1.2. Código en Python para un sistema de una sola interfaz sin absorción dentro del metal

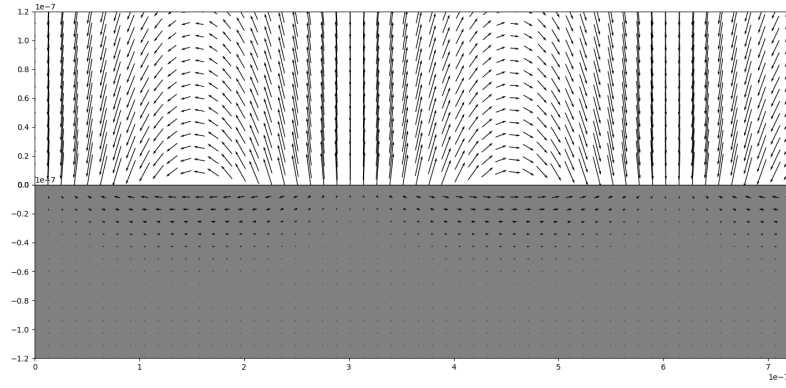
```
1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  encoding='ISO-8859-1'
3
4  import numpy as np
5  from matplotlib import pyplot as plt
6  from matplotlib import animation
7  #Se especifica el intervalo de la interfaz sencilla
8  b=7.2*10**(-7) #Ancho en metros en x para ambos materiales
9  h=1.2*10**(-7) #Ancho en metros del material en z para cada material
10 #Se genera la cuadrícula de puntos cuyo campo eléctrico se quiere visualizar
11 a=40
12 X,Y = np.meshgrid(np.linspace(0,b,a),np.linspace(h/(a//4),h,a//4))
13 X1,Y1 = np.meshgrid(np.linspace(0,b,a),np.linspace(-h,-h/(a//4),a//4))
14 #Datos
15 ep0=8.854*10**(-12)
16 ep1=-12.48
17 ep2= 1.000589 #Valor de la constante dieléctrica del dieléctrico (Aire)
18 c=299792458 #(m/s) Velocidad de la luz en el vacío
19 n=np.sqrt(ep2) #Índice de refracción del medio de incidencia
20 v=c/n #Velocidad de la luz en el medio de incidencia (m/s)
21 l=6.33*10**(-7) # Longitud de onda del haz en el vacío (m)
22 w=2*np.pi*(v/l) #Frecuencia angular
23 k0=w/c #Constante de propagación de la luz en el dieléctrico
24 B=k0*np.sqrt((ep1*ep2)/(ep1+ep2)) #Beta (Relación de dispersión)
25 k1=k0*abs(ep1)/np.sqrt(abs(ep1+ep2))
26 k2=k0*abs(ep2)/np.sqrt(abs(ep1+ep2))
27
28 #Funciones a animar (Campo eléctrico).
29 #Se escribe el perfil de la onda que describe cada componente cuando t=0
30 #z>0
31 U = k2/(w*ep0*ep2)*np.exp(-k2*Y)*np.exp(1j*B*X)*1j #E_x
```

```
31 V = -B/(w*ep0*ep2)*np.exp(-k2*Y)*np.exp(1j*B*X) #E_z
32
33 #z<0
34 U1 = -k1/(w*ep0*ep1)*np.exp(k1*Y1)*np.exp(1j*B*X1)*1j #E_x
35 V1 = -B/(w*ep0*ep1)*np.exp(k1*Y1)*np.exp(1j*B*X1) #E_z
36
37 #Se configuran los gráficos a visualizar. El dos indica que tendremos
    dos gráficos diferentes acomodadas en dos renglones y una columna,
    de manera similar a una matriz.
38 fig, ax = plt.subplots(2,1,sharex=True)
39 #Se acomoda la longitud de las flechas.
40 arrow_len_scale = 7500
41 #[0] y [1] denotarán las graficas a animar,
    correspondientes a las zonas z>0 y z<0, respectivamente
42 Q = ax[0].quiver(X, Y, U.real, V.real, pivot='middle',scale=arrow_len_scale,
    scale_units='width',width=0.002)
43
44 Q1 = ax[1].quiver(X1,Y1,U1.real,V1.real,pivot='middle',scale=arrow_len_scale,
    scale_units='width',width=0.002)
45
46 #Se definen los límites observables de las dos gráficos. Se asegura de
    que se vea la misma cantidad de material en la parte superior e inferior
47 ax[0].set_xlim(0,b)
48 ax[0].set_ylim(0, h)
49 ax[0].tick_params(axis="x",which='both',bottom=False,top=False,labelbottom=False)
50
51 ax[1].set_xlim(0,b)
52 ax[1].set_ylim(-h, 0)
53 ax[1].set_facecolor('grey')
    #Se da un color gris al espacio correspondiente al metal
54
55 #Se anima la función para z>0.
56 def update_quiver(t, Q, X, Y):
57     U = k2/(w*ep0*ep2)*np.exp(-k2*Y)*np.cos(B*X-w*t)
57     V = -B/(w*ep0*ep2)*np.exp(-k2*Y)*np.sin(B*X-w*t)
59     Q.set_UVC(U.real,V.real)
60     return Q,
61
62 #Se define otro quiver para la animación de la parte z<0.
63 def update_quiver1(t1, Q1, X1, Y1):
64     U1 = -k1/(w*ep0*ep1)*np.exp(k1*Y1)*np.cos(B*X1-w*t1)
65     V1 = -B/(w*ep0*ep1)*np.exp(k1*Y1)*np.sin(B*X1-w*t1)
66     Q1.set_UVC(U1.real,V1.real)
67     return Q1,
68 #Comando para la animación: 42 indica el espaciado entre frames en ms
69 anim =animation.FuncAnimation(fig, update_quiver, fargs=(Q, X, Y),frames=300,
    interval=100, blit=False), animation.FuncAnimation(fig, update_quiver1,
    fargs=(Q1, X1, Y1),frames=300, interval=100, blit=False)
70
71 fig.tight_layout()
72 fig.subplots_adjust(hspace=0)
73 plt.show()
```

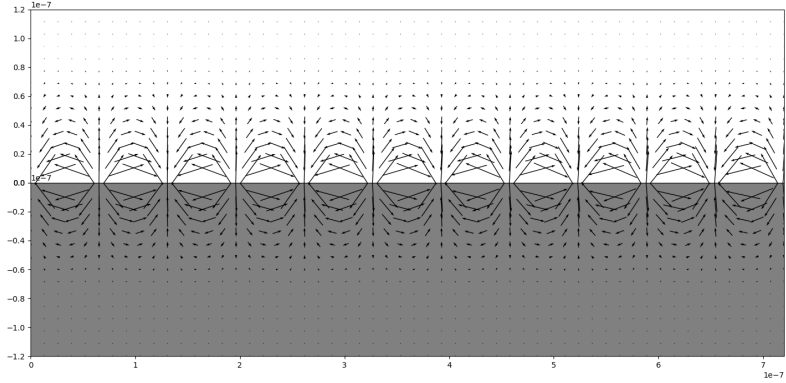
En la línea 21 y 22 del código se introducen los valores de ε_1 y ε_2 , respectivamente. El valor para ε_1 se introduce según la frecuencia de la luz incidente sobre el metal, que en el caso del oro, los valores se extrajeron de [17]. Para comparar, se introducen también los valores para la plata, extraídos de [18]. Se hace hincapié en que se trata con metales ideales sin absorción, por lo cual se omiten las partes imaginarias de la función dieléctrica. En la siguiente tabla se muestran los valores de $\varepsilon_1(\omega)$ para dos longitudes de onda diferentes.

λ	Oro	Plata
633 nm	-12.48+i1.3182	-19.803+i2.6804
400 nm	-1.1199+i6.4352	-4.4319+i2.4695

Resultados



(a) Oro 633 nm

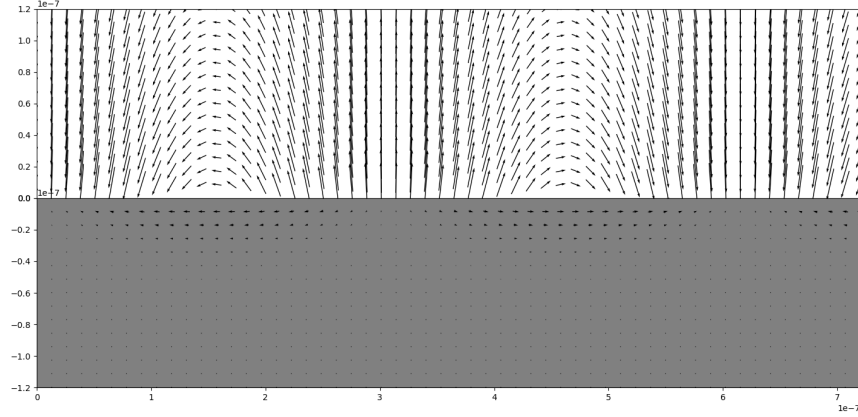


(b) Oro 400 nm

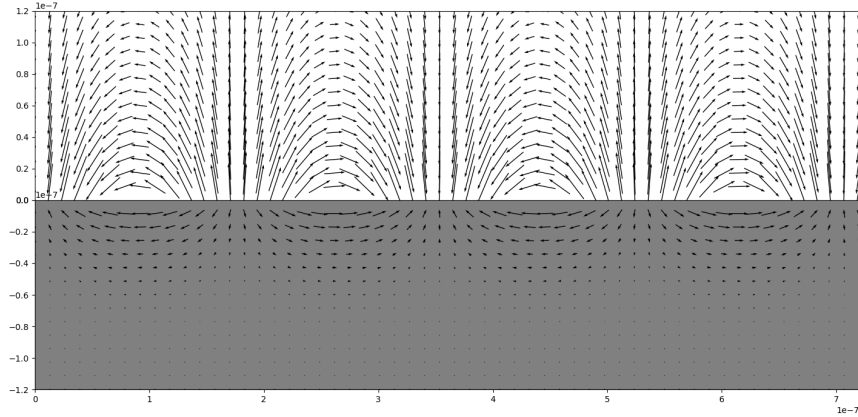
Figura 6.1: Simulaciones del campo eléctrico para una sola interfaz aire-oro sin absorción

Primero se compara el campo eléctrico para el oro, sin considerar absorción, para dos longitudes de onda diferentes (figuras 6.1a y 6.1b). Se observa que para 633 nm, el plasmón tiene una longitud de onda más grande que para el caso de 400 nm. Para una longitud de onda de luz incidente de 633 nm, la onda decae rápidamente dentro del metal, además de que en el metal la amplitud del campo eléctrico es más pequeña.

Para 400 nm, se observa una distancia de decaimiento similar en ambos materiales, lo que concuerda con lo visto en la sección 4.1, donde se señaló que si $\varepsilon_2 \approx |\text{Re}[\varepsilon_1(\omega)]|$, la longitud de decaimiento dentro de cada material es aproximadamente la misma. (véase figura (4.1)).



(a) Plata 633 nm



(b) Plata 400 nm

Figura 6.2: Simulaciones del campo eléctrico para una sola interfaz aire-plata sin absorción

Dentro del metal, cuando la luz incidente es de 633 nm para la interfaz plata-aire (figura 6.2a), se aprecia que el campo eléctrico penetra menos en el metal respecto de la interfaz oro-aire a la misma frecuencia ω incidente. Para la plata a 400 nm no se observa una longitud de decaimiento similar en ambos materiales como en el oro con 400 nm, además de que la longitud de onda del plasmón es más grande (figura 6.2b).

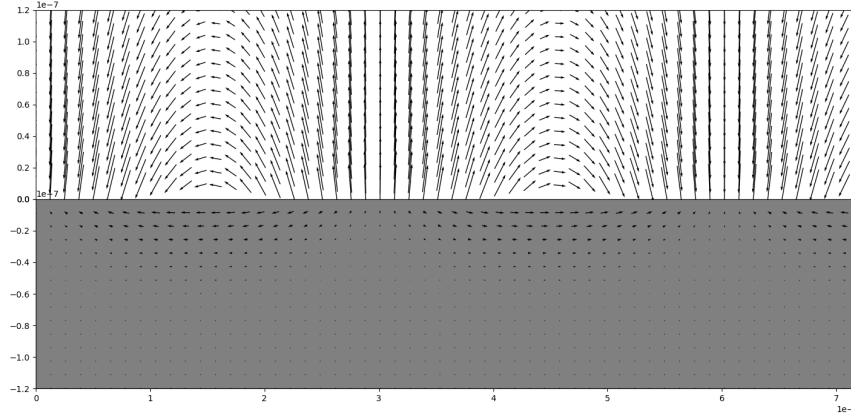
En los cuatro casos anteriores, las flechas que representan el campo eléctrico aparentan salir desde al menos algún punto ubicado sobre la interfaz y entrar en otro punto, también ubicado en $z = 0$, cumpliéndose para ambos materiales esta trayectoria de las líneas de campo.

6.1.3. Sistema de una sola interfaz con absorción

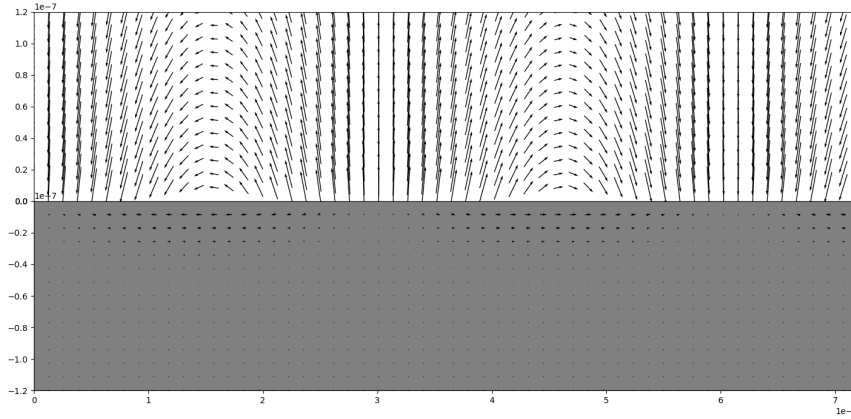
Para esta sección se hace uso de las mismas ecuaciones de la sección anterior, pero ahora considerando a las constantes β , k_1 y k_2 como números de onda complejos.

Para lograr esto, basta con modificar la línea 16 del código de la sección anterior:

16 $\epsilon_{p1} = -12.48 + 1.3182j$



(a) Oro 633 nm, con absorción



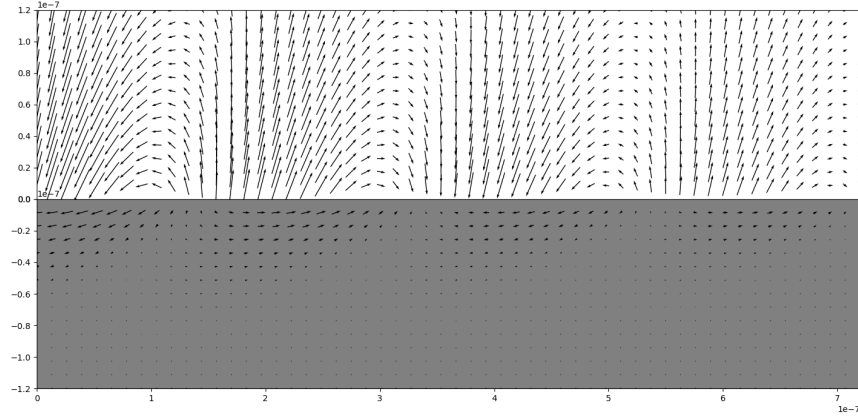
(b) Plata 633 nm, con absorción

Figura 6.3: Simulaciones del campo eléctrico para una sola interfaz aire-oro y aire-plata con absorción a 633 nm

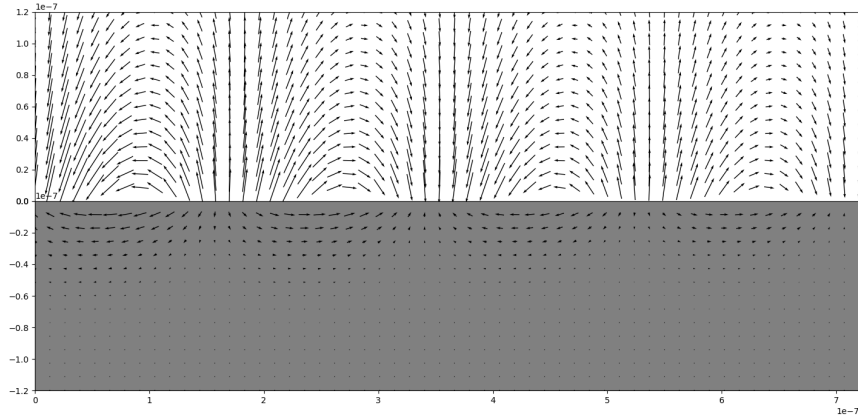
Ahora se comparan los campos eléctricos para el oro y plata a 633 nm, pero con una función dieléctrica compleja en el metal (figuras 6.3a y 6.3b).

Ambos campos eléctricos son similares, con una longitud de onda similar y distancia de decaimiento también parecida dentro del metal, sin embargo, se visualiza que el campo eléctrico decae más rápido dentro de la plata. Se conserva la tendencia de las líneas de campo eléctrico a salir de un mismo punto (para ambos materiales) y a entrar a otro punto, con dichos puntos ubicados sobre la interfaz.

En el caso con absorción para 400 nm en oro y plata (figuras 6.4a y 6.4b) se nota que las trayectorias de las líneas de campo ya no forman una trayectoria en forma de parábola. La plata tiene una longitud de onda para el plasmón más reducida. Para el oro y plata se cuenta con una longitud de onda de plasmón más pequeña que las observadas para los 633 nm.



(a) Oro 400 nm, con absorción



(b) Plata 400 nm, con absorción

Figura 6.4: Simulaciones del campo eléctrico para una sola interfaz aire-oro y aire-plata con absorción a 400 nm

6.2. Sistemas multicapa simétricos

Para esta sección se retoma lo visto en la sección 3.3, donde se consideran los sistemas con los sub y sustratos del mismo material.

6.2.1. Sistema tricapa sin absorción

Se toman las ecuaciones (3.48-3.53), además de (5.4-5.6) para los modos impares y (5.8-5.10) para los modos pares.

El conjunto de ecuaciones que se comparten para ambos modos es para el medio III, $z > a$:

$$H_{y\pm}(x, z, t) > a$$

$$H_y = Ae^{i(\beta x - \omega t)}e^{-k_2 z}, \quad (6.7)$$

$$E_{x\pm}(x, z, t) > a$$

$$E_x = iA \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} k_2 e^{i(\beta x - \omega t)} e^{-k_2 z}, \quad (6.8)$$

$$E_{z\pm}(x, z, t) > a$$

$$E_z = -A \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} e^{i(\beta x - \omega t)} e^{-k_2 z}. \quad (6.9)$$

Modos impares

Para el medio I, $-a < z < a$

$$-a < H_{y+}(x, z, t) < a$$

$$H_y = 2C e^{i(\beta x - \omega t)} \cosh(k_1 z), \quad (6.10)$$

$$-a < E_{x+}(x, z, t) < a$$

$$E_x = -2i \frac{k_1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} C e^{i(\beta x - \omega t)} \sinh(k_1 z), \quad (6.11)$$

$$-a < E_{z+}(x, z, t) < a$$

$$E_z = 2 \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} C e^{i(\beta x - \omega t)} \cosh(k_1 z). \quad (6.12)$$

Para el medio II, $z < -a$:

$$H_{y+}(x, z, t) < -a$$

$$H_y = A e^{i(\beta x - \omega t)} e^{k_2 z}, \quad (6.13)$$

$$E_{x+}(x, z, t) < -a$$

$$E_x = -iA \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} k_2 e^{i(\beta x - \omega t)} e^{k_2 z}, \quad (6.14)$$

$$E_{z+}(x, z, t) < -a$$

$$E_z = -A \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} e^{i(\beta x - \omega t)} e^{k_2 z}. \quad (6.15)$$

Modos pares

Para el medio I, $-a < z < a$

$$-a < H_{y+}(x, z, t) < a$$

$$H_y = 2Ce^{i(\beta x - \omega t)} \sinh(k_1 z), \quad (6.16)$$

$$-a < E_{x+}(x, z, t) < a$$

$$E_x = -2i \frac{k_1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} C e^{i(\beta x - \omega t)} \cosh(k_1 z), \quad (6.17)$$

$$-a < E_{z+}(x, z, t) < a$$

$$E_z = 2 \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} C e^{i(\beta x - \omega t)} \sinh(k_1 z). \quad (6.18)$$

Para el medio II, $z < -a$:

$$H_{y-}(x, z, t) < -a$$

$$H_y = -A e^{i(\beta x - \omega t)} e^{k_2 z}, \quad (6.19)$$

$$E_{x-}(x, z, t) < -a$$

$$E_x = iA \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} k_2 e^{i(\beta x - \omega t)} e^{k_2 z}, \quad (6.20)$$

$$E_{z-}(x, z, t) < -a$$

$$E_z = A \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} e^{i(\beta x - \omega t)} e^{k_2 z}. \quad (6.21)$$

Para estas 15 ecuaciones (6.7-6.21), se tienen que calcular las constantes k_1 y k_2 , lo cual se realiza con la ecuación (3.61).

6.3. Código en Python para un sistema tricapa simétrico sin absorción dentro del metal

Se omitirán algunas líneas que ya aparecen en el código para una sola interfaz. Para todas las simulaciones de una sola interfaz se visualiza el plano $x - z$, en un área que mide 5.4×10^{-7} m por 1.5×10^{-7} m.

Se inicia con el modo impar con configuración IML.

Modos impares

```

8   b=5.4*10**(-7) #Ancho en metros en x para los tres materiales
9   h=5*10**(-8) #Ancho en metros del material en z para los medios II y III
10  a=2.5*10**(-8) #medio del centro (Ancho total/2)
11  #Se genera la cuadrícula de puntos cuyo campo eléctrico se quiere visualizar
12  n=40
13  X1,Y1 = np.meshgrid(np.linspace(0,b,n),np.linspace(h/(n//4)+a,h+a,n//4))
14  X2,Y2 = np.meshgrid(np.linspace(0,b,n),np.linspace(-a+h/(n//4),a-h/(n//4),n//4))
15  X3,Y3 = np.meshgrid(np.linspace(0,b,n),np.linspace(-a-h,-a-h/(n//4),n//4))
16
17  #Datos
18  c=299792458 #(m/s) Velocidad de la luz en el vacío
19  ep0=8.854*10**(-12) # Permitividad eléctrica en el vacío (F/m)
20  ep2= 1.000589 #Valor de la constante dieléctrica del dieléctrico (Aire)
21  nind=np.sqrt(ep2) #Índice de refracción del aire.
22  v=c/nind #Velocidad de la luz en el medio de incidencia (m/s)
23  wp=1.35063*10**16 #Frecuencia de plasma del material en rad/s
24  u=4.73606*10**14 #Frecuencia en Hz del haz incidente.
    Se elige la correspondiente a 633 nm.
25  w=2*np.pi*(u) #Frecuencia angular
26  k0=w/v #Constante de propagación de la luz en el dieléctrico
27  B=1.1*10**7 #En la gráfica de la relación implícita se busca a qué Beta
    le corresponde la frecuencia elegida
28  ep1=1-(wp/w)**2
29  k1=np.sqrt(B**2-k0**2*ep1) #Número de onda dentro del metal
30  k2=np.sqrt(B**2-k0**2*ep2) #Número de onda dentro de los dieléctricos
31
32  #Funciones a animar
33  #z>a
34  U1 = k2/(w*ep0*ep2)*np.exp(-k2*Y1)*np.exp(1j*B*X1)*1j #E_x
35  V1 = -B/(w*ep0*ep2)*np.exp(-k2*Y1)*np.exp(1j*B*X1) #E_z
36
37  #-a<z<a
38  U2 = -2*(np.exp(-k2*a)/(2*np.cosh(k1*a)))*E_x
    *k1/(w*ep0*ep1)*np.sinh(k1*Y2)*np.exp(1j*B*X2)*1j
39  V2 = 2*(np.exp(-k2*a)/(2*np.cosh(k1*a)))*E_z
    *B/(w*ep0*ep1)*np.cosh(k1*Y2)*np.exp(1j*B*X2)
40
41  #z<-a
42  U3 = -k2/(w*ep0*ep2)*np.exp(k2*Y3)*np.exp(1j*B*X3)*1j #E_x
43  V3 = -B/(w*ep0*ep2)*np.exp(k2*Y3)*np.exp(1j*B*X3) #E_z
44
45  #El tres indica que se tendrán tres renglones de gráficas
46  fig, ax = plt.subplots(3,1,sharex=True)
47
48  #[0], [1] y [2] denotarán las graficas a animar,
    correspondientes a las zonas z>a, -a<z<a y z<-a, respectivamente
49  Q1 = ax[0].quiver(X, Y, U1.real, V1.real, pivot='middle',width=0.001)
50  Q2 = ax[1].quiver(X, Y, U2.real, V2.real, pivot='middle',width=0.001)
51  Q3 = ax[2].quiver(X, Y, U3.real, V3.real, pivot='middle',width=0.001)
52
53  #Se definen los límites de las dos gráficas.
    Se asegura de que coincidan con los materiales dispuestos

```

```

54 ax[0].set_xlim(0,b)
55 ax[0].set_ylim(a, h+a)
56 ax[0].tick_params(axis="x", which='both',
    bottom=False, top=False, labelbottom=False)
57
58 ax[1].set_xlim(0,b)
59 ax[1].set_ylim(-a, a)
60 #Se da un color gris al metal
61 ax[1].set_facecolor('grey')
62
63 ax[2].set_xlim(0,b)
64 ax[2].set_ylim(-h-a, -a)
65
66 #Se anima la función para z>a
67 def update_quiver1(t1, Q1, X1, Y1):
68     U1 = k2/(w*ep0*ep2)*np.exp(-k2*Y1)*np.exp(1j*(B*X1-w*t1))*1j #E_x
69     V1 = -B/(w*ep0*ep2)*np.exp(-k2*Y1)*np.exp(1j*(B*X1-w*t1)) #E_z
70     Q1.set_UVC(U1.real,V1.real)
71     return Q1,
72
73 #Se define otro quiver para la animación de la parte -a<z<a
74 def update_quiver2(t2, Q2, X2, Y2):
75     U2 = -2*(np.exp(-k2*a)/(2*np.cosh(k1*a))) #E_x
    *k1/(w*ep0*ep1)*np.sinh(k1*Y2)*np.exp(1j*(B*X2-w*t2))*1j
76     V2 = 2*(np.exp(-k2*a)/(2*np.cosh(k1*a))) #E_z #E_z
    *B/(w*ep0*ep1)*np.cosh(k1*Y2)*np.exp(1j*(B*X2-w*t2))
77     Q2.set_UVC(U2.real,V2.real)
78     return Q2,
79
80 #Se define otro quiver para la animación de la parte z<-a
81 def update_quiver3(t3, Q3, X3, Y3):
82     U3 = -k2/(w*ep0*ep2)*np.exp(k2*Y3)*np.exp(1j*(B*X3-w*t3))*1j #E_x
83     -B/(w*ep0*ep2)*np.exp(k2*Y3)*np.exp(1j*(B*X3-w*t3)) #E_z
84     Q3.set_UVC(U3.real,V3.real)
85     return Q3,
86
87 anim =animation.FuncAnimation(fig, update_quiver1, fargs=(Q1, X1, Y1),
    frames=200, interval=100, blit=False),
    animation.FuncAnimation(fig, update_quiver2, fargs=(Q2, X2, Y2),
    frames=200, interval=100, blit=False),
    animation.FuncAnimation(fig, update_quiver3, fargs=(Q3, X3, Y3),
    frames=200, interval=100, blit=False)

```

Para generar la simulación del campo eléctrico para la configuración MIM, basta con modificar las líneas 20 y 28 del código:

```

20 ep1= 1.000589 #Valor de la constante
28 ep2=1-(wp/w)**2

```

La interpretación física es que simplemente se cambia la disposición de los materiales, se cambia el dieléctrico por el metal y viceversa. Para especificar que se cambió la configuración, dentro del código, se centra la atención en la línea 61:

```

61 ax[1].set_facecolor('grey')

```

Se remueve dicha línea y se crean otras dos para los sub y superestratos, especificando dentro de los corchetes con 0 y 2.

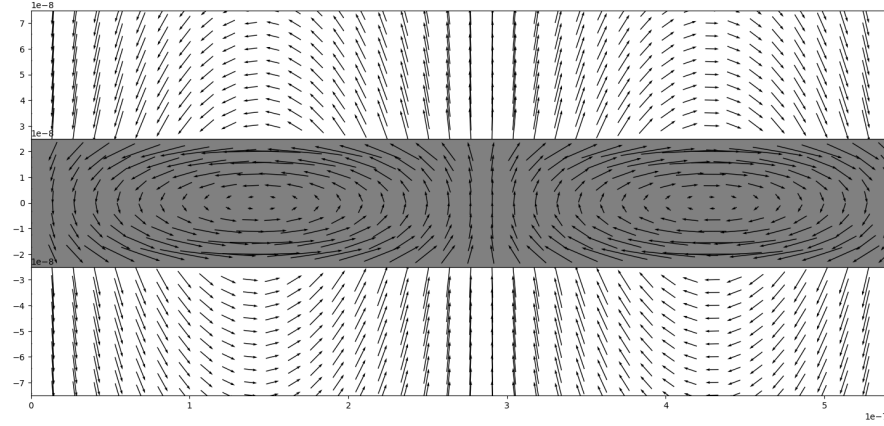


Figura 6.5: Simulación del campo magnético para un sistema tricapa en modo impar IMI aire-oro-aire sin absorción

Comenzando por el modo impar IMI (figura 6.5), se observa un comportamiento diferente de las ondas entre las dos partes dieléctricas y el metal, puesto que las líneas de campo siguen una trayectoria “continua”. Estas líneas parecen rotar alrededor de puntos ubicados dentro del centro del medio metálico (en $z = 0$). En la imagen, por ejemplo, a mitad de los materiales mostrados a lo largo de x , en la parte superior del metal (cerca a la interfaz con el dieléctrico superior) se obtendrá una carga positiva, y sobre ese mismo punto en x pero en la parte inferior del metal (cerca a la interfaz con el dieléctrico inferior) se obtendrá una carga negativa.

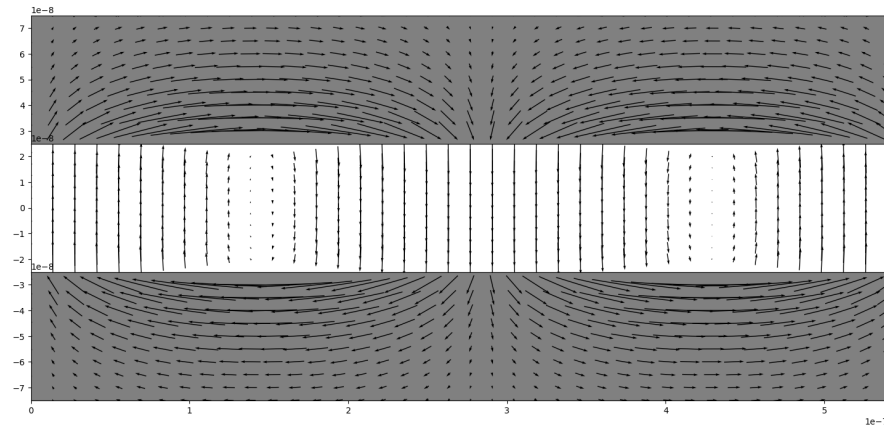


Figura 6.6: Simulación del campo eléctrico para un sistema tricapa en modo impar MIM oro-aire-oro sin absorción

Para el caso MIM impar (figura 6.6), nuevamente se tiene que las líneas de campo siguen una trayectoria continua, rotando entorno a un punto ubicado en el centro del medio dieléctrico. Se observa la interesante propiedad de que las líneas de campo obtenidas para el dieléctrico son perpendiculares a las dos interfaces de la configuración. Por ejemplo, se tiene que en la mayoría de los puntos es como si las líneas viajaran entre dos placas planas paralelas con carga opuesta separadas por una determinada distancia.

Modos pares

Para simular el campo eléctrico en los modos pares, de nueva cuenta se basa en el código mostrado para los modos impares. Las líneas del código serán las 38, 39, 42, 43, 75, 76, 82 y 83.

```

38  U2 = 2*(np.exp(-k2*a)/(2*np.sinh(k1*a)))
    *k1/(w*ep0*ep1)*np.cosh(k1*Y2)*np.exp(1j*B*X2)*1j #E_x
39  V2 = 2*(np.exp(-k2*a)/(2*np.sinh(k1*a)))
    *B/(w*ep0*ep1)*np.sinh(k1*Y2)*np.exp(1j*B*X2) #E_z

42  U3 = k2/(w*ep0*ep2)*np.exp(k2*Y3)*np.exp(1j*B*X3)*1j #E_x
43  V3 = B/(w*ep0*ep2)*np.exp(k2*Y3)*np.exp(1j*B*X3) #E_z

75  U2 = 2*(np.exp(-k2*a)/(2*np.sinh(k1*a)))
    *k1/(w*ep0*ep1)*np.cosh(k1*Y2)*np.exp(1j*(B*X2-w*t2))*1j #E_x
76  V2 = 2*(np.exp(-k2*a)/(2*np.sinh(k1*a)))
    *B/(w*ep0*ep1)*np.sinh(k1*Y2)*np.exp(1j*(B*X2-w*t2)) #E_z

82  U3 = k2/(w*ep0*ep2)*np.exp(k2*Y3)*np.exp(1j*(B*X3-w*t3))*1j #E_x
83  V3 = B/(w*ep0*ep2)*np.exp(k2*Y3)*np.exp(1j*(B*X3-w*t3)) #E_z

```

Para generar la simulación del campo eléctrico para la configuración MIM, basta con modificar nuevamente las líneas 20 y 28 del código:

```

20  ep1= 1.000589 #Valor de la constante

28  ep2=1-(wp/w)**2

```

Se retoma la modificación hecha para especificar también por colores la configuración del sistema, cambiando el color de los estratos II y III.

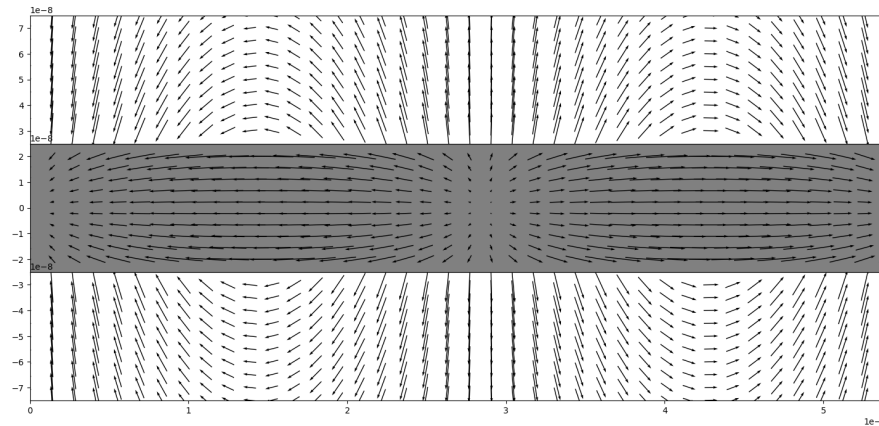


Figura 6.7: Simulación del campo eléctrico para un sistema tricama en modo par IMI aire-oro-aire sin absorción

Para el modo par en configuración IMI (figura 6.7) se tienen características similares al modo impar, exhibiendo líneas continuas, con la gran diferencia de que ahora se cuentan con puntos de carga positiva y negativa de manera alternada justo en el centro del medio metálico. Justo a mitad del material mostrado en x ahora se tienen en la parte superior e inferior del metal cargas positivas, mientras que en los extremos cargas negativas en las partes superiores e inferiores. Estas dos maneras en las que se acomodan los electrones dentro del metal en la configuración IMI también coinciden con el nombre asignado a cada modo: par e impar.

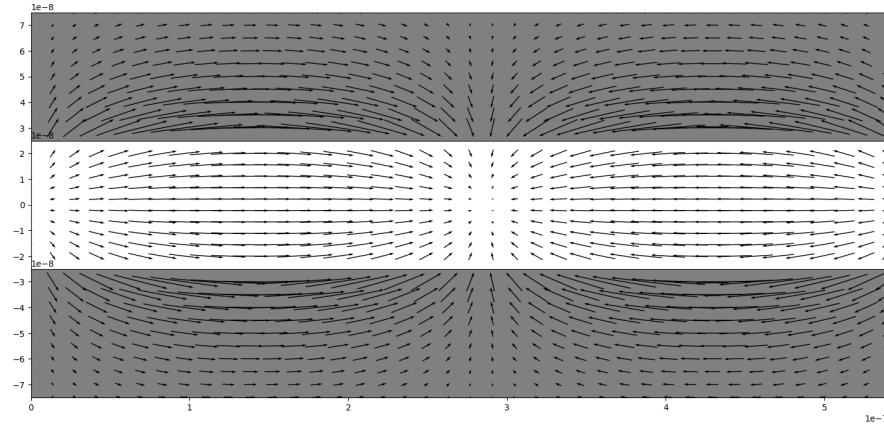


Figura 6.8: Simulación del campo eléctrico para un sistema tricapa en modo par MIM oro-aire-oro sin absorción

Para el modo par MIM (figura 6.8) se conserva la característica de las líneas continuas, con el aparente comportamiento de que salen desde un punto con carga dentro del dieléctrico y se dirigen a otro punto de carga contraria. A diferencia del modo impar MIM, ahora las líneas de campo son paralelas a las interfaces.

6.3.1. Sistema tricapa con absorción

Configuración IMI

Para simular el campo eléctrico de esta sección basta con tomar las ecuaciones de la sección anterior. Se toma una longitud de onda de 659 nm.

Tal como se realizó para el caso absorbente para una sola interfaz, basta con introducir también la parte imaginaria en la línea de código que se establece la respuesta dieléctrica correspondiente al medio metálico. Además, se introduce el valor complejo para β .

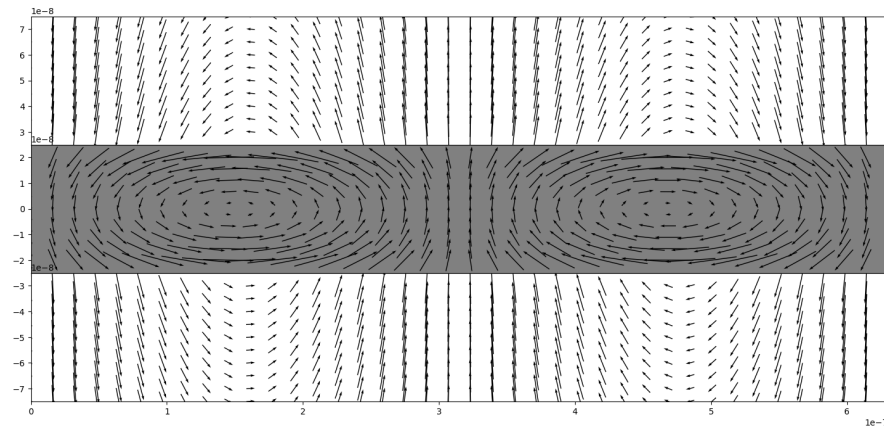


Figura 6.9: Simulación del campo eléctrico para un sistema tricapa en modo par IMI aire-oro-aire con absorción

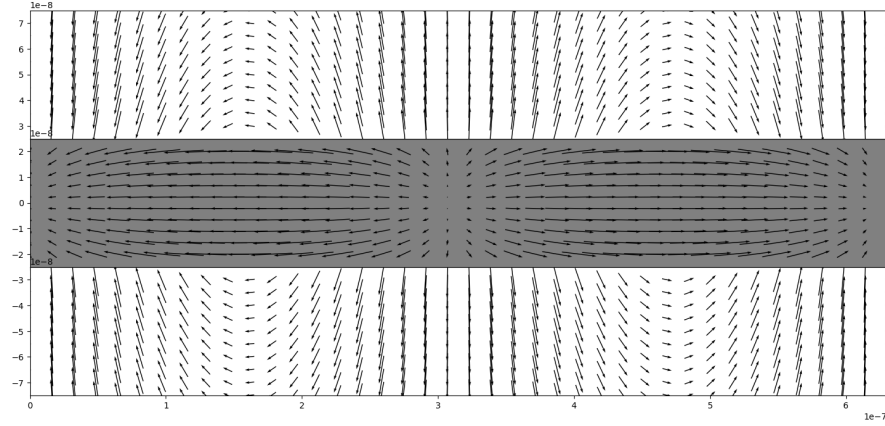


Figura 6.10: Simulación del campo eléctrico para un sistema tricapa en modo par IMI aire-oro-aire con absorción

De manera general, las líneas de campo eléctrico mostradas en las figuras (6.9) y (6.10) mantienen las mismas características que sus contrapartes sin absorción.

Configuración MIM

En esta sección únicamente se intercambia a ε_1 y ε_2 para simular el campo eléctrico.

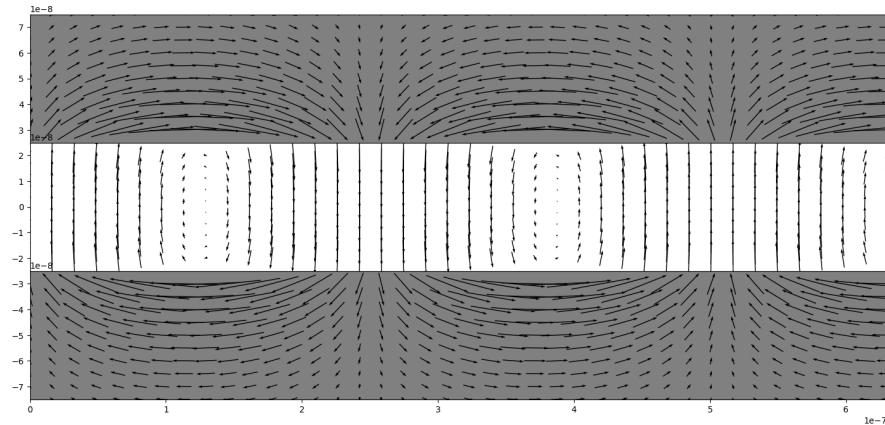
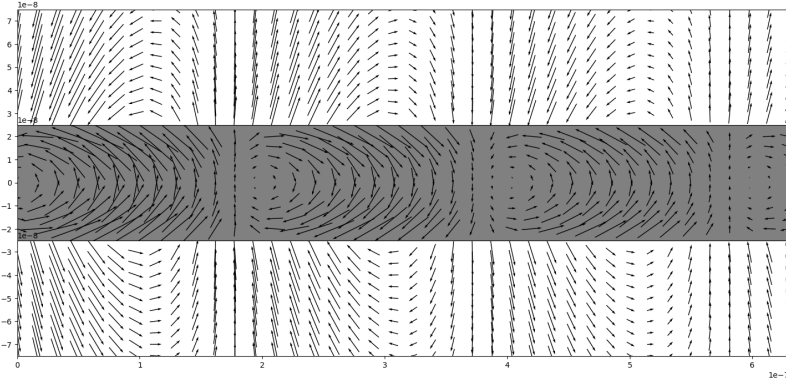


Figura 6.11: Simulación del campo eléctrico para un sistema tricapa en modo par MIM oro-aire-oro con absorción

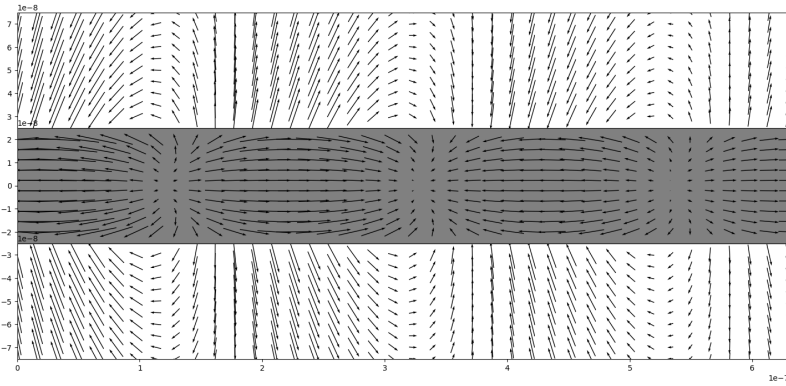
Nuevamente (figura 6.11), no se cuenta con desfases evidentes entre las ondas de los metales y el dieléctrico. De manera general, esta configuración mantiene las mismas características que su contraparte sin absorción.

Anteriormente se mostró que no se encontró solución alguna para los modos pares en configuración MIM de un metal real (figura 5.4). Si se analiza con detenimiento el caso sin absorción, se observa que las líneas de campo que se forman dentro del dieléctrico viajan de un punto de carga a otro punto de carga (opuesto al anterior), lo cual implica que dichos puntos tengan carga, pero dado que es un dieléctrico, no hay electrones libres que se muevan creando puntos con determinada carga para dirigir a las líneas de campo tal y como se muestra en la figura (5.9).

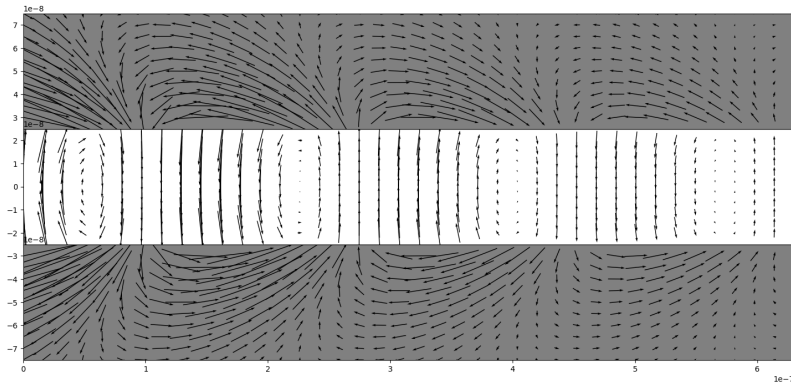
Modos multicapa con 413 nm



(a) Oro 413 nm, modo impar con absorción



(b) Oro 413 nm, modo par con absorción



(c) Oro 413 nm, modo impar con absorción

Figura 6.12: Simulaciones del campo eléctrico con absorción para sistemas tricapa con luz incidente a 413 nm.

Para los sistemas multicapa con oro y luz incidente a 413 nm, se conserva la característica de que las líneas de campo son continuas entre las interfaces. La longitud de onda de los plasmones es más pequeña que para el caso donde la luz incidente es de 659 nm. Sin embargo, para el modo par en configuración IMI existe un desfase en comparación al sistema con luz incidente de 659 nm.

En las tres simulaciones correspondientes a los sistemas multicapas con 413 nm, las líneas de campo ya no exhiben una trayectoria de parábola. El modo impar en configuración MIM conserva las características líneas de campo perpendiculares a las interfaces.

6.3.2. Visualización distribución de carga para modos impares e impares

Previamente se describió cómo queda la distribución de cargas debido a los electrones libres en un metal. Para dejar una idea más clara, se usan las imágenes resultantes de las simulaciones hechas en este capítulo para ilustrar cómo queda la distribución de cargas.

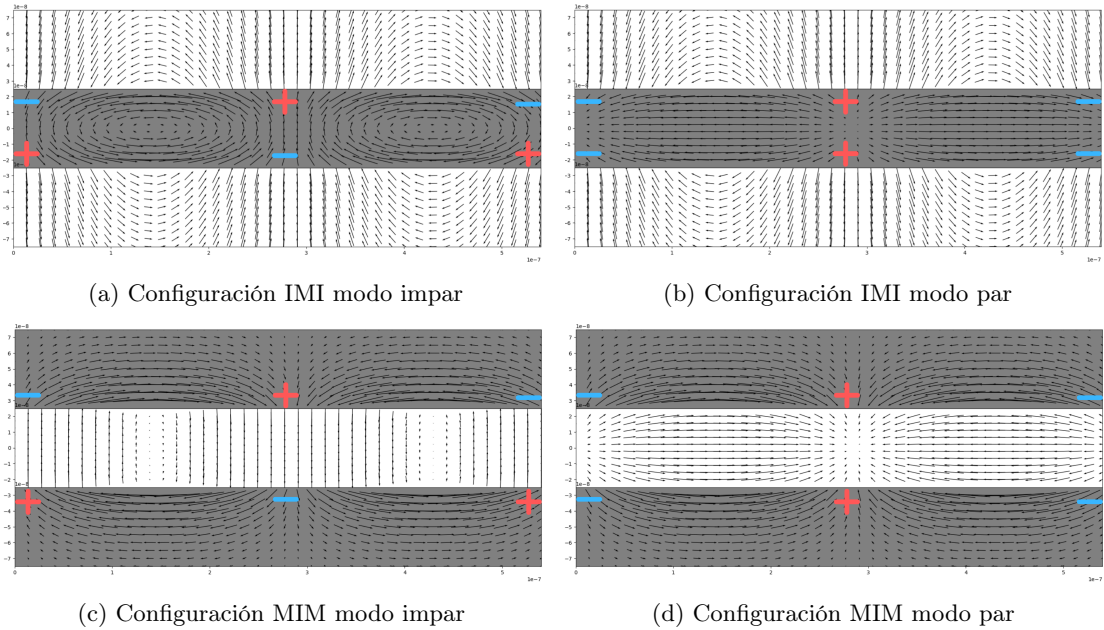


Figura 6.13: Dispersión de carga sistema tricapa

Para obtener estas imágenes se sigue el razonamiento de que los electrones viajan en sentido contrario a las líneas del campo electromagnético.

Capítulo 7

Conclusiones

Con base en la teoría electromagnética clásica y las ecuaciones de Maxwell se dedujeron las ecuaciones que describen a los Plasmones Polaritones de superficie.

Se mostró la deducción de las relaciones de dispersión para los sistemas de una sola interfaz y para los sistemas de tres capas. Se demostró que las relaciones de dispersión de una sola interfaz son un caso especial de las relaciones de dispersión de los sistemas de tres capas.

Se graficaron las relaciones de dispersión para una sola interfaz con absorción y sin absorción, en dichas gráficas se exhibe que entre mayor sea el valor de ε_2 del material dieléctrico, se alcanzan valores más grandes para β , que es el número de onda del plasmón.

Se graficaron las relaciones de dispersión para los sistemas tricapa para los casos con y sin absorción dentro del metal. En el análisis numérico se simuló al menos un caso para los sistemas de una sola interfaz y configuración tricapa, para los casos con absorción y sin absorción dentro del metal.

La relación de dispersión para un sistema de una sola interfaz permite estudiar la distancia de decaimiento dentro de los dos materiales. Con el análisis numérico se demostró que la distancia de decaimiento es aproximadamente la misma para cada material si $\varepsilon_2 \approx |\text{Re}[\varepsilon_1(\omega)]|$ cuando se desprecia la absorción dentro del metal.

Con las dos relaciones de dispersión que se obtienen para el caso especial donde los medios superior e inferior de un sistema de tres capas son iguales, se obtuvieron relaciones de dispersión que describen los modos plasmónicos pares e impares. Para el caso sin absorción dentro del metal, en la configuración IMI, se encontró que las curvas de dispersión correspondientes a los modos impares aparecen por encima de la curva de dispersión correspondiente a una interfaz sola aire-metal, mientras que las curvas para los modos pares aparecen por debajo de esta. En la configuración MIM pasa lo contrario, las curvas de dispersión para los modos pares aparecen por arriba de la curva de dispersión correspondiente a una sola interfaz, mientras que para los modos impares aparecen por debajo.

Cuando se resolvieron las ecuaciones implícitas necesarias para graficar las relaciones de dispersión de los sistemas multicapa, se encontró que el método numérico de la secante es más eficiente que el método que recomienda la documentación de `findroot()` (método de Muller).

En el caso absorbente, para el sistema IMI, en los modos pares se alcanzan valores mayores para β ; por otra parte, para el sistema MIM en los modos impares se alcanzan valores mayores para β . Cabe resaltar que no se encontraron soluciones para el modo par en el sistema MIM.

Para el análisis de las relaciones de dispersión de los sistemas tricapa asimétricos sin absorción, se encontró que en la configuración IMI los plasmones sólo son excitables para valores ubicados a la derecha de la línea de luz con mayor valor de ε_2 . Se encontró que la configuración MIM tiene mucha similitud a su contraparte sin absorción. Para la configuración IMI y MIM se encontró que las curvas de dispersión del sistema tricapa sólo se encuentran por arriba o por debajo de las dos curvas de dispersión correspondientes para interfaces solas, y no entre estas dos. Se demostró que

las soluciones tienden a las frecuencias del plasmón de superficie de las dos interfaces solas que se pueden formar por la configuración cuando $\beta \rightarrow \infty$.

Para el caso con absorción en sistemas tricapas, se encontró que en ambas configuraciones se heredan características de las dos relaciones de dispersión para las dos interfaces sencillas que pueden formarse del sistema. En la configuración IMI, la curva de dispersión tiende a acercarse a la relación de dispersión para la interfaz sola con menor valor de ε_2 . En la configuración MIM, las curvas de dispersión alcanzan valores mayores de β respecto de las dos interfaces solas que pueden salir del sistema.

Para todos los casos simétricos se encontró que entre más delgado sea el medio central, las curvas de dispersión para los sistemas tricapa se alejan más de las curvas de dispersión correspondientes a las interfaces solas, lo que se puede traducir en valores más grandes para β en los casos con absorción.

En el análisis numérico se encontró que para los sistemas multicapa el campo electromagnético es continuo entre las interfaces, dando como resultado un desfase de 180° entre las ondas de un metal y un dieléctrico respecto de los sistemas de una sola interfaz, para el caso de luz incidente a 659 nm. Se encontró que en la configuración MIM en modo impar las líneas de campo eléctrico dentro del dieléctrico tienden a ser perpendiculares a las interfaces; esto se cumple para el caso sin absorción y para el caso con absorción. Cuando la longitud de onda incidente cambia de 659 nm a 413 nm en los sistemas multicapa, las líneas de campo siguen siendo continuas entre las interfaces pero ya no exhiben una forma sinusoidal, y en el modo par para la configuración IMI se nota un desfase en las ondas del medio central respecto de las ondas de los medios externos.

Bibliografía

- [1] A. Sommerfeld. Ueber die fortpflanzung elektrodynamischer wellen längs eines drahtes. *Annalen der Physik* vol. 303 iss. 2, 303, 1899.
- [2] J. Zenneck. Über die fortpflanzung ebener elektromagnetischer wellen längs einer ebenen leiterfläche und ihre beziehung zur drahtlosen telegraphie. *Annalen der Physik* vol. 328 iss. 10, 328, 1907.
- [3] R. W. Wood. On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum. *Proceedings of the Physical Society of London 1902-jun* vol. 18 iss. 1, 18, jun 1902.
- [4] U. Fano. The theory of anomalous diffraction gratings and of quasi-stationary waves on metallic surfaces (sommerfeld's waves). *J. Opt. Soc. Am.*, 31(3):213–222, Mar 1941.
- [5] Georg Goubau. Surface waves and their application to transmission lines. *Journal of Applied Physics*, 21(11):1119–1128, 1950.
- [6] R. H. Ritchie, E. T. Arakawa, J. J. Cowan, and R. N. Hamm. Surface-plasmon resonance effect in grating diffraction. *Phys. Rev. Lett.*, 21:1530–1533, Nov 1968.
- [7] E. Kretschmann and H. Raether. Notizen: Radiative decay of non radiative surface plasmons excited by light. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 23, 12 1968.
- [8] K. Matsubara, S. Kawata, and S. Minami. Multilayer system for a high-precision surface plasmon resonance sensor. *Opt. Lett.*, 15(1):75–77, Jan 1990.
- [9] S.A. Maier. *Plasmonics: Fundamentals and Applications*. Springer US, 2007.
- [10] S. Enoch and N. Bonod. *Plasmonics: From Basics to Advanced Topics*. Springer Series in Optical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [11] E. Hecht. *Optics*. Pearson Education, Incorporated, 2017.
- [12] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics; 4th ed*. Pearson, Boston, MA, 2013. Republished by Cambridge University Press in 2017.
- [13] G.B. Arfken, H.J. Weber, and F.E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Elsevier Science, 2012.
- [14] P. B. Johnson and R. W. Christy. Optical constants of the noble metals. *Phys. Rev. B*, 6:4370–4379, Dec 1972.
- [15] Wolfram Research. Contourplot. <https://reference.wolfram.com/language/ref/ContourPlot.html>, 2021. Último acceso: 20 de Febrero de 2023.
- [16] George C. Zeman, Ellen J.; Schatz. An accurate electromagnetic theory study of surface enhancement factors for silver, gold, copper, lithium, sodium, aluminum, gallium, indium, zinc, and cadmium. *Journal of Physical Chemistry*, 91:634–643, 1987.

- [17] Robert L. Olmon, Brian Slovick, Timothy W. Johnson, David Shelton, Sang-Hyun Oh, Glenn D. Boreman, and Markus B. Raschke. Optical dielectric function of gold. *Phys. Rev. B*, 86:235147, Dec 2012.
- [18] Wolfgang S. M. Werner, Kathrin Glantschnig, and Claudia Ambrosch-Draxl. Optical constants and inelastic electron-scattering data for 17 elemental metals. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 38(4):1013–1092, 2009.