Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Conjuntos orilla en Continuos

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
Brian Eliezer Ortega Santiago

DIRECTOR DE TESIS
Dr. Raúl Escobedo Conde

Puebla, Puebla. 2024.

Dedicado a
mis más cercanos

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Raúl Escobedo Conde, principalmente por su paciencia y empatía hacía mi persona. A mis sinodales que, con sus atinadas observaciones, hicieron de esta tesis un mejor proyecto.

Un agradecimiento especial a Vannessa quien me apoyó y acompañó durante todo el proceso. Una mención a Felipe y David quienes hicieron, con su amistad y consejos, más ameno este periodo de mi vida.

Finalmente, agradezco al CONAHCYT, pues sin su apoyo esta tesis no habría sido posible.

Introducción

La temática de este proyecto se inscribe en el estudio de la topología de continuos. Como el título de la tesis sugiere (Conjuntos orilla en continuos), el contenido principal de esta obra gira en torno al concepto de conjunto orilla.

En términos generales, dado un continuo X (espacio metrizable, compacto y conexo), diremos que un subconjunto de X, digamos A, es un conjunto orilla de X si para cada $\epsilon > 0$ existe un subcontinuo de X, B, contenido en el complemento de A tal que $H_d(X, B) < \epsilon$ (H_d representa la métrica de Hausdorff), o, en otras palabras, si A es un subconjunto de X, entonces A es un conjunto orilla de X siempre que exista un subcontinuo de X, B, ajeno de A y que sea "ϵ-cercano" a X.

En la literatura, por ejemplo en [5], o en [2], la definición de conjunto orilla (shore set) es manejada a la par con otras definiciones como lo son, *conjuntos que no cortan, centros fuertes, no bloqueadores, conjuntos que no cortan débilmente*, entre otros. Dichas definiciones se manejan en conjunto, pues hay un estrecha relación entre ellas que, incluso, bajo algunas condiciones, son definiciones equivalentes (por ejemplo en los continuos localmente conexos). En este trabajo nos limitaremos únicamente al estudio los conjuntos orilla, conjuntos de no corte y conjuntos que no cortan débilmente (sección 2.2).

El contenido de esta tesis está dividido en 2 capítulos, en el primero (Preliminares) se incluyen resultados básicos de la teoría de continuos los cuales son ampliamente referenciados en el capítulo 2 en donde se desarrolla la parte principal de este proyecto.

Sobre el capítulo 2 es preciso señalar que:
En la sección 2.1 (Resultados básicos de conjuntos orilla) introducimos la definición de conjunto orilla e inmediatamente después enunciamos resultados los cuales son implicaciones directas de la definición de conjunto orilla. A destacar en esta sección se encuentra el Teorema 2.10 que es un resultado original de esta tesis, el cual es una equivalencia a la definición de conjunto orilla, que tiene como particularidad, a diferencia de la definición "original"(y alguna otra equivalencia también incluida en este proyecto), que no depende de una métrica pues está enteramente expresada en términos de la topología del espacio. Esta definición alternativa de conjunto orilla fue incluida con la finalidad de demostrar (de manera un poco más simple que con la definición usual) el Teorema 2.21 originalmente presentado en [2].
Parte del trabajo (secciones 2.4, 2.5) está basado en las ideas expuestas en [6] el cual se enfoca en la noción de no bloqueadores, si bien, la idea de conjunto orilla no está incluida en tal trabajo, como ya se mencionó, ambos conceptos (no bloqueadores y conjuntos orilla) están estrechamente relacionados por lo que muchos de los resultados para no bloqueadores incluidos en [6] son parte de este trabajo, aunque escritos (y demostrados) en términos de conjuntos orilla. Otra parte de los resultados hallados en esta tesis, principalmente los de la sección 2.2 y algunos de la sección 2.3, están inspirados en [5].
La sección 2.3 titulada "Existencia de conjuntos orilla" está motivada en la idea de probar que en cualquier continuo existen conjuntos orilla (al menos dos). Un resultado fundamental de está sección es el Teorema 2.16 el cual es un teorema clásico de la teoría de continuos introducido por R.H. Bing en 1948, dicho teorema es esencial en varias de las demostraciones de esta sección. En esta sección, además de probar que el conjunto de conjuntos orilla de un continuo dado es siempre no vacío se incluyen algunas implicaciones de este hecho.

A lo largo de este proyecto, el análisis que hacemos del conjunto de los conjuntos orilla es mayormente conjuntista, cabe señalar que desde la definición pedimos que los conjuntos orilla sean conjuntos cerrados y no vacíos (a diferencia, por ejemplo, de la definición incluida en [2]) con la finalidad de poder ver al conjunto de los conjuntos orilla de un continuo como un hiperespacio. En la sección 2.5 (El hiperespacio de los conjuntos orilla) se incluyen los resultados en los cuales nos valemos de la estructura topológica del hiperespacio de los conjuntos orilla para poder implicar resultados entre los que se destaca una caracterización de la curva cerrada simple en términos de su hiperespacio de conjuntos orilla.

Esta tesis cuenta con una sección, 2.6, enteramente destinada a la exposición de ejemplos los cuales no fueron escogidos al azar, sino que son consecuencia de reflexionar sobre algunos de los resultados expuestos en este proyecto y que responden a preguntas concretas planteadas en este trabajo.

Índice general

Conjuntos orilla en continuos

Brian Eliezer Ortega Santiago

junio 2024

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se incluyen, entre otros, resultados y definiciones "clásicos"de la teoría de continuos con la finalidad de tener una rápida consulta a la hora de construir los ejemplos o las demostraciones del capítulo 2 en el cual se desarrolla la parte principal de esta tesis. En particular en;

En la sección 1.2, las definiciones y proposiciones son todas en torno al concepto de *continuo encadenable*, dicha noción se introduce con la finalidad de poder enunciar, y posteriormente demostrar que en un continuo descomponible y encadenable la unión de conjuntos orilla es un conjunto orilla.
En la sección 1.4 se exponen resultados en torno al concepto de composante el cual, por la naturaleza de su definición, está estrechamente relacionado con los conjuntos orilla .

1.1. Generalidades

Definición 1.1. *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.*

Proposición 1.2. *Si (X, τ) es un espacio topológico conexo, y C un subconjunto conexo de X tal que $X \setminus C = A \cup B$, donde $A \neq \emptyset \neq B$ y $A \cap B = \emptyset$. Entonces : $A \cup C$ y $B \cup C$ son conjuntos conexos. Si X y C son continuos, entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son continuos.*

Demostración. [9] 6.3 página 88. □

Teorema 1.3. ***(Teorema de la arco-conexidad)*** *Todo continuo (no degenerado) localmente conexo es arco-conexo.*

Demostración. [9]8.23 página 130. □

Teorema 1.4. *Cualquier subconjunto abierto y conexo de un continuo localmente conexo es arco-conexo.*

Demostración. [9] 8.26 página 132. □

1.2. Continuos encadenables

Definición 1.5. *Un continuo X es encadenable si para cada $\epsilon > 0$ existe una cubierta abierta finita de X, $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$, tal que para cualesquiera i, j en $\{1, 2, ...n\}$, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$ y máx $\{diámetro(U_i) : 1 \leq i \leq n\}$ $\leq \epsilon$.*

Definición 1.6. *Un continuo X es un* ***triodo débil*** *si X contiene tres subcontinuos, A_1, A_2, A_3, tales que $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ y, para cualesquiera i, j, k en $\{1, 2, 3\}$, con $i \neq j \neq K \neq i$, A_i no está contenido en $A_j \cap A_k$.*

Definición 1.7. *Un espacio topológico conexo S es llamado* ***unicoherente*** *cuando para cualesquiera subconjuntos cerrados y conexos, A y B, tales que $S = A \cup B$, entonces $A \cap B$ es conexo. Un espacio topológico conexo es llamado hereditariamente unicoherente siempre que cada uno de sus subconjuntos conexos y cerrados sea unicoherente.*

Proposición 1.8. *Si X es un continuo encadenable y H y K son subcontinuos propios de X tales que $X = H \cup K$, entonces para cualquier subcontinuo M de X tal que $M \cap X \setminus K \neq \emptyset$ y $M \cap X \setminus H \neq \emptyset$ se tiene que*

$$H \cap K \subset M.$$

Demostración. Sean X, H, K y M como se indica. Notamos que $X \setminus K$ y $X \setminus H$ son conjuntos abiertos y ajenos en X. Así M no está contenido en la unión de éstos. Luego, existe un punto $z \in M \cap (H \cap K)$. Fijamos puntos $p \in M \cap (X \setminus K)$ y $q \in M \cap (X \setminus H)$, y denotamos $Y = (M \cap H) \cup (M \cup K) \cup (H \cap K)$. Notemos que $p \in M \cap H$ y $q \in M \cap K$.
Como X es encadenable, tenemos que X es hereditariamente unicoherente (vea , 12.11 y 12.2 de [9]), así $M \cap H, M \cap K$ y $H \cap K$ son subcontinuos de X. Por otra parte observamos que

$$M \cap H \not\subset (M \cap K) \cup (H \cap K) \quad \text{y} \quad M \cap K \not\subset (M \cap H) \cup (H \cap K).$$

Además $(M \cap H) \cap (M \cap K) \cap (H \cap K) \neq \emptyset$.
Finalmente, como X no contiene triodos débiles, concluimos que $H \cap K \subset (M \cap H) \cup (M \cap K)$, de lo que se obtiene que $H \cap K \subset M$. □

1.3. Puntos extremos y de no corte

A continuación se enunciaran una serie de definiciones y notaciones en torno a los conceptos de **punto extremo** y **punto de no corte** los cuales, por ejemplo, en los continuos localmente conexos (como se ve en la sección 2.3 ¨Conjuntos orilla en continuos localmente conexos”), en algunos casos, coinciden con la definición de conjunto orilla.

Definición 1.9. *Un punto p se llama punto extremo de X siempre que para cualquier conjunto abierto U que contenga a p, existe V un conjunto abierto de X tal que*

$$p \in V \subset U$$

y la frontera de V (usaremos $\mathrm{fr}(V)$ para denotar a la frontera de V) consiste de exactamente un punto.

Notación 1.10. *Para un continuo X denotamos:*

$$E(X) = \{p \in X : \ p \text{ es un punto extremo de } X\}$$

Definición 1.11. *Sea (X,τ) un espacio topológico conexo y sea $p \in X$. Si $X \setminus \{p\}$ es un conjunto conexo, entonces p es llamado un **punto de no corte** de X, si p no es un punto de corte diremos que p es un punto de corte (i.e., si $X \setminus \{p\}$ es un conjunto disconexo).*

Definición 1.12. *Sea X un continuo y sea $A \subset X$. Entonces X es llamado irreducible sobre A siempre que ningún subcontinuo propio de X contenga a A. Un continuo X es llamado irreducible siempre que X sea irreducible sobre $\{p,q\}$ para algunos p,q elementos de X.*

Teorema 1.13. *Si X es un continuo y p,q son puntos de X, entonces X contiene un subcontinuo el cual es irreducible entre p y q.*

Demostración. [9] 4.35 página 68 □

Definición 1.14. *Una gráfica es un continuo el cual puede escribirse como la unión finita de arcos cuyas intersecciones entre cualesquiera dos de ellos se interseca en uno o en ambos de sus puntos extremos.*

Definición 1.15. *Un árbol (ó una gráfica acíclica) es una gráfica la cual no contiene curvas cerradas simples.*

Proposición 1.16. *Cada punto extremo de un continuo X es un punto de no corte de X.*

Demostración. Supongamos que p es un punto de corte de X. Demostraremos que p no es un punto extremo. Dado que p es de corte, entonces $X \setminus \{p\}$ es un conjunto no conexo, luego, sean U y U' conjuntos abiertos en X, no vacíos y ajenos, tales que $X \setminus \{p\} = U \cup U'$. Fijemos puntos q en U y q' en U' y denotemos $W = X \setminus \{q,q'\}$ que al ser el complemento de un conjunto cerrado es, claramente, un conjunto abierto en X que contiene a $\{p\}$, esto último es cierto pues q y q' fueron fijados en $X \setminus \{p\}$. Ahora, consideremos un conjunto abierto en X arbitrario, V, tal que

$$p \in V \subset W.$$

Probaremos que $|\mathrm{fr}(V)| \geq 2$.
Notemos que $\overline{U} = U \cup \{p\}$ y $\overline{U}$ es un conjunto conexo, pues, al ser U, U' conjuntos separados se cumple que $\overline{U} \cap U' = \emptyset$ y por tanto $\overline{U} \subset X \setminus U'$, además, U es un conjunto abierto en X y por tanto U no puede ser un conjunto cerrado en X, pues sería una contracción al a la conexidad de X.
También observemos que $\overline{U} \cap V$ es un conjunto abierto en $\overline{U}$, no vacío y $\overline{U} \cap V \neq \overline{U}$ $(q \in U \setminus V)$, así $\overline{U} \cap V$ no es un conjunto cerrado en $\overline{U}$, (caso contrario $\overline{U}$ tendría que ser disconexo), es decir,

$$\mathrm{cl}_{\overline{U}}(\overline{U} \cap V) \neq \overline{U} \cap V.$$

Fijemos un punto $x \in \mathrm{cl}_{\overline{U}}(\overline{U} \cap V) \setminus (\overline{U} \cap V)$. Notamos que $x \in \overline{U} \setminus V$, pues x está en $\mathrm{cl}_{\overline{U}}(\overline{U} \cap V)$, es decir, $x \in \mathrm{cl}_{\overline{U}}(\overline{U})$ y $x \notin V$. Dado que $x \neq p$, tenemos que $x \in (U \setminus V)$.
Veamos que $x \in \overline{V}$. Sea O un conjunto abierto en X tal que $x \in O$. Se tiene que $(O \cap \overline{U}) \cap (\overline{U} \cap v) \neq \emptyset$ y por tanto $(O \cap V) \neq \emptyset$, así $x \in \overline{V}$. De lo anterior se sigue que $x \in \mathrm{fr}(V) \cap U$ y por tanto $x \in \mathrm{fr}(V)$. Análogamente podemos fijar un punto y en $\mathrm{cl}_{\overline{U'}}(\overline{U'} \cap V) \setminus (\overline{U} \cap V)$ tal que $y \in \mathrm{fr}(V)$, es decir, $|\mathrm{fr}(V)| \geq 2$ y por tanto p no es un punto extremo. □

Proposición 1.17. *Sea X una gráfica no degenerada, y sea $p \in X$ tal que p no pertenece a ninguna curva cerrada en X. Entonces p es un punto de no corte si y sólo si p es un punto extremo.*

Demostración. [9] 9.26 página 153 □

Corolario 1.18. *Sea X un árbol no degenerado. Entonces, un punto de $p \in X$ es un punto de no corte si y sólo si p es un punto extremo de X.*

Demostración. [9] 9.27 página 153 □

Teorema 1.19. *Un continuo X es un árbol si y sólo si X tiene un número finito de puntos de no corte.*

Demostración. [9] 9.28 página 154 □

Teorema 1.20. ***(Existencia de puntos de no corte)***. *Sea X un continuo no degenerado. Asumamos que X tiene un punto de corte c,*

$$X \setminus \{c\} = U|V.$$

Entonces existe un punto de corte de X perteneciente a U y existe un punto de no corte de X en V

Demostración. [9] 6.6 página 89. □

Corolario 1.21. *Sea (X, T) un T_1-continuo no degenerado. Sea N el conjunto de todos los puntos de no corte de X. Entonces ningún subconjunto (propio) conexo de X contiene a N.*

Demostración. [9] 6.7 página 90 □

Teorema 1.22. *Sea X un continuo no degenerado. Entonces X contiene un subcontinuo propio no degenerado. Más aún: Si A es un subcontinuo propio de X y U un subconjunto abierto de X tal que $A \subsetneq U$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que*

$$A \subset B \neq A \text{ y } B \subset U.$$

Demostración. [9] 5.5 página 74 □

Teorema 1.23. *Un continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si X se vuelve disconexo al remover cualesquiera dos puntos de X.*

Demostración. [8] página 342. □

Teorema 1.24. *Un continuo X es un arco si y sólo si X tiene exactamente dos puntos de no corte.*

Demostración. [9] 6.17 página 96. □

Definición 1.25. *Una* ***dendrita*** *es un continuo localmente conexo el cual no contiene curvas cerradas simples.*

Teorema 1.26. *Un continuo no degenerado X es una dendrita si y sólo si cada punto de X es alguno de ambos, un punto de corte o un punto extremo.*

Demostración. [9] 10.7 página 168. □

Teorema 1.27. *Un continuo X es una dendrita si y sólo si cada subcontinuo no degenerado de X contiene una cantidad no numerable de puntos de corte de X.*

Demostración. [9] 10.8 página 168 □

Corolario 1.28. *Si X es una dendrita y A es el conjunto de todos los puntos de corte de X, entonces A es denso en X.*

Demostración. Basta aplicar 1.27 y 1.22. □

Lema 1.29. *Si p es un punto extremo de un continuo X y U es un conjunto abierto en X con $p \in U$, entonces existe un conjunto abierto V en X tal que*

$$p \in V \subset U$$

y $X \setminus V$ es un conjunto conexo.

Demostración. Sean X, p y U como se indica. Dado que p es un punto extremo, existe un conjunto abierto V en X tal que $|\mathrm{fr}(V)| = 1$. Probaremos que $X \setminus V$ es un conjunto conexo, para ello, denotemos a $\mathrm{fr}(V) = \{q\}$ y supongamos que $X \setminus V$ no es conexo.
Sean H, K dos conjuntos cerrados en $X \setminus V$, no vacíos y ajenos tales que $X \setminus V = H \cup K$. Notamos que H, K son conjuntos cerrados en X, pues $X \setminus V$ es un conjunto cerrado en X, además, como $\mathrm{fr}(V) = \{q\}$, tenemos que $\overline{V} = V \cup \{q\}$ y $q \notin V$. Podemos suponer que $q \in H$. Se tiene que $(\overline{V} \cup H)$ y K son dos conjuntos cerrados en X, ajenos y no vacíos tales que $X = (\overline{V} \cup H) \cup K$, lo cual es una contradicción debido a la conexidad de X. Esta contradicción viene de suponer que $X \setminus V$ no es conexo. □

Lema 1.30. *Si X es un continuo irreducible entre p y q, y r es un punto extremo de X, entonces r pertenece al conjunto $\{p, q\}$.*

Demostración. Sean X, p y q como se indica, y supongamos que existe r un punto extremo de X tal que $r \notin \{p, q\}$. Sea $U = X \setminus \{p, q\}$. Es claro que U es un conjunto abierto en X, luego (del lema 1.29) tenemos que existe V un conjunto abierto en X tal que $X \setminus V$ es un conjunto conexo y $\{p, q\} \subset X \setminus V$, es decir, $X \setminus V$ es subconjunto propio de X (V no es vacío), cerrado en X y conexo, en otras palabras, $X \setminus V$ es un subcontinuo propio de X que contiene a p y a q lo cual contradice que X sea irreducible entre p y q. □

Proposición 1.31. *Si H es un conjunto de puntos extremos en un continuo X, entonces $X \setminus H$ es un conjunto conexo.*

Demostración. Sea X un continuo y H un subconjunto de X que consta sólo de puntos extremos. Fijamos un punto p en $X \setminus H$. Para cada $q \in X \setminus H$ distinto de p tomamos un subcontinuo de X, A_q, el cual es irreducible entre p y q (teorema 1.13). Probaremos que $A_q \subset X \setminus H$. Para esto suponemos, por el contrario, que existe un punto r en $A_q \cap H$. Afirmamos que r es un punto extremo de A_q: para probar esto, sea U un conjunto abierto en A_q tal que $r \in U$. Sea W un conjunto abierto en X tal que

$$W \cap A_q = U.$$

Como $r \in H$, existe un conjunto abierto en X, V, tal que

$$r \in V \quad \text{y} \quad |fr(V)| = 1.$$

Denotemos $V' = V \cap A_q$. Claro que V' es un conjunto abierto en A_q tal que $r \in V' \subset U$.
Notemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{fr}_{A_q}(V') &= \mathrm{cl}_{A_q}(V') \cap \mathrm{cl}_{A_q}(A_q \setminus V') \\ &= (\overline{V'} \cap A_q) \cap (\overline{A_q \setminus V'} \cap A_q). \end{aligned}$$

Como $V' \subset V$ y $A_q \setminus V' \subset X \setminus V$, se sigue que

$$\mathrm{fr}_{A_q}(V') \subset (\overline{V} \cap A_q) \cap (\overline{X \setminus V} \cap A_q) = \mathrm{fr}(V) \cap A_q.$$

Se sigue que $|\mathrm{fr}_{A_q}(V')| = 1$. □

1.4. Composantes

Definición 1.32. *Para cualquier continuo no degenerado X y $p \in X$ se define*

$$\kappa(p) = \{x \in X : \text{ existe } A \text{ un subcontinuo propio de } X \text{ tal que } p, x \in A\}.$$

*Los conjuntos $\kappa(p)$ definidos arriba son llamados composantes de X y, para un punto en particular p, $\kappa(p)$ es llamado la **composante** de p en X.*

Proposición 1.33. *Si X es un continuo no degenerado y $p \in X$, entonces $\kappa(p)$ es un conjunto conexo y denso en X.*

Demostración. [9] 5.20 página 83. □

Definición 1.34. *Un continuo X es llamado **descomponible** si X puede escribirse como la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo que no es descomponible es llamado **indescomponible**.*

Teorema 1.35. *Sea X un continuo descomponible. Entonces X tiene exactamente una o exactamente tres composantes.*

Demostración. [9] 11.13 □

Teorema 1.36. *Si X es un continuo indescomponible no degenerado, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes.*

Demostración. [9] 11.15 □

Teorema 1.37. *Si X es un continuo indescomponible no degenerado, entonces las composantes de X son disjuntas entre sí.*

Demostración. [9] 11.17 □

1.5. Hiperespacios

Notación 1.38. *Para un espacio topológico X sean:*

- $2^X = \{A : A$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $X\}$.
- $C(X) = \{A \in 2^X : \ A$ es conexo$\}$.
- *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *sea* $F_n(X) = \{A \subset X : A$ tiene a lo más n elementos$\}$.

  Si X es un espacio métrico compacto con métrica d, para cada $\epsilon > 0$ y para cada $A \in 2^X$ definimos

- $N_d(\epsilon, A) = \{x \in X : \ d(x,a) < \epsilon$ para algún $a \in A\}$.

  Y para cualesquiera $A, B \in 2^X$, sea

- $H_d(A,B) = \inf\{\epsilon > 0 : \ \mathrm{A} \subset \mathrm{N_d}(\epsilon, \mathrm{B})$ y $\mathrm{B} \subset \mathrm{N_d}(\epsilon, \mathrm{A})\}$.

Proposición 1.39. *Si X es un continuo y A es un subconjunto de X entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *(i).* $H_d(A, X) < \epsilon$;
- *(ii).* $X \subset N_d(\epsilon, A)$;
- *(iii).* *para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \epsilon$.*

Demostración. Para ver que (i) implica (ii) basta notar que, $H_d(A, X) < \epsilon$ implica que

$$\epsilon > \inf\{\delta > 0 |\ A \subset N_d(\delta, X) \ y \ X \subset N_d(\delta, A)\},$$

y por tanto se cumple que, $X \subset N_d(\epsilon, A)$. Para la implicación de (ii) a (iii) es suficiente notar que de la definición de $N_d(\epsilon, A)$ se sigue que todo x, elemento de $N_d(\epsilon, A)$ cumple que $d(x, a) < \epsilon$ para algún a en A, y por tanto, para cada x elemento de X, que por hipótesis de (ii) también está en $N_d(\epsilon, A)$, se tiene que $d(x, a) < \epsilon$ para algún a en A. Finalmente, puesto que $A \subset X$ implica trivialmente que, para cualquier ϵ positivo es cierto que $A \subset X = N_d(\epsilon, X)$ y tomando en cuenta la hipótesis de (iii) concluimos que $H_d(A, x) < \epsilon$. $\square$

Proposición 1.40. *Si* Λ *es un subconjunto conexo de* 2^X *tal que* $\Lambda \cap C(X) \neq \emptyset$*, entonces* $\bigcup \Lambda$ *es un subconjunto conexo de* X.

Demostración. [10] 1.43 □

Proposición 1.41. *Sea* X *un continuo. Entonces* $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$ *es un conjunto denso en* 2^X *con la topología de Vietoris.*

Demostración. [10] 0.66.6 □

Capítulo 2

El hiperespacio de los conjuntos orilla de un continuo

El hiperespacio de los conjuntos orilla es un subconjunto de 2^X cuyos elementos son conjuntos orilla (definición 2.1). En este capítulo se desarrolla la parte principal de esta tesis el cual está dividido en 5 secciones. Este trabajo está enfocado en los conjuntos orilla, sin embargo, por la naturaleza de la definición, es necesario también definir conceptos similares como lo son los conjuntos de no corte y conjuntos que no cortan débilmente (sección 2.2).

2.1. Resultados básicos de conjuntos orilla

Como el título de la sección sugiere, las proposiciones contenidas en este apartado son implicaciones directas de la definición de conjunto orilla o equivalencias de ésta misma que serán utilizadas a lo largo de las siguientes secciones, además se introduce notación que se usará constantemente en este trabajo.

Definición 2.1. *Dado un continuo X, un conjunto $A \in 2^X$ es un* ***conjunto orilla*** *de X si para cualquier $\epsilon > 0$ existe B un subcontinuo de X tal que*

$$B \subset X \setminus A \text{ y } H(X, B) < \epsilon.$$

.

Notación 2.2. *Denotemos por $\mathcal{O}(X)$ al subconjunto de 2^X de todos los conjuntos orilla de X, i.e.,*

$$\mathcal{O}(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es orilla en } X\}.$$

Proposición 2.3. *Si X es un continuo y A es un conjunto orilla de X, entonces $int(A) = \emptyset$*

Demostración. Supongamos que $\text{int}(A) \neq \emptyset$. Sea $x \in \text{int}(A)$, luego existe r_x tal que $B(x, r_x) \subset \text{int}(A)$. Notemos que $H(X, X \setminus A) \geq r_x$, pues $d(x, y) \geq r_x$ para cualquier $y \in X \setminus A$, i. e., $x \notin N(r_x, X \setminus A)$ y por tanto, para todo $B \subset X \setminus A$, $x \in B$ y se concluye que para todo $B \subset X \setminus A$, $X \not\subset N(r_x, B)$. □

Proposición 2.4. *Si X es un continuo y A es un conjunto orilla de X, entonces $X \setminus A$ es un conjunto conexo.*

Demostración. Supongamos que $X \setminus A$ no es conexo. Para B un subcontinuo de X con $B \subset X \setminus A$ se cumple que B está contenido en una de las componentes de $X \setminus A$ digamos C_1, además existe $C_2 \neq \emptyset$ componente de $X \setminus A$ con $C_1 \neq C_2$. Como $C_2 \neq \emptyset$ y es abierto, existen $x \in C_2$ y r_x tal que $B(x, r_x) \subset C_2$, procediendo como en la proposición anterior obtenemos que $H(B, X) \geq r_x$ lo cual es una contradicción, pues por hipótesis A es un conjunto orilla.

□

Las dos Proposiciones inmediatas anteriores podrían resumirse de la siguiente manera.

Proposición 2.5. *Si X es un continuo y A es un conjunto orilla de X, entonces $int(A) = \emptyset$ y $X \setminus A$ es un conjunto conexo.*

Notemos que el recíproco del teorema 2.5 no es cierto, es decir, un conjunto que de interior vacío y de complemento conexo no es, necesariamente, un conjunto orilla, prueba de ello es el ejemplo 2.48.

La propiedad de ser un conjunto orilla es hereditaria en el sentido del siguiente lema.

Lema 2.6. *Si A es un conjunto orilla y B es un conjunto cerrado y no vacío contenido en A, entonces B es un conjunto orilla.*

Demostración. Sea A un conjunto orilla de X y B un subconjunto de A no vacío y cerrado en X. Sea $\epsilon > 0$, como A es un conjunto orilla de X existe C subcontinuo de X tal que

$$C \subset X \setminus A \text{ y } H(X, C) < \epsilon,$$

además, $X \setminus A \subset X \setminus B$, pues $B \subset A$, y por tanto

$$C \subset X \setminus B \text{ y } H(X, C) < \epsilon,$$

es decir B es un conjunto orilla de X. □

El ser un conjunto orilla es una propiedad topológica, es decir.

Teorema 2.7. *Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo con X, Y continuos, entonces $A \subset X$ es un conjunto orilla de X si y sólo si $h(A)$ es un conjunto orilla de Y.*

Demostración. Sea A un conjunto orilla de X. Veamos que $h(A)$ es un conjunto orilla de Y. Sea $\epsilon > 0$. Puesto que A es un conjunto orilla, existe B un subcontinuo de X tal que para toda δ positiva y cualquier $x \in X$, $d_X(x, b) < \delta$ para algún $b \in B$. Notemos que, puesto que h es un homeomorfismo, $h(B)$ es un continuo contenido en el complemento de $h(A)$, además, debido a que h es una función continua, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que si $d_x(x, b) < \delta_\epsilon$, entonces $d_Y(h(x), h(b)) < \epsilon$, luego, dado que cualquier $y \in Y$ puede verse como $h(x_y)$ con $x_y \in X$, concluimos que $H_{d_Y}(Y, h(B)) < \epsilon$, además $h(A) \in 2^X$ es decir, $h(A)$ es un conjunto orilla. Análogamente, si $h(A)$ es un conjunto orilla entonces $h^{-1}(h(A)) = A$ es un conjunto orilla.

□

La demostración del teorema anterior, es igualmente válida para probar el siguiente teorema.

Teorema 2.8. *Si $h : X \to Y$ es una función cerrada, con X, Y continuos. Si $A \subset X$ es un conjunto orilla de X, entonces $h(A)$ es un conjunto orilla de Y.*

El siguiente teorema es una caracterización de los conjuntos orilla y será frecuentemente usada en las demostraciones de los resultados posteriores.

Teorema 2.9. *Sean X un continuo y $A \subset X$ cerrado y no vacío, entonces: A es un conjunto orilla si y sólo si existe una sucesión de subcontinuos de X, $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$, que converge a X y tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumpla que $C_n \subset X \setminus A$.*

Demostración. Supongamos que A es un conjunto orilla de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea C_n un subcontinuo de X contenido en $X \setminus A$ y tal que $H_d(C_n, X) < \frac{1}{n}$ (C_n existe pues A es un conjunto orilla). $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a X, pues para cada ϵ existe un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_\epsilon} < \epsilon$ y por tanto, para cada $n > N_\epsilon$ tenemos que $H_d(C_n, X) < \frac{1}{N_\epsilon} < \epsilon$.
Por otro lado, si $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos de X contenidos en $X \setminus A$, veamos que A es un conjunto orilla de X. Sea $\epsilon > 0$, luego existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_\epsilon$, $H_d(C_n, X) < \epsilon$, es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe un subcontinuo de X, digamos $C_{N_\epsilon+1}$, contenido en $X \setminus A$ con $H_d(C_{N_\epsilon+1}, X) < \epsilon$ y por tanto A es un conjunto orilla. $\square$

Teorema 2.10. *Un subconjunto cerrado, no vacío, A, de un continuo X es un conjunto orilla de X si, y sólo si, para cualquier colección finita de conjuntos abiertos, no vacíos en X, $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$, existe un subcontinuo B de X tal que $B \subset X \setminus A$ y, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $B \cap U_i \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $A \in \mathcal{O}(X)$ y sea $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ una colección finita de conjuntos abiertos no vacíos en X. Para $i \in \{1, 2, ..., n\}$, fijamos un punto x_i en U_i, y tomamos $\epsilon > 0$ tal que $B(x_i, \epsilon) \subset U_i$. Existe un subcontinuo B de X tal que $B \subset X \setminus A$ y $H(B, X) < \epsilon$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, existe un punto b_i en B tal que $d(x_i, b_i) < \epsilon$. Así, $b_i \in B(x_i, \epsilon)$. Se sigue que $B \cap U_i \neq \emptyset$.
Sea $\epsilon > 0$. Existe un conjunto finito $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ en X tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} = B(y_i, \frac{\epsilon}{2}).$$

Por hipótesis, existe un subcontinuo B de X tal que $B \subset X \setminus A$ y, para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $B \cap B(y_i, \frac{\epsilon}{2}) \neq \emptyset$, fijemos un punto $z_i \in B \cap B(y_i, \frac{\epsilon}{2})$.

Veremos que $X \subset N(\epsilon, B)$:
Sea $x \in X$, luego $x \in B(y_i, \frac{\epsilon}{2})$ para algún $i \in \{1, 2, ..., m\}$, entonces

$$d(x, z_i) < d(x, y_i) + d(y_i, z_i) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

y por tanto $X \subset N(\epsilon, B)$. □

2.2. Conjuntos de no corte en continuos

Como puede verse en [5], [3] o en [2], por mencionar algunos, el hiperespacio $\mathcal{O}(X)$ es usualmente estudiado en conjunto con hiperespacios similares, si bien existen más conceptos similares al de conjunto orilla, en este trabajo nos limitaremos al estudio de sólo dos de ellos, específicamente conjuntos que no cortan y conjuntos que no cortan débilmente .

Definición 2.11. *Para X un continuo, diremos que un elemento $A \in 2^X \setminus \{X\}$ es un* ***conjunto de no corte*** *de X siempre que $X \setminus A$ sea un conjunto conexo. En otro caso diremos que A es un conjunto de corte de X. Se denotará por*

$$NC(X) = \{A \in 2^X : \ \mathrm{int}(A) = \emptyset \text{ y } A \text{ es un conjunto de no corte de } X\}.$$

Definición 2.12. *Sean X un continuo y $A \in 2^X$, si $X \setminus A$ es conexo por continuos, es decir, si cualesquiera dos puntos $x, y \in X \setminus A$ son elementos de un subcontinuo de X contenido en $X \setminus A$, entonces A es llamado un* ***conjunto que no corta débilmente*** *a X, en otro caso se dirá que A es un conjunto que corta débilmente a X. Denotaremos*

$$NWC(X) =$$

$$\{A \in 2^X : \ \mathrm{int}(A) = \emptyset \text{ y } A \text{ es un conjunto que no corta débilmente a } X\}.$$

Teorema 2.13. *Para X un continuo se tiene que,*

$$NWC(X) \subset \mathcal{O}(X) \subset NC(X).$$

Demostración. La proposición 2.5 nos asegura que si A es un conjunto orilla de X entonces A tiene interior vacío y complemento conexo, es decir, A es un conjunto de no corte lo cual demuestra que $\mathcal{O}(X) \subset NC(X)$.
Para ver que $NWC(X) \subset O(X)$: Sea $A \in NWC(X)$. Se tiene que $X \setminus A$ es un conjunto abierto, denso en X ($\mathrm{int}(A) = \emptyset$) y conexo por continuos. Dado que X es un continuo podemos afirmar que X es un espacio segundo numerable y por tanto $X \setminus A$ también lo es, así $X \setminus A$ es un espacio separable. Sea D un conjunto numerable y denso en $X \setminus A$, digamos

$$D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Sea U un conjunto abierto en X y no vacío, luego $U \cap (X \setminus A)$ es un conjunto abierto en $X \setminus A$, y como $\mathrm{int}(A) = \emptyset$, entonces U no puede estar totalmente contenido en A y por tanto $U \cap (X \setminus A)$ es un conjunto no vacío, dado que D es un conjunto denso en $X \setminus A$ tenemos que

$$U \cap (X \setminus A) \cap D \neq \emptyset,$$

como $D \subset X \setminus A$ se sigue que $U \cap (X \setminus A) \cap D = U \cap D$, es decir, $U \cap D \neq \emptyset$ y por tanto D también es un conjunto denso en X. Fijamos un punto $p \in X \setminus A$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos un subcontinuo A_n de X tal que

$$\{p, x\} \subset A_n \subset X \setminus A,$$

y denotamos

$$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Se tiene que $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos de X tal que

$$B_n \subset X \setminus A \ \text{ y } \ \lim B_n = X,$$

tomando en cuenta el teorema 2.9, concluimos que A es un conjunto orilla.

$\square$

Las inclusiones en el teorema anterior son estrictas. Para ver que

$$NC(X) \not\subset \mathcal{O}(X)$$

basta considerar el ejemplo 2.48. El ejemplo 2.41 nos indica que

$$\mathcal{O}(X) \not\subset NC(X),$$

en general, como se verá en la sección 2.3, cualquier conjunto indescomponible sirve de ejemplo.

2.3. Existencia de conjuntos orilla

Hasta ahora hemos visto algunas equivalencias de la definición de conjunto orilla y algunas condiciones necesarias para que un conjunto cerrado y no vacío de un continuo sea un conjunto orilla (por ejemplo la conexidad de su complemento), y en ejemplos sencillos, como lo podría ser un arco, no es difícil convencerse que dichos conjunto orilla existen, pero no hemos demostrado que existan conjuntos orilla en cualquier continuo. El objetivo principal de esta sección es demostrar que para cualquier continuo no degenerado el hiperespacio de los conjuntos orilla no es vacío. Además en esta sección se incluyen teoremas que son consecuencias de la existencia de conjuntos orilla.

El siguiente teorema nos muestra que existen continuos para los cuales el hiperespacio de los conjuntos que no cortan débilmente puede ser vacío.

Teorema 2.14. *Si X es un continuo indescomponible, todo subconjunto cerrado propio y no vacío de X corta débilmente a X.*

Demostración. Sea $B \in 2^X \setminus \{X\}$, entonces $X \setminus B$ es un conjunto no vacío y abierto en X. Debido a que las composantes de un continuo son conjuntos densos (proposición 1.33), tenemos que toda composante de X interseca a

$X \setminus B$. Sabemos que todo continuo indescomponible tiene una cantidad no numerable de composantes (teorema 1.36). Además, dichas composantes son ajenas entre sí (teorema 1.37). Fijemos dos composantes distintas de X, κ_1 y κ_2, y puntos $x \in \kappa_1 \cap (X \setminus B)$ y $y \in \kappa_2 \cap (X \setminus B)$. Si A es un subcontinuo de X tal que $\{x, y\} \subset A$, entonces $\kappa_1 \cap A \neq \emptyset$ y $\kappa_2 \cap A \neq \emptyset$, y por tanto $A = X$, y así, $A \cap B \neq \emptyset$ lo cual demuestra que B corta débilmente a X. □

Observación 2.15. *El teorema inmediatamente anterior muestra que si X es un continuo indescomponible entonces el hiperespacio $NWC(X) = \emptyset$, sin embargo el recíproco no es, en general, verdadero (lo cual podemos confirmar con el ejemplo 2.42).*

El siguiente teorema es un resultado clásico de la teoría de continuos (cuyo autor es R. H. Bing) el cual es fundamental en la demostración del teorema 2,17 el cual asegura la no vacuidad de $\mathcal{O}(X)$.

Teorema 2.16. *Para cada subconjunto Y de un continuo X existe un punto $p \in X \setminus Y$ tal que la unión de todos los subcontinuos de X contenidos en $X \setminus \{p\}$ y que intersecan a Y es un conjunto denso en X*

Demostración. [1] Theorem 5 □

Teorema 2.17. *Para cada subcontinuo propio Y de un continuo X existe un punto $p \in X \setminus Y$ tal que $\{p\}$ es un conjunto orilla.*

Demostración. Sea Y un subcontinuo propio de X, el teorema 2.16 nos asegura que, existe p un punto en $X \setminus Y$ tal que

$$D = \bigcup \{A \in C(X) : \ Y \cap A \neq \emptyset \text{ y } A \subset X \setminus \{p\}\}$$

es un conjunto denso en X.
Afirmamos que $\{p\} \in \mathcal{O}(X)$, en efecto. Sea $\epsilon > 0$. Notemos que la colección $\mathcal{F} = \{B(x, \frac{\epsilon}{2}) : \ x \in X\}$ es una cubierta abierta para X, dado que X es compacto, pues X es un continuo, existe $\mathcal{F}' = \{B(x_1, \frac{\epsilon}{2}), B(x_2, \frac{\epsilon}{2}), ..., B(x_n, \frac{\epsilon}{2})\}$ un subconjunto finito de $\mathcal{F}$ tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\epsilon}{2}).$$

Como D es un conjunto denso en X, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ existe un punto $y_i \in D \cap B(x_i, \frac{\epsilon}{2})$.
Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ existe $A_i \in C(X)$ tal que $Y \cap A_i \neq \emptyset,\ A \subset X \setminus \{p\}\}$ y $y_i \in A_i$. Denotemos

$$\mathbb{A} = \bigcup_{i=1}^{n} (Y \cup A_i).$$

Notemos que para cualquier $i \in \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto $Y \cup A_i$ es un conexo y compacto, pues es la unión de conjuntos conexos y compactos cuya intersección es no vacía, luego $\mathbb{A} \in C(X)$, debido a que $\mathbb{A}$ es la unión de un número finito de conjuntos conexos que satisfacen que, para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ la intersección $(Y \cup A_i) \cap (Y \cup A_j)$ es no vacía, además para cualquier $i \in \{1, 2, ..., n\}$ se cumple que $p \notin (Y \cup A_i)$ y por tanto $\mathbb{A} \subset X \setminus \{p\}$.
Sea $x \in X$, como $\mathcal{F}'$ es una cubierta abierta para X, existe $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que

$$x \in B(x_j, \frac{\epsilon}{2}),$$

notemos que $y_j \in (A_j \cup B(x_j, \frac{\epsilon}{2}))$ lo cual implica que $y_j \in \mathbb{A}$, además

$$d(x, y_j) \leq d(x, x_j) + d(x_j, y_j) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

así, para cada $x \in X$ se cumple que $x \in N(\mathbb{A}, \epsilon)$, es decir, $X \subset N(\mathbb{A}, \epsilon)$ lo cual prueba que $H_d(X, \mathbb{A}) < \epsilon$ y por tanto $\{p\} \in \mathcal{O}(X)$. □

Teorema 2.18. *Para cada subcontinuo Y de un continuo X existe un punto p en $X \setminus Y$ y una sucesión de subcontinuos de X, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que*

$$Y \subset A_n \subset X \setminus \{p\} \quad \text{y} \quad \lim A_n = X.$$

Demostración. Por el teorema de Bing (2.16), existe un punto p en $X \setminus Y$ tal que

$$\bigcup \{A \in C(X) : A \cap Y \neq \emptyset \ \text{ y } A \subset X \setminus \{p\}\}$$

es un conjunto denso en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto finito $\{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_{k_n}^n\}$ en X tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{k_n} B\left(x_i^n, \frac{1}{2n}\right).$$

Además, por la densidad del conjunto mencionado, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k_n\}$ existe un subcontinuo de X, B_i, tal que $B_i \cap Y \neq \emptyset$, $B_i \subset X \setminus \{p\}$ y $B_i \cap B(x_i^n, \frac{1}{2n}) \neq \emptyset$.
Denotemos

$$C_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} Y \cup B_i.$$

Se tiene que C_n es un subcontinuo de X tal que $Y \subset C_n \subset X \setminus \{p\}$, pues es la unión de una cantidad finita de continuos cuya intersección contiene a Y, además $H(X, C_n) < \frac{1}{n}$, esto último resulta porque si $x \in X$, entonces existe $j \in \{1, 2, \ldots, k_n\}$ tal que $x \in B(x_j^n, \frac{1}{2n})$, luego existe $y_j \in B_j \cap B(x_j^n, \frac{1}{2n})$ y por tanto

$$d(x, y_j) < d(x, x_j^n) + d(x_l^n, y_i) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

dado que $y_j \in C_n$ se tiene que para cada $x \in X$ se cumple que $x \in N(C_n, \frac{1}{n})$, es decir, $X \subset N(C, \frac{1}{n})$, es decir, $H(X, C_n) < \frac{1}{n}$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos

$$A_n = \bigcup_{j=1}^{n} C_j.$$

Se tiene que A_n es un subcontinuo de X tal que $Y \subset A_n \subset X \setminus \{p\}$. Es claro que $A_n \subset A_{n+1}$. Finalmente, como $C_n \subset A_n$, se tiene que $H(X, A_n) < \frac{1}{n}$, por lo cual $\lim A_n = X$. □

Corolario 2.19. *Para cualquier continuo X el hiperespacio $\mathcal{O}(X)$ tiene al menos dos elementos.*

Demostración. Sea $x \in X$, como $\{x\}$ es un subcontinuo de X, del teorema anterior (2.17), existe $p \in X \setminus \{x\}$ tal que $\{p\} \in \mathcal{O}(X)$. Similarmente, $\{p\}$ es un subcontinuo propio de X y por tanto existe $q \in X \setminus \{p\}$ tal que $q \in \mathcal{O}(X)$, es decir, $p, q \in X$ y $p \neq q$. □

Teorema 2.20. *Si X es un continuo descomponible y encadenable, entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe un subcontinuo, M, contenido en el complemento en X del conjunto de todos los puntos orilla de X tal que $H(X, M) < \epsilon$.*

Demostración. Sea X un continuo encadenable y descomponible, y sean K y L subcontinuos propios de X tales que $X = H \cup L$. Por teorema 2.18, existen puntos p en $X \setminus L$ y q en $X \setminus K$ y dos sucesiones crecientes de subcontinuos de X, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, tales que $L \subset A_n \subset X \setminus \{p\}$, $H \subset B_n \subset X \setminus \{q\}$, $\lim A_n = X$ y $\lim B_n = X$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos

$$M_n = (K \cap A_n) \cup (L \cap B_n).$$

Como X es encadenable, y así hereditariamente unicoherente (ver teoremas 12.2 y 12.11 en [9]), tenemos que $K \cap A_n$ y $L \cap B$ son subcontinuos de X. Además, $K \cap L \subset K \cap A_n$ y $K \cap L \subset L \cap B_n$, así $(K \cap A_n) \cap (L \cap B_n) \neq \emptyset$. Se sigue que cada M_n es un subcontinuo de X.
Probaremos que $\lim M_n = X$: Para esto, sea $\epsilon > 0$ y $x \in X$. si $x \in K \cap L$, entonces $x \in M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues $K \cap L \subset M_n$; así $x \in N(\epsilon, M_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A continuación, sin perder generalidad, supongamos que $x \in K \setminus L$. Como $X \setminus L = K \setminus L$, se tiene que $K \setminus L$ es un conjunto abierto en X. Así, podemos tomar $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon$ y $B(x, \delta) \subset K \setminus L$. Como $\lim A_n = X$, se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto denso en X. Así

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B(x, \delta) \neq \emptyset.$$

Luego, existen $N \in \mathbb{N}$ y un punto $y \in A_N \cap B(x, \delta)$. Notemos que $y \in K \cap A_N \subset M_N$. Se sigue que $x \in N(\epsilon, M_n)$, además, como $M_N \subset M_n$ para todo $n \geq N$, se obtiene que $x \in N(\epsilon, M_n)$ para todo $n \geq N$. Esto prueba x $H(X, M_n) < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Así $\lim M_n = X$.
Para continuar denotamos $Z = \{x \in X : \{x\} \in \mathcal{O}(X)\}$. Vamos a demostrar que

$$Z = X \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n).$$

Si $x \in X \setminus ((\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n))$, se tiene que $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos de X, en $X \setminus \{x\}$ que converge a X, en consecuencia, por el teorema 2.9, $\{x\}$ es un conjunto orilla. Esto prueba que $X \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) \subset Z$.
Para demostrar que $Z \subset X \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n)$, procederemos por contradicción. Supongamos que existe un punto $r \in Z$ tal que r no pertenece a $X \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n)$. Se sigue que $r \in M_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Sin perder generalidad, supongamos

que $r \in K$. Vamos a demostrar que $r \notin L$: Para esto, como $\{r\}$ es un conjunto orilla, por 2.10, existe un subcontinuo de X, E, tal que $E \subset X \setminus \{r\}$, $E \cap (X \setminus K) \neq \emptyset$ y $E \cap (X \setminus L) \neq \emptyset$. Ahora, por 1.8, se tiene que $K \cap L \subset E$. Como $r \notin E$, se concluye que $r \notin L$. Denotemos

$$Y = (E \cap K) \cup M_m \cup L.$$

Dado que X es encadenable, tenemos que $E \cap K$ es un subcontinuo de X. Además, como $E \cap (X \setminus L) \neq \emptyset$ y $E \cap (X \setminus K) \neq \emptyset$, por el teorema 1.8, se tiene que $K \cap L \subset E$, así $K \cap L \subset K \cap E$.
Obtenemos que Y es la unión de tres subcontinuos de X y $\emptyset \neq K \cup L$ está contenido en estos tres subcontinuos. Fijemos un punto $\alpha \in E \cap (X \setminus A_m)$. Se tiene lo que sigue:

$$\alpha \in E \cap K \quad \text{y} \quad \alpha \notin M_m \cup L;$$

$$r \in M_m \quad \text{y} \quad r \notin E \cup L;$$

$$q \in L \quad \text{y} \quad q \notin (E \cap K) \cup M_m.$$

Esto significa que Y es un triodo débil en X, lo cual es una contradicción, pues X es encadenable y por lo tanto no puede contener un triodo (ver teoremas 11.26 y 12.4 de [9]). Esta contradicción demuestra que $Z \subset X \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n)$. Hemos demostrado que $Z = X \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n)$.
Finalmente, tenemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n)$ es una sucesión de subcontinuos de X, contenidos en $X \setminus Z$ y que converge a X.

$\square$

Teorema 2.21. *Si X es un continuo descomponible y encadenable, entonces cualquier conjunto cerrado que sea la unión de puntos orilla es un conjunto orilla.*

Demostración. Basta aplicar el teorema 2.20 $\square$

Tomando en cuenta que el ser un conjunto orilla es una propiedad hereditaria (2.6) tenemos la siguiente observación.

Observación 2.22. *En un continuo descomponible y encadenable la unión finita de conjuntos orilla es un conjunto orilla.*

Teorema 2.23. *Si X es un continuo y $\mathcal{O}(X)$ es un conjunto finito, entonces*

$$NWC(X) = \mathcal{O}(X).$$

Demostración. El teorema 2.13 nos asegura que para cualquier continuo X y $B \subset X$, si B es un conjunto que no corta débilmente, entonces B es un conjunto orilla. Sea A un conjunto orilla de X y $p, q \in X \setminus A$. Podemos asegurar la existencia de un subcontinuo P de X tal que $\{p\} \subset P \subset X \setminus A$ (teorema 1.22), análogamente existe $Q \subset X \setminus A$ un continuo tal que $q \in Q$ y por tanto $p, q \in (P \cup Q) \subset X \setminus A$. Puesto que A es un conjunto orilla, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos elegir C_n un subcontinuo de X tal que $H(C_n, X) < \frac{1}{n}$ y $C_n \subset X \setminus A$. Notemos que $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de continuos que converge a X con $C_n \cap A = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_1$ $C_n \cap P \neq \emptyset$, pues en caso contrario P sería un conjunto orilla y en ese caso, tomando en cuenta el lema 2.6, para cada $x \in P$ el conjunto $\{x\}$ sería un conjunto orilla lo cual implicaría la existencia de un número infinito de conjuntos orilla lo cual, debido a la hipótesis de $\mathcal{O}(X)$ de ser un conjunto finito, no puede pasar. Análogamente, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_2$ se cumple que $C_n \cap Q \neq \emptyset$. Sea $N > \text{máx}\{N_1, N_2\}$, se sigue que $P \cup Q \cup C_N$ es un subcontinuo de X contenido en $X \setminus A$ y que contiene a p y q, por tanto $X \setminus A$ es conexo por continuos, es decir, A es un conjunto que no corta débilmente a X. □

El teorema anterior es equivalente al siguiente corolario.

Corolario 2.24. *Sea X un continuo. Si $NWC(X) \neq \mathcal{O}(X)$ entonces $\mathcal{O}(X)$ es infinito.*

Demostración. Basta reescribir el teorema 2.23 en su forma contrarecíproca. □

Sabemos que, (teorema 2.14), para cualquier continuo indescomponible X, cualquier subconjunto $A \subset X$, corta débilmente a X. Por otro lado, para cualquier continuo X existen, al menos dos, conjuntos orilla de X dejándonos así el siguiente corolario.

Corolario 2.25. *Si X es un continuo indescomponible, entonces $\mathcal{O}(X)$ es un conjunto infinito.*

Más aún, tomando en cuenta el ejemplo 2.42 sabemos que existen continuos, no necesariamente indescomponibles, que cumplen que cualquier subconjunto A de X corta débilmente a X, dejándonos así la siguiente observación.

Observación 2.26. *Si X es un continuo tal que para cualquier $A \subset X$, A corta débilmente a X, entonces X tiene una cantidad infinita de conjuntos orilla.*

El ejemplo 2.43 nos muestra que existen continuos que tienen un único conjunto que no corta débilmente, nuevamente, como cualquier continuo tiene al menos dos conjuntos orilla tenemos la siguiente observación.

Observación 2.27. *Si X es un continuo tal que $|NWC(X)| \leq 1$, entonces X tiene una cantidad infinita de conjuntos orilla.*

2.4. Conjuntos orilla en continuos localmente conexos

Si bien, como se vio en la sección anterior, para un subconjunto de interior vacío y complemento conexo de un continuo cualquiera no puede asegurarse que éste sea un conjunto orilla, para los continuos localmente conexos sí que es válida tal implicación.

Teorema 2.28. *Sean X un continuo localmente conexo y $A \in 2^X$. $A \subset X$ es un conjunto orilla si y sólo si $\operatorname{int}(A) = \emptyset$ y $X \setminus A$ es conexo.*

Demostración. Notemos primero que, si $A \subset X$ es un conjunto orilla, tomando en cuenta las proposiciones 2.3 y 2.4, $\operatorname{int}(A) = \emptyset$ y $X \setminus A$ es conexo. Para el recíproco, sea $\epsilon > 0$ y sea $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{\epsilon}{2}) : x \in X\}$, como X es compacto, existe $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ una subcubierta finita con $\mathcal{B}^* = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$. Como

$\text{int}(A) = \emptyset$, se cumple que para cualquier $i \in \{1, ..., n\}$ $B_i \not\subset A$, ahora bien, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ sea y_i un punto en $B_i \cap (X \setminus A)$. Puesto que por hipótesis $X \setminus A$ es un conjunto abierto y conexo con X siendo un continuo localmente conexo, tomando en cuenta el teorema 1.4, podemos afirmar que $X \setminus A$ es arco-conexo.
Sea $p \in X \setminus A$ un punto cualquiera pero fijo. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ sea E_i un arco en $X \setminus A$ con $\{p, y_i\} \subset E_i$ (la existencia de E_i viene de la arco-conexidad de $X \setminus A$). Sea

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Dado que B es una unión finita de arcos y $p \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i$, entonces B es un conjunto conexo, además, por la construcción de los E_i, $B \subset X \setminus A$.
Para todo $x \in X$ existe $j \in \{1, n\}$ tal que $x \in B_j$, luego

$$d(x, y_j) < d(x, x_j) + d(x_j, y_j) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

donde x_j es el centro de la B_j. Como $d(x, y_j) < \epsilon$ podemos concluir que $H(X, B) < \epsilon$ y por tanto $A \in \mathcal{O}(X)$.

□

Teorema 2.29. *Si X es un continuo localmente conexo y $\mathcal{O}(X)$ es conexo, entonces $F_1(X) \subset \mathcal{O}(X)$.*

Demostración. Del teorema 2.33 tenemos que $F_1(X) \subset NC(X)$, y dado que X es localmente conexo entonces $NC(X) = \mathcal{O}(X)$ y por tanto

$$F_1(X) \subset \mathcal{O}(X).$$

□

Teorema 2.30. *Para X un continuo localmente conexo, los siguientes enunciados son equivalentes:*
(a) X es un arco;
(b) Existen dos puntos distintos p y q en X tales que $\mathcal{O}(X) = \{\{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$;
(c) $|\mathcal{O}(X)| = 3$.

Demostración. Si X es un arco, entonces X tiene exactamente dos puntos de no corte digamos $p,\ q$ que son, de hecho, sus puntos extremos, luego $X \setminus \{p, q\}$ es conexo con $\text{int}(\{p, q\}) = \emptyset$ y por tanto $\mathcal{O}(X) = \{\{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$, de esto último es inmediato que $|\mathcal{O}(X)| = 3$.
Para ver que $|\mathcal{O}(X)| = 3$ implica que X es un arco supongamos que existen tres distintos puntos de no corte de X, digamos $p,\ q$, y r. Dado que $X \setminus \{p\}$, $X \setminus \{q\}$ y $X \setminus \{r\}$ son conjuntos conexos e $\text{int}(\{p\}) = \text{int}(\{q\}) = \text{int}(\{r\}) = \emptyset$, del teorema 2.28, se sigue que $\mathcal{O}(X) = \{\{p\},\ \{q\},\ \{r\}\}$, pues por hipótesis $|\mathcal{O}(X)| = 3$. De lo anterior se sigue que si $x,\ y$ son cualesquiera dos puntos distintos de X, entonces $\{x, y\}$ no es un conjunto orilla y como $\text{int}(\{x, y\} = \emptyset)$, del teorema 2.28, se sigue que $\{x, y\}$ desconecta a X, es decir, cualquier conjunto de dos puntos de X desconecta a X lo cual implica que X es una curva cerrada simple por la caracterización del teorema 1.23, luego $|\mathcal{O}(X)| = 3$ y $\mathcal{O}(X) = F_1(X)$ lo cual es una contradicción y por tanto no pueden existir más de dos puntos de no corte lo cual implica que X es un arco. $\square$

Teorema 2.31. *Un continuo X localmente conexo es un árbol si y sólo si $\mathcal{O}(X)$ es un conjunto finito.*

Demostración. Si X es un árbol, entonces, de acuerdo con el teorema 1.19, el conjunto B formado por todos los puntos de no corte de X tiene un número finito elementos, luego $\mathcal{O}(X)$ es un conjunto finito, pues $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{P}(B)$.
Por otro lado, si $\mathcal{O}(X)$ es un conjunto finito no pueden existir un número infinito de puntos de no corte, en otras palabras, X tiene un número finito de puntos de no corte, así, del teorema 1.19 podemos concluir que X es un árbol. $\square$

Notemos que en el teorema anterior, al igual que en el siguiente teorema, el ejemplo 2.48 muestra que la conexidad local del espacio es necesaria para las respectivas implicaciones.

Teorema 2.32. *Un continuo localmente conexo X es una dendrita si y sólo si $\mathcal{O}(X) = \{B \in 2^X : B \subset E(X)\}$ ($E(X)$ el conjunto de los puntos extremos de X)*

Demostración. Primero, supongamos que X es una dendrita. Sea $B \in \mathcal{O}$ luego B no contiene puntos de corte (2.28). De lo anterior, y tomando en cuenta el teorema 1.26 podemos afirmar que B consta solamente de puntos extremos, i.e., $B \subset E(X)$ y por tanto $\mathcal{O}(X) \subset \{B \in 2^X : B \subset E(X)\}$. Por otro lado, si $B \subset \{B \in 2^X : B \subset E(X)\}$, nuevamente, del teorema 1.26 se sigue que B no contiene puntos de corte. Dado que el conjunto de todos los puntos de corte de X es denso en X (corolario 1.27), se sigue que $\text{int}(B) = \emptyset$, además $B \subset E(X)$, así, del lema 1.31, $X \setminus B$ es conexo y por tanto $B \in \mathcal{O}(X)$ y por tanto $\mathcal{O}(X) \subset \{B \in 2^X : B \subset E(X)\}$.
Para el recíproco, supongamos que X es un continuo localmente conexo y que $\mathcal{O}(X) = \{B \in 2^X : B \subset E(X)\}$. Sea $x \in X \setminus E(X)$, entonces $x \notin \mathcal{O}(X)$, luego, del teorema 2.28 y del hecho que $\text{int}(\{x\}) = \emptyset$, x es un punto de corte. de lo anterior podemos concluir que para cada $x \in X$, x es uno de ambos, un punto extremo o un punto de corte, lo cual es una caracterización de las dendritas. □

2.5. El hiperespacio de los conjuntos orilla

Hasta ahora hemos estudiado al hiperespacio $\mathcal{O}(X)$ de manera conjuntista en el sentido en que no hemos hecho uso de la estructura topológica de $\mathcal{O}(X)$. En esta sección se enunciaran algunos resultados derivados de la conexidad de $\mathcal{O}(X)$ y finalizaremos demostrando que, para un continuo X, si el hiperespacio $\mathcal{O}(X)$ es un continuo, entonces tal continuo X es la curva cerrada simple.

Proposición 2.33. *Para un continuo X, si $\mathcal{O}(X)$ es conexo, entonces $NC(X)$ contiene a $F_1(X)$*

Demostración. Supongamos que existe $x \in X$ un punto de corte, es decir, $X \setminus \{x\} = U \cup V$, donde U, V son subconjuntos abiertos de X , no vacíos y ajenos. Dado que $\mathcal{O}(X)$ es un conjunto conexo de 2^X entonces $\bigcup \mathcal{O}(X)$ es un conjunto conexo de X (lema 1.40). Notemos que $U \cup \{x\}$ y $V \cup \{x\}$ son subcontinuos propios de X (teorema 1.2), entonces, del teorema 2.17, existen puntos $u \in U \cup \{x\}$ y $v \in V \cup \{x\}$ tales que $\{u\}, \{v\}$ son conjuntos orilla, y del como supusimos a x, tenemos que $u \in U$ y $v \in V$. De lo anterior se sigue que $\bigcup \mathcal{O}(X) \cap U \neq \emptyset \neq \bigcup \mathcal{O}(X) \cup V$, es decir, existe un conjunto conexo $(\bigcup \mathcal{O}(X))$ que interseca a U y V lo cual es una contradicción. Por tanto, para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es un conjunto de no corte. □

Corolario 2.34. *Si X es un continuo localmente conexo y $\mathcal{O}(X)$ es un conjunto conexo, entonces $F_1(X) \subset \mathcal{O}(X)$*

Demostración. De la proposición 2.33 se sigue que, $F_1(X) \subset NC(X)$ y, como X es localmente conexo, entonces $\mathcal{O}(X) = NC(X)$ y por tanto $F_1 \subset \mathcal{O}(X)$ □

Teorema 2.35. *Un continuo localmente conexo X es una curva cerrada simple si y sólo si $\mathcal{O}(X) = F_1(X)$.*

Demostración. Si Xes una curva cerrada simple y $x \in X$, entonces $X \setminus \{x\}$ es homeomorfo a un arco y por tanto un subconjunto conexo de X, además $\text{int}(A) = \emptyset$, al ser la curva cerrada simple un continuo localmente conexo, del teorema 2.28, se sigue que $\{x\} \in \mathcal{O}(X)$.
Por otro lado, supongamos que $\mathcal{O}(X) = F_1(X)$. Sea $A \subset X$ con $|A| = 2$, entonces $A \notin F_1(X)$, es decir, A no es un conjunto orilla. A es un subconjunto cerrado de X y de interior vacío y por tanto $X \setminus A$ no puede ser conexo (teorema 2.28). De lo anterior, y tomando en cuenta la caracterización del teorema 1.23, podemos concluir que X es necesariamente una curva cerrada simple. □

Similarmente, como con el arco, se puede establecer una serie de equivalencias que caracterizan a la curva cerrada simple en términos de del hiperespacio de $\mathcal{O}(X)$.

Teorema 2.36. *Para X un continuo localmente conexo, los siguientes enunciados son equivalentes:*
(a) X es una curva cerrada simple;
(b) $\mathcal{O}(X) = F_1(X)$;
(c) $\mathcal{O}(X)$ es un continuo.

Antes de escribir de manera formal la demostración del teorema 2.36 es necesario enunciar algunos lemas y definiciones.

Lema 2.37. *Si X es un continuo localmente conexo y $\mathcal{O}(X)$ es un continuo entonces $F_1(X) \subset \mathcal{O}(X)$.*

Demostración. Como $\mathcal{O}(X)$ es un continuo, en particular $\mathcal{O}(X)$ es conexo y el resultado se sigue del corolario 2.29 □

Lema 2.38. *Si X es un continuo localmente conexo y $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es un subconjunto finito de X tal que $X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es conexo, entonces existen subconjuntos abiertos y conexos de X, $U_1, U_2, ..., U_n$, tales que para cualesquiera i, j en $\{1, 2, ..., n\}$ con $i \neq j$, $p_i \in U_i$, $U_i \neq U_j$ y $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ es un conjunto conexo.*

Demostración. Dadas las hipótesis tomemos un número $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \frac{1}{2}$ $\mathbf{mín}\{d(x_i, x_j) : \ i, j \in \{1, 2, ..n\}$ con $i \neq j\}$, así, si $i \neq j$ entonces

$$B(x_i, \epsilon) \cap B(x_j, \epsilon) \neq \emptyset.$$

Ahora, puesto que $X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es un conjunto abierto, para cada punto z en $X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} B(x_1, \epsilon))$, tomemos un conjunto abierto y conexo en X, digamos W_z, tal que $z \in W_z$ y $\overline{W}_z \subset X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, esto último es posible pues X es un continuo localmente conexo.
Notamos que la colección

$$\{W_z : z \in X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} B(x_1, \epsilon))\}$$

es una cubierta abierta del conjunto compacto $X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} B(x_1, \epsilon))$. Luego, existe un conjunto finito, $\{z_1, z_2, ..., z_m\}$ en $X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} B(x_1, \epsilon))$ tal que

$$X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} B(x_1, \epsilon)) \subset \bigcup_{i=1}^{m} W_{z_k}.$$

Denotemos $Z = \bigcup_{k=1}^{m} W_{z_k}$. Observemos que Z es la unión finita de continuos cada uno de ellos contenido en $X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y por tanto $Z \subset X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Dado que $X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es un conjunto abierto y conexo y X es un continuo localmente conexo, del teorema 1.4 sabemos que $X \setminus$

$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es un conjunto arco conexo. Para cada $k \in \{1, 2, ...m-1\}$ tomamos un arco A_k contenido en $X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y tal que $\{z_k, z_{k+1}\} \subset A_k$. Denotamos por

$$C = Z \cup (\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k).$$

Notemos que para cada k en $\{1, 2, ..., m-2\}$ el conjunto $A_k \cup A_{k+1}$ es conexo, pues es la unión de conjuntos conexos cuya intersección es no vacía ($z_k \in A_k \cap A_{k+1}$) y por tanto $\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k$ es un conjunto conexo, además para cada k en $\{1, 2, ..., m\}$ tenemos que $z_k \in W_{z_k} \cap (\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k)$ y puesto que cada W_z es conexo podemos afirmar que C es un conjunto conexo de X, más aún, C es la unión finita de conjuntos compactos, es decir, C es un subcontinuo de X tal que

$$X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)) \subset Z \subset C \subset X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Fijándonos en los complementos de los conjuntos anteriores tenemos que

$$\{x_1, x_2, ..., , x_n\} \subset X \setminus C \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon).$$

Ahora, para cada i en $\{1, 2, ..., n\}$ denotamos por V_i a la componente de $X \setminus C$ que contiene al punto x_i. Como X es localmente conexo, observamos que cada V_i es un conjunto abierto y conexo, además, puesto que $B(x_i, \epsilon) \cap B(x_j, \epsilon) = \emptyset$, se tiene que $x_i \subset V_i \subset B(x_i, \epsilon)$, por lo cual $v_i \cap V_j = \emptyset$, para cualesquiera i, j en $\{1, 2, ..., n\}$ con $i \neq j$. Resta demostrar que $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ es conexo.
Denotemos por $\mathcal{L}$ a la colección de todas las componentes de $X \setminus C$ que son diferentes de U_i para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, es decir,

$$\mathcal{L} = \{V : V \text{es componente de } X \setminus C \text{ y } V \neq V_i\}.$$

Notemos que para cada $V \in \mathcal{L}$ se tiene que $\overline{V} \cap C \neq \emptyset$; Luego $V \cup C$ es un conjunto conexo, pues es la unión de conjuntos no separados. Se sigue que

$$\bigcup \{V \cup C : V \in \mathcal{L}\}$$

es un conjunto conexo, nuevamente, pues es la unión de conjuntos conexos cuya intersección es no vacía.

Finalmente, observamos que

$$X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} U_i) = \bigcup \{V \cup C : V \in \mathcal{L}\}$$

y concluimos que $X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} U_i)$ es un conjunto conexo. □

Notación 2.39. *Tomemos en cuenta la siguiente notación:*
Si X es un espacio métrico compacto con topología τ. Para $U_1, U_2, ..., U_n \in \tau$ sea:

$$\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para todo } i \in \{1, 2, ..., n\}\}.$$

Si X es un continuo y $k \geq 2$, denotamos $F_k(X) = \{A \in 2^X : |A| = k\}$ y particularmente, para una colección finita de conjuntos en X, $U_1, U_2, ..., U_n$, denotamos

$$\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle_k = \{A \in F_k(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para todo } i \in \{1, 2, ..., n\}\}.$$

Para el siguiente lema también usaremos la siguiente notación:

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{O}(X) \cap (F_k(X) \setminus F_1)(X).$$

Lema 2.40. *Si X es un continuo localmente conexo, $K \geq 2$ y $F_{K-1}(X) \subset \mathcal{O}(X)$, entonces M_k es un conjunto abierto en $F_k(X)$.*

Demostración. Sea $B \in \mathcal{M}_k$. Como $\mathcal{M}_k = \mathcal{O}(X) \cap (F_k(X) \setminus F_1)(X)$ y por tanto $B \in \mathcal{O}(X)$ y $B \in (F_k(X) \setminus F_1)(X)$, así $X \setminus B$ es un conjunto conexo y existe $m \in \{2, .., k\}$ y puntos $p_1, ..., p_m$ de X tales que $B = p_1, ..., p_m$. Tomando en cuenta el lema 2.38, consideremos conjuntos, $U_1, ..., U_n$ abiertos en X y disjuntos entre sí tales que $p_i \in U_i$ y $X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ es un conjunto conexo. Debido a que $B = \{p_1, ..., P_m\}$ y para cada $i \in \{1, ..., m\}$ se tiene que $p_i \in U_i$ podemos asegurar que $B \in \langle U_1, ..., U_i\rangle_k$. Veamos que $\langle U_1, ..., U_i\rangle_k \subset \mathcal{M}_k$.
Sea $A \in \langle U_1, ..., U_i\rangle_k$, con $A = \{q_1, ..., q_n\}$. Puesto que $U_1, ..., U_m$ son disjuntos entre sí, entonces $2 \leq m \leq n \leq k$ y por tanto, para cada $i \in \{1, ..., m\}$

se cumple que $1 \leq |U_i \cap A| \leq k-1$. Denotemos por $E = X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} U_i$, $\mathcal{C}_i = \{L : L$ es una componente de $U_i \setminus A\}$ y $\mathcal{C}_i^* = \bigcup \mathcal{C}_i$, para $1 \leq i \leq m$. Nótese que, por como se definió, $\mathcal{C}_1^* = U_i \setminus A$.
Se probara que $E \cup \mathcal{C}_i^*$ es un conjunto conexo para cada $i \in \{1, ..., m\}$. Fijamos $i \in \{1, ..., m\}$ y sea $L \in \mathcal{C}_i$. Primero se probará que $\overline{L} \cap E \neq \emptyset$; pues en caso contrario, es decir, $\overline{L} \cap E = \emptyset$. Obsérvese que

$$X \setminus (U_i \cap A) = E \cup \mathcal{C}_i^* \cup (\bigcup \{U_j : 1 \leq j \leq m,\ j \neq i\}) =$$
$$L \cup E \cup (\mathcal{C}_i^* \setminus L) \cup (\bigcup \{U_j : 1 \leq j \leq m,\ j \neq i\}),$$

pues $E \cup (\bigcup \{U_j : 1 \leq j \leq m,\ j \neq i\}) = X \setminus U_i$ y además, $X \setminus (U_i \cap A) = (X \setminus U_i) \cup (U_i \setminus A)$. Dado que X es un continuo localmente conexo, los elementos de $\mathcal{C}_i$ son conjuntos abiertos de X y por tanto $(\mathcal{C}_i^* \setminus L) \cup (\bigcup \{U_j : 1 \leq j \leq m,\ j \neq i\})$ son conjuntos abiertos y disjuntos. Se sigue que L y $E \cup (\mathcal{C}_i^* \setminus L) \cup (\bigcup \{U_j : 1 \leq j \leq m,\ j \neq i\})$ son conjuntos separados, pues estamos suponiendo que $\overline{L} \cap E = \emptyset$. Luego $X \setminus (U_i \cap A)$ no es conexo. Entonces, del teorema 2.28, se infiere que, $U_i \cap A \notin \mathcal{O}(X)$ lo cual es una contradicción a la hipótesis ($F_{k-1}(X)$ está contenido en $\mathcal{O}(X)$), debido a que $U_i \cap A \in F_{k-1}(X)$. Hemos probado que $\overline{L} \cap E \neq \emptyset$ y por tanto, $E \cup L$ es un conjunto conexo para cada $L \in \mathcal{C}_i$. Dado que $E \cup \mathcal{C}_i^* = \bigcup \{E \cup L : L \in \mathcal{C}_i\}$, se sigue que $E \cup \mathcal{C}_i^*$ es conexo.
De lo anterior se implica que $E \cup (\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{C}_i)$ es un conjunto conexo, pues es la unión de conjuntos conexos de intersección no vacía. Por tanto, dado que

$$E \cup (\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{C}_i) = E \cup (\bigcup_{i=1}^{m} U_i \setminus A) = X \setminus A,$$

de ahí que $X \setminus A$ es un conjunto conexo y por tanto $A \in \mathcal{O}(X)$ (teorema 2.28). Concluimos que $A \in \mathcal{M}_k$ y así, se ha probado que $B \in \langle U_1, ..., U_m \rangle_k \subset \mathcal{M}_k$. $\square$

Con las debidas notaciones ya establecidas y el corolario anterior, ahora sí, ya es posible avanzar con la demostración del teorema 2.36

Demostración. (De 2.36)
El teorema 2.35 garantiza que (a) implica (b).
Como X es un continuo, entonces $F_1(X)$ es un continuo y dado que $\mathcal{O}(X) = F_1(X)$ se sigue que (b) implica (c).
Resta probar que (c) implica (a), para ello consideremos el conjunto $\mathcal{M}_k =$

$\mathcal{O}(X) \cap (F_k(X) \setminus F_1)$. Afirmamos que existe un entero $k \geq 2$ tal que $\mathcal{M}_k = \emptyset$. Para probar la afirmación anterior procedamos por contradicción, es decir, supongamos que $\mathcal{M}_k \neq \emptyset$ para cada $k \geq 2$. Del lema 2.37, podemos implicar que $F_1(X) \subset \mathcal{O}(X)$.
Ahora bien, como hipótesis inductiva, asumamos que $F_k(X) \subset \mathcal{O}(X)$ para algún entero $k \geq 2$. Del lema 2.38, $\mathcal{M}_{k+1}$ es un conjunto abierto en $F_{k+1}(X)$ y por tanto abierto en $F_{k+1}(X) \setminus F_1(X)$. Como $\mathcal{O}(X)$ es un continuo y $\mathcal{M}_{k+1} = \mathcal{O}(X) \cap (F_{k+1}(X) \setminus F_1(X))$, se tiene que $M_{k+1}(X)$ es un conjunto cerrado en $F_{k+1}(X) \setminus F_1$. Por otro lado, se sabe que $F_{k+1}(X) \setminus F_1$ es un conjunto conexo (teoremade ref) y dado que $\mathcal{M}_{k+1} \neq \emptyset$ se sigue $\mathcal{M}_{k+1} = F_{k+1}(X) \setminus F_1(X)$. Entonces, como

$$F_{k+1}(X) \setminus F_1(X) = \mathcal{M}_{k+1} = \mathcal{O}(X) \cap F_{k+1}(X) \setminus F_1(X),$$

y por tanto $F_{k+1}(X) \setminus F_1(X) \subset \mathcal{O}(X)$, de lo cual se obtiene que $\forall k \in \mathbb{N}$ $F_k(X) \subset \mathcal{O}(X)$ lo cual implica que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k \subset \mathcal{O}(X)$, Dado que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ es un conjunto denso (teorema 1.41) y por tanto $\mathcal{O}(X) = 2^X$, así $X \in \mathcal{O}(X)$ y en consecuencia $\mathrm{int}(X) = \emptyset$, es decir, $X = \emptyset$ lo cual es una contradicción que prueba la afirmación.
Ahora bien, sea $k \geq 2$ tal que $\mathcal{M}_k = \emptyset$. Considérense dos puntos distintos $x, y \in X$. Claramente, para $k \geq 2$, $\{x, y\} \in F_k(X) \setminus F_1(X)$, y dado que $\emptyset = \mathcal{M}_k = \mathcal{O}(X) \cap F_k(X) \setminus F_1(X)$ se sigue que $\{x, y\} \notin \mathcal{O}(X)$. debido a que $\{x, y\}$ es un conjunto de interior vacío, del teorema 2.28, $X \setminus \{x, y\}$ no es conexo, es decir, X es una curva cerrada simple.

□

2.6. Ejemplos

A lo largo de este trabajo el contenido de este capítulo es, por la naturaleza del mismo, frecuentemente referenciado. En la sección 2.4 se presentan nuestros primeros ejemplos de continuos con sus respectivos hiperespacios y con los resultados expuestos en dicha sección podemos darnos una idea muy clara de como son los conjuntos orilla en los continuos localmente conexos.

Ejemplo 2.41. *(El arcoíris de Knaster)*
Un continuo tipo Knaster es un continuo homeomorfo al límite inverso de arcos con funciones de ligadura abiertas que no son homeomorfismos.

Los continuos tipo Knaster son indescomponibles, y por tanto, si X es un continuo tipo Knaster, del teorema 2.14, tenemos que $NWC(X) = \emptyset$, y del corolario 2.25 tenemos que $|\mathcal{O}(X)| = \infty$.

Ejemplo 2.42. *Sea $X = X_1 \cup X_2$, donde X_1 y X_2 son continuos homeomorfos al continuo de Knaster (buckethandle-continuum) tales que $X_1 \cap X_2 = \{v\}$, donde v es el punto del continuo de Knaster que es punto extremo de todo arco que lo contiene. Claramente X no es un continuo indescomponible y X cumple con la propiedad de que $NWC(X)$ es vacío.*

Ejemplo 2.43. *Sea X un continuo homeomorfo al continuo de Knaster y A un arco tales que $X \cap A = \{v\}$, donde v es el punto del continuo de Knaster que es punto extremo de todo arco que lo contiene y A tiene a u, v como sus puntos extremos, luego*

$$NWC(X) = \{\{v\}\},$$

es decir, $|NWC(X)| \leq 1$ y por tanto $\mathcal{O}(X)$ es un conjunto infinito.

Ejemplo 2.44. $f : (0,1] \to [-1,1]$ *definida por* $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.
Sean $A = \{(x, f(x)) \ : \ x(0,1]\}$, $J = \{(0,y) \ : \ y \in [-1,1]\}$ y finalmente $B = A \cup J$, luego

$$\mathcal{O}(B) = 2^J \cup \{f(1)\} \cup \{Y \cup \{f(1)\} : Y \in 2^J\}$$

En general.

Definición 2.45. *Un **rayo** es un espacio homeomorfo al intervalo $[0,\infty)$. Si S es un rayo y $h : [0,\infty) \to S$ es un homeomorfismo, el punto $h(0)$ se denomina el punto extremo de S.*

Definición 2.46. *Una* ***compactación de rayo*** *es un continuo que contiene un rayo como subespacio denso.*
Para una compactación Z de un rayo S, denotamos $X = Z \setminus S$. Observemos que X no es vacío, pues $Z \neq S$ (Z es un continuo y S no es compacto). El conjunto X se le llama residuo de la compactación.
Notamos que $Z = X \cup S, X \cap S = \emptyset$ y $X \subset \overline{S} = Z$.

Si $h : [0, \infty) \to S$ es un homeomorfismo, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que: $S = h([o, n]) \cup h([n, \infty))$, entonces $\overline{S} = h([o, n]) \cup \overline{h([n, \infty))} = Z$, y $h([o, n]) \cap X = \emptyset$ (pues $h([o, n]) \subset S$). Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X \subset \overline{h([n, \infty))}$, más aún,

$$X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{h([n, \infty))} :$$

Para ver esto último, resta ver que tal intersección está contenida en X, esto se tiene, pues, si $x \notin X$, entonces $x \in S$, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in h([0, n])$. Como $h([0, n]) \cap \overline{h([n+1, \infty)} = \emptyset$, así, $x \notin \overline{h([n+1, \infty)}$, por lo cual $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{h([n, \infty))}$, esto prueba que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{h([n, \infty))} \subset X.$$

Notemos que $\{\overline{h([n, \infty))} : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión acotada de continuos. Se sigue que el residuo X en una compactación Z del rayo S es un continuo.

En resumen, una compactación del rayo es un continuo Z tal que $Z = X \cup S$ donde X es un subcontinuo de Z y S es un rayo con $X \cap S = \emptyset$ y $\overline{S} = Z$.

Ejemplo 2.47. *Si $X = Y \cup S$ es una compactación del rayo S con residuo el continuo Y, entonces*

$$\mathcal{O}(X) = 2^Y \cup \{P\} \cup \{A \cup \{P\} : A \in 2^Y\}$$

donde P es el punto extremo del rayo S.

Ejemplo 2.48. *(Doble seno topológico). Consideremos la función* $f : [-1,0)\cup(0,1] \to [-1,1]$ *definida por* $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.
Sean $A = \{(x, f(x)) \ : \ x \in [-1,0)\cup(0,1]\}$, $J = \{(0,y) \ : \ y \in [-1,1]\}$ *y finalmente* $B = A \cup J$. *Notemos que el continuo* B *no es localmente conexo.*

$$\mathcal{O}(B) = \{f(-1), f(1)\,\{f(-1), f(1)\}\}$$

En general

Ejemplo 2.49. *Sean* Z_1, Z_2 *dos compactaciones de los rayos* S_1, S_2 *respectivamente con un residuo en común* X. *Sea* $Z = Z_1 \cup Z_2$. *Sean* $h_1 : [o,\infty) \to S_1$, $h_2 : [o,\infty) \to S_2$ *homeomorfismos, luego*

$$\mathcal{O}(Z) = \{h_1(0), h_2(0)\,\{h_1(0), h_2(0)\}\}.$$

2.7. La cardinalidad de $\mathcal{O}(X)$

En el corolario 2.19 se muestra que para cualquier continuo X el hiperespacio $\mathcal{O}(X)$ contiene al menos dos elementos, además en todos los ejemplos de continuos expuestos en este trabajo la cardinalidad mínima del hiperespacio de los conjuntos orilla es al menos 3. Surge la pregunta
¿Existe un continuo X que tenga exactamente dos conjuntos orilla?
Para continuos localmente conexos la respuesta sería negativa, pues, del teorema 2.31, sabemos que si el hiperespacio de los conjuntos orilla es finito entonces dicho continuo es un árbol, luego tal hiperespacio tiene al menos tres elementos. Sabemos también que los continuos indescomponibles tienen una cantidad infinita de conjuntos orilla, y el teorema 2.21 nos asegura que los continuos descomponibles y encadenables deben contener como elemento al conjunto formado por la unión de los dos conjuntos unipuntuales cuya existencia nos asegura el teorema 2.19.

Conclusiones

Parte de este trabajo consistió en tomar resultados sobre, por ejemplo, no bloqueadores y reescribirlos, con sus respectivas pruebas, en términos de conjuntos orilla, sin embargo esta tesis no se limitó sólo a eso, sino que además se incluyeron varios resultados que no se tienen para conjuntos de tipo no corte, (conjuntos que no cortan, centros fuertes, no bloqueadores, conjuntos que no cortan débilmente, entre otros), un ejercicio interesante sería tomar dichos resultados y tratar de escribirlos en términos de otros conjuntos de tipo no corte.

Uno de los resultados a destacar en este trabajo sería en teorema 2.10, que además es un resultado original de esta tesis, caracteriza a los conjuntos orilla en términos sólo de su topología que, en consecuencia, nos deja una posible linea de investigación generalizando en concepto de conjunto orilla en continuos Hausdorff (espacios topológicos T_2, compactos y conexos).

Bibliografía

[1] R. Bing, Some characterizations of arcs and simple closed curves, Am. J. Math. 70 (1948) 497–506.

[2] J. Bobok, P. Pyrih, B. Vejnar, Non-cut, shore and non-block points in continua, Glasnik Math. 51 (71) (2016) 237–253.

[3] J. Camargo, F. Capulín, E. Castañeda, D. Maya, Continua whose hyperspace of nonblockers of $\mathcal{F}_1(X)$ is a continuum, Topol. Appl. 262 (2019) 30- 40.

[4] J. Camargo, D. Maya, L. Ortíz, The hyperspace of nonblockers of $\mathcal{F}_1(X)$, Topol. Appl. 251 (2019) 70- 81.

[5] R. Escobedo, C. Estrada, J. Sánchez, On hyperspaces of non-cut sets of continua, Topol. Appl. 217 (2017) 97–106.

[6] R. Escobedo, M. de Jesús López, H. Villanueva, Nonblockers in hyperspaces, Topol. Appl. 159 (17) (2012) 3614–3618.

[7] A. Illanes, P. Krupski, Blockers in hyperspaces, Topology Appl. 158 (2011) 653–659.

[8] R. Moore, Concerning simple continuous curves, Trans. Am. Math. Soc. 21 (1920) 333–347.

[9] S. Nadler Jr., Continuum Theory: An Introduction, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[10] S. Nadler Jr., Hyperspaces of Sets, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978.