



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

**MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA
OPCIÓN EN AUTOMATIZACIÓN**

**“CONTROL DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA Y
CONTORNEADO BASADO EN EL MODELO DE FRICCIÓN
PARA UN SISTEMA CNC DE FEED-DRIVE”**

T E S I S

Presentada para obtener el título de:
Maestro en Ciencias de la Electrónica Opción en Automatización

Presenta:

Lic. Margarita Carmina García López*

Directores:

Dr. Sergio Vergara Limon (FCE-BUAP)

Dr. José Fernando Reyes Cortés (FCE-BUAP)

Dr. Jesús López Gómez (DAIA-UJAT)

Puebla, México

Julio 2020

* Becario CONACYT

BUAP[®]

Agradecimientos

Son muchas personas las que han contribuido al proceso y conclusión del presente trabajo. En primer lugar, agradezco a mis asesores, el Dr. Sergio Vergara Limon, el Dr. Jesús López Gómez y el Dr. Fernando Reyes Cortés, los cuales me han guiado por el proceso para desarrollar de manera correcta el trabajo de la tesis y me han brindado su conocimiento, tiempo y apoyo incondicional para seguir adelante en la tarea.

Agradezco también a la Dra. María Aurora Diozcora Vargas Treviño, quien me ha apoyado con sus conocimientos y múltiples palabras de apoyo y entusiasmo para que siguiera haciendo las cosas de manera correcta y constante.

Al maestro en ciencias, Mr. Carlos Leopoldo Carreón Díaz de León, quien a pesar de no habernos encontrado mucho ha sido una invaluable fuente de conocimientos y apoyo para el proceso de desarrollo de la tesis.

A todos los maestros que impartieron su conocimiento en las clases de la maestría y que me impulsaron para seguir desarrollando el conocimiento, porque me enseñaron a no conformarme y a seguir desarrollando la curiosidad para preguntar y buscar los medios de desarrollar nuevo conocimiento.

A mi jurado revisor, Dra. Josefina Castañeda Camacho, Dr. Dionisio Fierro y Dr. Félix Francisco González Canales, por sus observaciones, comentarios y opiniones y porque con sus preguntas me ayudaron a ampliar el conocimiento necesario para mejorar el trabajo desarrollado.

A los coordinadores, la Dra. Olga Guadalupe Félix Beltrán y el Dr. José Eligio Moisés Gutiérrez Arias, por el apoyo para la realización de los trámites y por siempre resolver las dudas surgidas en el proceso.

Agradezco a mi familia, que me ha apoyado en esta etapa de mi vida para que cumpla con uno de mis sueños desde pequeña, el desarrollar y finalizar un posgrado en mi área de conocimiento. A mis padres por enseñarme como perseverar y darles prioridad a los sucesos de mi vida, y por enseñarme que cada etapa debe apreciarse al máximo. A mis hermanos, por siempre mantenerme de buen ánimo y enseñarme a lidiar con el estrés del trabajo.

A mis amigos y compañeros dentro y fuera de la maestría, por compartir su conocimiento, alegría y tristeza en el trayecto y tiempo que llevó la culminación de esta etapa.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por facilitar posgrados de calidad para aquellos que desean seguir desarrollándose profesionalmente y en particular a la Facultad de Ciencias de la Electrónica por brindarme la oportunidad de entrar en el posgrado y proporcionar la infraestructura y los medios para la maestría.

A CONACYT por el apoyo económico que ofrece en la forma de una beca para las personas que quieren seguir con su preparación profesional y apoyar a la investigación y desarrollo del país.

Dedicatoria

A mi familia y amigos, por siempre
apoyarme y creer en mí.

Resumen

En el presente trabajo de tesis se realiza un estudio de fricción sobre un mecanismo específico correspondiente a un robot CNC feed-drive de tres grados de libertad. Para ello, es necesario realizar primero un estudio general sobre el robot y su funcionamiento, lo que incluye su software, firmware y sus partes mecánicas para poder tener una idea general de sus características, funcionamiento y comportamiento. También es necesario considerar la definición de fricción y los diferentes tipos de fricción que pueden encontrarse en un sistema mecánico, así como las distintas expresiones matemáticas que existen para representar su comportamiento dentro de un sistema físico. Con este conocimiento en cuenta, es posible realizar un análisis del sistema para obtener el modelo dinámico del mismo, empleando la ecuación de Lagrange para este propósito y dejando un término extra correspondiente a un modelo de fricción que describe el comportamiento de esta. Dicho modelo es una propuesta original nacida a partir del análisis del efecto de Stribeck, fenómeno de fricción presente en mecanismos lubricados a bajas velocidades. Con la obtención del modelo dinámico del mecanismo, se procede a realizar un análisis del algoritmo de control y su implementación en el sistema, lo que permite la modificación de este a lazo cerrado para agregar una compensación de los efectos de fricción. A su vez, se plantea el algoritmo de control correspondiente al control de trayectoria que se considera como necesario para mejorar el comportamiento del robot para el uso que se exige de él. Juntando lo anterior se procede a realizar la implementación del algoritmo de control compensado y del control de trayectoria y se efectúa un análisis a profundidad sobre su influencia en la respuesta del sistema por medio de los resultados y de las señales obtenidas en los estudios. Con ello se demuestra la efectividad de la compensación y el control desarrollados en el trabajo y cuyos resultados permiten la extracción de conclusiones conforme al tema de la tesis.

ÍNDICE

| | |
|--|-----|
| Introducción..... | XIV |
| Capítulo 1: Descripción del robot..... | 1 |
| 1.1 Características mecánicas | 1 |
| 1.2 Sistema de control | 11 |
| 1.3 Software de Usuario | 14 |
| 1.4 Resultados experimentales iniciales | 18 |
| 1.5 Conclusiones..... | 20 |
| Capítulo 2: Consideraciones de la fricción..... | 22 |
| 2.1 Tipos de fricción..... | 22 |
| 2.2 Fricción en mecanismos CNC feed-drive..... | 25 |
| 2.3 Modelos de fricción | 28 |
| 2.4 Conclusiones..... | 31 |
| Capítulo 3: Obtención del modelo dinámico con fricción..... | 32 |
| 3.1 Ecuación de Lagrange y método de parámetros agrupados. | 32 |
| 3.2 Análisis de un grado de libertad | 33 |
| 3.3 Generalización del sistema para dos y tres grados de libertad. | 38 |
| 3.4 Modelo de fricción propuesto..... | 46 |
| 3.5 Conclusiones..... | 55 |
| Capítulo 4: Compensación de fricción en el algoritmo de control..... | 56 |
| 4.1 Control de posición del robot | 56 |
| 4.2 Control de trayectoria | 60 |
| 4.3 Compensación de la fricción en el algoritmo de control | 62 |
| 4.4 Conclusiones..... | 66 |
| Capítulo 5: Resultados experimentales | 67 |
| 5.1 Resultados experimentales con control de posición sin compensación de fricción. .. | 67 |
| 5.2 Resultados con compensación de fricción en el control..... | 71 |
| 5.2.1 Resultados obtenidos para el eje X | 72 |
| 5.2.2 Resultados obtenidos para el eje Y | 79 |
| 5.2.3 Resultados obtenidos para el eje Z | 86 |
| 5.3 Resultados de compensación de fricción con control de trayectoria..... | 87 |
| 5.3.1 Resultados obtenidos para el eje X | 88 |

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

| | |
|---|-----|
| 5.3.2 Resultados obtenidos para el eje Y | 95 |
| 5.3.3 Resultados obtenidos para los tres ejes | 103 |
| 5.4 Conclusiones..... | 105 |
| Conclusiones generales..... | 106 |
| Apéndices | 107 |
| Apéndice A: Cálculo de parámetros dinámicos. | 107 |
| Apéndice B: Constancia de Ponencia..... | 110 |
| Apéndice C: Artículo publicado | 111 |
| Apéndice D: Certificado de idioma | 117 |
| Bibliografía..... | 120 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|---|-------|
| Figura 1: Máquina textil de Joshep Jacquard. | XV |
| Figura 2: Fresadora CNC <i>Cincinatti</i> , Massachusetts 1952. | XVI |
| Figura 3: Primera máquina CNC fabricada en Europa (1956). | XVII |
| Figura 4: Máquina industrial CNC modelo Centaurus 510D, Limtech Ind. | XVIII |
| Figura 5: Máquina industrial CNC para trabajo en madera modelo nVentor 408TG. | XIX |
| Figura 6: Máquina Maxxis modelo 1618-IP-PT, Anderson America. | XIX |
| Figura 7: Impresora 3D modelo DT 600+ | XXI |
| | |
| Figura 1. 1: Robot CNC de 3 gdl..... | 1 |
| | |
| Figura 1.1. 1: Riel de alta precisión y carro de precisión. | 3 |
| Figura 1.1. 2: Corte transversal de un tornillo embalado. | 3 |
| Figura 1.1. 3: Interruptor de fin de carrera. | 4 |
| Figura 1.1. 4: Motor Z5D120-12 con reductor 5GU9K. | 4 |
| Figura 1.1. 5: Motor Z4D40-12GN-30S con reductor 4GN15K..... | 4 |
| Figura 1.1. 6: Encoder giratorio: a) E6B2-CWZ6C, b) Conexión para encoder con salida NPN colector abierto. | 5 |
| | |
| Gráfica 1.1. 1: Curva característica del motor X. | 9 |
| Gráfica 1.1. 2: Curva característica del motor Y..... | 10 |
| Gráfica 1.1. 3: Curva característica del motor Z..... | 10 |
| | |
| Figura 1.2. 1: Diagrama general del robot CNC de 3 grados de libertad aplicado a impresión 3D. | 13 |
| | |
| Figura 1.3. 1: Interfaz gráfica para el compilador de posiciones deseadas. | 14 |
| Figura 1.3. 2: Primera ventana del software de usuario: descarga del software de control. | 15 |
| Figura 1.3. 3: Segunda ventana del software de usuario: descarga de posiciones deseadas en la RAM. | 16 |
| Figura 1.3. 4: Interfaz de software de control..... | 16 |

| | |
|--|----|
| Figura 1.3. 5: Pestaña de ejecución del programa: sub-pestaña de inicialización..... | 17 |
| Figura 1.3. 6: Sub-pestaña de envío de comandos. | 17 |
| Figura 1.3. 7: Sub-pestaña de lectura de datos. | 18 |
| | |
| Figura 1.4. 1: Boceto de malla a realizar | 19 |
| Figura 1.4. 2: Impresión de malla con control de posición (2 capas)..... | 19 |
| Figura 1.4. 3: Impresión de malla con control de posición: a) 5 capas, b) 10 capas. | 20 |
| | |
| Figura 2.1. 1: Representación gráfica de la fuerza de fricción estática. | 23 |
| Figura 2.1. 2: Representación gráfica de la fuerza de fricción cinética..... | 24 |
| | |
| Figura 2.2. 1: Componentes físicos de un robot con feed-drive..... | 26 |
| Figura 2.2. 2: Cuatro regímenes de la curva Stribeck. | 27 |
| | |
| Figura 2.3. 1: Modelo de fricción viscosa y de Coulomb..... | 29 |
| Figura 2.3. 2: Modelo de fricción de Armstrong..... | 30 |
| | |
| Figura 3.2. 1: Composición de un eje del robot..... | 34 |
| Figura 3.2. 2: Diagrama esquemático de un grado de libertad del robot..... | 34 |
| | |
| Figura 3.3. 1: Diagrama esquemático para dos grados de libertad del robot. | 39 |
| Figura 3.3. 2: Diagrama esquemático para los tres grados de libertad del robot CNC de feed-drive, con el detalle de cada grado por separado..... | 40 |
| | |
| Figura 3.4. 1: Modelo de fricción a) Teórico b) Experimental..... | 47 |
| Figura 3.4. 2: Gráfica de torque contra tiempo experimental (eje x). | 48 |
| Figura 3.4. 3: Comportamiento de la tangente hiperbólica $\tanh(v)$ | 48 |
| Figura 3.4. 4: Comportamiento de la tangente hiperbólica negativa..... | 49 |
| Figura 3.4. 5: Comportamiento de la función signo. | 49 |
| Figura 3.4. 6: Función signo modificada: $\frac{1}{2}(1+\text{signo}(x))$ | 50 |
| Figura 3.4. 7: Tangente hiperbólica modificada $\frac{1}{2}(1-\tanh(x-k))$ | 50 |

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

| | |
|---|----|
| Figura 3.4. 8: Gráfica de la función planteada: $\frac{1}{4} (1+\text{signo}(x)) (1-\tanh(x-k))$ | 51 |
| Figura 3.4. 9: Comportamiento de la tangente hiperbólica $\tanh(v)$ | 51 |
| Figura 3.4. 10: Comportamiento de la función $-\text{signo}(v)$ | 52 |
| Figura 3.4. 11: Comportamiento de la función $\frac{1}{2} (1-\text{signo}(v))$ | 52 |
| Figura 3.4. 12: Comportamiento de la función $\frac{1}{2} (1+\tanh(v+k))$ | 53 |
| Figura 3.4. 13: Comportamiento para la función $-12(1 + \tanh v + k)$ | 53 |
| Figura 3.4. 14: Comportamiento de la función $-14(1 - \text{signo}v)(1 + \tanh v + k)$ | 53 |
| Figura 3.4. 15: Gráfica de la función para la descripción del efecto de Stribeck. | 54 |
| Figura 3.4. 16: Gráfica del torque de fricción. | 55 |
| | |
| Figura 4.1. 1: Lazo cerrado de control de posición con retroalimentación de posición. | 58 |
| Figura 4.1. 2: Lazo cerrado de control de posición con retroalimentación de posición y de velocidad..... | 58 |
| | |
| Figura 5.1. 1: Resultados de posición del eje X del CNC feed-drive. | 68 |
| Figura 5.1. 2: Torque experimental del eje X del CNC feed-drive..... | 69 |
| Figura 5.1. 3: Posición experimental del eje Y del CNC feed-drive..... | 69 |
| Figura 5.1. 4: Torque experimental del eje Y del CNC feed-drive..... | 70 |
| Figura 5.1. 5: Posición experimental del eje Z del CNC feed-drive..... | 70 |
| Figura 5.1. 6: Torque experimental del eje Z del CNC feed-drive..... | 71 |
| | |
| Figura 5.2.1. 1: Resultados de la posición en el eje X de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck..... | 72 |
| Figura 5.2.1. 2: Resultados de la velocidad en el eje X de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck..... | 73 |
| Figura 5.2.1. 3: Resultados del torque total vs tiempo en el eje X de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck..... | 74 |

Figura 5.2.1. 4: Resultados del torque total en el eje X de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck. 75

Figura 5.2.1. 5: Resultados del torque del controlador vs el tiempo en el eje X de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck. 76

Figura 5.2.1. 6: Resultados del torque del controlador en el eje X de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck. 77

Figura 5.2.1. 7: Resultados error en el eje X de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck. 78

Figura 5.2.2. 1: Resultados de la posición en el eje Y de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck. 79

Figura 5.2.2. 2: Resultados de la velocidad en el eje Y de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck. 80

Figura 5.2.2. 3: Resultados del torque total aplicado vs el tiempo en el eje Y de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck. 81

Figura 5.2.2. 4: Resultados del torque total aplicado en el eje Y de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck. 82

Figura 5.2.2. 5: Resultados del torque del control aplicado vs en el tiempo en el eje Y de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck. 83

Figura 5.2.2. 6: Resultados del torque del control aplicado en el eje Y de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

| | |
|---|----|
| coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck..... | 84 |
| Figura 5.2.2. 7: Resultados del error en el eje Y de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck. | 85 |
| Figura 5.2.3. 1: Comparativa de la posición deseada y la posición real en el eje Z. | 86 |
| Figura 5.2.3. 2: Error en el eje Z con el control sin compensaciones..... | 86 |
| Figura 5.2.3. 3: Error en el eje Z con el control con compensaciones..... | 87 |
| Figura 5.3.1. 1: Aceleración del sistema en el eje X..... | 88 |
| Figura 5.3.1. 2: Resultados de la posición en el eje X para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste..... | 89 |
| Figura 5.3.1. 3: Resultados de la velocidad en el eje X para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste. | 90 |
| Figura 5.3.1. 4: Resultados del torque total aplicado vs el tiempo en el eje X para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste. | 91 |
| Figura 5.3.1. 5: Resultados del torque total aplicado en el eje X para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste. | 91 |
| Figura 5.3.1. 6: Resultados del torque del control aplicado en el eje X vs el tiempo para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste. | 92 |
| Figura 5.3.1. 7: Resultados del torque del control aplicado en el eje X para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste. | 93 |
| Figura 5.3.1. 8: Resultados del error en el eje X para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste..... | 94 |
| Figura 5.3.1. 9: Errores máximos obtenidos para cada algoritmo en el eje X. | 95 |
| Figura 5.3.2. 1: Aceleración del sistema en el eje Y..... | 96 |
| Figura 5.3.2. 2: Resultados de la posición en el eje Y para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste..... | 96 |
| Figura 5.3.2. 3: Resultados de la velocidad en el eje Y para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste. | 97 |
| Figura 5.3.2. 4: Resultados del torque total aplicado vs el tiempo en el eje Y para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste. | 98 |

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

| | |
|---|-----|
| Figura 5.3.2. 5: Resultados del torque total aplicado en el eje <i>Y</i> para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste. | 99 |
| Figura 5.3.2. 6: Resultados del torque del control aplicado vs el tiempo en el eje <i>Y</i> para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste. | 100 |
| Figura 5.3.2. 7: Resultados del torque del control aplicado en el eje <i>Y</i> para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste. | 100 |
| Figura 5.3.2. 8: Resultados del error en el eje <i>Y</i> para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste. | 101 |
| Figura 5.3.2. 9: Errores máximos obtenidos para cada algoritmo en el eje <i>Y</i> | 102 |
| | |
| Figura 5.3.3. 1: Rombo trazado por la máquina CNC feed-drive. | 103 |
| Figura 5.3.3. 2: Triángulo trazado por la máquina CNC feed-drive. | 104 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|---|----|
| Tabla 1.1. 1: Características generales del robot..... | 2 |
| Tabla 1.1. 2: Frecuencia de trabajo de los motores del CNC..... | 8 |
| Tabla 1.1. 3: Caracterización de los motores X, Y con sus correspondientes frecuencias seleccionadas..... | 8 |
| Tabla 1.1. 4: Caracterización del motor Z con su correspondiente frecuencia seleccionada..... | 8 |
| Tabla 1.1. 5: Caracterización del motor Z con su correspondiente frecuencia seleccionada..... | 9 |
| | |
| Tabla 3.2. 1: Constantes de los ejes del robot..... | 35 |
| Tabla 3.2. 2: Variables de los ejes del robot..... | 35 |
| | |
| Tabla 3.3. 1: Constantes generalizadas de los ejes del robot..... | 41 |
| Tabla 3.3. 2: Variables generalizadas de los ejes del robot..... | 42 |

Introducción

Actualmente, la tecnología es una parte esencial para la vida de los seres humanos, por lo que no es de extrañar que una gran parte de los avances tecnológicos desarrollados en el último siglo se centren en el área de la robótica, impulsados por el deseo de mejorar la calidad de vida de las personas por medio del uso de mecanismos que realizan una amplia variedad de funciones. La robótica está formada por un campo relativamente nuevo de conocimientos orientados a la tecnología de aplicación y dentro de este campo, se tiene que existen diversos tipos de robots que pueden ser empleados en todo tipo de sistemas y para todo tipo de funciones. Otro punto muy desarrollado en el manejo de tecnología y robots manipuladores es el hecho de que los avances tecnológicos permiten contar con máquinas destinadas a realizar un sinnúmero de actividades. Un ejemplo es la existencia de brazos robóticos que permiten la automatización de procesos de manufactura en diversas áreas, como lo es la industria automotriz para ensamblado, soldadura, pintura, etc. Al hecho de incorporar elementos y dispositivos para asegurar el control y el comportamiento de un proceso es a lo que se le denomina automatización [1].

Como se mencionó anteriormente, los robots poseen diversas aplicaciones y usos, y dependiendo de estos, también existen diversos tipos de mecanismos a implementar. Uno de los más usados es el robot cartesiano, debido a su capacidad de generar trayectorias complejas en un espacio 3D, lo que lo hace ideal para manipular o manufacturar productos y objetos. El avance de los robots manipuladores también implica que existe cada vez una mayor demanda para estudiarlos y mejorarlos. Estos robots pueden mejorarse en dos aspectos: reduciendo su costo de fabricación y haciendo más eficiente su funcionamiento.

Muchos años antes de que existieran los robots o la tecnología necesaria para construirlos, ya se tenían indicios de lo que sería su futuro, en la forma de escritos que describían máquinas capaces de reemplazar a los humanos al realizar diversas tareas. Se podría decir que el origen de los robots industriales puede remontarse hasta los inicios de la industria textil a finales del siglo XVIII e inicios del siglo XIX, cuando Joshep Jacquard realiza una serie de pruebas que culminan en el año 1801 con la invención e implementación de una máquina textil que empleaba tarjetas perforadas como medio para programar acciones (figura 1). Esta máquina se basaba en un control que se realizaba mediante unas perforaciones en tarjetas o fichas de cartón que permitían el paso de las agujas que movían los hilos antes del paso de la lanzadera. La secuencia de tarjetas se hacía en un bucle cerrado que permitía la repetición del dibujo, a manera de que cualquier persona por inexperta que fuese, pudiera realizar diseños complejos al tejer en el telar [2].

Este primer intento de una máquina automatizada fue exhibido en Paris y galardonado con una medalla de bronce y a pesar de la reticencia inicial hacia su uso, hacia 1812 se había popularizado de tal manera que se tenían 11,000 telares en uso en Francia. Ese hecho marca el inicio de los primeros procesos de automatización industrial, a manera de implementar dispositivos automáticos en la producción y, de esta forma, impulsando la revolución industrial, lo que a su vez se retroalimenta en la forma de una mejora continua en los mecanismos usados en la industria. Una mejora que se realizó casi de manera inmediata fue cuando en el año 1815, Jean Antoine Breton se las arregla para resolver los problemas con el mecanismo de las tarjetas perforadas, provocando un aumento de ventas de la máquina y por

consiguiente alentando lo que sería el inicio de una serie de mejoras continuas hacia las máquinas de la industria textil.



Figura 1: Máquina textil de Joshep Jacquard.

Posteriormente, el invento del sistema de tarjetas perforadas de Jacquard se transformó en el paradigma de la primera máquina computacional que fue desarrollada por Charles Babbage, siendo el sistema empleado también en equipos y maquinarias como pianos mecánicos, pianolas y posteriormente en los primeros ordenadores en 1940-1960 como una forma de soporte para la entrada de datos y programas [2].

La palabra robot se popularizó por el escritor Karel Capek en 1921, proveniente del vocablo checo *Robota* cuyo significado es trabajo forzado, esclavo o servicio. En la obra de este autor, el vocablo es empleado para describir a máquinas que trabajan al servicio del hombre, lo que pronto se convirtió en el término adecuado para máquinas de la industria. Es importante notar que la robótica es un campo relativamente joven de tecnología moderna y se compone de una serie de conocimientos necesarios para el entendimiento de los mecanismos a los que se aplica, como lo son la ingeniería mecánica, ingeniería electrónica, sistemas, ciencias de la computación, matemáticas, etc. Es por esto por lo que en ocasiones es difícil definir el concepto de robot, el cuál en realidad puede hacer referencia a cualquier mecanismo que opere con cierto grado de autonomía, normalmente con un control de computadora. Los robots como los conocemos surgen de la fusión de dos áreas de la tecnología compuestas por teleoperadores y máquinas de control numérico.

Es por esta razón que nos podemos remontar a los orígenes de este tipo de mecanismos para buscar los orígenes de la robótica y la automatización, siendo los primeros dispositivos de este tipo los sistemas maestro-esclavo, dentro de los que se encuentran los teleoperadores, y que se desarrollaron durante la segunda guerra mundial para hacer el manejo de materiales radiactivos más seguro. A su vez, la segunda guerra mundial promovió el desarrollo de lo que se consolidó como el control numérico computarizado (CNC) como respuesta a la

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

necesidad de mecanizar ciertos elementos con un alto nivel de precisión no obtenido por medio de un usuario cualquiera. Así pues, no es de extrañar que los primeros robots hallan nacido de combinar los enlaces mecánicos de los teleoperadores con la autonomía y capacidad de programar máquinas gracias al CNC [1,2].

La primera máquina CNC fue creada en Massachusetts en 1952, en la forma de una fresadora Cincinatti con capacidad para realizar movimientos a través de tres ejes de coordenadas. Lo que le permitía movimientos en 3 grados de libertad para mecanizar superficies complejas. A pesar de la invención, el uso de estas máquinas no se volvió factible hasta 1955, cuando fueron comercializadas. En el inter, su principal uso fue el de elaborar piezas de precisión para aviones militares. Su principal característica fue su manejo por medio de computadores, las cuales también evolucionaron con el paso del tiempo para dar paso a modelos cada vez más pequeños y eficientes. En 1958 se tiene registro se una solicitud de patente para lo que se llamó un “aparato controlado por motor para máquina herramienta de posicionamiento”, lo que marco el nacimiento comercial de la tecnología CNC.



Figura 2: Fresadora CNC *Cincinatti*, Massachusetts 1952.

Por otro lado, se tiene que en Míchigan se creó un sistema de producción de plantillas para piezas de helicópteros, mediante el cálculo de coordenadas de una superficie aerodinámica que podían ser introducidas en forma de datos que se traducían a puntos de proceso en un perforador de plantillas suizo. Este dispositivo se consideró como el primer mecanismo de control numérico real y puede ser observado en la figura 3. Posteriormente, entre 1960 y 1970, se tiene que las máquinas industriales CNC empezaron a tomar formas más parecidas a las que conocemos hoy en día, lo que se vio reforzado a posteriori cuando la tecnología digital se hizo presente y la automatización de los procesos se volvió más eficiente.

En 1956, se puede encontrar que el CNC apenas estaba iniciando, sin embargo, la tecnología mostró ser tan eficiente y capaz de lograr todo tipo de funciones que a la actualidad es poco probable el encontrar algún artículo cuya fabricación no haya sido posible o habilitada gracias al uso de una máquina con tecnología CNC. Las máquinas de este tipo son conocidas por ahorrar costos, tener un alto grado de adaptabilidad y el emplear un lenguaje estándar que

permite que una gran parte de las industrias adapten las funciones de la máquina a sus líneas de producción.

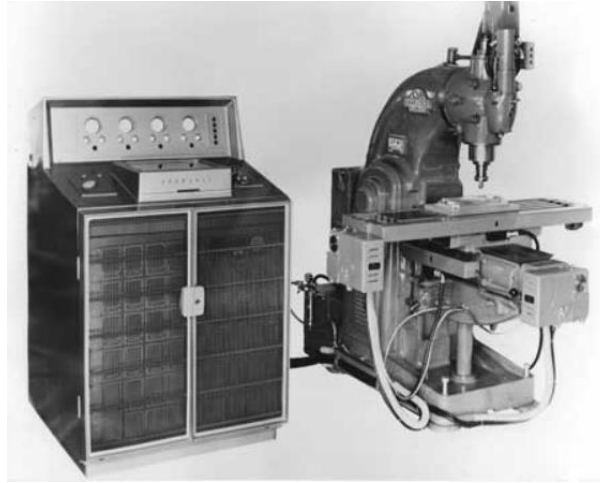


Figura 3: Primera máquina CNC fabricada en Europa (1956).

Una característica que se ha conservado con el desarrollo de las máquinas CNC, es que poseen tres componentes principales de funcionamiento, los cuales son: una función de comando, un sistema de conducción o movimiento y un sistema de retroalimentación. Este último es de gran importancia, pues permite un mejor control del mecanismo que no depende de cálculos y que no puede ser desajustado de manera sencilla. Es importante notar también que los CNC industriales se caracterizan también por su mecánica robusta, la cual es capaz de resistir el gran volumen de producción que se exige de ellos sin sufrir desgaste significativo en el mecanismo. Esta característica es importante porque permite al control de la máquina depender de las lecturas de los sensores sin tener que preocuparse por reajustar o recalibrar las partes mecánicas del sistema.

Es también importante resaltar que la evolución de las máquinas CNC fue y sigue siendo un proceso continuo, dado que cada día hay nuevos avances y desarrollos que mejoran el funcionamiento, la eficiencia y los controles que se emplean para las diversas aplicaciones que se dan en estos mecanismos. En particular, en algunas máquinas modernas se han tenido cambios donde algunas se han desarrollado para tener hasta siete ejes. Adicionalmente, se tiene que se les ha dado a estos mecanismos aplicaciones que antes solo era posible soñar y que son diversas y con diferentes usos cada una, como lo son: cortadoras láser, impresoras 3D, cortadores de plasma, máquinas de mecanizado, manipulación de materiales delicados, medición de diversas magnitudes, etc. las cuales en conjunto son capaces de crear casi cualquier forma, pieza o producto imaginable con una buena calidad y las especificaciones adecuadas.

Es por estas características que las máquinas CNC industriales se encuentran actualmente en todas las empresas que poseen líneas de producción, sobre todo aquellas cuyos procesos son largos y complejos, debido a que ayudan a reducir costos y maximizar ganancias, con la ventaja adicional de que la programación automática de sus funciones beneficia a la precisión

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

en las tareas y disminuye las posibilidades de tener errores al eliminar el factor de error que puede darse en un humano debido al cansancio, distracciones o incluso a la repetitividad de una tarea.

A continuación, se muestran algunas de las máquinas CNC que se pueden encontrar actualmente en la industria, las cuales constituyen lo más actual en cuanto a funciones y aplicaciones para este tipo de mecanismos. Se inicia con una máquina de la compañía Limtech Industry, modelo Centaurus 510D. Esta máquina posee un husillo de 12 caballos de fuerza que incluye un cambiador de herramientas. Posee una herramienta tipo broca para perforados, una bomba de vacío, un controlador industrial y un marco resistente diseñado para resistir el desgaste de un uso constante. Además, posee un diseño para fabricación anidada y posee gabinetes y sistemas de armario. También tiene un sistema de perforado en línea para los ejes X y Y de 32mm. Esta máquina puede observarse en la figura 4.



Figura 4: Máquina industrial CNC modelo Centaurus 510D, Limtech Ind.

Otra máquina que se puede mencionar está diseñada para trabajar con madera y es fabricada por la empresa SNX Technologies, modelo nVentor 408TG. Este es un enrutador industrial CNC con doble zona de vacío, como se observa en la figura 5, y se encuentra diseñado y construido para ofrecer rigidez al momento de trabajar. Sus principales características son que ofrece la doble zona de vacío de 4 x 8 en la tabla de procesamiento, que posee un husillo vertical para perforar y abocardar agujeros y que tiene además un husillo de 12 caballos de fuerza con su cambiador de herramienta y una estación de pre-ajuste para las herramientas de los cabezales, pernos de acero para la ubicación de las herramientas y una bomba de vacío con el mecanismo de tuberías necesarias ya ajustado. Adicionalmente, esta máquina es compatible con una gran gama de programas CAD/CAM empleados en la industria para trabajos con madera.



Figura 5: Máquina industrial CNC para trabajo en madera modelo nVentor 408TG.

Una empresa altamente reconocida actualmente por su fabricación de máquinas CNC es la industria Anderson America de Anderson Group. Esta empresa tiene una gran variedad de máquinas CNC que pueden ser empleadas para distintos propósitos. Una de ellas es la correspondiente a la serie MAXXIS (figura 6), la cual es una mesa móvil de 5 ejes diseñada para mecanizado que posee una gran precisión y un gran desempeño. Combina una base altamente rígida con cajas de engranajes de precisión y sistemas de servomotores que aumentan la eficiencia y exactitud del mecanismo. Es una opción de tecnología de punta que se emplea en diversas fábricas para el mecanizado de piezas plásticas, de aluminio y otros materiales compuestos. Posee un puente fijo y una tabla móvil diseñada para proveer un acceso fácil a la maquina en la forma de un diseño compacto. La estructura de acero se caracteriza por su robustez, incluso con el funcionamiento de los 5 ejes con mecanizados simultáneos. Adicionalmente, esta característica de robustez permite alcanzar nuevas velocidades de mecanizado, superiores a las de otras máquinas industriales. Su control incluye una red de Ethernet para conectarse a otros dispositivos y recibir incluso soporte a distancia por parte de los fabricantes.



Figura 6: Máquina Maxxis modelo 1618-IP-PT, Anderson America.

Como las anteriores, actualmente existen un gran número de máquinas CNC, cada una con sus características propias que la diferencian de las demás existentes en el mercado. Algunas se especializan en un solo campo o tienen usos en diversos de estos como la industria aeroespacial, producción y trabajo con madera, plásticos, metales y otros materiales, corte y grabado láser, corte plasma, etc. Sin embargo, un punto que las vuelve aptas para llamarse máquinas industriales es la robustez de su estructura, la cual es sólida y con componentes de alta calidad que aseguran el funcionamiento de la máquina a pesar de ser sometidas a un trabajo continuo.

Otra de las aplicaciones más populares que se le da en la actualidad a los robots tipo CNC es el de impresora 3D. La impresión 3D es un proceso muy reciente que tiene lugar para gran cantidad de mejoras y que se encuentra basado en tecnologías de procesos aditivos o por inyección de polímeros. Su metodología de aplicación permite que, a partir de un modelo digital, se agreguen capas de material en forma controlada y precisa hasta construir un objeto en tres dimensiones, lo cual permite la creación de piezas que de otra forma son difíciles o imposibles de manufacturar. Esta ventaja permite que la impresión 3D tenga gran variedad de aplicaciones.

El origen de las impresoras 3D puede remontarse a la invención de la impresora de tinta, lo cual ocurrió en el año 1976. Durante la década de los ochenta, se tienen desarrollos claves para el desarrollo de la actual tecnología de impresión 3D. En 1981 se presenta la primera patente que se puede relacionar con la impresión 3D, con el concepto de creación de piezas sólidas por medio del endurecimiento de una tina de fotopolímero empleando luz UV. En Francia, se desarrolló el concepto de replicar piezas geométricas con formar fractales o mediante la producción de piezas complejas empleando formas más simples. Es de este proceso del que nace la idea de polimerización por láser cuando se descubre que algunos líquidos podían ser curados con la aplicación de láser. Sin embargo, todas las ideas desarrolladas en esta época resultaron proyectos inconclusos o fallidos. El verdadero avance se tiene en 1984, cuando Chuck Hull inventa la *estereolitografía*, que es un método de impresión 3D basado en la síntesis de capas por medio de un láser. En 1986, cuando se logra la patente del concepto, se funda la compañía *3D Systems*, la cual es la primera empresa en el sector de impresoras 3D que también comercializó la primera impresora 3D [3].

Actualmente, en el mercado existen diversos robots cartesianos más sofisticados, entre los que destacan varios modelos empleados para impresión 3D. Las máquinas CNC se emplean ampliamente en la manufactura de moldes, aviones e industria aeroespacial, siendo todas estas áreas de aplicación a altas velocidades que requieren una respuesta de alta precisión y con un alto desempeño dinámico del sistema CNC. Un ejemplo de los robots cartesianos más sofisticados disponibles actualmente en el mercado como impresora 3D es el modelo DT 600+ (figura 7), la cual puede ser observada en la figura 4 y que fue desarrollada por la empresa española Dynamical Tools. Cuenta con un doble cabezal que permite trabajar una pieza con dos materiales diferentes o dos piezas de manera simultánea.



Figura 7: Impresora 3D modelo DT 600+

Existen a su vez, diversos modelos de impresoras 3D a nivel industrial con características propias y novedosas, puesto que esta es un área en continuo desarrollo. Es importante notar que todas estas impresoras son de alto costo, lo que implica también un alto rendimiento y precisión aunado a su eficiencia y demás características propias que las hacen deseables en el mercado.

Un punto importante en los antecedentes del proyecto es que en la literatura científica existen diversos trabajos que se relacionan con el control de seguimiento de trayectoria y de contorno de precisión basado en un modelo de compensación de fricción para un sistema CNC de feed-drive. En varios de estos trabajos se siguen hipótesis que conllevan el desarrollo de un modelo matemático del sistema, así como el desarrollo y/o implementación de algoritmos de estimación de fricción y para realizar el control de contorno específicamente para máquinas y prototipos de sistemas CNC de feed-drive.

En una gran parte de los dispositivos mecatrónicos de ultra alta precisión, la perturbación cuya presencia es dominante es a menudo la fricción junto con sus características propias, las cuales a menudo son no lineales y que dependen del tiempo y la posición del sistema. Todo esto influye de manera significativa en la precisión y exactitud de las máquinas, dado que se inducen ciclos límite alrededor de la posición de referencia deseada, lo que genera errores de deslizamiento estático y de seguimiento, así como grandes tiempos de asentamiento [4-6].

En diversos trabajos se demuestra que, al manufacturar piezas, se presenta una curvatura que difiere de manera significativa de la curva deseada en el modelo original, dígase, un error de seguimiento en cada uno de los ejes que provoca un error de contorno cuando se trabaja a una velocidad de avance alta [7]. Esta clase de errores puede generarse cuando uno o más de los ejes del robot no posee la capacidad de seguir perfectamente la trayectoria deseada debido a que sufre de perturbaciones externas como lo es la fricción, las fuerzas de corte o las limitaciones físicas de los actuadores que se generan por la no linealidad de su comportamiento o el de los sensores [8]. Es por ello por lo que es necesario tomar en cuenta

que para realizar un control de movimiento en máquinas herramienta CNC, todos los ejes deben controlarse de manera simultánea para evitar agrandar las perturbaciones que se tienen por las interacciones entre ellos. El usar controles independientes puede generar errores de seguimiento axial, lo cual a su vez puede provocar errores de coordinación entre los ejes de la máquina [9].

De una manera general, la mejor manera que se tiene de reducir errores de contornos es al aumentar la precisión de seguimiento de cada eje individual de la máquina. Esto puede conseguirse mejorando la respuesta del motor para los ejes del sistema y tomando en consideración el error de estos, haciendo coincidir el desempeño del motor en el sistema al que se acopla y ajustando los parámetros óptimos para la dinámica del feed-drive.

Como se mencionó, existen diversos trabajos que estudian la problemática de la fricción y sus efectos en los mecanismos. Whalley et al. [10] modeló un sistema de husillo de bolas de acople electromecánico cuya principal característica es su inclusión de la perturbación de corte. Erkorkmaz et al. [11] basó sus estudios en la simplificación del sistema de transmisión mecánica en un término general de inercia y uno de amortiguación para el eje del motor, además de tener en cuenta las perturbaciones de fricción generadas por el funcionamiento a baja velocidad de los mecanismos para identificar los parámetros del sistema empleando el método de mínimos cuadrados. Erkorkmaz [12] también se encargó del desarrollo y la propuesta de un modelo de estimación del error de contorno en tiempo real usando el filtro de Karman. Es en base a estos y otros estudios por lo que se ha considerado que el control de avance y la compensación de los efectos de la fricción en los mecanismos mejoran la precisión de seguimiento y reducen los errores de contorno.

La realidad es que, al buscar precisión de posicionamiento en un sistema, es necesario modelar el comportamiento de sus perturbaciones, siendo la más usual la fricción, por lo que el modelado de esta permitirá identificar y compensar adecuadamente sus efectos sobre el sistema mediante el uso de tipologías de servo-control adecuadas. A pesar del desarrollo de diversos estudios en los que se muestran los efectos de la fricción en el seguimiento de trayectoria y control de contorno para sistemas CNC feed-drive, aún existe campo para la mejora de estos estudios. Actualmente se puede afirmar que existen pocos manuscritos que se concentren exclusivamente en estudios de fricción en este tipo de sistemas, por lo que al estudiar más a fondo los modelos existentes y concentrarse en mejorarlos e implementar los resultados, se permite mejorar el conocimiento que se tiene sobre este tipo de fenómenos en robots CNC y de esta manera determinar qué papel juegan con exactitud en los errores existentes en los controles modernos de trayectoria y de contorno.

OBJETIVOS

General:

“Desarrollo de un control de seguimiento de trayectoria en un sistema CNC basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive”

Objetivos Específicos:

- Estudio del efecto de la fricción en la respuesta de un sistema robótico X - Y .
- Estudio del sistema embebido usado en el CNC.
- Obtención del modelo dinámico del sistema CNC de feed-drive aplicando el método de parámetros agrupados.
- Proponer un algoritmo de control con compensación de fricción para los ejes X - Y del CNC.
- Implementación de un controlador con compensación de fricción para los ejes X - Y del CNC.
- Realizar pruebas experimentales.
- Publicación de resultados.

Organización de la Tesis:

Capítulo 1: En este capítulo se realiza una descripción general del sistema mecatrónico con el que se trabajará para el estudio. Se mencionan las respectivas partes mecánicas del CNC y las características principales de cada una de ellas. Además, se hace una descripción de las especificaciones del robot, de parte de su electrónica, el firmware, el software de usuario con el que trabaja la máquina y de los resultados experimentales que se poseen de manera inicial y que servirán como base para el desarrollo de la tesis.

Capítulo 2: En esta sección de la tesis se hace una compilación del concepto de fricción y de los diversos tipos de fricción y sus clasificaciones más conocidas, todo basado en los tipos de fricción que suelen encontrarse en un sistema o mecanismo como el que se usa. A su vez, se hace énfasis en la manera en que este fenómeno afecta el comportamiento de los sistemas y se realiza un pequeño resumen de los principales modelos de fricción existentes para representar los efectos de la fricción en un modelo dinámico.

Capítulo 3: En el capítulo tres se introduce la metodología empleada para la obtención del modelo dinámico del sistema, empleando un análisis inicial para un grado de libertad del robot y luego generalizando el mismo para incluir los tres grados de libertad que conforman al mecanismo. También se explica la obtención del modelo de fricción propuesto que se agregará al modelo dinámico para estudiar los efectos de este que se han observado en el mecanismo.

Capítulo 4: En esta parte del escrito, se desarrolla el proceso empleado para implementar el lazo de control en el robot, de forma que se genera una planta donde se puede implementar una ley de control adecuada para el posicionamiento del sistema en las coordenadas deseadas. Con la ley de control planteada, se explica el procedimiento con el cual se plantea la compensación de los efectos de la fricción del sistema como método para mejorar la respuesta del mecanismo.

Capítulo 5: En el capítulo final, se tienen desglosados los resultados obtenidos de la implementación del algoritmo de control, remarcando las mejoras que se obtienen en la respuesta del robot con cada paso del algoritmo agregado por medio de la manipulación del software y el firmware del robot. Se explica paso a paso cada uno de los resultados y los cambios experimentados por las señales y se realiza la comparación de estos para cuantificar la mejora del comportamiento del mecanismo sin compensación, con compensaciones y al añadir el control de trayectoria.

Capítulo 1: Descripción del robot

Para asegurar que el estudio de los efectos de la fricción en el sistema se realiza de manera correcta, es necesario tener un análisis del robot que se empleará para los estudios. En primer lugar, se analizó la parte mecánica de este. Se tiene un robot CNC tipo cartesiano de 3 grados de libertad (G.D.L.) el cual se muestra en la figura 1.1 y cuya estructura se desarrolló en la Maestría en Ciencias de la Electrónica opción en Automatización (MCEA) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). Este robot posee un mecanismo basado en el control numérico por computadora que se emplea para darle la posición deseada por el usuario [12].

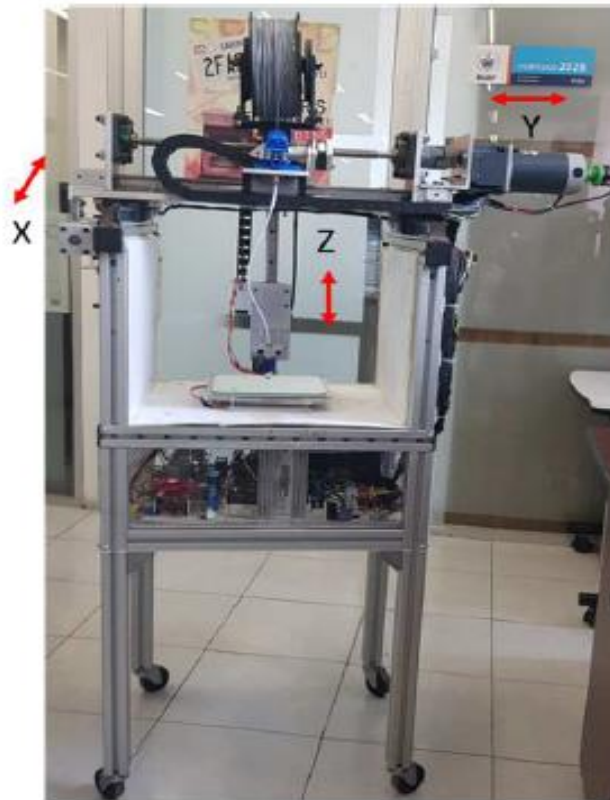


Figura 1. 1: Robot CNC de 3 gdl.

1.1 Características mecánicas

El robot cuenta con una estructura mecánica fabricada en acero y que tiene rieles de alta precisión para cada uno de los grados de libertad, lo que permite una mayor precisión de funcionamiento [13]. A su vez, los rieles se encuentran apoyados con carros lineales de precisión para obtener un mejor desplazamiento lineal con un mínimo de fricción al efectuar el movimiento. Para poder transformar el actuar rotatorio de los motores a un actuar lineal, se tienen acoplados tornillos embalados con su respectiva tuerca fijada a los extremos de los ejes. Como actuadores de los ejes, el robot cuenta con motores con reductores que se alimentan a 12 V y que proporcionan 3100 rpm, con un torque generado de 3-4 Nm. Para

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

poder ocuparlos, se tienen acoplados encoders giratorios de 1000 pulsos/revolución que sirven para determinar la posición actual del sistema. Con todo, se tiene que las características generales del sistema desglosado pueden ser revisadas en la tabla 1.1.1:

| Descripción | Requerimiento |
|------------------------------|--|
| Número de grados de libertad | 3 (X, Y, Z) |
| Ejes X y Y | <ul style="list-style-type: none"> • Desplazamiento: $X=276\text{mm}, Y=245\text{mm}$ • Tornillo embalado de 12mm • Guía de alta precisión de 32mm • Bloque para guía de 32mm |
| Eje Z | <ul style="list-style-type: none"> • Desplazamiento: 145mm • Tornillo embalado de 12mm • Guía de alta precisión de 15mm • Bloque para guía de 15mm |
| Tamaño (mm) | $950 \times 1470 \times 860$ |
| Volumen de impresión (mm) | $214 \times 214 \times 70$ |
| Alimentación | $120V_{CA}$ y $12V_{CD}$ |
| Cama caliente | MK3 |
| Extrusor | Metal J-Head |
| Resolución | $\Delta x = 0.286\mu\text{m}$ $\Delta y = 0.287\mu\text{m}$ $\Delta z = 0.171\mu\text{m}$ |
| Velocidad | $v_x = 35 \text{ mm/s}$ $v_y = 25 \text{ mm/s}$ $v_z = 21 \text{ mm/s}$ |
| Material de impresión | PLA |
| Software | Abierto |
| Conectividad | Wifi |
| Sistemas operativos | Abierto |

Tabla 1.1. 1: Características generales del robot.

A continuación, se hace una breve descripción de los diversos componentes que influyen en la precisión y exactitud de movimiento del robot y algunas de sus partes mecánicas, como lo son los rieles de alta precisión, los carros lineales de precisión, los tornillos embalados que sirven para la transformación de movimiento rotacional a lineal, los motores DC de uso robusto que cuentan con reductores para transformación de torque, los encoders que permiten la determinación de la posición de los motores para cada grado de libertad, la herramienta de extrusión que sirve para la inyección del material de impresión, el módulo Wi-Fi que permite el establecimiento de la comunicación entre el sistema y la computadora, la tarjeta de implementación que posee un FPGA tipo Cyclone V FPGA 5CEBA4F23C7N, entre otros:

- Riel de alta precisión y carro lineal de precisión. - Ambos son implementados en cada uno de los ejes del robot como medio para obtener un desplazamiento lineal con una fricción mínima. Al final de cada uno de estos carros, es donde se puede ubicar los sensores de final de carrera que ayudan a limitar el área de trabajo. Puede observarse uno de los rieles empleados en la figura 1.1.1.



Figura 1.1. 1: Riel de alta precisión y carro de precisión.

- Tornillo embalado – El robot posee un tornillo embalado que es responsable de la transformación del movimiento rotatorio del motor en un desplazamiento lineal. Se tiene un tornillo por cada uno de los ejes de movimiento del robot y el comportamiento interno de este tipo de tornillo se lleva a cabo por medio de balines internos que se desplazan por la tuerca del tornillo. Estos balines se hallan dentro de la tuerca del tornillo y permiten el desplazamiento de esta a lo largo del eje del tornillo. El comportamiento interno de este tipo de tornillos puede ser observado en la figura 1.1.2.



Figura 1.1. 2: Corte transversal de un tornillo embalado.

- Interruptores de fin de carrera – El robot tiene instalados en cada uno de los ejes sensores de fin de carrera que se adaptaron en su momento para evitar que los carros de alta precisión sobrepasaran los límites del área de trabajo, lo que podría haber desembocado en un daño al sistema mecánico del robot. Estos sensores son, de manera literal, un límite físico para cada eje del robot y su función principal es desactivar el funcionamiento de los motores en caso de una emergencia. En la figura 1.1.3 se puede observar uno de estos sensores de fin de carrera.



Figura 1.1. 3: Interruptor de fin de carrera.

- Motores DC y reductores – El sistema mecánico emplea motores de uso robusto para los tres ejes del robot. Los motores implementados son diferentes para los ejes X-Y y el eje Z. Para los primeros dos, se tienen en uso dos motores con reductores, ambos del modelo Z5D120-12 que se alimentan a 12V y son capaces de proporcionar 3100 rpm a un torque de entre 3 y 4 Nm. Los reductores que se tienen para estos motores son del modelo 5GU9K. Por otro lado, al eje Z se le acopló un motor modelo Z4D40-12GN-30S, el cual también se alimenta a 12V y que posee un reductor modelo 4GN15K. Ambos motores pueden ser observados en las figuras 1.1.4 y 1.1.5.



Figura 1.1. 4: Motor Z5D120-12 con reductor 5GU9K.



Figura 1.1. 5: Motor Z4D40-12GN-30S con reductor 4GN15K.

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

- Encoders E6B2-CWZ6C – Este modelo de encoders provee de 1000 pulsos por revolución y puede ser alimentado en un rango que va de 5-24 V con un consumo de corriente máximo de 80mA. Esta clase de encoder de cuadratura proporciona 3 señales de salida (denominadas señales A, B y Z) las cuales sirven para determinar la posición y velocidad del motor. También, con el procesamiento de señal adecuado, sirven para determinar el sentido de giro del motor a partir del que se generan. En la figura 1.1.6 se puede observar este tipo de encoder.

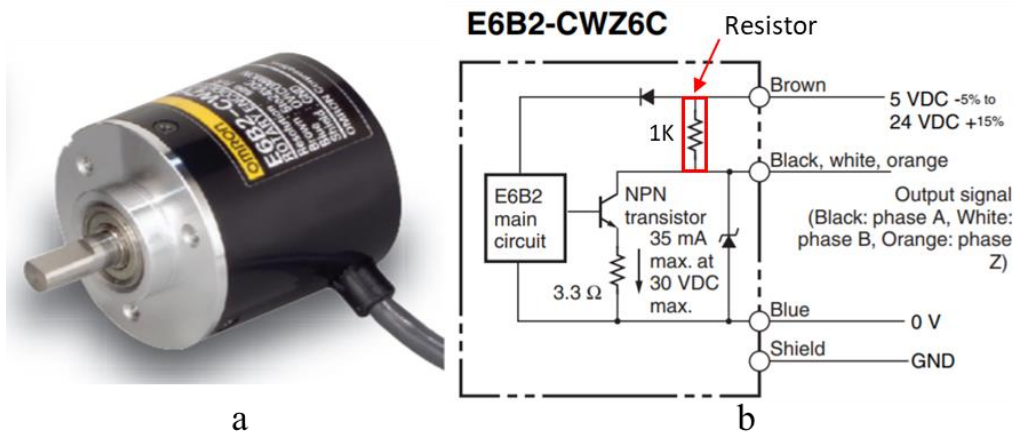


Figura 1.1. 6: Encoder giratorio: a) E6B2-CWZ6C, b) Conexión para encoder con salida NPN colector abierto.

- Herramienta de extrusión – Esta parte de nuestro mecanismo CNC consta de un portacarrete cuyo trabajo es sostener el carrete del material. Se compone también de un extrusor de material el cual le da la forma adecuada al material que se está inyectando, un alimentador de material compuesto por un motor a pasos bipolar engranado modelo 1040220 de la marca Kysan Electronics que tiene un cambio rápido de filamento y se encarga de jalar el material necesario para la impresión y una cama caliente que se emplea para ir depositando la pieza *impresa* y que al mantenerse a la temperatura adecuada, evita que el material quede pegado a la superficie de impresión, entre otras cosas. Es importante mencionar que tanto la cama caliente como el extrusor de material tienen incluida una resistencia eléctrica que sirve para calentarse y un termistor tipo NTC que ayuda al usuario a determinar la temperatura que poseen y de esta manera poder controlarla.
- Cama caliente – El tipo de cama caliente que se tiene implementada en el robot es un modelo MK3 ALU-Heatbed Dual Power, en la que se deposita el filamento de material extruido para ir formando la pieza en 3D conforme al plano de construcción introducido por el usuario. Su finalidad, adicional a la anteriormente mencionada, es mantener el material caliente durante la impresión y de esta manera evitar deformaciones en la pieza, como lo son pandeos y torceduras. Este tipo de dispositivo posee una fuente de alimentación doble, lo que permite que pueda operar a 12V o a

24V. Otra característica propia del modelo es que posee un núcleo de aluminio de 3.2mm que deja imprimir directamente sobre la base caliente de la cama, sin que haya necesidad de acoplar una placa externa de vidrio. Además, el dispositivo tiene una resistencia eléctrica para calentarse y un termistor tipo NTC para determinar la temperatura actual de la cama.

- Módulo Wi-Fi – Este módulo se trata de un modelo de Wi-Fi RN-XV que es empleado para establecer una comunicación entre el sistema mecatrónico y la computadora. Con este dispositivo es posible activar el microprocesador y mandar instrucciones desde la computadora para controlar sus funciones y los movimientos del robot. El módulo consta de un dispositivo con acceso LAN inalámbrico integrado que es completo e independiente. También posee un protocolo de comunicación TCP/IP y tiene la gran ventaja de que solo requiere de 4 pines para su implementación.

- Tarjeta de implementación DE0-CV – Esta tarjeta puede ser adquirida por medio de internet y tiene implementado un FPGA modelo Cyclone V 5CEBA4F23C7N. El dispositivo completo cuenta con las siguientes características principales:
 - FPGA Cyclone V 5CEBA4F23C7N
 - 49,000 elementos lógicos programables
 - 3080 Kbits de memoria embebida
 - Memoria SDRAM de 64MB x 16 bits de bus de datos
 - 4 PLLs fraccionales
 - Memoria EPCS64
 - 2x20 pines de propósito general (72 pines I/O, 2 pines de alimentación de 3.3VCD y 2 de 5VCD con sus respectivas tierras)
 - 6 displays de 7 segmentos
 - 10 LEDs
 - 10 interruptores
 - 4 pulsadores de propósito general
 - 1 pulsador para el reset de la CPU

Estos constituyen los principales componentes mecánicos y de hardware que componen al robot, aunque tiene varios más que no es de vital importancia mencionar. En caso de querer revisar más especificaciones, se recomienda revisar las referencias [13-14].

Otra parte importante y que incumbe de manera detallada al estudio que se realiza en la tesis, es el funcionamiento de los motores de cada eje. Es importante tomar en cuenta que para implementar los motores al robot se realizó una caracterización de su funcionamiento que permite emplearlos como un motor de transmisión directa, lo que implica que el par solicitado para la entrada del motor corresponde al par de la salida, siempre que este se encuentre en el rango de torque del dispositivo [13]. Para poder lograr esto, se debe considerar que el proceso de caracterización consta de varios pasos:

1. Primero se debe determinar el torque máximo del motor, para lo cual se realiza una variación del voltaje de alimentación con que se conecta el motor (sin exceder el límite de voltaje de trabajo recomendado en la hoja de datos).
2. Realizar el cálculo correspondiente para obtener la mitad del torque máximo al que trabaja el motor al alimentarlo con una señal de PWM al 50% del ciclo de trabajo. En orden de poder lograr este paso, es necesario contar con el programa que te genere la señal de variación de frecuencia del PWM, la cual debe ir desde los 50 Hz hasta la frecuencia determinada por el usuario.
3. El siguiente paso consiste en seleccionar las frecuencias o frecuencia que proporcione el valor que sea más cercano a la mitad del torque máximo que se calculó en el paso anterior.
4. Se debe probar cada una de las secuencias seleccionadas al ir variando el ciclo de trabajo del 10% al 90% de su rango. Esto se realiza sin variar la alimentación del motor, empleando para ello el voltaje del torque máximo. Cuando se varía el ciclo de trabajo, se debe determinar el torque del motor para cada variación del PWM y con los datos obtenidos graficar lo que corresponde a la respuesta del motor.
5. Al final, se deben revisar las gráficas obtenidas y analizarlas para determinar la ecuación de la curva característica. Con esto, se tiene que seleccionar la frecuencia que proporcione la respuesta más cercana posible a un comportamiento lineal para el motor.

Al seguir este procedimiento, es posible demostrar que un motor DC convencional puede ser empleado para emular un motor de transmisión directa, lo cual resulta muy conveniente, sobre todo en la parte de costos, dado que los motores de transmisión directa son mucho más caros que los motores DC convencionales.

Además, con lo que se ha descrito anteriormente de procedimiento y características, es posible observar que el generador PWM, el cual permite mandar una señal de control que tiene la forma de un pulso de ancho determinado, se vuelve sumamente importante para el funcionamiento del motor. Con la curva característica obtenida para el comportamiento del motor, es posible solicitar un torque y obtenerlo con la variación del ancho de pulso del PWM. Para lograr esto, se tiene desarrollado un firmware que genera la señal de PWM y que se encarga del control del ancho de pulso de este. La señal generada por este firmware es mandada de manera directa a una etapa de potencia que consiste en una serie de puentes H y que activan el motor. El firmware también se encuentra encargado del conteo que determinará la posición y la dirección de cada motor. Esto se logra con la implementación de un divisor de frecuencia, lo que se hace posible debido a que la frecuencia a la que trabajan los motores es menor a la frecuencia de trabajo del FPGA. Con esta parte, es necesario mencionar nuevamente al proceso de caracterización de los motores, que como se vio anteriormente, permite obtener una frecuencia para cada motor que resulta la ideal para que el comportamiento de este resulte de manera similar al de un motor de transmisión directa. Esto permite proporcionar una respuesta *casi* lineal que habilita la manipulación y el control del movimiento, la velocidad y la dirección del motor de manera precisa. Es por estas razones que la etapa de caracterización es crucial para el correcto manejo del robot, puesto que permite simplificar el comportamiento de un motor (que generalmente se trata de una curva) para que la respuesta asemeje a la de una línea recta. Esto permite generar mejores y más

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

precisos modelos dinámicos que representan el comportamiento del motor. A continuación, se tienen las tablas con las frecuencias seleccionadas para los motores correspondientes a cada uno de los grados de libertad del robot, así como las tablas que corresponden a los torques medidos para cada una de las variaciones de los ciclos de trabajo.

| Actuador | Frecuencia |
|----------|------------|
| Motor X | 2.5 kHz |
| Motor Y | 2.5 kHz |
| Motor Z | 75 Hz |

Tabla 1.1. 2: Frecuencia de trabajo de los motores del CNC.

| % Ciclo de trabajo de PWM | Torque (Nm) Motor X | Torque (Nm) Motor Y |
|---------------------------|---------------------|---------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 10 | 2.8616 | 3.3124 |
| 12 | 3.9494 | 4.2924 |
| 14 | 4.3708 | 5.1058 |
| 16 | 5.2528 | 5.8016 |
| 18 | 5.9976 | 6.3406 |
| 20 | 6.4288 | 6.8208 |
| 22 | 7.595 | 7.6832 |
| 24 | 8.1144 | 8.477 |
| 26 | 8.428 | 9.31 |
| 28 | 9.555 | 9.996 |
| 30 | 10.388 | 11.0152 |
| 32 | 10.8192 | 11.7992 |
| 34 | 11.6032 | 12.348 |
| 36 | 12.348 | 13.1 |

Tabla 1.1. 3: Caracterización de los motores X, Y con sus correspondientes frecuencias seleccionadas.

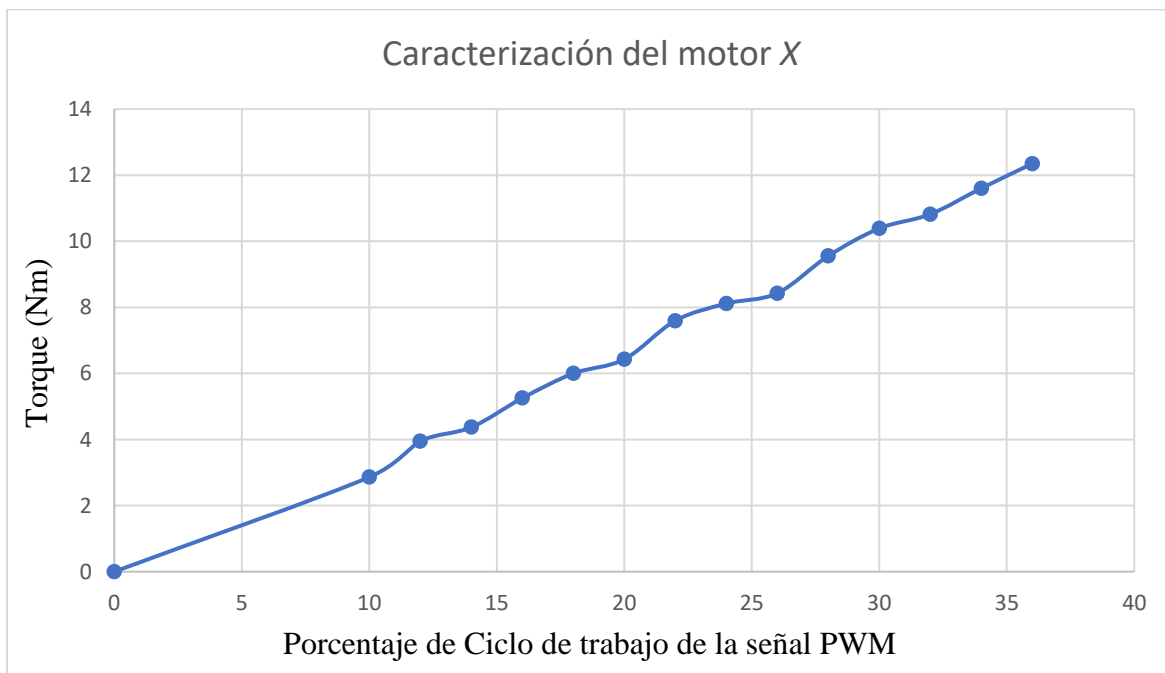
| % Ciclo de trabajo de PWM | Torque (Nm) Motor Z |
|---------------------------|---------------------|
| 0 | 0 |
| 10 | 0.0616077 |
| 20 | 0.3435096 |
| 30 | 0.6571488 |
| 40 | 0.840105 |
| 50 | 1.250823 |
| 60 | 1.437513 |
| 70 | 1.8930366 |
| 80 | 2.072259 |
| 90 | 2.5688544 |

Tabla 1.1. 4: Caracterización del motor Z con su correspondiente frecuencia seleccionada.

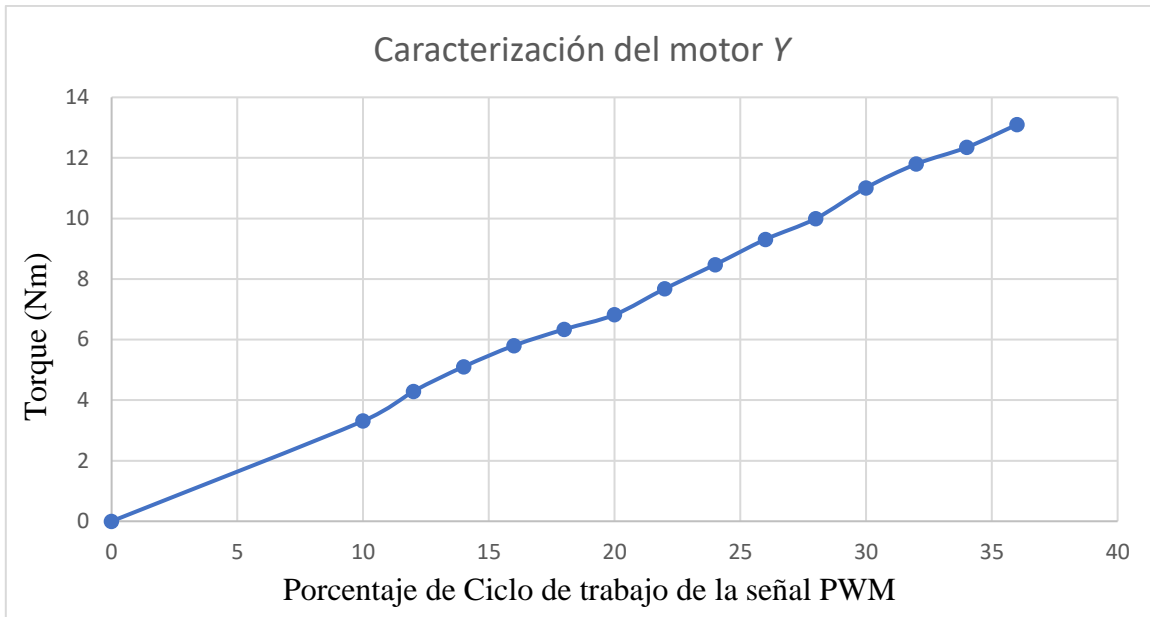
| % Ciclo de trabajo de PWM | Torque (Nm) Motor Z |
|---------------------------|---------------------|
| 0 | 0 |
| 10 | 0.0616077 |
| 20 | 0.3435096 |
| 30 | 0.6571488 |
| 40 | 0.840105 |
| 50 | 1.250823 |
| 60 | 1.437513 |
| 70 | 1.8930366 |
| 80 | 2.072259 |
| 90 | 2.5688544 |

Tabla 1.1. 5: Caracterización del motor Z con su correspondiente frecuencia seleccionada.

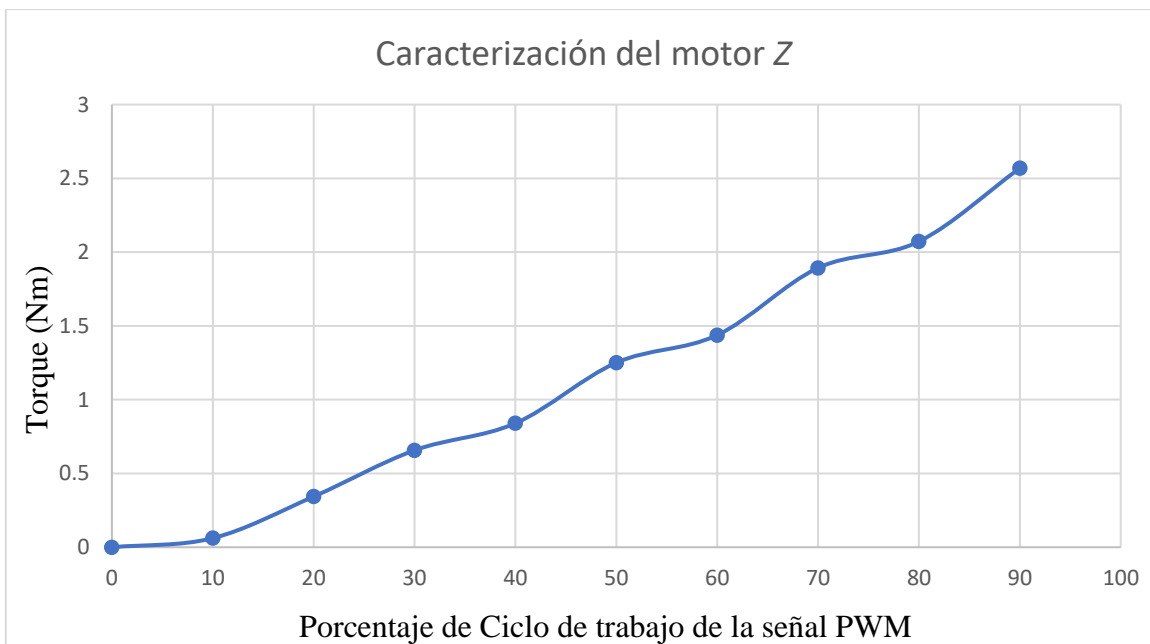
También se incluyen los datos obtenidos de cada motor representados por medio de las gráficas siguientes (gráficas 1.1.1-1.1.3). Estos datos se unen y forman lo que es conocido como curva característica del motor, lo que permite observar al usuario el comportamiento del motor para la frecuencia seleccionada. También es posible observar que el comportamiento de cada uno de los motores es único, por lo que se resalta la importancia de realizar el proceso de caracterización con cada motor adquirido para obtener el mejor rendimiento posible al implementarlo en un dispositivo.



Gráfica 1.1. 1: Curva característica del motor X.



Gráfica 1.1. 2: Curva característica del motor Y.



Gráfica 1.1. 3: Curva característica del motor Z.

Una vez que se tienen los datos adecuados y que se les puede representar de manera gráfica, es posible aproximar una recta que fungirá como el comportamiento *lineal* para nuestro motor, proceso que debe realizarse con cuidado para asegurar que, al implementar el motor, se maneje en los rangos en donde se cumple este comportamiento.

Adicionalmente, se posee una etapa de acoplamiento para el extrusor de material, consistente de un circuito de potencia que se construyó con transistores tipo NPN en configuración Darlington a manera de amplificar la corriente proporcionada por el controlador de 1mA a la adecuada para controlar la resistencia del extrusor de 2.5A; de igual manera se tiene una etapa de potencia propia para la señal que se requiere para el funcionamiento de la cama caliente. Esta señal se encarga del control de la temperatura de la placa y su etapa de potencia está formada también con transistores tipo NPN.

Para finalizar este pequeño resumen de la mecánica básica del robot CNC, se hace mención del alimentador de material, el cual requiere también de una etapa de potencia, la cual consiste en dos puentes H (uno para cada bobina), formados por arreglos de transistores tipo NPN y PNP, de manera que se tiene control para las dos bobinas del motor y por tanto se puede influir en su posición, velocidad y sentido de giro. Esta etapa de potencia tiene acoplados arreglos de diodos que ayudan a limpiar la señal de los puentes a la bobina, lo que permite regular la frecuencia de las señales.

1.2 Sistema de control

El sistema de control del robot es igual de importante que la parte mecánica del mismo, puesto que es lo que habilita al usuario para dar comandos al dispositivo. Para realizar el control del robot se empleó una tarjeta de desarrollo modelo DE0-CV con FPGA perteneciente a la familia Cyclone V, en la que se desarrolló un firmware embebido construido en el software Quartus II mediante el empleo del lenguaje AHDL.

El control del robot se realiza empleando un microprocesador embebido en un FPGA [15-16] y se desarrolló en la MCEA de la BUAP. Este microprocesador se encuentra diseñado en base a una arquitectura MIPS (Microprocessor without Interlocked Pipeline Stages), y posee un procesador de 32 bits con arquitectura RISC (Reduced Instruction Set Computer) que cuenta con un banco de 32 registros de 32 bits. El firmware tiene un protocolo de comunicación Wi-Fi que permite mantener un enlace de datos entre una computadora y la tarjeta de adquisición de datos. A su vez, esto permite procesar las instrucciones recibidas de un usuario en lenguaje ensamblador y de esta forma realizar las correspondientes operaciones aritméticas con la finalidad de realizar el control del robot de manera eficiente y de acuerdo con las instrucciones establecidas por el diseñador.

El firmware posee diversos bloques que resultan necesarios para los procesos requeridos por el funcionamiento del mecanismo. Los principales son:

- Administrador de Wi-Fi. Permite al FPGA comunicarse con protocolo serial al módulo WiFly, el cuál conecta de forma inalámbrica con la computadora. De esta forma se tiene comunicación entre la computadora y la tarjeta del robot por medio del software de control.
- Administrador de SDRAM. Es un bloque de control de memoria que permite enviar comandos para escribir y leer datos de 32 bits en forma paralela. Se encarga de comunicarse con los datos que manda el administrador Wi-Fi enviados por la computadora.

- Decodificador de señales. Se encarga de procesar las señales de los encoders de los motores que controlan los ejes del motor. Los encoders incrementales de cuadratura para poder determinar la posición actual en cada eje, para interpretar las señales A y B de los encoders, cuyas señales están desfasadas 90°, al firmware se le agregaron bloques para decodificar dichas señales, donde se lleva a cabo el conteo de los pulsos de los encoders para poder determinar la posición actual de cada eje y mediante dichos conteos se puede determinar el sentido de giro de cada motor. En las señales A y B se encuentra codificada la información correspondiente al avance y su dirección, a partir de ese valor cualquier cambio que haga el encoder genera un cambio en las combinaciones lógicas de la señal y según el cambio que se genere se puede saber si el giro del motor es en sentido horario o en sentido antihorario
- Convertidor para ADC. El bloque ADC se encarga de obtener las señales de los ADC y determinar la temperatura actual de cada dispositivo (extrusor y base del robot).
- Interruptores de proximidad. Se encarga de leer los sensores de proximidad (fin de carrera) instalados en cada eje, de manera que al accionar el interruptor de fin de carrera se corte la energía del motor del eje y de esta forma se evite el avance con el fin de evitar algún daño en la mecánica del robot.
- Generador PWM. El firmware genera la señal de PWM y controla la velocidad de los motores, la temperatura del extrusor de material y la temperatura de la cama caliente del robot.

Se puede recalcar que el funcionamiento general del sistema estudiado se basa en la manipulación por parte del usuario a través de una interfaz de LabView donde es posible visualizar y modificar los parámetros del sistema, como lo son las temperaturas de diversos dispositivos dentro del robot, las posiciones deseadas para los motores y las ganancias de ajuste de los controles usados en cada eje del mecanismo. Esta interfaz permite también el envío del software de control hacia el microprocesador, lo que es posible con el uso de un protocolo de comunicación Wi-Fi proveniente de la computadora empleada para visualizar la interfaz. El robot establece comunicación con el sistema digital por medio de las funciones del FPGA de la tarjeta empleada (como se mencionó con anterioridad), la cual se encarga a su vez de ejecutar los seis algoritmos de control que emplea el robot CNC para funcionar: 3 lazos de control cerrado que corresponden a los ejes de movimiento (X, Y y Z), 1 lazo de control cerrado que se encarga de controlar la temperatura del dispositivo extrusor del material, 1 lazo cerrado de control que se encarga de regular la temperatura de la cama caliente donde se deposita la pieza extruida y 1 lazo de control abierto que corresponde al control de la velocidad para el motor a pasos que se emplea como alimentador de material para la función de impresión 3D.

De manera adicional, el FPGA se encarga también de la lectura de las señales generadas por los sensores del sistema y del procesamiento de los datos para la toma de decisiones y la aplicación de las leyes de control. También genera las señales PWM que sirven para alimentar y controlar los elementos del robot que lo requieren (motores y termo-resistencias). En la figura 1.2.1. es posible observar el diagrama general del robot CNC de tres grados de libertad habilitado para funcionar como una impresora 3D.

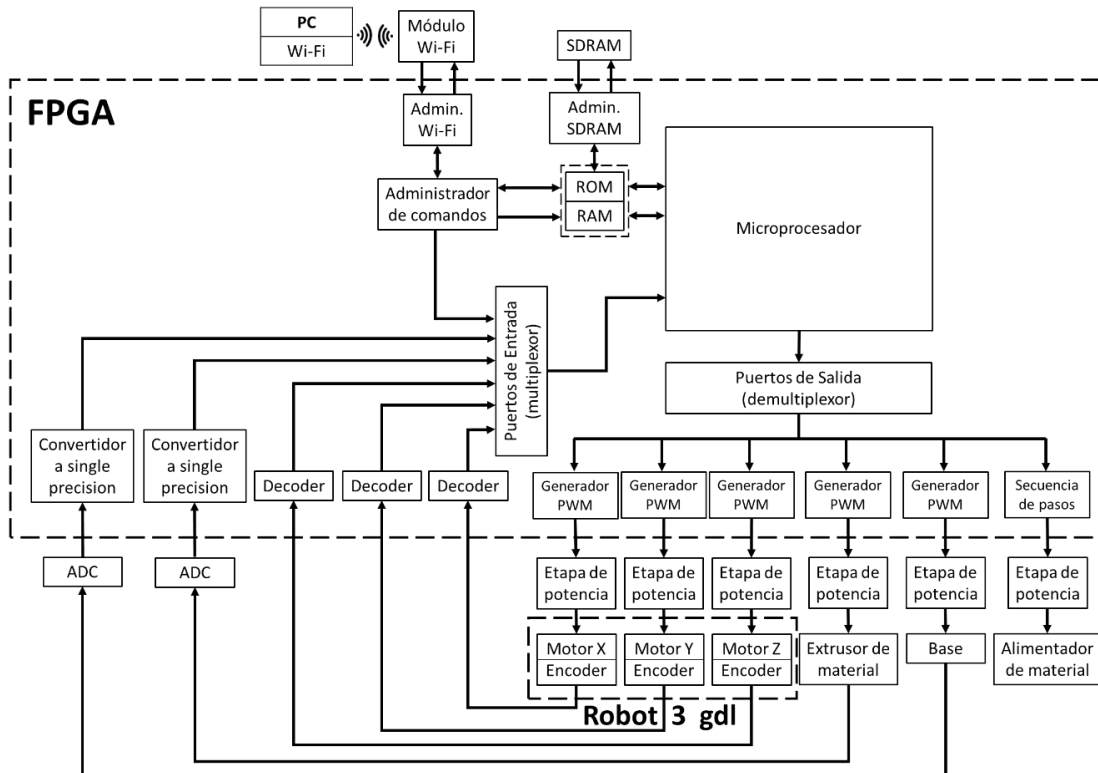


Figura 1.2. 1: Diagrama general del robot CNC de 3 grados de libertad aplicado a impresión 3D.

La comunicación con la computadora que se establece por medio del módulo Wi-Fi habilita la comunicación entre el usuario y el microprocesador y permite que el usuario mande instrucciones a este, lo cual realiza al mismo tiempo que procesa las señales mandadas por los sensores, permitiendo regresar señales de control en la forma de generadores de ondas PWM y una secuencia de pasos para el motor que hace la función de alimentador de material. Las señales son posteriormente pasadas por una etapa de acoplamiento para poder ser introducidas a los actuadores y de esta forma realimentar los lazos de control.

En el acoplamiento de señales, se tienen etapas de potencia para los motores DC consistentes de puentes H en configuración Darlington que se encargan de activar los motores en ambas direcciones al proporcionar una corriente máxima de 25A en modo de saturación y corte. También se tiene una etapa de acoplamiento para el extrusor de material que se conforma de un circuito de potencia realizado con transistores NPN en configuración Darlington para amplificar la corriente proporcionada por el microprocesador de 1mA a 2.5A que permiten el control de la resistencia del extrusor. Similarmente, se tiene una etapa de potencia para la señal mandada a la cama caliente para su control de temperatura, consistente también de transistores tipo NPN.

Para finalizar se tiene que el alimentador de material se encuentra acoplado con una etapa de potencia formada por dos puentes H (uno para cada bobina) que permite controlar las dos bobinas del motor y de esta forma regular su posición y velocidad. También se tiene un

arreglo de diodos para limpiar la señal de los puentes a las bobinas y regular la frecuencia de las señales, todo integrado en el circuito de acoplamiento.

1.3 Software de Usuario

Una parte indispensable del funcionamiento de la máquina CNC es el software de usuario, el cual constituye la plataforma por medio de la cual el usuario es capaz de entender la información proporcionada por el microprocesador y a su vez mandar instrucciones a la máquina (interfaz usuario-máquina). Para el dispositivo de estudio, se tienen desarrollados dos softwares de usuario:

- Compilador de posiciones deseadas.
- Interfaz de usuario.

El primero de los mencionados es necesario para obtener las instrucciones para que la máquina construya una figura 3D y se generan por medio del procesamiento del diseño de una pieza 3D realizada en un software CAD (*computer assisted design*). Este software incluye una interfaz gráfica que permite traducir el diseño a instrucciones que el microprocesador de la máquina puede entender (figura 1.3.1).

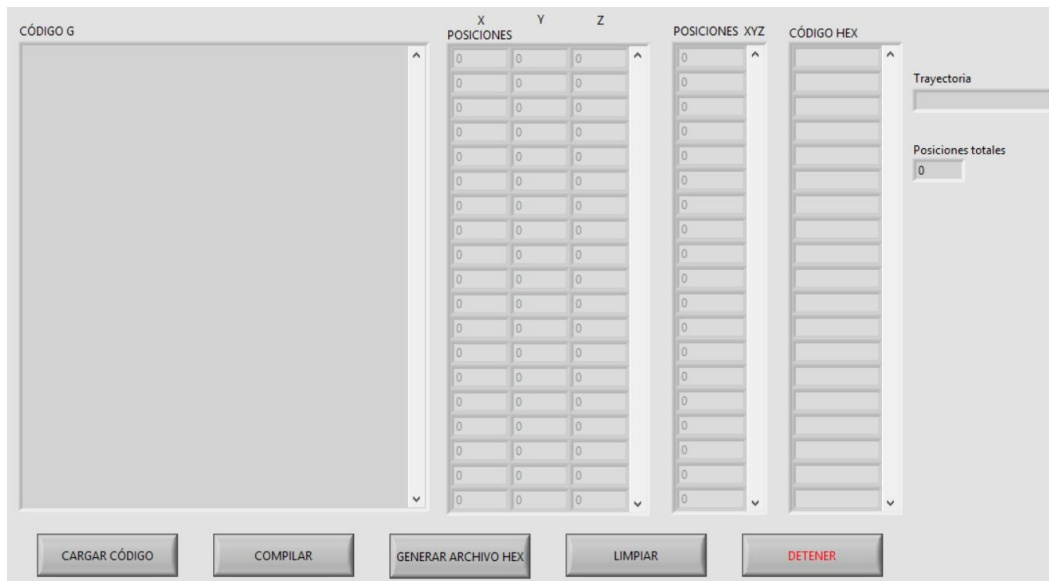


Figura 1.3. 1: Interfaz gráfica para el compilador de posiciones deseadas.

La interfaz se desarrolló empleando el software Labview y genera las posiciones deseadas de una figura o pieza previamente planeada y específica. El programa solicita el diseño CAD guardado en formato *SDL* el cual se compila por medio de un programa laminador para obtener las instrucciones en código G. Posteriormente se emplea el compilador de posiciones deseadas donde el código generado se introduce y el software produce las coordenadas de cada eje en código hexadecimal. La interfaz tiene la opción de generar un archivo para

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

guardar las posiciones en un archivo de texto desde donde puede ser ingresado al otro software de usuario.

La segunda interfaz lleva a cabo el control del robot y permite al usuario controlar la posición y velocidad de los tres ejes (cada uno por separado), los controles de temperatura del extrusor y la cama caliente y el control de velocidad para el motor a pasos. Esta interfaz también fue implementada empleando Labview y permite la comunicación Wi-Fi entre la computadora y el microprocesador embebido en la tarjeta de adquisición (figura 1.3.2). El software cuenta con tres pestañas, la primera de las cuales contiene la pantalla principal y desde donde se puede descargar el archivo del código con las instrucciones necesarias para realizar el control del sistema y cerrar los lazos de control de la máquina.



Figura 1.3. 2: Primera ventana del software de usuario: descarga del software de control.

En la siguiente pestaña (figura 1.3.3) se realiza la descarga a la memoria RAM del archivo con las posiciones deseadas para la realización de una pieza. Este archivo debe tener las instrucciones (coordenadas) en formato hexadecimal, lo que explica la importancia del primer software de usuario. Es importante mencionar que antes de realizar la descarga del archivo, la interfaz provee con la opción de asignar un offset para que al descargar los datos se empiecen a almacenar en una dirección determinada de la RAM.



Figura 1.3. 3: Segunda ventana del software de usuario: descarga de posiciones deseadas en la RAM.

La tercera y última pestaña (figura 1.3.4) es donde se lleva a cabo la ejecución del programa. Esta ventana posee a su vez tres subpestañas que tienen diversas funciones. La primera (figura 1.3.5) se encarga de asignar los parámetros de inicio (velocidades y temperaturas deseadas) para cada uno de los dispositivos controlados por el microprocesador. También permite asignar ganancias K_p y K_s para los controles a lazo cerrado. Adicionalmente cuenta con un botón para ejecutar o detener el código que se descargó en el microprocesador.



Figura 1.3. 4: Interfaz de software de control.

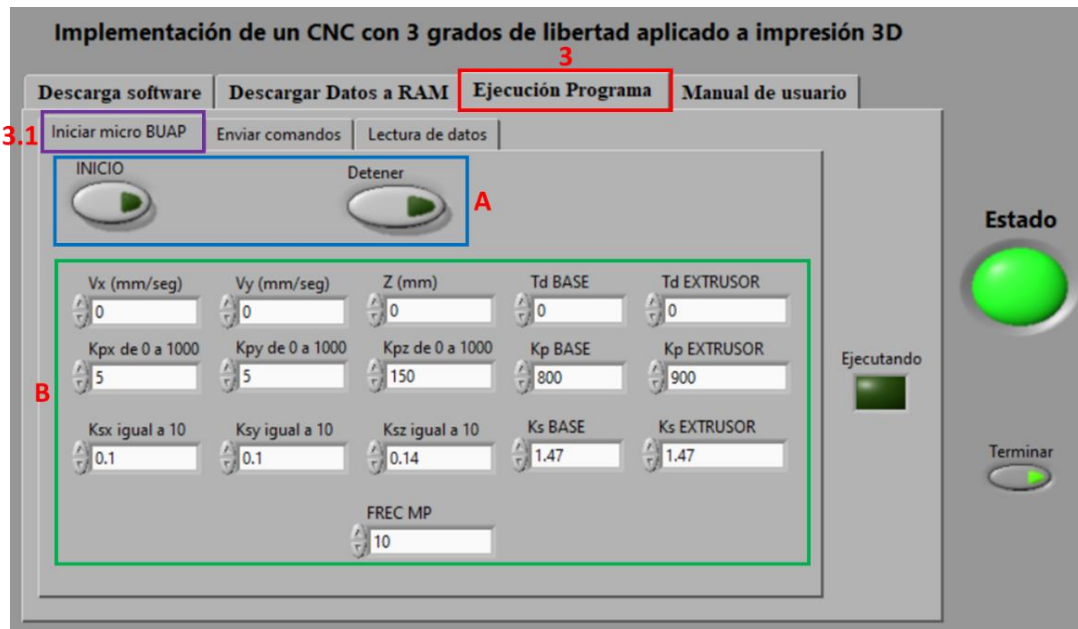


Figura 1.3. 5: Pestaña de ejecución del programa: sub-pestaña de inicialización.

En la segunda sub-pestaña (figura 1.3.6) se tiene disponible la opción de mandar comandos directamente al microprocesador para poder llevar a cabo distintos procesos como lo son la lectura de los datos en uno de los puertos del microprocesador, mandar las posiciones y/o temperaturas deseadas en cada uno de los dispositivos controlados, variar las ganancias de los controles, etc.

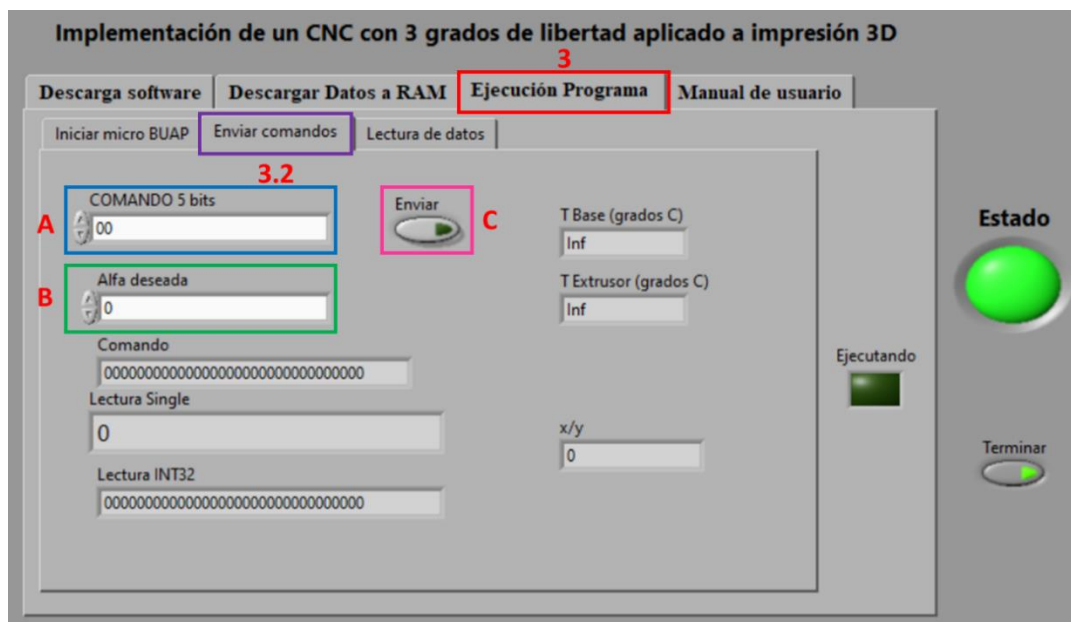


Figura 1.3. 6: Sub-pestaña de envío de comandos.

En la última sub-ventana se tienen los comandos necesarios para realizar una lectura de datos obtenidos directamente desde el microprocesador, como lo es la posición actual de uno de alguno de los ejes. Estos datos son procesados por la interfaz de forma que pueden ser guardados en un archivo de texto que se genera al seleccionar la opción de grabar datos y que permite obtener los datos para su posterior análisis y procesamiento.



Figura 1.3. 7: Sub-pestaña de lectura de datos.

Todas las opciones en conjunto permiten al usuario comunicarse con la máquina y ejecutar los movimientos necesarios para el estudio que se realiza en la tesis.

1.4 Resultados experimentales iniciales

Se tiene una serie de resultados experimentales iniciales, los cuales fueron obtenidos durante el desarrollo de trabajos anteriores [14]. Estos se obtuvieron al realizar pruebas de impresión 3D para verificar si la lógica implementada para la secuencia de posiciones deseadas es la adecuada para el funcionamiento del dispositivo. Para ello se realizó el diseño de una malla de 6x6cm. con separaciones de 1cm, tal y como se muestra en la figura 1.4.1. Partiendo de los puntos tomados para formar la figura, se procedió a implementar el código de funcionamiento del dispositivo y a implementar un control de posición para la manipulación de las coordenadas del robot y de esta forma generar resultados tangibles de lo que desarrollado para los estudios y el análisis del funcionamiento del mecanismo.

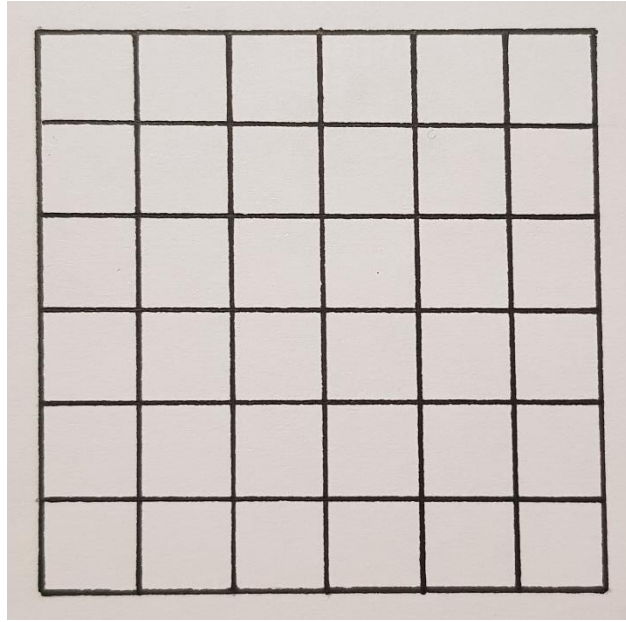


Figura 1.4. 1: Boceto de malla a realizar

Con la máquina funcionando se hizo una primera prueba, generando una malla impresa de 2 capas, la cual es mostrada en la figura 1.4.2, la cual presenta un resultado bastante bueno y con buena semejanza a la malla diseñada.

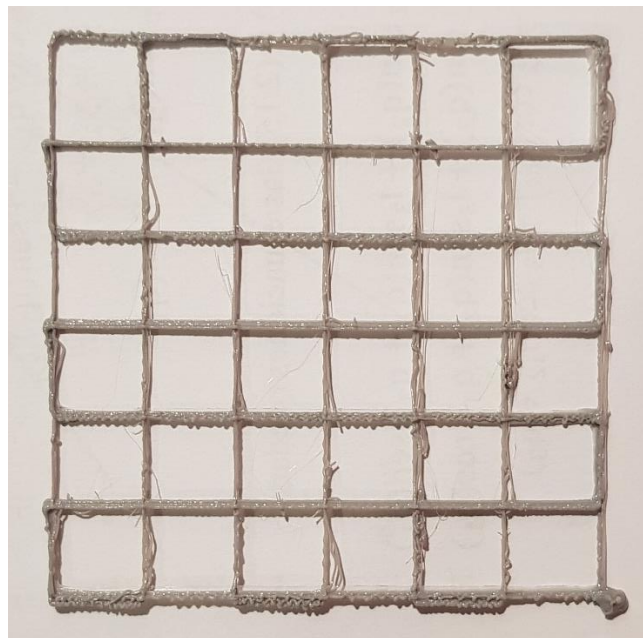


Figura 1.4. 2: Impresión de malla con control de posición (2 capas).

Con la comprobación de que el control cumplía con la función de manera correcta, se procedió a aumentar el número de capas de impresión, lo cual fue útil para revisar la repetitividad de los resultados. Para ello se conservó el control ya implementado y se incrementaron las capas impresas a 5 y a 10 capas, obteniendo de ello los resultados que se pueden observar en la figura 1.4.3.

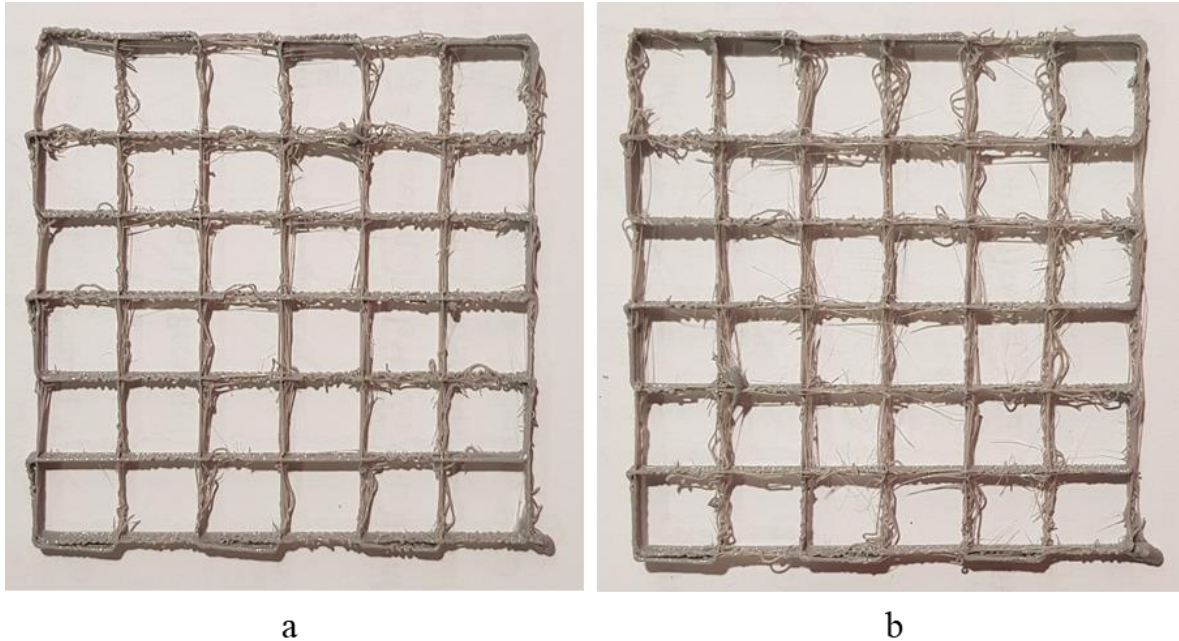


Figura 1.4. 3: Impresión de malla con control de posición: a) 5 capas, b) 10 capas.

En los resultados es posible observar que, a pesar de la cantidad de capas, el control de posición asegura la posición del efector de la máquina, de manera que las capas no presentan variaciones con respecto a las capas anteriores. Esto permite aumentar el grosor de la figura sin que existan variaciones significativas. Sin embargo, se puede observar que, en las orillas del producto, se presentan deformaciones que son constantes, repetitivas y que corresponden a desviaciones del modelo original. Estas se observan en la forma de esquinas redondeadas y sobretiros, los cuales son el origen de nuestro interés en el tema de estudio, puesto que el análisis de la fricción a realizar tiene como consecuencia el investigar el origen de las deformaciones y de esta manera prevenirlas en el funcionamiento.

1.5 Conclusiones

En la tesis se observa que el robot CNC posee un funcionamiento que ya puede ser considerado como aceptable para implementar la aplicación de impresora 3D para el cual se le requiere. Sin embargo, de los resultados experimentales se observa que se tiene exactitud, pero le falta precisión en ciertas partes de la trayectoria. Esto es especialmente obvio al referirse a las partes de la trayectoria donde se tiene un cambio de dirección en alguno de los ejes X o Y . En esta parte se observan desviaciones considerables que varían entre curvaturas

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

no deseadas en los ángulos rectos hasta sobretiros antes de cambiar de dirección. Esto valida la hipótesis de que el funcionamiento del robot puede ser mejorado, por lo que es necesario estudiar los diversos fenómenos presentes en el mismo. En el trabajo se pone especial atención al fenómeno de la fricción, debido a que, según lo estudiado e investigado en el estado del arte, es el fenómeno que más tiende a alterar el funcionamiento de los robots.

Por medio del estudio de este se espera mejorar el funcionamiento del robot al implementar un control con compensación de fricción, de manera que el robot pueda alcanzar una mejor precisión a manera de volverlo un robot de más alta calidad.

Capítulo 2: Consideraciones de la fricción.

A lo largo del desarrollo de ramas de la tecnología como lo es la robótica, se han ido desarrollando avances considerables en los estudios de la fricción, siendo uno de los temas más estudiados la compensación de sus efectos para mejorar el control de diversos mecanismos. Esto da lugar al desarrollo de una serie de modelos y herramientas para el estudio de la fricción de diversos elementos mecánicos y mecatrónicos. El éxito en el diseño y análisis de un control con compensación de fricción depende enormemente de la calidad del modelo matemático del mecanismo que se puede obtener y en cómo este representa los efectos de la fricción de manera matemática [17].

La fricción es un fenómeno que se encuentra presente en cualquier tipo de mecanismo que tenga movimiento, por lo que el estudio y análisis de sus efectos es fundamental para mejorar el comportamiento de un robot. El estudio de la fricción está estrechamente ligado a la mecánica de Newton y sus leyes, así como al concepto moderno de fuerza. La fricción es una fuerza que se opone al movimiento y es proporcional a la fuerza que se ejerce sobre un objeto, sin depender del área de contacto aparente. Adicionalmente la fuerza de fricción es independiente de la velocidad una vez que el objeto ha iniciado a moverse. Históricamente, el estudio de la fricción y sus efectos se remonta a Leonardo da Vinci, el cual dedujo las leyes que gobiernan el movimiento de un bloque rectangular que se desliza sobre una superficie plana.

La fricción puede considerarse como un fenómeno que se presenta entre dos superficies en contacto y que se manifiesta cuando hay movimiento o se pretende iniciar un movimiento. Existen diversos tipos de fricción y distintas clasificaciones para la misma como lo son la fricción seca, fricción viscosa, etc. todos los cuales pueden ser empleados para mejorar la representación matemática de un modelo mecánico en estudio [18].

2.1 Tipos de fricción

El término fricción puede hacer referencia a distintos tipos de fuerzas, como lo son la fricción estática y la fricción cinética y todas ellas son dependientes del sistema y sus características propias como lo es el material de los objetos en movimiento. La fuerza de fricción estática entre dos superficies en contacto hace referencia a una fuerza variable que aparece cuando se quiere poner a un cuerpo en movimiento sin conseguirlo y crece hasta un valor máximo en el instante de movimiento inminente. Se ha demostrado de manera experimental que esta fuerza tiene la dirección del desplazamiento, pero en sentido opuesto y que es directamente proporcional a la intensidad de la fuerza de la normal multiplicada por una constante de proporcionalidad que recibe el nombre de coeficiente de fricción estática que es dependiente a la naturaleza de las superficies en contacto.

Cuando la fuerza de fricción estática alcanza su máximo, salta abruptamente a un valor menor cuando el cuerpo se pone en movimiento. Esta nueva fuerza de fricción se denomina fuerza de rozamiento cinético y tiene características similares a la de fricción estática. Al igual que esta, tiene la misma dirección del desplazamiento con sentido opuesto al mismo y su valor es directamente proporcional a la intensidad de la normal. Depende también de una constante de proporcionalidad que se llama coeficiente de fricción cinética.

Actualmente, el modelo de fricción más usado al estudiar mecanismos es el modelo de fricción estática-Coulomb-viscosa.

Otra manera en que se puede definir a la fricción estática es como la fuerza que se presenta cuando dos cuerpos rígidos se hallan en reposo y pretenden ponerse en movimiento, por lo que es común también escucharla denominar *fuerza de fricción estática*. Como se mencionó anteriormente, cuando se aplica una fuerza externa adicional para mover un cuerpo rígido, se presenta esta fuerza que aumenta en valor hasta un valor máximo que se alcanza en el instante en que el movimiento del cuerpo es inminente y el cuerpo está a punto de iniciar su movimiento. En este instante a dicha fuerza de fricción estática se le puede denominar *fuerza de fricción estática máxima*. Un ejemplo simple de cómo se presenta y representa esta fuerza es observable en la figura 2.1.1, donde se observa la aplicación de una fuerza externa a un objeto rígido para provocar el movimiento. La fuerza de fricción estática f_s puede ser representada como el producto del coeficiente de rozamiento estático propio del material del que está hecho el objeto μ_s y la fuerza de reacción normal que posee el objeto en base a su masa N .

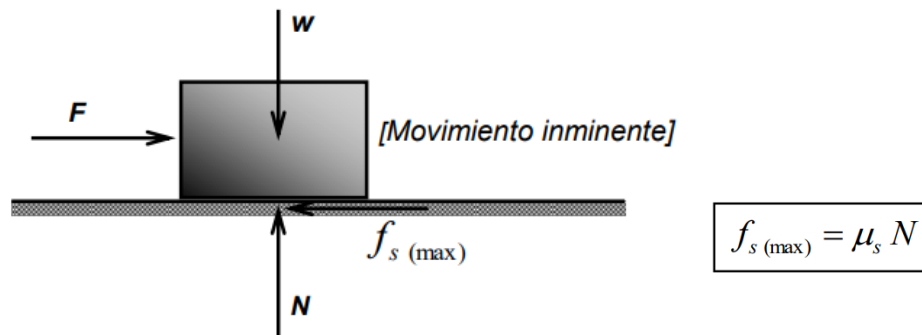


Figura 2.1. 1: Representación gráfica de la fuerza de fricción estática.

Es importante recordar que cuando el cuerpo rígido se encuentra en reposo (sin movimiento inminente), la fuerza de fricción sigue estando presente como parte de una ecuación de equilibrio de fuerzas cuya fuerza total es igual a cero. Otro punto importante para tener en consideración es que el coeficiente de fricción depende del tipo de material de las superficies que se encuentran en contacto y puede variar dependiendo de la calidad de los materiales y de si el movimiento se encuentra lubricado o en seco. Un punto interesante resulta en que la mayoría de los coeficientes de fricción estática para superficies no lubricadas es menor a 1, sin embargo, en algunos casos es mayor y puede variar de valor dependiendo del tratamiento del material y el desgaste al que se ve sometido.

La fricción cinética (también conocida como fricción dinámica) puede a su vez clasificarse en diversos tipos de fricción, como lo es la fricción de rozamiento conocida como fricción de Coulomb, la cual hace referencia a la fricción entre dos cuerpos sólidos. Otro tipo de fricción dinámica es la fricción viscosa, la cual hace referencia a la fricción que surge cuando un objeto sólido se mueve a través de un fluido (gas o líquido). Este último tipo de fricción puede modelarse de manera proporcional a la velocidad a la que se mueve el objeto, y su

forma de modelarse varía dependiendo de si el objeto se mueve a una velocidad baja o alta. La fricción de Coulomb hace referencia a la fuerza de rozamiento máxima que puede existir entre dos cuerpos y que es directamente proporcional al valor de la fuerza normal de contacto entre ellos. Esta última fricción es independiente al área de contacto.

La fricción cinética f_k se presenta cuando los cuerpos se encuentran en movimiento y su fuerza es equivalente al producto de un coeficiente de fricción cinética μ_k y la fuerza normal N . Una representación de esta se puede observar en la figura 2.1.2, en la que se tiene un objeto rígido al que se le aplica una fuerza externa que lo mantiene en movimiento. Es importante observar que tanto la fricción estática como la fricción cinética depende del material del que se encuentran hechos los objetos y de la masa de este en proporción a la fuerza normal que se tiene en el objeto.

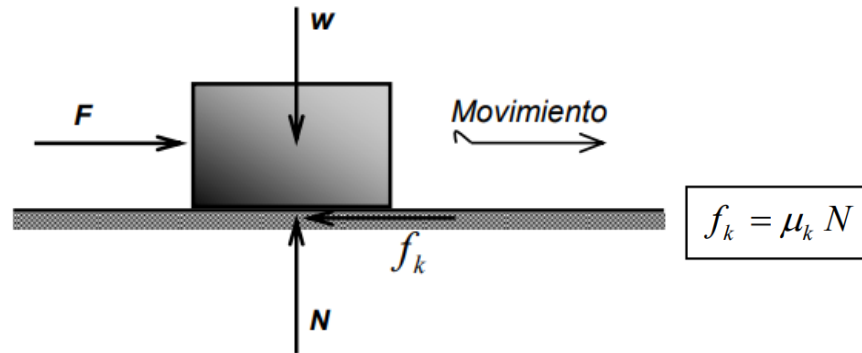


Figura 2.1. 2: Representación gráfica de la fuerza de fricción cinética.

En base a estudios realizados, existen ciertas reglas que pueden ser aplicables a cuerpos sometidos a fricción seca:

- La fuerza de fricción es tangencial a las superficies de contacto en una dirección opuesta al movimiento.
- La fuerza de fricción estática máxima es independiente al área de contacto, siempre que la fuerza normal no sea lo suficientemente grande como para deformar las superficies de contacto.
- La fuerza de fricción estática máxima es mayor que la fuerza de fricción cinética para cualquiera de las superficies de contacto. Sin embargo, cuando uno de los cuerpos de está moviendo a velocidad *muy baja*, la fuerza de fricción cinética se vuelve de una magnitud aproximada a la fuerza de fricción estática máxima.
- Si la superficie de contacto está a punto de experimentar un deslizamiento, la fuerza de fricción estática máxima es proporcional a la fuerza normal.
- Al ocurrir el movimiento la fuerza de fricción cinética es proporcional a la fuerza normal.

A menudo, al hablar de estudios de fricción, se asume que mientras existe la fricción estática no existe movimiento, sin embargo, en mecanismos es conocido que los contactos se ven

sometidos en las dos direcciones (tangente y normal). Al analizar mecanismos rotatorios como los rodamientos o los tornillos embalados, se ha descubierto que una unión en fricción estática se comporta como un resorte, por lo que existe una desalineación inicial (desalineación de pre-deslizado), la cual se comporta como una función aproximadamente lineal hasta la fuerza crítica donde se produce el cambio de fricción estática a fricción cinética, por lo que la fricción se define como una fuerza de restricción. La rigidez tangencial es un parámetro diferente a la rigidez del sistema, puesto que se considera que son las imperfecciones de la superficie de contacto las que se deforman al aplicar una fuerza que busca el movimiento.

Uno de los casos en los que la fricción se presenta y es estudiada es en el uso de tornillos. En la mayoría de los casos los tornillos se usan como sujetadores, pero en muchas máquinas se incorporan para transmitir potencia o movimiento de una parte del mecanismo a otra, como es el caso para algunos CNC.

Mientras que la fricción y sus efectos son temas a los que se dedica un tiempo considerable en su estudio, las pérdidas de energía y el desgaste provocados por sus efectos representan un porcentaje considerable en las pérdidas económicas al tratar con robots. En mecanismos de alta precisión, se suelen reducir los efectos de la fricción por medio de mecanismos de balines como los tornillos embalados, sin embargo, este tipo de elementos crean una fricción que, si bien es de menor tamaño, también implica cierta no-linealidad en su comportamiento que depende del tiempo, la posición y la temperatura del mecanismo. Este tipo de efectos puede afectar severamente la precisión y exactitud de las máquinas y suele generar efectos de derrape, sobretiros y errores de contorno y de posición, así como tiempos estacionarios en algunas partes mecánicas y también oscilaciones de deslizamiento. Por estas razones, para que un mecanismo posea la precisión y exactitud que se requiere según su uso, es necesario modelar y estudiar adecuadamente el comportamiento de la fricción de sus elementos y compensarlo por medio de un control propuesto.

2.2 Fricción en mecanismos CNC feed-drive

Hablando de máquinas CNC cuya transmisión se basa en un sistema tipo feed-drive, la fricción suele ser un factor importante de estudio para obtener mejoras significativas en la precisión de mecanizado. Como se ha mencionado previamente, el término feed-drive hace referencia a la parte interna de los sistemas CNC e implica desde el motor eléctrico con su respectivo reductor hasta las partes de transmisión mecánica y la parte final del sistema de transmisión. Los elementos de transmisión mecánica pueden comprender cualquier tipo de parte de la máquina que forme parte del flujo de transmisión de par (potencia) entre el servomotor y la pieza de trabajo como pueden ser embragues, tornillos sin fin con tuerca, sistemas cremallera-piñón, etc. En este tipo de sistemas, su calidad y productividad son determinados en base a su precisión y velocidad de posicionamiento. En la figura 2.2.1 se puede apreciar la arquitectura general de un feed-drive.

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

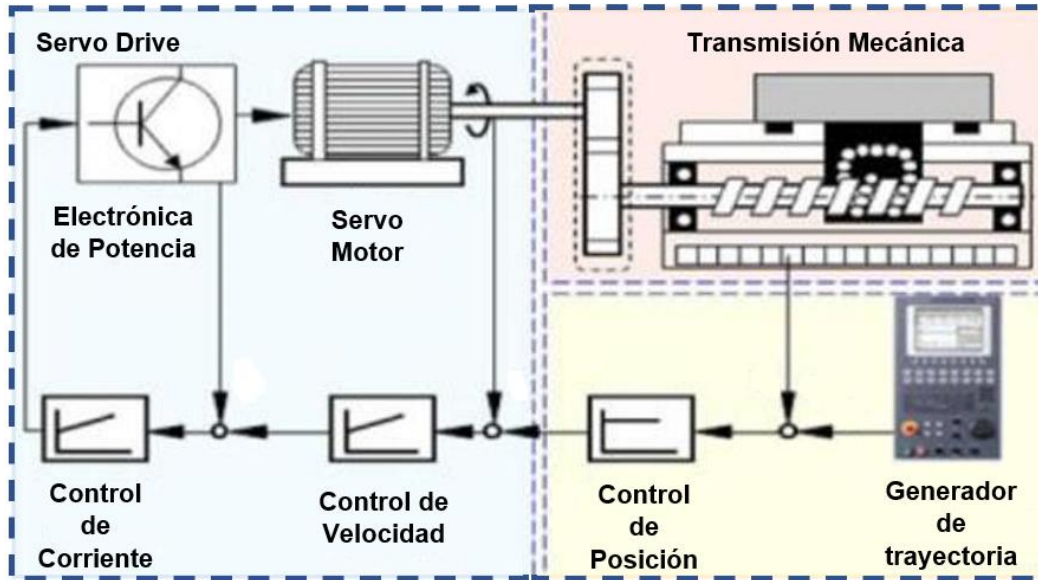


Figura 2.2. 1: Componentes físicos de un robot con feed-drive.

En este tipo de sistemas, la fricción suele tener un efecto significativo en la precisión de mecanizado de la máquina CNC, junto con el elemento de la rigidez del tren de fuerza, lo cual afecta directamente al rendimiento dinámico del motor.

Adicionalmente, al hablar de los ejes de una máquina CNC, se tiene una fricción de deslizamiento, la cual se denomina de esta forma debido a que las partes mecánicas cuentan con un régimen de lubricación parcial de fluidos, disminuyendo la fricción entre dos superficies por medio de un efecto conocido como *efecto de Stribeck*, el cual posee fuertes características no lineales. El comportamiento de la fricción con este efecto puede ser descrito por medio de la figura 2.2.2, la cual posee cuatro regímenes de comportamiento.

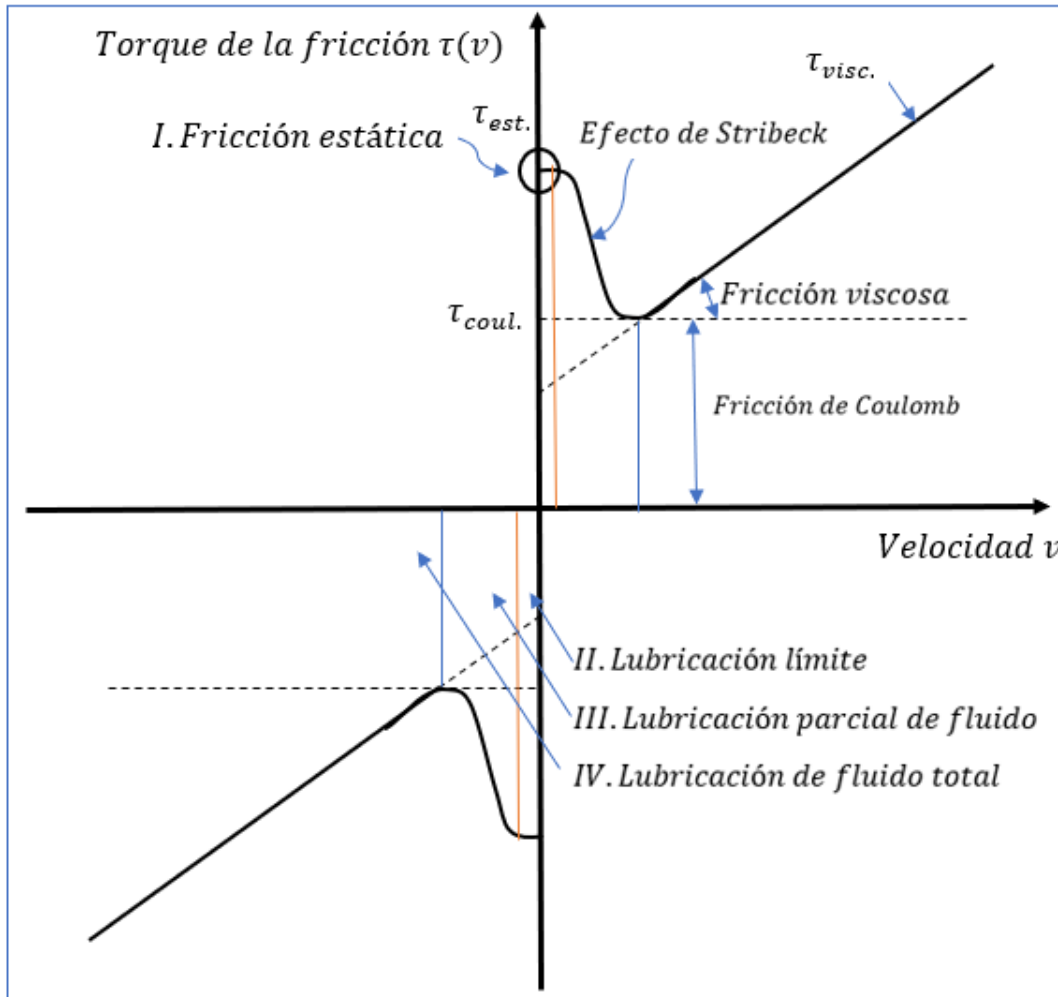


Figura 2.2. 2: Cuatro regímenes de la curva Stribeck.

Los cuatro regímenes se describen de manera breve a continuación:

- I. Fricción estática. - unión entre dos superficies que se comportan como resorte con un micro-desplazamiento proporcional a la fuerza aplicada (también llamado pre-sliding).
- II. Lubricación límite. - en esta etapa la velocidad relativa aumenta, pero no es adecuada para construir una película de fluido entre ambas superficies. En esta etapa la fricción se determina principalmente en base a la química del lubricante.
- III. Lubricación parcial de fluido. - la velocidad relativa sigue aumentando y el lubricante se introduce en la región de contacto por medio del movimiento. Como la velocidad no es suficiente para separar las superficies de contacto, existen contactos sólidos-sólidos.
- IV. Lubricación de fluido total. - la velocidad relativa es suficientemente grande para completar la separación entre las superficies. La carga se soporta totalmente por fluidos y la fricción es proporcional a la velocidad relativa en esta etapa.

En esta figura se puede observar que el comportamiento de la fricción se tiene también en cuatro etapas, siendo la primera de ellas mientras no existe movimiento (fricción estática). En esta etapa, el sistema requiere un torque muy grande para empezar a moverse. Posteriormente, al vencer a la fuerza de fricción se tiene lo que se conoce como efecto de Stribeck, que se produce debido a que la lubricación de fluido no es suficiente para que el movimiento sea fluido. En esta etapa, el torque requerido está en función de una función de la velocidad que depende de las características del sistema. En la tercera etapa, se tiene que el torque que se debe contrarrestar esta causado por la fricción de Coulomb, siendo esta una etapa crítica, puesto que de no proporcionar el torque correcto el sistema dejaría de moverse. Posteriormente, en la última etapa se tiene un torque que parte del torque mínimo exigido por la fricción de Coulomb y que se relaciona directamente con la velocidad del sistema.

El efecto de Stribeck es un fenómeno que se presenta a muy bajas velocidades y representa el transitorio entre la energía requerida para vencer la fricción estática y la energía requerida para vencer la fricción de Coulomb. Esto se da cuando un sistema mecánico pasa del reposo al inicio del movimiento.

Para mejorar la precisión de seguimiento de un CNC feed-drive a baja velocidad o durante la inversión de velocidad, se emplean dos estrategias para compensar los efectos adversos de la fricción no lineal. La primera consiste en el diseño de observadores y controladores avanzados para suprimir los efectos adversos. La segunda se basa en la construcción de modelos de fricción precisos para compensar los efectos adversos de la fricción.

Durante el desarrollo del trabajo de tesis, se dedicará especial atención al estudio de la fricción de Stribeck empleando un modelo de fricción en la forma de un modelo dinámico con una ecuación de salida que describa la fuerza de fricción de contacto entre dos cuerpos y cuya ventaja principal será su habilidad para reproducir el comportamiento del efecto Stribeck para explicar la transición del régimen estático a dinámico.

2.3 Modelos de fricción

Fricción es un fenómeno siempre presente cuando dos cuerpos están en contacto, tal que existen fuerzas con componentes tangentes a su región de contacto que se oponen al movimiento relativo de los cuerpos. Tratar con fricción, resulta en una tarea importante cuando se trabaja en control de sistemas mecánicos, puesto que su presencia puede ocasionar errores de seguimiento, ciclos límite, vibraciones y otros tipos de problemas que afectan directamente el desempeño de control de movimiento. Para compensar los efectos de fricción de manera adecuada, es importante disponer de modelos dinámicos de fricción eficientes. Un importante paso en esta dirección es el modelo de fricción LuGre introducido en diversos trabajos. En esta referencia, los autores introducen un modelo dinámico de primer orden junto con una ecuación de salida para describir la fuerza de fricción en la región de contacto entre dos cuerpos. La principal ventaja de este y otros modelos similares de fricción dinámica en la literatura es su habilidad para reproducir el comportamiento de histéresis y el llamado efecto Stribeck, el cual explica la transición del régimen estático a dinámico. [15]

Un modelo más sencillo, es el llamado modelo de fricción viscosa y de coulomb. Este modelo es bastante sencillo, el cual toma en cuenta los dos términos básicos que se incluyen en los

demás modelos. Uno de estos términos, la fricción viscosa, es proporcional a la velocidad de desplazamiento, mientras que el otro término, el cual es un término discontinuo, es un término constante dependiente del signo de la velocidad. En la figura 2.3.1 se puede observar el comportamiento típico de este modelo, el cual puede ser representado con la ecuación 2.3.1.

$$F(\dot{\theta}) = f_v \dot{\theta} + f_c \text{sign}(\dot{\theta}) \quad (2.3.1)$$

donde se tiene que f_v es el coeficiente de fricción viscosa, f_c es el coeficiente de fricción de Coulomb, $\dot{\theta}$ representa la velocidad del sistema y la función signo adquiere los siguientes valores:

$$\text{sign}(\dot{\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{\theta} > 0 \\ 0 & \text{si } \dot{\theta} = 0 \\ -1 & \text{si } \dot{\theta} < 0 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

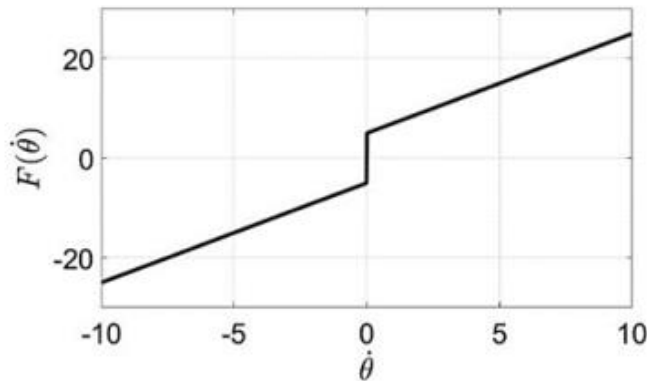


Figura 2.3. 1: Modelo de fricción viscosa y de Coulomb.

Otro modelo de fricción empleado a menudo en los estudios es el modelo de Armstrong, el cual considera dentro de su comportamiento el efecto de Stribeck y la reducción de la fricción al incrementar la velocidad. Este modelo puede ser representado por una ecuación diferencial con 3 términos, donde se tiene un término para la fricción estática, un término para la fricción viscosa y un término para el efecto de Stribeck que se basa en la velocidad de Stribeck, un rango de velocidad muy bajo donde se produce este fenómeno. Todo esto puede ser descrito de manera matemática por la ecuación 2.3.3. En la figura 2.3.2 se puede observar el comportamiento típico de este modelo.

$$F(\dot{\theta}) = f_v \dot{\theta} + f_c \text{sign}(\dot{\theta}) + (f_e - f_c) \text{sign}(\dot{\theta}) e^{-(\dot{\theta}/v_s)^2} \quad (2.3.3)$$

Donde se tiene que f_e representa la fricción estática y v_s representa el coeficiente de velocidad de Stribeck.

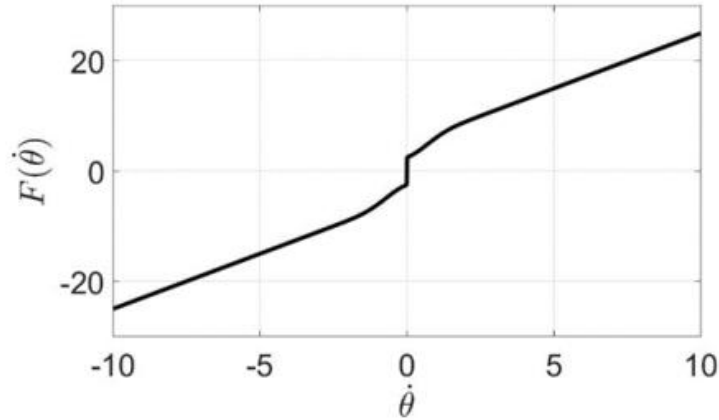


Figura 2.3. 2: Modelo de fricción de Armstrong.

Un tercer modelo es el llamado modelo de Dahl, el cual se basa en el comportamiento de las asperezas que forman el contacto entre dos superficies, mismo que el modelo considera como una variable de estado que representa la deflexión promedio de las imperfecciones del material, la cual a su vez se multiplica por un coeficiente de rigidez y de esta forma permite obtener una fuerza o par de fricción. Para este tipo de modelo, la descripción de la región de deslizamiento tiende a la fricción de Coulomb y puede ser agregado a un modelo en forma de una ecuación diferencial dependiente de la velocidad del sistema, y que al resolver dicha ecuación diferencial permite calcular el comportamiento de la fuerza de fricción. Su representación matemática se describe en las ecuaciones 2.3.4 y 2.3.5.

$$F(\dot{\theta}) = \sigma_0 z(\dot{\theta}) \quad (2.3.4)$$

$$\dot{z}(\dot{\theta}) = -\sigma_0 |\dot{\theta}| f_c z + \dot{\theta} \quad (2.3.5)$$

En estas ecuaciones se tiene que z es la deflexión promedio y σ_0 es el coeficiente de rigidez. Es importante observar que z tiene relación con la fricción viscosa y tiene un comportamiento dinámico propio reflejado en la ecuación 2.3.5. En esta ecuación se puede observar que el término correspondiente a la fricción de Coulomb es un término discontinuo, lo que complica el análisis y resolución de la ecuación diferencial resultante. Es por esto por lo que el modelo de fricción de Dahl evita el uso de la función signo cuando se emplea el modelo dinámico,

simplificando de esta manera la solución de las ecuaciones diferenciales al costo de aumentar el orden del sistema dinámico de la planta.

El modelo de LuGre es otro modelo de fricción, este basado en la elasticidad del contacto. Es una generalización del modelo de Dahl, lo que permite considerar características estáticas y dinámicas de la fricción, ya que esta última no posee una respuesta inmediata al cambio de velocidad. Una cosa en común que tienen los modelos descritos es que requieren el conocimiento de los parámetros de fricción viscosa y de Coulomb para su descripción, por lo que es importante contar con un método de cálculo para los mismos que sea adecuado para el sistema que se quiere estudiar.

Un punto notorio es que todos los modelos requieren el poseer conocimientos previos de los diferentes tipos de fricción como lo es la fricción viscosa y de Coulomb, de manera que la descripción de estos sea adecuada. Sin embargo, algunos de los modelos poseen constantes propias de este, las cuales resultan de igual importancia para su representación. Es por esto, que es altamente alentado el que la persona que desee representar un modelo de fricción posea no solo conocimientos previos del tema, sino también una manera de calcular los coeficientes necesarios de manera teórica o práctica.

2.4 Conclusiones

La fricción es uno de los fenómenos físicos que más pueden afectar la respuesta de los sistemas mecánicos. Es por esto por lo que es necesario poseer los conocimientos necesarios para estudiar y analizar el fenómeno en los diversos tipos de mecanismos que puedan resultar de interés. El estudio de la fricción no es un estudio nuevo, por lo que existen diversos estudios sobre el tema, sin embargo, es importante notar que cada mecanismo es único, por lo que el estudio de la fricción en un sistema es un tema que puede resultar muy especializado, debido a los diversos factores que afectan al estudio. Adicionalmente, el planteamiento de un modelo de fricción depende del conocimiento propio del fenómeno y del sistema de estudio, puesto que, dependiendo del tipo de mecanismo, también se pueden tener diferentes manifestaciones de la fricción. Como se sigue recalando, el fenómeno de fricción resulta de vital interés para el estudio, puesto que, según lo estudiado e investigado, es de los fenómenos que deben ser estudiados en orden de mejorar la eficiencia de un mecanismo. Por medio del estudio de los tipos de fricción, se espera dar introducción a cómo afecta el comportamiento de un sistema, de manera que se pueda también plantear un adecuado análisis del fenómeno para el mecanismo de nuestro CNC feed-drive empleado como impresora 3D.

Capítulo 3: Obtención del modelo dinámico con fricción

Con los avances de los estudios en robots, se tiene que un área que se ha vuelto fundamental es el desarrollo de modelos dinámicos. Un modelo constituye una representación de un aspecto real. En su estructura intervienen elementos que caracterizan la realidad y que representan las relaciones existentes entre las partes de un sistema. Un modelo matemático está basado en una representación del comportamiento de un sistema por medio del planteamiento de ecuaciones matemáticas por medio de la definición de variables y funciones. Se tienen diversos tipos de modelos, siendo uno de los más empleados al analizar mecanismos en movimiento, el modelo dinámico.

Las ventajas de un modelo dinámico es que sirven para representar el comportamiento de variables cuyos elementos no permanecen invariables en el tiempo, sino que se consideran una función de este y describen trayectorias temporales. Los modelos dinámicos a menudo se emplean para especificar e implementar aspectos de control en los sistemas, por lo que resultan una herramienta esencial en el análisis y control de los mecanismos.

3.1 Ecuación de Lagrange y método de parámetros agrupados.

Es importante mencionar que la ecuación de Lagrange puede ser obtenida o derivada a partir de la ecuación de Euler-Lagrange, por lo que es importante manejar los conceptos básicos de esta teoría, la cual, junto con la metodología de parámetros agrupados, establecerán las bases para el planteamiento de nuestro sistema dinámico.

Las ecuaciones de Euler Lagrange parten de la consideración del estado instantáneo del sistema y del concepto de desplazamiento virtual sobre el estado instantáneo (principio de diferencial). Esto nos sirve para analizar un desplazamiento virtual de un cierto número de partículas realizado de manera instantánea, lo que conlleva a la generación de un sistema de ecuaciones diferenciales que se emplean para describir el comportamiento de un sistema.

Estas ecuaciones salen del Lagrangiano de un sistema, el cual está dado por la ecuación 3.1.1.

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (3.1.1)$$

Donde L representa el Lagrangiano del sistema, K representa la energía cinética del sistema, \mathcal{U} representa la energía potencial del sistema, \mathbf{q} se refiere al vector de coordenadas generalizadas y $\dot{\mathbf{q}}$ representa a vector de derivadas de las coordenadas generalizadas (vector de velocidades del sistema).

Del Lagrangiano es posible obtener las ecuaciones de movimiento de Euler Lagrange, las cuales se obtienen con la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.1.2)$$

Sin embargo, esta metodología (aunque efectiva y altamente documentada) requiere de incluir más términos para el estudio de la fricción que se desea. Por ello, se emplea un híbrido de esta metodología con la de parámetros agrupados, lo cual permite agregar la energía disipativa del sistema (la cual se genera por la fricción de sus elementos). Para ello, tenemos la ecuación 3.1.3:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] + \frac{\partial K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial Dt(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \delta W(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - F_s \quad (3.1.3)$$

donde K representa la energía cinética total del sistema, \mathcal{U} representa la energía potencial total del sistema, Dt representa la energía disipativa del sistema (a menudo obtenida por medio de la energía de disipación de Rayleigh), δW hace referencia a las fuerzas generalizadas del sistema, \mathbf{q} se refiere al vector de coordenadas generalizadas y $\dot{\mathbf{q}}$ representa el vector de velocidades del sistema. El término final F_s representa los torques requeridos por las fuerzas de fricción externas, lo cual puede referirse a una fricción estática, cinética, efecto de Stribeck o a una representación de la fricción general del sistema empleando un modelo de fricción.

Sin embargo, la ecuación 3.1.3 puede ser representada también de otra forma, la cual es conocida como ecuación de Lagrange y se puede considerar como el antecedente de la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange. Esta permite incluir los efectos de la fricción en el sistema por medio de un modelo dinámico de fricción para el sistema, a diferencia de la ecuación de Euler-Lagrange, la cual generalmente considera a la fricción como una constante. Esta ecuación se encuentra escrita en 3.1.4:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial Dt(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \delta W(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - F_s \quad (3.1.4)$$

Donde L representa el Lagrangiano del sistema, Dt representa la energía disipativa del sistema, δW hace referencia a las fuerzas generalizadas del sistema, \mathbf{q} se refiere al vector de coordenadas generalizadas y $\dot{\mathbf{q}}$ representa el vector de velocidades del sistema.

Adicionalmente, el empleo de la metodología de parámetros agrupados nos permite ir considerando todas las energías del sistema, empleando para ello una combinación de leyes físicas existentes dentro de la mecánica clásica que describen el comportamiento de la energía dentro de un sistema.

3.2 Análisis de un grado de libertad

Para iniciar el análisis del sistema, se tiene que lo mejor es empezar desglosando las partes de un solo grado de libertad. Puesto que los tres ejes del sistema poseen una estructura

similar, al analizar uno solo de ellos se tiene la ventaja de tener un análisis similar para el resto de los ejes del robot. Es por esto por lo que se inició con el análisis del eje X del robot, que resulta ser el primer eje y que se encarga de cargar a los otros dos. Para su correcto análisis se inició analizando sus partes, las cuales pueden ser observadas en la imagen 3.2.1.



Figura 3.2. 1: Composición de un eje del robot.

En la imagen 3.2.1 se puede observar que cada eje se compone de los siguientes elementos: un motor, su respectivo reductor (caja de engranes) un cople que une el eje de la caja de engranes con el siguiente elemento mecánico el cual consiste en un tornillo embalado y dicho elemento, el cual cuenta con una tuerca que se encuentra acoplada a lo que se denomina mesa de trabajo. La mesa de trabajo es la parte que hace parte de efector del eje, y que en el caso del eje X corresponde al eje Y del robot.

A partir de las partes del eje, es posible plantear el diagrama esquemático del grado de libertad del robot, el cuál es la representación de los elementos que se tomarán en cuenta al plantear los fenómenos que afectan a nuestro mecanismo. Este diagrama puede ser consultado en la figura 3.2.2.

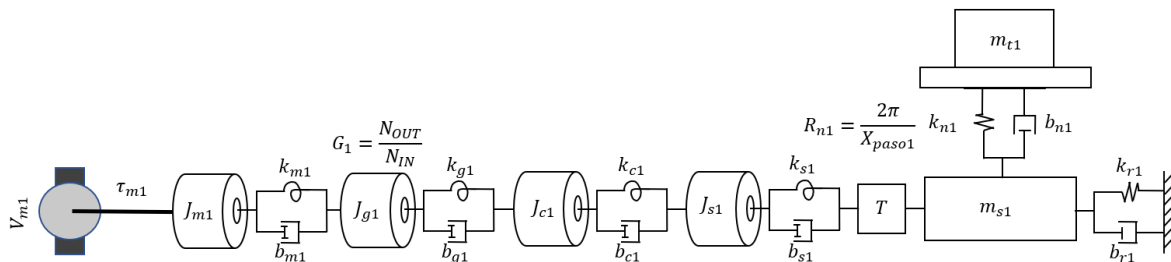


Figura 3.2. 2: Diagrama esquemático de un grado de libertad del robot.

Es importante notar que, con el planteamiento de los elementos del robot, se tienen una serie de constantes y variables que deben ser aclaradas para poder comprender las ecuaciones que se plantearan a futuro. Es por esto por lo que en las tablas 3.2.1 y 3.2.2 es posible encontrar los símbolos y significados de estos elementos.

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

| Símbolo | Significado y unidades. |
|----------|---|
| K_{m1} | Rigidez del eje del motor [Nm/rad]. |
| K_{g1} | Rigidez del mecanismo de la caja de engranes [Nm/rad]. |
| K_{c1} | Rigidez del cople [Nm/rad]. |
| K_{s1} | Rigidez torsional del tornillo embalado [N/m]. |
| K_{r1} | Rigidez axial del tornillo embalado [N/m]. |
| K_{n1} | Rigidez de la unión entre la tuerca y la mesa de trabajo [N/m]. |
| b_{m1} | Coefficiente de fricción del eje del motor [Nms/rad]. |
| b_{g1} | Coefficiente de fricción de la caja de engranes [Nms/rad]. |
| b_{c1} | Coefficiente de fricción del cople [Nms/rad]. |
| b_{s1} | Coefficiente de fricción torsional del tornillo embalado [Nms/rad]. |
| b_{n1} | Coefficiente de fricción de la mesa de trabajo [Nm/s]. |
| b_{r1} | Coefficiente de fricción axial del tornillo embalado [Nm/s]. |
| J_{m1} | Inercia del motor [kgm^2]. |
| J_{g1} | Inercia de la caja de engranes [kgm^2]. |
| J_{c1} | Inercia del cople [kgm^2]. |
| J_{s1} | Inercia del tornillo embalado [kgm^2]. |
| m_{s1} | Masa del tornillo embalado y la tuerca [m]. |
| m_{t1} | Masa de la mesa de trabajo [m]. |

Tabla 3.2. 1: Constantes de los ejes del robot.

| Símbolo | Definición. |
|---------------------|--|
| θ_{m1} | Posición angular del eje del motor. |
| θ_{g1} | Posición angular del eje de la caja de engranes. |
| θ_{c1} | Posición angular del cople. |
| θ_{s1} | Posición angular del tornillo embalado. |
| X_{s1} | Posición axial del tornillo embalado. |
| X_{t1} | Posición axial de la mesa de trabajo. |
| $\dot{\theta}_{m1}$ | Velocidad angular del motor. |
| $\dot{\theta}_{g1}$ | Velocidad angular de la caja de engranes. |
| $\dot{\theta}_{c1}$ | Velocidad angular del cople. |
| $\dot{\theta}_{s1}$ | Velocidad angular del tornillo embalado. |
| \dot{X}_{s1} | Velocidad axial del tornillo embalado. |
| \dot{X}_{t1} | Velocidad axial de la mesa de trabajo. |

Tabla 3.2. 2: Variables de los ejes del robot.

Otro punto importante es el planteamiento del movimiento del efector de nuestro eje, el cuál para el caso del eje X , consiste en el movimiento de la mesa de trabajo. Este movimiento puede ser traducido a coordenadas cartesianas, de manera que sea más amigable de interpretar por un usuario del robot, por lo que se tiene que el movimiento del primer eje está dado por:

EJE X

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{b1} + x_{t1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siguiendo este planteamiento y tomando en cuenta, como se mencionó con anterioridad, a la metodología de parámetros agrupados, e posible plantear las ecuaciones que describen a las energías de nuestro eje, especialmente la energía cinética K , la energía potencial \mathcal{U} , la energía de disipación D y los trabajos virtuales δW . Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$K_1(\boldsymbol{\varphi}_1, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1) = \frac{1}{2}J_{m1}\dot{\theta}_{m1}^2 + \frac{1}{2}J_{g1}\dot{\theta}_{g1}^2 + \frac{1}{2}J_{c1}\dot{\theta}_{c1}^2 + \frac{1}{2}J_{s1}\dot{\theta}_{s1}^2 + \frac{1}{2}m_{s1}\dot{X}_{s1}^2 + \frac{1}{2}m_{t1}\dot{X}_{t1}^2 \quad (3.2.1)$$

$$\mathcal{U}_1(\boldsymbol{\varphi}_1) = \frac{1}{2}k_{m1}(\theta_{m1} - G_1\theta_{g1})^2 + \frac{1}{2}k_{g1}(\theta_{g1} - \theta_{c1})^2 + \frac{1}{2}k_{c1}(\theta_{c1} - \theta_{s1})^2 + \frac{1}{2}k_{s1}(\theta_{s1} - R_{n1}X_{s1})^2 + \frac{1}{2}k_{r1}X_{s1}^2 + \frac{1}{2}k_{t1}(X_{s1} - X_{t1})^2 \quad (3.2.2)$$

$$D_1(\boldsymbol{\varphi}_1, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1) = \frac{1}{2}b_{m1}(\dot{\theta}_{m1} - G_1\dot{\theta}_{g1})^2 + \frac{1}{2}b_{g1}(\dot{\theta}_{g1} - \dot{\theta}_{c1})^2 + \frac{1}{2}b_{c1}(\dot{\theta}_{c1} - \dot{\theta}_{s1})^2 + \frac{1}{2}b_{s1}(\dot{\theta}_{s1} - R_{n1}\dot{X}_{s1})^2 + \frac{1}{2}b_{r1}\dot{X}_{s1}^2 + \frac{1}{2}b_{t1}(\dot{X}_{s1} - \dot{X}_{t1})^2 \quad (3.2.3)$$

$$\delta W_1(\boldsymbol{\varphi}_1) = \tau_{m1}\delta\theta_{m1} \quad (3.2.4)$$

donde se tiene que:

$$R_{n1} = \frac{X_{paso1}}{2\pi\phi_1}.$$

ϕ_1 : eficiencia 1

Adicionalmente, los vectores $\boldsymbol{\varphi}_1$ y $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1$ pueden ser definidos como:

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = [\theta_{m1}, \theta_{g1}, \theta_{c1}, \theta_{b1}, X_{s1}, X_{t1}]^T \quad (3.2.5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1 = [\dot{\theta}_{m1}, \dot{\theta}_{g1}, \dot{\theta}_{c1}, \dot{\theta}_{b1}, \dot{X}_{s1}, \dot{X}_{t1}]^T \quad (3.2.6)$$

Con las ecuaciones planteadas, se puede aplicar la ecuación de Lagrange al primer eje. Con el planteamiento y desarrollando cuidadosamente cada la ecuación para cada uno de los términos de los vectores de posiciones y velocidades del eje, se pueden obtener las siguientes seis ecuaciones:

$$J_{m1}\ddot{\theta}_{m1} + k_{m1}(\theta_{m1} - G_1\theta_{g1}) + b_{m1}(\dot{\theta}_{m1} - G_1\dot{\theta}_{g1}) = \tau_{m1} \quad (3.2.7)$$

$$J_{g1}\ddot{\theta}_{g1} + k_{m1}G_1(G_1\theta_{g1} - \theta_{m1}) + k_{g1}(\theta_{g1} - \theta_{c1}) + b_{m1}G_1(G_1\dot{\theta}_{g1} - \dot{\theta}_{m1}) + b_{g1}(\dot{\theta}_{g1} - \dot{\theta}_{c1}) = 0 \quad (3.2.8)$$

$$J_{c1}\ddot{\theta}_{c1} + k_{g1}(\theta_{c1} - \theta_{g1}) + k_{c1}(\theta_{c1} - \theta_{s1}) + b_{g1}(\dot{\theta}_{c1} - \dot{\theta}_{g1}) + b_{c1}(\dot{\theta}_{c1} - \dot{\theta}_{s1}) = 0 \quad (3.2.9)$$

$$J_{s1}\ddot{\theta}_{s1} + k_{c1}(\theta_{s1} - \theta_{c1}) + k_{s1}(\theta_{s1} - R_{n1}X_{s1}) + b_{c1}(\dot{\theta}_{s1} - \dot{\theta}_{c1}) + b_{s1}(\dot{\theta}_{s1} - R_{n1}\dot{X}_{s1}) = 0 \quad (3.2.10)$$

$$(m_{s1})\ddot{X}_{s1} + k_{s1}R_{n1}(R_{n1}X_{s1} - \theta_{s1}) + k_{r1}X_{s1} + k_{t1}(X_{s1} - X_{t1}) + b_{s1}R_{n1}(R_{n1}\dot{X}_{s1} - \dot{\theta}_{s1}) + b_{r1}\dot{X}_{s1} + b_{t1}(\dot{X}_{s1} - \dot{X}_{t1}) = 0 \quad (3.2.11)$$

$$(m_{t1})\ddot{X}_{t1} + k_{t1}(X_{t1} - X_{s1}) + b_{t1}(\dot{X}_{t1} - \dot{X}_{s1}) + F_{s1} = 0 \quad (3.2.12)$$

Es necesario denotar que las seis ecuaciones obtenidas corresponden al modelo dinámico de un grado de libertad del robot que se estudia. Es por esto, que cada ecuación posee un significado determinado y corresponde a la descripción del comportamiento de una parte del robot.

La ecuación 3.2.7 es responsable de describir el comportamiento del eje del motor y es en esta ecuación donde se plantea la entrada de energía del sistema en la forma del torque proporcionado por el sistema embebido del FPGA con su correspondiente etapa de potencia. La ecuación 3.2.8 corresponde a la descripción del comportamiento del eje de la caja de engranes, por lo que está directamente relacionada con la constante G_1 que corresponde a la transformación de energía que se tiene por efecto del funcionamiento de la caja de engranes. La ecuación 3.2.9 describe el comportamiento del cople que une a la caja de engranes y al tornillo embalado. En este punto es importante marcar que el comportamiento planteado para este elemento se considera como lineal y que en un trabajo futuro su comportamiento podría plantearse como un comportamiento no lineal dependiendo de que tan bien se ajuste la

representación a la realidad. La ecuación 3.2.10 corresponde al comportamiento del tornillo embalado, haciendo énfasis en el comportamiento de su componente rotacional, por lo que su comportamiento no es tan diferente del comportamiento de los anteriores elementos. En cambio, la ecuación 3.2.11 se encarga de describir el comportamiento del tornillo embalado en su componente *axial*, por lo que, contrario a la anterior ecuación, se encuentra estrechamente ligada con la constante del sistema R_{n1} , la cual corresponde a la transformación efectuada por el mecanismo rosca-tuerca del tornillo. Por último, se tiene que la ecuación 3.2.12 se corresponde a la descripción del comportamiento de la mesa de trabajo, la cual se encuentra acoplada a la tuerca del tornillo embalado y cuya masa corresponde al peso del eje Y (en el caso del eje X).

Otro punto para tomar en cuenta en la obtención del modelo dinámico es que con las ecuaciones obtenidas del mismo es posible implementar simulaciones en diversos softwares matemáticos, siendo el de elección para el proyecto el software de Matlab, el cual permite, con el uso de programación, obtener gráficas de respuesta del sistema ante diversos tipos de entrada, lo que resulta útil en el análisis del sistema. Esto se realiza planteando las ecuaciones como una ODE y resolviéndola con el método numérico de Runge-Kutta 4/5. Con la solución numérica, se obtiene el comportamiento de cualquiera de las variables que resulte de interés, lo que implica que podemos graficarlas, compararlas o incluso procesarlas para obtener el comportamiento de otras variables. Se debe recordar que la entrada de nuestros motores será un PWM de periodo variable, por lo que resulta conveniente analizar la respuesta del sistema ante una entrada tipo escalón y comparar los resultados con el comportamiento de las señales obtenidas en los experimentos. Con esto es posible comparar las respuestas (simulada y real) y determinar si el planteamiento del modelo es adecuado para el tipo de estudio que se lleva a cabo.

3.3 Generalización del sistema para dos y tres grados de libertad.

Como se mencionó anteriormente, se tiene una gran ventaja en el análisis del sistema mecánico, puesto que la estructura básica del sistema para dos y tres grados de libertad es similar a la que se tiene para uno y dos grados de libertad. Es por esto por lo que el diagrama esquemático del robot puede ser planteado con la base del que ya se tiene para incluir los grados de libertad faltantes (Figuras 3.3.1 y 3.3.2).

Esto ahorra mucho trabajo, puesto que incluso las ecuaciones pueden ser generalizadas para incluir a los tres grados de libertad, tomando en cuenta por supuesto que, al interactuar los ejes entre los ejes, la masa de cada uno de ellos tiene efecto sobre los otros.

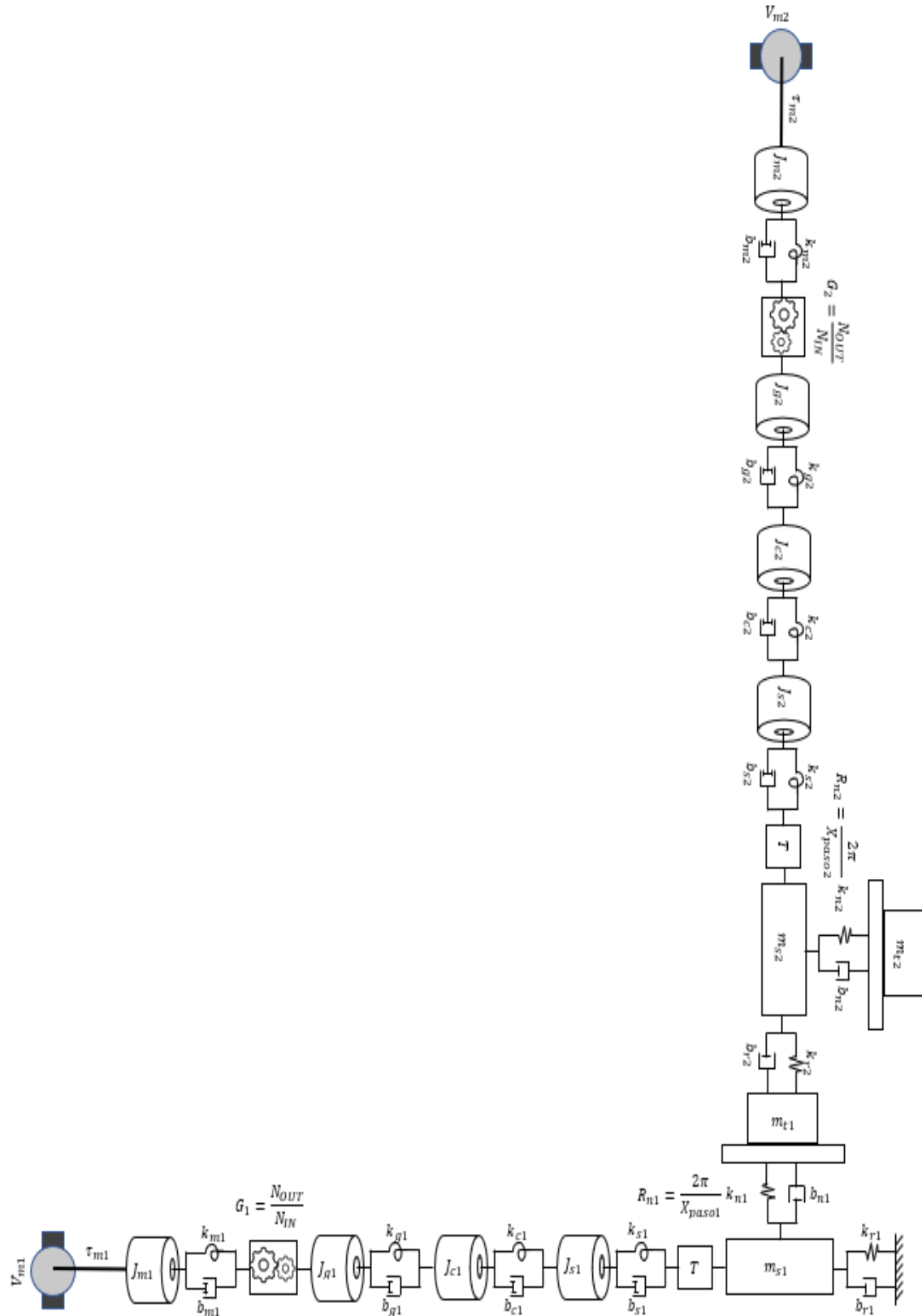


Figura 3.3. 1: Diagrama esquemático para dos grados de libertad del robot.

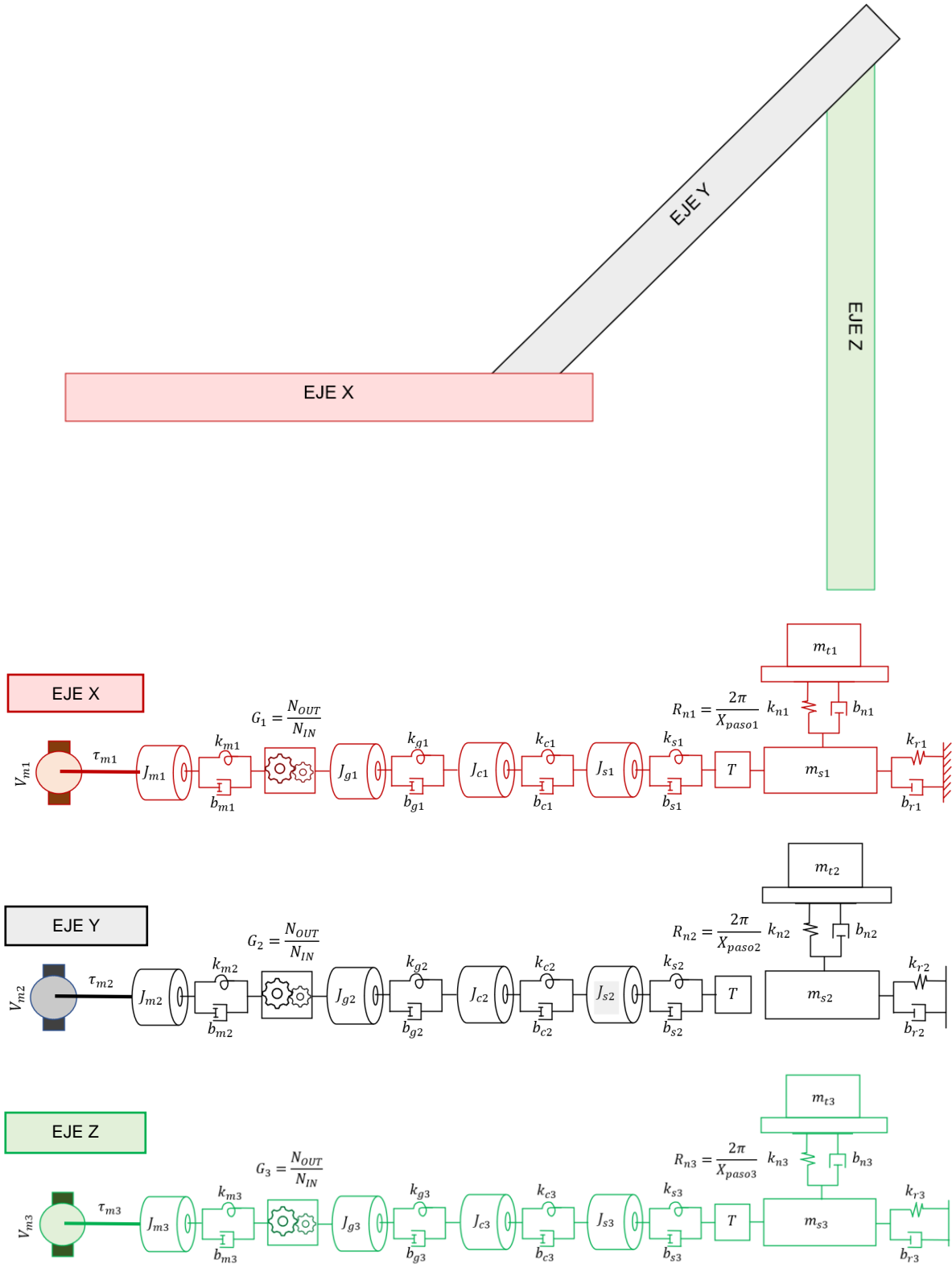


Figura 3.3. 2: Diagrama esquemático para los tres grados de libertad del robot CNC de feed-drive, con el detalle de cada grado por separado.

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

Un punto importante que no ha sido mencionado anteriormente es que en el diagrama esquemático no se considera a la parte eléctrica del motor, debido a que el motor se maneja por medio de la caracterización que se revisó en el capítulo 1. Gracias a este proceso, se encuentra una frecuencia a la cual el motor actúa de manera similar a si se tratase de un motor de transmisión directa, por lo que es posible obtener un torque que es directamente proporcional al ancho del PWM, con lo que se considera que se está inyectando directamente torque a la entrada de cada grado de libertad, por lo que no es necesario modelar el interior del motor en la forma de un circuito eléctrico. Esto a su vez, permite reducir un poco las variables manejadas en el planteamiento del modelo de cada grado de libertad, que es la razón por la que se maneja de esta forma.

Como se menciona anteriormente, es posible observar que los tres grados de libertad poseen los mismos elementos mecánicos, por lo que se puede simplificar el manejo de las constantes de cada grado de libertad, con el entendido de que el subíndice i representa al grado de libertad al que corresponde la constante, siendo 1 el eje x , 2 el eje y y 3 el eje z . Con esto, se procede a realizar una tabla con las constantes manejadas en el modelo dinámico para los respectivos componentes dinámicos del robot, incluyendo simbología, significado y unidades respectivas desglosadas en la tabla 3.3.1.

| Símbolo | Significado y unidades. |
|----------|---|
| K_{mi} | Rigidez del eje del motor [Nm/rad]. |
| K_{gi} | Rigidez del mecanismo de la caja de engranes [Nm/rad]. |
| K_{ci} | Rigidez del cople [Nm/rad]. |
| K_{si} | Rigidez torsional del tornillo embalado [N/m]. |
| K_{ri} | Rigidez axial del tornillo embalado [N/m]. |
| K_{ni} | Rigidez de la unión entre la tuerca y la mesa de trabajo [N/m]. |
| b_{mi} | Coefficiente de fricción del eje del motor [Nms/rad]. |
| b_{gi} | Coefficiente de fricción de la caja de engranes [Nms/rad]. |
| b_{ci} | Coefficiente de fricción del cople [Nms/rad]. |
| b_{si} | Coefficiente de fricción torsional del tornillo embalado [Nms/rad]. |
| b_{ni} | Coefficiente de fricción de la mesa de trabajo [Nm/s]. |
| b_{ri} | Coefficiente de fricción axial del tornillo embalado [Nm/s]. |
| J_{mi} | Inercia del motor [kgm^2]. |
| J_{gi} | Inercia de la caja de engranes [kgm^2]. |
| J_{ci} | Inercia del cople [kgm^2]. |
| J_{si} | Inercia del tornillo embalado [kgm^2]. |
| m_{si} | Masa del tornillo embalado y la tuerca [m]. |
| m_{ti} | Masa de la mesa de trabajo [m]. |

Tabla 3.3. 1: Constantes generalizadas de los ejes del robot.

De igual manera, se realiza una tabla con las variables generalizadas para el modelo dinámico de todo el robot, dado que esto nos permitirá definir el tamaño del modelo dinámico

planteado, el cual posee 6 variables para cada grado de libertad, lo cual nos da un total de 18 variables para el modelo total.

| Símbolo | Definición. |
|---------------------|--|
| θ_{mi} | Posición angular del eje del motor. |
| θ_{gi} | Posición angular del eje de la caja de engranes. |
| θ_{ci} | Posición angular del cople. |
| θ_{si} | Posición angular del tornillo embalado. |
| X_{si} | Posición axial del tornillo embalado. |
| X_{ti} | Posición axial de la mesa de trabajo. |
| $\dot{\theta}_{mi}$ | Velocidad angular del motor. |
| $\dot{\theta}_{gi}$ | Velocidad angular de la caja de engranes. |
| $\dot{\theta}_{ci}$ | Velocidad angular del cople. |
| $\dot{\theta}_{si}$ | Velocidad angular del tornillo embalado. |
| \dot{X}_{si} | Velocidad axial del tornillo embalado. |
| \dot{X}_{ti} | Velocidad axial de la mesa de trabajo. |

Tabla 3.3. 2: Variables generalizadas de los ejes del robot.

De manera similar a lo que se realizó para un grado de libertad, se plantea el movimiento cartesiano final para cada uno de los ejes del sistema, con lo que al final podremos plantear la posición del robot para cada efector.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{EJE } X & \text{EJE } Y & \text{EJE } Z \\
 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{s1} + x_{t1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{s1} + x_{t1} \\ x_{s2} + x_{t2} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{s1} + x_{t1} \\ x_{s2} + x_{t2} \\ x_{s3} + x_{t3} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Otro elemento que se puede generalizar es el planteamiento de las ecuaciones de energía del sistema. Dado que cada eje funciona de manera similar al otro, es posible obtener las ecuaciones de energía de cada uno de ellos al particularizar las ecuaciones generales para cada tipo de energía del sistema, con lo que tenemos:

$$K_i(\boldsymbol{\varphi}_i, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_i) = \frac{1}{2}J_{mi}\dot{\theta}_{mi}^2 + \frac{1}{2}J_{gi}\dot{\theta}_{gi}^2 + \frac{1}{2}J_{ci}\dot{\theta}_{ci}^2 + \frac{1}{2}J_{si}\dot{\theta}_{si}^2 + \frac{1}{2}m_{si}\left(\sum_{k=1}^i\dot{X}_{si}^2\right) + \frac{1}{2}m_{ti}\left(\sum_{k=1}^i\dot{X}_{ti}^2\right) \quad (3.3.1)$$

$$\mathcal{U}_i(\boldsymbol{\varphi}_i) = \frac{1}{2}k_{mi}(\theta_{mi} - G_i\theta_{gi})^2 + \frac{1}{2}k_{gi}(\theta_{gi} - \theta_{ci})^2 + \frac{1}{2}k_{ci}(\theta_{ci} - \theta_{si})^2 + \frac{1}{2}k_{si}(\theta_{si} - R_{ni}X_{si})^2 + \frac{1}{2}k_{ri}X_{si}^2 + \frac{1}{2}k_{ti}(X_{si} - X_{ti})^2 \quad (3.3.2)$$

$$D_i(\boldsymbol{\varphi}_i, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_i) = \frac{1}{2}b_{mi}(\dot{\theta}_{mi} - G_i\dot{\theta}_{gi})^2 + \frac{1}{2}b_{gi}(\dot{\theta}_{gi} - \dot{\theta}_{ci})^2 + \frac{1}{2}b_{ci}(\dot{\theta}_{ci} - \dot{\theta}_{si})^2 + \frac{1}{2}b_{si}(\dot{\theta}_{si} - R_{ni}\dot{X}_{si})^2 + \frac{1}{2}b_{ri}\dot{X}_{si}^2 + \frac{1}{2}b_{ti}(\dot{X}_{si} - \dot{X}_{ti})^2 \quad (3.3.3)$$

$$\delta W_i(\boldsymbol{\varphi}_i) = \tau_{mi}\delta\theta_{mi} \quad (3.3.4)$$

donde se tiene que:

$$R_{ni} = \frac{X_{pasoi}}{2\pi\phi_i}$$

ϕ_i : eficiencia i

Así, las energías totales de nuestro sistema, puede ser representado como:

$$K_T(\boldsymbol{\varphi}_T, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_T) = K_1(\boldsymbol{\varphi}_1, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1) + K_2(\boldsymbol{\varphi}_2, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_2) + K_3(\boldsymbol{\varphi}_3, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_3) \quad (3.3.5)$$

$$\mathcal{U}_T(\boldsymbol{\varphi}_T) = \mathcal{U}_1(\boldsymbol{\varphi}_1) + \mathcal{U}_2(\boldsymbol{\varphi}_2) + \mathcal{U}_3(\boldsymbol{\varphi}_3) \quad (3.3.6)$$

$$D_T(\boldsymbol{\varphi}_T, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_T) = D_1(\boldsymbol{\varphi}_1, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1) + D_2(\boldsymbol{\varphi}_2, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_2) + D_3(\boldsymbol{\varphi}_3, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_3) \quad (3.3.7)$$

$$\delta W_T(\boldsymbol{\varphi}_T) = \delta W_1(\boldsymbol{\varphi}_1) + \delta W_2(\boldsymbol{\varphi}_2) + \delta W_3(\boldsymbol{\varphi}_3) \quad (3.3.8)$$

donde los vectores $\boldsymbol{\varphi}_T$ y $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_T$ pueden ser definidos como:

$$\boldsymbol{\varphi}_T = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\varphi}_3]^T \quad (3.3.9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_T = [\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_2, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_3]^T \quad (3.3.10)$$

Con las ecuaciones generales de energía y aplicando nuevamente la ecuación de Lagrange, se obtiene el sistema de ecuaciones que describe el comportamiento de cada uno de los componentes del robot para los tres grados de libertad que nos importan en el sistema CNC de feed-drive. Estos se desarrollan en las ecuaciones escritas a continuación:

$$J_{m1}\ddot{\theta}_{m1} + k_{m1}(\theta_{m1} - G_1\theta_{g1}) + b_{m1}(\dot{\theta}_{m1} - G_1\dot{\theta}_{g1}) = \tau_{m1} \quad (3.3.11)$$

$$J_{g1}\ddot{\theta}_{g1} + k_{m1}G_1(G_1\theta_{g1} - \theta_{m1}) + k_{g1}(\theta_{g1} - \theta_{c1}) + b_{m1}G_1(G_1\dot{\theta}_{g1} - \dot{\theta}_{m1}) + b_{g1}(\dot{\theta}_{g1} - \dot{\theta}_{c1}) = 0 \quad (3.3.12)$$

$$J_{c1}\ddot{\theta}_{c1} + k_{g1}(\theta_{c1} - \theta_{g1}) + k_{c1}(\theta_{c1} - \theta_{s1}) + b_{g1}(\dot{\theta}_{c1} - \dot{\theta}_{g1}) + b_{c1}(\dot{\theta}_{c1} - \dot{\theta}_{s1}) = 0 \quad (3.3.13)$$

$$J_{s1}\ddot{\theta}_{s1} + k_{c1}(\theta_{s1} - \theta_{c1}) + k_{s1}(\theta_{s1} - R_{n1}X_{s1}) + b_{c1}(\dot{\theta}_{s1} - \dot{\theta}_{c1}) + b_{s1}(\dot{\theta}_{s1} - R_{n1}\dot{X}_{s1}) = 0 \quad (3.3.14)$$

$$(m_{s1} + m_{s2} + m_{s3})\ddot{X}_{s1} + k_{s1}R_{n1}(R_{n1}X_{s1} - \theta_{s1}) + k_{r1}X_{s1} + k_{t1}(X_{s1} - X_{t1}) + b_{s1}R_{n1}(R_{n1}\dot{X}_{s1} - \dot{\theta}_{s1}) + b_{r1}\dot{X}_{s1} + b_{t1}(\dot{X}_{s1} - \dot{X}_{t1}) = 0 \quad (3.3.15)$$

$$(m_{t1} + m_{t2} + m_{t3})\ddot{X}_{t1} + k_{t1}(X_{t1} - X_{s1}) + b_{t1}(\dot{X}_{t1} - \dot{X}_{s1}) + F_{s1} = 0 \quad (3.3.16)$$

$$J_{m2}\ddot{\theta}_{m2} + k_{m2}(\theta_{m2} - G_2\theta_{g2}) + b_{m2}(\dot{\theta}_{m2} - G_2\dot{\theta}_{g2}) = \tau_{m2} \quad (3.3.17)$$

$$J_{g2}\ddot{\theta}_{g2} + k_{m2}G_2(G_2\theta_{g2} - \theta_{m2}) + k_{g2}(\theta_{g2} - \theta_{c2}) + b_{m2}G_2(G_2\dot{\theta}_{g2} - \dot{\theta}_{m2}) + b_{g2}(\dot{\theta}_{g2} - \dot{\theta}_{c2}) = 0 \quad (3.3.18)$$

$$J_{c2}\ddot{\theta}_{c2} + k_{g2}(\theta_{c2} - \theta_{g2}) + k_{c2}(\theta_{c2} - \theta_{s2}) + b_{g2}(\dot{\theta}_{c2} - \dot{\theta}_{g2}) + b_{c2}(\dot{\theta}_{c2} - \dot{\theta}_{s2}) = 0 \quad (3.3.19)$$

$$J_{s2}\ddot{\theta}_{s2} + k_{c2}(\theta_{s2} - \theta_{c2}) + k_{s2}(\theta_{s2} - R_{n2}X_{s2}) + b_{c2}(\dot{\theta}_{s2} - \dot{\theta}_{c2}) + b_{s2}(\dot{\theta}_{s2} - R_{n2}\dot{X}_{s2}) = 0 \quad (3.3.20)$$

$$(m_{s1} + m_{s2})\ddot{X}_{s2} + k_{s2}R_{n2}(R_{n2}X_{s2} - \theta_{s2}) + k_{r2}X_{s2} + k_{t2}(X_{s2} - X_{t2}) + b_{s2}R_{n2}(R_{n2}\dot{X}_{s2} - \dot{\theta}_{s2}) + b_{r2}\dot{X}_{s2} + b_{t2}(\dot{X}_{s2} - \dot{X}_{t2}) = 0 \quad (3.3.21)$$

$$(m_{t1} + m_{t2})\ddot{X}_{t2} + k_{t2}(X_{t2} - X_{s2}) + b_{t2}(\dot{X}_{t2} - \dot{X}_{s2}) + F_{s2} = 0 \quad (3.3.22)$$

$$J_{m3}\ddot{\theta}_{m3} + k_{m3}(\theta_{m3} - G_3\theta_{g3}) + b_{m3}(\dot{\theta}_{m3} - G_3\dot{\theta}_{g3}) = \tau_{m3} \quad (3.3.23)$$

$$J_{g3}\ddot{\theta}_{g3} + k_{m3}G_3(G_3\theta_{g3} - \theta_{m3}) + k_{g3}(\theta_{g3} - \theta_{c3}) + b_{m3}G_3(G_3\dot{\theta}_{g3} - \dot{\theta}_{m3}) + b_{g3}(\dot{\theta}_{g3} - \dot{\theta}_{c3}) = 0 \quad (3.3.24)$$

$$J_{c3}\ddot{\theta}_{c3} + k_{g3}(\theta_{c3} - \theta_{g3}) + k_{c3}(\theta_{c3} - \theta_{s3}) + b_{g3}(\dot{\theta}_{c3} - \dot{\theta}_{g3}) + b_{c3}(\dot{\theta}_{c3} - \dot{\theta}_{s3}) = 0 \quad (3.3.25)$$

$$J_{s3}\ddot{\theta}_{s3} + k_{c3}(\theta_{s3} - \theta_{c3}) + k_{s3}(\theta_{s3} - R_{n3}X_{s3}) + b_{c3}(\dot{\theta}_{s3} - \dot{\theta}_{c3}) + b_{s3}(\dot{\theta}_{s3} - R_{n3}\dot{X}_{s3}) = 0 \quad (3.3.26)$$

$$m_{s3}\ddot{X}_{s3} + k_{s3}R_{n3}(R_{n3}X_{s3} - \theta_{s3}) + k_{r3}X_{s3} + k_{t3}(X_{s3} - X_{t3}) + b_{s3}R_{n3}(R_{n3}\dot{X}_{s3} - \dot{\theta}_{s3}) + b_{r3}\dot{X}_{s3} + b_{t3}(\dot{X}_{s3} - \dot{X}_{t3}) = 0 \quad (3.3.27)$$

$$m_{t3}\ddot{X}_{t3} + k_{t3}(X_{t3} - X_{s3}) + b_{t3}(\dot{X}_{t3} - \dot{X}_{s3}) + F_{s3} = 0 \quad (3.3.28)$$

Con el modelo dinámico de tres grados de libertad, es posible obtener las correspondientes simulaciones en Matlab, empleando la herramienta Simulink para generar las respuestas del sistema de acuerdo con los parámetros teóricos del robot. De esta forma se puede estudiar la

respuesta del sistema con respecto a una entrada determinada. Para el caso que nos atañe, es conveniente que dicha entrada sea una sinusoidal que pondrá al robot a oscilar entre dos posiciones determinadas. Esto permitirá analizar el modelo de fricción en los cruces por cero, cuando la velocidad disminuye y cambia de dirección para el estudio del fenómeno de fricción correspondiente. Con el modelo del sistema correctamente simulado, es posible realizar estudios para las variables físicas de este. Es importante recordar que la entrada de los motores corresponde a un PWM de periodo variable, lo cual con la correcta caracterización del motor nos permite introducir un torque directamente proporcional a la amplitud del pulso PWM.

3.4 Modelo de fricción propuesto

En esta sección del capítulo 3, se manejará el modelo de fricción que se emplea, especialmente para el modelado del efecto de Stribeck que se tiene en el sistema, del cual se habló en el capítulo 2. Para ello, es necesario analizar el comportamiento del sistema, para lo cual se hizo uso de un robot de dos grados de libertad que posee la misma estructura mecánica que la del robot que se empleará para el estudio, lo que permite empezar a obtener resultados experimentales para ser analizados.

En el experimento, se realizó un control sobre el robot empleando una función tangente hiperbólica y se realizó el control de trayectoria poniendo el sistema a oscilar para analizar la respuesta. Se recopilaron valores de torque, posición y velocidad y se realizó la comparación del comportamiento del torque con respecto a la velocidad en la figura 3.4.1. En la figura (a), se observa como al acercarse al cruce por cero se tiene un pico que indica como el torque crece hasta superar el torque necesario para vencer a la fuerza de fricción estática, lo que causa un pico que luego tiene un decaimiento en forma de curva suave hasta un número fijo que corresponde al torque necesario para vencer la fricción de coulomb del sistema.

Después, el valor de torque crece de manera proporcional a la velocidad. Comparando con la imagen de los datos experimentales (b), se tiene el mismo comportamiento en el torque vs velocidad. Un punto notable corresponde al hecho de que el sistema no es simétrico con respecto al eje de torque de manera experimental, por lo que se tiene que el sistema maneja valores de fricción estática y de coulomb diferentes dependiendo de la dirección en que el mecanismo se mueve.

Otro punto que se observa es como el comportamiento práctico corresponde al del comportamiento que se tiene del modelo de fricción planteado por la literatura, con lo que se puede afirmar que el fenómeno de fricción que resulta de interés (efecto de Stribeck) se reproduce de manera experimental en el mecanismo.

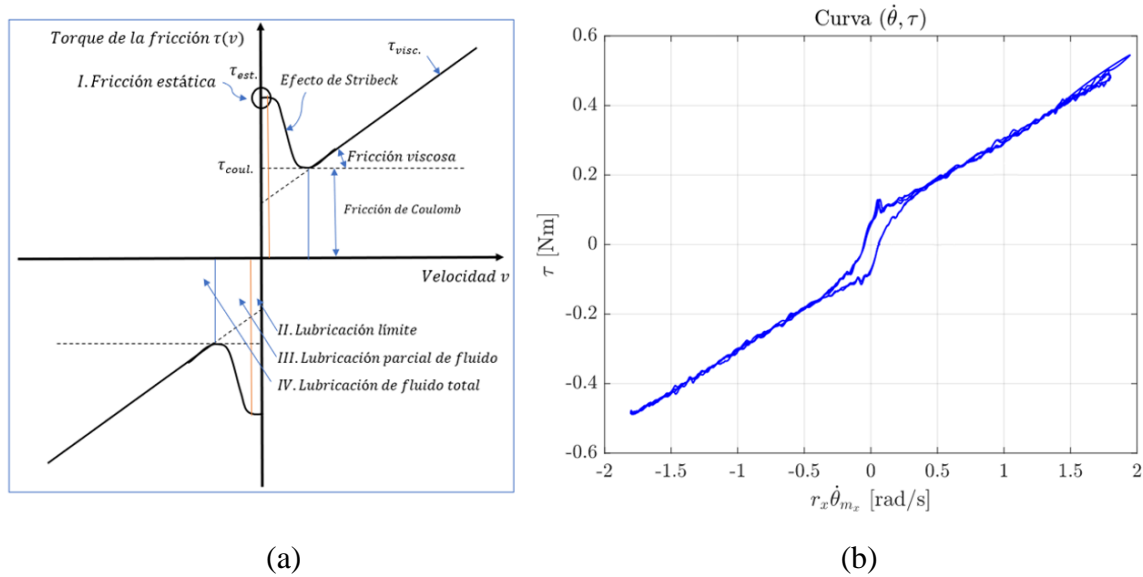


Figura 3.4. 1: Modelo de fricción a) Teórico b) Experimental.

Es evidente que el sistema presenta un comportamiento diferente al pasar de una velocidad negativa a una positiva (cambio de dirección) o expresado de otra manera, en el cruce por cero, lo cual es una característica indicada en la literatura que resulta propia del efecto de Stribeck. En la comparación entre el comportamiento experimental y el comportamiento teórico, se observa que el robot presenta una curva que va desde lo que se asume es el valor del torque necesario para vencer la fricción estática del mecanismo hasta el valor de torque necesario para vencer la fricción de Coulomb, y que luego va aumentando de manera proporcional a la velocidad conforme aumenta el torque requerido para vencer a la fricción viscosa y mantener el movimiento del sistema.

Otra manera de analizar los datos obtenidos de manera experimental corresponde al análisis del comportamiento del torque con respecto al tiempo para el control de trayectoria con el sistema oscilando (figura 3.4.2). En la imagen se puede observar que cada vez que el torque disminuye y se acerca a cero, aparecen barras y picos que son causados por el comportamiento que tiene la fricción y el efecto de Stribeck a la que está sometido el sistema. Al acercarse al cruce por cero, el sistema solicita torque, el cual es proporcionado por el controlador. Sin embargo, este torque resulta insuficiente para romper la fricción estática, lo que causa que el motor no se mueva (a pesar de que el torque sigue siendo proporcionado por el controlador). En consecuencia, la velocidad no cambia y la posición se mantiene fija hasta que el torque alcanza el valor necesario para superar aquel solicitado por la fuerza de fricción estática. Esto ocasiona que cada vez que el torque baja el robot deje de moverse en el cruce por cero (cambio de dirección), lo cual es causado por la fricción del sistema.

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

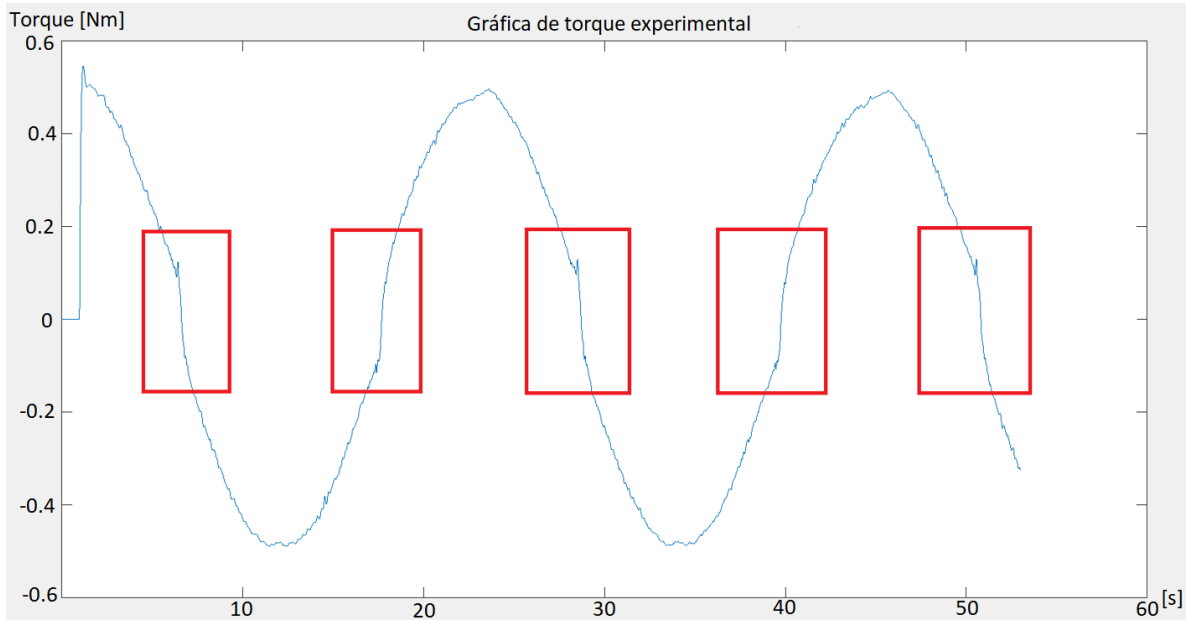


Figura 3.4. 2: Gráfica de torque contra tiempo experimental (eje x).

Al ser el caso de que el comportamiento experimental corresponde con el comportamiento teórico, se procede a proponer un modelo de fricción que permita la reproducción del fenómeno para poder reproducirlo en el modelo dinámico del mismo. Para ello, se debe recordar que el efecto de Stribeck corresponde a una transición entre el torque consumido por la fricción estática del sistema y el torque consumido por la fricción de coulomb. En la literatura existen propuestas que toman en cuenta diversos tipos de fricciones, sin embargo, no se tiene una función que sea estrictamente descriptiva para el comportamiento del efecto de Stribeck, por lo que el enfoque consiste en realizar una propuesta para reproducir dicho comportamiento. Para ello, se eligió representar esta transición empleando la función saturada *tangente hiperbólica*, la cual tiene un comportamiento (por si sola) que va de -1 a +1, lo cual la convierte en una función saturada, con un comportamiento descrito en la gráfica 3.4.3, correspondiente a la función $\tanh(v)$, donde v corresponde a la velocidad de nuestro sistema mecánico.

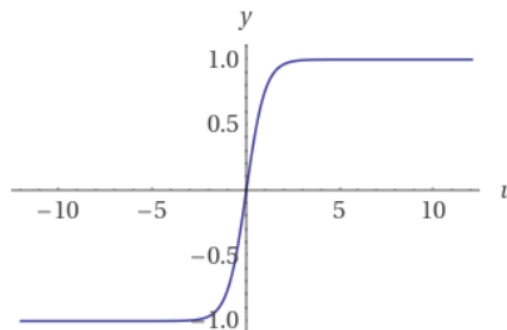


Figura 3.4. 3: Comportamiento de la tangente hiperbólica $\tanh(v)$.

Con esta función establecida como comportamiento base para nuestra transición, es necesario hacer las modificaciones necesarias para que describa el comportamiento que requerimos. Para ello, tenemos que separar el comportamiento correspondiente a la parte positiva de la velocidad de la parte negativa de la misma. Se inicia con el desglose del comportamiento de la parte correspondiente a $v \in R^+$. Como se quiere que el comportamiento vaya de un valor mayor a uno menor, se plantea entonces la función como el negativo de la tangente hiperbólica $-\tanh(v)$, cuyo comportamiento se observa en la gráfica 3.4.4.

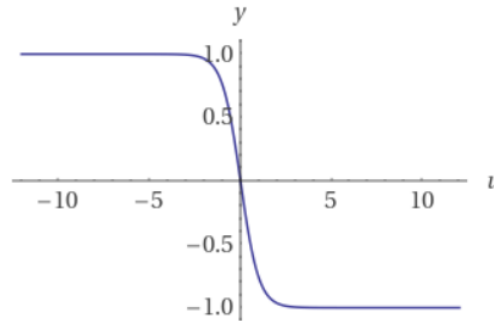


Figura 3.4. 4: Comportamiento de la tangente hiperbólica negativa.

Se puede observar que se tiene una parte de la función que no resulta de interés. Para este caso, la parte negativa de la función resulta innecesaria, por lo que se emplea una función signo modificada para actuar como *activador* en los valores que nos resultan de interés. Para ello, primero recordemos el comportamiento de la función signo $sign(v)$, el cual puede ser observado en la gráfica 3.4.5.

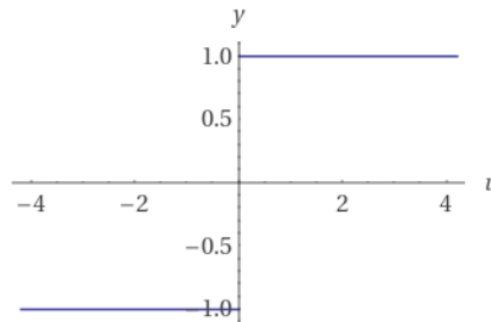


Figura 3.4. 5: Comportamiento de la función signo.

Resulta de interés que cuando los valores de la función sean positivos, la función signo sea 1, mientras que cuando los valores sean negativos, la función signo tenga un valor de cero. Para esto se recorre la función signo sobre el eje y y se multiplica por una constante $\frac{1}{2}$, lo cual permite que funcione de 0 a 1 para los valores de negativo a positivo sobre el eje x. Con

esto, tenemos la función $\frac{1}{2}(1 + \text{sign}(v))$ cuyo comportamiento puede ser observado de manera gráfica en la figura 3.4.6:

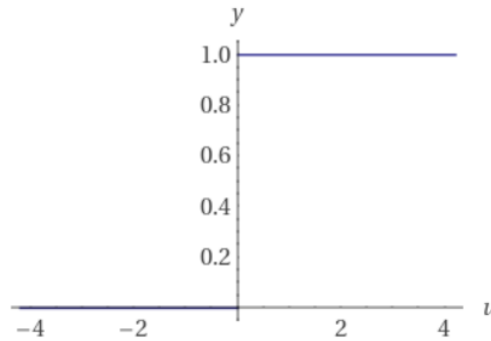


Figura 3.4. 6: Función signo modificada: $\frac{1}{2}(1 + \text{sign}(x))$

De modo similar, se modifica la tangente hiperbólica, realizando un recorrido sobre el eje x para lo cual se resta una constante en el argumento de esta. De manera similar a como se realizó para la función signo, se suma una constante para recorrer sobre el eje y , al tiempo que se multiplica por una constante para asegurar que sus valores vayan de 1 a 0. La tangente hiperbólica modificada puede ser representada como $\frac{1}{2}(1 - \tanh(v - k))$, cuyo comportamiento puede ser observado de manera gráfica en la figura 3.4.7.

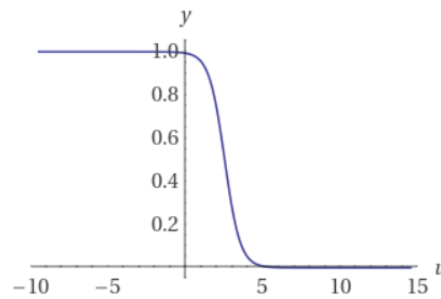


Figura 3.4. 7: Tangente hiperbólica modificada $\frac{1}{2}(1 - \tanh(x - k))$

El siguiente consiste en multiplicar la función signo con sus respectivas modificaciones con la tangente hiperbólica que ha sido modificada a conveniencia. Con esto se elimina la parte negativa (que es la que no nos interesa) y se obtiene una función que puede ser empleada para representar la transición que se genera para los valores positivos de la velocidad y que va de la fricción estática a la fricción de coulomb. Esta función puede ser expresada como $\frac{1}{4}(1 + \text{sign}(v))(1 - \tanh(v - k))$, cuyo comportamiento puede ser observado en la figura 3.4.8.

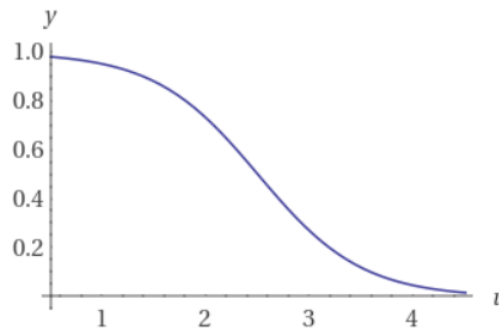


Figura 3.4. 8: Gráfica de la función planteada: $\frac{1}{4} (1+\text{signo}(x)) (1-\tanh(x-k))$

A continuación, el procedimiento debe ser repetido para la parte negativa de la función de interés. Empezamos nuevamente con el comportamiento de la tangente hiperbólica. En este caso no es necesario emplear el negativo de esta, puesto que su comportamiento va de un valor mayor a uno menor de manera natural, lo cual puede observarse en la figura 3.4.9 como $\tanh(v)$.

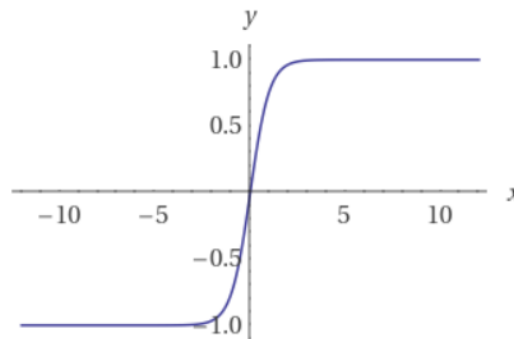


Figura 3.4. 9: Comportamiento de la tangente hiperbólica $\tanh(v)$.

De manera similar al caso para valores de velocidad positivos, se requiere emplear la función signo como un interruptor, que nos permitirá eliminar la parte de la función donde $v > 0$. Para ello, se emplea el negativo de la función signo, la cual puede ser escrita como $-\text{sign}(v)$ y cuyo comportamiento puede ser observado de manera gráfica en la figura 3.4.10.

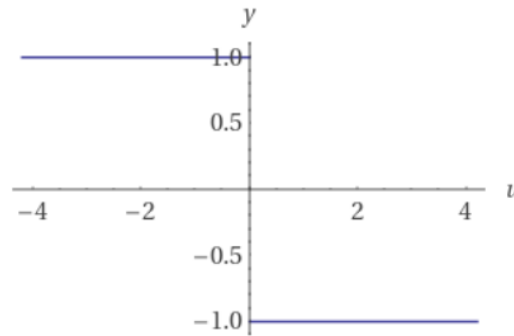


Figura 3.4. 10: Comportamiento de la función $-\text{signo}(v)$.

Se puede observar que esta función va de 1 a -1, por lo cual es necesario modificar su comportamiento para que vaya de 1 a 0. De esta forma se podrá emplear como se propone para eliminar la parte positiva de la función. Por ello, es necesario recorrerla sobre el eje y , para lo cual se le debe sumar una constante. De igual manera es necesario multiplicar por una constante para disminuir su amplitud, con lo que tenemos la función $\frac{1}{2}(1 - \text{signo}(v))$, cuyo comportamiento puede ser observado en la figura 3.4.11.

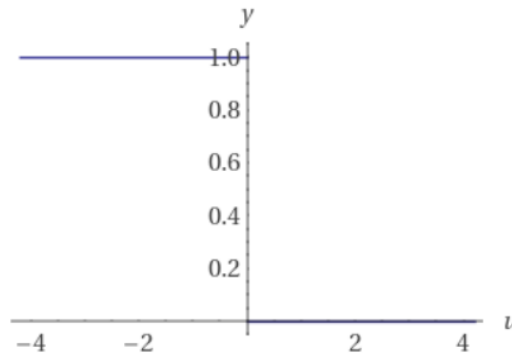


Figura 3.4. 11: Comportamiento de la función $\frac{1}{2}(1 - \text{signo}(v))$

De igual manera, es necesario modificar la tangente hiperbólica para imitar el comportamiento interesa, por lo cual es necesario sumarle una constante y multiplicarla por $\frac{1}{2}$ para asegurar que el comportamiento vaya de 1 a 0. De igual manera es necesario sumar una constante en su argumento para recorrerla sobre el eje de las ordenadas, obteniendo de ello la función $\frac{1}{2}(1 + \tanh(v + k))$, la cual puede ser observada de manera gráfica en la figura 3.4.12.

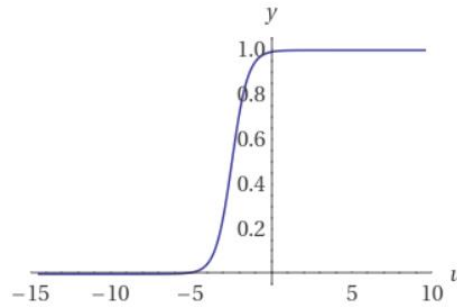


Figura 3.4. 12: Comportamiento de la función $\frac{1}{2}(1 + \tanh(v+k))$

Adicionalmente, este comportamiento se requiere de manera invertida, por lo que se multiplica todo por un -1 para lograr el comportamiento deseado. Con ello, la función queda entonces como $-\frac{1}{2}(1 + \tanh(v + k))$, con lo cual se invierte la gráfica sobre el eje de las ordenadas obteniendo la gráfica de la figura 3.4.13.

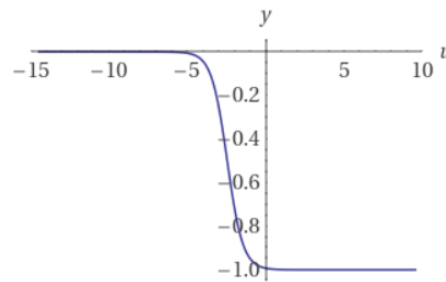


Figura 3.4. 13: Comportamiento para la función $-\frac{1}{2}(1 + \tanh(v + k))$

El siguiente paso consiste en multiplicar por la función signo modificada, lo que permitirá eliminar la parte de la función correspondiente a las velocidades positivas, con lo que tenemos la función $-\frac{1}{4}(1 - \text{signo}(v))(1 + \tanh(v + k))$, la cual puede ser observada en la figura 3.4.14.

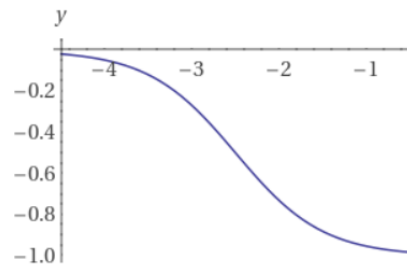


Figura 3.4. 14: Comportamiento de la función $-\frac{1}{4}(1 - \text{signo}(v))(1 + \tanh(v + k))$

Estas dos funciones permiten obtener el comportamiento presente en nuestro efecto de Stribeck, una vez que ambas partes han sido sumadas con lo que tenemos la siguiente ecuación planteada:

$$\tau_{fs} = \frac{1}{4}s_{t1}[\text{signo}(\dot{q}) + 1][1 - \tanh(k(\dot{q} - s_{h1}))] - \frac{1}{4}s_{t2}[1 - \text{signo}(\dot{q})][1 + \tanh(k(\dot{q} + s_{h2}))] \quad (3.4.1)$$

De esta gráfica, se tiene que los elementos s_{t1} y s_{t2} corresponden a los valores de nuestras fricciones estáticas del sistema para la parte positiva y negativa de la misma. De igual manera, se tiene que \dot{q} corresponde a la velocidad del sistema. k corresponde a la amplitud que requerimos para pasar de la fricción estática a la fricción de coulomb de nuestro sistema y los valores de ks_{h1} y ks_{h2} corresponden a los puntos medios de nuestras funciones, lo cual servirá para parametrizar la función de acuerdo con las características propias del mecanismo. El comportamiento de la función puede ser observada en la figura 3.4.15.

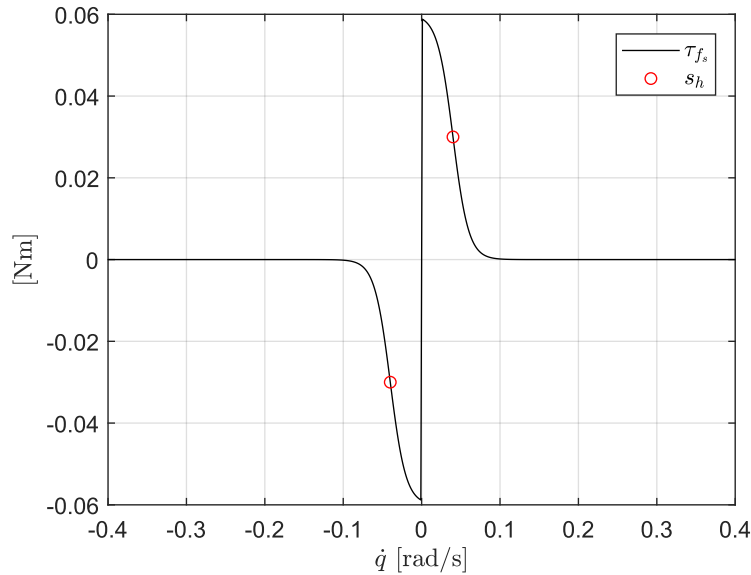


Figura 3.4. 15: Gráfica de la función para la descripción del efecto de Stribeck.

Integrando esto al modelo típico de fricción que incluye la fricción de coulomb y la fricción viscosa, tenemos que el torque total de la fricción se encuentra dado por:

$$\tau_f = \tau_{fs} + k_c \text{signo}(\dot{q}) + b\dot{q} \quad (3.4.2)$$

Lo cual puede ser interpretado con la siguiente gráfica (figura 3.4.16):

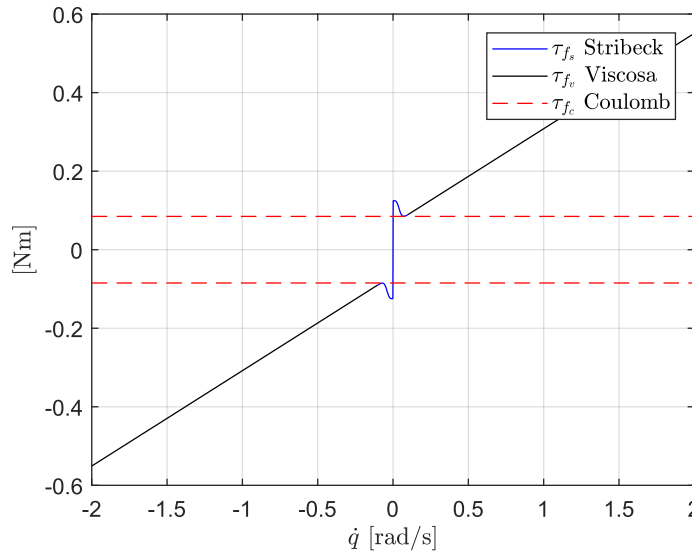


Figura 3.4. 16: Gráfica del torque de fricción.

Con esto, se tiene una propuesta sólida que será implementada al modelo dinámico y que permitirá la comparación de los datos experimentales obtenidos con respecto a los datos de la simulación del modelo, por lo que en el planteamiento de la ecuación de Lagrange empleada para la metodología del estudio, se tiene que τ_f corresponde al modelo de fricción planteado por el término F_s .

3.5 Conclusiones

Durante el desarrollo de la metodología, ha sido posible observar como el planteamiento del comportamiento de cada elemento afecta a la obtención del modelo dinámico. Es también posible observar cómo al modificar la forma en que se describe un elemento de manera matemática es posible obtener no solo uno, sino diversos modelos dinámicos, por lo que es importante tener un método para comprobar la calidad del modelo dinámico con el que se trabaja. El método más fácil de plantear sería por medio de la comparación de los resultados experimentales con los obtenidos de una simulación de este, lo cual es relativamente fácil de lograr con los conocimientos adecuados de programación y el empleo de un software matemático adecuado. A parte de esto, es importante observar que, al emplear la ecuación de Lagrange, es posible obtener un modelo dinámico a partir del planteamiento de las ecuaciones de energía del sistema y que el uso de esta ecuación permite la integración de un modelo de fricción, que en este caso es el modelo que se plantea desde cero para describir el comportamiento de los fenómenos observados y cuya calidad podrá ser comprobada en los resultados experimentales del estudio.

Capítulo 4: Compensación de fricción en el algoritmo de control

Un aspecto que se ha ido desarrollando a la par de la tecnología es la capacidad de controlarla, dado que se considera que van de la mano para permitir avances más eficientes. Se han desarrollado numerosos modelos que dependen de la identificación y el control de elementos y constantes mecánicas de cada sistema, y también modelos de descripción de fricción, tanto nuevos como modificados a partir de modelos ya existentes. Dado que los robots suelen ofrecer un campo de estudio amplio para formular problemas teóricos y prácticos relacionados con su funcionamiento, no es de extrañar que el control de estos mecanismos se haya visto estudiado de forma extensa por diversos investigadores.

El contar con un algoritmo de control eficiente y robusto que permita a un robot realizar tareas con precisión, alta repetibilidad y velocidad de operación resulta una ventaja altamente deseada en cualquier mecanismo y que por la complejidad de su desarrollo a menudo puede ser apreciada únicamente en robots y sistemas industriales. De esta manera, con un control robusto adecuado, se pueden realizar tareas complejas y peligrosas que permiten mejorar los procesos y que estos sean realizados de manera automatizada.

En la actualidad se tienen diversos controladores de alto desempeño que cumplen con las expectativas establecidas para los sistemas robóticos de la industria y que a su vez sirven como base para el desarrollo de nuevos y mejorados algoritmos de control.

4.1 Control de posición del robot

Como se mencionó con anterioridad, el desarrollo de avances en los estudios de fricción en robots manipuladores ha dado lugar a la compensación de sus efectos para mejorar la calidad de los controles de los mecanismos. Esto ha ayudado al desarrollo de una serie de modelos y herramientas para el estudio de los fenómenos físicos de diversos elementos mecánicos y mecatrónicos que pueden formar parte de la estructura de un robot.

Es necesario mencionar que entre los controles existentes más usados y que son capaces de llenar los requerimientos necesarios para su uso de manera industrial el más conocido es el algoritmo de control PD clásico y algunas de sus variaciones, el cual constituye una buena base para el diseño y mejora de un modelo de control adecuado.

El control de posición de un robot manipulador se basa en la introducción por parte de un usuario de una entrada de datos (formada por una coordenada) que por medio de su procesamiento en el control permite ajustar la posición del robot con respecto a un marco de referencia establecido. Para que esto funcione de manera correcta, el control generalmente se encuentra basado en la magnitud de los errores de posición en tiempo real y que se va reduciendo por la acción de control hasta alcanzar un error lo suficientemente pequeño como para poder ser despreciado o considerado como nulo.

Así pues, el problema de un control de posición se resuelve con el diseño de una ley de control que proporcione (para un sistema de transmisión directa o que actúe de manera similar a uno) una entrada de par de control que resulte adecuada para los servomotores del robot, de manera que su posición y su velocidad tiendan asintóticamente hacia una posición deseada (\mathbf{q}_d) y una velocidad cero ($\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$), lo cual puede ser representado como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

A esta ecuación (4.1.1) normalmente se le conoce como atractor del sistema dinámico y debe existir y ser único para que el control a lazo cerrado sea estable y se considere como un control de posición. De manera alternativa, se puede representar este atractor en términos de la posición deseada y la posición real del robot, lo cual resulta en una nueva variable denominada como *error* y que se representa como:

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}(t) \quad (4.1.2)$$

Con lo que la ecuación del atractor de un control de posición puede ser representado como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

Esta última representación suele ser adecuada para simplificar el análisis de estabilidad de una ley de control de posición, dado que facilita el análisis de los puntos de equilibrio del sistema, dando como origen un único punto de equilibrio que se ubica en el origen de nuestro sistema [19].

A continuación, se realiza un breve desarrollo del control de robot original del robot, el cual resulta ser un control de posición basado en una tangente hiperbólica, lo que permite tener una acción de control acotada a manera de evitar que sobrepase los límites físicos de los motores al proporcionar el par adecuado. Adicionalmente este tipo de controles tienen un sustento científico bien definido, desarrollado y justificado en la literatura que se basa en su capacidad de operar un actuador en la parte lineal de la gráfica de caracterización de este, lejos de los límites de saturación que podrían generar otro tipo de fenómenos físicos que tienden a alterar la precisión de los sistemas [19-20].

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

Se tiene el siguiente diagrama a bloques (figura 4.1.1) en la cual se ve la lógica empleada para cerrar los lazos de control del sistema, obteniendo de esta forma lo que anteriormente denominamos control de posición.

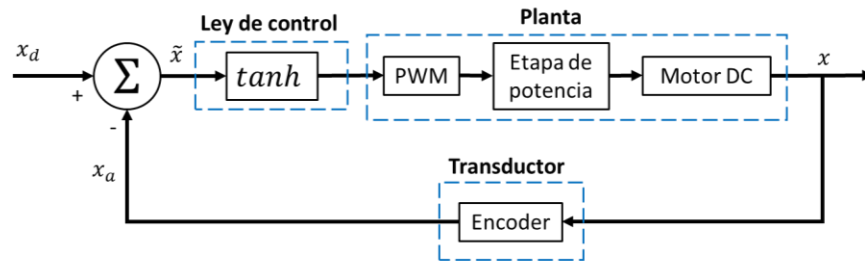


Figura 4.1. 1: Lazo cerrado de control de posición con retroalimentación de posición.

En este diagrama a bloques es posible observar también que la retroalimentación de la posición ocurre por medio del sensor del robot (en este caso el encoder del motor), lo que permite obtener la variable denominada como *error*, la cual constituye la base de nuestra ley de control y del atractor correspondiente a su punto de equilibrio. Sin embargo, esto por sí solo no es suficiente para el tipo de control que se maneja (Proporcional-Derivativo modificado con tangente hiperbólica) por lo que es necesario agregar una acción al control para realimentar no solo la posición, sino también la velocidad del sistema.

Es importante notar que, al involucrar la velocidad, se obtiene un control más complejo donde se empieza a generar una regulación basada en dos variables de entrada en contraste con un control más simple, como lo sería en control proporcional el cual solo posee una variable de entrada. Esto genera que el control desarrollado sea más robusto, dado que, a pesar de la complejidad, permite mejorar sus características y su eficiencia.

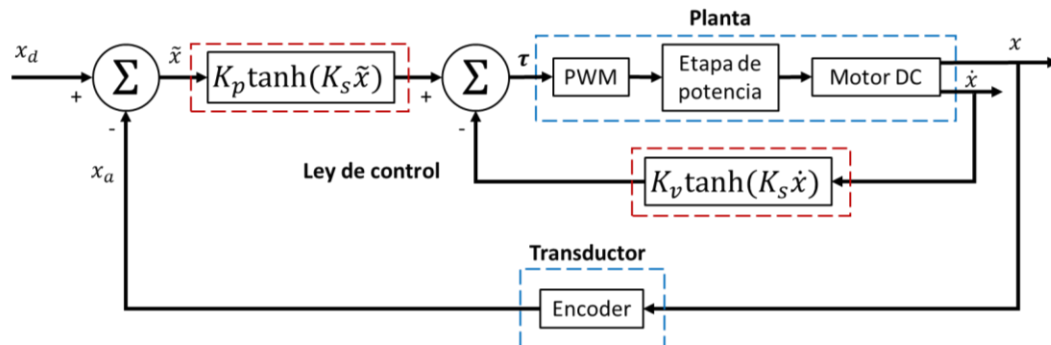


Figura 4.1. 2: Lazo cerrado de control de posición con retroalimentación de posición y de velocidad.

En el diagrama 4.1.2 se observa que se tiene la retroalimentación de la posición y la velocidad del robot, con lo que obtenemos una ley de control más compleja dada por la ecuación 4.1.4:

$$\tau = K_p \tanh(K_s \tilde{x}) - K_v \tanh(K_s \dot{x}) \quad (4.1.4)$$

donde,

- K_p es la ganancia proporcional y es definida positiva.
- K_v es la ganancia derivativa y es definida positiva.
- K_s es la pendiente del control tangente hiperbólica $\tanh(K_s \tilde{x})$ y de la acción derivativa $\tanh(K_s \dot{x})$ y es definida positiva.
- \tilde{x} es el error de posición, definido como la diferencia entre la posición deseada y la posición actual, es decir, $\tilde{x} = x_d - x_a$.
- \dot{x} es la velocidad de movimiento que se emplea para inyección de amortiguamiento.
- $K_p \tanh(K_s \tilde{x}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = 0$.
- $K_v \tanh(K_s \dot{x}) = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = 0$.
- $K_p \tanh(K_s \ddot{x}) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} = 0$.

La velocidad se calcula mediante la ecuación 4.1.5:

$$\dot{x}(k) = \frac{x(k) - x(k-1)}{h} \quad (4.1.5)$$

donde,

- $x(k)$ es la posición actual.
- $x(k-1)$ es la posición anterior.
- h es la frecuencia de muestreo, para este caso es igual a $2.5ms$.

Para implementar esta ley de control en el sistema, se tiene que implementar una metodología conjunta con el firmware del sistema, que permita obtener las mediciones requeridas para procesar la ley de control y dar una entrada de energía al sistema. Esto se logra mediante una lógica bien definida consistente en obtener la posición actual del motor por medio de la lectura del encoder y de esta forma obtener el error por medio de una resta con la posición deseada. De esta forma se puede procesar la primera parte de la ley de control. Para la siguiente parte es necesario obtener la posición actual y la posición anterior, lo que permite calcular de manera numérica la velocidad del sistema y de esta forma procesar la segunda parte del modelo de control. De esta forma, la ley de control es capaz de dar una cantidad de torque en base a las dos entradas y de esta forma regular el sistema en lazo cerrado y que forma la base del control del robot sobre el que se trabajará para diseñar una mejora que incluya la compensación de la fricción.

Adicionalmente al control empleado de momento, se tiene una propuesta de control que se puede integrar al control actual y que sirve para poder controlar la velocidad de movimiento

de los ejes del sistema. Este control corresponde a un control de velocidad *auto sintonizable*, cuyo algoritmo de control se encuentra definido en la ecuación 4.1.6:

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_{i-1} + K_p \tanh(K_s \dot{\boldsymbol{x}}) \quad (4.1.6)$$

donde:

- K_p es la ganancia proporcional y es definida positiva.
- K_s es la matriz diagonal definida positiva que representa la pendiente de la función $\tanh(K_s \dot{\boldsymbol{x}})$.
- $\dot{\boldsymbol{x}}$ es el error de velocidad, definido como la diferencia entre la velocidad deseada y la velocidad actual, es decir, $\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{x}}_d - \dot{\boldsymbol{x}}_a$.
- $K_p \tanh(K_s \dot{\boldsymbol{x}}) = 0 \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{x}} = 0$.

Para este control se tiene igualmente una retroalimentación, esta vez de la velocidad de los ejes, lo que permite manejar el error de *velocidad* y de esta forma hacer el control más seguro al controlar posición y velocidad del sistema. Esto también permite determinar de mejor manera la cantidad de torque necesaria para controlar el sistema de acuerdo con la sintonización de las tres partes del control. La parte de control de velocidad es vital para los experimentos que se requieren de fricción, puesto que la mayoría de los fenómenos se presentan a velocidades muy bajas, por lo que la regulación de la velocidad nos permite mantener el funcionamiento del robot en un rango adecuado para la observación de dichos fenómenos.

4.2 Control de trayectoria

Cuando se habla de pasar de un control de posición a un control de movimiento, el tema se considera como uno de los más importantes de la robótica. Un control de trayectoria, se puede decir que representa el problema más general de control en robots y su aporte a la robótica consiste en la capacidad de realizar movimientos de alta velocidad y con alto grado de exactitud que a menudo no son posibles de lograr con un control de posición.

Un control de movimiento se encarga de manipular al robot para que se mueva libremente en su espacio de trabajo siguiendo una trayectoria deseada en posición y velocidad sin necesidad de interactuar con su medio ambiente.

Una diferencia fundamental entre un control de posición y un control de trayectoria o de movimiento, es que este último incluye la dinámica completa del robot manipulador en la estructura matemática del controlador, es decir, se basa en el modelo dinámico del robot. Es por esto, que el diseño y realización de uno de estos controladores es mucho más complejo y es por esto también por lo que la nueva ley de control adquiere una exactitud, desempeño y robustez que dependen del grado de precisión con que se conozcan los parámetros dinámicos que se involucran en la descripción matemática del modelo dinámico del robot.

El control de movimiento de robots manipuladores ha sido estudiado de manera extensa y amplia mediante el uso de simulaciones. A pesar de ello, se tiene poca información cotejada de manera real en robots reales, por lo que la evaluación experimental de controladores basados en el modelo de un robot se vuelve un problema de origen práctico que es bien evidente en la literatura científica.

Una propuesta ya estudiada de control de trayectoria consiste en el control PD+. Este tipo de control representa un algoritmo que incluye un control proporcional del error de posición, un control proporcional del error de velocidad y la dinámica completa del robot [22]

La ecuación de control PD+ está dada por la ecuación 4.2.1:

$$\tau_{pd} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.2.1)$$

Como es observable en la ecuación, para poder aplicar este tipo de control a un mecanismo, es necesario conocer el modelo dinámico del robot con el que se está trabajando, lo que implica conocer el valor numérico de sus parámetros dinámicos. La ecuación a lazo cerrado involucra el modelo dinámico y el esquema de control PD+.

Generalizando la representación de un modelo dinámico para un robot cartesiano de n grados de libertad, se tiene que:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.2.2)$$

donde:

- \mathbf{q} es el vector de posiciones del robot.
- $\dot{\mathbf{q}}$ corresponde al vector de velocidades del robot.
- $\ddot{\mathbf{q}}$ es el vector de aceleraciones del robot
- $M(\mathbf{q})$ es la matriz de masas e inercias del robot
- B corresponde a la matriz de coeficientes de fricción viscosa del mecanismo.
- $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es el vector de pares gravitatorios del robot.

Adicionalmente, se establece que $\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d$ son funciones vectoriales que representan la posición, velocidad y aceleración deseadas de manera respectiva, por lo que el problema de control de movimiento se puede expresar como la capacidad de hallar una función vectorial $\boldsymbol{\tau}$ tal que las posiciones y velocidades asociadas al robot sigan con exactitud a las posiciones y velocidades deseadas respectivamente, lo que se expresa de forma matemática con la ecuación 4.2.3.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

donde:

- $\tilde{\mathbf{q}}$ es el error de posición definido como:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t) \quad (4.2.4)$$

- $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ corresponde al vector de error de velocidad definido como:

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (4.2.5)$$

Al representar el lazo cerrado de control del control PD+, se tiene que este posee estabilidad asintótica, lo cual puede ser referenciado en diversos trabajos [19, 21], y cuya ecuación a lazo cerrado puede ser representada como en la ecuación 4.2.6.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ -M^{-1}(\mathbf{q})[K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + B\dot{\tilde{\mathbf{q}}}] \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

Esta ecuación, de acuerdo con lo referenciado, posee un punto de equilibrio en el origen $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = \mathbf{0}$. El análisis de esta ecuación también arroja que el control es asintóticamente estable y por tanto aplicable para los propósitos que nos atañen, por lo cual solo se le realiza una modificación, cambiando la acción de los vectores de posiciones, velocidades y errores del sistema por la función *tanh*, la cual le da la característica al control de volverlo acotado.

Con esto, la ecuación del control de trayectoria propuesto quedaría como en la ecuación 4.2.7.

$$\boldsymbol{\tau}_{pd} = K_p \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) + K_v \tanh(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.2.7)$$

Esta propuesta también se encuentra referenciada, por lo que su uso es aceptable para los propósitos del estudio [20].

4.3 Compensación de la fricción en el algoritmo de control

La siguiente parte es consistente en seguir mejorando el algoritmo principal de control. En este caso se está proponiendo empezar mejorando el control de posición, al cual se le tienen que agregar las partes correspondientes a la compensación de fricción. Para esto, es necesario identificar las partes de fricción en el modelo dinámico obtenido, lo cual se ha

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

realizado a nivel simulación, obteniendo los siguientes términos correspondientes al modelo dinámico de fricción del sistema:

$$F_{si} = \tau_{fsi} + k_{ci}\text{sign}(\dot{X}_{ti}) + b_i\dot{X}_{ti} \quad (4.3.1)$$

donde:

$$\tau_{fsi} = \frac{1}{4}s_{ti1}[\text{sign}(\dot{X}_{ti}) + 1] \left[1 - \tanh\left(k_i(\dot{X}_{ti} - s_{hi1})\right) \right] - \frac{1}{4}s_{ti2} \left[1 - \text{sign}(\dot{X}_{ti}) \right] \left[1 + \tanh\left(k_i(\dot{X}_{ti} + s_{hi2})\right) \right] \quad (4.3.2)$$

es la propuesta de modelo para la fricción de Stribeck.

Con estos términos identificados, se tiene que recordar que de momento el modelo dinámico se tiene como:

$$MODELO \text{ DINÁMICO} + F_s = \tau$$

Esto facilita la implementación de la ley de control, puesto que se tiene que:

$$LEY \text{ DE CONTROL} = \tau$$

Con esto, se puede igualar los torques de ambas partes, teniendo entonces el lazo cerrado con control representado como como:

$$LEY \text{ DE CONTROL} = MODELO \text{ DINÁMICO} + F_s$$

Con esto, se tiene que, al identificar los términos de fricción, se puede proponer la compensación como:

$$LEY \text{ DE CONTROL} - F_s = MODELO \text{ DINÁMICO IDEAL}$$

Así pues, se tiene la propuesta del control de posición con la primera compensación de fricción como:

$$\tau = K_p \tanh(K_s \tilde{x}) - K_v \tanh(K_s \dot{x}) - F_s \quad (4.3.3)$$

Es importante notar, que mientras del control de posición depende de la posición del motor (encoder), la propuesta de los términos de fricción depende de la velocidad *lineal* de la mesa de trabajo, por lo que se tienen dos opciones para la implementación el control:

- Cambiar el control de posición para que se base en la posición final del tornillo embalado (la cual se da en mm). Esto permitirá tener la posición y velocidad de la mesa de trabajo y basar el control de posición en dicha información, con lo que el torque inyectado en el sistema será una función que depende de la posición y velocidad de dicha variable.
- Desarrollar una equivalencia entre la velocidad de la caja de engranes y la velocidad lineal de la mesa de trabajo.

Por cuestiones de integración, se decidió que la primera propuesta era más adecuada, puesto que al usuario le interesa más el resultado del efector final ya traducido a coordenadas cartesianas, en vez de la posición angular del motor. Por este motivo el control que se tiene implementado se basa en la posición deseada de la mesa de trabajo, dada en *mm*, para lo cual el programa y el firmware del robot realizan la conversión entre la posición del motor y la posición de la parte final, por lo que es posible adoptar dicha propuesta de control.

Con esto, nuestra función de torque propuesto para el control de posición a implementar quedaría como:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tanh(K_s \tilde{\mathbf{X}}_{ti}) - K_v \tanh(K_s \dot{\mathbf{X}}_{ti}) - F_{si} \quad (4.3.4)$$

Con lo que se tendría que:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tanh(K_s \tilde{\mathbf{X}}_{ti}) - K_v \tanh(K_s \dot{\mathbf{X}}_{ti}) - \tau_{fsi} - k_{ci} \text{sign}(\dot{\mathbf{X}}_{ti}) - b_i \dot{\mathbf{X}}_{ti} \quad (4.3.5)$$

Con esto, se tiene que el torque total que se provee por medio del funcionamiento del PWM está regulado por las funciones de fricción que se han estudiado, correspondientes a la función de fricción de coulomb, la función correspondiente a la fricción viscosa de la mesa de trabajo y la función de fricción que describe el efecto de Stribeck.

Sin embargo, aunque esta propuesta puede servir para probar la compensación de la fricción, está limitada por la naturaleza de control de posición del controlador, por lo que se plantea un control de trayectoria con el mismo tipo de compensación. Para ello, se tiene la representación general del modelo dinámico del robot en la ecuación 4.3.6.

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + F_s(\dot{\mathbf{q}}) \quad (4.3.6)$$

Por otro lado, se tiene la ley de control de trayectoria propuesta en la ecuación 4.2.7:

$$\tau_{cpd} = K_p \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) + K_v \tanh(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.3.7)$$

Al igualar ambas ecuaciones (4.3.6 y 4.3.7) para representar el lazo cerrado de control, se tiene que:

$$K_p \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) + K_v \tanh(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + F_s(\dot{\mathbf{q}}) \quad (4.3.8)$$

Pasando la acción del modelo de fricción del lado de control, se tiene que:

$$K_p \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) + K_v \tanh(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - F_s(\dot{\mathbf{q}}) = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.3.8)$$

Observando que el lado derecho de la ecuación corresponde al modelo ideal de nuestro robot, entonces la propuesta de la ley de control de trayectoria con compensación quedaría como:

$$\tau_{cpd} = K_p \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) + K_v \tanh(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - F_s(\dot{\mathbf{q}})$$

Donde

$$F_{si} = \tau_{fsi} + k_{ci} \text{sign}(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + b_i \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (4.3.9)$$

donde:

$$\tau_{fsi} = \frac{1}{4} s_{ti1} [\text{sign}(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + 1] \left[1 - \tanh(k_i(\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - s_{hi1})) \right] - \frac{1}{4} s_{ti2} [1 - \text{sign}(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \left[1 + \tanh(k_i(\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + s_{hi2})) \right] \quad (4.3.10)$$

es la propuesta de modelo para la fricción de Stribeck, con $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{X}_{ti}$

Al analizar más a fondo la propuesta, se tiene que:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = -K_p \tanh(K_s \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \tanh(K_{sv} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - B\dot{\mathbf{q}}_d - (F_s(\dot{\mathbf{q}}_d) - F_s(\dot{\mathbf{q}})) \quad (4.3.11)$$

Esta última ecuación se demuestra que siempre que los términos sean positivos, la estabilidad del control existe y es asintótica, por lo que el controlador es correcto y puede ser implementado en el robot, siendo este control de trayectoria basado en el control PD+

modificado con una tangente hiperbólica para volver la respuesta del control acotada dentro de los límites de los motores el implementado en el robot para mejorar su funcionamiento [21].

4.4 Conclusiones

El control es una parte importante de la robótica y como tal es necesario tomar en cuenta el trabajo desarrollado en esta área al realizar trabajos y estudios sobre un sistema mecánico robótico. Aunque existe gran cantidad de mejoras realizadas sobre controladores, siempre es posible añadir aportaciones, puesto que se siguen desarrollando máquinas más avanzadas que requieren (por su uso y aplicaciones) de mayor precisión, exactitud, repetibilidad, etc. lo cual solo es posible lograr con la implementación de controles robustos.

Para los sistemas industriales es importante tener en cuenta el manejo de los controles de movimiento, los cuales, a pesar de ser complejos, aumentan enormemente las características benéficas del control, lo que permite una gran mejora en el uso del robot y esto aunado con la implementación de compensaciones de fenómenos (en este caso la compensación de fricción) habilita a los implementadores a mejorar el funcionamiento de mecanismos robustos.

Capítulo 5: Resultados experimentales

Otro punto importante en los estudios de fricción es que es sabido que a pesar de que existen una gran de trabajos científicos que estudian este fenómeno en la literatura de algoritmos de control para robots de diversos tipos, una gran parte de estos estudios se enfocan en resultados obtenidos únicamente a través de simulaciones generadas con la ayuda de diversos softwares matemáticos. Mientras que esto no supone un error de metodología, se tiene que los pocos trabajos que comparan los resultados simulados con los reales tienen una mejor eficiencia de funcionamiento.

El uso de simulaciones para el estudio de los algoritmos de control es fundamental para las primeras etapas de diseño, sin embargo los resultados que se obtienen de estas es a menudo incompleto, debido a que se desprecian parámetros prácticos y reales que solo es posible apreciar durante las pruebas experimentales, como lo son las variaciones de las constantes mecánicas con respecto a sus contrapartes teóricas, el ruido de los sensores y a veces incluso los fenómenos más conocidos como lo son los efectos de la fricción. Es por esto por lo que este tipo de estudios cuentan con un valor limitado que no puede ser comparado con una investigación que incluye los resultados experimentales de un robot.

Es por esta razón que para las etapas de control correspondientes al trabajo desarrollado, se tiene primero una serie de resultados obtenidos de simulaciones y de la manipulación matemática del modelo a lazo cerrado del mecanismo, que incluye la ley de control y el modelo dinámico desarrollado y posteriormente se tiene la implementación de la ley de control y el lazo cerrado en el robot empleado para el estudio, lo que a la larga permitirá la validación del trabajo realizado y la extracción de conclusiones adecuadas con respecto a lo obtenido [22].

5.1 Resultados experimentales con control de posición sin compensación de fricción.

Al tener implementadas simulaciones tanto del modelo dinámico como del control y del sistema de lazo cerrado del robot, se tiene una gran ventaja de análisis, sobre todo por el uso del software matemático MATLAB, lo cual permite un análisis de datos simulados y reales [23].

Con la implementación física del lazo de control cerrado para posición, se obtuvieron los primeros resultados experimentales en el robot propio del estudio correspondiente a un CNC feed-drive de 3 grados de libertad. A continuación, se exponen los resultados obtenidos de dichas pruebas, para los correspondientes tres ejes.

Se inicia con la posición y el torque obtenidos del eje X , el cuál es el eje principal del robot y se encarga de cargar a los otros dos ejes. Como tal, se tiene que dicho eje tiene una gran carga, dado que se encarga de mover a los otros dos ejes en posición. El control de posición se hizo forzando al control de posición a seguir una señal sinusoidal de frecuencia 0.0625

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

Hz, lo que da un periodo de tiempo de 16 segundos para cada oscilación o ciclo de la señal. Se puede observar que la posición en X no alcanza a seguir por completo a la señal de entrada, con lo que se tiene una deformación de la señal, donde esta se achata en los extremos debido a que no alcanza a llegar a la posición deseada. De manera adicional, se tiene que la señal tiene mucho ruido, lo que se piensa esta causado por la fricción existente en el sistema (figura 5.1.1).

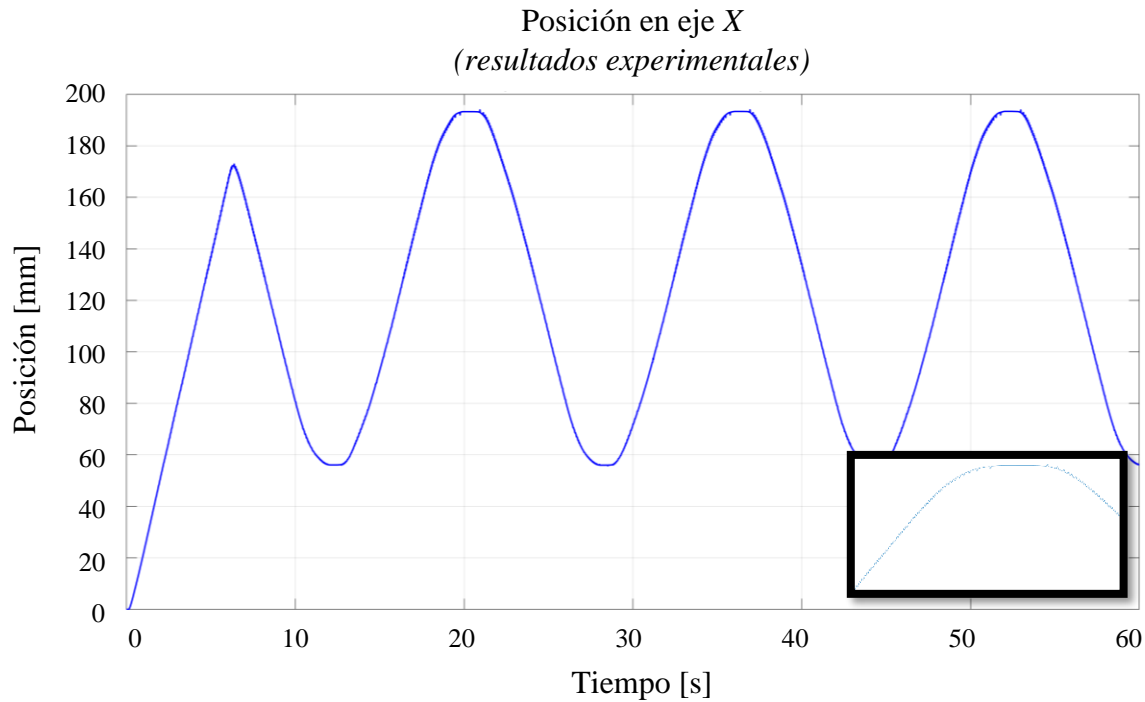


Figura 5.1. 1: Resultados de posición del eje X del CNC feed-drive.

En la siguiente imagen, se pueden observar los resultados obtenidos para el torque de este mismo eje. Se puede observar que se tiene una deformación significativa en la señal generada por el torque exigido por el controlador. Dichas deformaciones tienen similitud con las deformaciones que se estudiaron y que son causadas por el modelo de fricción en las simulaciones, por lo que se tiene una similitud que se estudiará más a fondo haciendo las comparaciones correspondientes con los resultados del modelo (figura 5.1.2).

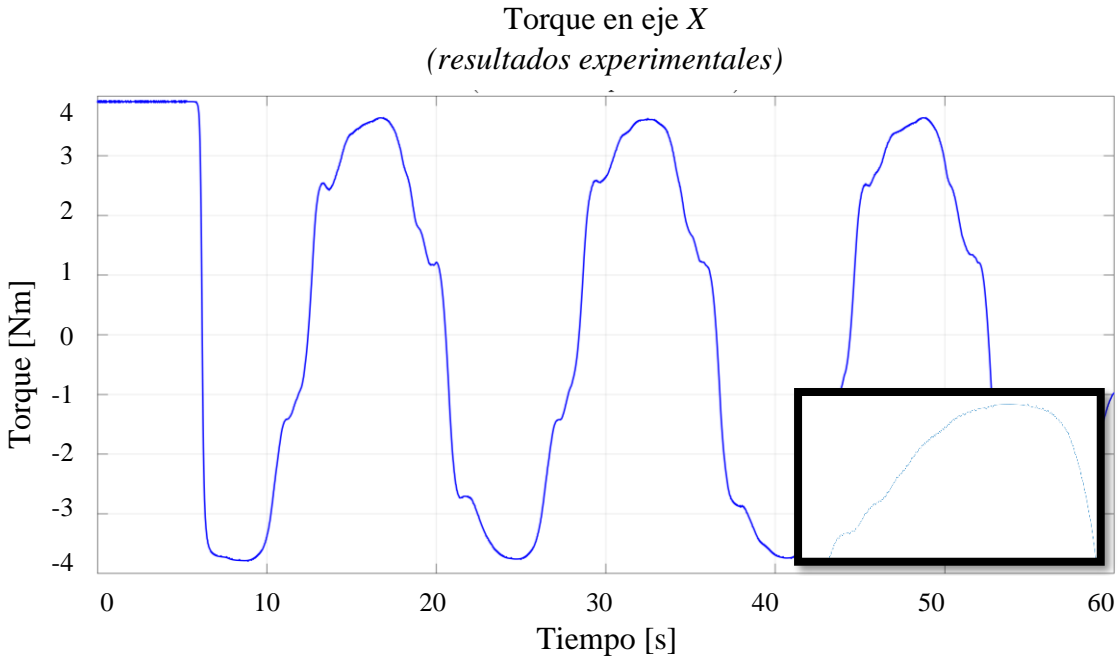


Figura 5.1. 2: Torque experimental del eje X del CNC feed-drive.

De manera similar, se generaron los resultados experimentales para el eje Y del CNC feed-drive. Se tiene que dichos resultados son similares a los del eje X, sin embargo, la deformación en las señales obtenidas (tanto en posición como en torque) es menor. Esto se atribuye a que el eje Y tiene una carga menor (sólo carga al eje Z del robot). Esto causa que la deformación sea menor y que por lo tanto el control de posición sea mejor. A pesar de esto, la deformación de la señal sigue siendo considerable (figuras 5.1.3 y 5.1.4).

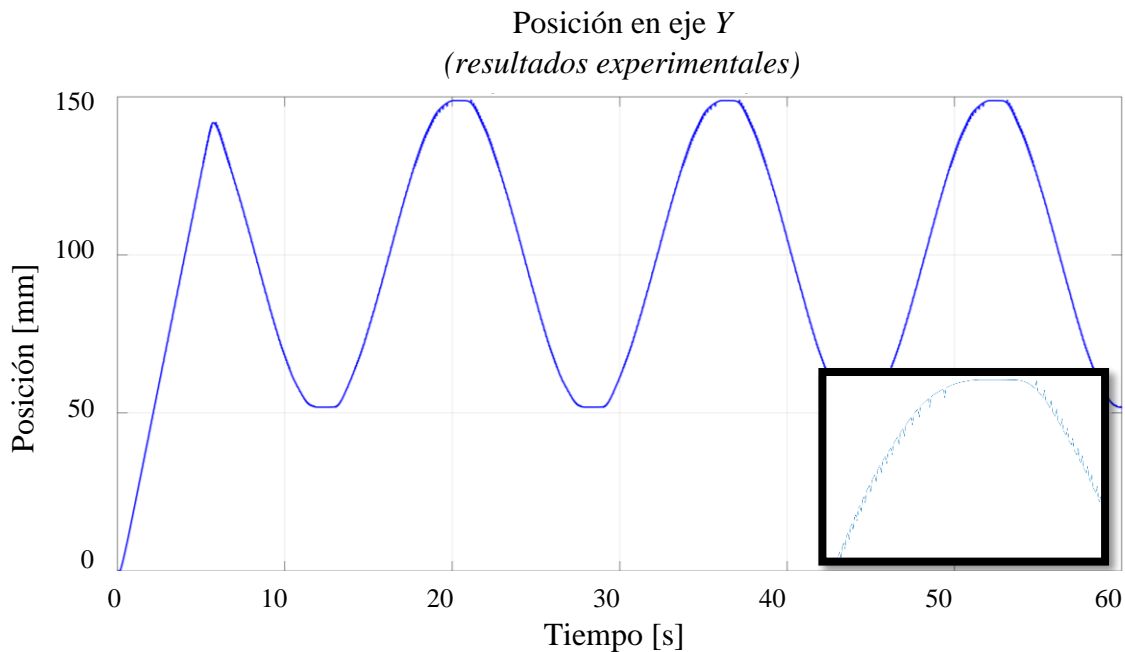


Figura 5.1. 3: Posición experimental del eje Y del CNC feed-drive.

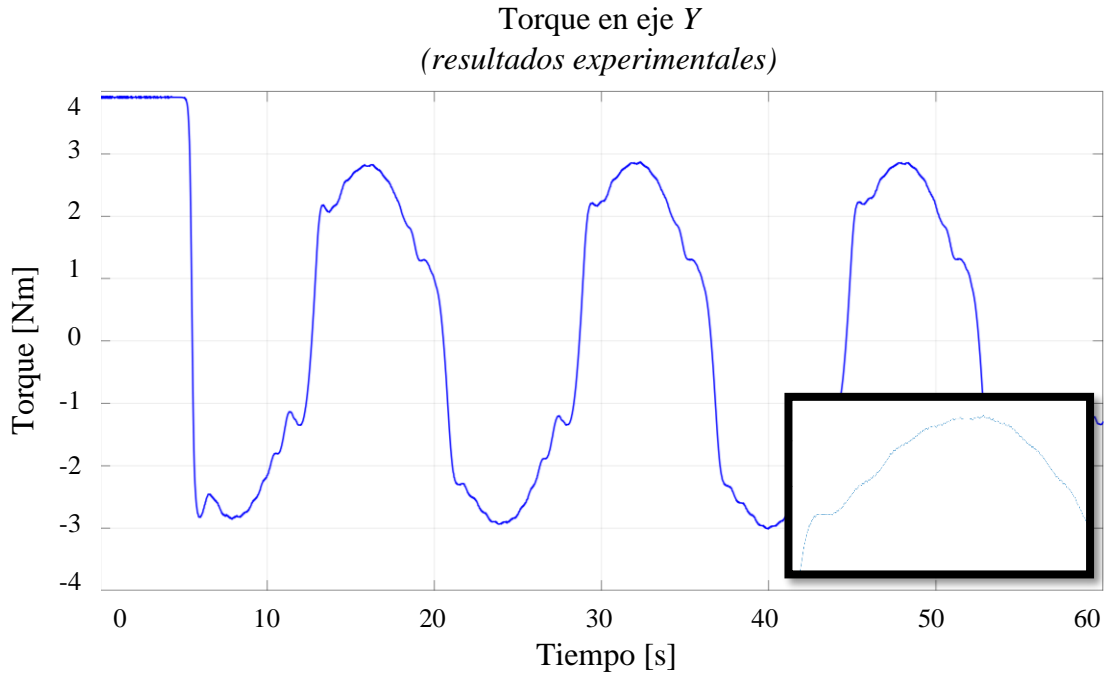


Figura 5.1. 4: Torque experimental del eje Y del CNC feed-drive.

Los últimos resultados experimentales obtenidos corresponden al eje Z, el cual tiene como carga únicamente el eyector de plástico que permite que el CNC feed-drive trabaje como impresora 3D. Esto implica una carga significativamente menor, por lo que se tiene que el resultado de la posición es el mejor y posee menos deformación de la señal. Esto se puede observar claramente en la figura 5.1.5, en la que se observa que la señal no se encuentra achatada de los extremos. Sin embargo, al igual que las otras, se tiene ruido que se cree es causado por la fricción existente en el eje.

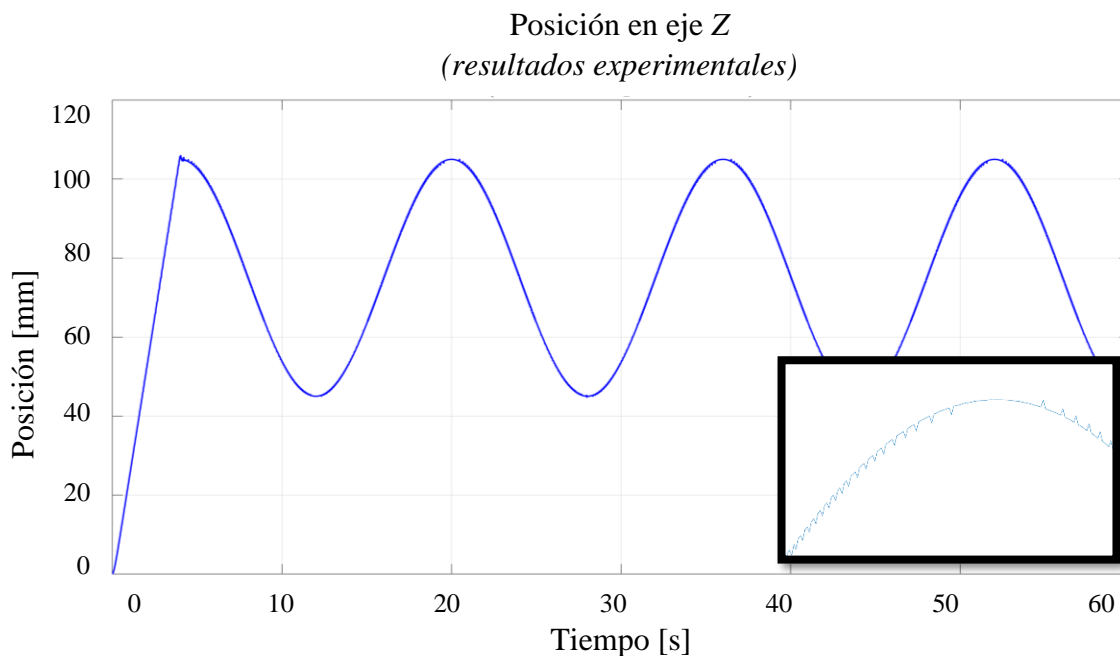


Figura 5.1. 5: Posición experimental del eje Z del CNC feed-drive.

En la siguiente imagen (figura 5.1.6) se observan los resultados experimentales del torque del eje Z. Se puede observar que contrario a los otros dos ejes, se tiene un exceso de ruido en la señal, que es causado probablemente tanto por el efecto de la fricción como por otras perturbaciones que no resultan de interés para el presente trabajo.

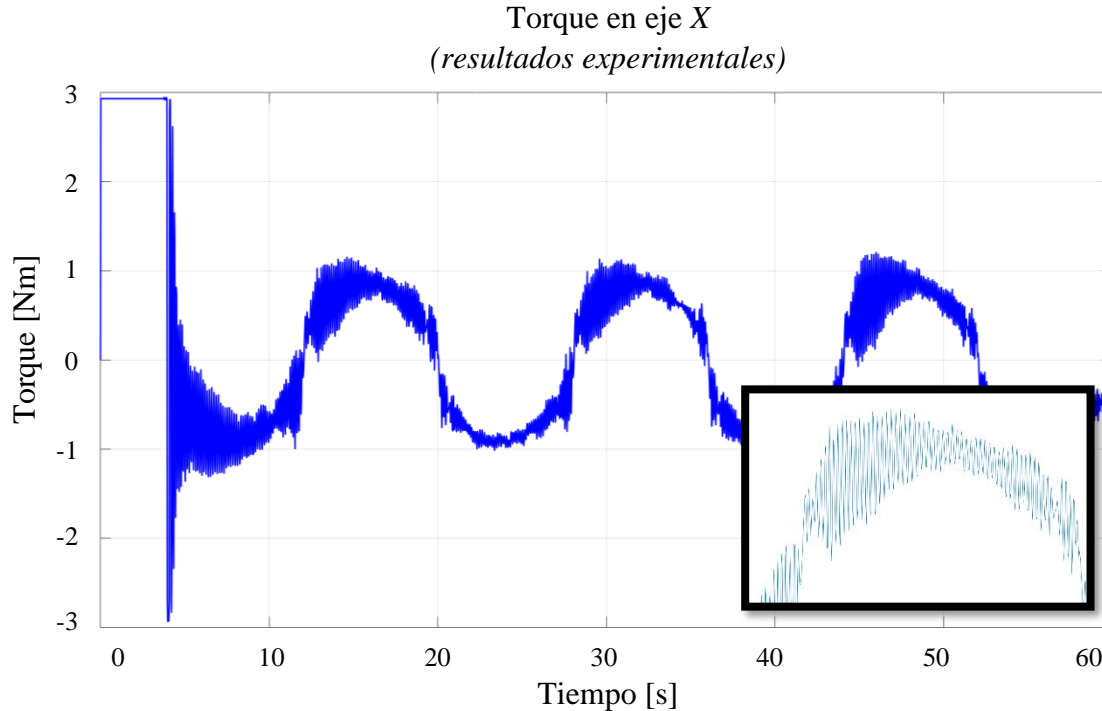


Figura 5.1. 6: Torque experimental del eje Z del CNC feed-drive.

Con estos resultados experimentales se tiene suficiente información para seguir con los estudios, lo cual implica seguir con la mejora del control y el planteamiento de la correspondiente compensación.

5.2 Resultados con compensación de fricción en el control.

De los datos analizados con anterioridad, es evidente que el control de posición por sí solo no resulta suficiente para alcanzar la posición deseada, sobre todo en los ejes X y Y del robot.

Es por ello por lo que se realizaron 3 ajuste con compensación: el control con compensación de la fricción de coulomb del sistema, el control con compensación de la fricción de coulomb y de la fricción viscosa y por último el control con compensación de la fricción de coulomb, de fricción viscosa y del efecto de Stribeck.

Para ello, se realizará el análisis para los tres ejes del robot, correspondientes a X, Y y Z.

5.2.1 Resultados obtenidos para el eje X

Se iniciará por discutir los resultados obtenidos en el eje X, los cuales se muestran a partir de la figura 5.2.1.1

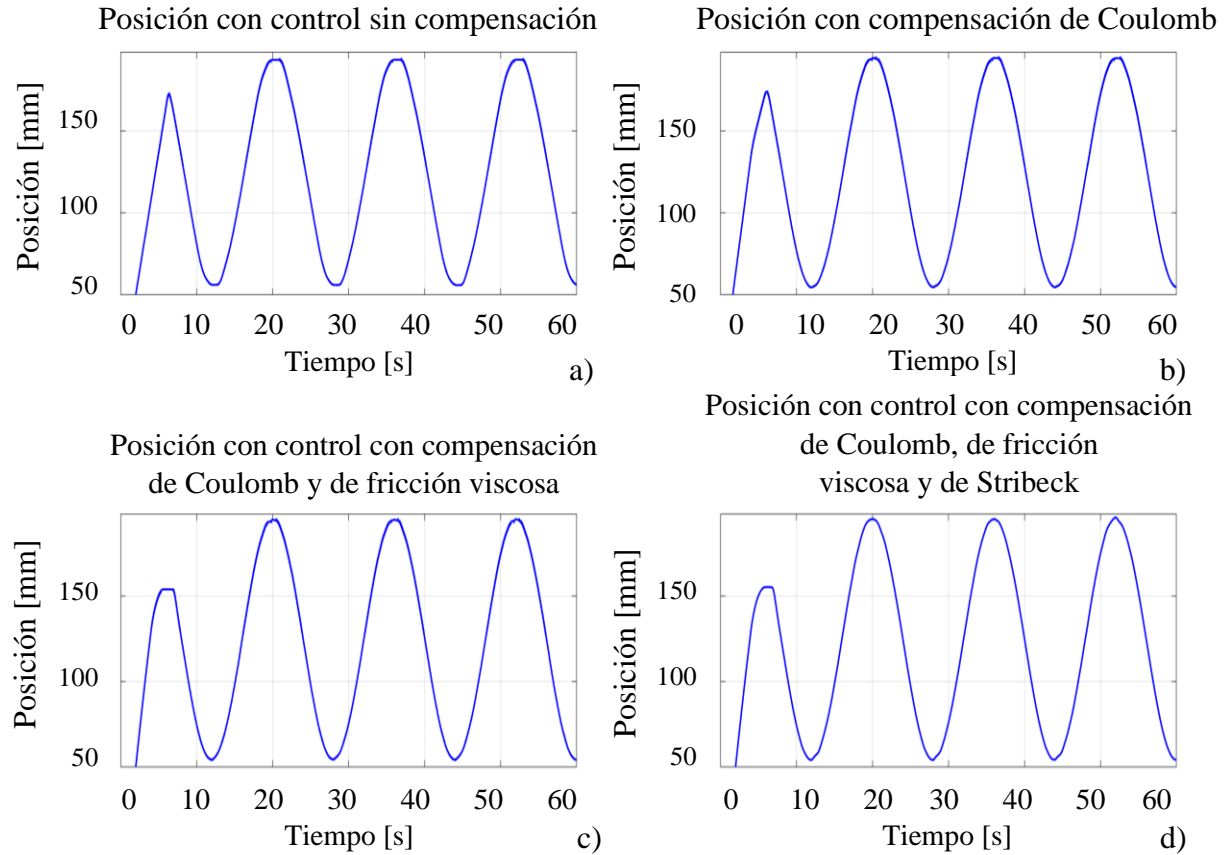


Figura 5.2.1. 1: Resultados de la posición en el eje X de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck.

En la imagen es posible observar que, para el control sin compensación, la posición deseada nunca es alcanzada, dado que cuando la velocidad se acerca a cero (al momento de que el eje tiene que cambiar de dirección), la energía proporcionada por el control no es suficiente para que se siga moviendo (a). Con la compensación de coulomb (b) la posición se acerca a la deseada con mayor nitidez y la mejora es evidente a simple vista. Con la adición de la compensación de la fricción viscosa (c), la posición mejora aún más y termina de acercarse a la posición deseada con el aumento de la compensación que se realizó para el efecto de Stribeck (d).

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

Los resultados también son observables en la velocidad del sistema (figura 5.2.1.2), en donde se ven mejoras conforme se agregan las compensaciones necesarias.

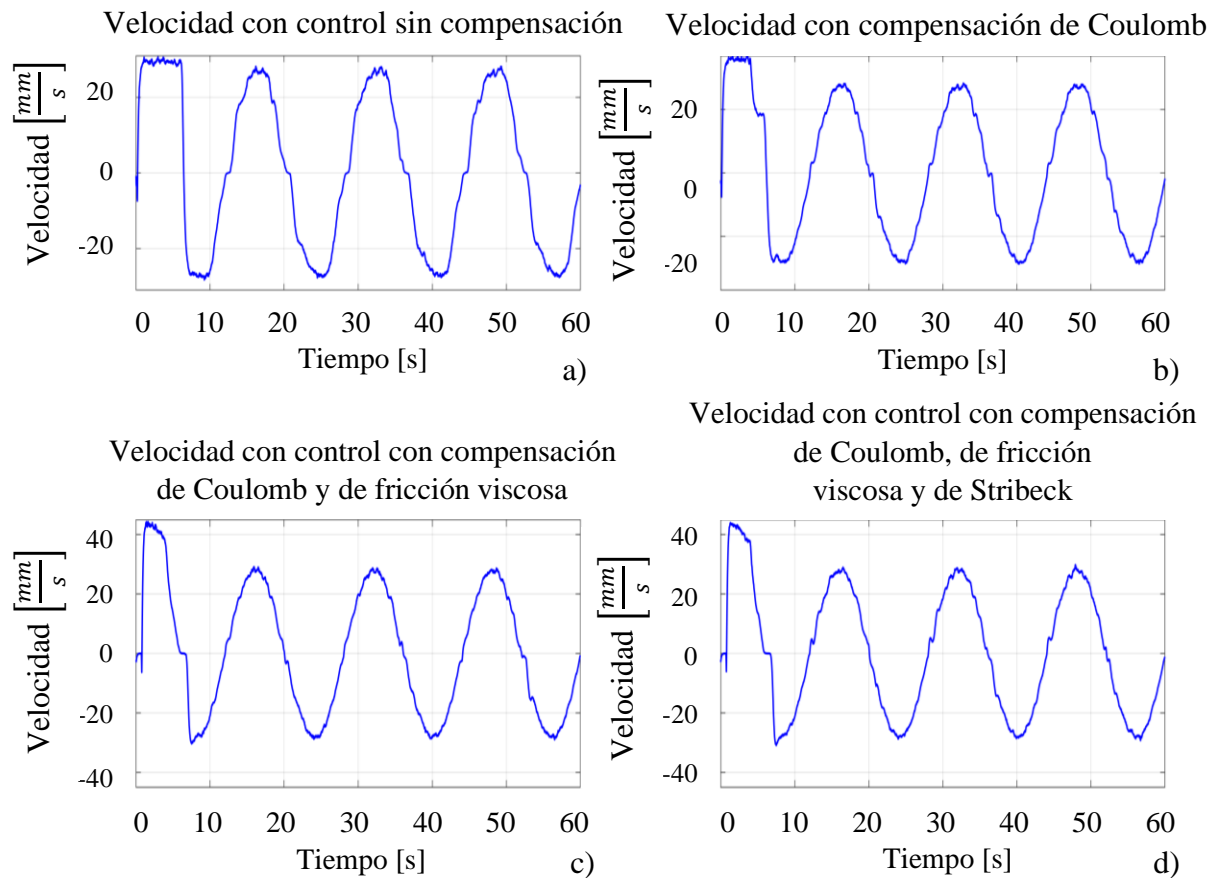


Figura 5.2.1. 2: Resultados de la velocidad en el eje X de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck.

En la primera parte de la imagen (a) se puede observar que la velocidad sin la compensación alcanza los 30 $\frac{mm}{s}$ y que posee deformaciones. Cuando se agrega la compensación de la fricción de coulomb (b), se tiene que la velocidad crece en el primer momento (que es cuando el error es más grande) y que después se estabiliza. Es evidente también que como la posición tiene menos deformaciones, la velocidad también sufre menores perturbaciones. Es el mismo caso para cuando se agrega la compensación de la fricción viscosa (c). En este caso, se tiene que las deformaciones son aún más pequeñas y que el robot alcanza velocidades mayores. Por último, con la compensación del efecto de Stribeck (d), se tiene que la velocidad sufre pocos cambios con respecto a las otras dos compensaciones, aun así, presenta una mejoría.

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

En cuanto al análisis del torque proporcionado al sistema, se tiene que ahora hay dos torques proporcionados: el torque del controlador y el torque de las compensaciones. Se iniciará por analizar el torque total proporcionado (torque de control más torque de compensación), lo que se puede realizar con las figuras 5.2.1.3 y 5.2.1.4, en donde se observa el torque contra el tiempo y contra la velocidad del eje.

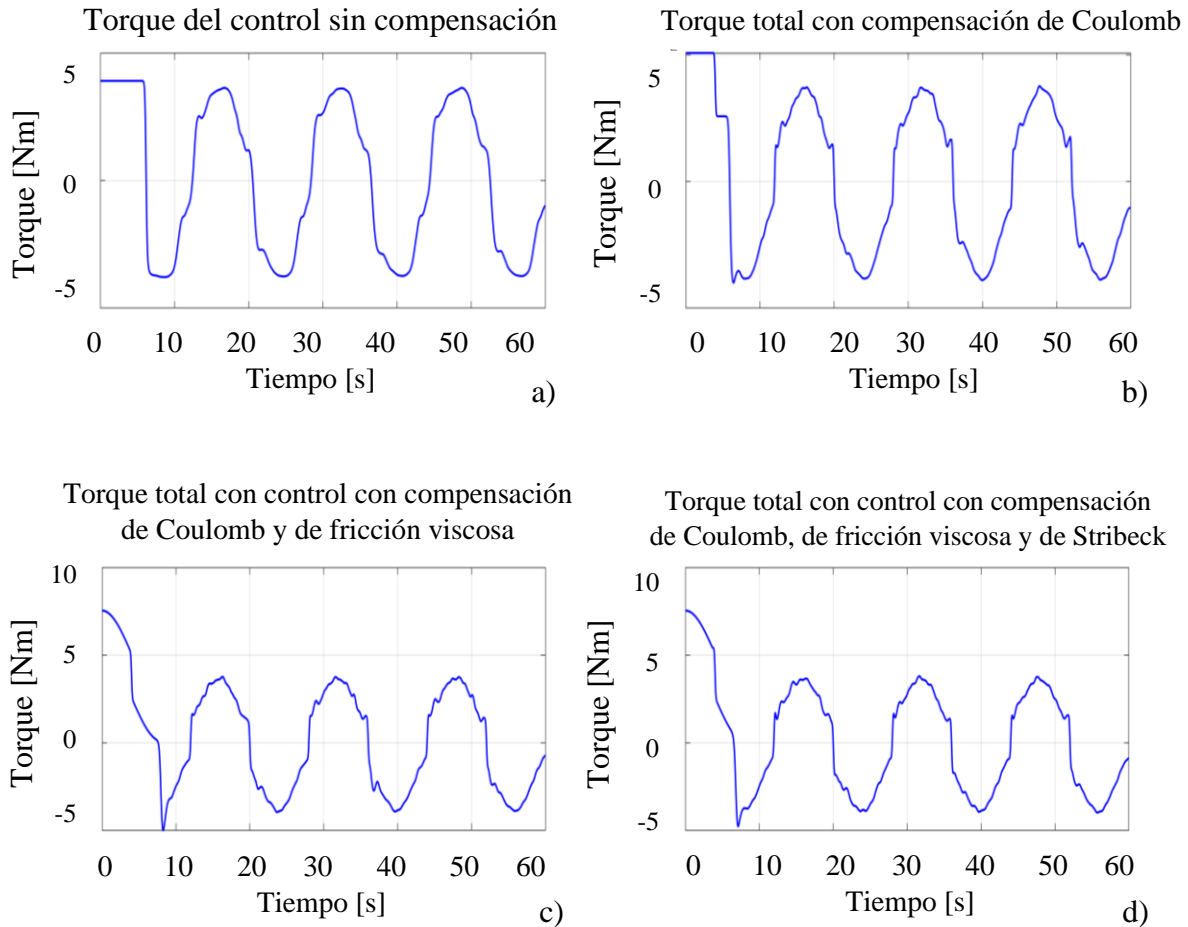


Figura 5.2.1. 3: Resultados del torque total vs tiempo en el eje X de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck.

En esta primera figura se puede observar el torque obtenido contra el tiempo de la simulación. En a) se tiene que el torque proporcionado por el control se encuentra deformado de manera notable, dado que no es simétrico y tiene curvas y picos. En la figura b) se observa como al agregar la compensación, la magnitud de las deformaciones disminuye, hecho que se repite también para c) y d). Es importante notar que la onda de torque sigue teniendo deformaciones y que estas no se van a quitar, dado que corresponden a fenómenos físicos que ocurren en el sistema y que tienen que ser solventados para que el robot se mueva de manera correcta.

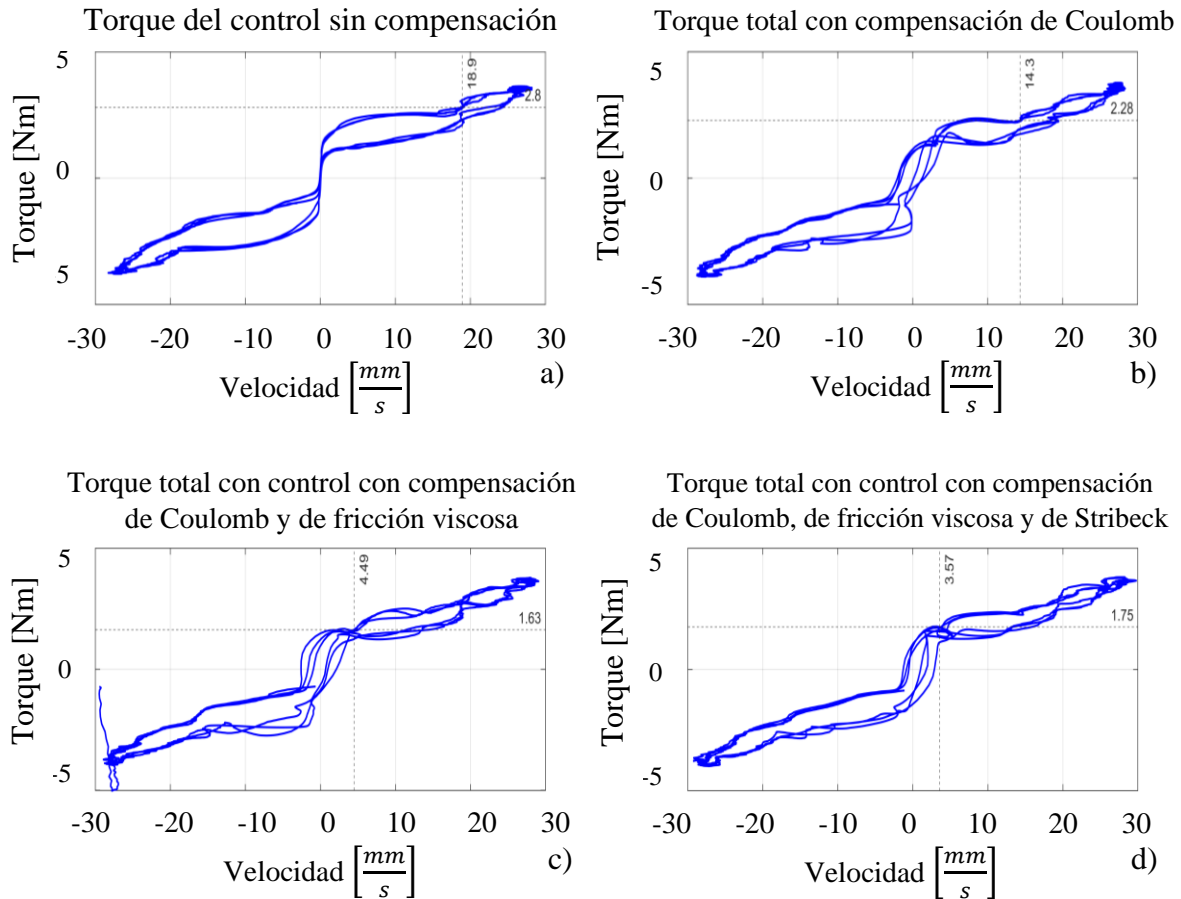


Figura 5.2.1. 4: Resultados del torque total en el eje X de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck.

En la primera figura (a) se tiene el torque total proporcionado, que en este caso corresponde de manera completa al control implementado, dado que no se tiene aún ninguna clase de compensación. Es posible observar cómo al poner el torque contra la velocidad del sistema, el efecto de Stribeck, el cual se discutió más a fondo en la sección 2.2 de la tesis, es visible con los datos recopilados. Se tiene en la gráfica que el torque llega a un punto máximo y luego desciende hasta la fricción de coulomb, desde donde empieza a aumentar conforme la velocidad crece. Al compensar la fricción de coulomb (b) se puede apreciar como esta curva se deforma y se acerca al origen y es observable el efecto de histéresis generado por la no linealidad del sistema. En la parte c) de la imagen, se tiene que el torque total entregado sigue acercándose al punto de origen de la gráfica y en la parte d) se tiene que el torque se estabiliza.

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

Adicionalmente, se puede observar como con cada compensación, el efecto de Stribeck disminuye de ancho, lo que indica que el robot posee un arranque más rápido conforme los efectos de las fricciones se compensan.

Ahora, analicemos el torque entregado únicamente por el control por medio de los resultados observables en las figuras 5.2.1.5 y 5.2.1.6.

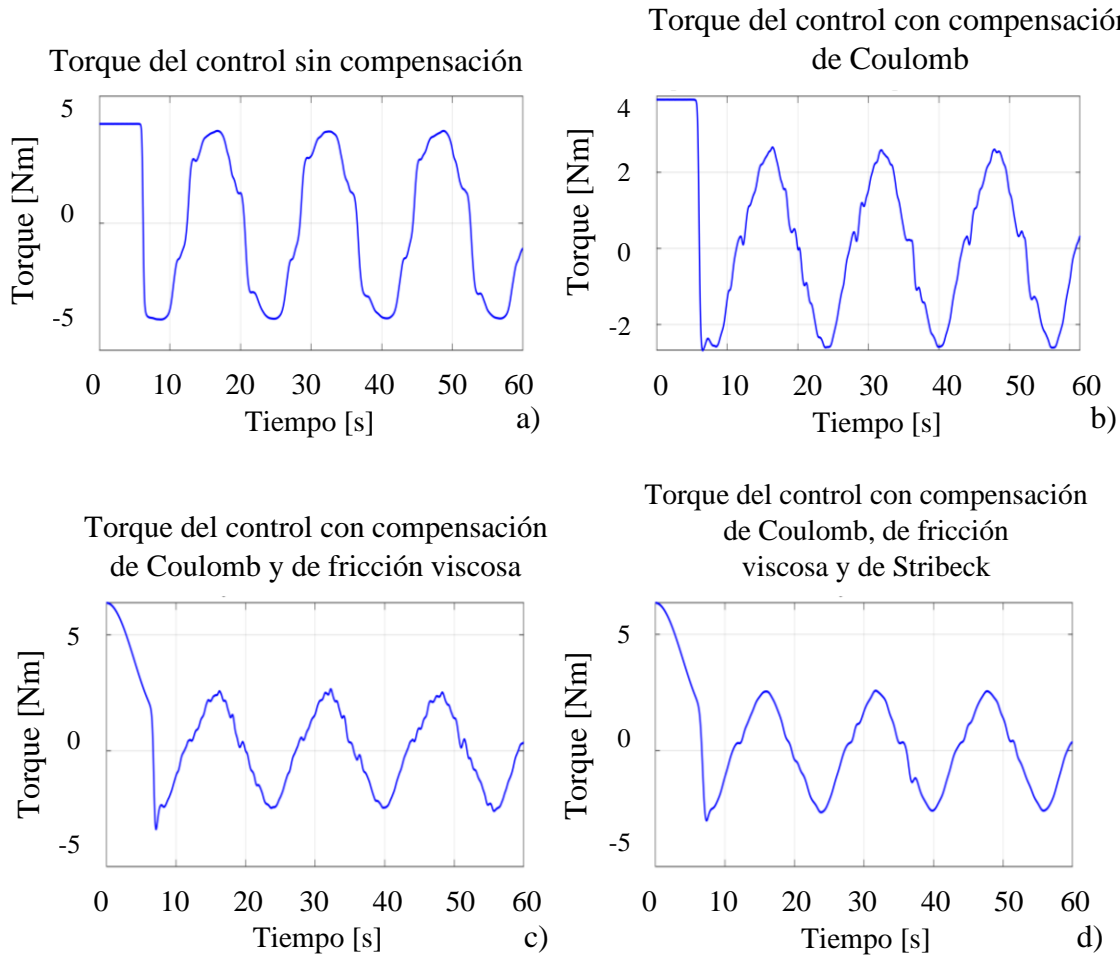


Figura 5.2.1. 5: Resultados del torque del controlador vs el tiempo en el eje X de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck.

En la primera parte, se observan los resultados del torque proporcionado por el control contra el tiempo. En la figura a) se observa que al ser el único torque que se tiene, es igual al torque total exigido por el robot. En cambio, al añadir las compensaciones, se puede ver que la forma de la onda se va modificando, tratando de asemejar una onda senoidal, aunque en realidad, al no ser ideal, tiene una forma triangular.

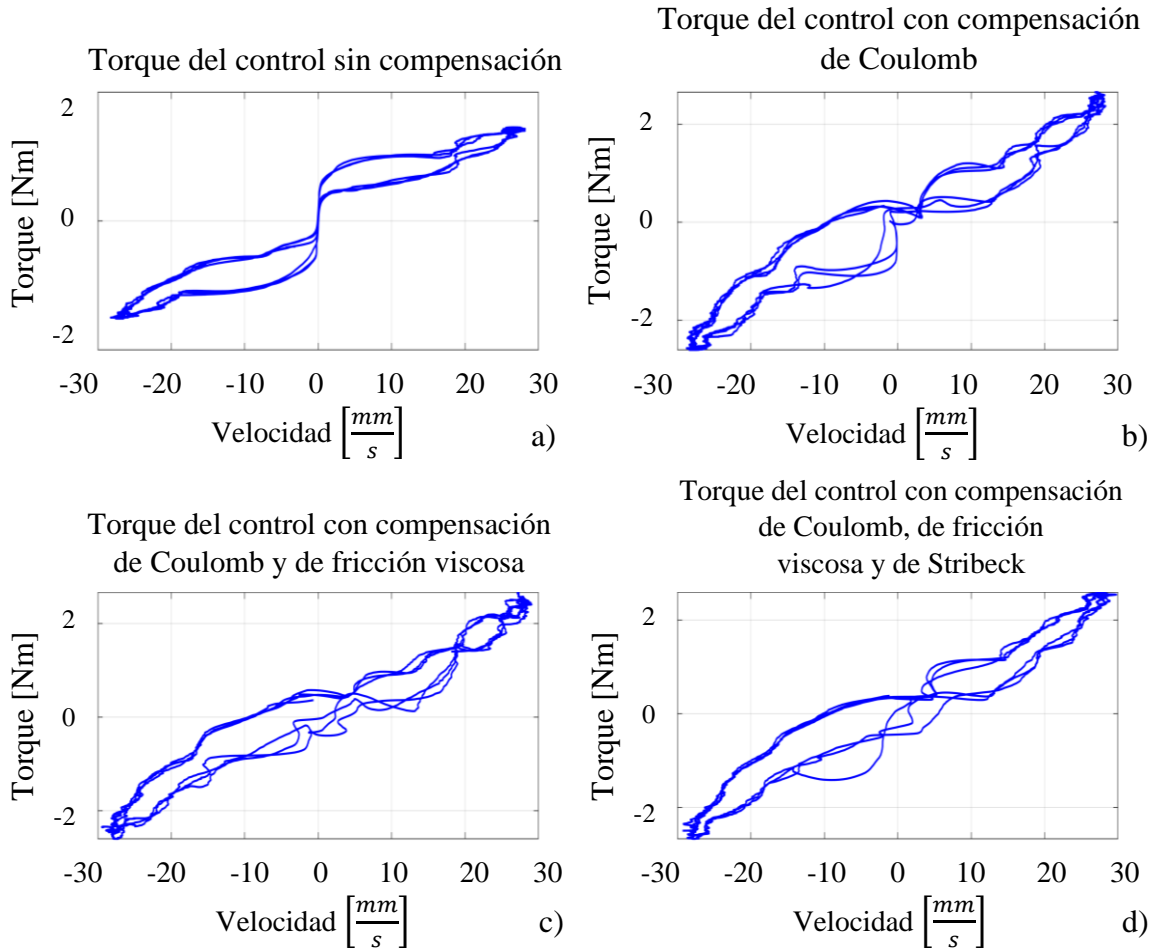


Figura 5.2.1. 6: Resultados del torque del controlador en el eje X de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck.

En la primera figura (a) se tiene nuevamente el torque del control sin compensación, el cual es el único torque proporcionado al sistema. En la figura b) se tiene que, al agregar la compensación de coulomb, el torque del controlador disminuye cuando la velocidad es cero, y es observable como casi pasa por el origen. En la figura c) se observa que al agregar la compensación de la fricción viscosa el torque del controlador se asemeja cada vez más a una línea recta que pasa por el origen. Con la compensación de Stribeck (d) este cambio es sutil, pero, aun así, el que el torque del controlador se asemeje a una recta, indica que el control reacciona como si el motor fuera de transmisión directa y dado que el torque requerido por los efectos de las fricciones del sistema se proporciona por las compensaciones, el control reacciona cada vez más como si el motor fuese ideal.

Todos estos resultados nos demuestran que las compensaciones están mejorando el control de posición implementado en el robot, pero la manera de comprobar esto de forma definitiva

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

es mediante el análisis del error del sistema. Para esto, se realizó la medición del error del robot, mediante la resta de la posición deseada y de la posición real del mecanismo, con lo que se obtuvieron los resultados mostrados en la figura 5.2.1.7.

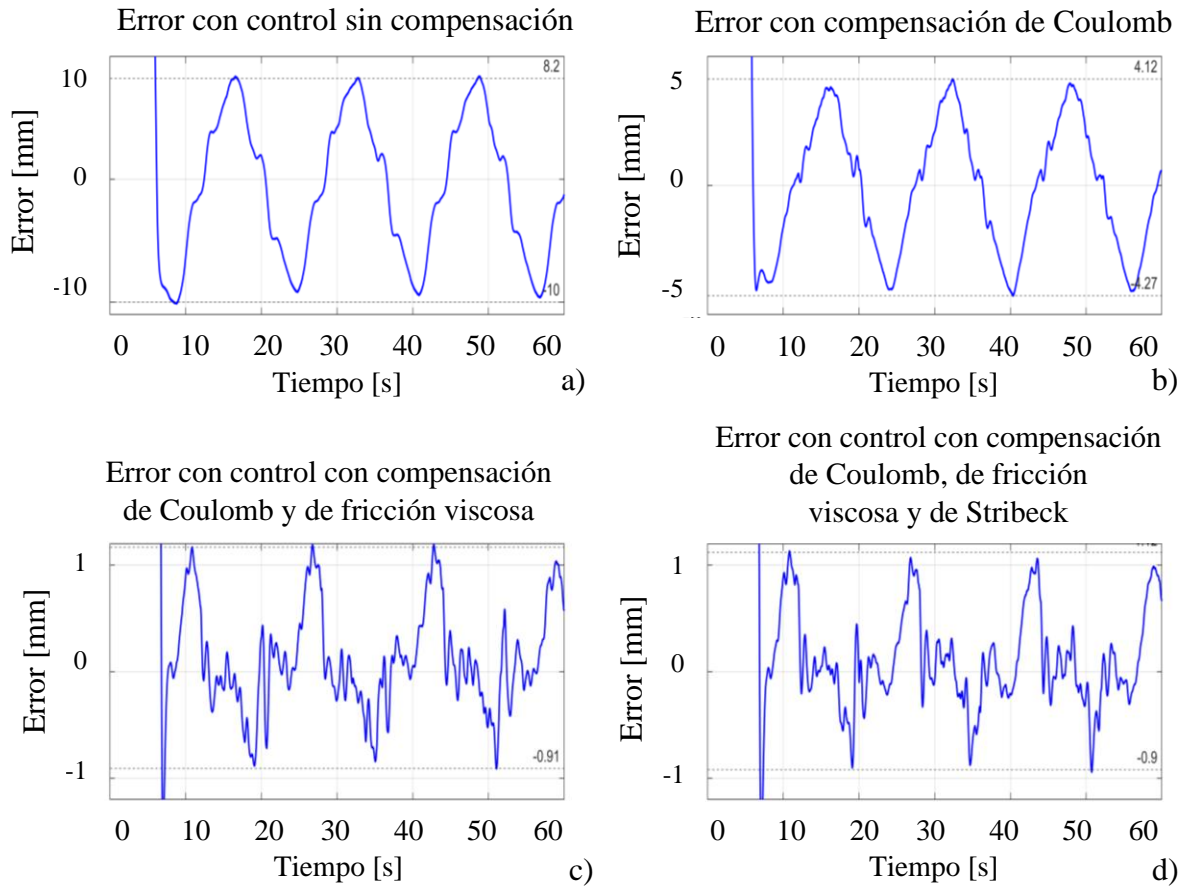


Figura 5.2.1. 7: Resultados error en el eje X de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck.

En la primera figura (a) se vuelve a demostrar que el control de posición por sí solo no es suficiente para el funcionamiento correcto del robot. Se tiene un error de posición de casi 10 *mm* cuando el robot tiene que cambiar de dirección. Con la compensación de coulomb (b) este error es reducido a la mitad, donde ahora se tiene un error de aproximadamente 5 *mm* en ambas direcciones. Al agregar la compensación de la fricción viscosa (c) se tiene que el error disminuye aún más, quedando en el rango de 1.2 *mm* aproximadamente. Finalmente, al agregar la compensación del efecto de Stribeck, se tiene que el error mejora un poco más, quedando en 1.1 *mm*, lo cual es una mejora pequeña, pero necesaria.

Con estos análisis, se demuestra que las compensaciones de las diversas fricciones en el sistema son necesarias y que mejoran de manera sustancial el comportamiento del robot (a

pesar del ruido que se observa en ellas). Aun así, es posible seguir mejorando el control del robot.

5.2.2 Resultados obtenidos para el eje Y

De manera similar, se han realizado los análisis correspondientes para el eje Y, dado que, en este eje, los efectos de fricción también son fuertes. Se inicia con los resultados de la posición en la figura 5.2.2.1.

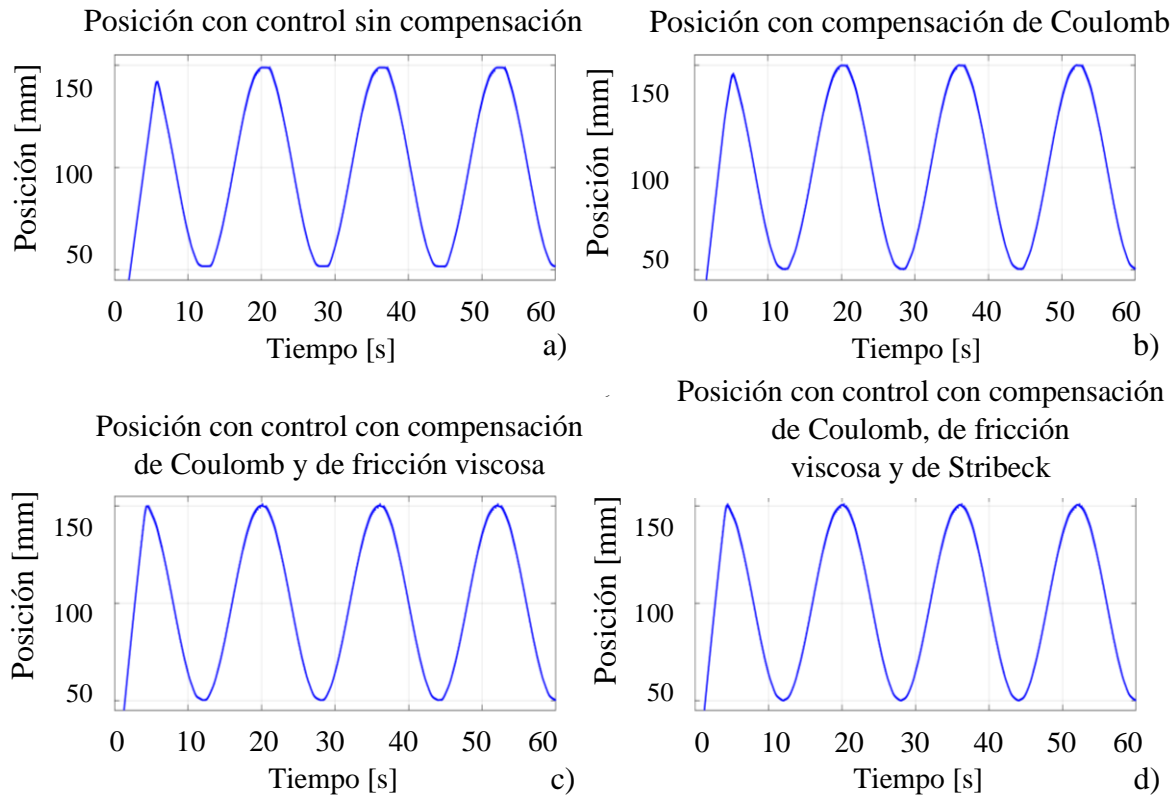


Figura 5.2.2. 1: Resultados de la posición en el eje Y de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck.

Al igual que con el eje X, en este eje se tiene que la posición con el control original (a) se ve deformada cuando el robot se acerca a su velocidad cero, por lo que no es capaz de llegar a la posición deseada. En cuanto se agrega la compensación de la fricción de coulomb (b), la deformación disminuye, permitiendo que el robot se acerque a la posición que el usuario desea a pesar de que la velocidad sigue acercándose a cero. En c), esto es todavía más evidente, puesto que la deformación en la curva de la senoide es todavía menor. Por último, se tiene que al agregar la compensación del efecto de Stribeck (d) la deformación termina

por eliminarse, con lo que finalmente se tiene una senoidal en la posición alcanzada por el robot.

El siguiente análisis sigue siendo el de la velocidad del sistema, lo que se hace mediante la observación de los resultados obtenidos y condensados en la figura 5.2.2.2.

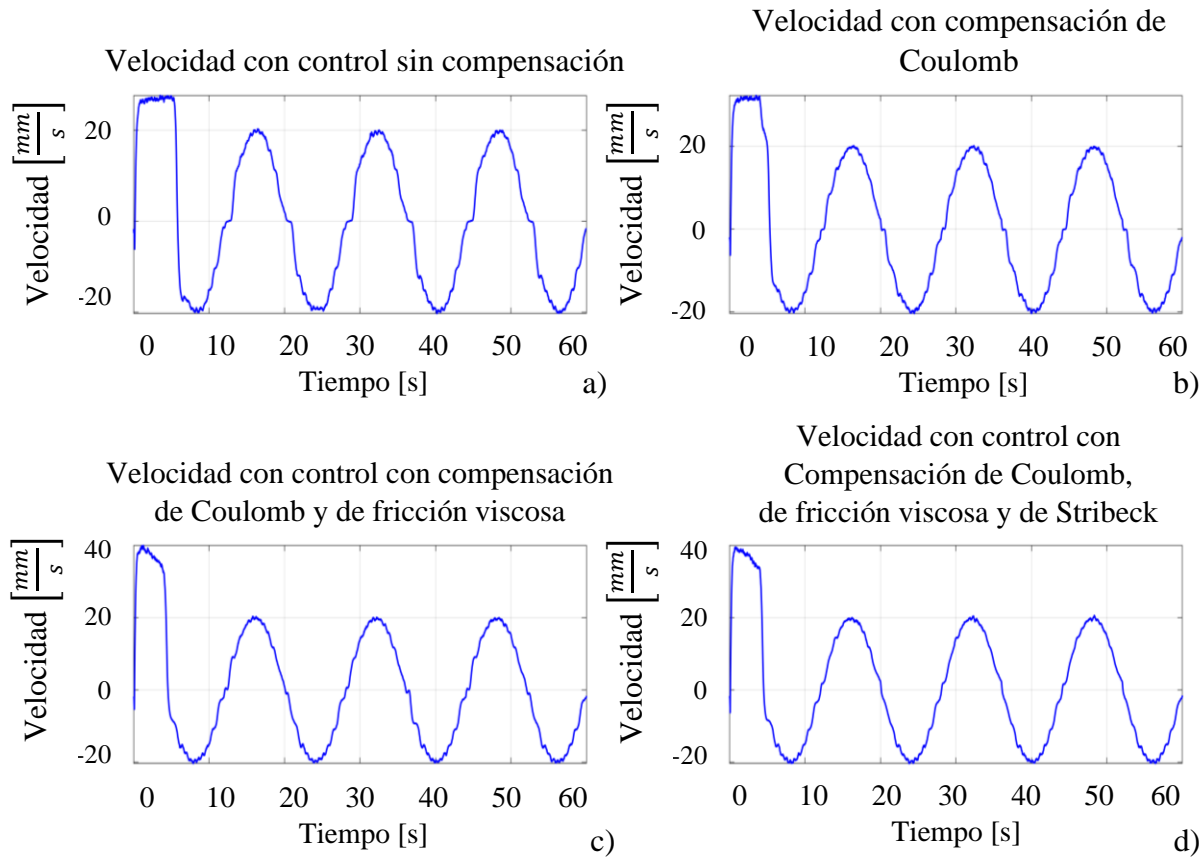


Figura 5.2.2. 2: Resultados de la velocidad en el eje Y de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck.

En la figura 5.2.2.2 se observa la comparación de las velocidades que alcanza el sistema dependiendo del control que se le aplica. En la parte a), se tiene que la velocidad máxima alcanzada no excede los 30mm/s , y al igual que la posición, la velocidad sufre deformaciones al acercarse al valor cero. En la parte b) se observa que con la compensación de coulomb la forma de la velocidad empieza a corregirse y las deformaciones en la curva disminuyen. Esto es evidente también al agregar la compensación de la fricción viscosa (c), puesto que se ve que las deformaciones siguen disminuyendo de tamaño. Por último, al agregar la última compensación al control (d), se tiene que el cambio es sutil, sin embargo, se observa que la velocidad prácticamente corresponde a la forma de una señal cosenoidal, lo que coincide con

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

la teoría de que, si la posición tiene una forma senoidal, entonces la velocidad correspondiente posee forma de un coseno.

Ahora se hace el análisis del torque total proporcionado al sistema, dígame el torque que tiene el control más el torque que se agrega de las compensaciones para cada uno de los casos, desglosados en las imágenes 5.2.2.3 y 5.2.2.4.

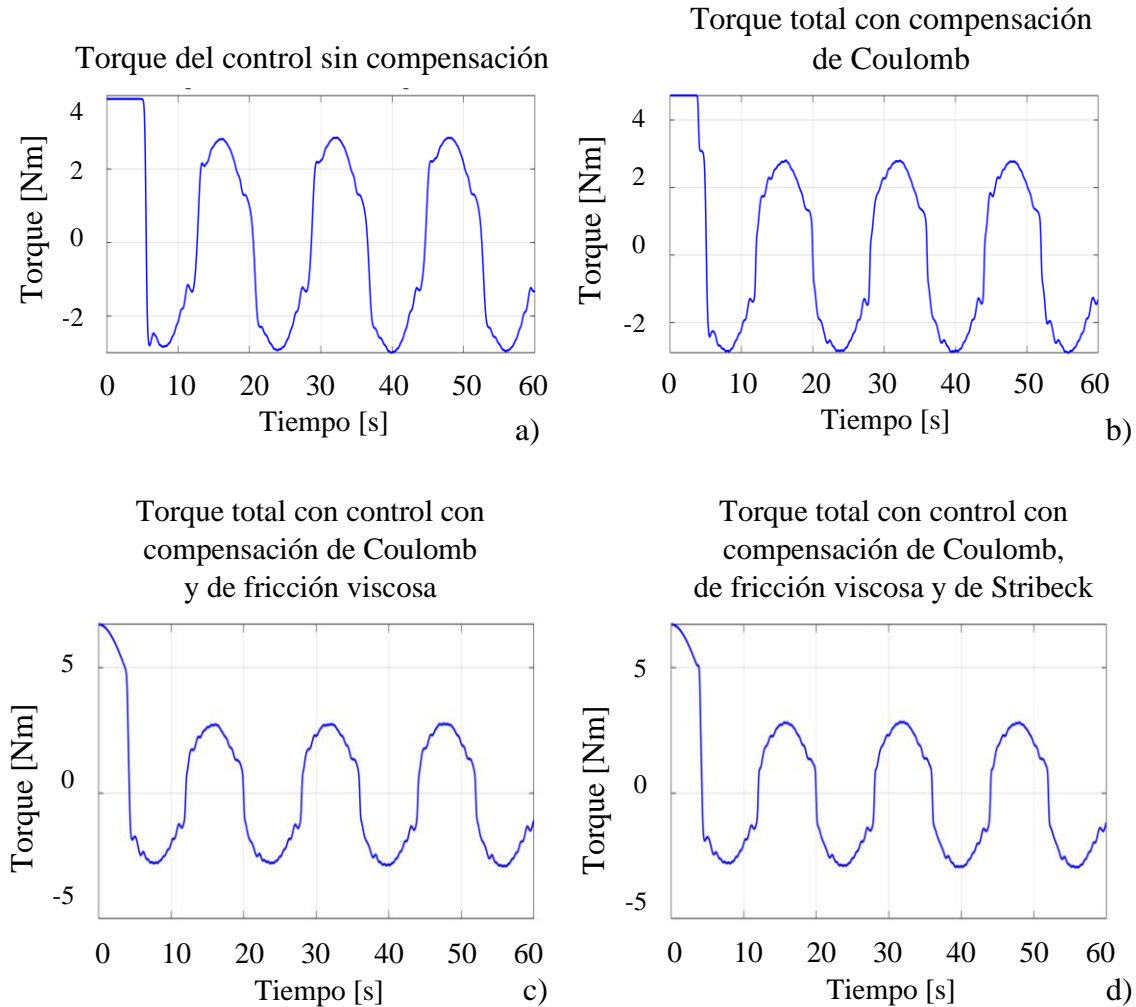


Figura 5.2.2. 3: Resultados del torque total aplicado vs el tiempo en el eje Y de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck.

De manera similar a lo ocurrido en el eje X, se puede observar en esta primera imagen que a pesar de que se disminuyen las perturbaciones en el torque conforme se agregan las compensaciones, estas no desaparecen nunca por completo, dado que son representaciones de los fenómenos físicos que ocurren en el sistema.

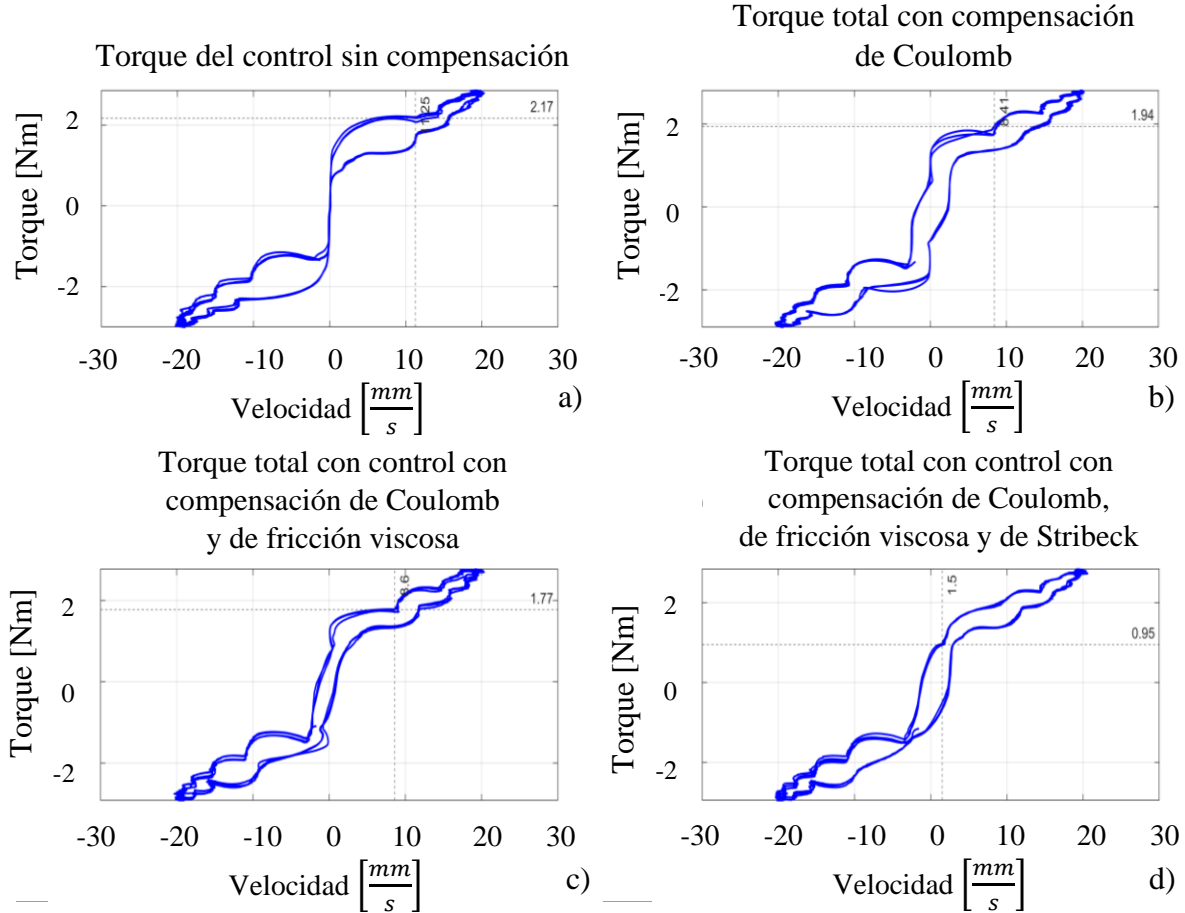


Figura 5.2.2. 4: Resultados del torque total aplicado en el eje Y de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck.

Al igual que en el eje X, en este eje se tiene que la forma del torque, al graficarse contra la velocidad, forma una curva que refleja el efecto de Stribeck a bajas velocidades. Es posible notar que en a), la curva que forma este efecto se extiende hasta velocidades no tan bajas de alrededor de $15mm/s$. En cambio, al agregar la compensación de coulomb (b), es posible observar que ahora el efecto de Stribeck se ve limitado a velocidades de menos de $10mm/s$, lo que reduce el rango de acción de esta perturbación del sistema. De manera similar, al añadir la compensación de la fricción viscosa (c), se observa que se reduce la histéresis a la que se ve sometida el sistema, mientras que finalmente se tiene que con la adición de todas las compensaciones (d), la mejora es todavía más observable, dado que todos los efectos tienden a reducirse.

Ahora se realizará el análisis de los efectos causados por las compensaciones en el torque entregado únicamente por el controlador, el cual puede ser visto como el torque total dado al

sistema menos el torque aplicado por las compensaciones de los efectos de fricción. Para esto, se muestran los resultados obtenidos del torque de control en las figuras 5.2.2.5 y 5.2.2.6.

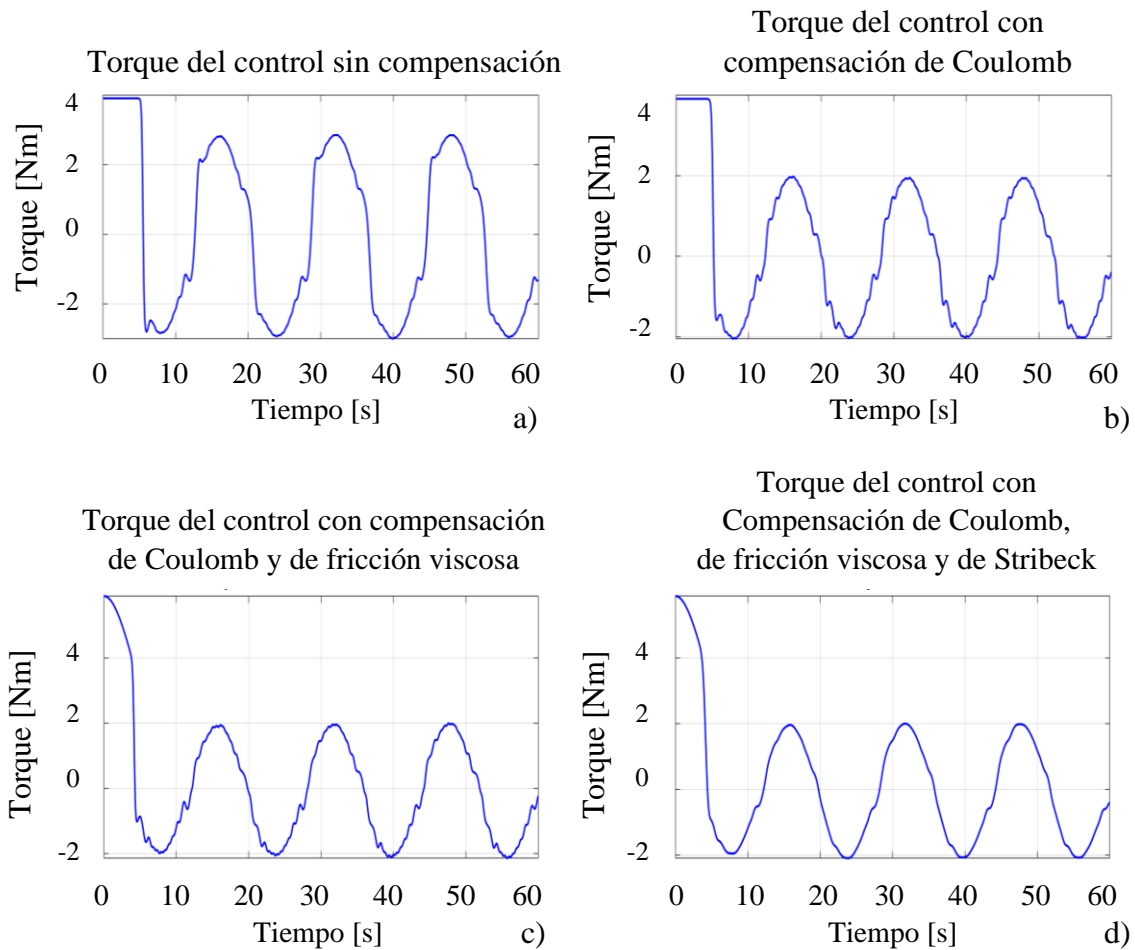


Figura 5.2.2. 5: Resultados del torque del control aplicado vs en el tiempo en el eje Y de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck.

En la figura 5.2.2.5 es posible observar cómo al añadir las compensaciones, el efecto de los fenómenos físicos deja de reflejarse sobre el torque del controlador. Esto se debe a que, para superar estos eventos, el torque se proporciona por parte de las compensaciones, por lo que no es necesario que el controlador proporcione este torque extra. En a) se observan todas las perturbaciones, mientras que en b), c) y d) se ve como los efectos disminuyen poco a poco hasta que la onda de torque semeja a una senoidal o una triangular, que es lo más cercano a el torque que requeriría el robot si fuese un sistema ideal.

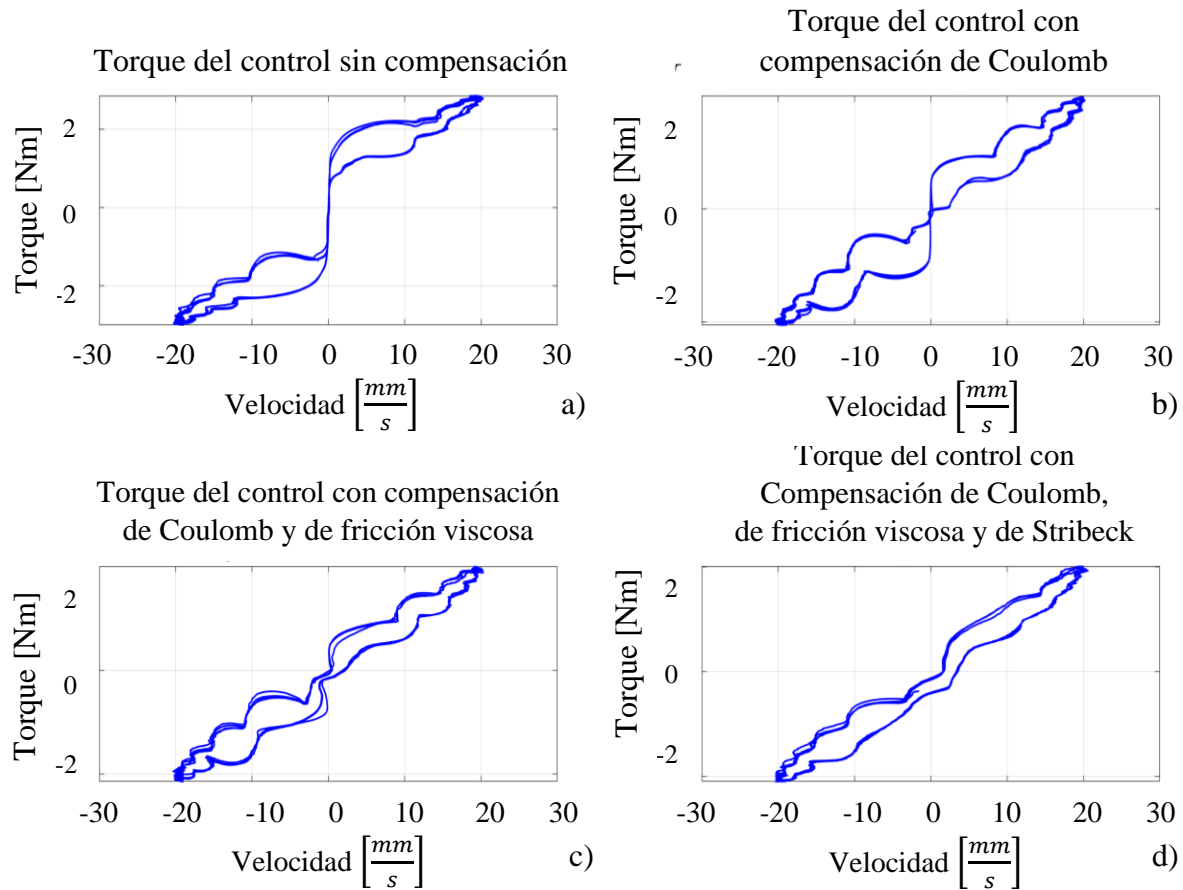


Figura 5.2.2. 6: Resultados del torque del control aplicado en el eje Y de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck.

En la figura 5.2.2.6, se observan los 4 casos trabajados hasta este punto para el torque que proporciona el control. En la primera (a) se observa que el torque es el mismo que en la figura 5.2.2.4 a), debido a que el torque del control es el único torque que se tiene como entrada del sistema. En la parte b) se empiezan a observar las diferencias. Dado que la compensación de la fricción de coulomb se encarga de contrarrestar el efecto, el torque proporcionado por el control cuando la velocidad es cero se reduce, por lo que solo se observa el efecto de Stribeck y la fricción viscosa. En la parte c), se observa que el torque empieza a disminuir el efecto de la fricción viscosa, por lo que cada vez es más parecido a una línea recta. Por último, con la última compensación agregada (correspondiente al efecto de Stribeck del sistema, d)), se tiene que el torque tiende a una línea recta, lo que demuestra que el control actúa como si el motor actuase de manera parecida a uno de transmisión directa.

Todo esto puede verse reflejado en el análisis de los errores obtenidos para la posición en este eje, cuyos resultados se observan de manera gráfica en la figura 5.2.2.7.

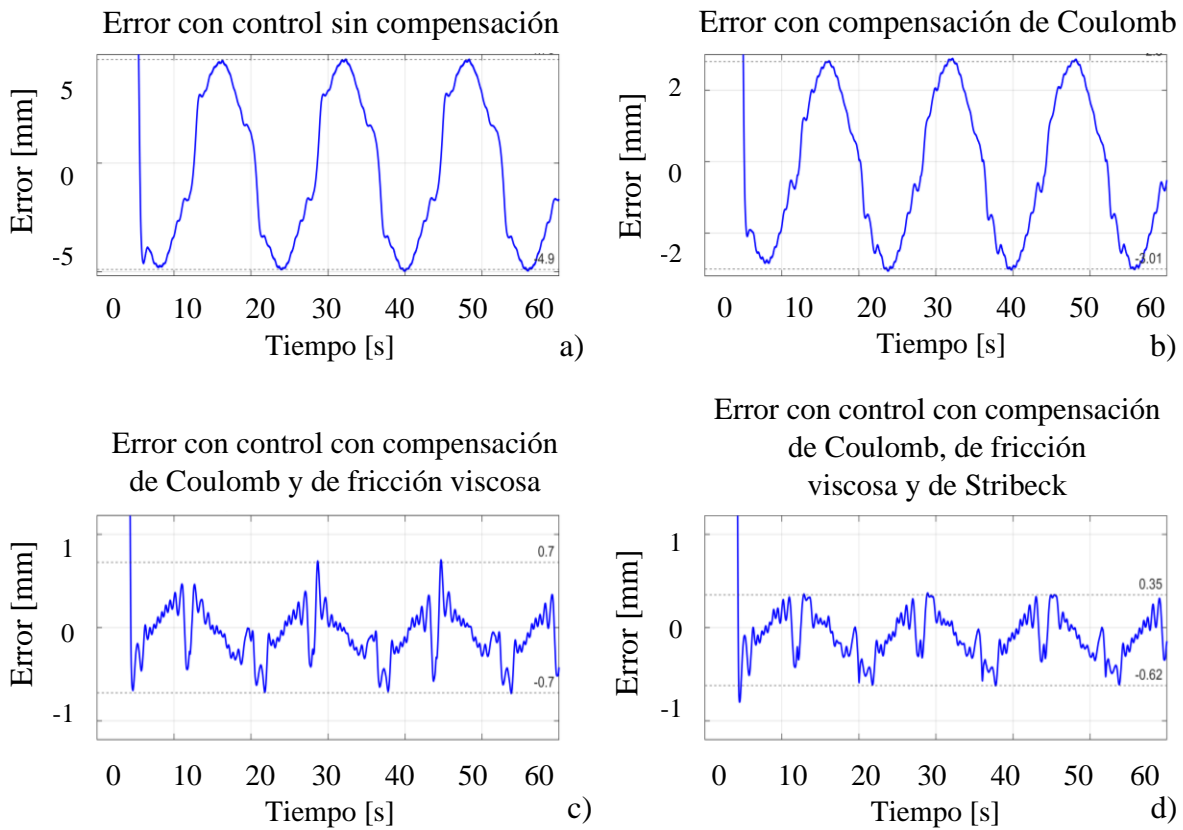


Figura 5.2.2. 7: Resultados del error en el eje Y de a) control sin compensación, b) control con compensación de coulomb, c) control con compensación de coulomb y de fricción viscosa, d) control con compensación de coulomb, de fricción viscosa y de efecto de Stribeck.

En la figura 5.2.2.7 se observa la variación de rangos del error conforme se aplican las compensaciones. En la parte a) donde aún se tiene únicamente el control de posición (sin compensaciones) se observa que el rango del error en el eje varía en casi 5mm de la posición deseada, lo cual es un error muy grande. En la parte b) se agrega la compensación de la fricción de coulomb al sistema, con lo que el rango se reduce y el error varía en aproximadamente 3mm de la posición deseada. Al añadir la compensación de la fricción viscosa c), se tiene una reducción aún mayor del error, obteniendo un error de aproximadamente 0.5mm . Por último, cuando se añade la última compensación correspondiente al efecto de Stribeck del mecanismo, se tiene que el error se reduce un poco más, quedando en menos de 0.5mm . Este último cambio, a pesar de ser sutil es importante para los propósitos de reducir los efectos de las perturbaciones en la planta de estudio.

5.2.3 Resultados obtenidos para el eje Z

A continuación, se realiza un breve análisis del eje Z, empezando por su gráfica de posición, observable en la figura 5.2.3.1.

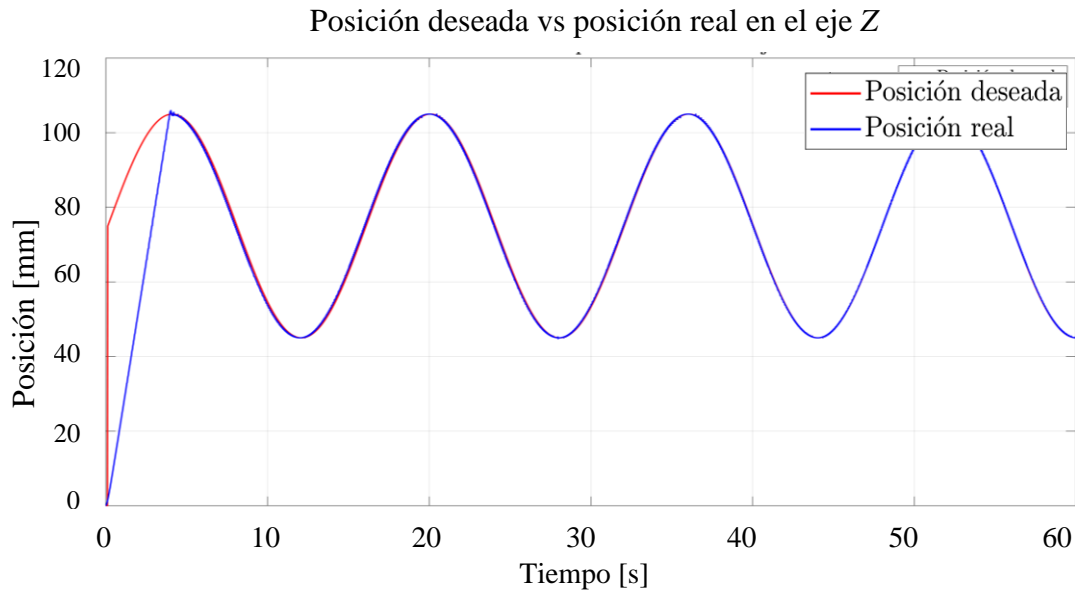


Figura 5.2.3. 1: Comparativa de la posición deseada y la posición real en el eje Z.

En la figura es posible observar que la posición real del robot sigue de manera muy exacta a la trayectoria de la posición deseada, sin presentar las deformaciones que se encontraron en los ejes X y Y. Esto se debe a que el eje Z no carga el peso de un eje adicional y su único peso agregado es el del eyector de material, por lo que el motor no se ve sometido a tanta carga. Por ello, se decidió graficar el error para poder observarlo y se muestra en la figura 5.2.3.2.

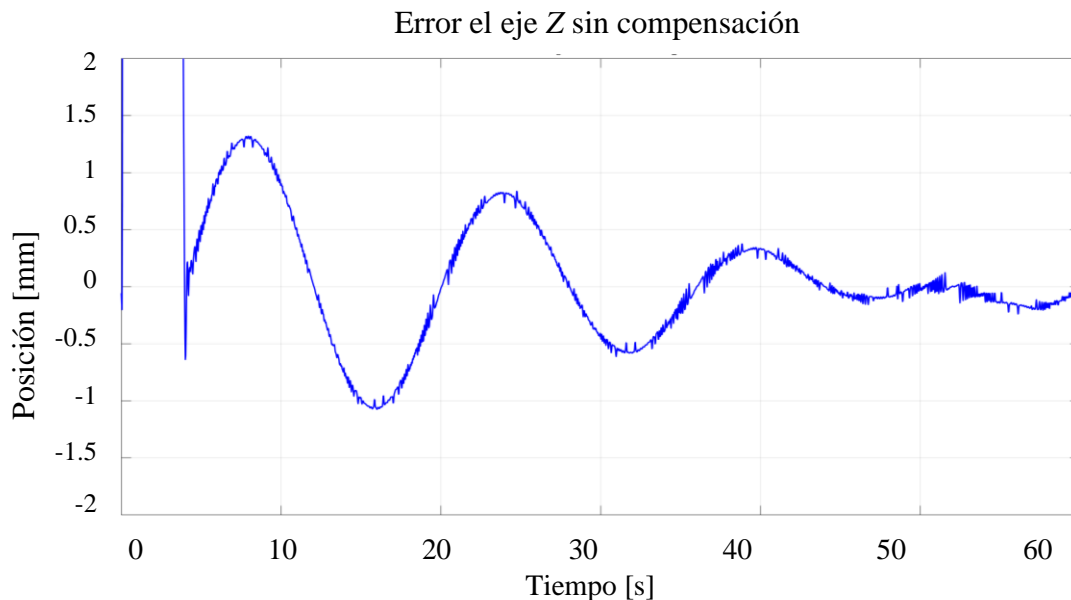


Figura 5.2.3. 2: Error en el eje Z con el control sin compensaciones.

En la figura es posible observar que el error es muy pequeño en comparación con los otros errores, yendo de un valor de 1.3mm hasta un valor de mm en el tiempo que dura la prueba. Esto quiere decir que el control de posición es bastante estable y tiene un error pequeño, por lo que no se considera necesario volverlo un control de trayectoria, sino solo mejorarlo con las compensaciones. Esto atiende también a la idea de que el eje Z no requiere el seguimiento de una trayectoria, debido al funcionamiento de una impresora 3D, puesto que el ejetor de material baja a la posición adecuada y permanece en ella hasta finalizar la capa de material que se está imprimiendo. Por ello, solamente se agregaron las compensaciones y se volvió a graficar el error, de lo cual se obtuvo la figura 5.2.3.3.

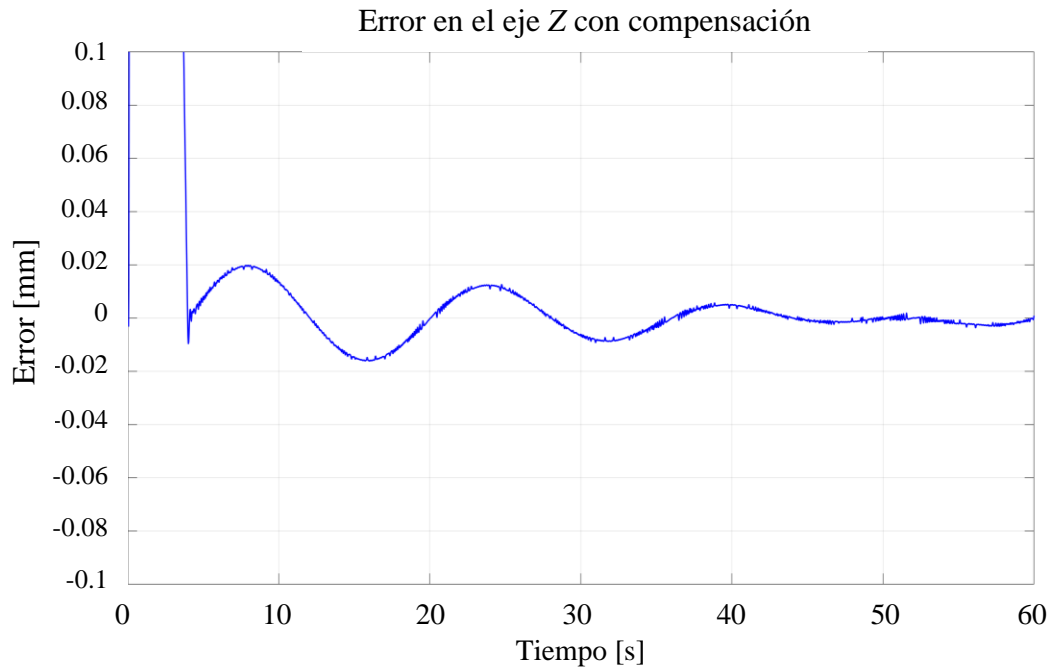


Figura 5.2.3. 3: Error en el eje Z con el control con compensaciones.

En la figura se puede observar que el error, al aplicar las compensaciones, disminuye hasta llegar a un valor de 0.02mm inicialmente y que conforme la simulación avanza disminuye hasta 0.002mm . Este error es aún mejor que el logrado en los ejes X, Y, por lo que se considera que el eje Z no requiere mayores modificaciones.

5.3 Resultados de compensación de fricción con control de trayectoria

A continuación, se hace el análisis de resultados para el control de trayectoria implementado en los ejes X, Y del robot de estudio. Para ello es importante notar que, al ser un control diferente, requiere un ajuste de ganancias distinto que el control de posición que se tenía de manera inicial. Para recordar, la ecuación del control de trayectoria implementado corresponde a:

$$\tau_{pd} = K_p \tanh(\tilde{q}) + K_v \tanh(\dot{\tilde{q}}) + M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + B\dot{q}_d + g(q) \quad (5.3.1)$$

Con el conocimiento de la ley de control empleada, se puede proceder con el estudio de la aplicación de esta en los ejes X , Y .

5.3.1 Resultados obtenidos para el eje X

Se iniciará con el análisis de la aceleración del eje X , el cual se puede observar en la figura 5.3.1.1.

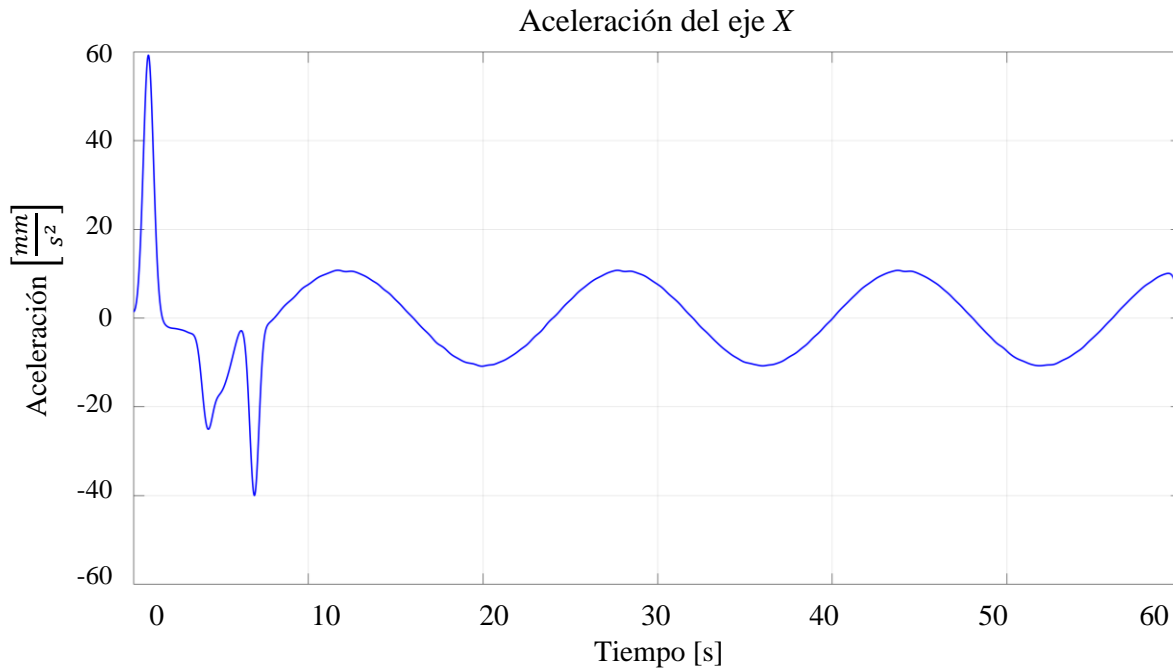


Figura 5.3.1. 1: Aceleración del sistema en el eje X .

En la figura se observa que la aceleración (a pesar de sufrir perturbaciones al inicio causadas por el error inicial tan grande que se tiene), es una señal bastante limpia y prácticamente sin perturbaciones visibles. Esto se debe a que las perturbaciones del sistema se han visto reducidas con las compensaciones aplicadas, por lo que se tiene que la aceleración también ha sido mejorada en consecuencia. Es importante esta revisión de la aceleración, puesto que el control de trayectoria controla la posición y la velocidad del sistema, lo que implica que se tiene también cierto control sobre la aceleración de este.

En seguida se puede observar la comparación de las posiciones del robot obtenidas con y sin ajuste en el control en la figura 5.3.1.2.

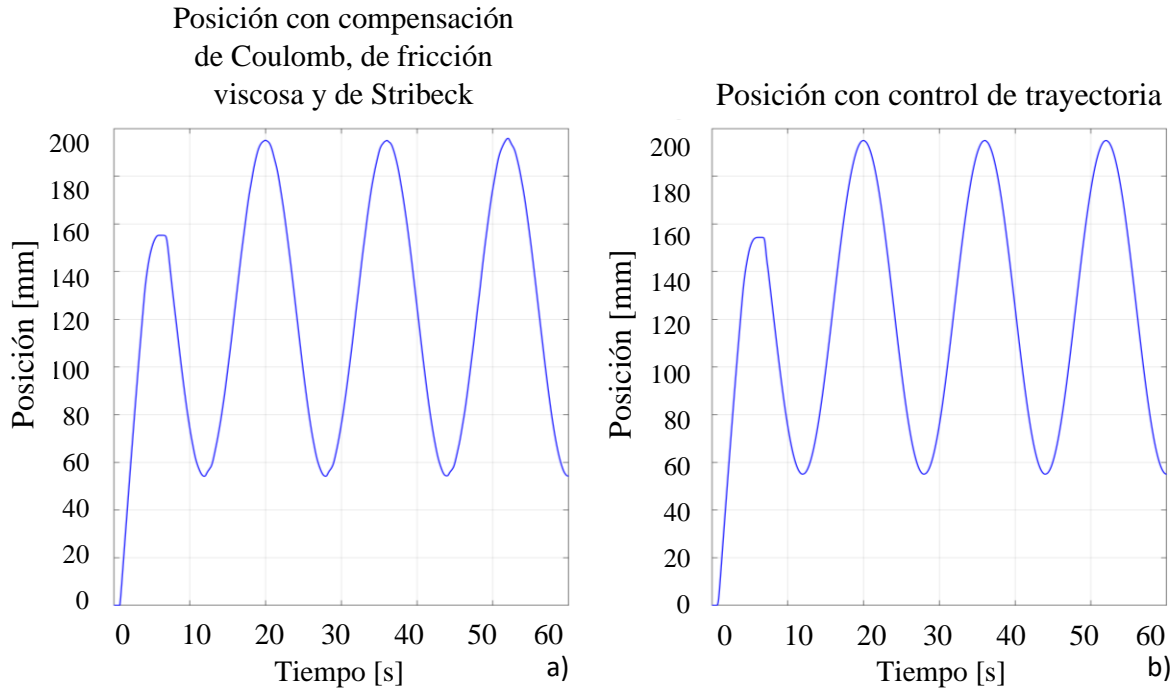


Figura 5.3.1. 2: Resultados de la posición en el eje X para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste.

En la figura se observa la posición del robot CNC en el eje X con el control con compensaciones (que correspondería a la figura 5.2.1d). En la parte derecha de la figura, se observa el resultado para el control de trayectoria con el ajuste de sus ganancias, con lo que se obtiene una señal aún más limpia.

A continuación, se tiene la gráfica de velocidades del sistema para ambos casos mencionados, en la figura 5.3.1.3.

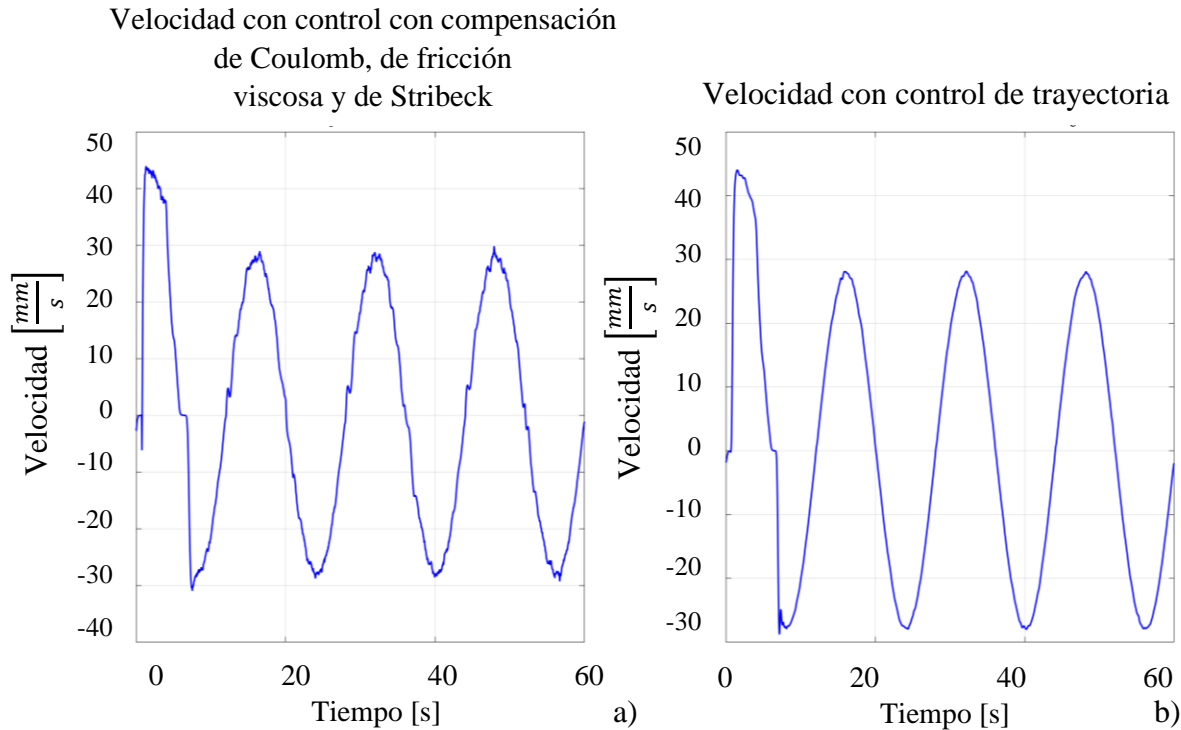


Figura 5.3.1. 3: Resultados de la velocidad en el eje X para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste.

En la figura, igual que en el caso anterior, se observa que la velocidad del sistema en a) contiene perturbaciones causadas por las deficiencias del control. En cambio, en b), se tiene que las perturbaciones han disminuido al mínimo, con lo que se tiene una señal más limpia y parecida a una cosenoidal. Esto debe verse reflejado también en el torque, por lo que se tienen la figura 5.3.1.4 y 5.3.1.5 donde se muestra el torque total del sistema tomado contra el tiempo y contra la velocidad respectivamente.

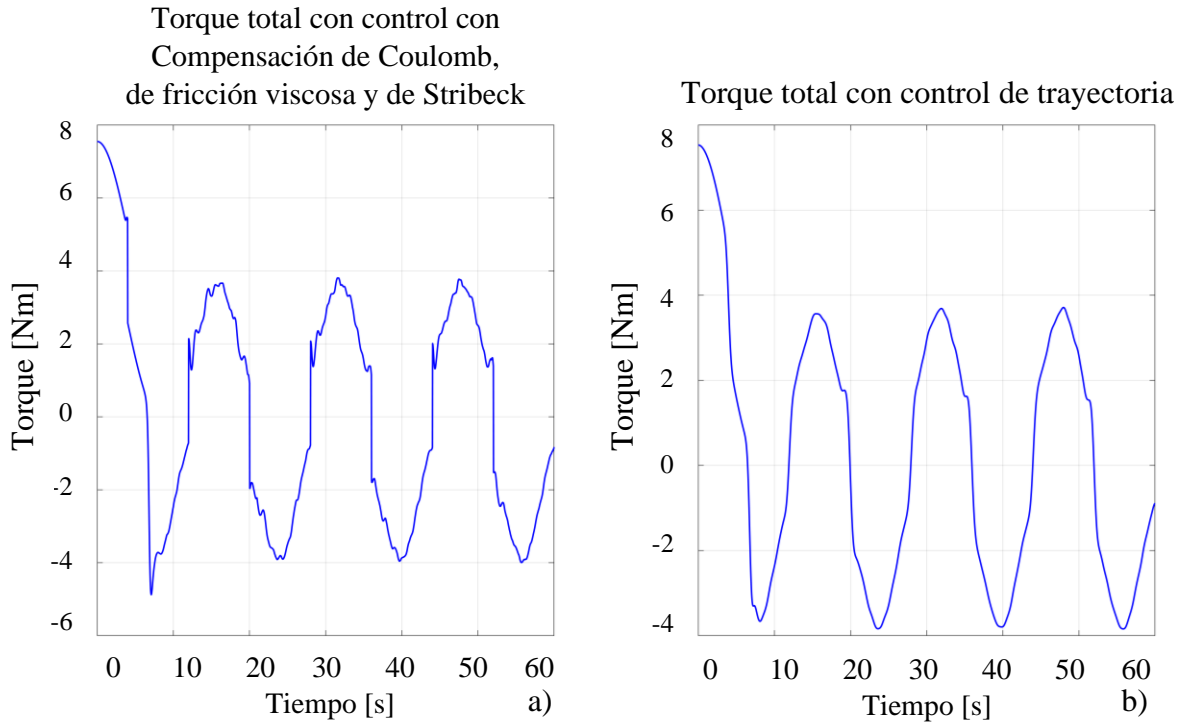


Figura 5.3.1. 4: Resultados del torque total aplicado vs el tiempo en el eje X para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste.

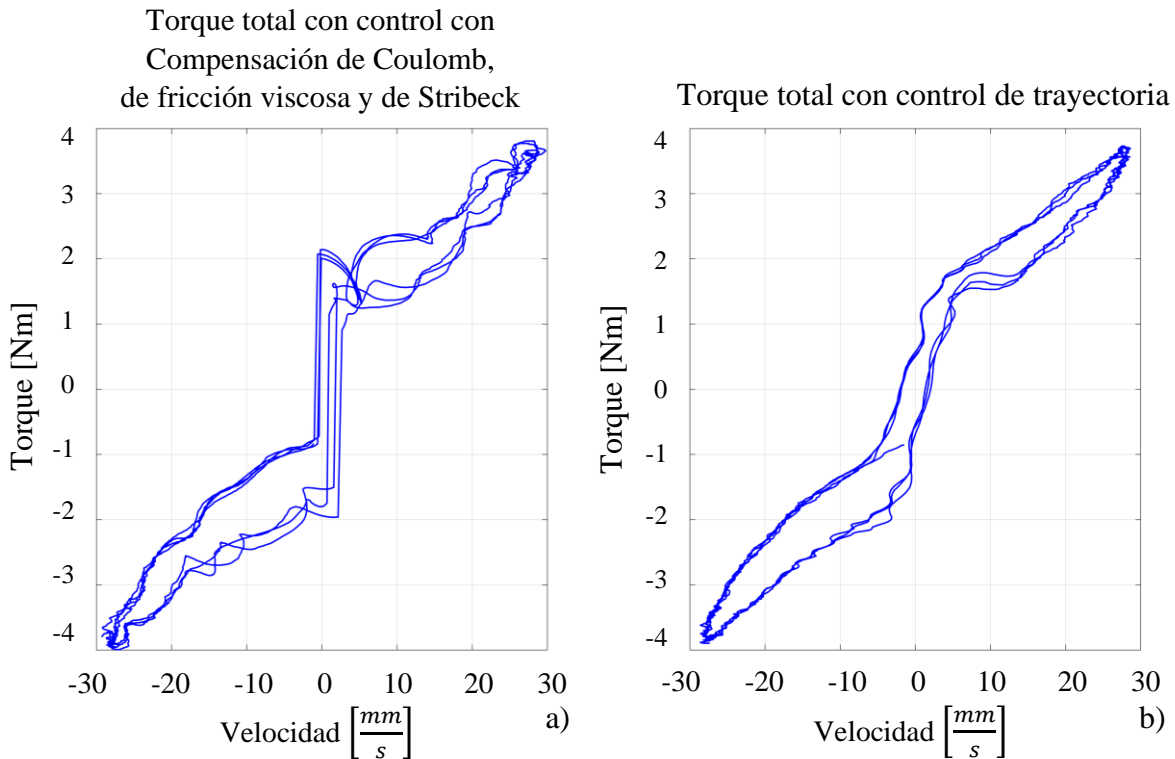


Figura 5.3.1. 5: Resultados del torque total aplicado en el eje X para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste.

En la figura 5.3.1.4 es posible observar claras diferencias entre los dos casos analizados. En la primera parte de la figura (a), se tiene que la forma del torque ya tiene pocas deformidades, pero sigue teniendo perturbaciones. En cambio, al aplicar el control de trayectoria (b), la forma de la señal tiene menos perturbaciones. De manera similar, se pueden observar diferencias en la imagen 5.3.1.5. En la figura a) se tiene que, aunque el control ha mejorado y disminuido las diferencias, posee cambios en el torque con respecto a la velocidad en cero que son bruscos y que pueden causar ruido en el mecanismo. En cambio, al aplicar el ajuste en el control de trayectoria, el torque se suaviza, lo que evitara cambios abruptos en el sistema que puedan causar otro tipo de perturbaciones no estudiadas.

El mismo análisis se realiza con el torque entregado por el control, mostrado en las figuras 5.3.1.6 y 5.3.1.7.

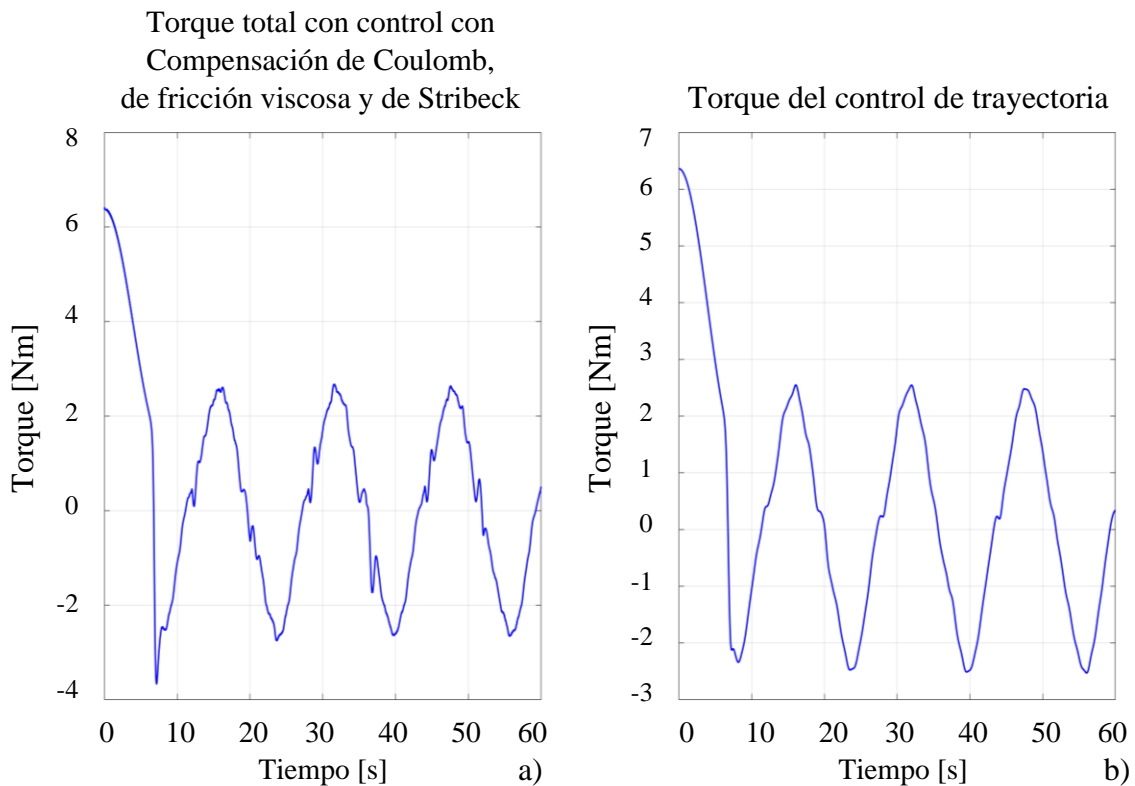


Figura 5.3.1. 6: Resultados del torque del control aplicado en el eje X vs el tiempo para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste.

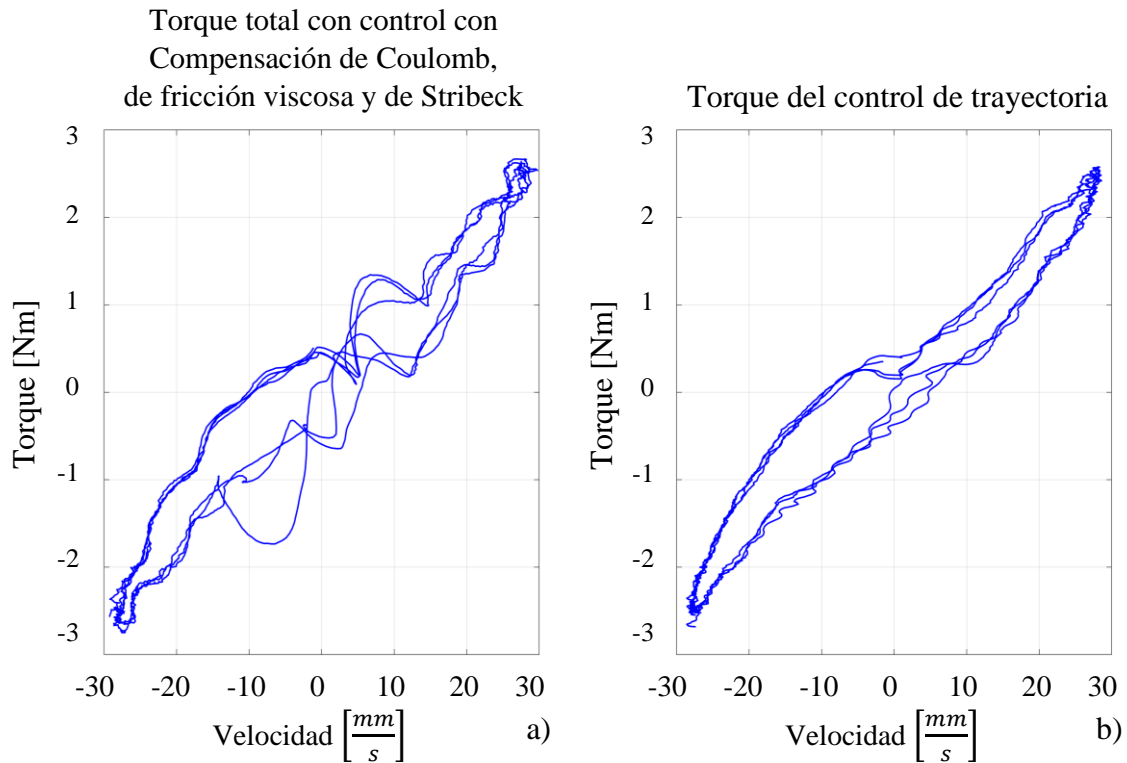


Figura 5.3.1. 7: Resultados del torque del control aplicado en el eje X para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste.

En la figura 5.3.1.6 es clara la diferencia. Al aplicar el control de trayectoria, se tiene que las perturbaciones disminuyen al máximo en el torque del control, lo que significa que la onda tienda a tener una forma senoidal, o en este caso, una forma triangular.

En el torque del controlador mostrado en la figura 5.3.7 la mejora es aún más evidente que en el torque total aplicado en el mecanismo. En la figura a), se tiene que, aunque el torque tiende a una línea recta que pasa por el origen, el mecanismo sufre de perturbaciones notables causadas por los fallos del control en ciertos puntos. En contraste, en la figura b) se observa que el torque se estabiliza y tiende a una línea recta, por lo que en este punto es aún más entendible que el sistema (control) actúa como si el motor fuese de transmisión directa.

Para terminar de verificar esto, se tiene el análisis del error en el eje X con el apoyo de los resultados exhibidos en la figura 5.3.1.8.

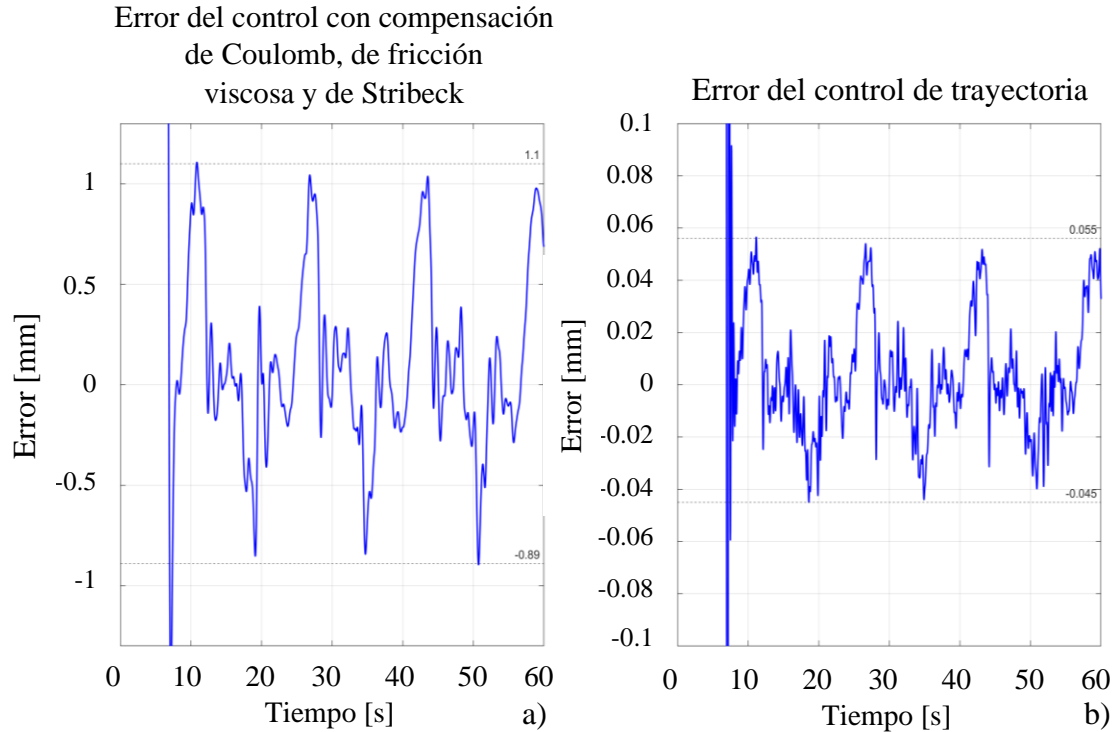


Figura 5.3.1. 8: Resultados del error en el eje X para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste.

En la figura se observa que cuando el control tiene únicamente las compensaciones (a), el error es de casi $1mm$. Esto se debe a que lo compensado tiene un límite, por lo que es necesario realizar otro cambio en el sistema. En la parte b) de la imagen, se ve el error reducido a un rango de aproximadamente $0.05mm$, lo cual es una vigésima parte del error que se tenía originalmente. Esto demuestra que la aplicación de un control de trayectoria adecuadamente ajustado es lo que era necesario para terminar de reducir el error existente en el mecanismo.

Para cerrar el análisis en el eje X, se realiza una comparación de los errores máximos obtenidos para cada uno de los algoritmos implementados, de lo cual se tiene la figura 5.3.1.9.

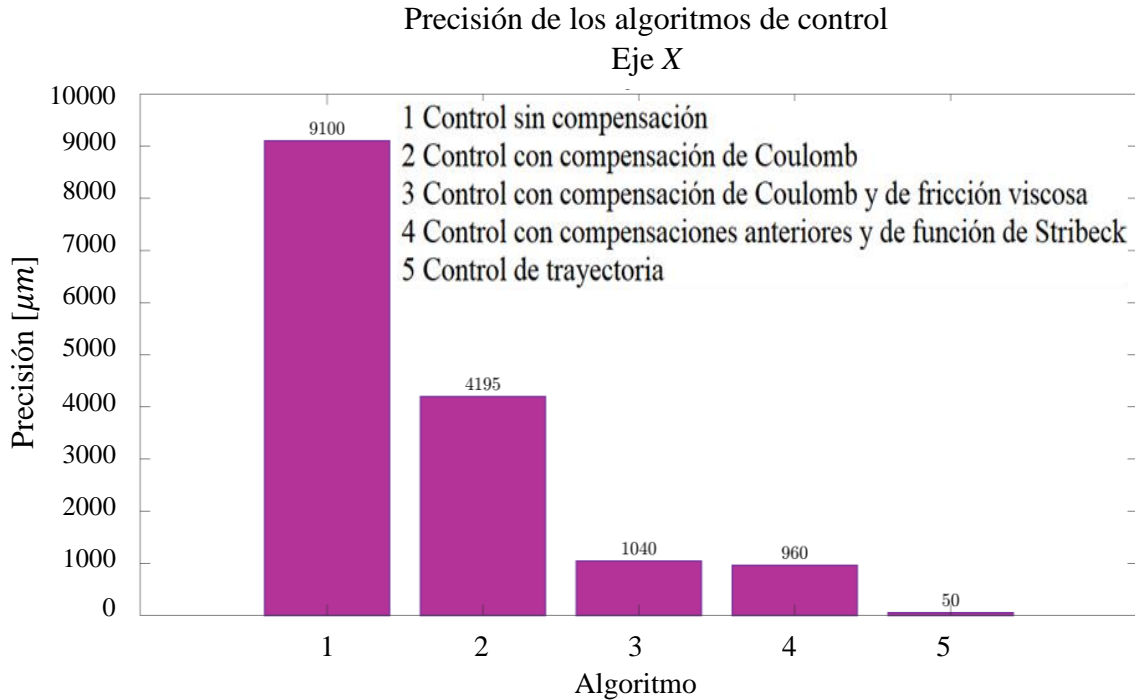


Figura 5.3.1. 9: Errores máximos obtenidos para cada algoritmo en el eje X.

En esta figura es posible notar de manera tangible como se va reduciendo el error con cada nuevo algoritmo implementado, empezando con el error inicial del control de posición sin compensación que resulta ser de poco más de 9mm . El error máximo obtenido por el algoritmo de control con compensación de coulomb genera un error de 4.195mm , lo que es casi la mitad del error inicial. Esto demuestra que la compensación de coulomb es de las más importantes para el sistema. Con el algoritmo con compensación de control y compensación de fricción viscosa, el error disminuye a 1.04mm , lo que significa un error de una cuarta parte del del algoritmo con sólo la compensación de coulomb. Al agregar la compensación de Stribeck se tiene que el error disminuye otro poco, de manera muy sutil, lo que demuestra que el control de posición por sí solo no puede reducir más el error. Al cambiar al control de trayectoria, se tiene un error máximo de 0.05mm , lo que representa una veinteaava parte del error del algoritmo de control de posición con todas las compensaciones. Con esto queda justificado el cambio del algoritmo de control de posición al algoritmo de control de trayectoria. Es importante mencionar también que el error máximo de 0.05mm corresponde ahora a la nueva precisión del robot en el eje X.

5.3.2 Resultados obtenidos para el eje Y

Algo similar a lo observado en el eje X puede ser visto en el eje Y, por lo que se tiene el análisis del control de trayectoria ajustado, empezando por la aceleración del sistema observable en la figura 5.3.2.1.

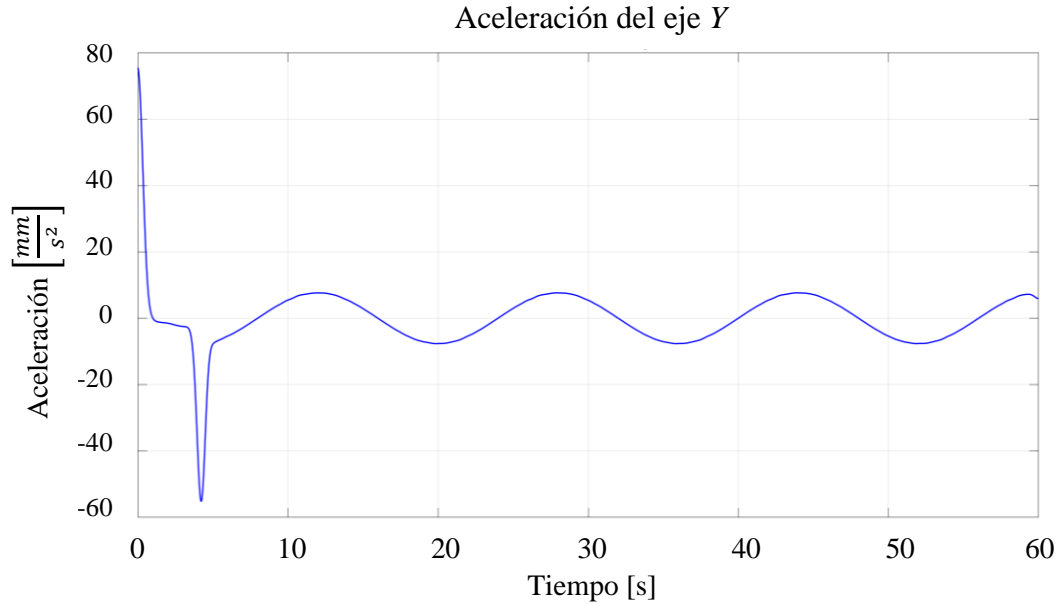


Figura 5.3.2. 1: Aceleración del sistema en el eje Y.

Al igual que con el eje X, es necesario verificar que la aceleración del sistema es obtenible, puesto que, al aplicar el control de trayectoria, se tiene un control de posición y de velocidad en el sistema, por lo que la aceleración mejora de manera sustancial. Se continúa con el análisis de la posición, que se tiene en la figura 5.3.2.2.

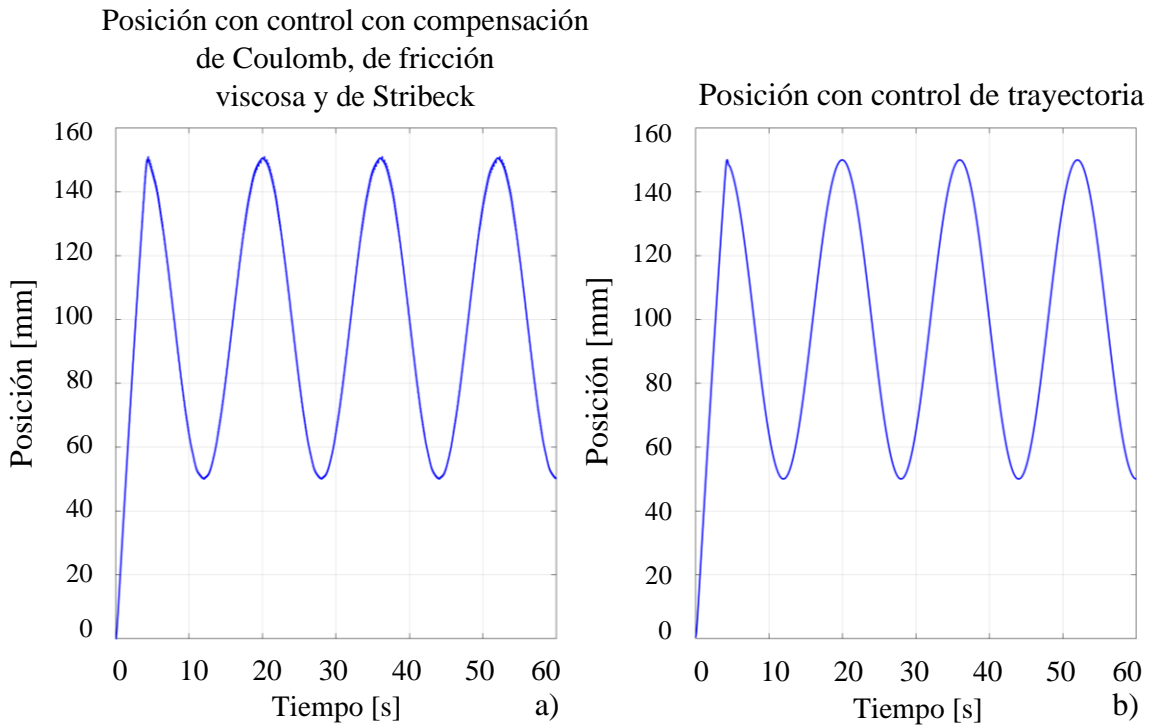


Figura 5.3.2. 2: Resultados de la posición en el eje Y para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste.

En la figura 5.3.2.2 es posible observar que la posición del control con las compensaciones (a) tiene una calidad muy buena, sin embargo, es posible observar ruido y perturbaciones en la señal. Esto es causado por los pequeños cambios que se tienen en la posición y que el control no es capaz de seguir de manera eficaz. En cambio, en la figura b) se observa que, con el control de trayectoria, el control tiene un mejor desempeño que se refleja en que la señal de la posición tiene menos ruido y sigue la señal de mejor manera.

En la figura 5.3.2.3 se tienen los resultados de velocidad para el eje n los resultados de velocidad para el eje Y.

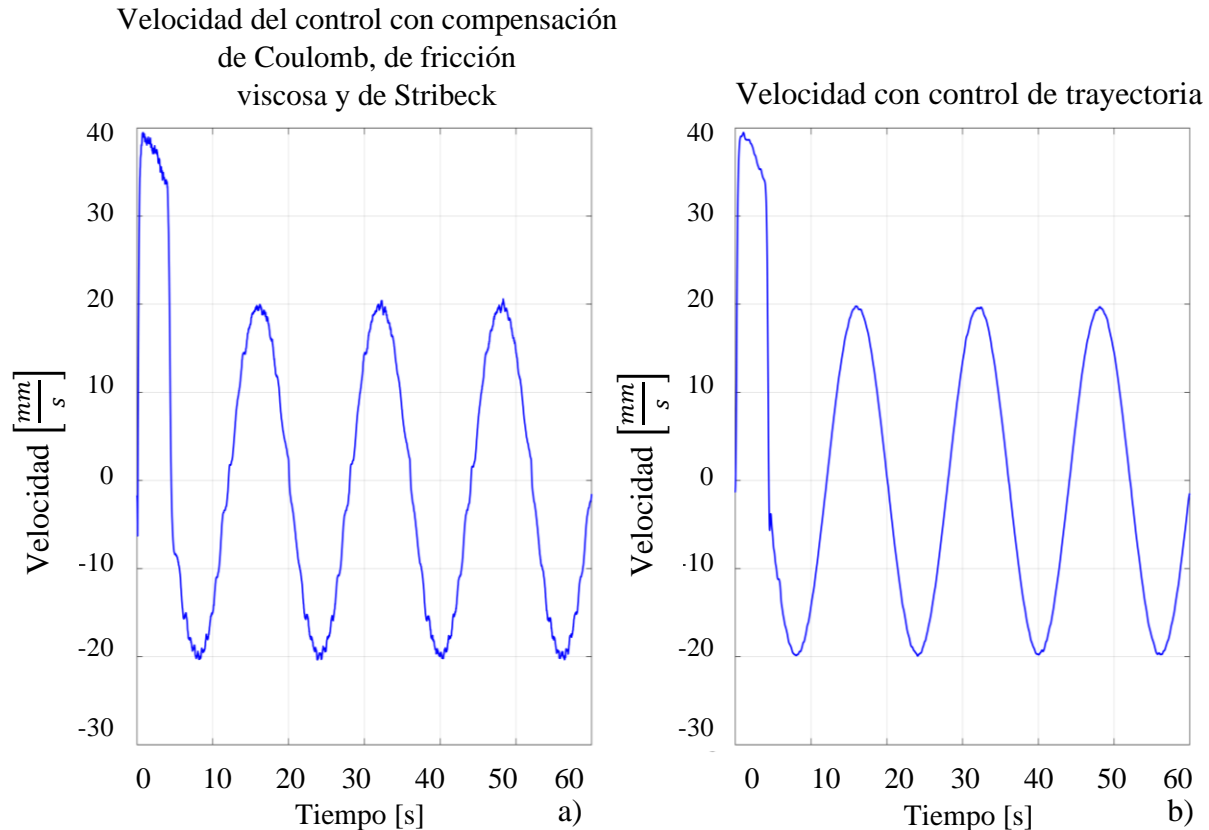


Figura 5.3.2. 3: Resultados de la velocidad en el eje Y para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste.

De manera similar a lo observado en la posición para el eje Y, en la velocidad se tiene que en la primera parte de la figura (a), la velocidad tiene ruido y pequeñas vibraciones causadas por la falta de desempeño del control. En cambio, en la figura b) se tiene que con el control de trayectoria la señal de la velocidad se encuentra más definida y limpia, lo que también influye en el desempeño del control, dado que este usa un error de velocidad asociado al error de esta $\tilde{\dot{q}} = \dot{q}_d - \dot{q}$. Al tener una señal de velocidad mejor, el desempeño del control también mejora.

Se tiene también el análisis del torque total aplicado al eje Y para los dos casos estudiados y que se puede observar en las figuras 5.3.2.4 y 5.3.2.5.

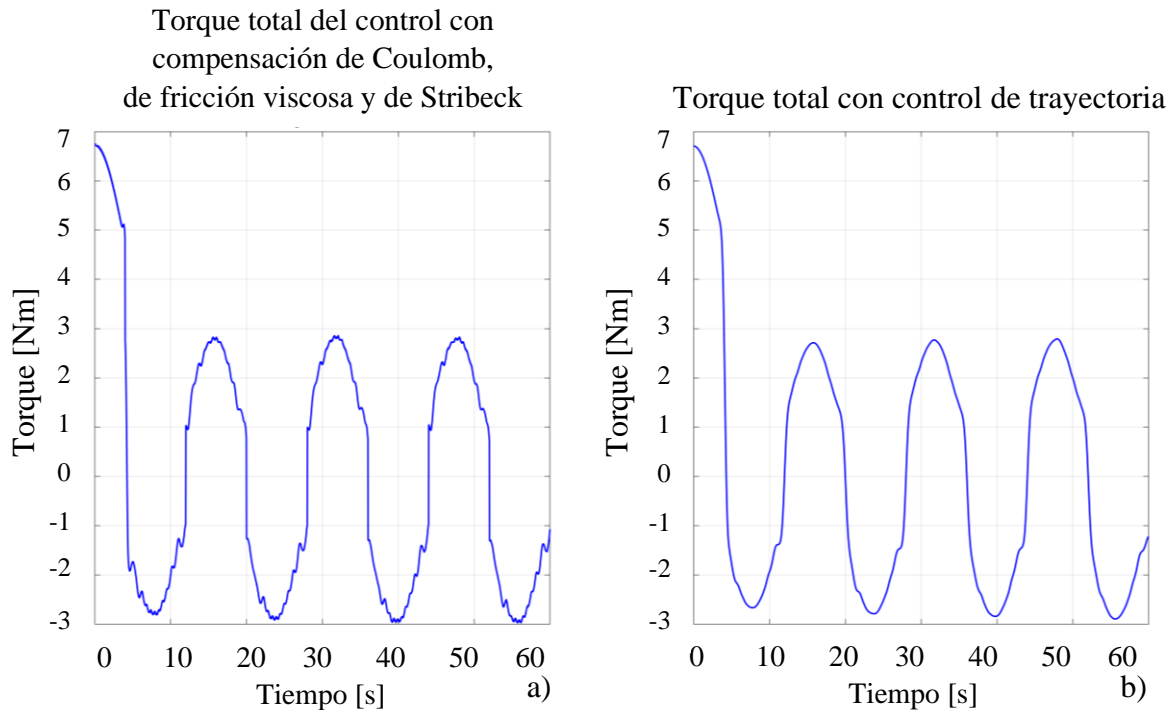


Figura 5.3.2. 4: Resultados del torque total aplicado vs el tiempo en el eje Y para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste.

En la primera figura, se observa el torque graficado contra el tiempo de la simulación. Se puede observar que en el control de posición con compensaciones (a), las deformaciones del torque son pequeñas, pero siguen presentes. En cambio, en el control de trayectoria (b) la forma de la señal es más continua, lo que indica que los cambios no ocurren de manera tan brusca como con el control de posición.

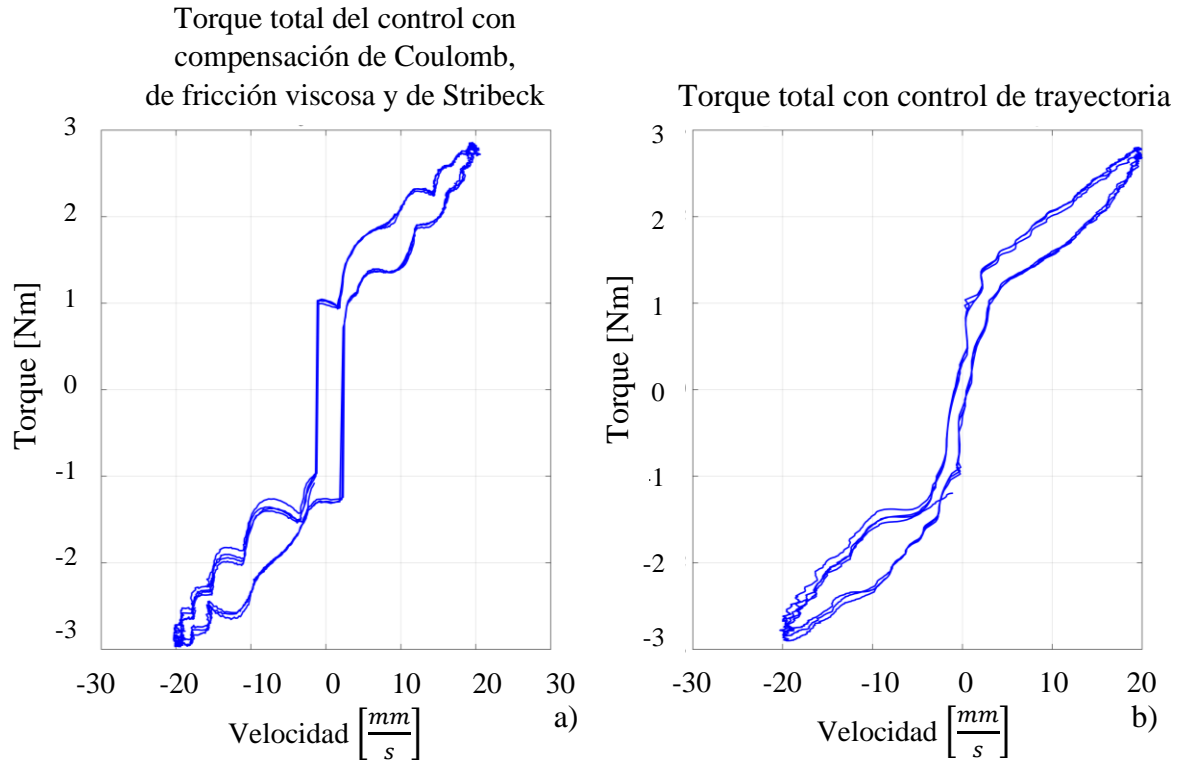


Figura 5.3.2. 5: Resultados del torque total aplicado en el eje Y para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste.

En la figura a) se tiene el torque graficado contra la velocidad del sistema para el control con las compensaciones. Se observa que se tiene una histéresis en el comportamiento cuando la velocidad tiende a cero, lo cual indica que el sistema no actúa de igual manera cuando acelera que cuando frena. En la figura b) después de hacer el ajuste en el control de trayectoria, se tiene que la histéresis ha disminuido, lo que explica que el comportamiento de la posición y la velocidad mejoren en el eje.

De manera similar se realiza en análisis para el torque del control, observando los resultados en las figuras 5.3.2.6 y 5.3.2.7.

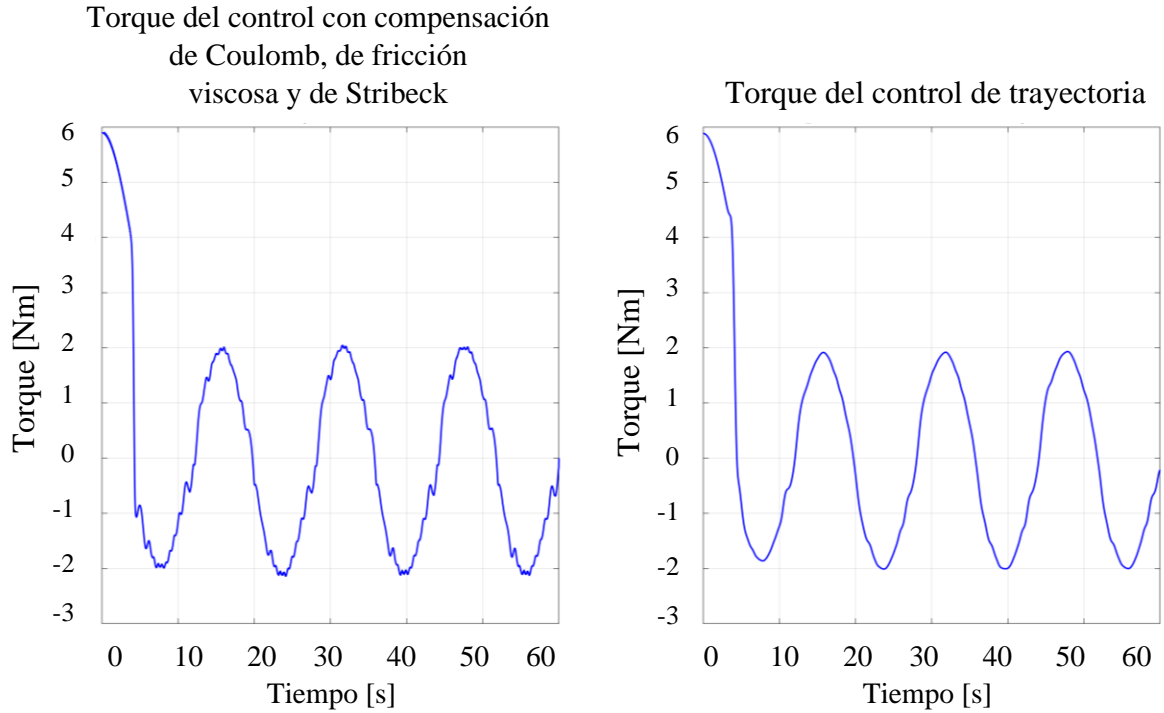


Figura 5.3.2. 6: Resultados del torque del control aplicado vs el tiempo en el eje Y para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste.

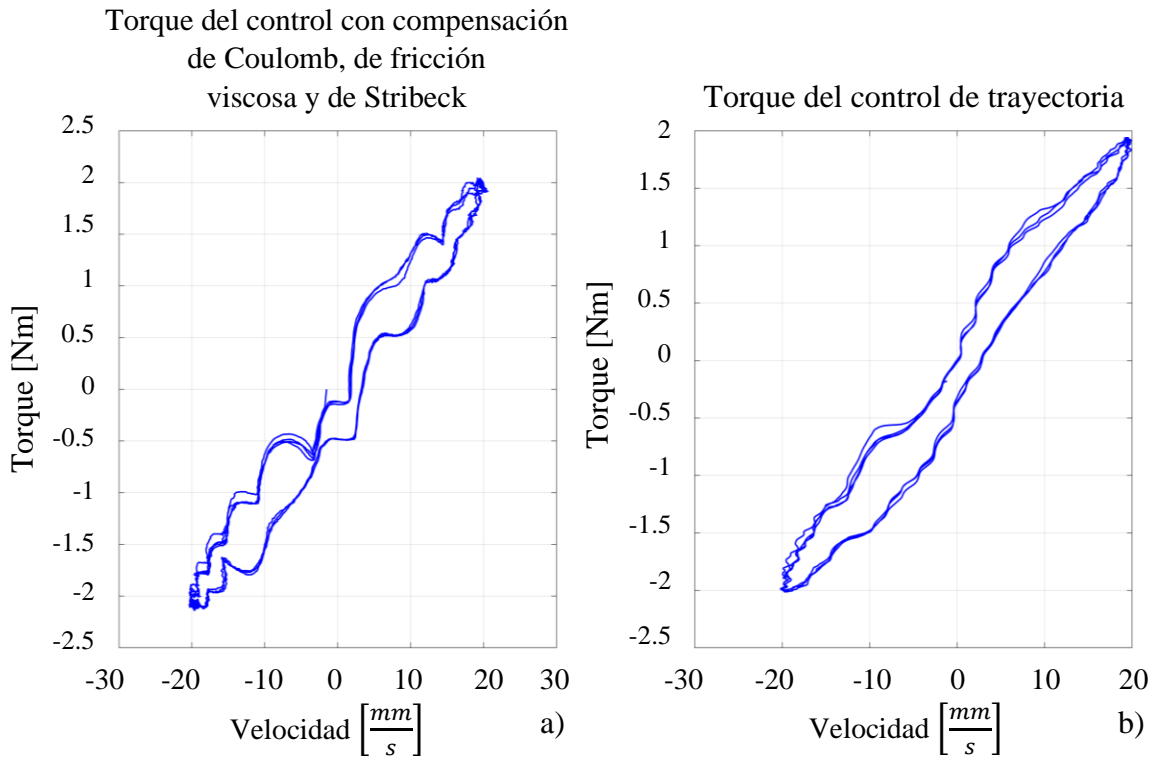


Figura 5.3.2. 7: Resultados del torque del control aplicado en el eje Y para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste.

En la figura 5.3.2.6 se ve como las perturbaciones causadas por los fenómenos físicos se eliminan de la señal del control principal una vez que se ha agregado el control de trayectoria. De manera más específica, en la figura 5.3.2.7 se observa que cuando se tiene el torque de control, el cual es equivalente al torque total aplicado al sistema menos el torque de las compensaciones, este tiende a formar una línea recta que pasa por el origen. En la primera parte de la figura (a) se tiene el torque del control con compensaciones, donde se observa que a pesar de que el torque tiende a una línea recta, se tienen perturbaciones causadas por deficiencias en el control. En la figura b) se tiene que las perturbaciones han disminuido, aunque aún se tiene un efecto de histéresis causado por el hecho de que el sistema no frena con las mismas características con las que acelera. Aun así, la mejora es evidente, por lo que se considera que el control de trayectoria ha logrado el objetivo de mejorar el funcionamiento del sistema.

Esto puede terminar de observarse en la figura 5.3.2.8 donde se tienen los resultados de los errores obtenidos para el eje Y.

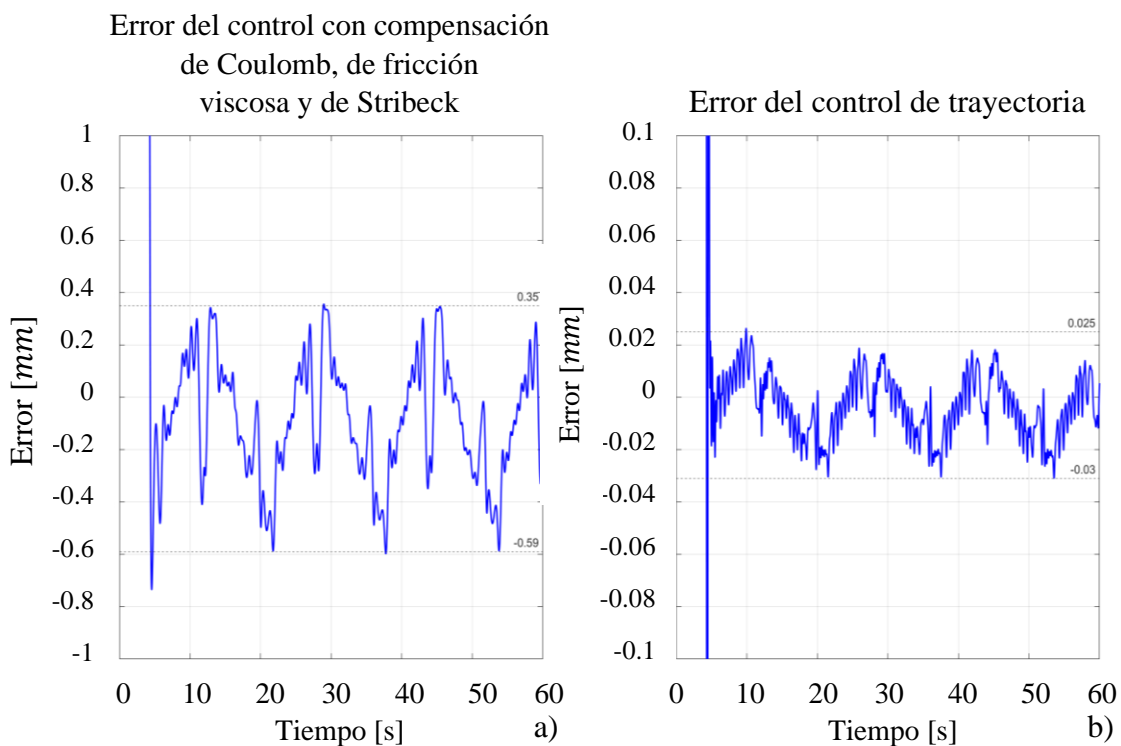


Figura 5.3.2. 8: Resultados del error en el eje Y para a) control con compensaciones, b) control de trayectoria con compensaciones y ajuste.

En la figura 5.3.2.8 se tiene el error obtenido para la posición del eje Y. En la primera parte (a) se observa que el error varía en un rango aproximado de 0.4mm. Esto es un error ya de

por si bastante pequeño, pero a los intereses que conciernen, se considera que puede reducirse aún más. Por esto, al aplicarse el control de trayectoria ajustado (b), se tiene en la figura correspondiente que el error ha sido reducido a un rango de aproximadamente $0.02mm$, lo cual es una mejora considerable.

De igual manera, para cerrar el análisis en el eje Y , se tiene una comparación de los errores máximos que se lograron para cada uno de los algoritmos de control, con lo cual se obtuvo la figura 5.3.2.7.

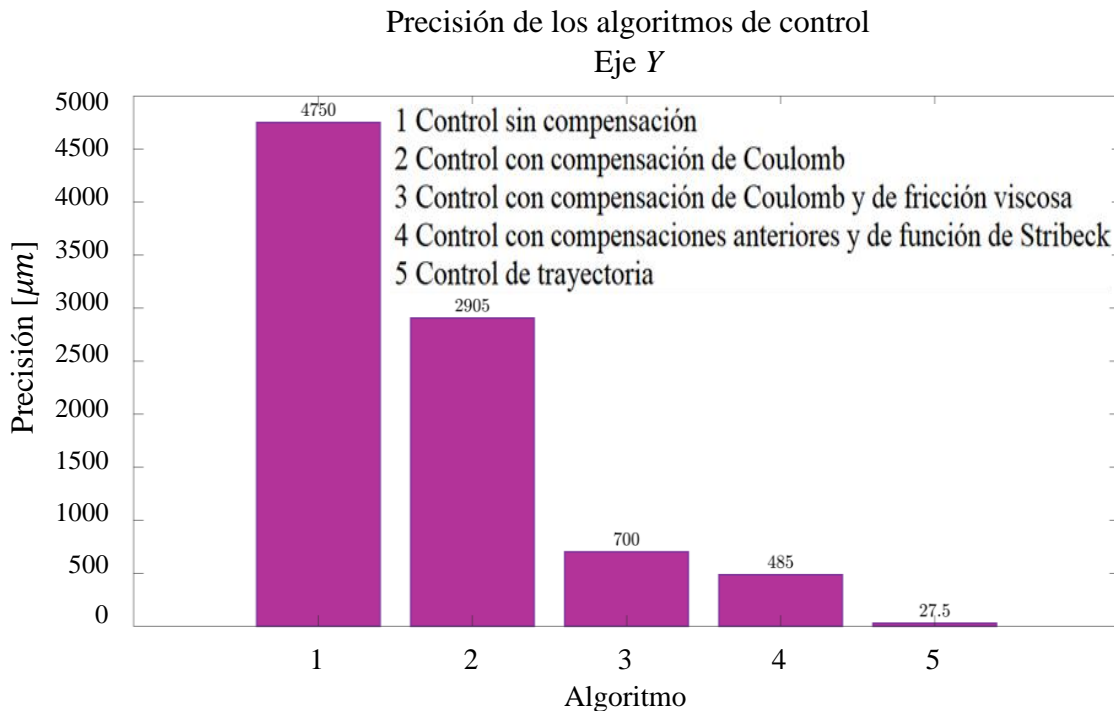


Figura 5.3.2. 9: Errores máximos obtenidos para cada algoritmo en el eje Y .

En la imagen se pueden comparar de manera visual los errores de cada algoritmo y con ello tener una noción clara del desempeño del robot para cada uno de estos. Se observa como el error se va reduciendo a partir del error máximo inicial de $4.75mm$ obtenido con el algoritmo de control sin compensación. Al agregar la compensación de coulomb, se obtiene un error de $2.9mm$, lo que significa que el error se redujo casi a la mitad. Al agregar la compensación de la fricción viscosa, el error vuelve a disminuir hasta un valor de $0.7mm$, lo que corresponde a una tercera parte del error anterior. De manera similar a lo ocurrido en el eje X , al añadir la compensación de la función de Stribeck, se tiene que el error disminuye ligeramente. En cambio, al cambiar al control de trayectoria, el error se reduce hasta $0.027mm$, lo que corresponde a casi una veintea parte del error anterior. Esto demuestra que el control de trayectoria es también necesario para el eje Y , por lo que es justificable el implementarlo en este eje del robot. Ahora, se tiene que el error máximo (precisión) en el eje Y es de $0.025mm$, lo que es equivalente a un milésimo de pulgada.

5.3.3 Resultados obtenidos para los tres ejes

Como parte final, se implementaron dos trayectorias simples para revisar de manera física y visual el comportamiento del CNC. Para ello, se decidió que, dado que el problema principal que se detectó en los resultados originales se localizaba en las orillas y ángulos rectos, la mejor trayectoria para revisar la mejora en los contornos era un rombo de lados iguales para revisar los ángulos de 90° y un triángulo isósceles que nos permitirá revisar ángulos de menos de 90° .

El resultado de la primera trayectoria puede ser observado en la figura 5.3.3.1, la cual es el resultado de la trayectoria calculada para el rombo.

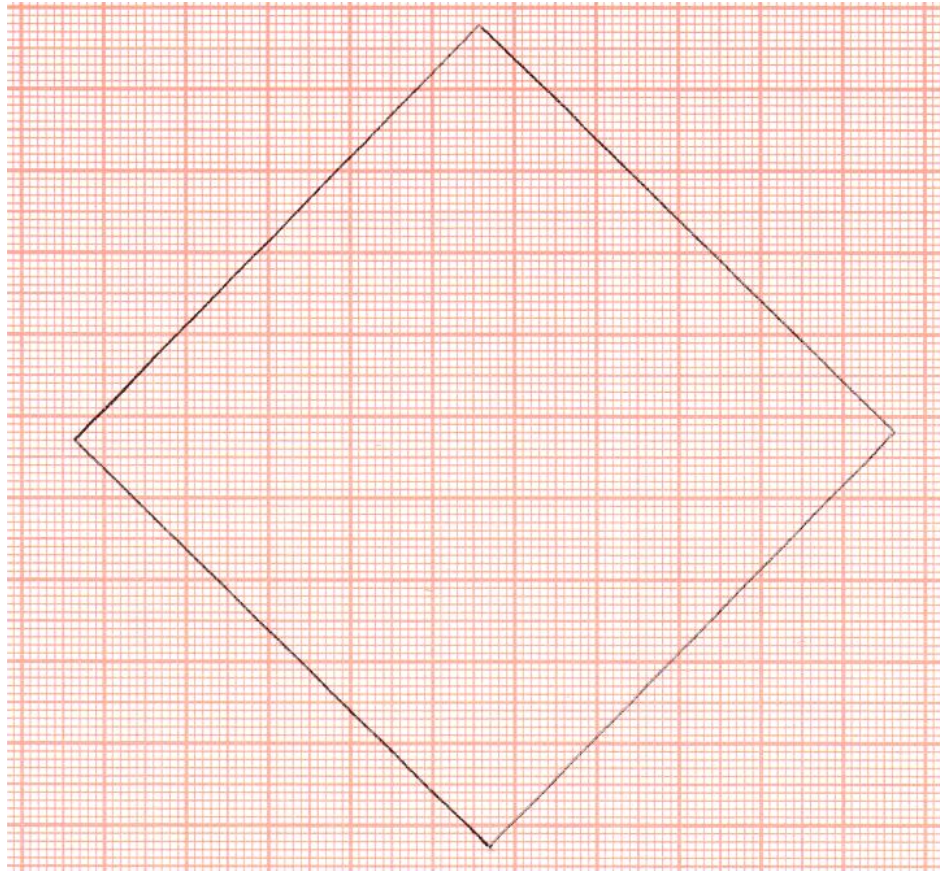


Figura 5.3.3. 1: Rombo trazado por la máquina CNC feed-drive.

En la figura se observa claramente la trayectoria. Cabe mencionar, que, para poder trazar correctamente la figura, se fijó un número de 3 repeticiones, con lo que se aseguró que la máquina, además de la precisión deseada posee repetibilidad en el proceso. La trayectoria empieza en la parte inferior del rombo y sigue hacia la izquierda y hacia arriba, siguiendo luego hacia arriba y hacia la derecha. El tercer trazo se realiza siguiendo una trayectoria hacia abajo y hacia la derecha y finalmente, se traza la última parte del rombo hacia abajo y hacia la izquierda, repitiendo el proceso 3 veces (para este caso).

Otro punto importante es que el robot se programó para avanzar a la posición inicial del rombo en los ejes Y y X , mientras que el eje Z se mantuvo inmóvil. Posteriormente se movió el eje Z y se mantuvo la posición de los otros dos ejes hasta que este llega a la posición deseada. De esta forma se aseguró que no existiera arrastre en la pluma usada para el dibujo.

Se puede observar como las esquinas, contrario a los resultados que se tenían de manera previa, son completamente en ángulo recto y ya no poseen los redondeos que se tenían anteriormente. Igualmente, no se observan los sobretiros que se tenían al cambiar de dirección, lo que indica que el control de trayectoria con compensación de fricción se encuentra trabajando correctamente.

Es importante recalcar que para que el control de trayectoria funcione de la mejor manera posible, es necesario que la trayectoria trazada sea una trayectoria continua y sin interrupciones, lo que permite que el robot funcione de manera correcta y con un error mínimo.

El resultado de la segunda trayectoria, correspondiente al triángulo, puede ser observado en la figura 5.3.3.2.

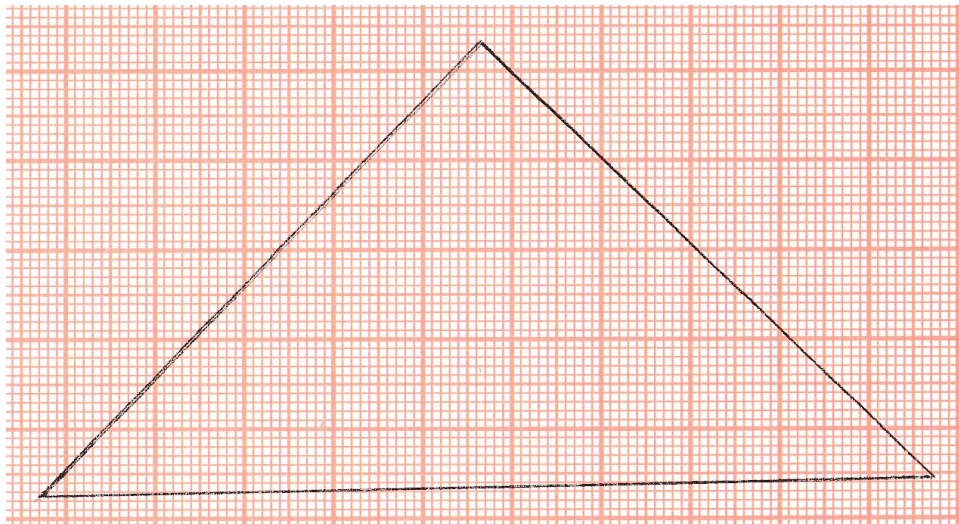


Figura 5.3.3. 2: Triángulo trazado por la máquina CNC feed-drive.

En la figura anterior puede ser observado como incluso al tener ángulos más cerrados (menores a 90°) en las puntas de la izquierda y de la derecha, el CNC sigue realizando el trazo de manera correcta. También se observa que la máquina no posee sobretiro ni redondeos en las puntas, lo cual se debe a la precisión lograda con el control de trayectoria. Se debe recordar que esta llegó a $50\mu m$ en el eje X y a $25\mu m$ en el eje Y , lo que es difícilmente observable a plena vista.

Al igual que con la figura anterior, se hizo la repetición del trazo 3 veces para asegurar que el proceso tiene repetibilidad, lo cual se está cumpliendo al no tener variaciones en las líneas dibujadas.

5.4 Conclusiones

Los resultados obtenidos en un estudio constituyen la parte más importante del mismo, puesto que, por medio de su observación, estudio y análisis, es posible extraer las conclusiones que permiten comprobar si las hipótesis e ideas desarrolladas a lo largo del proceso son correctas, incorrectas, si se encuentran completas o pueden seguir siendo mejoradas.

En el caso del estudio de fricción, la mejor manera de analizar los datos es mediante gráficas, las cuales hacen posible estudiar de manera observable las cuantificaciones de los resultados. En los sistemas industriales, dependiendo de la función para la que son usados, es importante considerar el error, puesto que algunas aplicaciones requieren mayor precisión y exactitud, por lo que la mejora en el control por medio de la manipulación de este debe ser documentada y observable.

Muchas de las aplicaciones más delicadas y que requieren mayor precisión, solicitan una precisión en el robot de un milésimo de pulgada, equivalente a $0.025mm$, la cual fue alcanzada en el eje Y . En el eje X sigue faltando más trabajo, lo que es razonable dado que es el eje que mayor masa tiene que mover, por lo que los efectos físicos a los que se ve sometido son mayores y más difíciles de compensar.

A pesar de todo, se tiene que en los resultados de las figuras trazadas, la mejora es observable a plena vista, por lo que para seguir mejorando el robot, se tendría que usar instrumentos de precisión para documentar errores menores.

Conclusiones generales

De acuerdo con los resultados obtenidos en esta tesis se considera que los objetivos planteados para el trabajo de tesis han sido cumplidos de manera satisfactoria.

El desarrollo del modelo dinámico del robot, incluyendo el modelado de los cuatro tipos de fricción involucrados en el movimiento de los ejes del robot CNC feed-drive, resultó de gran utilidad para realizar el ajuste de los 8 parámetros involucrados en el modelo de fricción desarrollado, lo que permitió que usando simulaciones se estableciera un aproximado de su valor, esto fue a prueba y error comparando los resultados de las simulaciones con los datos experimentales de cada grado de libertad.

Los resultados de las simulaciones realizadas con el modelo dinámico incluyendo la fricción, muestran que entre más masa tiene que mover un grado de libertad más fricción presenta. En eje *X* que mueve una masa de aproximadamente 48Kg presentó una fricción estática de 2.89Nm, mientras que en *Y*, que mueve una masa aproximadamente de 26Kg, presentó una fricción estática de 1.77Nm.

Los resultados de las simulaciones y los resultados experimentales presentaron una correlación del 89% en *Y* y *X*, de acuerdo con la masa que tienen que mover estos dos ejes se considera una buena aproximación del modelo dinámico, aunque consideramos que se podría mejorar en trabajos futuros.

El uso del controlador de trayectoria logró mejorar la precisión del eje *X* en 19.2 veces y en el eje *Y* en 17.63 veces. En el eje *Z* no se instrumentó porque ya se tenía con el controlador de posición una precisión de 20 micras.

La precisión mejoro considerablemente al incluir la compensación de fricción y el controlador de trayectoria en los ejes *Y* y *X*, logrado pasar en el eje *X* de 10mm a 50micras y en el eje *Y* de 5mm a 25 micras. Con lo anterior se obtuvo una mejora sustancial en la precisión en cada uno de estos ejes.

Este maquina CNC ya presenta una precisión bastante alta para poder realizar diversas aplicaciones en la maestría, por lo cual es una buena aportación al programa ya que todo el sistema de hardware, firmware y software es de arquitectura abierta lo que permitirá a las generaciones futuras realizar prácticas experimentales para estudiar estos fenómenos de fricción y seguir mejorando el rendimiento del CNC.

Con la precisión alcanzada se pueden realizar aplicaciones de alta calidad, tal como una máquina CNC para fabricar circuitos impresos, impresora 3D de uso continuo, Pick and Place para diversos componentes, cortadora láser, palpador para instrumentar un escáner 3D, etc.

Apéndices

Apéndice A: Cálculo de parámetros dinámicos.

Como un apartado especial, se tiene que el conocimiento de los parámetros dinámicos resulta esencial para asegurar la calidad del modelo dinámico empleado para el estudio y análisis de un sistema.

En el caso del robot estudiado, se tiene un total de 18 parámetros dinámicos (sin incluir los del modelo de fricción) para cada eje del mecanismo, por lo que se tiene un total de 54 parámetros, cuyos valores es necesario conocer para la realización de las simulaciones.

Un valor inicial de dichos parámetros puede ser obtenido por medio de un cálculo teórico que permite conocer la magnitud ideal para cada uno de estos elementos y que permitirá al usuario el planteamiento inicial del modelo. Como se sabe, aunque el comportamiento de un mecanismo no sea ideal tiende a seguir lo dictado por la teoría, por lo que se tiene que el valor teórico resulta un primer acercamiento al valor real muy bueno, y que puede ser ajustado a posteriori para terminar de encajar con las características del robot.

Para este cálculo, es necesario recordar que se tienen 3 tipos diferentes de parámetros dinámicos: coeficientes de rigidez torsional/axial, coeficientes de viscosidad y coeficientes de inercia/masa.

Se iniciará con el cálculo de los coeficientes de rigidez torsional para los ejes del mecanismo. Estos pueden ser calculado con la ecuación 1:

$$K_{torsional} = \left[\frac{\pi\rho}{32} D^4 L_x \right] \left[2\pi \left(\frac{1}{4L_x} \sqrt{\frac{G}{e}} \right) \right]^2 \quad (1)$$

donde:

ρ : densidad media del material del eje

D : diámetro del eje

L_x : longitud del eje

G : constante con valor de $\frac{81 \times 10^{-11} N}{m^2}$

e : constante del material $\frac{7800 Kg}{m^2}$

A continuación, se tiene la fórmula empleada para el cálculo de la rigidez en los elementos axiales:

$$K_{axial} = \frac{4AE}{L_x} \quad (2)$$

donde:

A : área transversal del elemento

L_x : longitud del eje

E : módulo de elasticidad de Young, valor $\frac{210 \times 10^9 N}{m^2}$

El cálculo de las inercias de los elementos con movimiento torsional puede ser efectuado mediante la fórmula:

$$J = \frac{\pi \rho}{32} LD^4 \quad (3)$$

donde:

ρ : densidad media del material del eje

L : longitud del eje

D : diámetro del eje

Los coeficientes de fricción viscosa están dados por la calidad del aceite empleado para la lubricación de las partes y puede ser encontrado en las especificaciones de estos.

De igual manera, la masa de los elementos axiales puede ser conocida con el empleo de una báscula para comprobar el valor real del parámetro.

Con la aplicación de estas fórmulas, se tiene la siguiente tabla de valores obtenidos para los parámetros dinámicos del modelo dinámico (sin incluir los parámetros del modelo de fricción):

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

| Símbolo | Valor | Símbolo | Valor |
|----------|---------------------------------|----------|---------------------------------|
| K_{m1} | 1500 Nm/rad | b_{s2} | $5.1e^{-3}$ Nms/rad |
| K_{g1} | 1318.76 Nm/rad | b_{n2} | $2.3e^{-1}$ Nm/s |
| K_{c1} | 1162.45 Nm/rad | b_{r2} | $2.1e^{-1}$ Nm/s |
| K_{s1} | 8028.13 Nm/rad | J_{m2} | $1.4562e^{-6}$ kgm ² |
| K_{r1} | 9500.84 Nm/rad | J_{g2} | $0.9586e^{-6}$ kgm ² |
| K_{n1} | 95500.51 Nm/rad | J_{c2} | $1.8694e^{-6}$ kgm ² |
| b_{m1} | $1.8e^{-3}$ Nms/rad | J_{s2} | $4.9521e^{-6}$ kgm ² |
| b_{g1} | $2.5e^{-3}$ Nms/rad | m_{s2} | 0.25 kg |
| b_{c1} | $5.4e^{-3}$ Nms/rad | m_{t2} | 26 kg |
| b_{s1} | $5.1e^{-3}$ Nms/rad | K_{m1} | 1300 Nm/rad |
| b_{n1} | $2.3e^{-1}$ Nm/s | K_{g3} | 1127.49 Nm/rad |
| b_{r1} | $2.1e^{-1}$ Nm/s | K_{c3} | 5228.87 Nm/rad |
| J_{m1} | $1.9655e^{-3}$ kgm ² | K_{s3} | 80282.13 Nm/rad |
| J_{g1} | $1.3514e^{-3}$ kgm ² | K_{r3} | 1242.65 Nm/rad |
| J_{c1} | $2.0255e^{-3}$ kgm ² | K_{n3} | 95176.5184 Nm/rad |
| J_{s1} | $5.5576e^{-3}$ kgm ² | b_{m3} | $2.3e^{-3}$ Nms/rad |
| m_{s1} | 0.3 kg | b_{g3} | $2.8e^{-3}$ Nms/rad |
| m_{t1} | 48 kg | b_{c3} | $5.4e^{-3}$ Nms/rad |
| K_{m2} | 1500 Nm/rad | b_{s3} | $5.1e^{-3}$ Nms/rad |
| K_{g2} | 1320.48 Nm/rad | b_{n3} | $2.3e^{-3}$ Nm/s |
| K_{c2} | 1543.15 Nm/rad | b_{r3} | $2.1e^{-3}$ Nm/s |
| K_{s2} | 8191.62 Nm/rad | J_{m3} | $1.1263e^{-6}$ kgm ² |
| K_{r2} | 9360.13 Nm/rad | J_{g3} | $0.8569e^{-6}$ kgm ² |
| K_{n2} | 94260.18 Nm/rad | J_{c3} | $1.4598e^{-6}$ kgm ² |
| b_{m2} | $5.4e^{-3}$ Nms/rad | J_{s3} | $3.8954e^{-6}$ kgm ² |
| b_{g2} | $1.9e^{-3}$ Nms/rad | m_{s3} | 0.3 kg |
| b_{c2} | $5.4e^{-3}$ Nms/rad | m_{t3} | 2.5 kg |

Es importante resaltar que estos valores constituyen una magnitud inicial que posteriormente se ajustó en las simulaciones para acercar la respuesta a la de los resultados experimentales, debido a que se tiene un factor de eficiencia a tomar en cuenta y que hace que el comportamiento real de los elementos difiera levemente del comportamiento teórico.

Apéndice B: Constancia de Ponencia



Apéndice C: Artículo publicado

Artículos del Congreso Internacional
de Investigación Academia Journals
Fresnillo 2022

© Academia Journals 2022

Fresnillo, Zacatecas, México
28, 29, y 30 de marzo, 2022

Modelado Matemático Utilizando el Método de Parámetros Agrupados de un Robot Tipo CNC Usado como Impresora 3D en Plataforma FPGA

Ing. Margarita Carmina García López¹, Dr. Sergio Vergara Limón², Dra. María Aurora Díoizcora Vargas Treviño³, Dr. Jesús López Gómez⁴ y Dra. Amparo Palomino Merino⁵

Resumen— En este artículo se presenta la obtención del modelo dinámico de un robot tipo CNC empleado como impresora 3D que se desarrolló y se encuentra en las instalaciones de la maestría en Ciencias de la Electrónica Opción Automatización de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). A lo largo del artículo se da una breve semblanza del estado del arte de los robots CNC actuales y de las características principales del robot empleado para el estudio. También se desarrolla la explicación de la metodología empleada junto con la importancia de la obtención del modelo dinámico del robot para estudios posteriores y para el análisis de las respuestas de cada uno de los grados de libertad. Se finaliza con las simulaciones correspondientes obtenidas del modelo dinámico obtenido.

Palabras clave— Modelado matemático, parámetros agrupados, CNC, FPGA

Introducción

La tecnología se ha vuelto una parte esencial en la vida de las personas. Es por esto por lo que una gran parte de los avances tecnológicos se han centrado en el área de la robótica y han sido impulsados por el deseo de obtener una mejor calidad de vida, servicios y productos a un costo cada vez más reducido. Dentro del campo de la robótica, los robots manipuladores han demostrado ser de gran interés por su amplia variedad de funciones, siendo uno de los mecanismos más empleados el robot cartesiano gracias a su capacidad de generar trayectorias complejas en un espacio 3D, lo que lo hace ideal para manipular objetos o manufacturar productos. Este tipo de robots pueden ser estudiados a mayor detenimiento para mejorar su funcionamiento, pudiendo mejorarse en dos aspectos principales: reduciendo el costo de fabricación y mejorando la eficiencia de su funcionamiento (A. Moroni, 2019).

El desempeño de este tipo de mecanismos ha sido estudiado por diversos autores, estudiando los diversos fenómenos a los que se ven sometidos como lo son los diferentes tipos de fricción, la gravedad y fenómenos causados por las partes mecánicas de los mismos. Es una realidad que en diversos trabajos se muestran errores generados cuando la maquinaria es incapaz de seguir de manera perfecta la trayectoria deseada por el usuario debido a algún fenómeno físico particular. Un punto en común de todos los estudios realizados es que cada uno de ellos genera un modelo dinámico que busca expresar el comportamiento de los fenómenos presentes en el mecanismo estudiado, por lo que es importante resaltar la importancia de una metodología adecuada para la obtención de este que permita tomar en consideración la mayor cantidad de fenómenos posibles (M. F. Corapsiz y K. Erenturk, 2016). Debido al continuo desarrollo de aplicaciones para las impresoras 3D, se considera importante ahondar en el estudio de estas, dado que cualquier mejora en costo o eficiencia de funcionamiento representa un avance considerable para las áreas en que se utilizan este tipo de mecanismos.

Descripción del Método

Antecedentes

La aparición de los primeros robots industriales se remonta a la industria textil del siglo XVIII, cuando Joshep Jacquard inventa en 1801 una máquina textil que empleaba tarjetas perforadas para programar acciones. Esto marca el inicio de la automatización industrial, lo que desemboca a la implementación de dispositivos automáticos en la producción, provocando una mejora continua en los mecanismos empleados en la industria.

Posteriormente se tiene un avance significativo cuando el control numérico computarizado (CNC) es desarrollado durante la segunda guerra mundial como resultado de la alta precisión requerida para mecanizar una serie

¹ Ing. Margarita Carmina García López es Alumno de la Maestría en Ciencias de la Electrónica Opción en Automatización en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México. margarita.garcialo@alumno.buap.mx (autor correspondiente)

² El Dr. Sergio Vergara Limón es Profesor de la Maestría en Ciencias de la Electrónica Opción en Automatización en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México. sergio.vergara@correo.buap.mx

³ La Dra. María Aurora Díoizcora Vargas Treviño es Profesora de la Maestría en Ciencias de la Electrónica Opción en Automatización en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México. aurora.vargas@correo.buap.mx

⁴ El Dr. Jesús López Gómez es Profesor de la División Académica de Ingeniería y Arquitectura, en la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (DAIA-UJAT), Tabasco, México. jlo6599@docente.ujat.mx

⁵ La Dra. Ampara Palomino Merino es Profesora de la Maestría en Ciencias de la Electrónica Opción en Automatización en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México. amparo.palomino@correo.buap.mx

Control de seguimiento de trayectoria y contorno basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

de elementos de alto rendimiento, como los componentes de los aviones militares. Los primeros robots nacieron de la combinación de los enlaces mecánicos del teleoperador con la autonomía y de la capacidad de programar de la que dotó a las máquinas el control numérico., siendo la primera máquina CNC creada en Massachusetts en 1952, en la forma de una fresadora modificada (M. W. Spong y M. Vidyasagar, 1989; A. Moroni, 2017).

Uno de los usos más populares en la actualidad para los robots tipo CNC es el de impresora 3D. La impresión 3D se basa en tecnologías de procesos aditivos o por inyección de polímeros que permite, a partir de un modelo digital, manipular los materiales para ir agregando capas de manera controlada y precisa hasta construir un objeto en tres dimensiones. El inicio de las impresoras 3D puede ser rastreado a las primeras impresoras de tinta en 1976 y el concepto se desarrolla en 1984 con el invento de la estereolitografía por Charles Hull. En 1989, Hull patenta el concepto y funda la primera compañía en el sector de las impresoras 3D (A. Moroni, 2019). Actualmente en el mercado se encuentran disponibles robots cartesianos sofisticados empleados para la impresión 3D, sin que esto suponga de manera alguna que no se tenga espacio para la mejora de estos. Como se mencionó anteriormente, la mejora de estos mecanismos requiere el análisis de su comportamiento, para lo cual la obtención de su modelo dinámico es esencial.

Diseño del modelo matemático

Las principales características del prototipo CNC empleado como impresora 3D que se desarrolló en la BUAP en la Maestría en Ciencias de la Electrónica Opción Automatización, pueden ser observadas en la tabla 1 (C. Jiménez Martínez, 2019).

| Descripción | Requerimiento |
|------------------------------|---|
| Número de grados de libertad | 3 (X, Y, Z) |
| Ejes X y Y | <ul style="list-style-type: none"> Desplazamiento: X=276mm, Y=245mm Tornillo embalado de 12mm Guía de alta precisión de 32mm Bloque para guía de 32mm |
| Eje Z | <ul style="list-style-type: none"> Desplazamiento: 145mm Tornillo embalado de 12mm Guía de alta precisión de 15mm Bloque para guía de 15mm |
| Tamaño (mm) | 950 × 1470 × 860 |
| Volumen de impresión (mm) | 214 × 214 × 70 |
| Alimentación | 120V _{CA} y 12V _{CD} |
| Cama caliente | MK3 |
| Extrusor | Metal J-Head |
| Resolución | $\Delta x = 0,286\mu\text{m}$ $\Delta y = 0,287\mu\text{m}$ $\Delta z = 0,171\mu\text{m}$ |
| Velocidad | $v_x = 35 \text{ mm/s}$ $v_y = 25 \text{ mm/s}$ $v_z = 21 \text{ mm/s}$ |
| Material de impresión | PLA |
| Software | Abierto |
| Conectividad | Wifi |
| Sistemas operativos | Abierto |

Tabla 1: Principales características del robot CNC

Como se puede observar, el robot posee 3 grados de libertad, cada uno de los cuales tiene una estructura similar, la cual se encuentra conformada por un motor, su respectivo reductor (caja de engranes), un cople que une el eje de la caja de engranes con el siguiente elemento mecánico consistente en un tornillo embalado cuya respectiva tuerca se encuentra acoplada a lo que se denomina mesa de trabajo. Consulte figura 2. Es importante notar que para el eje X, la mesa de trabajo es quien se encarga de cargar y mover los ejes Y-Z. De manera análoga, se tiene que la mesa de trabajo del eje Y se encarga de cargar y mover el eje Z del mecanismo y finalmente, la mesa de trabajo del eje Z se encarga de mover el efector del robot, compuesto en este caso por el alimentador de material de la impresora 3D. El

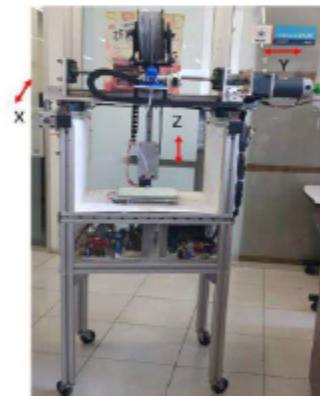


Figura 1. Robot CNC de 3GDL



Figura 2. Composición de un eje del robot.

planteamiento del modelo matemático del robot se basa en el de un diagrama esquemático del sistema CNC feed-drive de cada uno de los ejes. De esta forma, se tiene la representación de cada una de sus partes, el cual es el mismo para cada grado de libertad del robot, tomando en cuenta que para el eje X, la masa m_{t1} se conforma de la masa de la mesa de trabajo sumada a la masa de los ejes Y-Z completos, para el eje Y la masa m_{t2} está conformada por la masa de la mesa de trabajo sumada a la masa del eje Z completo, y finalmente para el eje Z la masa m_{t3} se conforma únicamente de la masa de la mesa de trabajo (el efector del robot). Consulte figura 3.

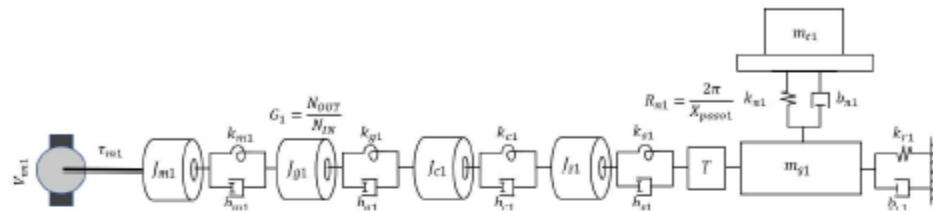


Figura 3. Diagrama esquemático de un grado de libertad del robot.

A continuación, se puede consultar la tabla 2 con las constantes empleadas en el diagrama esquemático para los ejes del robot, junto con las variables que se consideran en el modelo dinámico:

| Símbolo | Significado. | Símbolo | Significado. |
|----------|---|---------------------|--|
| K_{mt} | Rigidez del eje del motor [Nm/rad]. | J_{st} | Inercia del tornillo embalado [kgm ²]. |
| K_{gt} | Rigidez del mecanismo de la caja de engranes [Nm/rad]. | m_{st} | Masa del tornillo embalado y la tuerca [m]. |
| K_{ct} | Rigidez del cople [Nm/rad]. | m_{t1} | Masa de la mesa de trabajo [m]. |
| K_{st} | Rigidez torsional del tornillo embalado [N/m]. | θ_{mt} | Posición angular del eje del motor. |
| K_{rt} | Rigidez axial del tornillo embalado [N/m]. | θ_{gt} | Posición angular del eje de la caja de engranes. |
| K_{ut} | Rigidez de la unión entre la tuerca y la mesa de trabajo [N/m]. | θ_{ct} | Posición angular del cople. |
| b_{mt} | Coefficiente de fricción del eje del motor [Nms/rad]. | θ_{st} | Posición angular del tornillo embalado. |
| b_{gt} | Coefficiente de fricción de la caja de engranes [Nms/rad]. | X_{st} | Posición axial del tornillo embalado. |
| b_{ct} | Coefficiente de fricción del cople [Nms/rad]. | X_{t1} | Posición axial de la mesa de trabajo. |
| b_{st} | Coefficiente de fricción torsional del tornillo embalado [Nms/rad]. | $\dot{\theta}_{mt}$ | Velocidad angular del motor. |
| b_{nt} | Coefficiente de fricción de la mesa de trabajo [Nm/s]. | $\dot{\theta}_{gt}$ | Velocidad angular de la caja de engranes. |
| b_{rt} | Coefficiente de fricción axial del tornillo embalado [Nm/s]. | $\dot{\theta}_{ct}$ | Velocidad angular del cople. |
| J_{mt} | Inercia del motor [kgm ²]. | $\dot{\theta}_{st}$ | Velocidad angular del tornillo embalado. |
| J_{gt} | Inercia de la caja de engranes [kgm ²]. | \dot{X}_{st} | Velocidad axial del tornillo embalado. |
| J_{ct} | Inercia del cople [kgm ²]. | \dot{X}_{t1} | Velocidad axial de la mesa de trabajo. |

Tabla 2: Constantes y variables de los ejes del robot.

Tomando en cuenta el diagrama esquemático, las constantes y las variables, se plantea el movimiento final para cada uno de los grados de libertad del robot, los cuales son traducidos a coordenadas cartesianas que es lo que nos interesa para analizar la posición del robot cartesiano:

$$\begin{matrix} \text{EJE X} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{b1} + x_{t1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{EJE Y} \\ \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{b1} + x_{t1} \\ x_{b2} + x_{t2} \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{EJE Z} \\ \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{b1} + x_{t1} \\ x_{b2} + x_{t2} \\ x_{b3} + x_{t3} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La metodología empleada para la obtención del modelo dinámico del mecanismo es la aplicación de la ecuación de Euler-Lagrange, la cual parte de la consideración del estado instantáneo del sistema y del concepto de

desplazamiento virtual sobre el estado instantáneo (principio diferencial). Esta ecuación emplea el Lagrangiano del sistema, cuya representación matemática se encuentra escrita en la ecuación (1).

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q) \quad (1)$$

donde L representa el lagrangiano del sistema, K representa la energía cinética del sistema, U representa la energía potencial del sistema, q se refiere al vector de coordenadas generalizadas y \dot{q} representa a vector de derivadas de las coordenadas generalizadas (vector de velocidades del sistema).

A su vez, la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange se encuentra dada por la ecuación (2).

$$\tau = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} \quad (2)$$

donde τ representa el par aplicado (torque) del sistema.

Sin embargo, esta metodología (aunque efectiva y altamente documentada) puede ser mejorada para incluir más términos para obtener una mejor representación de los fenómenos del robot. Por ello, se emplea un híbrido de esta metodología con la de parámetros agrupados, lo cual permite agregar la energía disipativa del sistema (la cual se genera por la fricción de sus elementos). Para ello, tenemos la ecuación (3):

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] + \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial Dt(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \delta W(q, \dot{q})}{\partial q} \quad (3)$$

donde K representa la energía cinética total del sistema, U representa la energía potencial total del sistema, Dt representa la energía disipativa del sistema (a menudo obtenida por medio de la energía de disipación de Rayleigh), δW hace referencia a las fuerzas generalizadas del sistema, q se refiere al vector de coordenadas generalizadas y \dot{q} representa el vector de velocidades del sistema. Esta ecuación se conoce como ecuación de Lagrange y permite incluir los efectos de los fenómenos de fricción como funciones, a diferencia de la ecuación de Euler-Lagrange en donde generalmente se considera a la fricción como una constante. Del análisis del diagrama esquemático se obtienen las funciones de energía para los ejes del sistema.

$$K_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) = \frac{1}{2} J_{mi} \dot{\theta}_{mi}^2 + \frac{1}{2} J_{gi} \dot{\theta}_{gi}^2 + \frac{1}{2} J_{ci} \dot{\theta}_{ci}^2 + \frac{1}{2} J_{si} \dot{\theta}_{si}^2 + \frac{1}{2} m_{si} (\sum_{k=1}^i \dot{X}_{si}^2) + \frac{1}{2} m_{ti} (\sum_{k=1}^i \dot{X}_{ti}^2) \quad (4)$$

$$U_i(\varphi_i) = \frac{1}{2} k_{mi} (\theta_{mi} - G_i \theta_{gi})^2 + \frac{1}{2} k_{gi} (\theta_{gi} - \theta_{ci})^2 + \frac{1}{2} k_{ci} (\theta_{ci} - \theta_{si})^2 + \frac{1}{2} k_{si} (\theta_{si} - R_{ni} X_{si})^2 + \frac{1}{2} k_{ri} X_{si}^2 + \frac{1}{2} k_{ti} (X_{si} - X_{ti})^2 \quad (5)$$

$$D_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) = \frac{1}{2} b_{mi} (\dot{\theta}_{mi} - G_i \dot{\theta}_{gi})^2 + \frac{1}{2} b_{gi} (\dot{\theta}_{gi} - \dot{\theta}_{ci})^2 + \frac{1}{2} b_{ci} (\dot{\theta}_{ci} - \dot{\theta}_{si})^2 + \frac{1}{2} b_{si} (\dot{\theta}_{si} - R_{ni} \dot{X}_{si})^2 + \frac{1}{2} b_{ri} \dot{X}_{si}^2 + \frac{1}{2} b_{ti} (\dot{X}_{si} - \dot{X}_{ti})^2 \quad (6)$$

$$\delta W_i(\varphi_i) = \tau_{mi} \delta \theta_{mi} \quad (7)$$

donde:

$$R_{ni} = \frac{X_{pasos_i}}{2\pi \dot{\varphi}_i}$$

$\dot{\varphi}_i$: eficiencia i

Con la aplicación de la ecuación de Lagrange, se obtiene el sistema de ecuaciones que describe el comportamiento de cada una de las variables del mecanismo para los tres grados de libertad del sistema CNC.

$$J_{m1} \ddot{\theta}_{m1} + k_{m1} (\theta_{m1} - G_1 \theta_{g1}) + b_{m1} (\dot{\theta}_{m1} - G_1 \dot{\theta}_{g1}) = \tau_{m1} \quad (8)$$

$$J_{g1} \ddot{\theta}_{g1} + k_{m1} (G_1 \theta_{g1} - \theta_{m1}) + k_{g1} (\theta_{g1} - \theta_{c1}) + b_{m1} G_1 (G_1 \dot{\theta}_{g1} - \dot{\theta}_{m1}) + b_{g1} (\dot{\theta}_{g1} - \dot{\theta}_{c1}) = 0 \quad (9)$$

$$J_{c1} \ddot{\theta}_{c1} + k_{g1} (\theta_{c1} - \theta_{g1}) + k_{c1} (\theta_{c1} - \theta_{s1}) + b_{g1} (\dot{\theta}_{c1} - \dot{\theta}_{g1}) + b_{c1} (\dot{\theta}_{c1} - \dot{\theta}_{s1}) = 0 \quad (10)$$

$$J_{s1} \ddot{\theta}_{s1} + k_{c1} (\theta_{s1} - \theta_{c1}) + k_{s1} (\theta_{s1} - R_{n1} X_{s1}) + b_{c1} (\dot{\theta}_{s1} - \dot{\theta}_{c1}) + b_{s1} (\dot{\theta}_{s1} - R_{n1} \dot{X}_{s1}) = 0 \quad (11)$$

$$(m_{s1} + m_{e2} + m_{t3}) \ddot{X}_{s1} + k_{r1} R_{n1} (R_{n1} X_{s1} - \theta_{r1}) + k_{r1} X_{s1} + k_{t1} (X_{s1} - X_{t1}) + b_{r1} R_{n1} (R_{n1} \dot{X}_{s1} - \dot{\theta}_{r1}) + b_{r1} \dot{X}_{s1} + b_{t1} (\dot{X}_{s1} - \dot{X}_{t1}) = 0 \quad (12)$$

$$(m_{t1} + m_{e2} + m_{t3}) \ddot{X}_{t1} + k_{t1} (X_{t1} - X_{s1}) + b_{t1} (\dot{X}_{t1} - \dot{X}_{s1}) = 0 \quad (13)$$

$$J_{m2} \ddot{\theta}_{m2} + k_{m2} (\theta_{m2} - G_2 \theta_{g2}) + b_{m2} (\dot{\theta}_{m2} - G_2 \dot{\theta}_{g2}) = \tau_{m2} \quad (14)$$

$$J_{g2}\ddot{\theta}_{g2} + k_{m2}(G_2\theta_{g2} - \theta_{m2}) + k_{g2}(\theta_{g2} - \theta_{c2}) + b_{m2}G_2(G_2\dot{\theta}_{g2} - \dot{\theta}_{m2}) + b_{g2}(\dot{\theta}_{g2} - \dot{\theta}_{c2}) = 0 \quad (15)$$

$$J_{c2}\ddot{\theta}_{c2} + k_{g2}(\theta_{c2} - \theta_{g2}) + k_{c2}(\theta_{c2} - \theta_{s2}) + b_{g2}(\dot{\theta}_{c2} - \dot{\theta}_{g2}) + b_{c2}(\dot{\theta}_{c2} - \dot{\theta}_{s2}) = 0 \quad (16)$$

$$J_{s2}\ddot{\theta}_{s2} + k_{c2}(\theta_{s2} - \theta_{c2}) + k_{s2}(\theta_{s2} - R_{n2}X_{s2}) + b_{c2}(\dot{\theta}_{s2} - \dot{\theta}_{c2}) + b_{s2}(\dot{\theta}_{s2} - R_{n2}\dot{X}_{s2}) = 0 \quad (17)$$

$$(m_{s1} + m_{s2})\ddot{X}_{s2} + k_{s2}R_{n2}(R_{n2}X_{s2} - \theta_{s2}) + k_{r2}X_{s2} + k_{t2}(X_{s2} - X_{t2}) + b_{s2}R_{n2}(R_{n2}\dot{X}_{s2} - \dot{\theta}_{s2}) + b_{r2}\dot{X}_{s2} + b_{t2}(\dot{X}_{s2} - \dot{X}_{t2}) = 0 \quad (18)$$

$$(m_{t1} + m_{t2})\ddot{X}_{t2} + k_{t2}(X_{t2} - X_{s2}) + b_{t2}(\dot{X}_{t2} - \dot{X}_{s2}) = 0 \quad (19)$$

$$J_{m3}\ddot{\theta}_{m3} + k_{m3}(\theta_{m3} - G_3\theta_{g3}) + b_{m3}(\dot{\theta}_{m3} - G_3\dot{\theta}_{g3}) = \tau_{m3} \quad (20)$$

$$J_{g3}\ddot{\theta}_{g3} + k_{m3}(G_3\theta_{g3} - \theta_{m3}) + k_{g3}(\theta_{g3} - \theta_{c3}) + b_{m3}G_3(G_3\dot{\theta}_{g3} - \dot{\theta}_{m3}) + b_{g3}(\dot{\theta}_{g3} - \dot{\theta}_{c3}) = 0 \quad (21)$$

$$J_{c3}\ddot{\theta}_{c3} + k_{g3}(\theta_{c3} - \theta_{g3}) + k_{c3}(\theta_{c3} - \theta_{s3}) + b_{g3}(\dot{\theta}_{c3} - \dot{\theta}_{g3}) + b_{c3}(\dot{\theta}_{c3} - \dot{\theta}_{s3}) = 0 \quad (22)$$

$$J_{s3}\ddot{\theta}_{s3} + k_{c3}(\theta_{s3} - \theta_{c3}) + k_{s3}(\theta_{s3} - R_{n3}X_{s3}) + b_{c3}(\dot{\theta}_{s3} - \dot{\theta}_{c3}) + b_{s3}(\dot{\theta}_{s3} - R_{n3}\dot{X}_{s3}) = 0 \quad (23)$$

$$m_{s3}\ddot{X}_{s3} + k_{s3}R_{n3}(R_{n3}X_{s3} - \theta_{s3}) + k_{r3}X_{s3} + k_{t3}(X_{s3} - X_{t3}) + b_{s3}R_{n3}(R_{n3}\dot{X}_{s3} - \dot{\theta}_{s3}) + b_{r3}\dot{X}_{s3} + b_{t3}(\dot{X}_{s3} - \dot{X}_{t3}) = 0 \quad (24)$$

$$m_{t3}\ddot{X}_{t3} + k_{t3}(X_{t3} - X_{s3}) + b_{t3}(\dot{X}_{t3} - \dot{X}_{s3}) + F_{s3} = 0 \quad (25)$$

Con el planteamiento de las ecuaciones del modelo dinámico, es posible obtener resultados de la simulación para analizar la posición y velocidad de cada uno de los componentes en los tres grados de libertad del robot.

Diseño electrónico en plataforma FPGA

El prototipo de robot CNC desarrollado tiene incorporado un sistema embebido basado en un FPGA Cyclone V 5CEBA4F23C7N de Altera, el cual establece los sistemas de control mediante un Firmware desarrollado en el software Quartus II mediante lenguaje AHDL. En la figura 4 se puede observar el diagrama a bloques del firmware que permite que el robot CNC funcione como impresora 3D:

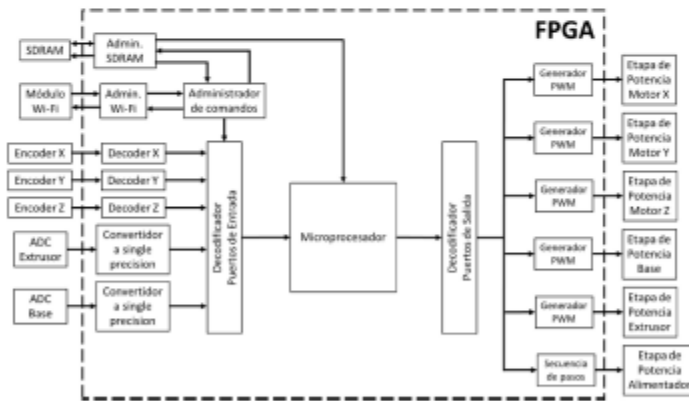


Figura 4. Diagrama general del sistema embebido.

El FPGA se encarga de la lectura de los sensores del sistema y del procesamiento de señales, así como de la aplicación de las leyes de control y de la generación de señales PWM que sirven para controlar los elementos del robot (motores y termo-resistencias).

Comentarios Finales

Resultados de simulación del modelo

Como se mencionó anteriormente, el modelo dinámico obtenido permite la obtención de las señales generadas que representan el comportamiento del robot ante una entrada senoidal. Se plantea esta señal de entrada para observar

la respuesta en las señales al tener los ejes oscilando, lo que permite observar comportamientos repetitivos causados por los fenómenos físicos representados en el modelo dinámico. Particularmente, resultan de interés las señales de posición y velocidad del motor, de la caja de engranes y de la mesa de trabajo de cada eje, por lo que se tienen los siguientes resultados de simulación al implementar las ecuaciones del modelo dinámico y resolverlas con ayuda del software matemático Matlab.

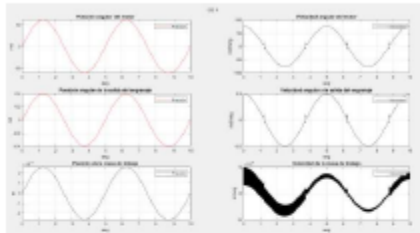


Figura 5. Resultados de la simulación del eje X

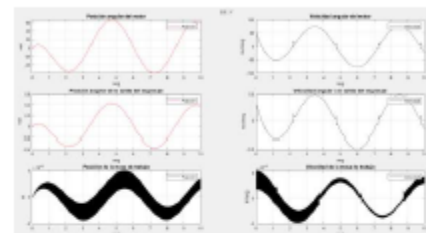


Figura 6. Resultados de la simulación del eje Y

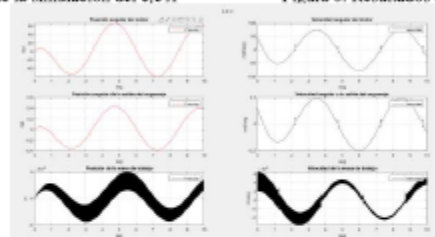


Figura 7. Resultados de la simulación del eje Z

En los resultados de las simulaciones se observa que los tres ejes de libertad respetan la señal de entrada senoidal, sin embargo, en los ejes Y-Z se tienen deformaciones cuando el robot empieza a trabajar. Adicionalmente, se tiene que la posición de la mesa de trabajo de ambos ejes tiene un ruido fuerte causado por los coeficientes de rigidez de sus elementos mecánicos. Adicionalmente, se observa una deformación en las velocidades de los tres ejes cuando el robot pasa por el punto de origen, que se debe a la disminución de la velocidad de este, lo que indica que el robot tiene problemas para moverse a bajas velocidades.

Conclusiones

Después de haber desarrollado el modelo dinámico, es posible observar las ventajas de este, que permiten analizar la respuesta del sistema sin desgastar al robot con pruebas experimentales. De esta forma, es posible aplicar diversas leyes de control y observar la respuesta del sistema. Es importante recalcar que entre más leyes físicas se consideren al plantear las ecuaciones que derivan en el modelo del robot, es posible mejorar la representación matemática del mismo y volverla más apegada a la realidad. El considerar diversos fenómenos para el planteamiento de las ecuaciones matemáticas de un mecanismo permite obtener un número ilimitado de modelos dinámicos, cada uno de los cuales puede tener un diferente grado de proximidad con la respuesta experimental del robot que depende de la cantidad de fenómenos presentes en el robot y que se logren representar de manera adecuada en el modelo dinámico. La obtención del modelo dinámico del robot CNC empleado como impresora permitió ahorrar tiempo de análisis al representar de manera teórica la respuesta del sistema, pues al no tener que hacer pruebas experimentales, es posible pasar más tiempo analizando las respuestas del sistema de manera teórica.

Referencias

- A. Moroni. "Automatización y Tecnología CNC". [En línea]. Noticias, 2017. Disponible en: <http://innovacion.uas.edu.mx/automatizacion-y-tecnologia-cnc/>
- A. Moroni. "Historia de las impresoras 3D". Noticias, 2019. [En línea]. Disponible en: <http://impresoras3d.com/impresoras-3d-historia/>
- C. Jiménez Martínez, "Implementación de un CNC con 3 grados de libertad aplicado a impresión 3D", Tesis de Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla 2019.
- M. F. Corapsiz and K. Erenturk, "Trajectory Tracking Control and Contouring Performance of Three-Dimensional CNC", in IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 63, no. 4, pp. 2212–2220, April 2016. DOI: 10.1109/TIE.2015.2509950.
- M. W. Spong, M. Vidyasagar, "Robot Dynamics and Control". Canada: John Wiley & Sons, Inc., 1989

Apéndice D: Certificado de idioma



CAMBRIDGE ENGLISH
Language Assessment
Part of the University of Cambridge

**Cambridge English Entry Level Certificate in
ESOL International (Entry 3) (Preliminary)***

This is to certify that

MARGARITA CARMINA GARCÍA LÓPEZ

has been awarded

Pass with Merit

in the

Preliminary English Test

Council of Europe Level B1

Date of Examination **DECEMBER (A) 2014**
Place of Entry **PUEBLA**
Reference Number **14CMX0035083**
Accreditation Number **500/2414/0**

Saul Nassé
Saul Nassé
Chief Executive

*This level refers to the UK National Qualifications Framework

Regulated by
Ofqual
For more information see <http://register.ofqual.gov.uk>

Date of Issue **29/01/15**
Certificate Number **0047824416**

Llywodraeth Cymru
Welsh Government

CEA
Accreditation

00939061

DP809

Control de seguimiento de trayectoria y contorno basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

PRELIMINARY ENGLISH TEST (PET)

PET is a general proficiency examination at Level B1 in the Council of Europe's Common European Framework of Reference. It is at Entry Level 3 in the UK National Qualifications Framework.

Further details of PET are given in the PET Handbook, and at www.cambridgeenglish.org

For PET, there are three passing grades, Pass with Distinction*, Pass With Merit and Pass. Candidates who have not achieved a PET passing grade (Council of Europe Level B1), but have demonstrated ability at the level below this, are awarded a certificate stating Council of Europe Level A2.

A † symbol next to the grade indicates that the candidate was exempt from satisfying the full range of assessment objectives in the examination.

The Council of Europe's Common European Framework of Reference covers six levels of language proficiency. Research carried out by the Association of Language Testers in Europe (ALTE) shows what learners can typically do at each level. The table below gives examples of typical ability in each of the skill areas for Council of Europe Levels B2, B1 and A2.

| Level B2 | Listening and Speaking | Reading and Writing |
|-------------------------|---|--|
| Overall general ability | CAN follow a talk on a familiar topic. | CAN scan texts for relevant information. |
| | CAN keep up a conversation on a fairly wide range of topics. | CAN make notes while someone is talking or write a letter including non-standard requests. |
| Level B1 | Listening and Speaking | Reading and Writing |
| Overall general ability | CAN understand straightforward instructions or public announcements. | CAN understand routine information and articles. |
| | CAN express opinions on abstract/cultural matters in a limited way or offer advice within a known area. | CAN write letters or make notes on familiar or predictable matters. |
| Social & Tourist | CAN identify the main topic of a news broadcast on TV if there is a strong visual element. | CAN understand factual articles in newspapers, routine letters from hotels and letters expressing personal opinions. |
| | CAN ask for information about accommodation and travel. | CAN write letters on a limited range of predictable topics related to personal experience. |
| Work | CAN follow a simple presentation/demonstration. | CAN understand the general meaning of non-routine letters and theoretical articles within own work area. |
| | CAN offer advice to clients within own job area on simple matters. | CAN make reasonably accurate notes at a meeting or seminar where the subject matter is familiar and predictable. |
| Study | CAN take part in a seminar or tutorial using simple language. | CAN understand most information of a factual nature in his/her study area. |
| | CAN understand instructions on classes and assignments given by a teacher or lecturer | CAN take basic notes in a lecture. |
| Level A2 | Listening and Speaking | Reading and Writing |
| Overall general ability | CAN understand simple questions and instructions. | CAN understand straightforward information within a known area. |
| | CAN express simple opinions or requirements in a familiar context. | CAN complete forms and write short simple letters or postcards related to personal information. |

Further information and examples of the ability statements can be found at www.alte.org

Any alteration to this certificate renders it invalid and use of an altered certificate could constitute a criminal offence.

Cambridge English Language Assessment provides a results verification service to help organisations and agencies quickly and securely validate candidates' Cambridge English examination results at <https://verifier.cambridgeenglish.org>

* Candidates who have achieved a Pass with Distinction have demonstrated ability at Council of Europe Level B2.

Control de seguimiento de trayectoria y contorneado basado en el modelo de fricción para un sistema CNC de feed-drive.

TOEFL ITP Score Report

Name of Institution: UPAEP PUEBLA

Name: GARCIA MARGARITA

Student Number:

DOB: 06/16/1992

Sex: F

Degree:

Times Taken TOEFL: None

Native Country: Mexico

Native Language: Spanish

Scaled Scores:

Listening Comprehension: 68

Test Date: 05/14/2022

Structure & Written Expression: 60

Form: TOEFL ITP

Reading Comprehension: 67

Total Score: 650



The face of this document has a security background. The back contains a watermark. Hold at an angle to view.

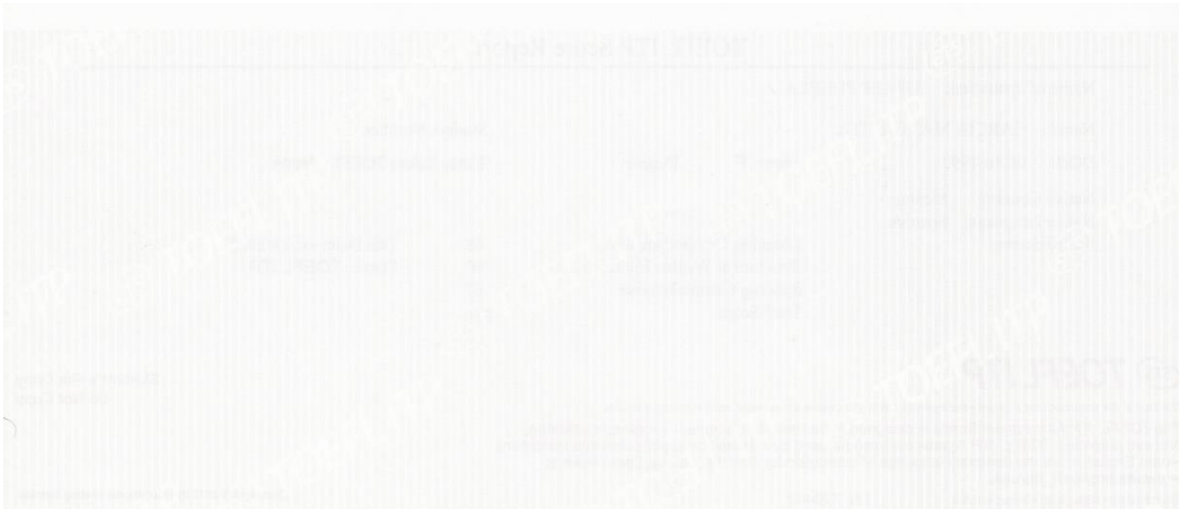
The TOEFL® ITP Assessment Series is designed to be used for placement, progress monitoring, and exit purposes. TOEFL® ITP scores can also be used for admissions to programs and institutions where English is not the dominant language of instruction for content courses. Learn more at www.ets.org/toefl_itp/use.

**Student's File Copy
Do Not Copy**

145817-16573 • FB521R100 • Printed in U.S.A.

I.N. 770462

Copyright © 2012 by Educational Testing Service.



Bibliografía

- [1] Spong, M. W; Vidyasagar, M. “Robot Dynamics and Control”. Canadá: John Wiley & Sons, Inc., 1989.
- [2] Arellano, Moroni. “Automatización y Tecnología CNC”. [En línea]. Noticias, 2017. Disponible en: <http://innovacion.uas.edu.mx/automatizacion-y-tecnologia-cnc/>.
- [3] Arellano, Moroni. “Historia de las impresoras 3D”. Noticias, 2019. [En línea]. Disponible en: <http://impresorad3d.com/impresoras-3d-historia/>
- [4] Armstrong-Helouvry, B., Dupont, P., deWit, C. C. “A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction”. *Automatic* 30(7):1083–1138. 1994. DOI:10.1016/0005-1098(94)90209-7.
- [5] Liu, L., Wu, Z., Liu, H. “Modeling and analysis of the crossfeed servo system of a heavy-duty lathe with friction”. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 41(1):1–20. 2013. DOI:10.1080/15397734.2012.675873.
- [6] Kamenar, Ervin and Zelenika, Saša. “Nanometric positioning accuracy in the presence of pre-sliding and sliding friction: Modelling, identification and compensation”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 45:1, 111-126. 2017. DOI: 10.1080/15397734.2016.1149487.
- [7] Zhang XM, Zhu LM, Ding H. “Matrix perturbation method for predicting dynamic modal shapes of the workpiece in high-speed machining”. *Proc Inst Mech Eng B J Eng Manuf* 224(1):177– 183. 2009.
- [8] Yang S, Ghasemi AH, Lu X, Okwudire CE. “Pre-compensation of servo contour errors using a model predictive control framework”. *Int J Mach Tools Manuf*; 98:50–60. 2015.
- [9] Corapsiz, M. F. and Erenturk, K. “Trajectory Tracking Control and Contouring Performance of Three-Dimensional CNC”, in *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, no. 4, pp. 2212- 2220, April 2016. DOI: 10.1109/TIE.2015.2509950.
- [10] Whalley R., Ebrahimi M., Abdul-Ameer AA. “Hybrid modelling of machine tool axis drives”. *Int J Mach Tools Manuf* 45(14):1560–1576. 2005
- [11] Erkorkmaz, Kaan. YA. “High speed CNC system design. Part II: modeling and identification of feed drives”. *Int J Mach Tools Manuf* 41(10):1487–1509. 2001. [https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(01\)00003-7](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(01)00003-7)
- [12] Erkorkmaz, Kaan YA. “High speed CNC system design. Part III: high speed tracking and contouring control of feed drives”. *Int J Mach Tools Manuf*. 41(11):1637–1658. 2001. [https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(01\)00004-9](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(01)00004-9)
- [13] López Beltrán, A. “Robot CNC para impresora 3D”, Tesis de Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, 2016.

- [14] Jiménez Martínez, C. “Implementación de un CNC con 3 grados de libertad aplicado a impresión 3D”, Tesis de Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla 2019.
- [15] Wolf, W. “Computers as Components: Principles of Embedded Computer Systems Design”. USA: Morgan Kaufman, 2008.
- [16] Dubey, R. “Introduction to Embedded System Design Using Field Programmable Gate Arrays”. India: Springer, 2009.
- [17] de Wit, C; Olsson, H.; Astrom, K. J.; Lischinsky, P. “A new model for control of systems with friction”. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, no. 3, pp. 419–425, 1995.
- [18] Freidovich L., Robertsson A., Shiriaev A. and Johansson R. “LuGre-Model-Based Friction Compensation”. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 18, no. 1, pp. 194-200, 2010.
- [19] Reyes Cortés F. Robótica. Control de robots manipuladores. Alfaomega. México, 2011.
- [20] Rodríguez Hernández, E. D., “Control adaptable de fricción para robots manipuladores”. Tesis de Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, 2021.
- [21] Kelly R., Santibáñez V., “Control de Movimiento de Robots Manipuladores”. Pearson, Prentice Hall. Madrid, 2003.
- [22] Rodríguez Hernández, E. D; Sánchez García, B. E.; Reyes Cortés, F.; Vargas Treviño, M. A.; Oviedo Barriga, J. L., “Nuevo modelo de fricción para robots manipuladores”. Congreso Internacional en Ingeniería Electrónica. Mem. ELECTRO, Vol. 42 pp 140-145, Chihuahua, Chihuahua, México, octubre 2020.
- [23] Reyes Cortés F, “Matlab aplicado a robótica y mecatrónica”, Alfaomega. México, 2012.
- [24] Martínez Rosas, J. C.; Álvarez Icaza, L.; Noriega Pineda, D. “Modelo Dinámico de fricción: un enfoque para identificación y control”. Congreso anual 2009 de la Asociación de México de Control Automático. Zacatecas, México. 2009.
- [25] Vivas Albán, O. A., “Diseño y control de robots industriales. Teoría y práctica.”, Primera Edición, Elaleph, Buenos Aires, 2010.
- [26] Márton L, Lantos B., “Control of mechanical systems with Stribeck friction and backlash”, Systems & Control Letters, Vol. 58, pp 141-147, Romania, 2009.
- [27] Orquiz ávila M. E., Ponce I. U., Aguilar Bustos L. T., Soto Marrufo A. I., “Estimación de los coeficientes de inercia y de fricción de un motor de CD”, Pistas Educativas ISSN: 2448-847X, Vol. 134. Tecnológico Nacionar de México en Celaya, México, 2019.
- [28] Barrientos A., “Fundamentos de Robótica”, Primera Edición, Editorial McGraw Hill, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 2005.
- [29] Kozlowski, K., “Modelling and Identification in Robotics”, Editorial Springer-Verlag, Londres, 1988.

[30] Armstrong-Hélouvry B., “Control of machines with Friction”, Kluwer Academic Press, Boston, 1991.

[31] Bona B., Indri M., “Friction compensation in robotics: An overview”, Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, European Control Conference, Seville, Spain, 2005.

[32] Guran A., Pfeiffer F., “Dynamics with friction”, World Scientific, 1996.

[33] Xuan Anh L., “Dynamics of mechanical systems with Coulomb friction”, Springer, 2003.

[34] Van Geffen V., “A study of friction models and friction compensation”, Technische Universiteit Eindhoven, 2009.

[35] Alvarez I., Jiménez F. “An identifiable control oriented dynamic friction model”, Proceedings of 7th ifac Symposium on Nonlinear Systems, pp. 419-426, Pretoria, 2007.