BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"ALGUNAS PROPIEDADES QUE SE PRESERVAN BAJO EL PRODUCTO TOPOLÓGICO"

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ALEJANDRO RODRÍGUEZ ZEPEDA

ASESORES DE TESIS:

DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO

DR. DAVID HERRERA CARRASCO

PUEBLA, PUE. MAYO 2014.

Algunas Propiedades que se Preservan Bajo el Producto Topológico

Alejandro Rodríguez Zepeda
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Con la dirección de: Fernando Macías Romero y
David Herrera Carrasco

Mayo de 2014

Alejandro Rodríguez Zepeda
Mayo de 2014

Agradecimientos

Esta trabajo está dedicado principalmente a mis padres Ing. Pedro Alejandro Rodríguez Sánchez y Rosa Zepeda Ramírez, también a mis abuelos Fernando Rodríguez Montero y Herlinda Sánchez Cervantes por el gran esfuerzo y dedicación que me brindaron. Además mis agradecimientos a los directores de tesis Dr. Dai y Dr. Fernando Macías y en general a los maestros que siempre me apoyaron incansablemente desde mi primer curso hasta la conclusión de este trabajo.

Y en especial a Angelina Barrriga Peralta y mi hija Evelin Alejandra, personas que me enseñaron a no perder la esperanza, y que me demostraron que los sueños se cumplen.

Gracias.

Alejandro Rodríguez Zepeda
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Puebla, Puebla, México
Mayo de 2014

Índice general

Introducción — I

1. Preliminares — **1**
- 1.1. Productos cartesianos 1
- 1.2. Topología producto 5

2. Productos de espacios topológicos — **25**
- 2.1. Numerables 25
- 2.2. Primero numerables 32
- 2.3. Hausdorff, Regular, Tychonoff y AR 38
- 2.4. Metrizables 45
- 2.5. Compactos 56
- 2.6. Conexos 69
- 2.7. Localmente conexos 79
- 2.8. Conexos por trayectorias 85

Bibliografía — **93**

Índice alfabético — **94**

Introducción

El presente trabajo está enmarcado en el área de las Matemáticas llamada Topología y su motivación es el tema de la Topología Producto, en esta tesis escribimos las pruebas detalladas de resultados conocidos; esta presentación es original y tiene la finalidad de exponer en conjunto una serie de propiedades en un espacio topológico el cual tiene la mismísima topología producto. Para esto realizamos un estudio meticuloso desde el producto cartesiano, la topología producto hasta senãlar algunas propiedades que se preservan bajo la topología producto cuando los espacios factores tienen dicha propiedad. Se nos escaparon de tratar varias propiedades básicas como por ejemplo las de localmente compacto y arcoconexo. En la siguiente tabla mostramos una lista de propiedades que preserva el producto numerable cuando cada factor tiene cierta propiedad.

Propiedad P	Cada X_n tiene la propiedad P implica $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ tiene la propiedad P
Primero numerable	Colorario 2.10
Separable	Teorema 2.12 (3)
Metrizable	Teorema 2.33

Propiedad P	Cada X_α tiene la propiedad P, más otra propiedad implica que el $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ tiene la propiedad P
Localmente conexo	Teorema 2.62
Tiene un subconjunto denso	Teorema 2.12 (3)
Hausdorff	Teorema 2.14
Regular	Teorema 2.17
Retracto absoluto	Teorema 2.24
Compacto	Teorema 2.41
Conexo	Teorema 2.53
Conexo por trayectorias	Teorema 2.73

Alejandro Rodríguez Zepeda
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Puebla, Puebla, México
Mayo de 2012

Capítulo 1

Preliminares

Se comienza con los conceptos básicos y generales que se necesitan para el desarrollo de este trabajo. Se usa la simbología usual de la matemática contemporánea. Se denotan por $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ al conjunto de los números naturales y al conjunto de los números reales, respectivamente. Se denota por $\emptyset$ al conjunto vacío, $|A|$ la *cardinalidad* de A y $X - A$, el complemento de A en X. Un conjunto X es *numerable* si $|X| = |\mathbb{N}|$ y es *a lo más numerable* si $|X| \leq |\mathbb{N}|$. Si A es subconjunto de un espacio topológico X, entonces $Cl_X(A)$, $Int_X(A)$, $Fr_X(A)$, son la cerradura de A, el interior de A, la frontera de A, en X, respectivamente. Un conjunto X es *no degenerado* si tiene más de un punto. El símbolo $\times$ o Π denotan el producto cartesiano (con la topología producto). Los números entre corchetes indican las referencias citadas al final de la tesis.

1.1. Productos cartesianos

Definición 1.1. *Sean A y B dos conjuntos. La* **cardinalidad** *de A es menor o igual a la cardinalidad de B, es decir,* $|A| \leq |B|$, *si existe una función inyectiva $f\colon A \to B$.*

Sean A y B dos conjuntos. Recordemos que A y B tienen el mismo cardinal si existe una función biyectiva $f\colon A \to B$. Cuando esto sucede escribimos $|A| = |B|$ y decimos que $|A|$, la cardinalidad de A, es igual a la cardinalidad de B. Si existe una función inyectiva $f\colon A \to B$, entonces escribimos $|A| \leq |B|$, y decimos que la cardinalidad de A es menor o igual que la cardinalidad de B. Más adelante, en el Teorema 1.2, probaremos que si existe una función suprayectiva $f\colon A \to B$, entonces $|B| \leq |A|$. Notemos que si $A \subset B$, entonces $|A| \leq |B|$, ya que la función inclusión de A en B es inyectiva.

El **Axioma de Elección** dice que si $\{A_\alpha\colon \alpha \in \Lambda\}$ es una clase no vacía de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos, entonces existe un conjunto T tal que, para cada $\alpha \in \Lambda$, se cumple que $|T \cap A_\alpha| = 1$. Es decir, tal que T posee, para cada $\alpha \in \Lambda$, solamente un elemento de cada conjunto A_α. Utilizando este axioma, es posible probar el siguiente teorema.

Teorema 1.2. *Sean A y B dos conjuntos. Si $f\colon A \to B$ es una función suprayectiva, entonces $|B| \leq |A|$.*

Demostración. Como f es una función suprayectiva, $\{f^{-1}(b)\colon b \in B\}$ es una clase no vacía de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos. Entonces, por el Axioma de Elección, existe un conjunto T tal que, para cada $b \in B$, se cumple que $\left|T \cap f^{-1}(b)\right| = 1$. Dado $b \in B$, sea $T \cap f^{-1}(b) = \{a_b\}$ y se define $g(b) = a_b$. De esta manera $g\colon B \to A$ es, en efecto, una función y, además, es inyectiva. Luego, por la Definición 1.1, se tiene que $|B| \leq |A|$. $\square$

Definición 1.3. *Sea A un conjunto y $\prec$ una relación reflexiva y transitiva en A (es decir, tal que para cada $a \in A : a \prec a$, y si $a \prec b$ y $b \prec c$, entonces $a \prec c$). Entonces:*

(1) *$m \in A$ es un* **elemento maximal** *de A, si para cada $a \in A$, de $m \prec a$, se sigue que $a \prec m$;*

(2) *$a_0 \in A$ es una* **cota superior** *de un subconjunto B de A, si para toda $b \in B$, se tiene que $b \prec a_0$;*

(3) *$C \subset A$ es una* **cadena** *en A, si para cada $c, d \in C$, sucede que $c \prec d$ o bien $d \prec c$.*

Si se supone que además de ser reflexiva y transitiva, $\prec$ es antisimétrica (esto último significa que si $a, b \in A$ son tales que $a \prec b$ y $b \prec a$, entonces $a = b$), entonces $\prec$ es un **orden parcial** *en A y, el par $(A, \prec)$, recibe el nombre de conjunto* **parcialmente ordenado**. *Observe que si $\prec$ es un orden parcial en A, entonces m es un elemento maximal de A si y sólo si, para cada $a \in A$, de $m \prec a$ se sigue que $a = m$.*

Una prueba del siguiente teorema puede consultarse en [3, Teorema 25, pág. 34] .

Teorema 1.4 (Lema de Zorn)**.** *Sean A un conjunto y $\prec$ un orden parcial en A. Si cada cadena en A tiene una cota superior, entonces A tiene al menos un elemento maximal.*

Se sabe que el Axioma de Elección y el Lema de Zorn son afirmaciones equivalentes. Una demostración de dicha equivalencia se encuentra en [2, Teorema 2.1, pág. 31].

El principio de las casillas es también conocido como el principio del Palomar se enuncia como sigue:

Teorema 1.5 (Principio de las casillas)**.** *Si se dispone de n casillas para colocar m objetos y $m > n$, entonces en alguna casilla deberán colocarse por lo menos dos objetos.*

Se darán algunas definiciones que no está de más recordar.

Definición 1.6. *Sea $\{X_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ una clase de conjuntos. El* **producto cartesiano** *de los elementos de dicha clase es*

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \left\{ f\colon \Lambda \to \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha : \text{ para cada } \alpha \in \Lambda, f(\alpha) \in X_\alpha \right\}.$$

Dada $\beta \in \Lambda$, cada X_β es el *β-ésimo factor* de $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Necesitamos del Axioma de Elección para garantizar que si cada factor X_α es no vacío, entonces el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es no vacío. A la inversa, si el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es no vacío, entonces cada factor X_α es no vacío.

Si $f \in \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ y $\beta \in \Lambda$, al elemento $f(\beta)$ de X_β lo llamamos la *β-ésima coordenada* de f. Notemos que $f(\beta)$ se encuentra en el β-ésimo factor de $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Es común denotar a los elementos de $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ en forma similar a como se escriben las sucesiones. También es muy común cometer un pequeño abuso de notación, al permitir que un elemento α de Λ se utilice como variable libre y como variable fija a la vez. De este modo, y cometiendo el abuso antes indicado, el elemento de $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ cuya α-ésima coordenada es el punto x_α de X_α, se denotará por $\{x_\alpha\}_\alpha$ o bien por $(x_\alpha)_\alpha$. Cuando haya necesidad de especificar al conjunto Λ, un elemento de $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ se denotará por $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.

Si la clase Λ es numerable, denotamos al producto $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$

por:

$$\prod_{i=1}^{\infty} X_i.$$

y a sus elementos como lo hacemos con las sucesiones. Si Λ es finito, digamos $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$, denotamos al producto $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ en sus formas usuales, es decir, por:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \tag{1.1.1}$$

o bien por $\prod_{i=1}^{n} X_i$. Si $X = X_1 = X_2 = \cdots = X_n$, entonces al producto cartesiano (1.1.1) lo denotamos por X^n. En general si $\mathbf{m}$ es la cardinalidad de Λ y $X = X_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ se denota por $X^{\mathbf{m}}$.

Notemos que si $A_\alpha, B_\alpha \subset X_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces:

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \subset \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \quad \text{y} \quad \left(\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) \cap \left(\prod_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha \cap B_\alpha). \tag{1.1.2}$$

Además si $A_\alpha \subset B_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces:

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \subset \prod_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha.$$

1.2. Topología producto

Definición 1.7. *Sean* $\{X_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ *una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos y*

$$X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha.$$

Dada $\beta \in \Lambda$ consideremos la función $p_\beta \colon X \to X_\beta$ definida, para $x = (x_\alpha)_\alpha \in X$, por

$$p_\beta(x) = x_\beta.$$

La llamaremos la *β-ésima proyección de X sobre X_β*. Note que p_β es la función que a cada elemento de X le asocia su β-ésima coordenada.

Definición 1.8. *Sea X un espacio topológico con topología τ. Una* **base** *de τ es una subcolección $\mathcal{B}$ de τ con la propiedad de que si $x \in X$ y U es un abierto de X que contiene a x, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset U$. En otras palabras, cada $U \in \tau$ puede escribirse como la unión de conjuntos de $\mathcal{B}$. Cada elemento de $\mathcal{B}$ es un* **básico** *de X. Sea X un espacio topológico con topología τ. Una* **subbase** *para τ es una colección S de subconjuntos abiertos de X con la propiedad de que: la familia de todas las intersecciones finitas de elementos de S forman una base para X. Cada elemento de S es un* **subbásico** *de X.*

Definición 1.9. *Sea X un espacio topológico. Una* **cubierta** *de X es una clase $\mathcal{U} = \{U_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ de subconjuntos de X tales que:*

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha.$$

Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ es una cubierta de X y $\Gamma \subset \Lambda$ es tal que:

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha,$$

entonces la clase $\mathcal{V} = \{U_\alpha \colon \alpha \in \Gamma\}$ es una **subcubierta** *de $\mathcal{U}$. El conjunto $\mathcal{V}$ es una* subcubierta finita *si Γ es un conjunto finito. En el caso en que Γ sea un conjunto numerable, $\mathcal{V}$ es una* subcubierta numerable*. Si cada elemento de $\mathcal{U}$ es abierto de X, se dice que $\mathcal{U}$ es una* cubierta abierta de X.

Definición 1.10. *Sea* $\{X_\alpha\colon \alpha\in\Lambda\}$ *una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos. La* ***topología producto*** *del producto cartesiano* $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$*, es la que tiene por subbase a la clase:*

$$\left\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\colon \alpha\in\Lambda \text{ y } U_\alpha \text{ es abierto de } X_\alpha\right\}.$$

Cuando hablemos del producto cartesiano $X=\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, supondremos que X tiene la topología producto a menos que se especifique lo contrario. A la topología producto también se le llama *topología de Tychonoff*. De modo que una base para la topología producto es

$$\{\textstyle\bigcap_{\alpha\in F} p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\colon F\subset\Lambda, F \text{ finito, y } U_\alpha$$
$$\text{es abierto de } X_\alpha, \text{ para cada } \alpha\in F\}.$$

En el siguiente resultado presentamos las propiedades más importantes de las funciones proyección.

Teorema 1.11. *Sean* $\{X_\alpha\colon \alpha\in\Lambda\}$ *una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos y*

$$X=\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha.$$

Entonces, para cada $\alpha\in\Lambda$*, la función proyección* $p_\alpha\colon X\to X_\alpha$ *es continua, abierta y suprayectiva.*

Demostración. Como, para cada $\alpha\in\Lambda$ y cada abierto U_α de X_α, el elemento $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es abierto (subbásico) de X, tenemos que la proyección $p_\alpha\colon X\to X_\alpha$ es continua.
Para ver que p_α es suprayectiva, tomemos un punto x_α en X_α. Para cada $\beta\in\Lambda-\{\alpha\}$ consideremos un punto a_β en X_β. Entonces $(x_\beta)_\beta$, donde $x_\beta=a_\beta$ si $\beta\neq\alpha$ y $x_\beta=x_\alpha$ si $\beta=\alpha$, es

un elemento de X tal que $p_\alpha((x_\beta)_\beta) = x_\beta$. Esto muestra que p_α es suprayectiva. Para ver que p_α es abierta, supongamos primero que U es un subbásico de X. Entonces existen $\beta \in \Lambda$ y un abierto U_β de X_β tales que $U = p_\beta^{-1}(U_\beta)$. No es difícil probar que:

$$p_\beta^{-1}(U_\beta) = \prod_{r\in\Lambda} B_r \tag{1.2.1}$$

donde $B_\beta = U_\beta$ y $B_r = X_r$, para cada $r \in \Lambda - \{\beta\}$. Por lo tanto

$$p_\alpha(U) = p_\alpha\left(p_\beta^{-1}(U_\beta)\right) = p_\alpha\left(\prod_{r\in\Lambda} B_r\right) = B_\alpha.$$

Como B_α es un abierto de X_α, ya que $B_\alpha = U_\alpha$ si $\beta = \alpha$ y $B_\alpha = X_\alpha$ si $\beta \neq \alpha$, el conjunto $p_\alpha(U)$ es abierto de X_α. Con esto hemos probado que si $\alpha \in \Lambda$ y U es un subbásico de X, entonces $p_\alpha(U)$ es un abierto de X_α.

Supongamos ahora que U es básico de X. Entonces

$$U = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}),$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Lambda$ y U_{α_i} es abierto de X_{α_i}, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Utilizando (1.2.1) y la segunda parte de (1.1.2), se tiene que:

$$p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) = \prod_{r\in\Lambda} C_r, \tag{1.2.2}$$

donde $C_{\alpha_i} = U_{\alpha_i}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $C_r = X_r$, para cada $r \in \Lambda - \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Por lo tanto:

$$p_\alpha(U) = p_\alpha\left(\prod_{r\in\Lambda} C_r\right) = C_\alpha.$$

Como C_α es un abierto de X_α, pues $C_\alpha = U_{\alpha_i}$ si α coincide con algún α_i y $C_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \in \Lambda - \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, el conjunto $p_\alpha(U)$ es un abierto de X_α. Esto muestra que si $\alpha \in \Lambda$ y U es un básico de X, entonces $p_\alpha(U)$ es un abierto de X_α.

Para terminar la prueba de que p_α es abierta, supongamos ahora que U es un abierto de X. Entonces

$$U = \bigcup_{\beta \in A} U_\beta$$

donde $A \subset \Lambda$ y U_β es un básico de X, para cada $\beta \in A$. Por lo que acabamos de probar, cada conjunto $p_\alpha(U_\beta)$ es abierto de X_α. Además:

$$p_\alpha(U) = p_\alpha\left(\bigcup_{\beta \in A} U_\beta\right) = \bigcup_{\beta \in A} p_\alpha(U_\beta).$$

Por lo tanto $p_\alpha(U)$ se puede escribir como una unión de abiertos en X_α. Luego $p_\alpha(U)$ es un abierto de X_α. Esto muestra que p_α es una función abierta. $\square$

Lema 1.12. *La topología producto, τ_p, en $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$, es la más pequeña de las topológias para las cuales, para cada $\beta \in \Lambda$,*

$$p_\beta \colon \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \to X_\beta$$

es continua.

Demostración. Sea τ una topología en $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ tal que para cada $\beta \in \Lambda$,

$$p_\beta \colon \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \to X_\beta$$

es continua. Para cada $i \in \{1, ...n\}$ sea U_i abierto en X_{α_i} y $U = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$ un básico de τ_p. Como p es continua, con la topología τ, entonces para cada i, $p_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$ es un abierto en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, así para cada i, $p_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$ es un elemento de τ. Por lo tanto $U \in \tau$. Como U es un básico de τ_p, entonces $\tau_p \subset \tau$. $\square$

En la demostración del Teorema 1.11 hemos indicado que los abiertos subbásicos de $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ y sus abiertos básicos, se pueden expresar como productos cartesianos especiales. En efecto si $\alpha \in \Lambda$ y $U_\alpha \subset X_\alpha$, entonces por (1.2.1),

$$p_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \prod_{\beta\in\Lambda} B_\beta$$

donde $B_\alpha = U_\alpha$ y $B_\beta = X_\beta$, para cada $\beta \in \Lambda - \{\alpha\}$. Por lo tanto, los subbásicos usuales de X son los productos cartesianos

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$$

para los cuales existe un subconjunto degenerado F de Λ tal que B_α es abierto de X_α, para cada $\alpha \in \Lambda$ y $B_\alpha = X_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda - F$. Informalmente hablando, es común decir que los subbásicos usuales de X son producto de abiertos, en donde solamente una coordenada puede ser diferente del total correspondiente.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Lambda$ y $U_{\alpha_i} \subset X_{\alpha_i}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces por (1.2.2),

$$p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) = \prod_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$$

donde $C_{\alpha_i} = U_{\alpha_i}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $C_\alpha = X_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda - \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. En vista de que los básicos en un espacio topológico son las intersecciones finitas de los elementos subbásicos, de todo esto se sigue que los abiertos básicos usuales de X son los productos cartesianos

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha, \tag{1.2.3}$$

para los cuales existe un subconjunto finito F de Λ tal que C_α es un abierto de X_α, para cada $\alpha \in \Lambda$ y $C_\alpha = X_\alpha$, siempre que $\alpha \in \Lambda - F$. Informalmente hablando, es común decir que los abiertos básicos usuales de X son producto de abiertos, en donde solamente un número finito de coordenadas pueden ser diferentes del total correspondiente.

Mientras que los subbásicos y los básicos de X siempre son productos de abiertos (como hemos indicado en cada caso), no necesariamente los productos de abiertos son abiertos, según indica el siguiente teorema.

Teorema 1.13. *Sean $\{X_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos y*

$$X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha.$$

Si para cada $\alpha \in \Lambda$ el conjunto $A_\alpha \subset X_\alpha$, entonces $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es abierto de X si y sólo si existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $A_\alpha = \emptyset$, o bien $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es un abierto básico de X.

Demostración. Antes de iniciar la demostración notemos que, si cada A_α es no vacío, el teorema dice que el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es un abierto de X si y sólo si $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es un abierto básico de X.

Ahora iniciamos la demostración y, para simplificar, sea $A = \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$. Supongamos que A es abierto de X. Dada $\alpha \in \Lambda$, por el Teorema 1.11, la proyección $p_\alpha\colon X \to X_\alpha$ es abierta. Por lo tanto $p_\alpha(A) = A_\alpha$ es abierto de X_α. Si $A = \emptyset$, entonces existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $A_\alpha = \emptyset$. Si $A \neq \emptyset$, podemos tomar un punto $x \in A$ y un básico G en X tal que $x \in G \subset A$. Como sabemos G es un producto cartesiano

$$G = \prod_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha,$$

para el que existe un subconjunto finito F de Λ tal que C_α es abierto de X_α, para cada $\alpha \in \Lambda$ y $C_\alpha = X_\alpha$, siempre que $\alpha \in \Lambda - F$. Como $C_\alpha \subset A_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$ y $C_\alpha = X_\alpha$ para $\alpha \in \Lambda - F$, sucede que $A_\alpha = X_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda - F$. Tenemos entonces que A_α es abierto de X_α, para toda $\alpha \in \Lambda$ y que F es un subconjunto finito de Λ tal que $A_\alpha = X_\alpha$ siempre que $\alpha \in \Lambda - F$. Por tanto A es un básico de X. Esto termina la primera parte de la demostración.

Para probar la segunda parte, supongamos primero que existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $A_\alpha = \emptyset$. Entonces $A = \emptyset$ y, por lo tanto, A es abierto de X. Supongamos ahora que A es un básico de X. Entonces A es un abierto de X. Esto termina la segunda parte de la demostración. □

Supongamos que $\{X_\alpha\colon \alpha \in \Lambda\}$ es una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos. Si $|\Lambda| \geq \aleph_0$ y, para cada $\alpha \in \Lambda$, existe un abierto A_α de X_α tal que $A_\alpha \neq \emptyset$ y $A_\alpha \neq X_\alpha$ entonces, por el Teorema 1.13, el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ no es abierto de $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Si $|\Lambda| < \aleph_0$, entonces todo producto de abiertos es un abierto pues, en dicha situación, todo producto de abiertos es un abierto básico.

Ahora vamos a estudiar otros aspectos que involucran a la topología producto. A partir de este momento, si dos espacios topológicos X y Y son homeomorfos, escribiremos $X \cong Y$. Notemos que, en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R} \cong \{x\} \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \{x\}$. No es difícil convencerse, al menos para casos sencillos, de que si $(x, y) \in X \times Y$, entonces $Y \cong \{x\} \times Y$ y $X \cong X \times \{y\}$. Por lo tanto, el producto topológico $X \times Y$ contiene una copia topológica tanto de X como de Y, los factores de $X \times Y$. En general, el producto topológico $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ contiene una copia de cada uno de sus factores, es decir, para cada $\alpha \in \Lambda$, el producto contiene un subconjunto homeomorfo a X_α. Para probar esto, es conveniente presentar primero la siguiente caracterización de la continuidad de las funciones, cuyo contradominio es un producto cartesiano con la topología producto.

Teorema 1.14. *Sean Y un espacio topológico y $\{X_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos. Una función $f \colon Y \to \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es continua si y sólo si, para cada $\alpha \in \Lambda$, la composición $p_\alpha \circ f$ es continua.*

Demostración. Sea $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ donde $p_\alpha \colon X \to X_\alpha$ es la α-ésima proyección de X sobre X_α. Ahora iniciamos la demostración. Supóngase primero que f es continua y sea $\alpha \in \Lambda$. Como p_α es continua y la composición de funciones continuas es continua, $p_\alpha \circ f$ es continua.

Ahora supóngase que cada composición $p_\alpha \circ f$ es continua. Para ver que f es continua, es suficiente con mostrar que la imagen inversa de cualquier abierto subbásico en X, es un abierto en Y ([2, Teorema 8.3]). Supóngase, por tanto, que U es un abierto subbásico en X. Entonces existen $\alpha \in \Lambda$ y un abierto U_α de X_α tales que $U = p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Como $p_\alpha \circ f$ es continua, U_α es abierto en X_α y

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\right) = (p_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha),$$

sucede que $f^{-1}(U)$ es un abierto en Y. Esto muestra que f es continua. $\square$

Teorema 1.15. *Sea $\{X_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos. Si $F \subset \Lambda$ y el subconjunto $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ de $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ son tales que:*

$A_\alpha = X_\alpha$ *para cada* $\alpha \in F$ *y* $|A_\alpha| = 1,$ *para cada* $\alpha \in \Lambda - F.$

Entonces $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es homeomorfo a $\prod_{\alpha\in F} X_\alpha$.

Demostración. Consideremos la función $f\colon \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \to \prod_{\alpha\in F} X_\alpha$ definida, para cada $(a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, por:

$$f((a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = (a_\alpha)_{\alpha\in F}.$$

Como para cada $\alpha \in F$, tenemos que $A_\alpha = X_\alpha$, la función f está bien definida. Para cada $\alpha \in \Lambda - F$, escribamos $A_\alpha = \{x_\alpha\}$. Dada $(a_\alpha)_{\alpha\in F} \in \prod_{\alpha\in F} X_\alpha$, consideremos $b_\alpha = a_\alpha$, si $\alpha \in F$, y $b_\alpha = x_\alpha$ si $\alpha \in \Lambda - F$. Así, $(b_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es un elemento de $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ tal que $f((b_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = (a_\alpha)_{\alpha\in F}$. Esto muestra que f es suprayectiva. Tomemos ahora dos elementos $y = (y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ y $z = (z_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ tales que $f(y) = f(z)$. Para cada $\alpha \in \Lambda - F$, se cumple que $y_\alpha = x_\alpha = z_\alpha$ y $(y_\alpha)_{\alpha\in F} = (z_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, por lo que, para cada $\alpha \in F$, tenemos que $y_\alpha = z_\alpha$. Esto implica que $y = z$, por lo que f es inyectiva. Con todo esto, f es biyectiva.

Para cada $\beta \in F$, consideremos la proyección $p_\beta\colon \prod_{\alpha\in F} X_\alpha \to X_\beta$. Por el Teorema 1.14, la función $f\colon \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \to \prod_{\alpha\in F} X_\alpha$ es continua si y sólo si, para cada $\beta \in F$, la composición $p_\beta \circ f\colon \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \to X_\beta$ es continua. Dados $\beta \in F$ y $(a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, tenemos que:

$$(p_\beta \circ f)\left((a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\right) = p_\beta\left(f((a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})\right) = p_\beta((a_\alpha)_{\alpha\in F}) = a_\beta.$$

Por lo tanto $p_\beta \circ f$ es la proyección de $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ sobre X_β. Luego $p_\beta \circ f$ es una función continua. Como esto es cierto para cada $\beta \in F$, deducimos que f es continua.

Para probar que f es un homeomorfismo, basta con hacer notar que f es abierta, pues ya vimos que f es continua y biyectiva. Para esto es suficiente con mostrar que la imagen, bajo f, de cualquier abierto básico no vacío en $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, es un abierto en $\prod_{\alpha\in F} X_\alpha$. Sea $\prod_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$ un abierto básico no vacío de $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$. Entonces C_α es abierto en A_α para cada $\alpha \in \Lambda$ y, además, existe un subconjunto finito E de Λ tal que $C_\alpha = A_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda - E$. Notemos que:

$$f\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha\right) = \left\{ f\left((a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\right) : (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha \right\} =$$

$$= \left\{ (a_\alpha)_{\alpha\in F} \colon (a_\alpha)_{\alpha\in F} \in \prod_{\alpha\in F} C_\alpha \right\} = \prod_{\alpha\in F} C_\alpha.$$

Vamos a probar que $\prod_{\alpha\in F} C_\alpha$ es un abierto básico en $\prod_{\alpha\in F} X_\alpha$. Dada $\alpha \in F$ tenemos que $A_\alpha = X_\alpha$. Como C_α es abierto en A_α, resulta entonces que C_α es abierto en X_α. Consideremos ahora el subconjunto $F \cap E$ de Λ. Como E es finito, $F \cap E$ es finito (posiblemente igual al vacío). Si $\alpha \in F - (F \cap E)$, entonces $\alpha \in \Lambda - E$ por lo que $C_\alpha = A_\alpha = X_\alpha$. Esto muestra que $C_\alpha = X_\alpha$, para cada $\alpha \in F - (F \cap E)$. Por lo tanto $\prod_{\alpha\in F} C_\alpha$ es un abierto básico en $\prod_{\alpha\in F} X_\alpha$. $\square$

Corolario 1.16. *El producto de espacios topológicos contiene una copia de cada uno de sus factores.*

Teorema 1.17. *Sea* (X_α, τ_α) *un espacio topológico para cada* $\alpha \in \Lambda$, *y sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de puntos en el producto* $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *y* $x_0 \in X$, $x_n \longrightarrow x_0$ *si y sólo si* $p_\alpha(x_n) \longrightarrow p_\alpha(x_0)$ *para toda* $\alpha \in \Lambda$.

Demostración. Si $x_n \longrightarrow x_0$ y $\alpha \in \Lambda$ como p_α es continua, se tiene que $p_\alpha(x_n) \longrightarrow p_\alpha(x_0)$.

Recíprocamente, supóngase que para cada $\alpha \in \Lambda$, $p_\alpha(x_n) \longrightarrow p_\alpha(x_0)$ y sea A un abierto cualquiera que contenga a x_0. Existe un abierto básico $B = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap ... \cap p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k})$ en el espacio producto tal que $x_0 \in B \subset A$, donde U_i es un abierto en X_{α_i} que contiene a $p_{\alpha_i}(x_0)$, $i \in \{1, ..., n\}$. Como $p_{\alpha_i}(x_n) \longrightarrow p_{\alpha_i}(x_0)$ para cada i, entonces existe $n(i) \in \mathbb{N}$ tal que $p_{\alpha_i}(x_n) \in U_i$ para toda $n \geq n(i,)$ $i \in \{1, ..., n\}$. Si $n_0 = \max\{n(1), ..., n(k)\}$, entonces $x_n \in B$ para toda $n \geq n_0$, lo que completa la demostración. $\square$

Si para un α dado y $C_\alpha \subset X_\alpha$, denotamos $p_\beta^{-1}(C_\alpha)$ por $\langle C_\alpha \rangle$ éste es un bloque en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ donde cada factor es X_α excepto el $\alpha - \textit{ésimo}$ factor, que es C_α.
Y de manera similar para un número finito de índices $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y conjuntos $C_{\alpha_1} \subset X_{\alpha_1}, ..., C_{\alpha_n} \subset X_{\alpha_n}$, el subconjunto

$$\langle C_{\alpha_1} \rangle \cap ... \cap \langle C_{\alpha_n} \rangle = p_\beta^{-1}(C_{\alpha_1}) \cap ... \cap p_\beta^{-1}(C_{\alpha_n})$$

es denotado por $\langle C_{\alpha_1}, ..., C_{\alpha_n} \rangle$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.18. *En* $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *se cumple:*

(1) $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \langle C_\alpha \rangle$

(2) $X - \langle C_\alpha \rangle = \langle X_\alpha - C_\alpha \rangle$

(3) $X - \left(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha \right) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \langle X_\alpha - C_\alpha \rangle .$

Demostración. Para la primera parte: $f \in \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$ si y sólo si para cada $\alpha \in \Lambda$, $p_\alpha (f) \in C_\alpha$ si y sólo si para cada $\alpha \in \Lambda$, $f \in p_\alpha^{-1} (C_\alpha)$ si y sólo si $f \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \langle C_\alpha \rangle .$

Ahora, para (2): $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in X - \langle C_\alpha \rangle$ si y sólo si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in X - \left(C_\alpha \times \prod\limits_{\alpha\neq\beta\in\Lambda} X_\beta \right)$ si y sólo si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \notin \left(C_\alpha \times \prod\limits_{\alpha\neq\beta\in\Lambda} X_\beta \right)$ si y sólo si $x_\alpha \notin C_\alpha$ si y sólo si $x_\alpha \in X_\alpha - C_\alpha$ si y sólo si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in X - \left(C_\alpha \times \prod\limits_{\alpha\neq\beta\in\Lambda} X_\beta \right) = \langle X_\alpha - C_\alpha \rangle .$

Para la prueba de (3) se hace uso de la parte previa (1) y (2) para esto, sea $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in X - \left(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha \right)$ si y sólo si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \notin \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \langle C_\alpha \rangle$ si y sólo si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \notin \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \langle C_\alpha \rangle$ si y sólo si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in X - \left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \langle C_\alpha \rangle \right)$ si y sólo si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in (\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X - \langle C_\alpha \rangle) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \langle X_\alpha - C_\alpha \rangle .$ □

El resultado que sigue se ocupa en el Teorema 1.21.

Teorema 1.19. *[2, Teorema 12.3, pág. 88] Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ funciones continuas tales que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$, donde 1_X y 1_Y son las funciones identidad en X y Y, respectivamente. Entonces f es un homeomorfismo y además $g = f^{-1}$.*

Definición 1.20. *Sean* $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *un producto cartesiano arbitrario y un punto* $x^\circ = \left\{x^{\,o}_{\alpha}\right\}_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. *Para cada* $\beta \in \Lambda$ *el conjunto*

$$S\left(x^\circ;\beta\right) = X_\beta \times \prod \left\{\left\{x^{\,o}_{\,\alpha}\right\} : \alpha \neq \beta\right\} \subset \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$$

es una rebanada en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *a través de* x° *paralelo a* $X_{\beta.}$

Teorema 1.21. *Si* $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *es un producto cartesiano arbitrario y un punto* $x^\circ = \left\{x^{\,o}_{\alpha}\right\}_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, *entonces la función* $s_\beta : X_\beta \to S\left(x^\circ;\beta\right)$ *dada por*

$$x_\beta \to x_\beta \times \prod_{\alpha\in\Lambda} \left\{\left\{x^0_\alpha\right\} : \alpha \neq \beta\right\}$$

es un homeomorfismo de X_β *con el subespacio* $S\left(x^\circ;\beta\right) = S$.

Demostración. Note que los conjuntos abiertos $\langle U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_n}\rangle$ $\cap S$ del subespacio S son $\emptyset, S$, o $\langle U_\beta\rangle \cap S$, donde $\langle U_\beta\rangle$ es abierto en X_β.
Así $s_\beta^{-1}\left(\langle U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}\rangle \cap S\right) = \emptyset, Y_\beta$ o U_β y como estos son abiertos, se tiene que s_β es continua. Ahora como $p_\beta : \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\beta$ es continua, así también es $p = p_\beta \mid S$; y como $p \circ s_\beta = 1_{X_\beta}$ y $s_\beta \circ p = 1_{X_\beta}$ y haciendo una aplicación del Teorema 1.19, se tiene que p y s_β son homeomorfos. $\square$

Definición 1.22. *Sean* X *un espacio topológico y* $D \subset X$. D *es* ***denso*** *en* X *si* $Cl_X(D) = X$. *Equivalentemente, un subconjunto* D *de un espacio topológico* X, *es denso en* X *si para todo conjunto abierto* A *de* X *diferente del vacío* $A \cap D \neq \emptyset$.

Observación 1.23. *De la definición de base de una topología resulta que para constatar que $D \subset X$ es denso, es suficiente tener que $D \cap A \neq \emptyset$ para toda $A \in \mathcal{B}$, en donde $\mathcal{B}$ es una base para X.*

Teorema 1.24. *Sea $x^o = (x^o_\beta)$ un elemento fijo en $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ y sea $D = \{(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} : (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ y (x^o_β) difieren a lo más en un número finito de coordenadas $\}$. Entonces D es denso en $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.*

Demostración. Sea $< U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n} >$ un básico. Veamos que $< U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n} > \cap D \neq \emptyset$. Sea $\{x_\beta\}_{\beta \in \Lambda}$ tal que $x_{\alpha_1} \in U_{\alpha_1}, x_{\alpha_2} \in U_{\alpha_2}, ..., x_{\alpha_n} \in U_{\alpha_n}$. Para $\beta \neq \alpha_1, ..., \alpha_n$ sea $x_\beta = x^\circ_\beta$, entonces $\{x_\beta\}_{\beta \in \Lambda} \in < U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n} > \cap D$, y así $\overline{D} = \prod_\alpha X_\alpha$. □

Teorema 1.25. *Si $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos y para cada $\alpha \in \Lambda$, A_α es un subespacio de X_α, entonces las dos topologías definidas sobre el conjunto $A = \prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, es decir, la topología del producto cartesiano de los subespacios $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ y la topología de un subespacio de un producto cartesiano $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ coinciden.*

Teorema 1.26. *Si $A_\alpha \subset B_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces $\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \subset \prod_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$. Recíprocamente, si cada $X_\alpha \neq \emptyset$ y $\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \subset \prod_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$, entonces $A_\alpha \subset B_\alpha$.*

Demostración. La primera afirmación es trivial, la segunda es cierta por el Teorema 2.8

$$A_\beta = p_\beta\left(\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) \subset B_\beta = p_\beta\left(\prod_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha\right).$$

$\square$

Teorema 1.27. *Para cada clase de conjuntos* $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, $A_\alpha \subset X_\alpha$, *en el producto cartesiano* $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, *se tiene que:*

$$Cl_X\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in\Lambda} Cl_X(A_\alpha)$$

Demostración. Sabemos que $x \in Cl_X\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha\right)$ si y sólo si para cada elemento $\prod_{\alpha\in\Lambda} W_\alpha$ de la base para $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ que contiene a x, tenemos que $\prod_{\alpha\in\Lambda} W_\alpha \cap \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \prod_{\alpha\in\Lambda} (W_\alpha \cap X_\alpha) \neq \emptyset$, es decir si para cada $\alpha \in \Lambda$ y una vecindad W_α de la $\alpha-$*ésima* coordenada de x, tenemos que $W_\alpha \cap X_\alpha \neq \emptyset$. La última condición se satisface si y sólo si $x \in \prod_{\alpha\in\Lambda} Cl_X(X_\alpha)$. $\square$

Corolario 1.28. *El conjunto* $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, *donde* $A_\alpha \subset X_\alpha \neq \emptyset$ *es cerrado en el producto cartesiano* $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *si y sólo si* A_α *es es cerrado en* X_α *para cada* $\alpha \in \Lambda$.

Demostración. Supóngase que para toda α, cada A_α es cerrado, por el Teorema 1.27, se tiene que $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ también es cerrado.

Recíprocamente, si $\prod A_\alpha$ es cerrado, entonces $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = Cl_X \left(\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in\Lambda} Cl_X(A_\alpha)$ y así para cada $\alpha \in \Lambda$, los conjuntos $A_\alpha = Cl_X(A_\alpha)$. $\square$

Corolario 1.29. *El conjunto* $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, *donde* $A_\alpha \subset X_\alpha \neq \emptyset$ *es denso en el producto cartesiano* $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *si y sólo si* A_α *es denso en* X_α *para cada* $\alpha \in \Lambda$.

Demostración. Supongamos que A_α es denso en X_α, luego $X_\alpha \subset Cl_X(A_\alpha)$, por el Teorema 1.26 y el Teorema 1.27, se sigue que

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \subset \prod_{\alpha\in\Lambda} Cl_X(A_\alpha) = Cl_X\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right),$$

así $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es denso en $\prod X_\alpha$.

Recíprocamente, como el $\prod A_\alpha$ es denso en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ si y sólo si

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = Cl_X\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha\right)$$

y por el Teorema 1.27, se tiene que $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \prod Cl_X(X_\alpha)$ si y sólo si $A_\alpha \subset Cl_X(X_\alpha)$ y $Cl_X(X_\alpha) \subset A_\alpha$ si y sólo si $X_\alpha \subset Cl_X(X_\alpha) \subset A_\alpha \subset Cl_X(A_\alpha)$ y $X_\alpha \subset Cl_X(X_\alpha) \subset A_\alpha \subset Cl_X(A_\alpha)$ por Teorema 1.26 $X_\alpha \subset Cl_X(X_\alpha) \subset A_\alpha \subset Cl_X(A_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Lambda$ y del hecho de que un conjunto A de un espacio topológico X es denso en $B \subset X$ si B está contenido en la cerradura de A, es decir, $B \subset Cl_X(A)$, y además que $C \subset Cl_X(C)$, se tiene que $X_\alpha \subset Cl_X(A_\alpha)$ y así se tiene el resultado. $\square$

Definición 1.30. *Sea $A \subset X$. El* ***interior*** *de A es el conjunto abierto mas grande contenido en A; esto es,*

$$Int(A) = \cup \{U \mid U \text{ es abierto y } U \subset A\}.$$

Observación 1.31. *$Int(A) = X - (Cl_X(X - A))$ para un conjunto A.*

Teorema 1.32. *Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sea A_i un subconjunto del espacio topológico X_i. Si A' denota el conjunto de los puntos de acumulación de A, entonces*

(1) $\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)' = (A_1' \times Cl_X(A_2) \times ... \times Cl_X(A_n)) \cup (Cl_X(A_1) \times A_2' \times ... \times Cl_X(A_n) \cup ...) = \cup\,(Cl_X(A_1) \times Cl_X(A_2) \times ... \times A_n')$.

(2) $Int\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} Int\,(A_i)$.

(3) Sea $A \subset Y$ y $B \subset Y$. Entonces

$$Fr\,(A \times B) = (Fr\,(A) \times Cl_X(B)) \cup (Cl_X(A) \times Fr\,(B))\,.$$

Demostración. Probaremos el teorema para dos factores y una reproducción fácil del argumento de inducción nos da un resultado más general.

Para esto sea

$(a, b) \in (A\times B)'$ si y sólo si $(a, b) \in Cl_X((A \times B) - (a, b)) = Cl_X([(A - \{a\}) \times B] \cup [A \times (B - \{b\})]) = [Cl_X(A - \{a\} \times \overline{B}]) \cup [Cl_X(A) \times (Cl_X(B - \{b\})])$ si y sólo si $(a, b) \in (A' \times Cl_X(B)) \cup (Cl_X(A) \times B')$.

Para la segunda parte obsérvese que:

$Int(\prod_{i=1}^{n} A_i) = X - Cl_X(X - \prod_{i=1}^{n} A_i) = X - Cl_X(\bigcup_{i=1}^{n} \langle X - A_i\rangle) = X - \bigcup_{i=1}^{n} Cl_X(\langle X - A_i\rangle)$ por la Observación 1.31 y Teorema 1.18(3),

tenemos que $\bigcap_{i=1}^{n} \langle X - (Cl_X(X - A_i)\rangle) = \prod_{i=1}^{n} Int(A_i)$.

Para probar la última parte sea $(x, y) \in Fr\,(A \times B)$. Por la definición, $Fr\,(A \times B) \subset Cl_X(A \times B) = Cl_X(A) \times Cl_X(B)$, también $x \in Cl_X(A)$ y $y \in Cl_X(B)$. Si $x \notin Fr\,(A)$ y $y \notin Fr\,(B)$ de nuevo, por definición, $x \notin Cl_X(X - A)$ y $y \notin Cl_X(X - B)$. Sea

$$U = x \notin (X - Cl_X(X - A)) \text{ y } V = x \notin (Y - Cl_X(Y - B)).$$

Entonces $(x,y) \in U \times V$ y $(U \times V) \cap (X \times Y) - (A \times B)$, contradiciendo que $(x,y) \in Fr\,(A \times B)$. En consecuencia $x \in Fr\,(A)$ o $y \in Fr\,(B)$, y así

$$Fr\,(A \times B) \subset (Fr\,(A) \times Cl_X(B)) \cup (Cl_X(A) \times Fr\,(B))$$

Supóngamos ahora que $x \in (Fr\,(A) \times Cl_X(B))$ y sea $U \times V$ un conjunto abierto básico tal que $(x,y) \in U \times V$. Queremos probar que $(U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset$ y $(U \times V) \cap [(X \times Y) - (A \times B)] \neq \emptyset$. Como $x \in Fr\,(A)$ y $y \in Cl_X(B)$, se tiene que $(U \cap A) \neq \emptyset$ y $(V \cap B) \neq \emptyset$; de aquí se sigue que $(U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset$.

Como $x \in Fr\,(A)$, se tiene que $U \cap (X - A) \neq \emptyset$. Sea $z \in U \cap (X - A)$, se sigue que

$$\{z\} \times V \subset (U \times V) \cap [(X \times Y) - (A \times B)] .$$

Luego $(Fr\,(A) \times Cl_X(B)) \subset Fr\,(A \times B)$.

De manera similar se puede probar que $Cl_X(A) \times Fr\,(B) \subset Fr\,(A \times B)$. $\square$

Teorema 1.33. *Sea X un espacio fijo y $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos. Supóngase que para cada $\alpha \in \Lambda$, se tiene $f_\alpha : X \to X_\alpha$. Entonces definiendo $f : X \to \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ por*

$$f\,(x) = \{f_\alpha\,(x)\}_{\alpha \in \Lambda} ,$$

f es continua si y sólo si para cada $\alpha \in \Lambda$, se tiene que $p_\beta \circ f$ es continua.

Demostración. Sea p_β la función proyección sobre el $\beta-$ésimo factor. Sabemos que la función p_β es continua, ahora si U_α es un abierto en X_α, el conjunto ${p_\beta}^{-1}\,(U_\alpha)$ es un subbásico en X_α.

Supongamos que $f : X \to \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es continua. Claramente la función $p_\beta \circ f = f_\beta$ es continua, pues la composición de funciones continuas es también continua.

Recíprocamente, supóngase que cada f_α es continua. Para probar que f es continua, será suficiente probar que la imagen inversa bajo f de cada elemento subbásico es un abierto en X. Ahora un elemento subbásico para la topología producto de $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es un conjunto de la forma $p_\beta{}^{-1}(U_\beta)$, con $\beta \in \Lambda$ y U_β es un abierto en X_β. Ahora

$$f^{-1}\left[p_\beta^{-1}(U_\beta)\right] = f_\beta^{-1}(U_\beta),$$

porque $p_\beta \circ f = f_\beta$. Como f_β es continua para todo $\beta \in \Lambda$, se tiene que $f_\beta^{-1}(U_\beta)$ es un abierto en X. Así f es continua. $\square$

Capítulo 2

Productos de espacios topológicos

2.1. Numerables

En el presente trabajo será importante reconocer que ciertos conjuntos o bien que ciertas clases de conjuntos son numerables. Conviene, por lo tanto, recordar la definición y los resultados más importantes sobre espacios numerables. Dada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$S_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Definición 2.1. *Sea A un conjunto. Decimos que:*

(1) *A es **finito** si $A = \emptyset$ o bien si existen $n \in \mathbb{N}$ y una función biyectiva $f\colon A \to S_n$;*

(2) *A es **infinito** si A no es finito;*

(3) *A es **infinito numerable** si existe una función biyectiva $f\colon A \to \mathbb{N}$;*

(4) *A es **numerable** si A es finito o bien infinito numerable;*

(5) *A es* ***no numerable*** *si el conjunto A no es numerable.*

Para más información sobre cardinalidad, el lector puede consultar la Sección 7 del Capítulo 1 del libro [2]. En [2, Corolario 7.7, pág. 47] se prueba, por el ejemplo, el Teorema de Schroeder-Bernstein el cual dice que si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces $|A| = |B|$.

La cardinalidad del conjunto $\mathbb{N}$ se denota por $\aleph_0$. La cardinalidad de S_n de denota por n. Decimos que un conjunto A es *degenerado* si $|A| = 1$. Si $|A| \geq 2$, entonces A es *no degenerado.* Los conceptos presentados en la Definición 2.1 pueden interpretarse como sigue: A es finito si su cardinalidad es la de algún conjunto S_n, A es infinito numerable si su cardinalidad es $\aleph_0$ y A es numerable si su cardinalidad es menor o igual que $\aleph_0$.

La demostración del siguiente teorema puede consultarse en [4, Teorema 7.1].

Teorema 2.2. *Para un conjunto no vacío X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *X es numerable;*

(2) *existe una función suprayectiva $f\colon \mathbb{N} \to X$;*

(3) *existe una función inyectiva $f\colon X \to \mathbb{N}$.*

De la definición de conjunto numerable, es fácil ver que un conjunto A es numerable si y sólo si existen un conjunto numerable J y una función biyectiva $g\colon A \to J$. En otras palabras, un conjunto es numerable si está en correspondencia biunívoca con algún conjunto numerable. Combinando ésto con el Teorema 2.2, resulta que un conjunto no vacío X es numerable si y sólo si existen un conjunto numerable J y una función suprayectiva $f\colon J \to X$, o bien una función inyectiva $g\colon X \to J$. La presente observación será importante en la demostración de algunos de los resultados que presentaremos en esta sección.

Teorema 2.3. *El conjunto* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *es numerable.*

Demostración. Para ver esto, de acuerdo con el Teorema 2.2, es suficiente con mostrar una función inyectiva $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dada $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, podemos definir:

$$f((n, m)) = 2^n 3^m.$$

Para ver que f es inyectiva, tomemos dos elementos (n, m) y (r, s) en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, de modo que$f((n, m)) = f((r, s))$. Entonces:

$$2^n 3^m = 2^r 3^s. \tag{2.1.1}$$

Supongamos que $n \neq r$ y $m \neq s$. Si $n > r$ y $m > s$, entonces $n-r > 0$ y $m-s > 0$, por lo que $2^{n-r}3^{m-s} > 2^0 3^0 = 1$, de donde $2^n 3^m > 2^r 3^s$, lo que contradice (2.1.1). Supongamos ahora que $n > r$ y $m < s$. Entonces $n - r \in \mathbb{N}$ y $s - m \in \mathbb{N}$ por lo que, de (2.1.1), se cumple que $2^{n-r} = 3^{s-m}$. Luego 2 divide a 3^{s-m} y, por tanto, 2 divide a 3, lo cual es una contradicción. De todo esto, concluimos que no podemos suponer que $n > r$ y $m > s$, ni que $n > r$ y $m < s$. De manera similar, se muestra que tampoco podemos suponer que $n < r$ y $m > s$, ni que $n < r$ y $m < s$. Por tanto, no podemos suponer que $n \neq r$ y $m \neq s$. Luego $n = r$ o bien $m = s$. Si $n = r$, de (2.1.1), se sigue que $3^m = 3^s$ y, así, $m = s$. De igual manera, si $m = s$ tenemos que $n = r$. Luego $(n, m) = (r, s)$ y, por lo tanto, f es inyectiva. $\square$

El hecho de que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es numerable es importante para probar los siguientes resultados.

Teorema 2.4. *El producto finito de conjuntos numerables es numerable.*

Demostración. Haremos la demostración sólo para el producto de dos conjuntos numerables, pues el caso general se deduce de esta situación, aplicando inducción matemática. Sean, pues, A y B dos conjuntos numerables. Si alguno de A y B es vacío, entonces $A \times B$ es vacío. Supongamos, por lo tanto, que A y B son no vacíos. Como A y B son numerables, por el Teorema 2.2, existen funciones suprayectivas $f\colon \mathbb{N} \to A$ y $g\colon \mathbb{N} \to B$. Consideremos la función $h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$ definida, para $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, por:

$$h((n, m)) = (f(n), g(m)).$$

Si $(a, b) \in A \times B$ entonces, como f y g son suprayectivas, existe $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $f(n) = a$ y $g(m) = b$. Luego $h((n, m)) = (f(n), g(m)) = (a, b)$. Esto prueba que h es suprayectiva. Hemos encontrado una función suprayectiva del conjunto numerable $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $A \times B$. Por tanto $A \times B$ es numerable. $\square$

Con respecto al Teorema 2.4 más adelante, en la página 32, veremos que un producto numerable de conjuntos numerables, no es necesariamente un conjunto numerable.

Teorema 2.5. *La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Demostración. Sean J un conjunto numerable y $\{A_n\colon n \in J\}$ una clase no vacía de conjuntos numerables no vacíos. Para cada $n \in J$, como A_n es numerable, por el Teorema 2.2, existe una función suprayectiva $f_n\colon \mathbb{N} \to A_n$. Puesto que J también es numerable, aplicando de nuevo el Teorema 2.2, existe una función suprayectiva $g\colon \mathbb{N} \to J$. Consideremos ahora la función $h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in J} A_n$ definida, para $(k,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, por:

$$h((k,m)) = f_{g(k)}(m).$$

Notemos que h está bien definida pues, si $(k,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, entonces $g(k) \in J$ y

$$h((k,m)) = f_{g(k)}(m) \in A_{g(k)} \subset \bigcup_{n\in J} A_n.$$

Veamos ahora que h es suprayectiva. Para esto sea $a \in \bigcup_{n\in J} A_n$. Entonces existe $n \in J$ tal que $a \in A_n$. Como f_n es suprayectiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(m) = a$. Además, como g es suprayectiva y $n \in J$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(k) = n$. De esta forma $h((k,m)) = f_{g(k)}(m) = f_n(m) = a$, por lo que h es suprayectiva. Hemos encontrado una función suprayectiva del conjunto numerable $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\bigcup_{n\in J} A_n$. Por lo tanto $\bigcup_{n\in J} A_n$ es numerable. $\square$

Debido a la cantidad de veces que se utilizará en este trabajo, el siguiente resultado es el principal de la presente sección.

Teorema 2.6. *Si C es un conjunto numerable y $\mathcal{C}$ es la clase de los subconjuntos finitos de C, es decir, si*

$$\mathcal{C} = \{L \subset C\colon L \text{ es un subconjunto finito de } C\},$$

entonces $\mathcal{C}$ es numerable.

Demostración. Notemos que $\mathcal{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ donde, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A}_n = \{L \subset C\colon |L| = n\}.$$

Veamos que cada $\mathcal{A}_n$ es numerable. Tomemos entonces $n \in \mathbb{N}$ y, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $C_i = C$. Consideremos la función $f_n\colon \prod_{i=1}^n C_i \to \mathcal{A}_n$ definida, para $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^n C_i$, por:

$$f_n((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Es fácil ver que f_n es suprayectiva. Además, como $\prod_{i=1}^{n} C_i$ es un producto finito de conjuntos numerables, por el Teorema 2.4, $\prod_{i=1}^{n} C_i$ es numerable. Hemos encontrado una función suprayectiva del conjunto numerable $\prod_{i=1}^{n} C_i$ a $\mathcal{A}_n$. Por lo tanto $\mathcal{A}_n$ es numerable.

De lo anterior tenemos que $\mathcal{C}$ es una unión numerable de conjuntos numerables. Luego, por el Teorema 2.5, $\mathcal{C}$ es numerable. $\square$

Recordemos ahora que un espacio topológico es *discreto* si su topología es la discreta. Si cada espacio factor X_α es discreto, es natural preguntarse si la topología producto de $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es la discreta. Como una aplicación del Teorema 1.13, tenemos el siguiente resultado, el cual responde la pregunta.

Teorema 2.7. *Sean $\{X_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ una clase no vacía de espacios discretos no vacíos y :*

$$X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha.$$

Entonces X es discreto si y sólo si el conjunto $J = \{\alpha \in \Lambda \colon |X_\alpha| \geq 2\}$ es finito.

Demostración. Antes de iniciar la demostración conviene hacer un comentario. Como cada espacio X_α es no vacío, el teorema dice que la topología producto de X es la discreta si y sólo si todos los espacios X_α, salvo un número finito de ellos, son degenerados. Por lo tanto, ningún producto topológico que tenga una cantidad infinita de factores no degenerados es discreto.

Ahora iniciamos la demostración. Supongamos primero que X es discreto. Entonces cada subconjunto de X es abierto. En particular, si $x = (x_\alpha)_\alpha \in X$, entonces $\{x\}$ es abierto en X. Notemos ahora que:

$$\{x\} = \prod_{\alpha\in\Lambda}\{x_\alpha\}.$$

Entonces el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in\Lambda}\{x_\alpha\}$ es abierto en X. Luego, por el Teorema 1.13, $\prod_{\alpha\in\Lambda}\{x_\alpha\}$ es un abierto básico en X. Ahora bien, para que el conjunto $\prod_{\alpha\in\Lambda}\{x_\alpha\}$ sea un abierto básico en X es necesario que todos los espacios X_α, salvo un número finito de ellos, sean degenerados. Por lo tanto, el conjunto $J = \{\alpha \in \Lambda \colon |X_\alpha| \geq 2\}$ es finito.

Supongamos ahora que el conjunto $J = \{\alpha \in \Lambda \colon |X_\alpha| \geq 2\}$ es finito. Para probar que X es discreto, es suficiente con hacer ver que los subconjuntos degenerados de X son abiertos en X. Tomemos, por lo tanto, un elemento $x = (x_\alpha)_\alpha \in X$. Entonces

$$\{x\} = \prod_{\alpha\in\Lambda}\{x_\alpha\}$$

y, por el Teorema 1.13, para que el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in\Lambda}\{x_\alpha\}$ sea un abierto en X, basta con verificar que dicho producto es un abierto básico de X. Como $x_\alpha \in X_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$ y J es finito, sucede que $X_\alpha = \{x_\alpha\}$, para cada $\alpha \in \Lambda - J$. Por lo tanto $\prod_{\alpha\in\Lambda}\{x_\alpha\}$ es un subconjunto de X tal que cada factor $\{x_\alpha\}$ es abierto en X_α y $\{x_\alpha\} = X_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda - J$. Luego $\prod_{\alpha\in\Lambda}\{x_\alpha\}$ es un abierto básico en X. $\square$

Consideremos el conjunto $\{0, 2\}$ con la topología discreta. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hagamos $X_n = \{0, 2\}$ y consideremos el producto cartesiano

$$X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

con la topología producto. Por el Teorema 2.7, X no es un espacio discreto. Se puede demostrar que X es homeomorfo al conjunto de Cantor usual C. Una manera de hacer esto es probar primero que

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \colon x_n \in \{0, 2\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\}$$

y, posteriormente, demostrar que la función $f \colon X \to C$ definida, para $x = (x_n)_n \in X$ como:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

es un homeomorfismo. Para el lector interesado en ver los detalles de dichas afirmaciones, puede consultar las páginas 227 a 232 del libro [5]. Como se sabe, el conjunto de Cantor C es no numerable. Entonces X, el cual es un producto numerable de conjuntos numerables, es no numerable.

2.2. Primero numerables

Recordemos que un espacio X es *primero numerable* si, para cada $x \in X$, existe una base local numerable en x. El siguiente resultado muestra condiciones, bajo las cuales, la propiedad de ser primero numerable se preserva bajo funciones continuas.

Teorema 2.8. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f \colon X \to Y$ una función abierta, continua y suprayectiva. Si X es primero numerable, entonces Y también es primero numerable.*

Demostración. Supongamos que X es primero numerable. Para ver que Y es primero numerable, tomemos un punto $y \in Y$.

Como f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. En vista de que X es primero numerable, existe una base local numerable $\mathcal{B}_x = \{B_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ en x. Dada $n \in \mathbb{N}$ hagamos $C_n = f(B_n)$ y consideremos la clase $\mathcal{C}_x = \{C_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Como f es abierta y cada elemento B_n es un abierto en X que tiene a x, sucede que cada elemento C_n es un abierto en Y que tiene a $y = f(x)$. Supongamos ahora que V es un abierto en Y tal que $y \in V$. Como f es continua en x, existe un abierto U en X tal que $x \in U$ y $f(U) \subset V$. Utilizando que $\mathcal{B}_x$ es una base local en x, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset U$. Luego $y = f(x) \in C_n = f(B_n) \subset f(U) \subset V$. Hemos probado que los elementos de $\mathcal{C}_x$ son abiertos en Y que tienen a y y, además, que cada abierto en Y que tiene a y, contiene un elemento de $\mathcal{C}_x$. Por lo tanto $\mathcal{C}_x$ es una base local en y. Como $\mathcal{B}_x$ es numerable, resulta que $\mathcal{C}_x$ también es numerable. Esto prueba que Y es primero numerable. $\square$

Utilizando el resultado anterior probamos el siguiente criterio, bajo el cual, un producto arbitrario de espacios primero numerables es primero numerable.

Teorema 2.9. *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos. Hagamos:*

$$X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha.$$

Entonces X es primero numerable si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) *X_α es primero numerable, para cada $\alpha \in \Lambda$;*

(2) *el conjunto $J = \{\alpha \in \Lambda \colon \tau_\alpha$ tiene por lo menos tres elementos$\}$ es numerable.*

Demostración. Antes de iniciar la demostración notemos que, para conjuntos no degenerados, solamente la topología indiscreta posee dos elementos. Por lo tanto la condición (2) dice que el conjunto de espacios X_α que no son indiscretos es numerable. Así, debemos probar que X es primero numerable si y sólo si cada factor X_α es primero numerable y todos ellos, salvo una cantidad numerable, son espacios indiscretos.

Ahora iniciamos la demostración. Supongamos primero que X es primero numerable. Dada $\alpha \in \Lambda$, consideremos la función proyección $p_\alpha \colon X \to X_\alpha$. Como X es primero numerable y, por el Teorema 1.11, p_α es continua, abierta y suprayectiva, por el Teorema 2.8, tenemos que X_α es primero numerable. Ahora consideremos el conjunto:

$$J = \{\alpha \in \Lambda \colon \tau_\alpha \text{ tiene por lo menos tres elementos}\}.$$

Si $J = \emptyset$, entonces J es numerable y la primera parte de la demostración está completa. Supongamos, por lo tanto, que $J \neq \emptyset$. Para cada $\alpha \in J$, como τ_α tiene por lo menos tres elementos, existe un abierto U_α en X_α tal que $U_\alpha \neq \emptyset$ y $U_\alpha \neq X_\alpha$. Tomemos un punto $a_\alpha \in U_\alpha$. Para los elementos $\beta \in \Lambda - J$, consideremos un punto $a_\beta \in X_\beta$. De esta manera tenemos definido un punto $a = (a_\alpha)_\alpha$ en X. Como X es primero numerable, existe una base local numerable $\mathcal{B}_a = \{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ en a.

Ahora, para cada elemento V_n de $\mathcal{B}_a$, vamos a considerar la proyección de V_n sobre todos los factores X_α de X, y quedarnos con aquellos índices $\alpha \in \Lambda$, para los cuales la proyección $p_\alpha(V_n)$ no es igual a X_α. Mostraremos que solamente hay una cantidad finita de dichos índices y que su unión contiene a J. De esta manera, tendremos que J es numerable.

Para formalizar lo indicado en el párrafo anterior consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto:

$$H_n = \{\alpha \in \Lambda \colon p_\alpha\left(V_n\right) \neq X_\alpha\}.$$

Vamos a probar que H_n es finito. Para esto notemos que, como V_n es un abierto en X, existe un abierto básico $\prod_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$ contenido en V_n. Entonces cada C_α es abierto en X_α y, además, existe un subconjunto finito F de Λ tal que $C_\alpha = X_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda - F$. Por lo tanto, para cada $\beta \in \Lambda - F$,

$$p_\beta(V_n) \supset p_\beta\left(\prod_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha\right) = C_\beta = X_\beta.$$

Luego $p_\beta(V_n) = X_\beta$, de donde $\beta \notin H_n$. Esto muestra que $H_n \subset F$ y, como consecuencia de esto, H_n es finito. Aplicando ahora el Teorema 2.5, deducimos que el conjunto

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

es numerable. A continuación vamos a demostrar que $J \subset H$. Para esto sea $\alpha \in J$. Como ya dijimos, en X_α consideramos el abierto U_α tal que $U_\alpha \neq \emptyset$ y $U_\alpha \neq X_\alpha$. Además tomamos el punto $a_\alpha \in U_\alpha$. Definamos $D_\alpha = U_\alpha$ y $D_\beta = X_\beta$, para cada $\beta \in \Lambda - \{\alpha\}$. Entonces

$$U = \prod_{\beta \in \Lambda} D_\beta$$

es un abierto en X que tiene al punto a. Como $\mathcal{B}_a$ es una base local en a, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n \subset U$. Luego $p_\alpha(V_n) \subset p_\alpha(U) = U_\alpha \neq X_\alpha$, de donde $\alpha \in H_n \subset H$. Esto prueba que $J \subset H$, así que J es un subconjunto del conjunto numerable H, luego J es numerable. Esto termina la demostración de la primera parte del teorema.

Para probar la segunda parte del teorema, supongamos que cada X_α es primero numerable y que el conjunto

$$J = \{\alpha \in \Lambda \colon \tau_\alpha \text{ tiene por lo menos tres elementos}\}$$

es numerable. Tomemos un punto $b = (b_\alpha)_\alpha$ en X. Dada $\alpha \in \Lambda$ el punto b_α se encuentra en X_α, el cual es primero numerable. Entonces existe una base local numerable $\mathcal{B}_\alpha$ en b_α. Notemos que si $\alpha \in \Lambda - J$, entonces el espacio X_α es indiscreto. Luego $\mathcal{B}_\alpha = \{X_\alpha\}$. Consideremos ahora la clase $\mathcal{B}_b$ de todos los subconjuntos de X de la forma:

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \tag{2.2.1}$$

donde $A_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$ y, además, existe un subconjunto finito G de J tal que $A_\alpha = X_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda - G$. Vamos a probar que $\mathcal{B}_b$ es una base local numerable en b.

Para ver que la clase $\mathcal{B}_b$ es numerable, supongamos que F es un subconjunto finito de J. Consideremos la clase $\mathcal{B}_F$ de los elementos

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$$

en $\mathcal{B}_b$ de modo que F es justo el subconjunto finito de J tal que $A_\alpha = X_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda - F$. Si $\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ y $\prod_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$ son elementos distintos de $\mathcal{B}_F$, entonces existe $\alpha \in F$ tal que A_α y B_α son diferentes elementos de $\mathcal{B}_\alpha$. Con esto hemos probado que lo que diferencía a dos elementos de $\mathcal{B}_F$ es el elemento de la base local $\mathcal{B}_\alpha$ que elegimos en alguna coordenada α de F. Utilizando esto, el principio de las casillas y el hecho de que cada base local $\mathcal{B}_\alpha$ es numerable, no es difícil probar que $\mathcal{B}_F$ tiene $\aleph_0 \cdot |F|$ elementos. Como F es finito, $\aleph_0 \cdot |F| = \aleph_0$. Entonces $\mathcal{B}_F$ es numerable. Notemos ahora que:

$$\mathcal{B}_b = \bigcup \{\mathcal{B}_F \colon F \text{ es un subconjunto finito de } J\}.$$

Definamos

$$\mathcal{C} = \{F \subset J \colon F \text{ es finito}\}, \quad \mathcal{B} = \{\mathcal{B}_F \colon F \in C\}$$

y consideremos la función $g \colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ definida, para $F \in \mathcal{C}$, como $g(F) = \mathcal{B}_F$. Es fácil ver que g es suprayectiva. Ahora bien, como J es numerable, por el Teorema 2.6, $\mathcal{C}$ es numerable. Tenemos entonces que g es una función suprayectiva del conjunto numerable $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$. Luego, por el Teorema 2.2, $\mathcal{B}$ es numerable. Entonces $\mathcal{B}_b = \bigcup \mathcal{B}$ es una unión numerable de conjuntos numerables así que, por el Teorema 2.5, $\mathcal{B}_b$ es numerable.

Para ver que $\mathcal{B}_b$ es una base local en b, sea U un abierto en X con $b \in U$. Consideremos un abierto básico usual B de X tal que $b \in B \subset U$. Entonces

$$B = \prod_{\alpha \in} B_\alpha$$

donde B_α es abierto en X_α, para cada $\alpha \in \Lambda$ y, además, existe un subconjunto finito K de Λ tal que $B_\alpha = X_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda - K$. Notemos que si $\alpha \in K - J$, entonces $B_\alpha = X_\alpha$, pues B_α es un abierto no vacío del espacio indiscreto X_α. Por lo tanto $G = K \cap J$ es un subconjunto finito de J tal que $B_\alpha = X_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda - G$. Dada $\alpha \in G$, como $b_\alpha \in B_\alpha$ y $\mathcal{B}_\alpha$ es una base local de b_α en X_α, existe $C_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ tal que $b_\alpha \in C_\alpha \subset B_\alpha$.

Consideremos ahora

$$A = \prod_{\alpha \in} A_\alpha$$

donde $A_\alpha = C_\alpha$ para cada $\alpha \in G$, $A_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para cada $\alpha \in J - G$ y $A_\alpha = X_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda - J$. Notemos que $A_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$. Además G es un subconjunto finito de J tal que $A_\alpha = X_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda - J$. Por lo tanto $A \in \mathcal{B}_b$. Ahora bien, como $A_\alpha \subset B_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$, sucede que $b \in A \subset B \subset U$. Esto prueba que $\mathcal{B}_b$ es una base local en b. Por consiguiente, X es primero numerable. $\square$

Corolario 2.10. *El producto de una cantidad numerable de espacios primero numerables, es primero numerable.*

Demostración. Como, en este caso, $J = \{\alpha \in \mathbb{N} \colon \tau_\alpha$ tiene por lo menos tres elementos$\}$, evidentemente, $J \subset \mathbb{N}$. Así, J es numerable. De aquí, se cumple la condición (2) del Teorema 2.9 y como también se cumple la condición (1) de dicho teorema, obtenemos el corolario. $\square$

Notemos que, en general, el producto arbitrario de espacios primero numerables no es primero numerable. Por ejemplo, Sea $\Lambda = \mathbb{R}$, para cada $\alpha \in \Lambda$, el espacio topológico $X_\alpha = \mathbb{R}$ y $\tau_\alpha =$ topología usual de $\mathbb{R}$. Con todo esto, J, de la condición (2) del Teorema 2.9 no es numerable. Así, $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ no es primero numerable.

2.3. Hausdorff, Regular, Tychonoff y AR

Definición 2.11. *Un espacio topológico X es separable si contiene un subconjunto denso numerable.*

Teorema 2.12. (1) *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ continua y suprayectiva. Si $D \subset X$ es denso, entonces $f(D)$ es denso en Y. En particular, si X es separable, Y lo es.*

(2) *Sea $D \subset X$ denso y $E \subset X$ abierto en X, entonces $E \cap D$ es denso en el subespacio E. Así, cualquier subconjunto abierto de un espacio separable es separable*

(3) *Un subconjunto D de un producto de espacios $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es denso, si es de la forma $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} D_\alpha$, donde D_α es denso para toda $\alpha \in \Lambda$ y por lo tanto si Λ es numerable, X_α es separable para toda $\alpha \in \Lambda$ si y sólo si $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es separable.*

Demostración. Sea $A \subset Y$ abierto. Como f es una función continua, $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en X y por lo tanto $f^{-1}(A) \cap D \neq \emptyset$. Si x está en la intersección, entonces $f(x) \in f(D) \cap A$.

Para probar la segunda parte del teorema sea $A \subset E$ abierto cualquiera en E. Como E es abierto en X, entonces A es abierto en X y por lo tanto $A \cap D \neq \emptyset$. Así resulta que $D \cap E$ es denso en E.

Ahora se probará la parte (3), para esto sea $D = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} D_\alpha$, donde D_α es denso en X_α para cada $\alpha \in \Lambda$ y sea $A \subset \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ un abierto básico del producto. De 1.2.3 se sigue que $A = \prod_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$, donde C_α es un abierto de X_α, para cada $\alpha \in \Lambda$. Así, resulta que $C_\alpha \cap D_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in \Lambda$ y si $x_\alpha \in A_\alpha \cap D_\alpha$ entonces el elemento en $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ cuya $\alpha - \textit{ésima}$ coordenada es x_α que pertenece a $D \cap A$.

En el caso en que Λ es numerable y cada X_α es separable, entonces $D = \prod_{\alpha\in\Lambda} D_\alpha$ es denso y numerable en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, donde D_α es un subconjunto denso numerable en X_α. Por otro lado si $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es separable y $D \subset \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ denso y numerable, entonces como cada proyección es continua y suprayectiva, del inciso (1), resulta que $p_\alpha(D)$ es denso y naturalmente numerable en X_α. Es decir X_α es separable para cualquiera que sea α. $\square$

Definición 2.13. *Un espacio topológico X es un espacio Hausdorff (o T_2) si para cada par de puntos distintos $p, q \in X$ existen conjuntos abiertos U, V de X tales que $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Teorema 2.14. (1) *La propiedad de ser de Hausdorff es una propiedad hereditaria.*

(2) *El producto topológico $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es Hausdorff si y sólo si para toda $\alpha \in \Lambda$, se tiene que X_α es Hausdorff.*

Demostración. (1) Sean Y un espacio de Hausdorff, $A \subset Y$ y $p, q \in A$; como Y es Hausdorff existen abiertos U, V de Y, ajenos tales que $p \in U, q \in V$. Luego $U \cap A$ y $V \cap A$ son también abiertos de A, ajenos, es decir, A es Hausdorff.

Para la segunda parte del teorema, supóngase que cada X_α es Hausdorff. Sean $p = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ y $q = (b_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ puntos distintos en X. Así, existe $\beta \in \Lambda$ tal que $a_\beta \neq b_\beta$. Por hipótesis X_β es de Hausdorff entonces existen U y V abiertos en X_β, ajenos, tales que $a_\beta \in U$ y $b_\beta \in V$. Por definición de espacio producto $p_\beta : \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\beta$ es continua. Luego $p_\beta^{-1}(U)$, $p_\beta^{-1}(V)$ son abiertos, ajenos y $p \in p_\beta^{-1}(U)$, $q \in p_\beta^{-1}(V)$, por lo tanto $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es un espacio de Hausdorff.

Recíprocamente, supóngase que $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es de Hausdorff, por el Teorema 1.21, cada X_α es homeomorfo a una rebanada en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Por la parte (1) de este mismo teorema, tal rebanada es de Hausdorff y como ser de Hausdorff es una propiedad topológica, para todo $\alpha \in \Lambda$, se tiene que X_α es Hausdorff. $\square$

Definición 2.15. *Un espacio topológico X es un espacio T_3 o regular si dados subconjuntos cerrados F de X y un punto x que no esté en F, existen abiertos U y V de X, ajenos, conteniendo a x y a F, respectivamente.*

Definición 2.16. *Una propiedad P de un espacio topológico X es hereditaria si cualquier subespacio de X tiene la propiedad P.*

Teorema 2.17. (1) *La propiedad de ser regular es una propiedad hereditaria.*

(2) *El producto cartesiano $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es regular si y sólo si para toda $\alpha \in \Lambda$, se tiene que X_α es regular.*

Demostración. Para demostrar la primera parte supongamos que Y es regular y sea $X \subset Y$. Sea B cerrado en X y $x_0 \in X \setminus B$, luego $B = A \cap X$, donde A es cerrado en Y. Por lo tanto $x_0 \notin A$, ya que de lo contrario si $x_0 \in A$ entonces $x_0 \in X$, luego $x_0 \in A \cap X$, es decir, $x_0 \in B$ lo cual es una contradicción.

Como Y es regular, existe U vecindad de p y $V \supset A$ abierto en X tal que $U \cap V = \varnothing$, luego $U \cap X$ es un abierto de p en X $V \cap X$ es un abierto de X tal que $B = A \cap X \subset V \cap X$, porque $A \subset V$, y $(U \cap X) \cap (V \cap X) = \varnothing$. Por lo tanto, X es regular.

Ahora como $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es regular entonces para cada $\alpha \in \Lambda$, se tiene que X_α es homeomorfo a un subespacio de $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, digamos $H = \prod_{\alpha\in\beta\subset\Lambda} X_\alpha \subset X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, luego por el inciso 1), se tienene que H es regular, por lo tanto para toda $\alpha \in \Lambda$, se tiene que X_α es regular.

Recíprocamente, sea $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ y $\langle U_\alpha \rangle$ un subbásico que contiene a $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Para cada $\alpha \in \Lambda$ existe V_α abierto en X_α tal que $x_\alpha \in V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$, luego $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \langle V_\alpha \rangle \subset \overline{\langle V_\alpha \rangle} = \langle \overline{V_\alpha} \rangle \subset \langle U_\alpha \rangle$. Así $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es regular. $\square$

Definición 2.18. *Un espacio topológico X es Completamente Regurar (o de Tychonoff) si satisface:*

(1) X es un espacio T_1.

(2) Para cualquier $F \subset X$ cerrado y cualquier $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(F) = \{0\}$.

Teorema 2.19. *La propiedad de ser completamente regular es una propiedad topológica y hereditaria.*

Definición 2.20. *Una $f : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua superior si para cada real b, $x : f(x) < b$ es abierto y semicontinua inferior si para cada real b, $x : f(x) > b$*

La demostracion del siguiente colorario puede consultarse en [2, Corolario 10.4, pág. 85]

Corolario 2.21. *Sea $f_\alpha : \alpha \in \lambda$ una familia de funciones continuas $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$. Entonces*

(1) $M(x) = sup f_\alpha(x) : \alpha \in \lambda$ *es semicontinua inferior*

(2) $m(x) = inf f_\alpha(x) : \alpha \in \lambda$ *es semicontinua superior*

Teorema 2.22. *Sea* $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ *una clase de espacios. El producto topológico* $X = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *es completamente regular si y sólo si cada* X_α *es completamente regular.*

Demostración. Supóngase que $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es completamente regular, por el Teorema 1.21, cada X_α es homeomorfo a una rebanada en $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Por el teorema 2.19 tal rebanada es completamente regular y como ser completamente regular es una propiedad topológica, para todo $\alpha \in \Lambda$, se tiene que X_α es completamente regular.

Ahora supóngase que para cada $\alpha \in \Lambda$, X_α es completamente regular. Como cada X_α es T_1, entonces $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ lo es.

Sean $x \in X$ y F un subconjunto cerrado del producto que no contiene a x. Existe un conjunto abierto básico B de $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ tal que $x \in B \subset \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha - F$. Es decir, existe una colección finita de índices $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ y $U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}$, abiertos en $X_{\alpha_1}, ..., X_{\alpha_n}$ respectivamente, tales que

$$x \in B = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subset \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha - F$$

Si x_{α_i} es la $\alpha_i - ésima$ coordenada de x, entonces $x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$ para $i = 1, ..., n$. Como X_{α_i} es completamente regular, entonces existe una función continua $f_i : X_{\alpha_i} \to [0,1]$ tal que $f_i\left(x_{\alpha_i}\right) = 1$ y $f_i\left(X_{\alpha_i} - U_i\right) = \{0\}$ para $i = 1, ..., n$. Sea $g : \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \longrightarrow [0,1]$ definida por $g(y) = \text{mín}\{f_i(y_{\alpha_i}) : i = 1, ..., n.\}$

La función g es el mínimo de las funciones continuas $g \circ p_{\alpha_i}$, $i = 1, ..., n$ y por lo tanto es una función continua (ver Teorema 2.21). Además, $g\left(x\right) = \text{mín}\left\{f_i\left(x_{\alpha_i}\right) : i = 1, ..., n\right\} = 1$ y si $y \in$

$\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha - F\right)$, entonces $y_{\alpha_i} \notin U_i$ para alguna $i = 1, ..., n$, y por lo tanto $f_i\left(y_{\alpha_i}\right) = 0$. Así $g\left(y\right) = 0$. Es decir, $g\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha - F\right) = \{0\}$. □

Definición 2.23. *Un espacio topológico Y es un **retracto absoluto**(AR) si para cada espacio normal X, para cada A cerrado en X y cada $f : A \to Y$ continua tiene una extensión $F : X \to Y$, es decir, para cada $a \in A$, tenemos que $f(a) = F(a)$*

Teorema 2.24. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de espacios. Un producto topológico $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es AR si y sólo si para todo $\alpha \in \Lambda$, se tiene que X_α es AR.*

Demostración. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$, se tiene que X_α es un AR. Sea X normal y $A \subset X$ cerrado y $f : A \to \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ continua; Por el Teorema 1.14, $p_\beta \circ f : A \to X_\beta$ es continua, entonces existe una estensión $F_\beta : X \to X_\beta$, tal que $F_\beta \mid_A = p_\beta \circ f$. Definamos $G : X \to \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ como $G(x) = \{F_\beta(x)\}$, luego

$$G(a) = \{F_\beta(a)\} = \{p_\beta \circ f(a)\} = \{f(a)_\beta\} = f(a).$$

La función G es continua para cada $\alpha \in \Lambda$. Por lo tanto $\prod X_\alpha$ es AR. □

Corolario 2.25. *Sea $\{X_i : i = 1, ..., n\}$ una familia finita de espacios. Entonces $\prod_1^n X_i$ es AN(NORMAL)*

2.4. Metrizables

En el presente capítulo, daremos una serie de resultados en torno a los espacios métricos y a los metrizables. Entre otros resultados veremos el criterio, bajo el cual, un producto de espacios metrizables es metrizable.

Definición 2.26. *Una **métrica** (o **distancia**) en un conjunto X, es una función $d\colon X\times X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*

(1) $d(x,y) \geq 0$ *para cada* $x,y\in X$;

(2) $d(x,y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$;

(3) $d(x,y) = d(y,x)$ *para todo* $x,y\in X$;

(4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *para todo* $x,y,z \in X$.

*Al número $d(x,y)$ se le llama la **distancia entre** x **y** y. Al par (X,d) se le llama **espacio métrico**.*

Si deseamos respetar la notación, en la definición anterior deberíamos escribir, para cada $(x,y) \in X \times X$, $d((x,y))$, en lugar de $d(x,y)$. Sin embargo es tan común escribir $d(x,y)$ que, en el presente trabajo, lo haremos así.

De la definición tenemos que un espacio métrico es un conjunto X con una métrica d. Como en el caso de los espacios topológicos, cuando no es necesario indicar la métrica de X de manera explícita, prescindimos de la notación (X,d) y decimos simplemente que X es un espacio métrico.

En todo espacio métrico podemos definir las bolas abiertas, como se indica en la siguiente definición.

Definición 2.27. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Dados* $p \in X$ *y* $\varepsilon > 0$, *el conjunto:*

$$B_X(p, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, p) < \varepsilon\}$$

es la ε***-bola abierta en*** X, ***centrada en*** p.

Si (X, d) es un espacio métrico, entonces la clase:

$$\mathcal{B}_d = \{B_X(p, \varepsilon) : p \in X \text{ y } \varepsilon > 0\}$$

es una base para una topología τ_d en X; para una demostración de esto se pueden consultar las páginas 135 y 136 del libro [4]. A τ_d se le llama la *topología inducida* por la métrica d. Por lo tanto, todo espacio métrico puede verse como un espacio topológico, en donde los abiertos son las uniones de las bolas abiertas. Además, en todo espacio métrico, la métrica puede considerarse como se indica en el siguiente teorema.

Teorema 2.28. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $e : X \times X \to \mathbb{R}$ *la función definida, para* $(x, y) \in X \times X$, *como:*

$$e(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\}. \tag{2.4.1}$$

Entonces e *es una métrica en* X *tal que* $\tau_e = \tau_d$.

Una demostración del Teorema 2.28 puede verse en [4, Teorema 20.1]. La métrica e definida en (2.4.1) se denomina la *métrica acotada* determinada o inducida por d. Por consiguiente, toda métrica determina una métrica acotada y, por ende, toda métrica en un espacio métrico puede considerarse acotada.

Como ya mencionamos, los espacios métricos pueden verse como espacios topológicos. A la inversa, algunos espacios topológicos pueden considerarse como espacios métricos. El término apropiado para esto es el indicado en la siguiente definición.

Definición 2.29. *Un espacio topológico* (X, τ) *es* ***metrizable*** *si existe una métrica* d *en* X *tal que* $\tau_d = \tau$.

Tenemos entonces que un espacio metrizable es un espacio topológico X cuya topología es la inducida por alguna métrica d en X. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces (X, τ_d) es un espacio metrizable. Debido a esto suele decirse que los espacios métricos son casos particulares de espacios metrizables.

El siguiente teorema dice que el producto numerable de espacios métricos es metrizable.

Teorema 2.30. *Si* $\{(X_n, d'_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de espacios métricos, entonces* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$*, con la topología producto, es metrizable.*

Demostración. Como métricas equivalentes generan la misma topología, se puede cambiar d'_n por d_n, donde la función $d_n : X_n \times X_n \to [0,1]$ está definida como $d_n(x_n, x'_n) = mín\{d'_n(x_n, x'_n), 1\}$. Sea

$$\rho : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \times \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to [0,1] \subset [0, \infty)$$

definida, para cada $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, por

$$\rho\left((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

Se mostrará que la topología producto para $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, y la topología inducida por ρ coinciden. Sean T' la topología producto y T la topología inducida por ρ.

Se verá que $T' \subset T$. Sean $U = \cap_{j=1}^{k} \pi_j^{-1}(B_{\varepsilon_j}^{d_j}(x_j)) \in T'$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in U$.

Sea

$$\varepsilon = m\acute{\imath}n \left\{ \tfrac{1}{2}\varepsilon_1, ..., \tfrac{1}{2^k}\varepsilon_k \right\}.$$

Se mostrará que $B_{\varepsilon}^{\rho}\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) \subset U$. Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\varepsilon}^{\rho}\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right)$. De aquí, $\rho\left((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}\right) < \varepsilon$, esto es, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n\left(x_n, y_n\right) < \varepsilon$, por lo que, para cada $j \in \{1, ..., k\}$, se tiene que $\frac{1}{2^j} d_j\left(x_j, y_j\right) < \varepsilon \leq \frac{1}{2^j}\varepsilon_j$, es decir, si $j \in \{1, ..., k\}$, entonces $d_j\left(x_j, y_j\right) < \varepsilon_j$, es decir, $B_{\varepsilon}^{\rho}\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) \subset U$.

Ahora se probará que $T \subset T'$. Sea $U = B_{\varepsilon}^{\rho}\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right)$ un básico de T que contiene a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Sea $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Se afirma que $\cap_{j=1}^{N} \pi_j^{-1}\left(B_{\frac{\varepsilon}{2^N}}^{d_j}\left(x_j\right)\right) \subset U$.

Para ver esto, sea $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \cap_{j=1}^{N} \pi_j^{-1}\left(B_{\frac{\varepsilon}{2^N}}^{d_j}\left(x_j\right)\right)$.

Se quiere probar que $\rho\left((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}\right) < \varepsilon$. Observe que:

$$\begin{aligned}
\rho\left((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} d_n\left(x_n, y_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{2^n} d_n\left(x_n, y_n\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} d_n\left(x_n, y_n\right) \\
&< \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{2^n}\tfrac{1}{2^N}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \left(1 - \tfrac{1}{2^N}\right)\tfrac{1}{2^N}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \\
&\leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

De hecho, la recíproca del Teorema 2.30, es también cierta, vea [2, Sección 7, pág. 189].

Determinar si un espacio topológico dado es metrizable no es una tarea sencilla. A lo largo de este trabajo daremos algunos criterios de metrizabilidad. Comenzamos con el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [4, Teorema 34.1].

Teorema 2.31 (**Teorema de Metrización de Urysohn).** *Todo espacio regular con base numerable es metrizable.*

El resultado principal de esta sección es el Teorema 2.33. Allí se dan condiciones necesarias y suficientes para que un producto de espacios metrizables sea metrizable. En su demostración utilizamos los siguientes hechos:

(1) la metrizabilidad es una propiedad topológica y, además, todo subespacio de un espacio metrizable es metrizable ([2, Teorema 5.1, pág. 186]);

(2) los espacios metrizables son T_0 y primero numerables ([2, Teoremas 5.2 y 5.5, pág. 186-187]).

También utilizaremos el siguiente resultado.

Teorema 2.32. *Todo espacio T_0 e indiscreto es degenerado.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio T_0 e indiscreto. Si X tiene dos puntos a y b entonces, como X es T_0 y $a \neq b$, existe un abierto U en X tal que $a \in U$ y $b \notin U$, o bien existe un abierto V en X tal que $b \in V$ y $a \notin V$. En cualquier caso, existe un abierto en X diferente del vacío y de X. Esto contradice el hecho de que X es un espacio indiscreto. Por lo tanto $|X| = 1$, es decir, X es degenerado. □

Teorema 2.33. *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos. Hagamos:*

$$X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha.$$

Entonces X es metrizable si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) *X_α es metrizable, para cada $\alpha \in \Lambda$;*

(2) *el conjunto $K = \{\alpha \in \Lambda \colon X_\alpha$ tiene por lo menos dos elementos$\}$ es numerable.*

Demostración. Antes de iniciar la demostración notemos que debemos probar que X es metrizable si y sólo si cada factor X_α es metrizable y todos ellos, salvo una cantidad numerable, son espacios degenerados.

Ahora iniciamos la demostración. Supongamos primero que X es metrizable. Entonces cada subespacio de X es metrizable. En particular, dada $\alpha \in \Lambda$, como X contiene un subespacio homeomorfo a X_α (Corolario 1.16), X_α es metrizable. Como los espacios metrizables son primero numerables, X es primero numerable. Entonces, por el Teorema 2.9, el conjunto:

$$J = \{\alpha \in \Lambda \colon \tau_\alpha \text{ tiene por lo menos tres elementos}\}$$

es numerable. Dada $\alpha \in J$, como τ_α tiene por lo menos tres elementos, existe un abierto U_α en X_α tal que $U_\alpha \neq \emptyset$ y $U_\alpha \neq X_\alpha$. Tomando un punto $a_\alpha \in U_\alpha$ y un punto $b_\alpha \in X_\alpha - U_\alpha$, tenemos que X_α tiene por lo menos dos elementos. Esto muestra que

$$J \subset K = \{\alpha \in \Lambda \colon X_\alpha \text{ tiene por lo menos dos elementos}\}.$$

Supongamos ahora que $\alpha \in \Lambda - J$. Entonces X_α es un espacio indiscreto. Como también X_α es metrizable y por tanto T_0, por el Teorema 2.32, X_α es degenerado. Luego $\alpha \in \Lambda - K$. Esto prueba que $\Lambda - J \subset \Lambda - K$ o, en forma equivalente, que $K \subset J$. Como también $J \subset K$, deducimos que $K = J$. Luego K es numerable.

Con esto terminamos la demostración de la primera parte del teorema.

Para probar la segunda parte del teorema, supongamos que cada X_α es metrizable y que el conjunto

$$K = \{\alpha \in \Lambda \colon X_\alpha \text{ tiene por lo menos dos elementos}\}$$

es numerable. Podemos escribir $K = \{\alpha_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Notemos que, para cada $\alpha \in \Lambda - K$, el conjunto X_α es degenerado. Luego, por el Teorema 1.15, X es homeomorfo al espacio

$$Y = \prod_{n=1}^{\infty} X_{\alpha_n}.$$

En vista de esto, para probar que X es metrizable, es suficiente con ver que Y es metrizable. Dada $n \in \mathbb{N}$, como X_{α_n} es metrizable, por el Teorema 2.28, podemos pensar que la métrica d_n de X_{α_n} es tal que $d_n(x_n, y_n) \leq 1$, para cada $(x_n, y_n) \in X_{\alpha_n} \times X_{\alpha_n}$. Esto nos permite considerar la función $d \colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x = (x_1, x_2, \ldots)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots)$ en Y, como:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

Afirmamos que:

(a) d es una métrica en Y.

Para probar (a), tomemos dos puntos $x = (x_1, x_2, \ldots)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots)$ en Y. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hagamos

$$a_n = \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{2^n}.$$

Entonces $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son dos sucesiones de números reales tales que $0 \leq a_n \leq b_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente. Entonces, por el Criterio de Comparación para series, resulta que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. Esto muestra que $d(x, y)$ está bien definida y, además, que $d(x, y) \geq 0$. Notemos que $d(x, y) = 0$ si y sólo si $a_n = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de a_n y el hecho de que d_n es una métrica en X_{α_n}, tenemos que $a_n = 0$ si y sólo si $x_n = y_n$. Entonces $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x_n = y_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, si y sólo si $x = y$. También, como cada d_n es una métrica en X_{α_n}, tenemos que:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(y_n, x_n)}{2^n} = d(y, x).$$

Tomemos ahora un punto $z = (z_1, z_2, \ldots)$ en Y. Como cada d_n es una métrica en X_{α_n}, tenemos que $d_n(x_n, z_n) \leq d_n(x_n, y_n) + d_n(y_n, z_n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$\begin{aligned} d(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, z_n)}{2^n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n) + d_n(y_n, z_n)}{2^n} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(y_n, z_n)}{2^n} = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Esto prueba que d es una métrica en Y.

Vamos a demostrar ahora que τ_d es la topología producto de Y. Para esto, veremos primero que:

(b) para cada abierto básico U de Y y cada $x \in U$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B_Y(x, \varepsilon_x) \subset U$.

Para probar (b), sean $x = (x_1, x_2, \ldots) \in Y$ y U un abierto básico de Y tales que $x \in U$. Entonces

$$U = \prod_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n}$$

donde U_{α_n} es un abierto en X_{α_n}, para cada $n \in \mathbb{N}$ y, además, existe un subconjunto finito G de $\mathbb{N}$ tal que $U_{\alpha_n} = X_{\alpha_n}$, para cada $\alpha_n \in \mathbb{N} - G$. Sea $m = \text{máx}(G)$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, como las bolas abiertas en X_{α_i} son abiertos básicos de X_{α_i} y U_{α_i} es un abierto en X_{α_i} que tiene al punto x_i, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $B_{X_{\alpha_i}}(x_i, \varepsilon_i) \subset U_{\alpha_i}$. Notemos que:

$$B_{X_{\alpha_1}}(x_1, \varepsilon_1) \times \cdots \times B_{X_{\alpha_m}}(x_m, \varepsilon_m) \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i}^{\infty} X_\alpha \subset \prod_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n} = U.$$

Sea

$$\varepsilon_x = \text{mín}\left\{\frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{\varepsilon_2}{2^2}, \ldots, \frac{\varepsilon_m}{2^m}\right\}.$$

Entonces $\varepsilon_x > 0$. Vamos a probar que $B_Y(x, \varepsilon_x) \subset U$. Para esto sea $y = (y_1, y_2, \ldots) \in B_X(x, \varepsilon_x)$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} = d(x, y) < \varepsilon_x$$

por lo que, para cada $i \in \{1, \ldots m\}$,

$$\frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i} < \varepsilon_x < \frac{\varepsilon_i}{2^i}.$$

Luego $d_i(x_i, y_i) < \varepsilon_i$. Esto implica que $y_i \in B_{X_{\alpha_i}}(x_i, \varepsilon_i) \subset U_{\alpha_i}$. Por lo tanto $y_i \in U_{\alpha_i}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Como $m = \text{máx}(G)$ y $U_{\alpha_i} = X_{\alpha_i}$ para cada $\alpha_i \in \mathbb{N} - G$, tenemos que $y_i \in U_{\alpha_i}$, para cada $i > m$. Luego

$$y \in \prod_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n} = U.$$

Esto prueba (b)

De (b) se sigue que cada abierto básico de Y, es una unión de bolas abiertas con respecto a la métrica d. Luego cada abierto básico de Y es un elemento de τ_d. Como los abiertos de Y son uniones de abiertos básicos, se infiere que cada abierto de Y está en τ_d.

Ahora vamos a demostrar que cada elemento de τ_d es un abierto de Y. Para esto, veremos primero que:

(c) para cada $x \in Y$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un abierto U_x en la topología producto de Y, tal que $U_x \subset B_Y(x, \varepsilon)$.

Para probar (c), sean $x = (x_1, x_2, \ldots) \in Y$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y consideremos el conjunto:

$$U_x = B_{X_{\alpha_1}}\left(x_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \times \cdots \times B_{X_{\alpha_N}}\left(x_N, \frac{\varepsilon}{2}\right) \times \prod_{k=N+1}^{\infty} X_{\alpha_k}.$$

Es claro que U_x es un abierto básico en la topología producto de Y. Vamos a probar que $U_x \subset B_Y(x, \varepsilon)$. Para esto sea $y = (y_1, y_2, \ldots) \in U_x$. Entonces, para $n \in \{1, \ldots, N\}$, tenemos que

$d_n(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2(2^n)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\right).$$

Tenemos entonces que:

$$d(x,y) \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\right). \tag{2.4.2}$$

Notemos ahora que:

$$1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Utilizando el hecho de que si $p \neq 1$ y $r \in \mathbb{N}$, entonces:

$$p^0 + p^1 + p^2 + \cdots + p^r = \frac{1 - p^{r+1}}{1 - p}$$

sucede, cuando $p = \frac{1}{2}$ y $r = N$, que:

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{N+1}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2^{N+1}}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^N} < 2.$$

Combinando esto con (2.4.2), tenemos que:

$$d(x,y) \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\right) = \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) 2 = \varepsilon.$$

Esto muestra que $d(x, y) < \varepsilon$, por lo que $y \in B_X(x, \varepsilon)$. Luego $U_x \subset B_Y(x, \varepsilon)$ y (c) es cierto.

De (c) se sigue que cada abierto básico $B_Y(x, \varepsilon)$, con respecto a la topología τ_d, es una unión de abiertos de la topología producto de Y. Luego cada abierto básico, con respecto a τ_d, es un abierto en la topología producto de Y. Como los elementos de τ_d son uniones de bolas abiertas en la métrica d, se infiere que cada elemento de τ_d está en la topología producto de Y. Como también cada abierto en la topología producto de Y está en τ_d, resulta que τ_d es igual a la topología producto de Y. Esto muestra que Y es metrizable y, como Y es homeomorfo a X y la metrizabilidad es una propiedad topológica, también X es metrizable. $\square$

Del Teorema 2.33 se infiere que un producto no numerable de espacios metrizables y no degenerados no es metrizable.

2.5. Compactos

Sea X un espacio topológico. Una *cubierta de* X es una clase $\mathcal{U} = \{U_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ de subconjuntos de X tales que:

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha.$$

Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ es una cubierta de X y $\Gamma \subset \Lambda$ es tal que:

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha,$$

entonces la clase $\mathcal{V} = \{U_\alpha \colon \alpha \in \Gamma\}$ se llama una *subcubierta* de $\mathcal{U}$. Decimos que $\mathcal{V}$ es una *subcubierta finita* si Γ es un conjunto finito. En el caso en que Γ sea un conjunto numerable, decimos que $\mathcal{V}$ es una *subcubierta numerable*. Si cada elemento de $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de X, decimos que $\mathcal{U}$ es una *cubierta abierta de* X.

Con respecto a las nociones que hemos introducido, tenemos los siguientes conceptos.

Definición 2.34. *Decimos que un espacio X es* ***compacto*** *si toda cubierta abierta de X, posee una subcubierta finita. En el caso en que toda cubierta abierta de X posea una subcubierta numerable, decimos que X es de* ***Lindelöf****.*

En $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, los subconjuntos compactos quedan caracterizados como se indica a continuación.

Teorema 2.35. *Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, con la topología usual, es compacto si y sólo si A es cerrado y acotado.*

Que el conjunto A esté acotado, significa que existen $x \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ tales que $A \subset B_{\mathbb{R}^n}(x, \varepsilon)$. Una demostración del Teorema 2.35 anterior puede verse en [4, Teorema 27.3]. Cuando consideramos espacios topológicos arbitrarios, entonces los cerrados y los compactos no necesariamente coinciden. Sin embargo, como muestra el siguiente resultado, en ocasiones los cerrados son compactos y los compactos pueden ser cerrados.

Teorema 2.36. *Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Entonces*

(1) *si X es compacto y Y es cerrado en X, entonces Y es compacto;*

(2) *si X es T_2 y Y es compacto, entonces Y es cerrado.*

La prueba de la afirmación (1) del Teorema 2.36 puede verse en [4, Teorema 26.2] y, la de (2), en [4, Teorema 26.3].

Supongamos que X es un espacio topológico y que $Y \subset X$. Para verificar si Y es compacto, de acuerdo con la definición, debemos empezar por considerar cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de Y. Por esto entendemos que los elementos de $\mathcal{U}$ son abiertos en Y cuya unión es Y. Dada $U \in \mathcal{U}$, existe entonces un abierto V_U en X tal que $U = V_U \cap Y$. Notemos que $\mathcal{V} = \{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ es una clase de abiertos en X tales que:

$$Y = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (V_U \cap Y) \subset \bigcup_{V_U \in \mathcal{V}} V_U.$$

Por lo tanto, a partir de una cubierta abierta de Y, hemos encontrado una clase de abiertos de X cuya unión contiene a Y. A la inversa, supongamos que $\mathcal{W}$ es una clase de abiertos en X cuya unión contiene a Y. Dada $W \in \mathcal{W}$, sea $U_W = W \cap Y$. Entonces U_W es un abierto en Y y, además,

$$Y = \left(\bigcup_{W \in \mathcal{W}} W\right) \cap Y = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} (W \cap Y) = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} U_W.$$

Por lo tanto la clase $\{U_W : W \in \mathcal{W}\}$ es una cubierta abierta de Y. Hemos demostrado, con esto, que a partir de una clase de abiertos de X cuya unión contiene a Y, es posible obtener una cubierta abierta de Y. Por lo tanto, para evitar trabajar con abiertos relativos, toda cubierta abierta de Y puede cambiarse por una clase de abiertos de X cuya unión contiene a Y. Tomando esto en cuenta, es fácil probar que:

($\star$) $Y \subset X$ es compacto si y sólo si, para cada clase $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de abiertos en X cuya unión contiene a Y, existe un subconjunto finito Γ de Λ tal que $Y \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$.

Utilizaremos este hecho en la demostración del siguiente teorema.

Teorema 2.37. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua entre los espacios X y Y. Si X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una clase de abiertos en Y cuya unión contiene a $f(X)$. Como f es continua, para cada $A \in \mathcal{A}$, el conjunto $f^{-1}(A)$ es abierto en X. Además:

$$X \subset f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}(A).$$

Por lo tanto $\left\{f^{-1}(A)\colon A \in \mathcal{A}\right\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tales que:

$$X = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_n).$$

Luego

$$\begin{aligned} &f(X) = f(f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_n)) = \\ &= f(f^{-1}(A_1)) \cup f(f^{-1}(A_2)) \cup \cdots \cup f(f^{-1}(A_n)) \subset A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n. \end{aligned}$$

De acuerdo con $(\star)$ esto implica que $f(X)$ es compacto. $\square$

Si en el Teorema 2.37 suponemos que f es continua y suprayectiva, entonces se concluye que Y es compacto. Como consecuencia de esto la compacidad es una propiedad topológica.

El resultado que se prueba a continuación es un caso en particular, del Teorema de Tychonoff, el cual dice que el producto arbitrario de espacios topológicos compactos es compacto. La demostración de este teorema utiliza el Axioma de Elección. Sin embargo la prueba que se presenta del teorema está basada en el hecho de que la compacidad y la compacidad por sucesiones son equivalentes en los espacios métricos.

Teorema 2.38. *El producto numerable de espacios métricos y compactos, con la topología producto, es compacto.*

Demostración. Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos. Por el teorema 2.30, $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ es metrizable, así que basta probar que $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ es compacto por sucesiones(esto es, toda sucesión de puntos de $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ tiene una subsucesión convergente).

Sea $\left\{p^k\right\}_{k=1}^{\infty}$una sucesión de elementos de $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, donde $p^k = \left(p_n^k\right)_{n=1}^{\infty}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. De esta forma si se mantiene fijo el índice n, $\left\{p_n^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de X_n.

Como (X_1, d_1) es compacto por sucesiones, $\left\{p_1^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\left\{p_1^{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ al punto q_1 de X_1. Se observa que, implícitamente, se ha definido una subsucesión $\left\{p^{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$.

Se supone, de manera inductiva, que para alguna $m \in \mathbb{N}$, se ha definido una subsucesión $\left\{p^{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$de $\left\{p^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ de tal forma que $\left\{p_m^{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$converge a un punto q_m de X_m. Luego, como (X_{m+1}, d_{m+1}) es compacto por sucesiones $\left\{p_{m+1}^{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\left\{p_{m+1}^{k_{l_i}}\right\}_{i=1}^{\infty}$ que converge a un punto q_{m+1} de X_{m+1}. De esta forma, por el principio de inducción, se ha definido una subsucesión de $\left\{p^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ (véase la "matriz" infinita que sigue). Cada subsucesión (renglón) es una subsucesión de las subsucesiones anteriores(renglones), además, el j-ésimo término de la t-ésima subsucesión convergente a q_j cuando $j < t$.

$$\begin{array}{ccccc}
p^1 & p^2 & p^3 & p^4 & \cdots \\
p^{k_1} & p^{k_2} & p^{k_3} & p^{k_4} & \cdots \\
p^{k_{j_1}} & p^{k_{j_2}} & p^{k_{j_3}} & p^{k_{j_4}} & \cdots \\
p^{k_{j_{l_1}}} & p^{k_{j_{l_1}}} & p^{k_{j_{l_1}}} & p^{k_{j_{l_1}}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Ahora, considere la sucesión diagonal

$$\sum = \left\{ p^1, p^{k_2}, p^{k_{j_3}}, p^{k_{j_{l_4}}}, \cdots \right\}.$$

Es claro que $\sum$ es una subsucesión de $\left\{ p^k \right\}_{k=1}^{\infty}$ y que $\sum$ converge al punto $(q)_{n=1}^{\infty}$. □

El Teorema de Metrización de Urysohn (Teorema 2.31) es un teorema de metrizabilidad para espacios regulares, pues indica que para que un espacio regular sea metrizable basta con que tenga una base numerable. El siguiente resultado, el cual es una consecuencia del Teorema 2.31, es un teorema de metrizabilidad para espacios T_2, pues indica que para que un espacio T_2 sea metrizable, basta con que sea una imagen continua de un espacio métrico y compacto.

Teorema 2.39. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva de un espacio métrico y compacto X, en un espacio de Hausdorff Y. Entonces f es cerrada y Y es un espacio compacto y metrizable.*

Demostración. Como X es compacto y Y es la imagen continua de X bajo f, por el Teorema 2.37, Y es compacto. Ahora veamos que f es cerrada. Para esto sea E un subconjunto cerrado de X. Por la parte (1) del Teorema 2.36, E es compacto. Aplicando de nuevo el Teorema 2.37, tenemos que $f(E)$ es un subconjunto compacto del espacio de Hausdorff Y. Luego, por la parte (2) del Teorema 2.36, $f(E)$ es cerrado en Y. Esto muestra que f es cerrada.

Falta probar que Y es metrizable. Como Y es compacto y de Hausdorff, por [4, Teorema 32.3], Y es normal. En particular Y regular. Si probamos que Y tiene una base numerable entonces, por el Teorema de Metrización de Urysohn (Teorema 2.31), Y será metrizable. Ahora bien, para ver que Y tiene una base numerable procedemos como sigue: como X es compacto, X es de Lindelöf. En vista de que en los espacios métricos ser de Lindelöf es equivalente a tener una base numerable ([8, Teorema 16.11]), X posee una base numerable $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{C}_0$ la clase de los subconjuntos finitos de $\mathcal{C}$. Para cada $\mathcal{L} \in \mathcal{C}_0$, sea:

$$E\left(\mathcal{L}\right) = Y - f\left(X - \bigcup \mathcal{L}\right).$$

Hagamos:

$$\mathcal{P} = \left\{E(\mathcal{L})\colon \mathcal{L} \text{ es un subconjunto finito de } \mathcal{C}\right\}.$$

Como $\mathcal{C}$ es numerable, por el Teorema 2.6, $\mathcal{C}_0$ es numerable. Consideremos ahora la función $g\colon \mathcal{C}_0 \to \mathcal{P}$ definida, para $\mathcal{L} \in \mathcal{C}_0$, como $g(\mathcal{L}) = E(\mathcal{L})$. Es claro que g es una función suprayectiva del conjunto numerable $\mathcal{C}_0$ a $\mathcal{P}$. Entonces, por el Teorema 2.2, $\mathcal{P}$ es numerable.

Tomemos un elemento $\mathcal{L} \in \mathcal{C}_0$. Como $\mathcal{C}$ es una base de X, los elementos de $\mathcal{L}$ son subconjuntos abiertos de X. Luego $\bigcup \mathcal{L}$ es un abierto en X, de donde $X - \bigcup \mathcal{L}$ es cerrado en X. Como f es cerrada, el conjunto $f\left(X - \bigcup \mathcal{L}\right)$ es cerrado en Y, luego $E\left(\mathcal{L}\right)$ es abierto en Y. Esto muestra que los miembros de $\mathcal{P}$ son subconjuntos abiertos de Y. Ahora vamos a probar que $\mathcal{P}$ es una base para Y. Para esto sean U un abierto en Y y $q \in U$. Luego $f^{-1}(q) \subset f^{-1}(U)$. Como f es continua, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X. Al ser $\mathcal{C}$ una base de X, para cada $p \in f^{-1}(q)$, existe $V_p \in \mathcal{C}$ tal que $p \in V_p \subset f^{-1}(U)$. Así

$$f^{-1}(q) \subset \bigcup_{p \in f^{-1}(q)} V_p \subset f^{-1}(U).$$

Como $f^{-1}(q)$ es cerrado en el compacto X, por la parte (1) del Teorema 2.36, $f^{-1}(q)$ es compacto. Por lo tanto existen $n \in \mathbb{N}$ y $p_1, p_2, \ldots, p_n \in f^{-1}(q)$ tales que

$$f^{-1}(q) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{p_i}.$$

Sea $\mathcal{L} = \{V_{p_1}, V_{p_2}, \ldots, V_{p_n}\}$. Entonces $\mathcal{L} \in \mathcal{C}_0$ y $f^{-1}(q) \subset \bigcup \mathcal{L} \subset f^{-1}(U)$. Al tomar complementos tenemos que

$$X - f^{-1}(U) \subset X - \bigcup \mathcal{L} \subset X - f^{-1}(q).$$

Luego

$$f(X - f^{-1}(U)) \subset f\left(X - \bigcup \mathcal{L}\right) \subset f\left(X - f^{-1}(q)\right),$$

por lo que:

$$Y - f\left(X - f^{-1}(q)\right) \subset Y - f\left(X - \bigcup \mathcal{L}\right) \subset Y - f(X - f^{-1}(U)). \tag{2.5.1}$$

Notemos ahora que $q \in Y - f\left(X - f^{-1}(q)\right)$ pues, de no ser así, resulta que $q \in f\left(X - f^{-1}(q)\right)$. Luego existe $a \in X - f^{-1}(q)$ tal que $f(a) = q$. Esto es una contradicción, pues de $f(a) = q$ se infiere que $a \in f^{-1}(q)$ y, sin embargo, tomamos $a \in X - f^{-1}(q)$. Como f es suprayectiva

$$Y - U = Y - f\left(f^{-1}(U)\right) \subset f\left(X - f^{-1}(U)\right),$$

luego $Y - f(X - f^{-1}(U)) \subset U$. De esto y (2.5.1) se sigue que $q \in E(\mathcal{L}) \subset U$. Esto prueba que $\mathcal{P}$ es una base Y. Por lo tanto Y tiene una base numerable. Como ya hicimos ver, de aquí se deriva que Y es metrizable. $\square$

Ahora vamos a probar el Teorema de Tychonoff el cual indica que, con la topología producto, un producto de espacios compactos es compacto, si y sólo si cada factor es compacto. Para esto utilizaremos el siguiente resultado.

Teorema 2.40 (Lema de la Subbase de Alexander). *Supongamos que X es un espacio topológico y que $\mathcal{S}$ es una subbase para X. Entonces X es compacto si y sólo si toda cubierta de X, por elementos de $\mathcal{S}$, tiene una subcubierta finita.*

Demostración. Supongamos primero que X es compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de X por elementos de $\mathcal{S}$. Como los subbásicos son abiertos en X, $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X. Entonces $\mathcal{U}$ posee una subcubierta finita.

Ahora supongamos que toda cubierta de X, por elementos de $\mathcal{S}$, tiene una subcubierta finita. Si X no es compacto, entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X que no posee subcubiertas finitas. Consideremos la clase $\mathfrak{C}$ de todas las cubiertas abiertas de X que no poseen subcubiertas finitas. Entonces $\mathfrak{C} \neq \emptyset$, pues $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}$. Supongamos ahora que $\mathfrak{D}$ es una cadena en $\mathfrak{C}$. Esto significa que $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}$ y que si $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{D}$, entonces $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$ o bien

$\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$. Definamos:

$$\mathcal{W} = \{V : V \in \mathcal{V},\ \text{para alguna } \mathcal{V} \in \mathfrak{D}\} = \bigcup_{\mathcal{V} \in \mathfrak{D}} \mathcal{V}.$$

Notemos que si $\mathcal{V} \in \mathfrak{D}$ y $V \in \mathcal{V}$, entonces V es un abierto en X, pues $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de X. Como para definir $\mathcal{W}$, consideramos miembros de elementos de $\mathfrak{D}$, cada elemento de $\mathcal{W}$ es un abierto en X. Como también sucede que $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$, para cada $\mathcal{V} \in \mathfrak{D}$, tenemos que $\mathcal{W}$ es una cubierta abierta de X. Supongamos que $\mathcal{W}$ posee una subcubierta finita $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$. Entonces, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, como $V_i \in \mathcal{W}$, existe $\mathcal{V}_i \in \mathfrak{D}$ tal que $V_i \in \mathcal{V}_i$. Ahora bien, en vista de que la clase $\mathfrak{D}$ es una cadena, existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $V_1, V_2, \ldots, V_n \in \mathcal{V}_j$. Luego $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{V}_j$. Como esto contradice el hecho de que $\mathcal{V}_j$ es un elemento de $\mathfrak{C}$, resulta que $\mathcal{W}$ no posee subcubiertas finitas. Entonces $\mathcal{W} \in \mathfrak{C}$ y, como $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ para cada $\mathcal{V} \in \mathfrak{D}$, sucede que $\mathcal{W}$ es una cota superior de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$.

Hasta el momento, hemos probado que toda cadena en $\mathfrak{D}$ posee una cota superior en $\mathfrak{D}$. Entonces, por el Lema de Zorn (Teorema 1.4), existe un elemento maximal $\mathcal{M}$ en $\mathfrak{C}$. Esto significa que si $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de X tal que $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V} \notin \mathfrak{C}$ y, por lo tanto, $\mathcal{V}$ posee una subcubierta finita. Utilizando esto, mostraremos que:

($\star$) si $M \in \mathcal{M}$ y $W_1, W_2, \ldots, W_n$ son subconjuntos abiertos en X tales que
$$W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n \subset M,$$
entonces $W_i \in \mathcal{M}$ para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Para probar $(\star)$ supongamos que M y $W_1, W_2, \ldots, W_n$ son como se indica y que, además, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $W_i \notin \mathcal{M}$. Hagamos $\mathcal{M}_i = \mathcal{M} \cup \{W_i\}$. Entonces $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M}_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Además, como $\mathcal{M}$ es una cubierta abierta de X, resulta que cada $\mathcal{M}_i$ es una cubierta abierta de X. Como $\mathcal{M}$ es maximal en $\mathfrak{D}$, tenemos que $\mathcal{M}_i \notin \mathfrak{C}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Esto significa que cada cubierta abierta $\mathcal{M}_i$ de X posee una subcubierta finita. Entonces, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existen $n_i \in \mathbb{N}$ y $M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_{n_i}} \in \mathcal{M}$ de modo que:

$$X = M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \cdots \cup M_{i_{n_i}} \cup W_i. \tag{2.5.2}$$

Tomemos un punto $x_0 \in X$. Si $x_0 \in W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n$, entonces $x_0 \in M$. Si $x_0 \notin W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n$, entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x_0 \notin W_i$. Para dicho índice i, por (2.5.2), existe $j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$ tal que $x_0 \in M_{i_j}$. Con esto hemos probado que:

$$X \subset (W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n_i} M_{i_j} \right) \subset M \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n_i} M_{i_j} \right).$$

Esto implica que $\mathcal{M}$ posee una subcubierta finita, a saber M y todos los conjuntos M_{i_j}. Como esto contradice el hecho de que $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$, existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $W_i \in \mathcal{M}$. Esto prueba $(\star)$.

Ahora vamos a mostrar que $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ es una cubierta abierta de X. Como los elementos de $\mathcal{S}$ y los de $\mathcal{M}$ son abiertos en X, resulta que los elementos de $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ son abiertos en X. Tomemos ahora un punto $x \in X$. Como $\mathcal{M}$ es una cubierta abierta de X, existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $x \in M$. En vista de que $\mathcal{S}$ es una subbase para X, existen $n \in \mathbb{N}$ y $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ de forma que:

$$x \in S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \subset M.$$

Utilizando ($\star$), deducimos que existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $S_i \in \mathcal{M}$. Luego S_i es un elemento de $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ tal que $x \in S_i$. Esto prueba que $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ es una cubierta abierta de X. Como los elementos de $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ se encuentran en $\mathcal{S}$, por hipótesis, $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ posee una subcubierta finita $\mathcal{T}$. Como los elementos de $\mathcal{T}$ están en $\mathcal{M}$, resulta que $\mathcal{T}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{M}$. Esto contradice el hecho de que $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$ y, como la contradicción proviene de suponer que X no es compacto, deducimos que X es compacto. □

Teorema 2.41 (**Teorema de Tychonoff**)**.** *Sean* $\{X_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ *una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos y :*

$$X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha.$$

Entonces X *es compacto si y sólo si, para cada* $\alpha \in \Lambda$, *el espacio* X_α *es compacto.*

Demostración. Supongamos primero que X es compacto. Dada $\alpha \in \Lambda$, sea $p_\alpha \colon X \to X_\alpha$ la proyección de X sobre X_α. Como p_α es una función continua y suprayectiva, por el Teorema 2.37, X_α es compacto.

Sea $\mathcal{S}$ la subbase usual de X. Recordemos que:

$$\mathcal{S} = \left\{ p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \colon \alpha \in \Lambda \text{ y } U_\alpha \text{ es abierto en } X_\alpha \right\}.$$

Supongamos ahora que cada X_α es compacto. Para ver que X es compacto, por el Lema de la Subbase de Alexander (Teorema 2.40), es suficiente con probar que toda cubierta abierta de X, por elementos de $\mathcal{S}$, posee una subcubierta finita. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$. Para cada $\alpha \in S$, definimos:

$$\mathcal{U}_\alpha = \left\{ U \subset X_\alpha \colon p_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{U} \right\}.$$

Es claro que, para toda $\alpha \in \Lambda$, cada elemento de $\mathcal{U}_\alpha$ es un abierto en X_α. Vamos a probar que, para alguna $\alpha \in \Lambda$, la clase $\mathcal{U}_\alpha$ es una cubierta abierta de X_α. Para mostrar esto supongamos, por el contrario, que ninguna clase $\mathcal{U}_\alpha$ es una cubierta abierta de X_α. Entonces, para cada $\alpha \in \Lambda$, existe un punto

$$x_\alpha \in X_\alpha - \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}_\alpha} U \right).$$

Sea $x = (x_\alpha)_\alpha$. Como $x \in X$ y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V$. En vista de que $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$, existen $\alpha \in \Lambda$ y un abierto U_α en X_α tales que $V = p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Entonces $x_\alpha \in U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$, contradiciendo el hecho de que $x_\alpha \in X_\alpha - \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}_\alpha} U\right)$. Con esto probamos que existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U}_\alpha$ es una cubierta abierta de X_α. Ahora bien, como X_α es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}_\alpha$ tales que:

$$X_\alpha = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n.$$

Aplicando p_α^{-1} sucede que:

$$X = p_\alpha^{-1}(X_\alpha) = p_\alpha^{-1}\left(U_1 \cup \cdots \cup U_n\right) = p_\alpha^{-1}(U_1) \cup \cdots \cup p_\alpha^{-1}(U_n).$$

Por lo tanto $\left\{p_\alpha^{-1}(U_1), p_\alpha^{-1}(U_2), \ldots, p_\alpha^{-1}(U_n)\right\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Entonces, por el Lema de la Subbase de Alexander, X es compacto. $\square$

Conviene comentar que existen demostraciones más cortas tanto del Teorema de Tychonoff como del Lema de la Subbase de Alexander. En cuanto al segundo, una prueba muy corta se muestra en [7]. La demostración se da en seis renglones y medio, pero, utiliza Análisis No Estándar, teoría que queda fuera del alcance de este trabajo. Usando las nociones de filtros y ultrafiltros, es posible probar el Teorema de Tychonoff sin utilizar el Lema de la Subbase de Alexander (aunque sí el Axioma de Elección, en alguna de sus variantes). Como no es nuestro interés presentar la teoría de filtros y ultrafiltros, hemos preferido probar el Teorema de Tychonoff por el camino expuesto.

Notemos que, para probar el Teorema de Tychonoff, utilizamos el Lema de la Subbase de Alexander. Y, para demostrar éste resultado, usamos el Lema de Zorn, el cual es equivalente al Axioma de Elección. Por lo tanto, el Axioma de Elección implica el Teorema de Tychonoff. En el artículo [3], se prueba que el Teorema de Tychonoff implica el Axioma de Elección. Por consiguiente, el Teorema de Tychonoff es una forma alternativa del Axioma de Elección.

Para probar que, con la topología producto, el producto numerable de espacios métricos y compactos es compacto, *no* es necesario el Lema de la Subbase de Alexander ni el Axioma de Elección. Basta utilizar que la compacidad y la compacidad secuencial son equivalentes en espacios métricos. Una prueba de esto aparece en [6, Teorema 1.1.11]. Por lo tanto, y de acuerdo a lo comentado en el párrafo anterior, el Teorema de Tychonoff es una forma alternativa del Axioma de Elección, cuando multiplicamos una cantidad no numerable de espacios topológicos.

2.6. Conexos

En el presente capítulo, vamos a estudiar la propiedad de conexidad. Además de mostrar sus propiedades más elementales probaremos que, con la topología producto, un producto de conexos es conexo.

Definición 2.42. *Un espacio topológico X es **conexo** si X no se puede escribir como $X = A \cup B$, donde A y B son dos subconjuntos abiertos en X que, además, son ajenos y no vacíos.*

En [1, Teorema (2.A.8), pág. 48] se muestra que los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son los conjuntos degenerados y los intervalos, es decir los conjuntos de alguna de las siguientes formas:

$$(a,b),\ [a,b],\ [a,b),\ (a,b],\ (a,\infty),\ [a,\infty),\ (-\infty,a),\ (-\infty,a],$$

$(-\infty,\infty)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \prec b$.

Como veremos, la siguiente noción está muy ligada a la conexidad.

Definición 2.43. *Dos subconjuntos no vacíos B y C de un espacio X están **mutuamente separados** en X, si $\mathrm{Cl}_X(B) \cap C = \emptyset$ y $B \cap \mathrm{Cl}_X(C) = \emptyset$.*

Teorema 2.44. *Un espacio X es conexo si y sólo si no existen dos subconjuntos no vacíos y mutuamente separados B y C en X, tales que $X = B \cup C$.*

Demostración. Supongamos que X es conexo y que, además, existen dos subconjuntos no vacíos y mutuamente separados B y C de X, tales que $X = B \cup C$. Entonces $\mathrm{Cl}_X(B) \cap C = \emptyset$ y $B \cap \mathrm{Cl}_X(C) = \emptyset$. Esto implica que $B = X - \mathrm{Cl}_X(C)$ y $C = X - \mathrm{Cl}_X(B)$. En efecto, como $B \cap \mathrm{Cl}_X(C) = \emptyset$, tenemos que $B \subset X - \mathrm{Cl}_X(C)$. Si $x \in X - \mathrm{Cl}_X(C)$ entonces, al ser $X = B \cup C$, sucede que $x \in B$ o bien $x \in C$. Si $x \in C$, entonces $x \in \mathrm{Cl}_X(C)$, lo cual contradice el hecho de que $x \in X - \mathrm{Cl}_X(C)$. Por lo tanto $x \in B$. Esto muestra que $X - \mathrm{Cl}_X(C) \subset B$ y, como la otra contención también es cierta, tenemos que $B = X - \mathrm{Cl}_X(C)$. De manera similar se prueba que $C = X - \mathrm{Cl}_X(X)$. Entonces B y C son dos subconjuntos abiertos de X.

Vamos a probar ahora que B y C también son dos subconjuntos cerrados de X. Tomemos un punto $x \in \mathrm{Cl}_X(B)$. Como $X = B \cup C$, resulta que $x \in B$ o bien $x \in C$. Como también $\mathrm{Cl}_X(B) \cap C = \emptyset$, tenemos que $\mathrm{Cl}_X(B) \subset X - C$, así que ningún punto de $\mathrm{Cl}_X(B)$ pertenece a C. Por lo tanto $x \in B$. Esto muestra que $\mathrm{Cl}_X(B) \subset B$ y, como también es cierto que $B \subset \mathrm{Cl}_X(B)$, sucede que $\mathrm{Cl}_X(B) = B$. Luego B es cerrado en X. De manera similar se prueba que C es cerrado en X. Como consecuencia de esto:

$$B \cap C = B \cap \mathrm{Cl}_X(C) = \emptyset,$$

así que B y C son ajenos. Tenemos entonces que B y C son dos subconjuntos de X, abiertos, ajenos no vacíos y cuya unión es X. Por lo tanto X no es conexo. En vista de que esto es una contradicción, deducimos que no existen dos subconjuntos no vacíos y mutuamente separados B y C en X, tales que $X = B \cup C$.

Ahora supongamos que no existen dos subconjuntos no vacíos y mutuamente separados B y C en X, tales que $X = B \cup C$. Si X no es conexo, entonces $X = B \cup C$, donde B y C son dos subconjuntos de X, abiertos, ajenos y no vacíos. Probando que B y C están mutuamente separados, llegamos a una contradicción con nuestra hipótesis. Supongamos que $\mathrm{Cl}_X(B) \cap C \neq \emptyset$. Entonces podemos tomar un punto $x \in \mathrm{Cl}_X(B) \cap C$. Como C es un abierto en X que tiene al punto x, que se encuentra en la cerradura de B, sucede que $C \cap B \neq \emptyset$. En vista de que esto contradice el hecho de que B y C son ajenos, deducimos que $\mathrm{Cl}_X(B) \cap C = \emptyset$. De manera similar se prueba que $\mathrm{Cl}_X(C) \cap B = \emptyset$. Luego B y C

están mutuamente separados. Como ya indicamos, esto es una contradicción, así que X es conexo. $\square$

Corolario 2.45. *Supongamos que A es un subconjunto conexo de X tal que $A \subset B \cup C$, donde B y C son dos subconjuntos no vacíos de X que están mutuamente separados en X. Entonces $A \subset B$ o bien $A \subset C$.*

Demostración. Como $A \subset B \cup C$, tenemos que:

$$A = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Vamos a probar ahora que los conjuntos $A \cap B$ y $A \cap C$ están mutuamente separados. Notemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}_X(A \cap B) \cap (A \cap C) &\subset (\mathrm{Cl}_X(A) \cap \mathrm{Cl}_X(B)) \cap (A \cap C) \\ &= (A \cap \mathrm{Cl}_X(A)) \cap (\mathrm{Cl}_X(B) \cap C) = A \cap \emptyset = \emptyset, \end{aligned}$$

de donde $\mathrm{Cl}_X(A \cap B) \cap (A \cap C) = \emptyset$. Análogamente podemos probar que $(A \cap B) \cap \mathrm{Cl}_X(A \cap C) = \emptyset$. Por lo tanto, el conjunto conexo A, es la unión de los conjuntos mutuamente separados $A \cap B$ y $A \cap C$. Luego, por el Teorema 2.44, $A \cap B = \emptyset$ o bien $A \cap C = \emptyset$. De esto se sigue que $A \subset B$ o bien $A \subset C$. $\square$

Como consecuencia del siguiente resultado, la conexidad es una propiedad topológica.

Teorema 2.46. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre los espacios X y Y. Si X es conexo, entonces Y es conexo.*

Demostración. Si Y no es conexo, entonces $Y = U \cup V$, donde U y V son subconjuntos no vacíos de Y, abiertos y ajenos. Como f es continua y suprayectiva, $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son subconjuntos no vacíos, abiertos y ajenos cuya unión es X. Como esto contradice el hecho de que X es conexo, resulta que Y es conexo. $\square$

Corolario 2.47. *La imagen de un espacio conexo, bajo una función continua, es un espacio conexo.*

Demostración. Supongamos que $f\colon X \to Y$ es una función continua. Entonces f, como función de X a $f(X)$, es una función continua y suprayectiva. Luego, por el Teorema 2.46, $f(X)$ es conexo. $\square$

Recordemos que también la imagen continua de un espacio compacto, es un espacio compacto. Entonces, por el Teorema 2.39 y el Corolario 2.47, si $f\colon X \to Y$ es una función continua y suprayectiva de un espacio métrico, compacto y conexo X en un espacio de Hausdorff Y, entonces Y es un espacio metrizable, compacto y conexo.

Nuestro objetivo, en el presente capítulo, será probar que el producto cartesiano de espacios conexos es conexo. Para esto serán importantes los siguientes resultados.

Teorema 2.48. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto conexo de X. Si $B \subset X$ es tal que $A \subset B \subset \mathrm{Cl}_X(A)$, entonces B es conexo.*

Demostración. Consideremos, para esta prueba, que el conjunto $\{0,1\}$ tiene la topología discreta. Vamos a ver primero que toda función continua de B a $\{0,1\}$ es constante. Sea $f\colon B \to \{0,1\}$ una función continua. Como A es conexo y $A \subset B$, por el Corolario 2.47, $f(A)$ es conexo. Ahora bien, como $\{0,1\}$ es discreto, sus únicos subconjuntos conexos son $\{0\}$ y $\{1\}$. Luego $f(A) = \{0\}$ o bien $f(A) = \{1\}$. Entonces

f es constante en A. También, como $\{0,1\}$ es discreto, $f(A)$ es un subconjunto cerrado de $\{0,1\}$ y, como f es continua, $f(\mathrm{Cl}_X(A)) \subset \mathrm{Cl}_X(f(A)) = f(A)$. Luego

$$f(A) \subset f(B) \subset f(\mathrm{Cl}_X(A)) = f(A).$$

Por lo tanto $f(B) = f(A)$ y, así, f es constante.

Ahora supongamos que B no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos B_1 y B_2 de B, que además son abiertos, ajenos, no vacíos y $B = B_1 \cup B_2$. Sea $g\colon B \to \{0,1\}$ la función definida como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in B_1; \\ 1, & \text{si } x \in B_2. \end{cases}$$

Es claro que g no es constante. Además:

$$g^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad g^{-1}(\{0\}) = B_1, \quad g^{-1}(\{1\}) = B_2 \quad \text{y} \quad g^{-1}(\{0,1\})$$

$= B$.

Esto muestra que la imagen inversa, bajo g, de cualquier abierto en $\{0,1\}$ es un abierto en B. Luego g es una función continua que no es constante. Como esto contradice lo que probamos al principio, B es conexo. $\square$

Corolario 2.49. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto conexo de X. Entonces $\mathrm{Cl}_X(A)$ es conexo.*

Demostración. Hagamos $B = \mathrm{Cl}_X(A)$. Como B es un subconjunto de X tal que $A \subset B \subset \mathrm{Cl}_X(A)$, por el Teorema 2.48, tenemos que B es conexo. Entonces $\mathrm{Cl}_X(A)$ es conexo. $\square$

Corolario 2.50. *Si un espacio topológico X contiene un subconjunto C tal que C es denso y conexo, entonces X es conexo.*

Demostración. Supongamos que C es un subconjunto denso y conexo en X. Como C es conexo, por el corolario 2.49, el conjunto $\mathrm{Cl}_X(C)$ es conexo. Al ser C denso en X, también tenemos que $\mathrm{Cl}_X(C) = X$. Luego X es conexo. $\square$

Teorema 2.51. *Supongamos que $\mathcal{A} = \{A_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ es una colección de subespacios conexos de un espacio topológico X. Si $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$, para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es conexo.*

Demostración. Para simplificar, hagamos $Y = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$. Si Y no es conexo entonces, por el Teorema 2.44, existen dos subconjuntos no vacíos y mutuamente separados B y C en Y, tales que $Y = B \cup C$. Como $C \subset Y$, tenemos que $C \cap Y = C$, así que:

$$\emptyset = \mathrm{Cl}_Y(B) \cap C = (\mathrm{Cl}_X(B) \cap Y) \cap C = \mathrm{Cl}_X(B) \cap (C \cap Y) =$$

$$\mathrm{Cl}_X(B) \cap C.$$

Por lo tanto $\mathrm{Cl}_X(B) \cap C = \emptyset$. De manera similar se prueba que $\mathrm{Cl}_X(C) \cap B = \emptyset$. Por lo tanto B y C están mutuamente separados en X.

Supongamos ahora que $b \in B$ y $c \in C$. Como $b, c \in Y$, existen $\alpha, \beta \in \Lambda$ tales que $b \in A_\alpha$ y $c \in A_\beta$. Entonces $A_\alpha \cap B \neq \emptyset$ y $A_\beta \cap C \neq \emptyset$. Notemos que B y C son dos subconjuntos no vacíos de X que están mutuamente separados en X y, además, sucede que A_α y A_β son subconjuntos conexos de X tales que:

$$A_\alpha \subset B \cup C \quad \text{y} \quad A_\beta \subset B \cup C$$

Entonces, por el Corolario 2.45, $A_\alpha \subset B$ o bien $A_\alpha \subset C$ y, además, $A_\beta \subset B$ o bien $A_\beta \subset C$. Supongamos que $A_\alpha \subset C$. Como $b \in A_\alpha \cap B \subset A_\alpha \cap \mathrm{Cl}_X(B)$ y cada punto de A_α está en

C, sucede que $b \in \mathrm{Cl}_X(B) \cap C$. Luego $\mathrm{Cl}_X(B) \cap C \neq \emptyset$. En vista de que esto es una contradicción, no es cierto que $A_\alpha \subset C$. Luego $A_\alpha \subset B$. De manera similar probamos que no es cierto que $A_\beta \subset B$. Por lo tanto $A_\beta \subset C$. Luego

$$A_\alpha \cap A_\beta \subset B \cap C \subset B \cap \mathrm{Cl}_X(C) = \emptyset,$$

así que $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$. Esto contradice la hipótesis de que los elementos de $\mathcal{A}$ se intersectan dos a dos. Por lo tanto Y es conexo. □

Corolario 2.52. *Si A y B son dos subconjuntos conexos de un espacio X tales que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es conexo.*

Demostración. Hagamos $\mathcal{A} = \{A, B\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es una clase de subconjuntos conexos de X, que se intersectan dos a dos. Entonces, por el Teorema 2.51, la unión de los elementos de $\mathcal{A}$, es decir el conjunto $A \cup B$, es conexo. □

Teorema 2.53. *Sea $\{X_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos. Hagamos:*

$$X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha.$$

Entonces X es conexo si y sólo si X_α es conexo, para cada $\alpha \in \Lambda$.

Demostración. Primero supongamos que X es conexo. Como para cada $\alpha \in \Lambda$, la función proyección $p_\alpha \colon X \to X_\alpha$ es continua y suprayectiva y como X es conexo, por el Teorema 2.46, tenemos que X_α es conexo.

Ahora supongamos que cada X_α es conexo. Consideremos el conjunto:

$$T = \{\alpha \in \Lambda \colon |X_\alpha| = 1\}$$

Si $T = \Lambda$, entonces X es un conjunto degenerado y, por ende, conexo. Supongamos, por lo tanto, que $T \neq \Lambda$. Por el Teorema 1.15, X es homeomorfo a $\prod_{\alpha\in\Lambda-T} X_\alpha$ y, por el Teorema 2.46, la conexidad es una propiedad topológica. Entonces basta probar que $\prod_{\alpha\in\Lambda-T} X_\alpha$ es conexo. Esto significa que debemos demostrar que un producto de espacios conexos y no degenerados, es conexo. Entonces, sin pérdida de generalidad, supongamos que cada X_α es un conexo no degenerado, y mostremos que $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es conexo. Para esto fijemos un punto $x = (x_\alpha)_\alpha \in X$. Primero mostraremos que:

(1) si $z \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ son tales que x y z difieren en a lo más n coordenadas, entonces x y z están en un mismo subconjunto conexo de X.

La prueba de (1) se hace por inducción matemática, sobre el número n de coordenadas en las que son diferentes x y un punto de X. Tomemos $z \in X$ y supongamos que x y z difieren en, a lo más, una coordenada. Si $x = z$, entonces x y z están en el subconjunto conexo $\{x\}$ de X. Si $x \neq z$ entonces, por hipótesis, x y z difieren solamente en una coordenada de Λ, digamos la r-ésima. Definamos:

$$A = \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$$

donde $A_\alpha = \{x_\alpha\}$, si $\alpha \in \Lambda - \{r\}$ y $A_r = X_r$. Por el Teorema 1.15, A es homeomorfo a X_r. Por lo tanto A es un subconjunto conexo de X. Como $x, z \in A$, resulta que A es un subconjunto conexo de X que tiene a x y a z. Esto termina el primer paso de la demostración por inducción.

Ahora consideremos que $n \geq 2$ y que (1) se cumple para cada punto de X que difiere en, a lo más, $n-1$ coordenadas de x.

Tomemos $z = (z_\alpha)_\alpha \in X$ y supongamos que x y z difieren en, a lo más, n coordenadas. Si en realidad x y z difieren en, a lo más, $n-1$ coordenadas entonces, por la hipótesis de inducción, es posible encontrar un subconjunto conexo de X que tiene tanto a x como a z. Supongamos, por tanto, que x y z difieren justo en n coordenadas, digamos en las coordenadas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de Λ. Entonces $x_\alpha = z_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda - \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ y $x_{\alpha_i} \neq z_{\alpha_i}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ahora bien, dada $\alpha \in \Lambda - \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, hagamos $w_\alpha = x_\alpha$. Sean $w_{\alpha_1} = x_{\alpha_1}$ y $w_{\alpha_i} = z_{\alpha_i}$, para cada $i \in \{2, 3 \ldots, n\}$. Entonces $w = (w_\alpha)_\alpha$ es un elemento de X tal que x y w difieren en justo $n-1$ coordenadas, mientras que w y z difieren en justo una coordenada. Por tanto, usando la hipótesis de inducción y el hecho de que (1) se cumple cuando un elemento de X difiere de x en, a lo más una coordenada, se infiere que existen dos subconjuntos conexos A y B de X tales que $x, w \in B$ y $w, z \in A$. Como $w \in A \cap B$, por el Corolario 2.52, $A \cup B$ es un subconjunto conexo de X tal que $x, z \in A \cup B$. Esto termina la prueba de (1).

Consideremos ahora los conjuntos

$$C_x = \bigcup \{C \subset X \colon C \text{ es conexo y } x \in C\}$$

y

$D_x = \{z \in X \colon x$ y z difieren en un número finito de coordenadas$\}$.

Notemos que $\mathcal{A} = \{C \subset X \colon C \text{ es conexo y } x \in C\}$ es una clase de subconjuntos conexos de X, que se intersectan dos a dos (pues tienen a x). Entonces, por el Teorema 2.51, C_x es conexo. Si $z \in D_x$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que x y z difieren en, a lo más, n coordenadas. Luego, por (1), existe un subconjunto conexo C de X tal que $x, z \in C$. Es claro que $z \in C \subset C_x$. Esto prueba que $D_x \subset C_x$. Afirmamos ahora que:

(2) D_x es denso en X.

Para ver (2) sea U un abierto no vacío en X. Tomemos un punto $y = (y_\alpha)_\alpha$ en U y un abierto básico B en X tal que $y \in B \subset U$. Notemos que

$$B = \prod_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$$

donde B_α es un abierto en X_α, para cada $\alpha \in \Lambda$ y, además, existe un subconjunto finito F de Λ tal que $B_\alpha = X_\alpha$, siempre que $\alpha \in \Lambda - F$. Consideremos $n = |F|$ y el punto $z = (z_\alpha)_\alpha$ en X definido como sigue:

$$z_\alpha = \begin{cases} x_\alpha, & \text{si } \alpha \in \Lambda - F; \\ y_\alpha, & \text{si } \alpha \in F. \end{cases}$$

Es claro que $z \in B \subset U$ y que x y z difieren en, a los más n coordenadas. Luego $z \in D_x$ y, con esto, $U \cap D_x \neq \emptyset$. Esto prueba (2).

Ahora bien, como $D_x \subset C_x$ y D_x es denso en X, sucede que:

$$X = \mathrm{Cl}_X(D_x) \subset \mathrm{Cl}_X(C_x).$$

Entonces C_x es un subconjunto denso y conexo de X. Luego, por el Corolario 2.50, X es conexo. $\square$

2.7. Localmente conexos

En la presente sección vamos a estudiar las funciones, bajo las cuales, se preserva la conexidad local. Así también indicando cómo se comporta la conexidad local con respecto a la operación producto.

Definición 2.54. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que X es **localmente conexo en** x, si para cada vecindad N de x, existe un subconjunto abierto y conexo V de X tal que $x \in V \subset N$;*

*Decimos, además, que X es **localmente conexo** si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Teorema 2.55. *Un espacio topológico X es **localmente conexo** si y sólo, para cada abierto U en X y cada componente C de U, sucede que C es abierto en X.*

Demostración. Supongamos primero que X es localmente conexo. Sean U un abierto en X y C una componente de U. Debemos mostrar que C es abierto en X. Para esto tomemos un punto $c \in C$. Entonces $c \in U$ y, como X es localmente conexo en c, existe un abierto y conexo V en X tal que $c \in V \subset U$. Notemos que $c \in V \cap C$ y que tanto V como C son conexos. Luego $V \cup C$ es conexo. Como V y C están contenidos en U, sucede que $V \cup C$ es un subconjunto conexo de U. Ahora bien, como C es una componente de U y $C \subset V \cup C$, necesariamente $C = V \cup C$. Por lo tanto $V \subset C$. Esto muestra que V es un abierto en X tal que $c \in V \subset C$ y, de esta manera, C es abierto en X.

Ahora supongamos que las componentes de los subconjuntos abiertos de X son abiertas. Para ver que X es localmente conexo, tomemos un punto $x \in X$ y un abierto U en X tal que $x \in U$. Sea V la componente de U que tiene a x. Por hipótesis V es un abierto en X. Luego V es un abierto y conexo en X tal que $x \in V \subset U$. Esto muestra que X es localmente conexo. $\square$

Teorema 2.56. *Sea $f\colon X \to Y$ una función abierta y continua* *entre los espacios X y Y. Si X es localmente conexo en $x \in X$, entonces Y es localmente conexo en $f(x)$.*

Demostración. Sea U un abierto en Y tal que $f(x) \in U$. Como f es continua, $f^{-1}(U)$ es un abierto en X tal que $x \in f^{-1}(U)$. Por ser X localmente conexo en x, existe un abierto y conexo V en X tal que $x \in V \subset f^{-1}(U)$. En vista de que f es abierta y continua, $f(V)$ es un abierto y conexo en Y. Además $f(x) \in f(V) \subset U$. Esto prueba que Y es localmente conexo en $f(x)$. $\square$

Corolario 2.57. *Sea $f\colon X \to Y$ una función abierta, continua y suprayectiva entre los espacios X y Y. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Corolario 2.58. *La conexidad local es una propiedad topológica.*

Demostración. El enunciado es una consecuencia del hecho de que los homeomorfismos son funciones abiertas, continuas y suprayectivas ([2, 12.2, pág. 89]). $\square$

Teorema 2.59. *Sea $f\colon X \to Y$ una función cerrada, continua y suprayectiva entre los espacios X y Y. Si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Para ver que Y es localmente conexo, sean U un abierto en Y y C una componente de U. Por el Teorema 2.55 basta demostrar que C es abierto en Y. Como f es suprayectiva, el conjunto $f^{-1}(C)$ es no vacío. Además $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(U)$ y, como f es continua, $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Para cada $x \in f^{-1}(C)$, tenemos que $x \in f^{-1}(U)$. Por lo tanto, podemos considerar la componente C_x de $f^{-1}(U)$ tal que $x \in C_x$. Como X es localmente conexo, por el Teorema 2.55, C_x es abierto en X. Ahora bien, como f es continua, $f(C_x)$ es un subconjunto conexo de Y. Además $f(C_x) \subset U$, $C \subset U$ y $f(x) \in C \cap f(C_x)$. Esto implica, en vista de que C es una componente de U, que $f(C_x) \subset C$. Luego $C_x \subset f^{-1}(C)$. De aquí se infiere que

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{x \in f^{-1}(C)} C_x.$$

Por lo tanto $f^{-1}(C)$ es una unión de abiertos en X. Luego $f^{-1}(C)$ es abierto en X, de donde $X - f^{-1}(C)$ es cerrado en X. Como f es cerrada, $f(X - f^{-1}(C))$ es un cerrado en Y. Utilizando la suprayectividad de f, se tiene que

$$f(X - f^{-1}(C)) = f(X) - f(f^{-1}(C)) = Y - C.$$

Entonces $Y - C$ es cerrado en Y, por lo que C es abierto en Y. Esto prueba que Y es localmente conexo. □

Ejemplo 2.60. *Sea X el espacio discreto $\{0, 1, 2, 3, ...\}$, Y el subespacio $0 \cup \{1/n \mid n = 1, 2, 3, ...\}$ de E^1 y sea $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(0) = 0, f(n) = 1/n$.*
Note que X es localmente conexo y f una función continua pero Y no es localmente conexo.

La noción de conexidad local está dada en términos de vecindades. En el siguiente teorema, vemos que podemos darla en términos de abiertos.

Teorema 2.61. *Un espacio topológico X es localmente conexo en un punto $x \in X$ si y sólo si, para cada abierto U de X con $x \in U$, existe un abierto y conexo V en X tal que $x \in V \subset U$.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean $x \in X$ y U un conjunto abierto en X con $x \in U$. Como U es una vecindad de x, por hipótesis, existe un abierto y conexo V tal que $x \in V \subset U$.

Inversamente, sean $x \in X$ y U una vecindad de x. Entonces existe un abierto W en X tal que $x \in W \subset U$. Como W es también una vecindad de x y X es localmente conexo, existe un abierto y conexo V en X tal que $x \in V \subset W$. Así $x \in V \subset U$. $\square$

En el siguiente teorema damos una condición necesaria y suficiente, bajo la cual, el producto cartesiano de espacios localmente conexos es localmente conexo.

Teorema 2.62. *Supongamos que* $\{X_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ *es una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos. Hagamos*

$$X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha.$$

Entonces X *es localmente conexo si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) *para cada* $\alpha \in \Lambda$, *el espacio* X_α *es localmente conexo;*

(2) *existe un subconjunto finito* F *de* Λ *tal que, para cada* $\alpha \in \Lambda - F$, *el espacio* X_α *es conexo.*

Demostración. Antes de iniciar la demostración, notemos que la condición (2) del teorema dice que, salvo un número finito, todos los factores X_α de X deben ser conexos. Entonces debemos mostrar que X es localmente conexo si y sólo si, cada espacio X_α es localmente conexo y, además, salvo un número finito todos son también conexos.

Ahora iniciamos la demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Por el Teorema 1.11, para cada $\alpha \in \Lambda$ la función proyección $p_\alpha \colon X \to X_\alpha$ es continua, suprayectiva y abierta. Entonces, por el Corolario 2.57, cada X_α es localmente conexo.

Con esto queda demostrado (1). Para ver (2) notemos que, como X es localmente conexo, existe un subconjunto abierto U de X que, además, es conexo y no vacío. Sean $x \in U$ y B un abierto básico de X tal que $x \in B \subset U$. Entonces

$$B = \prod_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha,$$

donde para cada $\alpha \in F$, el conjunto C_α es un abierto en X_α y, además, existe un subconjunto finito F de Λ tal que, para cada $\alpha \in \Lambda - F$, tenemos que $C_\alpha = X_\alpha$. Entonces para cada $\alpha \in \Lambda - F$, se cumple que $p_\alpha(U) = X_\alpha$ así que, por el Teorema 2.46, para cada $\alpha \in \Lambda - F$, el espacio X_α es conexo. Esto prueba (2).

Ahora supongamos que se cumplen (1) y (2). Sean $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in X$ y V un abierto en X tal que $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in V$. Tomemos un abierto básico U en X tal que $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in U \subset V$. Entonces

$$U = \prod_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$$

donde, para cada $\alpha \in G$, el conjunto C_α es abierto en X_α y, además, existe un subconjunto finito G de Λ tal que $C_\alpha = X_\alpha$, siempre que $\alpha \in \Lambda - G$.

Sea F como en (2). Entonces $F \cup G$ es un subconjunto finito de Λ. Además, para cada $\alpha \in F \cup G$, como X_α es localmente conexo y C_α es un abierto en X_α que tiene al punto x_α, existe un abierto y conexo V_α de X_α, tal que $x_\alpha \in V_\alpha \subset C_\alpha$. Por otro lado, para cada $\alpha \in \Lambda - (F \cup G)$, como $\alpha \notin G$, tenemos que $C_\alpha = X_\alpha$ y, como $x \notin F$, el espacio X_α es conexo. Entonces C_α

es conexo, para cada $\alpha \in \Lambda - (F \cup G)$. Definimos ahora:

$$W_\alpha = \begin{cases} V_\alpha, & \text{si } \alpha \in F \cup G; \\ X, & \text{si } \alpha \in \Lambda - (F \cup G). \end{cases}$$

Sea

$$W = \prod_{\alpha \in \Lambda} W_\alpha.$$

Entonces W es un abierto básico de X. Además, como cada factor de W es conexo, por el Teorema 2.53, W es conexo. Notemos que $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in W \subset U$. Por tanto X es localmente conexo en $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Como el punto $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ fue arbitrario, X es localmente conexo. $\square$

2.8. Conexos por trayectorias

En este capítulo estudiamos la relación que existe entre Conexidad por Trayectorias y por Arcos, así como algunos resultados fundamentales sobre estas propiedades. Otros problemas que analizamos son: cuándo la unión de espacios conexos por trayectorias es conexo por trayectorias y especialmente importante el que nos indica cuándo un producto de espacios es conexo por arcos.

Definición 2.63. *Supongamos que X es un espacio topológico. Una **trayectoria en** X es una función continua $f\colon [0,1] \to X$. Si $x, y \in X$, entonces una **trayectoria de** x **a** y **en** X es una trayectoria $f\colon [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Decimos que X es **conexo por trayectorias** si, para cada $x, y \in X$, existe una trayectoria de x a y en X.*

A las trayectorias en un espacio topológico X, también se les llama *caminos* en X. A su vez, a los espacios conexos por trayectorias, también se les llama espacios *conexos por caminos.* La palabra "conexo" aparece en la definición de espacio conexo por trayectorias y, contrario al hecho de que las nociones de conexidad y de conexidad local son independientes, los espacios conexos por trayectorias son conexos, según se prueba en el siguiente resultado.

Teorema 2.64. *Cada espacio conexo por trayectorias es conexo.*

Demostración. Sea X un espacio conexo por trayectorias. Fijemos un punto $y \in X$. Para cada $x \in X$ sean $f_x \colon [0,1] \to X$ una trayectoria de x a y en X y $A_x = f_x([0,1])$. Notemos que $X = \bigcup_{x \in X} A_x$. Además, por el Teorema 2.46, cada conjunto A_x es conexo. Entonces X se puede escribir como una unión de conexos que tienen a y como punto común. Así, por el Teorema 2.51, X es conexo. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que en general existen espacios conexos que no son conexos por trayectorias.

Ejemplo 2.65. *Si* $W = \left\{\left(x,\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in (0,1]\right\}$ *y y* $Y = (\{0\} \times [-1,1])$ *espacios en* $\mathbb{R}^2$*, con la topología usual, entonces* $X = W \cup Y$ *no es conexo por trayectorias.*

Más adelante veremos la relación entre los espacios localmente conexos y los espacios conexos por trayectorias. De momento, vamos a probar que la conexidad por trayectorias se preserva bajo funciones continuas.

Teorema 2.66. *Sea* $f \colon X \to Y$ *una función continua entre los espacios topológicos* X *y* Y*. Si* X *es conexo por trayectorias, entonces* $f(X)$ *es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean $y_1, y_2 \in f(X)$. Entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Al ser X conexo por trayectorias, existe una función continua $g\colon [0,1] \to X$ tal que $g(0) = x_1$ y $g(1) = x_2$. Así $f \circ g\colon [0,1] \to f(X)$ es una función continua tal que

$$(f \circ g)(0) = f(x_1) = y_1 \quad \text{y} \quad (f \circ g)(1) = f(x_2) = y_2.$$

Por lo tanto $f(X)$ es conexo por trayectorias. $\square$

Corolario 2.67. *La conexidad por trayectorias es una propiedad topológica.*

Definición 2.68. *Un **arco** es cualquier espacio topológico homeomorfo al intervalo unitario* $[0,1]$.

Ligado al concepto de conexidad por trayectorias, tenemos el de conexidad por arcos.

Definición 2.69. *Supongamos que X es un espacio topológico T_2. Un **arco en** X es una función continua e inyectiva $f\colon [0,1] \to X$. Si $x, y \in X$, entonces un **arco de** x **a** y **en** X es un arco $f\colon [0,1] \to X$ en X, tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Decimos que X es **conexo por arcos** si, para cada $x, y \in X$, existe un arco de x a y en X.*

Supongamos que $f\colon [0,1] \to X$ es un arco en X. Entonces f, como función de $[0,1]$ a $f([0,1])$, es biyectiva y continua. Como $[0,1]$ es compacto y $f([0,1])$ es T_2 (por ser un subespacio de X, que es T_2), resulta que f es un homeomorfismo ([2, Teorema 2.1.2, p 236]). Por lo tanto $f([0,1])$ es un arco en el sentido de la Definición 2.68. Con esto probamos que a partir de un arco en X es posible obtener un arco, en el sentido de la Definición 2.68, que está contenido en X. Supongamos ahora que A es un arco, en el sentido de la Definición 2.68, y que $A \subset X$. Entonces existe un homeomorfismo $f\colon [0,1] \to A$. Notemos que f puede verse como una función continua e inyectiva de $[0,1]$ a X. Luego f es un arco en X. Esto muestra que, a partir de un arco (en el sentido de la Definición 2.68) que está contenido en X, es posible encontrar un arco en X. Por consiguiente

($\star$) $A \subset X$ es un arco si y sólo si existe una función continua e inyectiva $f\colon [0,1] \to X$ tal que $f([0,1]) = A$.

De esta manera, la noción de arco como se presenta en la Definición 2.69 no se contradice con la que presentamos en la Definición 2.68. En el fondo lo que estamos haciendo es identificar una función con su imagen. Esto es muy común en Matemáticas. Por ejemplo, solemos identificar una función con su gráfica.

Una vez comentado lo anterior, conviene mencionar ahora que los espacios conexos por arcos son también conocidos como espacios *arco-conexos*, o bien *arcoconexos*. También conviene indicar que, por definición, todo espacio conexo por arcos es conexo por trayectorias. Sin embargo, no todo espacio conexo por trayectorias es conexo por arcos, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.70. *Si $X = \{0,1\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}\}$, entonces X es un espacio conexo por trayectorias que no es conexo por arcos.*

Demostración. Sea $f\colon [0,1] \to X$, definida por

$$f\left([0,\frac{1}{2})\right) = 0 \quad \text{y} \quad f\left([\frac{1}{2},1]\right) = 1.$$

Como los abiertos en X sólo son $X, \emptyset$ y $\{0\}$, para probar que f es continua veamos que las preimagenes de estos conjuntos son abiertos en $[0,1]$

$$f^{-1}(X) = [0,1] \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad \text{y} \quad f^{-1}(\{0\}) = \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

Por lo tanto f es continua y así X es conexo por trayectorias.

Para mostrar que X no es conexo por arcos notemos que el único abierto que contiene a 1 es X y los únicos abiertos que contienen al 0 son X y $\{0\}$, como $X \cap \{0\} \neq \emptyset$, tenemos que Xno es T_2, como lo requiere la definición.

□

Más adelante vamos a dar condiciones, bajo los cuales, los espacios conexos por trayectorias son conexos por arcos.

Teorema 2.71. *La conexidad por arcos es una propiedad topológica.*

Demostración. Sean X, Y espacios topológicos, $f\colon X \to Y$ un homeomorfismo y $y_1, y_2 \in Y$. Existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Como X es conexo por arcos, existe una función continua e inyectiva $g\colon [0,1] \to X$ tal que $g(0) = x_1$ y $g(1) = x_2$. Además, como f también es continua e inyectiva, resulta que $f \circ g\colon [0,1] \to Y$ es una función continua e inyectiva tal que

$$(f \circ g)(0) = f(x_1) = y_1 \quad \text{y} \quad (f \circ g)(1) = f(x_2) = y_2.$$

Por lo tanto, Y es conexo por arcos.

□

Ahora veamos las condiciones, bajo las cuales, la unión de espacios conexos por trayectorias es conexa por trayectorias. Como se indica, dichas condiciones son similares a las que se tienen para inferir que la unión de espacios conexos es conexa.

Teorema 2.72. *Sean X un espacio topológico y $\{X_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ una clase de subconjuntos de X. Supongamos que X_α es conexo por trayectorias, para cada $\alpha \in \Lambda$. Entonces:*

(1) *si para cada $\alpha, t \in \Lambda$ con $\alpha \neq t$, sucede que $X_\alpha \cap X_t \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es conexo por trayectorias;*

(2) *si $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es conexo por trayectorias;*

(3) *si existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $X_\alpha \cap X_{\alpha_0} \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Para probar (1) tomemos $p, q \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, luego, existen $\alpha, t \in \Lambda$ tales que $p \in X_\alpha$ y $q \in X_t$. Sea $k \in X_\alpha \cap X_t$, como X_α y X_t son conexos por trayectorias, existen funciones continuas $f \colon [0,1] \to X_\alpha$ y $g \colon [0,1] \to X_t$ tales que

$$f(0) = p, \quad f(1) = k, \quad g(0) = k \quad \text{y} \quad g(1) = q.$$

Sea $h \colon [0,1] \to \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, definida para cada $x \in [0,1]$ por:

$$h(x) = \begin{cases} f(2x), & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ g(2x-1), & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Tenemos que h es una función continua tal que

$$h(0) = f(0) = p \quad \text{y} \quad h(1) = g(1) = q.$$

Por lo tanto, $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es conexo por trayectorias.

Para probar (2) notemos que si $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \neq \emptyset$, entonces para cada $\alpha, t \in \Lambda$ se cumple que $X_\alpha \cap X_t \neq \emptyset$ y usando (1) obtenemos que el resultado que querámos.

Para probar (3), hagamos para cada $\alpha \in \Lambda$, el conjunto $T_\alpha = X_\alpha \cup X_{\alpha_0}$ notemos que por (1), cada T_α es conexo por trayectorias y para cada $\alpha, t \in \Lambda$ tenemos que

$$T_\alpha \cap T_t = (X_\alpha \cup X_{\alpha_0}) \cap (X_{\alpha_0} \cup X_t) \supset (X_\alpha \cap X_{\alpha_0}) \neq \emptyset$$

entonces, para cada $\alpha, t \in \Lambda$ se cumple que $T_\alpha \cap T_t \neq \emptyset$ y usando (1) de este teorema tenemos que

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (X_\alpha \cup X_{\alpha_0}) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$$

es conexo por trayectorias.

□

Ahora vemos como se comporta la conexidad por trayectorias con respecto al producto cartesiano.

Teorema 2.73. *Supongamos que $\{X_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ es una clase no vacía de espacios topológicos no vacíos. Hagamos*

$$X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$$

y supongamos que X tiene la topología producto. Entonces X es conexo por trayectorias si y sólo si, para cada $\alpha \in \Lambda$, X_α es conexo por trayectorias.

Demostración. Supongamos primero que X es conexo por trayectorias. Para cada $\alpha \in \Lambda$, sea $p_\alpha\colon X \to X_\alpha$ la función proyección. Como p_α es continua y suprayectiva, por el Teorema 2.66, X_α es conexo por trayectorias .

Ahora supongamos que cada X_α es conexo por trayectorias. Tomemos dos puntos $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ y $(y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en X. Para cada $\alpha \in \Lambda$, tenemos que $x_\alpha, y_\alpha \in X_\alpha$ y, como X_α es conexo por trayectorias, existe una función continua $f_\alpha\colon [0,1] \to X_\alpha$ tal que $f_\alpha(0) = x_\alpha$ y $f_\alpha(1) = y_\alpha$. Esto nos permite considerar la función $f\colon [0,1] \to X$ definida, para $t \in [0,1]$, como:

$$f(t) = (f_\alpha(t))_{\alpha\in\Lambda}.$$

Dada $\alpha \in \Lambda$, tenemos que

$$(p_\alpha \circ f)(t) = p_\alpha(f(t)) = p_\alpha((f_r(t))_{r\in\Lambda}) = f_\alpha(t).$$

Por lo tanto $p_\alpha \circ f = f_\alpha$, de donde $p_\alpha \circ f$ es continua. Como esto sucede para cada $\alpha \in \Lambda$, por el Teorema 1.14, f es continua. Además

$$f(0) = (f_\alpha(0))_{\alpha\in\Lambda} = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \quad \text{y} \quad f(1) = (f_\alpha(1))_{\alpha\in\Lambda} = (y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}.$$

Esto prueba que X es conexo por trayectorias. $\square$

Bibliografía

[1] C. O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[2] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[3] J. L. Kelley, *The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice*, Fund. Math., 37(1950), 75–76.

[4] J. R. Munkres, *Topología*, Segunda Edición, Editorial Prentice Hall. Madrid, España, 2002.

[5] M. García Marrero, J. Margalef Roig, C. Olano de Lorenzo-Cáceres. E. Outerelo Domínguez y J. L. Pinilla Ferrando, *Topología* $*$, Editrorial Alhambra. Madrid, España, 1975.

[6] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applics Mathematics Serie, Vol 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, ISBN: 978-0-8493-3738-3, 2005.

[7] S. Salbany y T. D. Todorov, *Alexander's subbase lemma*, Proc. Amer. Math. Soc., 105 (1), (1989), 262.

[8] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, New York, 2004.

Índice alfabético

Arco en X, 87
Arco, 87
Axioma de Elección 1
Base, 6
Bola abierta, 46
Caderna 2
Cardinalidad 1
Coordenada de un elemento del producto 4
Compacto, 57
Conexo, 69
Conexo por arcos, 87
Conexo por trayectorias, 85
Cota superior, 3
Elemento maximal, 3
Espacio topologico de Hausdorff, 40
Factor de un producto, 4
Denso, 18
Función
    Proyección, 5
Interior, 21
Localmente conexo, 80
Métrica, 45
Metrizable, 47
Orden parcial, 3
Parcialmente ordenado, 3
Producto
    Cartesiano, 4
    de espacios discretos 30

de espacios T_2, 40
de espacios T_3, 40
Subbase, 6
Topología Producto, 7
Trayectoria, 85