



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Espacios de Riesz y retículos de Banach

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ABRAHAM BARRERA SEVILLA

DIRECTORES DE TESIS:

DR. FERNANDO GALAZ FONTES
DR. GABRIEL KANTÚN MONTIEL

PUEBLA, PUEBLA. MARZO, 2023

A mis padres...

Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme culminar esta etapa de mi vida.

A mi familia, gracias por estar siempre a mi lado.

A mis asesores de tesis, a veces más comprometidos que yo:

Dr. Fernando Galaz Fontes por tenerme la confianza para la realización de este proyecto y su infinita paciencia en el transcurso del mismo.

Dr. Gabriel Kantún Montiel por su colaboración y seguimiento. Por siempre estar disponible de principio a fin.

Un especial agradecimiento al Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) por la beca otorgada para la elaboración de este proyecto. Sin su apoyo no hubiera sido posible.

A mis sinodales Dr. Slavisa Djordjevic, Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna por sus observaciones y comentarios para mejorar este trabajo.

A mi tutora, Dra. Maria Araceli Juárez Ramírez por siempre estar ahí y aconsejarme en todo momento durante este trabajo de tesis y durante toda mi licenciatura.

A todos mis amigos que conocí a lo largo de la carrera, a los que conocí en CIMAT. Gracias infinitas porque también son ser parte de esto.

Índice

Agradecimientos	iii
Introducción	vii
1. Espacios de Riesz	1
1.1. Conjuntos ordenados	1
1.2. Retículos	2
1.3. Espacios vectoriales ordenados	4
1.4. Espacios de Riesz	6
1.5. Orden en \mathbb{R}^n	11
1.6. Orden lexicográfico	12
1.7. Subretículos	14
2. Espacios de Riesz formados por funciones	17
2.1. Orden en espacios de funciones	17
2.2. El espacio de Riesz $F(D, \mathbb{R}^n)$	21
2.2.1. El subespacio de Riesz $B(D, \mathbb{R}^n)$	22
2.2.2. Los subespacios de Riesz $C(X, \mathbb{R}^n)$ y $C(K)$	25
2.2.3. Espacios de sucesiones	26
3. Ideales, bandas y átomos	29
3.1. Ideales	29
3.2. Bandas	33
3.3. Átomos	42
3.4. Espacio cociente	43
3.5. Homomorfismos reticulares	45
4. Espacios Dedekind y Retículos de Banach	49
4.1. Espacios Dedekind completos y Dedekind σ -completos	49
4.2. Operadores lineales positivos	53
4.3. Retículos de Banach	56
Bibliografía	60

Introducción

Podemos decir que el estudio de los espacios de funciones clásicos, como por ejemplo las funciones continuas, las funciones acotadas y los espacios de sucesiones, fueron el punto de partida del análisis funcional. En 1920, en su tesis doctoral, Stefan Banach (1882-1945) definió axiomáticamente lo que hoy conocemos como espacio de Banach. En 1932 se publica su monografía *Théorie des opérations linéaires*, convirtiéndose en el centro de investigación del análisis funcional. Sin embargo, la teoría abstracta se enfoca principalmente a estructuras topológicas de los espacios Banach y descuida casi por completo el concepto de espacio vectorial ordenado.

Un retículo E es un conjunto no-vacío con un orden parcial con la propiedad de que $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$ existen (en E) para cada par $x, y \in E$. Mientras tanto, un retículo vectorial o espacio de Riesz es un retículo que además es espacio vectorial, donde las operaciones algebraicas y el orden satisfacen: (i) si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$, (ii) si $x \leq y$ y $\lambda \geq 0 \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda x \leq \lambda y$ para $x, y, z \in E$.

En un espacio de Riesz E , $\sup\{x, -x\}$ define el módulo de x para cada $x \in E$ y se denota por $|x|$. Por otro lado, un retículo normado es un espacio de Riesz E con una norma tal que si $|x| \leq |y|$ se cumple que $\|x\| \leq \|y\|$, donde $\|x\|$ es la norma en E . Finalmente, un retículo de Banach es un retículo normado que además es un espacio de Banach.

Los espacios de Riesz fueron considerados por primera vez por F. Riesz (1880-1956), L. Kantorovich (1912-1986) y H. Freudenthal (1905-1990) a mediados de los años treinta, aunque su teoría inicial se remonta hasta el comienzo de la investigación de los espacios de Banach. En los años siguientes estas investigaciones fueron continuadas por matemáticos en la Unión Soviética como B.Z. Vulich (1913-1978), A.G. Pinsker (1906-1986) y A.I. Judin; en Japón por H. Nakano (1945-) y T. Ogasawara (1931-) y en los Estados Unidos por S. Kakutani (1911-2004) y H.F. Bohnenblust (1906-2000). Si bien la teoría de espacios de Banach se desarrolló rápidamente en los años cincuenta y sesenta, la teoría de espacios de Riesz recibió atención años más tarde. A principios de los años sesenta se empieza a ver que las estructuras topológicas y las de orden estaban relacionadas por lo que convendría en adelante ser estudiadas de manera conjunta. Durante los años setenta se comenzó a construir una teoría que combina los espacios de Riesz y de Banach de forma natural, dando así lugar a los retículos de Banach. En este periodo se establecen la mayoría de los fundamentos de orden de espacios vectoriales y las propiedades reticulares de los operadores. Entre 1966 y 1974 aparecieron las monografías de B.Z. Vulich, W.A.J. Luxemburg (1929-2018), A. C. Zaanen (1913-2003) y H.H. Schaefer (1925-2005). De esta época destacan los libros de H. H. Schaefer [7], W. A. J. Luxemburg [4], A.C. Zaanen [4] y C.D. Aliprantis (1946-2009).

Posteriormente aparecen los trabajos de C.D. Aliprantis [2], [1], A.C. Zaanen [10], P.

Meyer-Nieberg [6], H. U. Schwarz [8] y Y.A. Abramovich [1].

Además de su importancia en las matemáticas, la teoría de espacios de Riesz y los operadores positivos tiene importantes aplicaciones en otras disciplinas, entre las que destacan teoría de juegos, economía y finanzas.

El presente trabajo se basó principalmente en las notas *Vector and Banach lattices* de A.W. Wickstead [9]. El principal objetivo es detallar los resultados que aparecen en ellas y desarrollarlas con ejemplos para la comprensión de cualquier estudiante que comience a tener interés en el tema. Se desarrolló en cuatro capítulos que describimos a continuación.

En el capítulo 1 se presentan los conceptos principales de los conjuntos con los que se trabajará en capítulos posteriores tales como conjunto ordenado, espacio vectorial ordenado y espacio de Riesz. Se muestra una gama de propiedades que poseen sus elementos y subconjuntos; además que se presentan los primeros ejemplos en conjuntos bien conocidos.

En el capítulo 2 desarrollaremos los espacios de funciones clásicos y los espacios de Riesz en ellos. Se consideran los conceptos de norma, espacio completo y espacio de Banach. Es aquí donde se muestran algunos interesantes ejemplos acerca de la herencia de propiedades reticulares a los subconjuntos de espacios de Riesz.

En el capítulo 3 definimos algunos subconjuntos básicos de los espacios de Riesz como ideales y bandas, así como lo relacionado a los elementos llamados átomos. Se presentan teoremas y resultados que se consideran importantes respecto a ellos. Buscamos que no se pierda el seguimiento para el lector ya que aquí es donde quizá los conceptos ya no son tan conocidos. Igualmente se presentan ejemplos utilizando lo que se ha visto en capítulos anteriores. Se empieza a hablar acerca de los operadores lineales; se define además lo que es un homomorfismo reticular y se define el espacio cociente de un espacio de Riesz asociado a un ideal en dicho espacio. Adicionalmente se presenta el teorema de Kakutani; uno de los teoremas más importantes de la materia.

En el capítulo 4 se introduce lo que es un espacio Dedekind completo y Dedekind σ -completo. Usamos algunos conjuntos ya trabajados en capítulos anteriores para ilustrar ejemplos y se agregan algunos ejemplos más. Se trabaja con algunas clases de operadores lineales como operadores positivos, operadores regulares y operadores reticularmente acotados. Además se relacionan los operadores lineales con los espacios de Riesz. Se concluye el capítulo presentando lo que es un retículo normado y un retículo de Banach, además de que se muestran algunos ejemplos de los mismos.

Capítulo 1

Espacios de Riesz

1.1. Conjuntos ordenados

Definición 1.1.1 Un *orden parcial* en un conjunto no-vacío M es una relación \leq tal que:

- i) $x \leq x$ para cada $x \in M$.
- ii) $x \leq y$ y $y \leq x$ implica que $x = y$.
- iii) $x \leq y$ y $y \leq z$ implica que $x \leq z$.

A un conjunto no-vacío M con un orden parcial \leq lo llamaremos *conjunto ordenado*.

Usamos $y \geq x$ como un sinónimo para $x \leq y$, cuando esto ocurra diremos que x y y son *elementos comparables*. Si M es un conjunto tal que x y y son comparables para cada $x, y \in M$, entonces se dice que \leq es un *orden lineal* u *orden total* en M . En adelante, cuando se escriba $x < y$ se entenderá que $x \leq y$ y $x \neq y$.

Si A es un subconjunto de M , diremos que x es una *cota superior* de A si $a \leq x$ para todo $a \in A$. En este caso también decimos que A está *acotado superiormente*. Una cota superior x de A es la *mínima cota superior* o *supremo* si para cualquier otra cota superior y de A , se cumple que $x \leq y$.

El supremo de $A \subset M$, cuando este existe, se denota por $\sup A$. En particular, si $A = \{x, y\}$ el supremo de A lo denotaremos por $x \vee y$. De lo anterior tenemos que $x \vee x = x$, para cada $x \in M$.

Los términos *cota inferior*, *inferiormente acotado*, *máxima cota inferior* e *ínfimo* se definen de manera análoga. Además si el conjunto $A = \{x, y\}$, donde $x, y \in M$, tiene ínfimo entonces $x \wedge y := \inf A$. Se sigue que $x \wedge x = x$.

Los conjuntos que son acotados superiormente y acotados inferiormente son llamados *conjuntos orden-acotados* o *reticularmente acotados*.

Lema 1.1.1 Si $A \subset M$ es un conjunto que tiene supremo, entonces el supremo es único. Análogamente si $A \subset M$ tiene ínfimo, entonces este es único.

Demostración: Supongamos que $x = \sup A$ y $y = \sup A$. Como x y y son cotas superiores de A se cumple que $x \leq y$ ya que $x = \sup A$. Análogamente tenemos $y \leq x$. Por lo tanto, $x \leq y$ y $y \leq x$, lo que implica que $x = y$.

La prueba para el ínfimo es análoga. ■

1.2. Retículos

Definición 1.2.1 A un conjunto ordenado M tal que $x \vee y$ y $x \wedge y$ existen para cualquier par de elementos $x, y \in M$ lo llamaremos *retículo*.

Ejemplo 1.2.1 La igualdad define un orden parcial en un conjunto no-vacío M .

Demostración: (i) Para cada $x \in M$, $x = x$.

(ii) Si $y = x$ y $x = y$ se cumple que $y = x$ para $x, y \in M$.

(iii) Si $y = x$ y $x = z$, entonces $y = z$ para $x, y, z \in M$. ■

¿Es M un retículo? En general la respuesta es ¡no! Sólo se cumple cuando M es un conjunto de un solo elemento. Ya que para $x, y \in M$ tales que $x \neq y$, entonces x no es comparable con y . Se sigue que, $x \vee y$ no existe cuando M tiene mas de un elemento.

Ejemplo 1.2.2 Sean $\Omega \neq \emptyset$ un conjunto arbitrario y $M = 2^\Omega$. Para cualesquiera A y $B \in M$, definimos,

$$A \leq B \text{ si } A \subset B. \quad (1.1)$$

Veamos que (1.1) es un orden en M . Sean $A, B, C \in M$.

i) $A \subset A$ para cada $A \in M$, por lo tanto $A \leq A$.

ii) Si $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$. Lo que implica que si $A \leq B$ y $B \leq A$, entonces $A = B$.

iii) Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$, es decir, si $A \leq B$ y $B \leq C$ entonces $A \leq C$.

Por lo tanto, se cumple que 2^Ω con la relación dada en (1.1) es un conjunto ordenado.

Proposición 1.2.1 El conjunto 2^Ω con el orden definido en (1.1) es un retículo. Con este orden, el conjunto 2^Ω es un conjunto orden-acotado.

Demostración: Veamos que para cualquier par de elementos $A, B \in 2^\Omega$ se cumple que $A \vee B = A \cup B$.

Tenemos que $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, esto es, $A \leq A \cup B$ y $B \leq A \cup B$.

Sea $D \in M$ tal que $A \leq D$ y $B \leq D$, entonces $A \subset D$ y $B \subset D$ por lo que $A \cup B \subset D \cup D = D$. Por lo tanto, $A \cup B \leq D$.

Análogamente, si $A, B \in 2^\Omega$ se cumple que $A \wedge B = A \cap B$.

Tenemos que $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, se sigue que $A \cap B \leq A$ y $A \cap B \leq B$.

Supongamos que $C \in M$ tal que $C \leq A$ y $C \leq B$, entonces $C \subset A$ y $C \subset B$ lo que implica que $C \subset A \cap B$. Así, $C \leq A \cap B$.

Hemos verificado que M con el orden definido en (1.1) es un retículo.

El conjunto 2^Ω es orden-acotado ya que para cada $A \in 2^\Omega$ se cumple que $\emptyset \subset A \subset \Omega$. ■

Lema 1.2.1 Si M es un retículo y $A \subset M$ es no-vacío y finito, entonces existen $\sup A$ e $\inf A$.

Demostración: Dado que A es finito podemos suponer que A consta de n elementos para algún $n \in \mathbb{N}$. Procedamos a demostrar por inducción.

Para $n = 2$.

Sea $A = \{a_1, a_2\}$, sabemos que $A \subset M$ y que M es un retículo, entonces $a_1 \vee a_2$ existe.

Supongamos que cualquier conjunto con n elementos tiene supremo. Queremos probar que para un conjunto $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}\} \subset M$ existe el supremo. Para ello, notemos que,

$$\{b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}\} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \cup \{b_{n+1}\},$$

por hipótesis inductiva, sabemos que $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ tiene supremo. Llamemos s al supremo del conjunto $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ y probemos que

$$\sup\{b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}\} = s \vee b_{n+1},$$

el cual existe ya que M es un retículo.

Tomemos $i \in \{1, \dots, n\}$. Notemos que $b_i \leq s$ y $s \leq s \vee b_{n+1}$, además $b_{n+1} \leq s \vee b_{n+1}$. Por lo tanto, se cumple que $s \vee b_{n+1}$ es cota superior de B .

Sea k otra cota superior de B , entonces $b \leq k$ para cada b en B . De lo anterior resulta que $b_{n+1} \leq k$ y $b_i \leq k$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se sigue que $s \leq k$. Así $s \vee b_{n+1} \leq k$.

De forma análoga se verifica que $\inf A$ existe. ■

Lema 1.2.2 Sea M un retículo y sean $x, y, z \in M$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

i) $x \vee y = y \vee x$.

ii) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

iii) Si $w \leq x$ y $z \leq y$, entonces $w \vee z \leq x \vee y$, $w \wedge z \leq x \wedge y$.

Demostración: (i) Tenemos que $y \leq x \vee y$ y $x \leq x \vee y$. Además $x \leq y \vee x$ y $y \leq y \vee x$. Así $y \vee x \leq x \vee y$ y $x \vee y \leq y \vee x$. En consecuencia, $x \vee y = y \vee x$. Lo que prueba (i)

(ii) Para probar (ii), lo haremos en dos partes. Primero, veamos que $(x \vee y) \vee z \leq x \vee (y \vee z)$.

Como $x \leq x \vee (y \vee z)$ y $y \leq (y \vee z) \leq x \vee (y \vee z)$ se cumple que $(x \vee y) \leq x \vee (y \vee z)$. Además $z \leq y \vee z \leq x \vee (y \vee z)$, entonces $(x \vee y) \vee z \leq x \vee (y \vee z)$.

Ahora, probemos que $x \vee (y \vee z) \leq (x \vee y) \vee z$.

Se cumple que $x \leq x \vee y \leq (x \vee y) \vee z$. Por otro lado, $y \leq x \vee y \leq (x \vee y) \vee z$ y $z \leq (x \vee y) \vee z$. Así $y \vee z \leq (x \vee y) \vee z$. Luego, $x \vee (y \vee z) \leq (x \vee y) \vee z$.

Por lo tanto, de las dos desigualdades anteriores, se verifica (ii).

(iii) Tenemos que $x \vee y \geq x \geq w$ y $x \vee y \geq y \geq z$, entonces $x \vee y \geq w \vee z$. Análogamente, $w \wedge z \leq w \leq x$ y $w \wedge z \leq z \leq y$. Por lo tanto, $w \wedge z \leq x \wedge y$. ■

Como consecuencia del lema anterior, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.2.1 Si $x \leq y$, entonces $x \vee z \leq y \vee z$ y $x \wedge z \leq y \wedge z$ para cada $z \in M$.

En caso de que no se indique, siempre trataremos con espacios vectoriales reales en el presente trabajo.

1.3. Espacios vectoriales ordenados

Definición 1.3.1 A un espacio vectorial E con un orden parcial \leq que además cumple:

- i) Si $x, y, z \in E$ y $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$,
- ii) Si $x, y \in E, x \leq y$ y $\lambda \geq 0 \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda x \leq \lambda y$,

lo llamaremos un *espacio vectorial ordenado*. En este caso diremos que \leq es un *orden vectorial*.

Observación: Notemos que si E es un espacio vectorial ordenado y $W \subset E$ un subespacio vectorial, entonces al restringir el orden de E a W resulta que W es también un subespacio vectorial ordenado.

Observación: Si $x \leq y$ y $\lambda \leq 0$, entonces $\lambda y \leq \lambda x$.

Demostración: Tenemos que $\lambda \leq 0 \iff -\lambda \geq 0$. Luego, si $x \leq y$, entonces por el inciso (1) de la definición $-\lambda x \leq -\lambda y$. Usando la definición y tomando $z = \lambda x$ resulta que $0 \leq -\lambda y + \lambda x$. De forma análoga, tomando $z = \lambda y$, tenemos que $\lambda y \leq \lambda x$. ■

Ejemplo 1.3.1 Consideremos la siguiente función:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{si } |x| \neq 1 \\ 1, & \text{si } x = -1. \\ -1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Para $x, y \in \mathbb{R}$, diremos que $x \preceq y$ si $h(x) \leq h(y)$, veamos que \preceq determina un orden en \mathbb{R} que no es orden vectorial.

(i) Para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x \preceq x$, ya que $h(x) \leq h(x)$.

(ii) Si $x \preceq y$ y $y \preceq x$, entonces $h(x) \leq h(y)$ y $h(y) \leq h(x)$. Se sigue que $h(x) = h(y)$. Observando que h es inyectiva, se tiene que $x = y$.

(iii) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $h(x) \leq h(y)$ y $h(y) \leq h(z)$. Se sigue que $h(x) \leq h(z)$, lo que implica que $x \preceq z$.

Veamos que \preceq no define un orden vectorial.

Tomemos $x = 0$ y $y = -1$, se cumple que $x \preceq y$ ya que $h(x) = 0 < 1 = h(y)$. Basta tomar $z = 2$ para mostrar que $x + z \not\preceq y + z$, ya que $h(x + z) = 2 \not\preceq -1 = h(y + z)$. Por lo tanto, \preceq no define un orden vectorial en \mathbb{R} .

Definición 1.3.2 Sea E un espacio vectorial ordenado. Al conjunto

$$E^+ = \{x \in E : x \geq 0\},$$

lo llamaremos el *cono positivo* en E y a sus elementos se les llama *positivos* (en vez de no-negativos).

Recordemos que si $A \subset E$ es un conjunto, se define $-A = \{-a : a \in A\}$.

Lema 1.3.1 El cono positivo tiene las siguientes propiedades:

- i) Si $x, y \in E^+$, entonces $x + y \in E^+$.
- ii) Si $\lambda \geq 0$ y $x \in E^+$, entonces $\lambda x \in E^+$.
- iii) $E^+ \cap (-E^+) = \{0\}$.

Demostración: (i) y (ii) son inmediatos de la definición.

Para demostrar (iii), sea $x \in E^+ \cap (-E^+)$, entonces $x \geq 0$ y $-x \geq 0$, luego $x \geq 0$ y $x \leq 0$ por lo cual $x = 0$. Por lo tanto $E^+ \cap (-E^+) \subset \{0\}$.

Para demostrar la otra contención, notemos que $0 \geq 0$ y $0 = -0$, es decir, $0 \in E^+$ y $0 \in -E^+$ lo que implica que $0 \in E^+ \cap (-E^+)$. Por lo tanto $\{0\} \subset E^+ \cap (-E^+)$. ■

Definición 1.3.3 Sea E un espacio vectorial y $C \subset E$ un conjunto no-vacío. Si C tiene las propiedades (i), (ii) y (iii) del lema anterior, entonces diremos que C es un *cono*.

Definición 1.3.4 Sean E un espacio vectorial y $C \subset E$ un cono, entonces para $x, y \in E$ definimos

$$x \leq y \text{ si } y - x \in C. \quad (1.2)$$

Proposición 1.3.1 El orden \leq , definido en (1.2), es un orden vectorial en E .

Demostración: Tenemos que,

- i) Para cada $x \in E$ se cumple que $x - x = 0 \in C$ por (iii), así $x \leq x$.
- ii) Sean $x, y \in E$ tales que $y \leq x$ y $x \leq y$, entonces $(x - y), (y - x) \in C$. Notando que $-(x - y) = (y - x)$, tenemos que $(x - y) = 0$ por (iii). Por lo tanto, se deduce que $x = y$.
- iii) Si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $y - x$ y $z - y \in C$. Por lo tanto $(y - x) + (z - y) \in C$. Como $(y - x) + (z - y) = (z - x) \in C$, entonces $x \leq z$. ■

Por (i), (ii) y (iii), se verifica que E es un conjunto ordenado.

Por la propiedad (iii) $y - x = y - x + z - z = (x + z) - (y + z)$, por lo cual $x + z \leq y + z$. Ahora, si $x \leq y$ y $\lambda \geq 0$, por propiedad (ii), $\lambda x \leq \lambda y$ y así $\lambda(x - y) \in C$.

Por lo tanto \leq es un orden vectorial.

Proposición 1.3.2 Sea E un espacio vectorial ordenado y $A, B \subset E$. Si $\sup A$ existe, entonces $\inf(-A)$ existe y $\inf(-A) = -\sup A$.

Recíprocamente, si $\inf B$ existe, entonces $\sup(-B)$ existe y se cumple que $\sup(-B) = -\inf B$.

Demostración: Sea $\alpha = \sup A$, entonces $a \leq \alpha$, $\forall a \in A$. Entonces $-\alpha \leq -a$, $\forall a \in A$, lo que implica $-\alpha$ es una cota inferior de $-A$. Sea β otra cota inferior de $-A$, entonces $\beta \leq -a$, $\forall a \in A$, luego, $a \leq -\beta \forall a \in A$. Dado que α es el supremo de A debe ocurrir que $\alpha \leq -\beta$ y así $\beta \leq -\alpha$. Por lo tanto $-\sup A = -\alpha = \inf(-A)$.

Análogamente, tomemos $\beta = \inf B$, por lo tanto $\beta \leq b$, $\forall b \in B$. Se cumple que $-b \leq -\beta \forall b \in B$, entonces $-\beta$ es una cota superior de $-B$. Si α es otra cota superior de $-B$, se tiene que $-b \leq \alpha \forall b \in B$. Luego, $-\alpha \leq b \forall b \in B$. Por propiedades del ínfimo, debe ocurrir que $-\alpha \leq \beta$ y así $-\beta \leq \alpha$. Esto prueba que $-\beta = \sup(-B)$. ■

1.4. Espacios de Riesz

Definición 1.4.1 A un espacio vectorial ordenado E que además es un retículo lo llamaremos *espacio de Riesz o retículo vectorial*.

Ejemplo 1.4.1 Un ejemplo sencillo de espacio de Riesz son los números reales con las operaciones usuales y el orden usual. Si x y y son números reales, entonces $x \vee y = \max\{x, y\}$. Además, para cada $x \in \mathbb{R}$ el módulo de x coincide con el valor absoluto de x .

En el lema 1.2.1 vimos que si M es un retículo y A un subconjunto finito no-vacío, entonces A tiene supremo. Con este ejemplo vemos que lo anterior ya no se cumple cuando A es un conjunto contable. Basta tomar $A = \mathbb{N}$, entonces $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto contable pero A ni siquiera es acotado.

Ejemplo 1.4.2 Consideremos \mathbb{R} con el orden \sim definido por la igualdad. Para cada $x, y, z \in \mathbb{R}$: (i) Si $x \sim y$, entonces $x + z \sim y + z$.

(ii) Para $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \geq 0$, se cumple que $\lambda x \sim \lambda y$.

Lo anterior muestra que \mathbb{R} con la igualdad es un espacio vectorial ordenado. Sin embargo, en el ejemplo 1.2.1, vimos que un conjunto M con más de un punto no es un retículo con el orden definido por la igualdad. Por lo tanto, \mathbb{R} con la igualdad no es un espacio de Riesz.

El siguiente corolario es consecuencia de la definición anterior y la proposición 1.3.2.

Corolario 1.4.1 Sea E un espacio vectorial ordenado. Si $x \vee y$ existe para cualquier $x, y \in E$, entonces E es un espacio de Riesz, además

$$x \wedge y = - ((-x) \vee (-y)).$$

Lema 1.4.1 Sea E un espacio de Riesz. Si $x, y, z \in E$, entonces:

$$i) (x + z) \vee (y + z) = (x \vee y) + z \quad y \quad (x + z) \wedge (y + z) = (x \wedge y) + z.$$

$$ii) \lambda x \vee \lambda y = \lambda (x \vee y) \text{ para } \lambda \geq 0 \quad y \quad \lambda x \wedge \lambda y = \lambda (x \wedge y) \text{ para } \lambda \geq 0.$$

Demostración: (i) Notemos que $x + z \leq (x \vee y) + z$ y $y + z \leq (x \vee y) + z$. Sea $w \in E$ tal que $x + z \leq w, y + z \leq w$, entonces $x \leq w - z$ y $y \leq w - z$.

Por lo tanto $x \vee y \leq w - z$ lo que implica que $(x \vee y) + z \leq w$. Esto prueba la primera parte de (i).

Por el corolario 1.4.1,

$$\begin{aligned} (x + z) \wedge (y + z) &= - [(-x - z) \vee (-y - z)] = - [((-x) \vee (-y)) - z] \\ &= - ((-x) \vee (-y)) + z = (x \wedge y) + z. \end{aligned}$$

Con lo que se verifica la segunda parte de (i).

(ii) Tenemos que $x \vee y \geq x$ y $x \vee y \geq y$. Como $\lambda \geq 0$, se implica que $\lambda(x \vee y) \geq \lambda x$ y $\lambda(x \vee y) \geq \lambda y$. Por lo tanto, $\lambda(x \vee y) \geq \lambda x \vee \lambda y$.

Supongamos que k cumple que $\lambda x \vee \lambda y \leq k$, entonces $\lambda x \leq k$ y $\lambda y \leq k$ por lo cual $x \leq \frac{k}{\lambda}$ y $y \leq \frac{k}{\lambda}$ para $\lambda > 0$. De lo anterior $x \vee y \leq \frac{k}{\lambda}$ y así $\lambda(x \vee y) \leq k$. Por lo tanto, $\lambda x \vee \lambda y = \lambda(x \vee y)$. El caso en que $\lambda = 0$ es evidente.

Usando una vez más el corolario 1.4.1,

$$\lambda x \wedge \lambda y = - [(-\lambda x) \vee (-\lambda y)] = -\lambda [(-x) \vee (-y)] = \lambda (x \wedge y).$$

Esto prueba lo afirmado. ■

Definición 1.4.2 Sea E un espacio de Riesz. Para $x \in E$, definimos:

- i) la *parte positiva* de x como $x \vee 0$ y la denotaremos por x^+ ,
- ii) la *parte negativa* de x como $(-x) \vee 0$ y la denotaremos por x^- ,
- iii) y el *módulo* de x , que se denota por $|x|$, como $x \vee -x$.

Observación: Notemos que del corolario 1.4.1, tenemos otra manera de calcular la parte positiva y la parte negativa para $x \in E$ es:

$$x^+ = - ((-x) \wedge 0) \quad y \quad x^- = - (x \wedge 0). \quad (1.3)$$

Lema 1.4.2 Sea E un espacio de Riesz. Para cada $x \in E$ se cumple lo siguiente:

- i) $x^+, x^- \in E^+$, además $x^+ = (-x)^-$, $x^- = (-x)^+$.
- ii) $x = x^+ - x^-$. Se cumple también que $x \geq 0$ si, y sólo si $x^- = 0$.
- iii) $|x| = x^+ + x^- \geq 0$.
- iv) $|x| = x$ si $x \geq 0$.
- v) $|x| = |-x|$.
- vi) $|\lambda x| = |\lambda||x|$, donde $|\lambda|$ es el valor absoluto de $\lambda \in \mathbb{R}$.
- vii) Sea $a \geq 0$. Entonces, $|x| \leq a$ si, y sólo si, $-a \leq x \leq a$.

Demostración: (i) Resultan directamente de la definición.

(ii) Tenemos que $x^+ - x = (x \vee 0) - x = 0 \vee (-x) = x^-$, entonces $x = x^+ - x^-$.

Supongamos que $x \geq 0$, entonces $-x \leq 0$; se sigue que $x^- = (-x) \vee 0 = 0$.

Supongamos ahora que $x^- = 0$, entonces $x = x^+ - x^- = x^+ - 0 = x^+ \geq 0$.

(iii) $|x| = x \vee (-x) = (2x \vee 0) - x = 2x^+ - (x^+ - x^-) = x^+ + x^-$.

(iv) Para $x \geq 0$ se cumple que $(-x) \leq 0$ y por tanto $|x| = x \vee (-x) = x$.

(v) $|x| = x \vee (-x)$. Por (i) del lema 1.2.2, $(-x) \vee x = (-x) \vee (-(x)) = |-x|$.

(vi) Dado que E es espacio vectorial, $(-\lambda)x = \lambda(-x) = (-\lambda)(x)$. Entonces $|\lambda||x| = |\lambda|(x \vee (-x)) = |\lambda|x \vee |\lambda|(-x)$. Luego, si $\lambda \geq 0$, obtenemos, $\lambda x \vee \lambda(-x) = |\lambda x|$.

Si $\lambda < 0$, entonces $|\lambda|x \vee |\lambda|(-x) = ((-\lambda)x) \vee ((-\lambda)(-x)) = (-\lambda x) \vee \lambda x = |\lambda x|$.

(vii) Tenemos que,

$$\begin{aligned} |x| \leq a &\iff x \vee (-x) \leq a \iff x \leq a, -x \leq a \\ &\iff x \leq a, -a \leq x \iff -a \leq x \leq a. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Lema 1.4.3 Sean E un espacio de Riesz y $x, y \in E$. Entonces,

- i) si $x \leq y$, entonces $x^+ \leq y^+$ y $y^- \leq x^-$.
- ii) Sea $\lambda \geq 0 \in \mathbb{R}$, entonces $(\lambda x)^+ = \lambda x^+$ y $(\lambda x)^- = \lambda x^-$.
- iii) $(x + y)^+ \leq x^+ + y^+$, $(x + y)^- \leq x^- + y^-$.
- iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$ y $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para cada $x, y \in E$.

Demostración: (i) Tenemos que $y^+ \geq y \geq x$. Puesto que $y^+ \geq 0$ y $y^+ \geq x$, se sigue que $y^+ \geq (x \vee 0) = x^+$.

Por otra parte, se cumple que $x^- \geq -x \geq -y$ y $x^- \geq 0$. De lo que resulta, $x^- \geq -y \vee 0 = y^-$.

(ii) Notemos que $(\lambda x)^+ = \lambda x \vee 0 = \lambda(x \vee 0) = \lambda x^+$ por el lema 1.4.1.

La otra prueba es análoga.

(iii) Tenemos que $x^+ + y^+ \geq x + y$. Además, $x^+ + y^+ \geq 0$. Por lo tanto $x^+ + y^+ \geq (x + y) \vee 0 = (x + y)^+$. Por otra parte, $x^- + y^- = (-x)^+ + (-y)^+ \geq (-x - y)^+ = (x + y)^-$.

(iv) $|x + y| = (x + y)^+ + (x + y)^- \leq x^+ + y^+ + x^- + y^- = |x| + |y|$.

Notemos que $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$, entonces $|x| - |y| \leq |x - y|$. Análogamente se prueba que $|y| - |x| \leq |x - y|$. Por lo tanto,

$$||x| - |y|| = (|x| - |y|) \vee (|y| - |x|) \leq |x - y|. \quad \blacksquare$$

Proposición 1.4.1 Sean E un espacio de Riesz y $a, b \in E$, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$a \vee b = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|), \quad (1.4)$$

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

Demostración: Queremos probar que $a \vee b = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.

Recordando que $|a - b| = (a - b) \vee (-(a - b))$ y utilizando el lema 1.4.1, con $z = a + b$, entonces

$$(a + b) + [(a - b) \vee (-(a - b))] = 2a \vee 2b = 2(a \vee b).$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ obtenemos el resultado.

Para probar la segunda igualdad haremos uso del corolario 1.4.1. Entonces,

$$\begin{aligned} (a + b) + (-1)[(a - b) \vee (-(a - b))] &= (a + b) + [(-(a - b)) \wedge (a - b)] \\ &= 2b \wedge 2a = 2(b \wedge a). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = a \wedge b$. ■

Corolario 1.4.2 Sea E un espacio de Riesz. Para cualesquiera $x, y \in E$, se cumple lo siguiente,

i) $x + y = (x \vee y) + (x \wedge y)$.

ii) $|x - y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$.

Demostración: Observemos que por la proposición anterior,

i) $(x \vee y) + (x \wedge y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) + \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) = x + y$.

ii) $(x \vee y) - (x \wedge y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) - \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) = |x - y|$. ■

Proposición 1.4.2 Sea E un espacio de Riesz y $A \subset E$ un conjunto no-vacío. Si $\sup A$ existe, entonces para cada $x \in E$,

$$\sup\{x \wedge a : a \in A\} = x \wedge \sup A \quad y \quad \sup\{x \vee a : a \in A\} = x \vee \sup A.$$

Similarmemente, si $\inf A$ existe, entonces para cada $x \in E$,

$$\inf\{x \vee a : a \in A\} = x \vee \inf A \quad y \quad \inf\{x \wedge a : a \in A\} = x \wedge \inf A.$$

Demostración: Fijemos $x \in E$ y sea $y = \sup A$. Claramente, $x \wedge a \leq x \wedge y$ para cada $a \in A$. Esto muestra que $x \wedge y$ es una cota superior del conjunto $\{x \wedge a : a \in A\}$.

Supongamos que $z \in E$ es otra cota superior de $\{x \wedge a : a \in A\}$. De acuerdo al corolario 1.4.2, para cada $a \in A$ se cumple que

$$a = (a \wedge x) + (a \vee x) - x \leq z + (x \vee y) - x.$$

De lo anterior resulta que $z + (x \vee y) - x$ es cota superior de A . Luego, ya que $y = \sup A$, se sigue que $y \leq z + (x \vee y) - x$.

Por lo tanto, $x \wedge y = x + y - (x \vee y) \leq z$. Así, $\sup\{x \wedge a : a \in A\} = x \wedge \sup A$ como se quería.

Por otra parte, ya que $y = \sup A$, se tiene que $x \vee a \leq x \vee y$ para cada $a \in A$. Así $x \vee y$ es una cota superior del conjunto $\{x \vee a : a \in A\}$.

Sea $s \in E$ otra cota superior de $\{x \vee a : a \in A\}$, entonces $x \vee a \leq s$ para cada $a \in A$. Se sigue que $x \leq s$ y $a \leq s$ para cada $a \in A$, debido a que $y = \sup A$, resulta que $x \leq s$ y $y \leq s$; lo que implica que $x \vee y \leq s$. Hemos probado que $x \vee y = \sup\{x \vee a : a \in A\}$ como se quería.

Probemos ahora lo correspondiente para $\inf A$.

Fijemos $x \in E$ y denotemos $w = \inf A$. Se cumple que $x \vee w$ es una cota inferior de $\{x \vee a : a \in A\}$ ya que $x \vee w \leq x \vee a$ para cada $a \in A$.

Sea u otra cota inferior de $\{x \vee a : a \in A\}$, entonces $u \leq x \vee a$ para cada $a \in A$. Usando lo anterior y el corolario 1.4.2, se tiene que $a = (x \vee a) + (x \wedge a) - x \geq u + (x \wedge w) - x$. Esto indica que $u + (x \wedge w) - x$ es cota inferior de A , por lo tanto $w \geq u + (x \wedge w) - x$, de lo que resulta,

$$(x \vee w) + (x \wedge w) = x + w \geq u + (x \wedge w).$$

Así, $x \vee w \geq u$. Se concluye que $\inf\{x \vee a : a \in A\} = x \vee \inf A$.

Resta ver que $\inf\{x \wedge a : a \in A\} = x \wedge w$.

Tenemos que $x \wedge w \leq x \wedge a$ para cada $a \in A$. Si t es otra cota inferior de $\{x \wedge a : a \in A\}$, entonces $t \leq x$ y $t \leq a$ para cada $a \in A$. Se cumple que $t \leq x$ y $t \leq w$, por lo cual $t \leq x \wedge w$. Lo que concluye la prueba. ■

En la proposición anterior $A \subset E$ era un subconjunto arbitrario. Notemos que si $A = \{y, z\}$, entonces se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.4.3 Sea E un espacio de Riesz. Para $x, y, z \in E$ se cumple,

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z) \quad y \quad (x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z).$$

1.5. Orden en \mathbb{R}^n

Ejemplo 1.5.1 Definamos en \mathbb{R}^n

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ si } x_k \leq y_k \text{ para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.5)$$

Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ y $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

- i) $x \leq x$ ya que $x_k \leq x_k$ para cada $k = 1, \dots, n$.
- ii) Supongamos que $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x_k \leq y_k$ y $y_k \leq x_k$ para cada $k = 1, \dots, n$. Por lo tanto, $x_k = y_k$ para cada $k = 1, \dots, n$.
- iii) Supongamos que $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x_k \leq y_k$ y $y_k \leq z_k$ para cada $k = 1, \dots, n$. Luego, $x_k \leq y_k \leq z_k$ para cada $k = 1, \dots, n$. Así $x \leq z$.

Esto verifica que (1.5) define un orden en \mathbb{R}^n . Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Veamos que

$$x \vee y = v, \text{ donde } v = (v_1, \dots, v_n) \text{ y } v_k = \max\{x_k, y_k\} \text{ para cada } k = 1, \dots, n.$$

Notemos que por definición de v , $x \leq v$ y $y \leq v$, i.e., v es cota superior de $\{x, y\}$. Sea w otra cota superior de $\{x, y\}$, entonces $x \leq w$ y $y \leq w$ lo que implica que $x_k \leq w_k$ y $y_k \leq w_k$ para cada $k = 1, \dots, n$. Por lo tanto $v_k = \max\{x_k, y_k\} \leq w_k$ para cada $k = 1, \dots, n$ y así $v \leq w$. Se concluye que $v = x \vee y$.

Además si $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ y $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ y $x \leq y$, entonces $x_k \leq y_k$ y así $x_k + z_k \leq y_k + z_k$. Luego si $0 \leq \alpha$ y $x \leq y$, $x_k \leq y_k$ y así $\alpha x_k \leq \alpha y_k$. Por lo tanto, $\alpha x \leq \alpha y$. Lo que prueba que \mathbb{R}^n es un espacio vectorial ordenado.

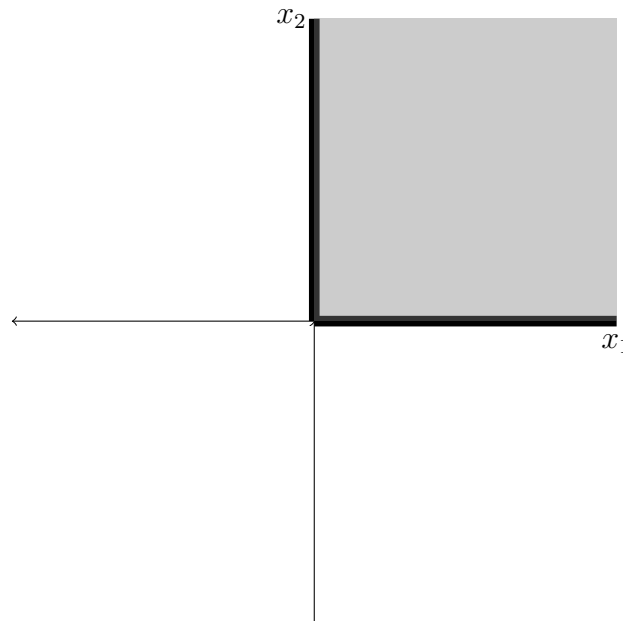


Figura 1. Cono positivo de \mathbb{R}^2 con el orden usual.

Lema 1.5.1 En \mathbb{R}^n se cumple:

$$i) (x_1, \dots, x_n)^+ = (x_1^+, \dots, x_n^+).$$

$$ii) (x_1, \dots, x_n)^- = (x_1^-, \dots, x_n^-).$$

$$iii) |(x_1, \dots, x_n)| = (|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Demostración: (i) $(x_1, \dots, x_n)^+ = (x_1, \dots, x_n) \vee 0 = (x_1 \vee 0, \dots, x_n \vee 0)$. Pero $x_k \vee 0 = x_k^+$ para cada $k = 1, \dots, n$. Por lo cual se concluye que $(x_1, \dots, x_n)^+ = (x_1^+, \dots, x_n^+)$.

(ii) $(x_1, \dots, x_n)^- = (-x_1, \dots, -x_n) \wedge 0 = ((-x_1) \vee 0, \dots, (-x_n) \vee 0)$. Como $(-x_k) \vee 0 = x_k^-$ para cada $k = 1, \dots, n$, entonces $(x_1, \dots, x_n)^- = (x_1^-, \dots, x_n^-)$.

(iii) $|(x_1, \dots, x_n)| = (x_1, \dots, x_n) \vee (-x_1, \dots, -x_n)$. Lo anterior es equivalente a $(x_1 \vee (-x_1), \dots, x_n \vee (-x_n)) = (|x_1|, \dots, |x_n|)$. ■

Definición 1.5.1 Un espacio vectorial ordenado E , tiene la *propiedad arquimediana*, si para $x, y \in E$ tales que $nx \leq y$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $x \leq 0$.

Lema 1.5.2 El espacio de Riesz \mathbb{R}^n tiene la propiedad arquimediana.

Demostración: Sean $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ con la propiedad de que $mx \leq y \forall m \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $i = 1, \dots, n$,

$$x_i \leq \frac{y_i}{m} \forall m \in \mathbb{N} \implies x_i \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} y_i \implies x_i \leq 0.$$

De lo anterior, $x \leq 0$. Por lo tanto \mathbb{R}^n es un espacio de Riesz arquimediano. ■

En seguida mostraremos que el *orden lexicográfico* no cumple la propiedad arquimediana.

1.6. Orden lexicográfico

Ejemplo 1.6.1 Sean $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Definimos,

$$x \leq y \quad \text{si} \quad x_1 < y_1 \quad \text{o bien} \quad x_1 = y_1 \text{ y } x_2 \leq y_2.$$

Veamos que lo anterior define un orden:

$$i) x \leq x \text{ ya que } x_1 = x_1 \text{ y } x_2 \leq x_2.$$

ii) Si $x, y \in \mathbb{R}^2$ cumplen que $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces

$$x_1 < y_1 \text{ o } (x_1 = y_1 \text{ y } x_2 \leq y_2) \text{ y } y_1 < x_1 \quad \text{o} \quad (y_1 = x_1 \text{ y } y_2 \leq x_2).$$

Tenemos los siguientes casos:

- $x_1 < y_1$ y $y_1 < x_1$, lo cual es una contradicción.
 - $x_1 < y_1$ y $(y_1 = x_1$ y $y_2 \leq x_2)$, similarmente es una contradicción.
 - $(y_1 = x_1$ y $x_2 \leq y_2)$ y $y_1 \leq x_1$, que también es una contradicción.
 - $(x_1 = y_1$ y $x_2 \leq y_2)$ y $(y_1 = x_1$ y $y_2 \leq x_2)$, entonces $x_1 = y_1, x_2 \leq y_2$ y $y_2 \leq x_2$. Lo que implica $x_1 = y_1$ y $x_2 = y_2$. Por lo tanto $x = y$.
- iii) Sea $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}$. Supongamos $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x_1 < y_1$ o $(x_1 = y_1$ y $x_2 \leq y_2)$ y $y_1 < z_1$ o $(y_1 = z_1$ y $y_2 \leq z_2)$.
- $x_1 < y_1$ y $y_1 < z_1$, entonces $x_1 < z_1$. Por lo tanto, $x \leq z$.
 - $x_1 < y_1$ y $(y_1 = z_1$ y $y_2 \leq z_2)$, entonces $x_1 < z_1$. Luego, $x \leq z$.
 - $(x_1 = y_1$ y $x_2 \leq y_2)$ y $y_1 < z_1$, entonces $x_1 < z_1$ y así $x \leq z$.
 - $(x_1 = y_1$ y $x_2 \leq y_2)$ y $(y_1 = z_1$ y $y_2 \leq z_2)$, entonces $x_1 = z_1$ y $x_2 \leq y_2 \leq z_2$. Por lo tanto, $x_1 = z_1$ y $x_2 \leq z_2$ lo que implica que $x \leq z$.

Lo anterior define un orden en \mathbb{R}^2 llamado el *orden lexicográfico* u *orden del diccionario*.

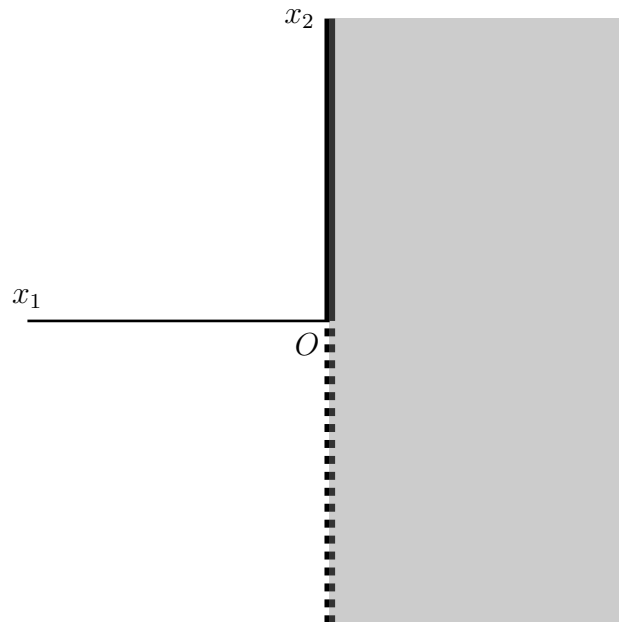


Figura 2. Cono positivo de \mathbb{R}^2 con el orden lexicográfico.

Recordemos que un orden parcial \leq en un conjunto E es un orden lineal si para todo $x, y \in E$ siempre ocurre que $x \leq y$ o $y \leq x$.

Lema 1.6.1 *El orden lexicográfico en \mathbb{R}^2 es un orden lineal.*

Demostración: Sean $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ en \mathbb{R}^2 . Por demostrar que $x \leq y$ o $y \leq x$. Por tricotomía de \mathbb{R} en las primeras coordenadas $x_1 < y_1$, $y < x$ o bien, $x = y$. Si $x_1 < y_1$, entonces $x \leq y$. Análogamente si $y_1 < x_1$, resulta que $y \leq x$. Ahora si $x_1 = y_1$, entonces nos fijamos en la segunda coordenada. Haciendo un razonamiento similar al anterior, si $x_2 \leq y_2$ se tiene que $x \leq y$. Similarmente, si $y_2 \leq x_2$, entonces $y \leq x$. Lo que prueba que el orden lexicográfico es un orden lineal en \mathbb{R}^2 . ■

Proposición 1.6.1 *Con el orden lexicográfico, \mathbb{R}^2 es un espacio de Riesz que no es arquimediano.*

Demostración: Sean $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x \leq y$. Entonces,

$$x_1 < y_1 \quad \circ \quad [x_1 = y_1 \text{ y } x_2 \leq y_2].$$

Si $x_1 < y_1$, entonces $x_1 + z_1 < y_1 + z_1$. por lo que $x + z \leq y + z$.

En caso de que $x_1 = y_1$ y $x_2 \leq y_2$ se cumple que $x_1 + z_1 = y_1 + z_1$ y $x_2 + z_2 \leq y_2 + z_2$. Es decir, $x + z \leq y + z$.

Supongamos que $x \leq y$. Para $\lambda \geq 0$, siempre se verifica, $[\lambda x_1 = \lambda y_1 \text{ y } \lambda x_2 \leq \lambda y_2]$ o $\lambda x_1 < \lambda y_1$. Entonces, \mathbb{R}^2 con el orden lexicográfico es un espacio vectorial ordenado.

Dado que el orden lexicográfico es un orden lineal, si $x, y \in \mathbb{R}^2$, entonces $x \vee y = \text{máx}\{x, y\}$. Por lo tanto, con el orden lexicográfico, \mathbb{R}^2 es un retículo. Y por lo tanto un espacio de Riesz.

Para probar que la propiedad arquimediana no se cumple en el orden lexicográfico, basta observar que:

$$n(0, 1) \leq (1, 0) \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ pero } (0, 1) \not\leq (0, 0). \quad \blacksquare$$

Observación: Notemos que si E es un espacio vectorial ordenado en el cual se cumple la propiedad arquimediana y $W \subset E$, entonces para cada $x, y \in W$ tal que $nx \leq y$ para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x \leq 0$. Es decir, con el orden heredado, la propiedad arquimediana se hereda a los subespacios de E .

1.7. Subretículos

Si E es un espacio de Riesz y $W \subset E$ un subespacio vectorial, entonces W hereda un orden a partir de E y en vista de la proposición 1.3.2 para saber si W es subespacio de Riesz bastará mostrar que existe $x \vee y$ para cada $x, y \in W$.

Definición 1.7.1 Un subconjunto A de un retículo M es un *subretículo* si $x, y \in A$ implica que $x \vee y$ y $x \wedge y \in A$. Un *subespacio de Riesz* es un subespacio vectorial que además es un subretículo.

Corolario 1.7.1 *Sea E un espacio de Riesz y W un subespacio vectorial de E . Son equivalentes:*

i) W es un subretículo

ii) $x \wedge y \in W, \forall x, y \in W$.

iii) $x \vee y \in W, \forall x, y \in W$

iv) $|x| \in W, \forall x \in W$

Demostración: (i) \implies (ii). Es evidente.

(ii) \implies (iii). Se sigue del lema 1.4.1.

(iii) \implies (iv). Sea $x \in W$. Como W es subespacio vectorial, $(-x) \in W$. Por lo tanto, $x \vee (-x) = |x| \in W$.

(iv) \implies (i). Supongamos que $|x| \in W, \forall x \in W$. Sean x y $y \in W$, entonces $x - y \in W$. Por la proposición 1.4.1 y la cerradura con la suma de W , se concluye que $x \vee y, x \wedge y \in W$. ■

Los siguientes ejemplos muestran distintas situaciones que presentan los subespacios de un espacio de Riesz, con el orden heredado.

Ejemplo 1.7.1 Consideremos \mathbb{R}^2 con su orden usual y $V \subset \mathbb{R}^2$ tal que $V = \{\lambda(-1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Los elementos del conjunto V son los puntos de la recta $y = -x$. De acuerdo al orden usual en \mathbb{R}^2 , los elementos $x = (\lambda_1, -\lambda_1), y = (\lambda_2, -\lambda_2) \in V$ cumplen que $x \leq y$ si y sólo si

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \text{ y } -\lambda_1 \leq -\lambda_2,$$

lo cual equivale a decir que $x = y$.

De lo anterior tenemos que si $x, y \in V$ tales que $x \neq y$, entonces $x \vee y$ no existe en V , ya que no podremos encontrar algún elemento $v_0 \in V$ tal que $x \leq v_0$ y $y \leq v_0$. Por lo tanto, V con el orden inducido no es un espacio de Riesz.

Ejemplo 1.7.2 Sea $E = \mathbb{R}^2$ con su orden lexicográfico. Si $V \subset E$ es un subespacio vectorial, entonces V es un subespacio de Riesz.

Se probó en el lema 1.6.1 que el orden lexicográfico es un orden lineal en \mathbb{R}^2 . Por lo tanto, si $V \subset E$ es un subespacio vectorial, entonces para cualquier par $x, y \in V$ se cumple que $x \vee y = \text{máx}\{x, y\} \in V$.

Capítulo 2

Espacios de Riesz formados por funciones

2.1. Orden en espacios de funciones

En lo consecuente, D y M serán conjuntos no-vacíos. Al conjunto de funciones $f : D \rightarrow M$ lo denotaremos por $F(D, M)$.

Sea M un conjunto ordenado, definamos en $F(D, M)$ el *orden puntual* como:

$$f \leq g \text{ si } f(x) \leq g(x), \forall x \in D. \quad (2.1)$$

Para cada $f \in F(D, M)$ y cada $x \in D$ se cumple que $f \leq f$ ya que $f(x) \leq f(x)$ para cada $x \in D$.

Si $f \leq g$ y $g \leq f$, entonces $f(x) \leq g(x)$ y $g(x) \leq f(x)$ para cada $x \in D$. Por lo tanto $f(x) = g(x)$ para cada $x \in D$, entonces $f = g$.

Si $f \leq g$ y $g \leq h$, entonces $f(x) \leq g(x)$ y $g(x) \leq h(x)$ para cada $x \in D$. Luego, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para cada $x \in D$, lo que implica que $f(x) \leq h(x)$ para cada $x \in D$ y así $f \leq h$.

Lo anterior prueba que $F(D, M)$ es un conjunto ordenado bajo el orden puntual.

Supongamos ahora que $M = E$ es un espacio vectorial ordenado. Entonces $F(D, E)$ es un espacio vectorial con las siguientes operaciones,

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), (\lambda f) := \lambda f(x), \forall x \in D \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

¿se cumplirá que con el orden puntual definido en (2.1) $F(D, E)$ es un orden vectorial?

Sean $f, g, h \in F(D, E)$ tales que $f \leq g$, entonces $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in D$, luego $f(x) + h(x) \leq g(x) + h(x)$ para cada $x \in D$ y así $f + h \leq g + h$.

De igual manera si $\lambda \geq 0$ y $f \leq g$, entonces $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in D$. Puesto que $\lambda \geq 0$, se cumple que $\lambda f(x) \leq \lambda g(x)$ para cada $x \in D$. Por lo tanto $\lambda f \leq \lambda g$.

Así $F(D, E)$ es un espacio vectorial ordenado.

Supongamos que M es un retículo. Sean f y $g \in F(D, M)$ y definamos $\phi : D \rightarrow M$ por $\phi(x) = f(x) \vee g(x)$. Veamos que $\phi = f \vee g$.

Dado que M es un retículo, $f(x) \vee g(x)$ siempre existe. Como $\phi(x) = f(x) \vee g(x)$, entonces $f(x) \leq \phi(x)$ y $g(x) \leq \phi(x)$.

Supongamos que $\eta \in F(D, M)$ tal que $f \leq \eta$ y $g \leq \eta$, entonces $f(x) \leq \eta(x)$ y $g(x) \leq \eta(x)$ y así $\phi(x) \leq \eta(x)$. Por lo tanto ϕ es la menor de las cotas superiores, por lo cual $\phi = f \vee g$.

Por lo tanto, $F(D, M)$ con el orden puntual es un retículo. Es decir, hemos probado lo siguiente:

$$f, g \in F(D, M) \implies (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x). \quad (2.3)$$

Resulta de aquí que cuando E es un espacio de Riesz, entonces $F(D, E)$ también es un espacio de Riesz.

Teorema 2.1.1 *Si E es un espacio de Riesz arquimediano, entonces $F(D, E)$ con el orden puntual es un espacio de Riesz arquimediano.*

Demostración: Sólo resta probar que en $F(D, E)$ se cumple la propiedad arquimediana. Sean $f, g \in F(D, E)$ tales que $nf \leq g$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si tomamos $x \in D$ arbitraria pero fija, entonces $nf(x) \leq g(x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como E es un espacio de Riesz arquimediano, entonces $f(x) \leq 0$ para todo $x \in D$ y por lo tanto $f \leq 0$ (donde 0 es la función cero en D). ■

Ejemplo 2.1.1 Recordemos que las *funciones afines* son las de la forma

$$f(x) = mx + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En el presente ejemplo, A denotará a las funciones afines definidas sobre $[-1, 1]$. Aunque en principio $A \subset C([-1, 1])$, veremos que el supremo en A puede variar con respecto al supremo en todo el retículo $C([-1, 1])$. De hecho, estableceremos que A es un retículo con el orden heredado. Sin embargo, A no es un subretículo de $C([-1, 1])$, como se apreciará enseguida. Por ejemplo, la parte positiva de la función identidad i en $C([-1, 1])$ esta definida por la siguiente función

$$i^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0], \\ x & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.4)$$

Claramente, i^+ no es una función afín. Mostraremos en este ejemplo que la parte positiva de i en A , es la función afín $x \rightarrow (x + 1)/2$ (ver la figura 1).

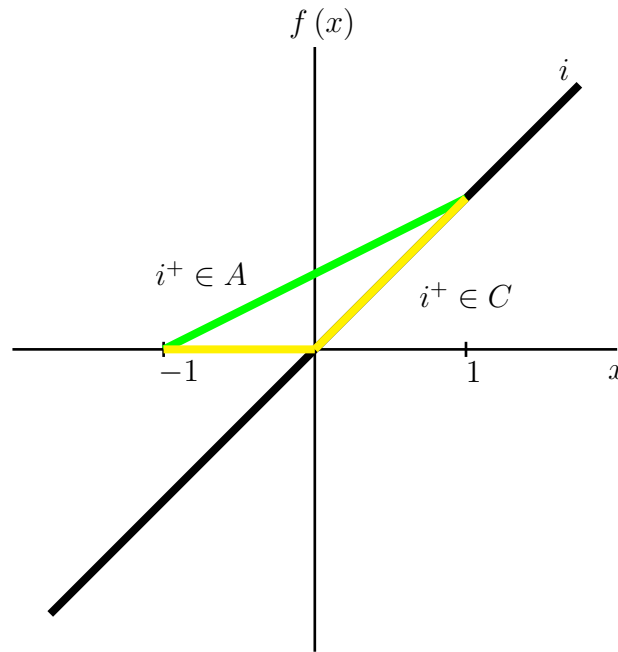


Figura 1. El supremo de i y 0 . En amarillo se muestra el supremo en $C([-1, 1])$ y en verde el supremo en A .

Proposición 2.1.1 Las funciones afines $A([-1, 1], \mathbb{R})$, con el orden puntual, forman un retículo.

Demostración: En lo siguiente $f \vee_A g$ denotará el supremo de f y g con respecto al espacio A mientras que $f \vee g$ será el supremo en $F(E)$.

Debemos probar que para cualesquiera f y $g \in A$, $f \vee_A g$ existe en A . Para ello, probemos que

$$f \leq g \iff f(-1) \leq g(-1) \text{ y } f(1) \leq g(1). \quad (2.5)$$

Tenemos que $f \leq g$, entonces $f(x) \leq g(x) \forall x \in [-1, 1]$ por lo cual $f(-1) \leq g(-1)$ y $f(1) \leq g(1)$.

Supongamos que $f(-1) \leq g(-1)$ y $f(1) \leq g(1)$. Sea $x \in (-1, 1)$, entonces tenemos que $x = \lambda(-1) + (1 - \lambda)(1)$ para $0 < \lambda < 1$, a saber, $\lambda = \frac{1-x}{2}$.

Expresemos a f y g como $f(x) = m_1x + b_1$ y $g(x) = m_2x + b_2$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= m_1(\lambda f(-1) + (1 - \lambda)f(1)) + b_1 \\ &= \lambda m_1 f(-1) + (1 - \lambda)m_1 f(1) + \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_1 \\ &= \lambda(m_1 f(-1) + b_1) + (1 - \lambda)(m_1 f(1) + b_1) \\ &\leq \lambda(m_2 g(-1) + b_2) + (1 - \lambda)(m_2 g(1) + b_2). \\ &= \lambda m_2 g(-1) + (1 - \lambda)m_2 g(1) + \lambda b_2 + (1 - \lambda)b_2 \\ &= m_2(\lambda g(-1) + (1 - \lambda)g(1)) + b_2 = g(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) \leq g(x)$ para $x \in [-1, 1]$.

Hemos probado una manera de determinar cuando una función es mayor que otra. Basado en ello, veamos que $f \vee_A g$ es la función afín cuya gráfica va del punto $\max\{f(-1), g(-1)\}$ al punto $\max\{f(1), g(1)\}$. Denotemos por h a $f \vee_A g$, entonces por (2.5), $f \leq h$ y $g \leq h$ por lo cual h es cota superior de $\{f, g\}$. Si existe h_0 tal que $f \leq h_0$ y $g \leq h_0$, en particular, $f(-1) \leq h_0(-1)$, $g(-1) \leq h_0(-1)$ y $f(1) \leq h_0(1)$, $g(1) \leq h_0(1)$. Es decir, $h \leq h_0$, por lo tanto se concluye que h existe. ■

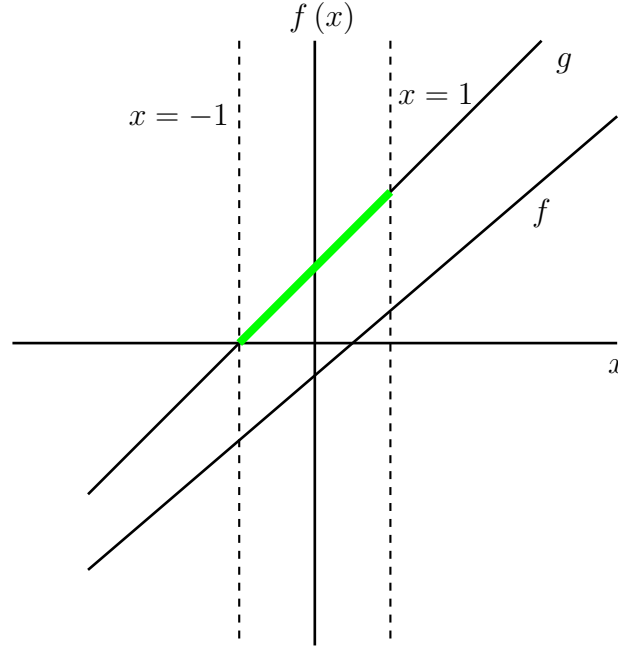


Figura 2. Se muestra el caso en que el supremo en A y en $C(-1, 1)$ coinciden.

Ejemplo 2.1.2 Denotemos por \mathcal{P} al espacio de funciones polinomiales en el intervalo $[-1, 1]$. Es sencillo verificar que el conjunto de polinomios \mathcal{P} es un espacio vectorial. Además tenemos que $\mathcal{P} \subset C([-1, 1])$ por lo que \mathcal{P} hereda un orden a partir de $C([-1, 1])$. Veamos que \mathcal{P} es un subespacio vectorial ordenado que no es un subespacio de Riesz.

Consideremos $i \in \mathcal{P}$ como la función identidad, entonces la parte positiva de la función identidad sobre $[-1, 1]$ no es elemento de \mathcal{P} , es decir, $i^+ = i \vee 0 \notin \mathcal{P}$.

Demostración: Convendremos que $\vee_{\mathcal{P}}$ denotará el supremo en \mathcal{P} y \vee_C el supremo en $C([-1, 1])$ respectivamente.

Supongamos que existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p = i \vee_{\mathcal{P}} 0$, entonces

- i) $i \leq p$ y $0 \leq p$,
- ii) Si existe $q \in \mathcal{P}$ tal que $i \leq q$ y $0 \leq q$, entonces $p \leq q$.

Por el teorema de aproximación de Weierstrass, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $p_n \in \mathcal{P}$ tal que $|i \vee_C 0(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ para cada $x \in [-1, 1]$.

Lo anterior es equivalente a,

$$-\frac{1}{n} \leq i \vee_C 0(x) - p_n(x) \leq \frac{1}{n}, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Entonces,

$$i \vee_C 0(x) \leq p_n(x) + \frac{1}{n}, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Sea $x \in [-1, 1]$ arbitrario pero fijo. Si $n \rightarrow \infty$, resulta que $i \vee_C \leq p_n(x)$. Notemos que p_n es un polinomio que cumple,

i) $0 \leq p_n$,

ii) $i \leq p_n$.

Por las propiedades del supremo, debe ocurrir que $i \vee_{\mathcal{P}} 0 \leq i \vee_C 0$.

Por otra parte, $p = i \vee_{\mathcal{P}} 0$ es un polinomio en \mathcal{P} por lo que también es una función continua. Entonces,

i) $0 \leq i \vee_{\mathcal{P}} 0$,

ii) $i \leq i \vee_{\mathcal{P}} 0$,

lo que implica que $i \vee_C 0 \leq i \vee_{\mathcal{P}} 0$.

Por lo tanto, tendríamos que $i \vee_C 0 = i \vee_{\mathcal{P}} 0$. Es decir, estaríamos diciendo que $i \vee_C 0 \in \mathcal{P}$, pero por (2.4) del ejemplo 2.1.1 sabemos que $i \vee_C 0$ no es un polinomio. ■

2.2. El espacio de Riesz $F(D, \mathbb{R}^n)$

Al inicio de la sección definimos el orden puntual en el conjunto de funciones $F(D, M)$ donde D es un conjunto no-vacío y M es un conjunto ordenado arbitrario. En la presente subsección estudiaremos algunos subtítulos en el caso en que $M = \mathbb{R}^n$.

Proposición 2.2.1 Sea $A \subset F(D, \mathbb{R}^n)$ no-vacío. Entonces, A tiene supremo si, y sólo si, $R_x = \{f(x) : f \in A\}$ tiene supremo para cada $x \in D$. Además, se cumple que $(\sup A)(x) = \sup R_x$.

Demostración: (\implies) Supongamos que existe $h \in F(D, \mathbb{R}^n)$ tal que $h = \sup A$. Fijemos $x \in D$ y probemos que $h(x) = \sup R_x$.

Tenemos que $h(x) \geq f(x)$, $\forall f \in A$, esto es, $h(x)$ es una cota superior de R_x .

Supongamos que $y \in \mathbb{R}^n$ es otra cota superior de R_x , entonces $y \geq f(x)$, $\forall f \in A$. Definamos $g \in F(D, \mathbb{R}^n)$ como sigue

$$g(u) = \begin{cases} h(u), & \text{si } u \neq x \\ y, & \text{si } u = x. \end{cases}$$

Notemos que $y = g(x) \geq h(x)$ y $g \geq f, \forall f \in A$. Como $h = \sup A$, se sigue que $g \geq h$. Por lo tanto, $g(x) \geq h(x)$, lo que implica que $h(x) = \sup R_x$.

(\Leftarrow) Supongamos ahora que $h(x) = \sup R_x$ para cada $x \in D$. Veamos que $h = \sup A$.

Como $h(x) \geq f(x), \forall f \in A, \forall x \in D$, entonces $h \geq f, \forall f \in A$ y por lo tanto h es una cota superior de A .

Sea h_0 otra cota superior de A . Tenemos que $h_0 \geq f, \forall f \in A$, lo que implica que $h_0(x) \geq f(x), \forall f \in A, \forall x \in D$. Por hipótesis, $h(x) = \sup R_x$, entonces $h_0(x) \geq h(x) \forall f \in A, \forall x \in D$. Llegamos a que $h_0 \geq h$. Esto prueba que $h = \sup A$. ■

En adelante tomaremos $F(D) := F(D, \mathbb{R})$. Por el teorema 2.1.1, $F(D)$ es un espacio de Riesz arquimediano.

Lema 2.2.1 Si $f \in F(D)$, entonces el módulo de $f \in F(D)$ como espacio de Riesz coincide con la función valor absoluto.

Demostración: Recordemos que el módulo de f en el espacio de Riesz $F(D)$ se define como $|f|_{F(D)} = f \vee (-f)$. Sea $x \in D$, entonces $|f|_{F(D)}(x) = f(x) \vee (-f(x)) = |f|(x)$ debido a que $f(x) \in \mathbb{R}$ y \mathbb{R} es un retículo. ■

2.2.1. El subespacio de Riesz $B(D, \mathbb{R}^n)$

Recordemos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es *acotado* si existe $K > 0$ tal que,

$$\|a\| \leq K, \forall a \in A,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana. Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *acotada* si su imagen $f(D)$ es un conjunto acotado.

A continuación mostraremos que el conjunto de funciones acotadas, denotado por $B(D, \mathbb{R}^n)$, es un subespacio de Riesz de $F(D, \mathbb{R}^n)$.

Ya que $B(D, \mathbb{R}^n)$ es cerrado con la suma y el producto por escalares, se sigue que $B(D, \mathbb{R}^n)$ es un subespacio vectorial de $F(D, \mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, con respecto al orden puntual, las funciones acotadas son un subespacio vectorial ordenado. De acuerdo con el corolario 1.7.1 para ver que $B(D, \mathbb{R}^n)$ es un subretículo basta probar que $f \vee g$ es una función acotada para cada par $f, g \in B(D, \mathbb{R}^n)$.

Sean $f, g \in B(D, \mathbb{R}^n)$. Denotemos, $\phi = f \vee g$ y verifiquemos que $\phi \in B(D, \mathbb{R}^n)$. Para ello, expresemos f y g como: $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ y $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$.

Como $f, g \in B(D, \mathbb{R}^n)$ existen números reales $k_1, k_2 \geq 0$ tales que $\|f(x)\| \leq k_1$ y $\|g(x)\| \leq k_2$ para cada $x \in D$. Sea $x \in D$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\| \phi(x) \| &= \| (f_1(x) \vee g_1(x), \dots, f_n(x) \vee g_n(x)) \|, \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i(x) \vee g_i(x)|^2}, \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (|f_i(x)|^2 + |g_i(x)|^2)}, \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |g_i(x)|^2}, \\
&= \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq k_1 + k_2.
\end{aligned}$$

Es decir, $\|\phi(x)\| \leq k_3$, donde $k_3 = k_1 + k_2$. Por lo tanto ϕ es una función acotada. En consecuencia, las funciones acotadas con el orden puntual forman un espacio de Riesz.

Proposición 2.2.2 Bajo el orden puntual, $B(D, \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Riesz arquimediano.

Demostración: La demostración es inmediata dado que $B(D, \mathbb{R}^n) \subset F(D, \mathbb{R}^n)$ el cual es un espacio de Riesz arquimediano. ■

Para cada $f \in F(D, \mathbb{R}^n)$, definimos

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| : x \in D\}. \quad (2.6)$$

Notemos que $\|f\|_\infty < \infty$ si, y sólo si, f es acotada.

Proposición 2.2.3 La función definida en (2.6) es una norma en $B(D, \mathbb{R}^n)$ y la llamaremos *la norma del supremo*.

Demostración: Sea $x \in D$. Como $\|f(x)\| \geq 0$, se sigue que $\|f\|_\infty \geq 0$.

Observemos que $\|f\|_\infty = 0$ si, y sólo si, $\sup\{\|f(x)\| : x \in D\} = 0$ si, y sólo si, $\|f(x)\| = 0, \forall x \in D$ si, y sólo si, $f = 0$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_\infty &= \sup\{\|\lambda f(x)\| : x \in D\} = \sup\{|\lambda| \|f(x)\| : x \in D\} \\
&= |\lambda| \sup\{\|f(x)\| : x \in D\} = |\lambda| \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Sean f y $g \in B(D, \mathbb{R}^n)$. Se cumple que:

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_\infty &= \sup\{\|(f + g)(x)\| : x \in D\} \\
&= \sup\{\|f(x) + g(x)\| : x \in D\} \\
&\leq \sup\{\|f(x)\| : x \in D\} + \sup\{\|g(x)\| : x \in D\} \\
&= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|\cdot\|$, define una norma en $B(D, \mathbb{R}^n)$. ■

Definición 2.2.1 Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\} \subset X$ una sucesión.

- i) Diremos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: si $n, m \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) \leq \epsilon$.
- ii) Diremos que X es *completo* si para cada sucesión de Cauchy $\{x_n\} \subset X$, se cumple que $\{x_n\}$ es convergente.

Recordemos que todo espacio normado se puede tratar como un espacio métrico con respecto a la métrica inducida por su norma, a saber,

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Definición 2.2.2 A un espacio normado X que es completo, lo llamaremos *espacio de Banach*.

Ejemplo 2.2.1 El espacio de funciones acotadas $B(D, \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach.

Demostración: Sea $\{f_n\} \subset B(D, \mathbb{R}^n)$ una sucesión de Cauchy. Queremos probar que existe $f \in B(D, \mathbb{R}^n)$ tal que $f_n \rightarrow f$.

Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N_\epsilon$, se cumple que $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\| \leq \epsilon$ para cada $x \in D$. Así, $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^n , y puesto que \mathbb{R}^n es completo, tenemos que existe $f \in F(D, \mathbb{R}^n)$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Por otro lado, si tomamos $\epsilon = 1$ en la definición de sucesión de Cauchy, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq N$,

$$\|f_n\|_\infty = \|f_n - f_m + f_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_\infty + \|f_m\|_\infty \leq 1 + \|f_m\|,$$

esto es, si tomamos $M \geq \max\{\|f_1\|, \dots, \|f_{N-1}\|, 1 + \|f_N\|\}$, se cumple que $\|f_n\| \leq M$. Por lo tanto, $\|f_n(x)\| \leq \|f_n\|_\infty \leq M$ para cada $x \in D$. Haciendo $n \rightarrow \infty$ y teniendo en cuenta que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ implica que $\|f_n(x)\| \rightarrow \|f(x)\|$, tenemos que $\|f(x)\| \leq M$, lo que indica que $f \in B(D, \mathbb{R}^n)$.

Ahora, sea $\epsilon > 0$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq N$, se cumple

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \epsilon \quad \text{para cada } x \in D,$$

fijando $m \in \mathbb{N}$ y haciendo $n \rightarrow \infty$, resulta que

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon \quad \text{para cada } x \in D.$$

Ya que $\|f_n - f\|_\infty$ es el supremo, se sigue que $\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon$, lo que concluye la prueba. ■

Definición 2.2.3 Sea E un espacio topológico y $D \subset E$. Diremos que D es denso en E si $\overline{D} = E$, donde \overline{D} denota la cerradura de D .

Lema 2.2.2 Sean X, Y dos espacios normados tal que Y es completo y $\psi : X \rightarrow Y$ es una isometría tal que $\psi(X)$ es denso en Y . Entonces ψ es sobreyectiva si, y sólo si, X es completo.

Demostración: (\implies) Supongamos que ψ es sobreyectiva y sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión de Cauchy. Dado que ψ es isometría, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ se cumple que,

$$\|x_n - x_m\| = \|\psi(x_n) - \psi(x_m)\| = \|y_n - y_m\| \leq \epsilon.$$

Esto indica que $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Luego, como Y es completo existe $y \in Y$ tal que $y_n \rightarrow y$ cuando $n \rightarrow \infty$. Usando que ψ es sobreyectiva, se sigue que existe $x \in X$ tal que $\psi(x) = y$. Entonces,

$$\|y_n - y\| = \|\psi(x_n) - \psi(x)\| = \|x_n - x\|.$$

Lo anterior prueba que $\{x_n\}$ es convergente. Se concluye que X es completo.

(\impliedby) Supongamos ahora que X es completo. Tomemos $y \in Y$. Usando que $\psi(X)$ es denso, se tiene que existe una sucesión $\{\psi(x_n)\} \subset Y$ tal que $\psi(x_n) \rightarrow y$ si $n \rightarrow \infty$. Además, $\{\psi(x_n)\}$ convergente implica que $\{\psi(x_n)\}$ es de Cauchy.

Luego, como ψ es isometría, tenemos $\|\psi(x_n) - \psi(x_m)\| = \|x_n - x_m\|$. La parte derecha indica que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Usando que X es completo, resulta que existe $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como ψ es una isometría, tenemos que ψ es continua. Así $\psi(x_n) \rightarrow \psi(x)$.

Por lo tanto, $\psi(x_n) \rightarrow y$ y $\psi(x_n) \rightarrow \psi(x)$, esto es, $\psi(x) = y$. Lo anterior implica que ψ es sobreyectiva. ■

2.2.2. Los subespacios de Riesz $C(X, \mathbb{R}^n)$ y $C(K)$

Dado un espacio topológico X , definimos $C(X, \mathbb{R}^n)$ como el conjunto de funciones $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ que son continuas.

Notemos que la función constante cero es continua. Por otra parte, si $f, g \in C(X, \mathbb{R}^n)$, entonces la función suma $f + g \in C(X, \mathbb{R}^n)$. Además, se cumple que si $f \in C(X, \mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la función $\lambda f \in C(X, \mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $C(X, \mathbb{R}^n)$ es un subespacio vectorial de $F(D, \mathbb{R}^n)$.

Como $C(X, \mathbb{R}^n) \subset F(D, \mathbb{R}^n)$, tenemos que el espacio de las funciones continuas $C(X, \mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial ordenado.

Lema 2.2.3 Si f es continua en un punto p , entonces $|f|$ también es continua en ese punto.

Demostración: Por la desigualdad del triángulo, se tiene

$$||f(x)| - |f(p)|| \leq |f(x) - f(p)|,$$

de donde el resultado es inmediato. ■

Proposición 2.2.4 El espacio de funciones $C(X, \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Riesz arquimediano.

Demostración: Para demostrar que las funciones continuas son un retículo basta probar que $|f| \in C(X, \mathbb{R}^n)$, $\forall f \in C(X, \mathbb{R}^n)$. Supongamos $f \in C(X, \mathbb{R}^n)$ y veamos que $|f|$ es continua. Para ello, supongamos $x \in X$ notemos que $|f(x)| = (|f_1(x)|, \dots, |f_n(x)|)$ donde cada $|f_i(x)| \in \mathbb{R}$. Así, utilizando el lema 2.2.3 y el corolario 1.7.1, concluimos que el conjunto de funciones $C(X, \mathbb{R}^n)$ es un retículo. Por lo tanto, $C(X, \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Riesz. ■

Observación: Sea $K = X$ un conjunto compacto no-vacío de Hausdorff, entonces dado que la compacidad se preserva bajo funciones continuas, tenemos que

$$C(K, \mathbb{R}^n) \subset B(K, \mathbb{R}^n) \subset F(K, \mathbb{R}^n).$$

Por lo tanto, las funciones continuas en un compacto K son también un subespacio de Riesz de $F(D, \mathbb{R})$.

En lo que sigue usaremos $C(K)$ para denotar $C(K, \mathbb{R})$. Por lo tanto, tenemos que $C(K) \subset B(K)$ por lo cual (en caso de que no se indique) en $C(K)$ usaremos la norma del supremo.

Ejemplo 2.2.2 El espacio de funciones $C(K, \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach.

Demostración: Sea $\{f_n\} \subset C(K, \mathbb{R}^n)$ una sucesión de Cauchy. Tomando en cuenta que $C(K, \mathbb{R}^n) \subset B(K, \mathbb{R}^n)$ y que $B(D, \mathbb{R}^n)$ es completo, se sigue que existe $f \in B(K, \mathbb{R}^n)$ tal que $f_n \rightarrow f$.

Resta probar que $f \in C(K, \mathbb{R}^n)$, es decir, f es continua.

Recordemos que dado $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_\epsilon$ se cumple que $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon$ para cada $x \in K$. Lo anterior indica que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f . Ya que cada f_n es continua y la convergencia uniforme es una condición suficiente para que f sea continua, concluimos que $C(K, \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach. ■

2.2.3. Espacios de sucesiones

Definición 2.2.4 Una *sucesión* x en un conjunto A es una función definida en el conjunto de los números naturales \mathbb{N} y cuyo rango está en A , es decir, $x : \mathbb{N} \rightarrow A$. Se acostumbra denotar a los valores de x como x_n en lugar de $x(n)$. Además la función x se suele denotar por $\{x_n\}$.

Al conjunto de todas las sucesiones en A lo denotaremos por $S(A)$. Así $S(A) = F(\mathbb{N}, A)$. De lo establecido en el inicio de la sección, tenemos que si E es un espacio de Riesz, entonces $F(\mathbb{N}, E)$ es un espacio de Riesz. En particular, $S(\mathbb{R})$ es un espacio de Riesz.

Proposición 2.2.5 Sea E un espacio de Riesz. Bajo el orden puntual y las operaciones definidas en (2.2), $S(E)$ es un espacio de Riesz.

Demostración: La demostración se sigue del resultado anterior. Basta tomar $z_n := x_n \vee y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Definición 2.2.5 Definimos en $S(\mathbb{R})$ los siguientes conjuntos.

- i) Al conjunto de todas las sucesiones reales acotadas lo denotaremos por ℓ_∞ . Notemos que $\ell_\infty = B(\mathbb{N})$, por lo que en ℓ_∞ definiremos la norma del supremo como sigue. Sea $s \in \ell_\infty$, definimos

$$\|s\|_\infty := \sup\{|s_n| : n \in \mathbb{N}\} \quad (2.7)$$

- ii) Al conjunto de todas las sucesiones reales que son convergentes lo denotaremos por c .
- iii) Al conjunto de todas las sucesiones reales que son convergentes a cero lo denotaremos por c_0 .
- iv) Denotaremos por c_{00} al conjunto de sucesiones cuyos términos son cero a partir de cierto índice.

Los conjuntos anteriores se relacionan de la siguiente manera:

$$c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty.$$

Ya que $\ell_\infty \subset S(\mathbb{R})$, entonces ℓ_∞ con las operaciones definidas anteriormente y el orden puntual cumple todo lo que probamos para $S(\mathbb{R}) = F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Luego, $\ell_\infty = B(\mathbb{N})$ es un espacio de Riesz.

Ejemplo 2.2.3 Los espacios c_{00} , c_0 y c son subespacios de Riesz en ℓ_∞ .

Demostración: (i) Es claro que la sucesión constante cero es elemento de c_{00} . Sean $x, y \in c_{00}$, entonces existen $N_x, N_y \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_x$ y $n \geq N_y$ implican que $x_n = 0$ y $y_n = 0$. Notemos que $x_n + y_n = 0$ para cada $n \geq N = \max\{N_x, N_y\}$.

Sean $x \in c_{00}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Ya que $x \in c_{00}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ se cumple que $x_n = 0$. Claramente $\lambda x_n = 0$ para cada $n \geq N$, se sigue que $\lambda x \in c_{00}$.

Mostremos ahora que c_{00} es un espacio de Riesz. Tomemos $x, y \in c_{00}$. Ya que trabajamos en $S(\mathbb{R})$, recordemos que $(x \vee y)_n = \max\{x_n, y_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ por lo que $(x \vee y)_n = 0$ para cada $n \geq N = \max\{N_x, N_y\}$. Por lo tanto $x \vee y \in c_{00}$.

(ii) El espacio c_0 es un subespacio de Riesz de ℓ_∞ .

Claramente, la sucesión constante $0 \in c_0$.

Sabemos que si $\{x_n\}$ y $\{y_n\} \in c_0$, entonces $\{x_n + y_n\} \rightarrow 0$, es decir, $\{x_n + y_n\} \in c_0$. Similarmente, para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\{x_n\} \in c_0$ se cumple que $\{\lambda x_n\} \rightarrow 0$, por lo cual $\{\lambda x_n\} \in c_0$.

Luego, c_0 es un subespacio vectorial ordenado con el orden heredado de $S(\mathbb{R})$.

Resta probar que c_0 es retículo. Observemos que si $x = \{a_n\} \in c_0$, entonces $a_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto $|a_n| \rightarrow 0$.

En vista del teorema 1.7.1, c_0 es un retículo. Por lo tanto, c_0 es un subespacio de Riesz de ℓ_∞

(iii) La prueba de que c es un subespacio de Riesz de ℓ_∞ es análoga. ■

En el caso de sucesiones reales y con base en la proposición 2.2.1, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.2.1 *Sea $A \subset S(\mathbb{R})$ no-vacío. Entonces A tiene supremo si, y sólo si, el conjunto $\{x_n : x \in A\}$ tiene supremo para cada $n \in \mathbb{N}$. Igualmente, se cumple la siguiente igualdad:*

$$(\sup A)_n = \sup\{x_n : x \in A\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Capítulo 3

Ideales, bandas y átomos

3.1. Ideales

Definición 3.1.1 Sea E un espacio de Riesz. Un subespacio vectorial $J \subset E$ es un *ideal* en E si $y \in J, x \in E$ y $|x| \leq |y|$ implican que $x \in J$.

Se sigue de la definición anterior que si E es un espacio de Riesz, entonces $\{0\}$ y E mismo son ideales en E .

Lema 3.1.1 Sea E un espacio de Riesz y $J \subset E$. Si J es un ideal en E , entonces J es un subespacio de Riesz.

Demostración: Por el corolario 1.7.1, sólo tenemos que verificar que si $y \in J$, entonces $|y| \in J$.

Sabemos que $|y| \in E$ y que $||y|| = |y| \leq |y|$, por lo tanto $|y| \in J$. ■

El recíproco del lema anterior no necesariamente es cierto. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1.1 Sea $E = \mathbb{R}^2$ con su orden usual.

Tomemos a V como el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. Claramente $(0, 0) \in V$. Sean $u = (x, x)$ y $v = (y, y) \in V$, entonces $\lambda u + v \in V$ ya que $\lambda u + v = (\lambda x + y, \lambda x + y)$.

Además V es ordenado con el orden heredado de \mathbb{R}^2 . Por lo tanto, $u \vee v = \text{máx}\{u, v\}$. Se concluye que V es un subespacio de Riesz.

Para probar que V no es un ideal, tomemos el vector $(3, 2) \in \mathbb{R}^2$ y el vector $(5, 5) \in V$, entonces se cumple que $|(3, 2)| \leq |(5, 5)|$ pero $(3, 2) \notin V$.

Ejemplo 3.1.2 En $S(\mathbb{R})$ tenemos los siguientes ejemplos:

- i) En la sección anterior vimos que c_{00} es un espacio vectorial. Ahora veamos que c_{00} es un ideal en $S(\mathbb{R})$.

Sea $y \in S(\mathbb{R})$ tal que $|y| \leq |x|$ donde $x \in c_{00}$, entonces los términos de y cumplen que $y_n \leq |y_n| \leq 0$ a partir de algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $y \in c_{00}$.

ii) El conjunto c_0 es un ideal en $S(\mathbb{R})$.

Ya probamos en el ejemplo 2.2.3 que c_0 es un espacio vectorial. Sean $\{y_n\} \in c_0$ y $\{x_n\} \in \ell_\infty$ tales que $|x_n| \leq |y_n|$. Como $y_n \rightarrow 0$, entonces $|y_n| \rightarrow 0$ y así $x_n \rightarrow 0$.

iii) Por otra parte, c es un subespacio de Riesz de ℓ_∞ que no es un ideal en ℓ_∞ .

Basta ver que la sucesión $(-1)^n \in \ell_\infty$, $(1)^n \in c$ y $|(-1)^n| \leq |(1)^n|$ pero $(-1)^n$ no es convergente, es decir, $(-1)^n \notin c$.

iv) El conjunto ℓ_∞ es un ideal en $S(\mathbb{R})$.

Al igual que en (i), en la sección anterior vimos que ℓ_∞ es un espacio de Riesz. Sea $\{y_n\} \subset S(\mathbb{R})$ y $\{x_n\} \subset \ell_\infty$ tales que $|y_n| \leq |x_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $C > 0$ tal que, $|y_n| \leq |x_n| \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\{y_n\} \subset \ell_\infty$.

Lema 3.1.2 Sea E un espacio de Riesz y J_i un ideal para cada $i \in I \neq \emptyset$. Entonces, $\bigcap J_i$ es también un ideal.

Demostración: Sabemos que la intersección de espacios vectoriales es un espacio vectorial.

Además para cualquier $y \in \bigcap J_i$ se cumple que $y \in J_i$ para cada $i \in I$. Ya que cada J_i es un ideal, si existe $x \in E$ tal que $|x| \leq |y|$, entonces $x \in J_i$ para cada $i \in I$. Por lo tanto $\bigcap J_i$ es un ideal. ■

Definición 3.1.2 Sea E un espacio de Riesz y $A \subset E$. Definimos el *ideal generado* por A como

$$J_A := \bigcap_{i \in I} J_i,$$

donde $A \subset J_i$ y J_i es un ideal para cada $i \in I$. Observemos que J_A es el ideal más pequeño que contiene a A .

Definición 3.1.3 Sea E un espacio de Riesz. Un *ideal principal* es un ideal generado por un conjunto $A = \{x\} \subset E$ y se denotará por J_x . Si $x > 0$ y $J_x = E$, entonces diremos que x es una *unidad reticular fuerte* para E .

Lema 3.1.3 Sea E un espacio de Riesz y $x \in E$. Entonces,

$$J_x = \{a \in E : |a| \leq n|x| \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

De lo anterior, tenemos que $J_x = J_{|x|}$.

Demostración: Como $|x| \geq 0$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $|0| \leq n|x|$ por lo que $0 \in J_x$.

Sean $a, b \in J_x$, tenemos lo siguiente, $|a| \leq n_1|x|$ y $|b| \leq n_2|x|$ donde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Luego, $|a + b| \leq |a| + |b| \leq (n_1 + n_2)|x|$. Así $a + b \in J_x$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a \in J_x$. Se cumple que $|a| \leq n|x|$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \leq |\lambda| < n_0 + 1$. Por lo tanto $|\lambda a| = |\lambda||a| \leq (n_0 + 1)n|x|$.

Se concluye que J_x es un subespacio vectorial de E .

Sea $y \in E$ tal que para algún $x \in J_x$ se cumple que $|y| \leq |x|$, entonces $|y| \leq |x| \leq n|x|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $y \in J_x$. Por lo tanto, J_x es un ideal. ■

Proposición 3.1.1 *Sea E el espacio de Riesz definido por \mathbb{R}^n con su orden usual. Entonces $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una unidad fuerte si y sólo si $x_i > 0$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Demostración: (\implies) Supongamos que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una unidad fuerte en \mathbb{R}^n . Si $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, lo anterior implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|y| \leq n|x| = nx$. Tomando $y = (1, 1, \dots, 1)$, se debe cumplir que $1 \leq nx_i$ para cada $i \in 1, 2, \dots, n$. Por lo tanto $x_i \geq \frac{1}{n} > 0$ para cada $i \in 1, 2, \dots, n$.

(\impliedby) Supongamos ahora que $x_i > 0$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y consideremos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Sea $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, basta tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \max\{\frac{|y_1|}{x_1}, \frac{|y_2|}{x_2}, \dots, \frac{|y_n|}{x_n}\}$ para garantizar que $|y| \leq n|x|$. Lo que nos dice que x es una unidad fuerte en E . ■

Ejemplo 3.1.3 La función constante uno, denotada por 1, es una unidad reticular fuerte en el espacio de funciones acotadas $B(D)$.

Demostración: De acuerdo al lema 3.1.3, debemos probar la siguiente igualdad: $J_1 = \{f \in B(D) : |f| \leq n1\} = B(D)$.

Sea $f \in B(D)$, entonces existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$. Por lo tanto, basta tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $M \leq n$ para que $|f(x)| \leq n1$. Así $f \in J_1$. ■

Procediendo como en el ejemplo anterior se deduce el siguiente resultado.

Ejemplo 3.1.4 La sucesión constante uno es una unidad reticular fuerte en ℓ_∞ .

Observemos que en $S(\mathbb{R})$ la sucesión constante uno ya no es unidad fuerte. Lo anterior se deduce de que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \leq n1$, para cada $m \in \mathbb{N}$ donde $\{x_m\}$ está definida por $x_m = m^2$.

Ejemplo 3.1.5 El espacio c_0 no tiene unidades reticulares fuertes.

Demostración: Consideremos $c_0 = c_{00} \cup (c_0 \setminus c_{00})$. Notemos primero que ninguna sucesión en c_{00}^+ puede ser unidad fuerte en c_0 ya que para cualquier $x \in c_{00}^+$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq N$ se cumple que $x_n = 0$. Como contraejemplo podríamos poner a la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$, entonces no se cumple que $\frac{1}{N+1} \leq 0$.

Supongamos que existe $x \in c_0^+ \setminus c_{00}$ con la propiedad de ser unidad fuerte en c_0 . Como $x \in c_0^+ \setminus c_{00}$, podemos tomar una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ donde cada $x_{n_k} > 0$. Formemos la sucesión y como sigue:

$$y_n = \begin{cases} \sqrt{x_{n_k}}, & \text{si } n = n_k \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente, $y \in c_0$. Ya que x es unidad fuerte, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y \leq mx$, esto es $y_n \leq mx_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, $\sqrt{x_{n_k}} \leq mx_{n_k}$. Ya que $x_{n_k} > 0$, tenemos que $1 \leq m\sqrt{x_{n_k}}$ para cada $n = n_k$. Pero entonces ocurriría que $1 \leq 0$, lo cual es una contradicción. ■

Definición 3.1.4 Sea E un espacio de Riesz. Si e es una unidad reticular fuerte para E , definimos

$$\|x\|_e = \inf\{\lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda e\}.$$

Lema 3.1.4 Sean E un espacio de Riesz arquimediano y e una unidad reticular fuerte para E , entonces $\|x\|_e$ es una norma en E .

Demostración: Tenemos que $\|x\|_e \geq 0$ por definición. Luego, $\|0\|_e = \inf\{\lambda \geq 0 : |0| \leq \lambda e\} = 0$. Ahora, si $\inf\{\lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda e\} = 0$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\lambda \geq 0$ tal que $\lambda \leq \frac{1}{n}$ y $|x| \leq \frac{1}{n}e$. Por lo tanto, $n|x| \leq e$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ya que E es arquimediano, se sigue que $|x| \leq 0$ y así $x = 0$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Para $\alpha = 0$, es trivial que $\alpha\|x\| = \|\alpha x\|$. Consideremos el caso cuando $\alpha \neq 0$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} |\alpha|\|x\|_e &= |\alpha| \inf\{\lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda e\} = \inf\{|\alpha|\lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda e\}, \\ &= \inf\{t \geq 0 : |\alpha x| \leq \frac{t}{|\alpha|}e\}, \quad \text{para } t = |\alpha|\lambda; \\ &= \inf\{\lambda \geq 0 : |\alpha x| \leq \lambda e\} = \|\alpha x\|_e. \end{aligned}$$

De acuerdo al lema 1.4.2, $|x + y| \leq |x| + |y|$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $|x| \leq (\|x\|_e + \frac{1}{n})e$ y $|y| \leq (\|y\|_e + \frac{1}{n})e$. Entonces,

$$|x + y| \leq (\|x\|_e + \|y\|_e + \frac{2}{n})e, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego,

$$n(|x + y| - \|x\|_e e - \|y\|_e e) \leq 2e, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por la propiedad arquimediana de E ,

$$|x + y| \leq (\|x\|_e + \|y\|_e)e.$$

Por lo tanto,

$$\|x + y\|_e \leq \|x\|_e + \|y\|_e. \quad \blacksquare$$

A la función $\|\cdot\|_e$ se le conoce como la *norma reticular generada por e* . Notemos que si E no fuese arquimediano entonces la anterior sería sólo una seminorma.

Ejemplo 3.1.6 La norma del supremo sobre $C(K)$ es precisamente la norma reticular inducida por 1_K .

Demostración: Recordemos que, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : \forall x \in K\}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \inf\{\lambda \geq 0 : |f(x)| \leq \lambda, \forall x \in K\} \\ &= \inf\{\lambda \geq 0 : |f(x)| \leq \lambda 1, \forall x \in K\} \quad \blacksquare \\ &= \inf\{\lambda \geq 0 : |f| \leq \lambda 1, \} = \|f\|_K. \end{aligned}$$

Si consideramos $D = K$, donde K es un conjunto compacto y Hausdorff, entonces ya que $C(K) \subset B(K)$, se tiene que 1 es unidad fuerte en $C(K)$.

3.2. Bandas

Definición 3.2.1 Sea E un espacio de Riesz. Una *banda* en E es un ideal J con la propiedad de que si A es no-vacío, $A \subseteq J$ y x es el supremo de A en E entonces $x \in J$.

Ejemplo 3.2.1 Como primeros ejemplos tenemos que los conjuntos E y $\{0\}$ son ambos bandas en E .

Ejemplo 3.2.2 Si I es cualquier subconjunto de \mathbb{N} , entonces $\{x \in \ell_\infty : x_n = 0, \forall n \in I\}$ es una banda en ℓ_∞ .

Denotemos $J = \{x \in \ell_\infty : x_n = 0, \forall n \in I\}$. Primero probemos que J es un ideal en ℓ_∞ .

Sean $x, y \in J$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in I$ se cumple que $\lambda x_n + y_n = 0$. Entonces, $\lambda x + y \in J$. Por lo tanto, J es un subespacio vectorial de ℓ_∞ .

Supongamos que $y \in \ell_\infty$ es tal que $|y| \leq |x|$ para alguna sucesión $x \in J$, entonces $|y_n| \leq 0$ para cada $n \in I$. Se sigue que $y_n = 0$ para cada $n \in I$ y por lo tanto $y \in J$. Lo que prueba que J es un ideal en ℓ_∞ .

Probemos ahora que J es una banda. Supongamos que para $A \subset J$ existe $z \in \ell_\infty$ tal que $z = \sup A$. Queremos probar que $z \in J$, esto es, $z_n = 0$ para cada $n \in I$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Ya que $z = \sup A$, por la proposición 2.2.5 se sigue que $z_n = \sup\{x_n, \forall x \in A\}$. En particular, si $m \in I$ resulta

$$z_m = \sup\{x_m, \forall x \in A\} = 0,$$

es decir, $z_m = 0$ para cada $m \in I$ por lo cual $z \in A$. Se concluye que J es una banda.

Ejemplo 3.2.3 El ideal c_0 no es una banda en ℓ_∞ .

Denotemos por B_{c_0} a la bola unitaria en c_0 , que consta de todas las sucesiones $x \in c_0$ tales que $\|x\|_\infty \leq 1$. Denotaremos por e a la sucesión constante uno en ℓ_∞ . Dado $n \in \mathbb{N}$ definamos la sucesión e_n como sigue

$$e_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n \\ 0, & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

Observemos que $\|e_n\|_\infty \leq 1$ por lo cual $e_n \in B_{c_0}$. Si aplicamos lo anterior para cada $n \in \mathbb{N}$, resulta que $e_n \leq e$.

Por otra parte, sea y una sucesión arbitraria en B_{c_0} , se cumple que

$$y_n \leq |y_n| \leq \|y\|_\infty \leq 1. \quad (3.1)$$

Por lo tanto, e es una cota superior de B_{c_0} .

Supongamos que $w \in \ell_\infty$ es otra cota superior para B_{c_0} , entonces $w \geq e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $w_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $w \geq e$.

Hemos probado que $e = \sup B_{c_0}$, pero $e \notin B_{c_0}$ ya que e no converge a cero. Por lo tanto, B_{c_0} no es una banda en ℓ_∞ .

Proposición 3.2.1 Sean E un espacio de Riesz y B_i una banda en E para cada $i \in I \neq \emptyset$. Entonces,

$$B := \bigcap_{i \in I} B_i,$$

es una banda en E .

Demostración: Ya probamos que la intersección de ideales es un ideal. Sea $D \subset \bigcap B_i$ tal que existe $\sup D$, digamos $x = \sup D$. Tenemos que $D \subset B_i, \forall i \in I$. Ya que para cada $i \in I$, B_i es una banda, entonces $x \in B_i, \forall i \in I$. Por lo tanto, $x \in \bigcap B_i$. ■

Definición 3.2.2 Sea E un espacio de Riesz y $A \subset E$. La *banda generada* por A se define como

$$B_A := \bigcap_{i \in I} B_i,$$

donde $A \subset B_i$ y B_i es una banda para cada $i \in I$. Notemos que B_A es la banda más pequeña que contiene a A .

Definición 3.2.3 Sea E un espacio de Riesz. Una *banda principal* es aquella generada por un conjunto de la forma $A = \{x\}$, para algún $x \in E$; y la denotaremos por B_x . Si $x > 0$ y $B_x = E$, entonces diremos que x es una *unidad reticular débil* para E .

Ejemplo 3.2.4 Sea E un espacio de Riesz y $x \in E$. Si x es una unidad reticular fuerte para E , entonces x es también una unidad reticular débil.

Demostración: Sea B una banda en E que contiene a x . Entonces B es un ideal que contiene a x . Se sigue que $J_x \subset B$. Ya que x es una unidad reticular fuerte, tenemos que $B = E$. Por lo tanto, x es una unidad reticular débil. ■

Definición 3.2.4 Sea E un espacio de Riesz y $\{x_n\} \subset E$ una sucesión.

i) Diremos que $\{x_n\}$ es *creciente* si $x_n \leq x_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En caso de que $x_{n+1} \leq x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, diremos que $\{x_n\}$ es *decreciente*. Los casos anteriores los denotaremos por $x_n \uparrow$ y $x_n \downarrow$ respectivamente.

ii) Denotaremos por $x_n \uparrow z$ cuando $x_n \uparrow$ y exista $z \in E$ tal que $z = \sup x_n$.

Lema 3.2.1 (i) Sean A y B subconjuntos no-vacíos de J^+ tales que $a_0 = \sup A$ y $b_0 = \sup B$, entonces $a_0 + b_0 = \sup(A + B)$, donde $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

(ii) Sea A un conjunto no-vacío tal que $a_0 = \sup A$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\sup\{\lambda a : a \in A\} = \lambda \sup A$.

Demostración: (i) Claramente $a_0 + b_0$ es cota superior de $A + B$. Supongamos que α es otra cota superior de $A + B$. Se cumple que $a + b \leq \alpha$ para cada $a \in A$ y $b \in B$. Tomemos $b \in B$ arbitrario pero fijo, entonces de la desigualdad anterior tenemos que $a \leq \alpha - b$. Por lo tanto, como $a_0 = \sup A$, se sigue que $a_0 \leq \alpha - b$, lo que implica que $b \leq \alpha - a_0$ para cada $b \in B$. Ya que $b_0 = \sup B$, resulta que $b_0 \leq \alpha - a_0$, esto es, $a_0 + b_0 \leq \alpha$.

(i) Como $\lambda > 0$, se cumple que $\lambda a \leq \lambda a_0$ para cada $a \in A$, lo que indica que λa_0 es cota superior de λA . Sea α otra cota superior de λA , entonces $\lambda a \leq \alpha$ para cada $\lambda a \in \lambda A$. Tomemos $\lambda a \in \lambda A$ arbitrario pero fijo, ya que $\lambda > 0$, resulta que $a \leq \frac{\alpha}{\lambda}$. Luego, recordando que $a_0 = \sup A$, se tiene que $a_0 \leq \frac{\alpha}{\lambda}$. Por lo tanto, $\lambda a_0 \leq \alpha$. ■

Teorema 3.2.1 La banda B_J generada por un ideal J en un espacio de Riesz E consiste de todos los elementos $x \in E$ que satisfacen

$$|x| = \sup D \text{ para algún subconjunto no-vacío } D \subset J^+, \quad (3.2)$$

o equivalentemente,

$$|x| = \sup\{u : u \in J, 0 \leq u \leq |x|\}. \quad (3.3)$$

Demostración: Veamos primero que los elementos que satisfacen (3.2) son los mismos que satisfacen(3.3).

Sea $x \in E$. Claramente, si x satisface (3.3), entonces dado que $0 \leq d$ para cada $d \in D$, se sigue que satisface (3.2).

Supongamos ahora que x cumple (3.2). Debemos probar que x cumple (3.3). Sea $z \in E$ una cota superior de $\{u \in J : 0 \leq u \leq |x|\}$. Ya que $D \subset \{u \in J : 0 \leq u \leq |x|\}$, entonces z es cota superior de D . Por lo tanto, $z \geq |x|$. Por otro lado, $|x|$ es una cota

superior de $\{u \in J : 0 \leq u \leq |x|\}$, lo que implica que $|x| = \sup\{u \in J : 0 \leq u \leq |x|\}$. Así, se cumple (3.3).

Denotemos por B_0 al conjunto de todas las $x \in E$ que satisfacen (3.2) y (3.3). Queremos probar que el conjunto $B_0 = B_J$.

De la definición de banda, se sigue que $B_0 \subset B_J$. Resta establecer que $B_J \subset B_0$. Ya que $J \subset B_0$, bastará probar que B_0 es una banda. Probemos primero que B_0 es un subespacio vectorial de E .

Sean $x_1, x_2 \in B_0$ y D_1, D_2 subconjuntos no-vacíos de J^+ tales que $|x_1| = \sup D_1$ y $|x_2| = \sup D_2$. Entonces, por el lema anterior, $(D_1 + D_2) \subset J^+$ tiene a $|x_1| + |x_2|$ como su supremo. Aplicando la proposición 1.4.2, tenemos que,

$$\sup\{|x_1 + x_2| \wedge (d_1 + d_2) : d_1 \in D_1, d_2 \in D_2\},$$

es igual a,

$$|x_1 + x_2| \wedge (|x_1| + |x_2|) = |x_1 + x_2|.$$

Por otro lado,

$$\sup\{|\lambda|d_1 : d_1 \in D\} = |\lambda||x_1| = |\lambda x_1|, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esto muestra que B_0 es un espacio vectorial de E .

Además, si $|y| \leq |x_1|$, entonces $|y| \wedge d_1 \in J^+$ para cada $d_1 \in D_1$. Usando una vez más la proposición 1.4.2, tenemos que $\sup\{|y| \wedge d_1 : d_1 \in D_1\} = |y| \wedge |x_1| = |y|$. Esto es, $y \in B_0$, lo que indica que B_0 es un ideal.

Finalmente para probar que B_0 es una banda, debemos probar que si D es un subconjunto no-vacío de B_0^+ tal que $u_0 = \sup D$ en E , entonces $u_0 \in B_0$.

Para cualquier $u \in D$ tenemos que $u = \sup\{v : v \in J, 0 \leq v \leq u\}$, se sigue que

$$\begin{aligned} u_0 &= \sup_{u \in D} \{\sup\{v : v \in J, 0 \leq v \leq u\}\} \\ &= \sup\{v : v \in J, 0 \leq v \leq u, \text{ para cualquier } u \in D\}. \end{aligned}$$

De acuerdo con (3.2), tenemos que $u_0 \in B_0$, lo que concluye la prueba. ■

Corolario 3.2.1 *Sea E un espacio de Riesz y $x \in E$, entonces $B_x = B_{J_x}$.*

Demostración: (⊂) Notemos que $\{x\} \subset J_x$, por lo tanto $B_x \subset B_{J_x}$.

(⊃) Por definición de banda, se cumple que B_x es un ideal que contiene a x . Luego, $J_x \subset B_x$. Por lo tanto, ya que B_{J_x} es la banda más pequeña que contiene a J_x , resulta que $B_{J_x} \subset B_x$. ■

Teorema 3.2.2 *Sea E un espacio de Riesz. Entonces $x > 0$ es una unidad débil en E si, sólo si, para cada $y \in E^+$ se cumple que $y \wedge nx \uparrow y$.*

Demostración: (\implies) Supongamos que x es una unidad débil. Sea $y \in E^+$. Por el corolario anterior, tenemos que $E = B_x = B_{J_x}$. El teorema 3.2.1 nos dice que $y = \sup\{u \in J_x : 0 \leq u \leq y\}$. Probaremos que $A = \{u \in J_x : 0 \leq u \leq y\}$ y $B = \{y \wedge nx : n \in \mathbb{N}\}$ tienen las mismas cotas superiores. Dado que $B \subset A$, se cumple que cualquier cota superior de A es una cota de B .

Sea $w \in A$, denotemos por $S_w = \{z : z \in J_x, 0 \leq z \leq w\}$, entonces por el teorema 3.2.1 $w = \sup S_w$. Cualquier $z \in S_w$ satisface que $z \leq nx$ para algún $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $0 \leq z \leq y$ y $0 \leq z \leq nx$; lo que implica que $z \leq y \wedge nx$. Por lo tanto, si s es una cota superior de B , se cumple que s es una cota superior de todos los $z \in S_w$. Así, $s \geq w$. Esto se cumple para cada $w \in A$, lo que indica que s es cota superior de A . Entonces cada cota superior de B es una cota superior de A . Así, A y B tienen las mismas cotas superiores, en particular $\sup A$ existe si, y sólo si $\sup B$ existe, esto es, $\sup A = y = \sup B$.

(\impliedby) Queremos probar que $B_x = E$.

Recordemos que $E = E^+ - E^-$. Además, un ideal siempre es un espacio vectorial, por lo cual bastará probar que $E^+ \subset B_x$.

Sea $y \in E^+$. Tenemos que $y \wedge nx \leq nx$, entonces cada término de la sucesión está en $J_x \subset B_x$. Luego, como $y \wedge nx \uparrow y$ y una banda siempre es cerrada con respecto al supremo de subconjuntos, se sigue que $y \in B_x$. Por lo tanto, x es una unidad débil en E . ■

Ejemplo 3.2.5 Sea $s \in c_0$. Entonces s es una unidad débil si, y sólo si, $s_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: (\implies) Probaremos por contrarrecíproca.

Supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s_m \not> 0$. Puesto que debe cumplir que $s \geq 0$, tenemos que $s_m = 0$.

Tomando $y = e_m \in c_0^+$ resulta que $1 \wedge ns_m = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, la sucesión $y_m \wedge ns_m$ no converge a y_m . Con base en el teorema anterior, el elemento s no es una unidad débil.

(\impliedby) Sea $s \in c_0$ tal que $s_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $y \in c_0^+$. Tomemos $m \in \mathbb{N}$. Ya que $s_m > 0$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_m < Ns_m$. Por lo tanto, la sucesión $\{y_m \wedge ns_m\}$ es la constante y_m a partir de N . Así, $y_m \wedge ns_m \uparrow y_m$ y en vista del teorema anterior, se sigue que s es una unidad débil. ■

Definición 3.2.5 Sea E un espacio de Riesz. Si $x, y \in E$, entonces

i) Diremos que x es *disjunto* a y , lo cual denotamos por $x \perp y$, si

$$|x| \wedge |y| = 0.$$

ii) Si $A \subset E$, entonces $A^d = \{y \in E : y \perp a, \forall a \in A\}$ y lo llamaremos el *complemento disjunto* de A .

Ejemplo 3.2.6 Con base en la definición anterior, observemos que $E^d = \{0\}$ y $\{0\}^d = E$.

Lema 3.2.2 *Sea E un espacio de Riesz. Para cualquier $x \in E$ se cumple que x^+ y x^- son disjuntos.*

Demostración: Debemos probar que $|x^+| \wedge |x^-| = 0$. Como $x^+, x^- \in E^+$, lo anterior es equivalente a $x^+ \wedge x^- = 0$. Por la observación 3 del capítulo 1, $x \wedge 0 = -x^-$. Usando (ii) del lema 1.4.2, resulta que $0 = (x \wedge 0) + x^- = ((x^+ - x^-) \wedge 0) + x^- = x^+ \wedge x^-$. ■

Teorema 3.2.3 *Sean E un espacio de Riesz. Para $x, y, z \in E$, se cumple*

$$i) \quad |(x \vee z) - (y \vee z)| + |(x \wedge z) - (y \wedge z)| = |x - y|.$$

$$ii) \quad |(x \vee z) - (y \vee z)| \leq |x - y| \quad y \quad |(x \wedge z) - (y \wedge z)| \leq |x - y|.$$

$$iii) \quad |x^+ - y^+| \leq |x - y| \quad y \quad |x^- - y^-| \leq |x - y|.$$

Demostración: (i). Probaremos la igualdad con base en el corolario 1.4.2 el cual nos dice: Si $a, b \in E$, entonces

$$|a - b| = (a \vee b) - (a \wedge b). \quad (3.4)$$

Usaremos esta igualdad en cada sumando de (i).

Denotemos $w = |(x \vee z) - (y \vee z)| + |(x \wedge z) - (y \wedge z)|$. Vamos a sustituir en la igualdad 3.4, $a = x \vee z$, $b = y \vee z$ para el primer sumando y $a = x \wedge z$, $b = y \wedge z$ para el segundo sumando. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} w &= [(x \vee z) \vee (y \vee z)] - [(x \vee z) \wedge (y \vee z)] + [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] \\ &\quad - [(x \wedge z) \wedge (y \wedge z)] \\ &= (x \vee y \vee z) - [(x \vee z) \wedge (y \vee z)] + [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] - (x \wedge y \wedge z). \end{aligned}$$

Empleando ahora el corolario 1.4.3, resulta que

$$\begin{aligned} w &= (x \vee y \vee z) - [(x \wedge y) \vee z] + [(x \vee y) \wedge z] - (x \wedge y \wedge z) \\ &= \{(x \vee y) \vee z + [(x \vee y) \wedge z]\} - \{[(x \wedge y) \vee z] + (x \wedge y) \wedge z\}. \end{aligned}$$

Usemos una vez más el corolario 1.4.2, pero ahora con la igualdad $a + b = (a \vee b) + (a \wedge b)$. Tomando $a = x \vee y$ y $b = z$ en el primer elemento, entonces

$$(x \vee y) \vee z + [(x \vee y) \wedge z] = [(x \vee y) + z],$$

mientras que al sustituir $a = x \wedge y$ y $b = z$ en el segundo miembro, resulta que,

$$[(x \wedge y) \vee z] + (x \wedge y) \wedge z = [(x \wedge y) + z].$$

Haciendo la resta y aplicando el corolario 1.4.2, se concluye la prueba.

(ii). Se sigue directamente de (i) y del hecho de que $|a| \geq 0$ para cada $a \in E$.

(iii). Recordemos que $x^+ = x \vee 0$ y $x^- = (-x) \vee 0$ para cada $x \in E$. Observemos que (iii) se sigue de la primera parte de (ii) ya que es una diferencia de supremos. ■

Corolario 3.2.2 Sean $x, y, z \in E^+$ y $v, w \in E$. Entonces,

$$i) (x + y) \wedge z \leq (x \wedge z) + (y \wedge z).$$

$$ii) (v + w) \vee z \leq (v \vee z) + (w \vee z).$$

Además $y \wedge z = 0$ implica que $(x + y) \wedge z = x \wedge z$ y si $x \wedge y = 0$, entonces en (i) se cumple la igualdad.

Demostración: (i) Observemos que por (ii) del teorema anterior, $(x + y) \wedge z - (x \wedge z) \leq y$. Además $(x + y) \wedge z - (x \wedge z) \leq (x + y) \wedge z \leq z$. Por lo tanto $(x + y) \wedge z - (x \wedge z) \leq y \wedge z$.

(ii) Tenemos $w \leq w \vee z$ y $v \leq v \vee z$, entonces $v + w \leq (v \wedge z) + (w \wedge z)$. Por otra parte $z \leq (v \wedge z) + (w \wedge z)$, se sigue que $(v + w) \vee z \leq (v \vee z) + (w \vee z)$.

Si $y \wedge z = 0$, entonces $(x + y) \wedge z \leq x \wedge z$ por (i). Por otra parte, de acuerdo al corolario 1.2.1, se cumple que $(x + y) \wedge z \geq x \wedge z$ ya que $(x + y) \geq x$.

Supongamos ahora que $x \wedge y = 0$. Utilizando el corolario 1.4.2, $x \vee y = x + y$, además $x \wedge z \wedge y \wedge z = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} (x + y) \wedge z &= (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \\ &= (x \wedge z) + (y \wedge z) - (x \wedge z) \wedge (y \wedge z) \quad \blacksquare \\ &= (x \wedge z) + (y \wedge z) - 0. \end{aligned}$$

Lema 3.2.3 Sean E un espacio de Riesz y $A \subset E$ no-vacío tal que $s = \sup A$ existe, entonces

$$s^+ = \sup\{a^+ : a \in A\} \quad \text{y} \quad s^- = \inf\{a^- : a \in A\}.$$

Demostración: Recordemos que $x^- = (-x) \vee 0$, $x^+ = x \vee 0$ para cualquier $x \in E$ y $(-A) = \{-a : a \in A\}$.

Sea $a \in A$. Puesto que $a \leq s$, aplicando el corolario 1.2.1, se sigue que $a^+ = a \vee 0 \leq s \vee 0$ por lo cual, $s \vee 0$ es una cota superior de $\{a^+ : a \in A\}$.

Supongamos que t es otra cota superior para $\{a^+ : a \in A\}$, entonces $t \geq a^+ \geq a$ y $t \geq 0$. Entonces $t \geq s$. Se concluye que $t \geq s \vee 0$.

Queremos probar que $s^- = \inf\{a^- : a \in A\}$.

Ya que $s = \sup A$, por la proposición 1.3.2, se tiene que $\inf(-A)$ existe y $\inf(-A) = -\sup A = -s$; además, notemos que $\inf\{a^- : a \in A\} = \inf\{-a \vee 0 : a \in A\}$. Entonces, usando la proposición 1.4.2, tenemos que $\inf\{-a \vee 0 : a \in A\} = \inf(-A) \vee 0 = -s \vee 0 = s^-$, con lo que se concluye la prueba. \blacksquare

Teorema 3.2.4 Sea $A \subset E$. Entonces el conjunto A^d es una banda en E . Además, $A \cap A^d \subset \{0\}$.

Demostración: Primero veamos que A^d es un subespacio vectorial:

$0 \in A^d$ ya que $|0| \wedge |a| = 0$ para cada $a \in A^d$

Sean $x, y \in A^d$, entonces $x + y \in A^d$ puesto que

$$|x + y| \wedge |a| \leq (|x| + |y|) \wedge |a| \leq |x| \wedge |a| + |y| \wedge |a| = 0.$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $|\lambda x| \wedge |a| = |\lambda| |x| \wedge |a|$. Si $|\lambda| \geq 1$, tenemos que $|\lambda| |x| \wedge |a| \leq |\lambda| |x| \wedge |a| = |\lambda| (|x| \wedge |a|) = 0$.

Para $|\lambda| < 1$. Notemos que $|\lambda x| \wedge |a| \leq |x| \wedge |a| = 0$.

Se concluye que A^d es un subespacio vectorial.

Luego, si $x \in E$ tal que $|x| \leq |y|$ para algún $y \in A^d$, entonces

$$0 \leq |x| \wedge |a| \leq |y| \wedge |a| = 0.$$

Por lo tanto, $x \perp a$, de lo que se sigue que $x \in A^d$. Se concluye que A^d es un ideal.

Supongamos que $B \subset A^d$ es no-vacío y existe $x \in E$ tal que $x = \sup B$. Queremos probar que $|x| \wedge |a| = 0$ para cada $a \in A$.

Fijemos $a \in A$ y tomemos $b \in B$. Por el lema 1.4.2, tenemos que $b^+ = |b^+| \perp |b|$, lo que implica que $b^+ \perp a$ ya que A^d es un ideal. De forma análoga, $b^- \perp a$.

Además, del lema 3.2.3, $x^+ = \sup\{b^+ : b \in B\}$ y $x^- = \inf\{b^- : b \in B\}$. De acuerdo al lema, se cumple que 1.4.2 $0 \leq x^+ \wedge |a| = \sup\{b^+ \wedge |a| : b \in B\} = 0$. Por otra parte, del lema 3.2.3, se tiene que $x^- = \inf\{b^- : b \in B\}$. Así, $0 \leq x^- \wedge |a| \leq b^- \wedge |a| = 0$ para cada $b \in B$.

Usando que A^d es un espacio vectorial, se concluye que $x \perp a$. Por lo tanto, $x \in A^d$. Lo que prueba que A^d es una banda.

Supongamos $x \in A \cap A^d$, entonces $x \in A$ y $x \in A^d$. Luego, $x \perp a$, $\forall a \in A$. Por hipótesis $x \in A$, entonces $|x| \wedge |x| = 0$. Por lo tanto $x = 0$. ■

Observación: Notemos que si $x \in A$ y $y \in A^d$, entonces no necesariamente $x \wedge y = 0$. Por ejemplo, tomemos $x = (0, -1)$ y $y = (1, 0)$ en \mathbb{R}^2 con el orden usual. Se cumple que $|x| \wedge |y| = (0, 0)$ ya que $|x| = (0, 1)$ y $|y| = (1, 0)$ pero $x \wedge y = (0, -1)$.

Definición 3.2.6 Una banda B en E es una *banda con proyección* si $E = B \oplus B^d$. El mapeo que lleva $x + y$ a y es en este caso la *proyección sobre B* , la cual denotamos por P_B .

Teorema 3.2.5 Sean E un espacio de Riesz y $x, y \in E$. Si $x \perp y$, entonces

i) $|x + y| = |x| + |y|$.

ii) $(x + y)^+ = x^+ + y^+ = x^+ \vee y^+$.

iii) $(x + y)^- = x^- + y^- = x^- \vee y^-$.

Demostración: (i) Tenemos que $x \wedge y = 0$. De la proposición 1.4.1, se sigue que $0 = 2(|x| \wedge |y|) = |x| + |y| - |x| - |y|$. Esto es, $|x| + |y| = |x| - |y|$. Entonces $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$, lo que implica que $|x + y| = |x| + |y|$.

(ii) Probaremos primero que $x^+ + y^+ = x^+ \vee y^+$. Notemos que $0 \leq x^+ \wedge y^+ \leq |x^+| \wedge |y^+| \leq |x| \wedge |y| = 0$. Por el corolario 1.4.2, se tiene que $x^+ + y^+ = (x^+ \vee y^+) + (x^+ \wedge y^+)$. Por lo tanto $x^+ + y^+ = x^+ \vee y^+$.

Probemos ahora que $(x + y)^+ = x^+ + y^+$. Tenemos que

$$x^+ + y^+ + (x + y)^- \leq x^+ + y^+ + x^- + y^- = |x| + |y| = |x + y| = (x + y)^+ + (x + y)^-.$$

Lo que indica que $(x + y)^+ \geq x^+ + y^+$. Por otro lado, del lema 1.4.2, se cumple que $x^+ + y^+ \geq (x + y)^+$. Por lo tanto $(x + y)^+ = x^+ + y^+$.

(iii) Se prueba análogamente a (ii). ■

Lema 3.2.4 Sea B una banda con proyección. Si $x \in B, y \in B^d$ entonces $x + y \geq 0$ si y sólo si $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

Demostración: (\Leftarrow) Como $x \geq 0$ y $y \geq 0$, se sigue que $x + y \geq 0$.

(\Rightarrow) Supongamos que $x + y \geq 0$. Entonces, $(x + y)^- = 0$. Por el teorema anterior, $(x + y)^- = x^- + y^- = 0$, de lo que se sigue que $x^- = 0$ y $y^- = 0$. Por lo tanto, $x = x^+ \geq 0$ y $y = y^+ \geq 0$. ■

Ejemplo 3.2.7 El conjunto $B = \{f \in C([0, 2]) : f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]\}$ es una banda en $C([0, 2])$, pero B no es una banda con proyección.

La función constante cero es igual a cero para cada $x \in [0, 1]$. Por lo tanto $0 \in B$.

Sean f y $g \in B$, entonces $(f + g)(x) = 0$ para cada $x \in [0, 1]$. Análogamente, si $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$.

Lo anterior prueba que B es un subespacio vectorial de $C([0, 2])$.

Supongamos que $h \in C([0, 2])$ tal que $|h| \leq |f|$ para alguna $f \in B$. Entonces $|h(x)| \leq |f(x)|$ para cada $x \in [0, 1]$. Esto es, $h(x) = 0$ para cada $x \in [0, 1]$, se sigue que $h \in B$. Por lo tanto, B es un ideal.

Supongamos ahora que $A \subset B$ es tal que existe $h_0 \in C([0, 2])$ tal que $h_0 = \sup A$, entonces $h_0(x) = \sup\{f(x) : \forall f \in A\} = 0$ para cada $x \in [0, 1]$. Se sigue que $h_0 \in B$.

Recordemos que $B^d = \{g \in C([0, 2]) : |g| \wedge |f| = 0, \forall f \in B\}$. Entonces, tenemos que $B^d = \{f \in C([0, 2]) : f(x) = 0, \forall x \in [1, 2]\}$.

Para ver que B no es una banda con proyección, basta observar que para cualquier función $f \in B + B^d$, se cumple que f se anula en 1. Por lo tanto, cualquier función $h \in C([0, 2])$ tal que $h(1) \neq 0$, cumple que $h \in C([0, 2]) \setminus B \oplus B^d$, esto es, $C([0, 2]) \neq B \oplus B^d$.

3.3. Átomos

Definición 3.3.1 Sean E un espacio de Riesz y $a \in E$. Diremos que a es un *átomo* si $a > 0$ y $0 \leq b \leq a$ implica que b es un múltiplo de a , esto es, $b = \lambda a$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Si la banda generada por los átomos es todo el conjunto E , entonces E es llamado *atómico*.

Definición 3.3.2 Sean V un espacio vectorial y $a \in V$. Denotaremos por $\langle a \rangle$ al conjunto generado por a , esto es, $\langle a \rangle = \{x \in E : x = \lambda a, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Proposición 3.3.1 Sean E un espacio de Riesz y $a \in E^+$. Entonces a es un átomo si, y sólo si $J_a = \langle a \rangle$.

Demostración: (\implies) Supongamos que a es un átomo. Por demostrar que $J_a = \langle a \rangle$.
(\subseteq) Sea $x \in J_a$. Tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq |x| \leq na.$$

Entonces, $0 \leq x^+ \leq na$ y $0 \leq x^- \leq na$. Como a es un átomo, de lo anterior se sigue que existen λ_1 y $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x^+ = \lambda_1 a$ y $x^- = \lambda_2 a$.

Por lo tanto, $x = x^+ - x^- = (\lambda_1 - \lambda_2)a$. Esto es, $x \in \langle a \rangle$.

(\supseteq) Supongamos $x \in \langle a \rangle$. Entonces $x = \lambda a$.

Tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > |\lambda|$ se sigue que $|x| \leq na$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Lo que implica que $x \in J_a$.

(\impliedby) Supongamos que $J_a = \langle a \rangle$. Veamos que a es un átomo.

Sea $b \in E$ tal que $0 \leq b \leq a$. Como $b \geq 0$, se cumple que $b = |b|$. Entonces, $|b| \leq a$. La desigualdad anterior nos dice que $b \in J_a = \langle a \rangle$. Por lo tanto, $b = \lambda a$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Es decir, a es un átomo. ■

Proposición 3.3.2 Sea $a \in E$ un átomo. Si E es arquimediano, entonces $B_a = \langle a \rangle$.

Demostración: Por la proposición anterior, basta probar que $B_a = J_a$. Tenemos que siempre se cumple que $J_a \subset B_a$. Resta probar que $B_a \subset J_a$.

Sea $x \in B_a = B_{J_a}$ tal que $x \neq 0$. Por el teorema 3.2.1, $|x| = \sup\{u \in J_a : 0 \leq u \leq |x|\}$ y por la proposición anterior $J_a = \langle a \rangle$, entonces $|x| = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : 0 \leq \lambda a \leq |x|\}$.

Sea $A = \{\lambda \in \mathbb{R} : 0 \leq \lambda a \leq |x|\} \subset \mathbb{R}$, notemos que $0 \in A$ puesto que $a > 0$. Si A no fuese acotado superiormente, tendríamos que a cada $n \in \mathbb{N}$ le corresponde un $\lambda_n \in A$ tal que $n \leq \lambda_n$; entonces $na \leq \lambda_n a \leq |x|$ para cada $n \in \mathbb{N}$; como E es arquimediano resultaría que $a \leq 0$, contrario a que a es un átomo.

Tomemos $t = \sup A$, se sigue que $\lambda a \leq ta$ para cada $\lambda \in A$. Por lo tanto, $|x| \leq ta$, lo que implica que $|x| = ka \in J_a$. ■

Ejemplo 3.3.1 Consideremos $E = S(\mathbb{R})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos e_n como en el ejemplo 3.2.3. Veamos que e_n es un átomo en $S(\mathbb{R})$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in S(\mathbb{R})$ una sucesión tal que $0 \leq x \leq e_n$, tenemos que $0 \leq x_m \leq e_{n,m}$ para cada $m \in \mathbb{N}$, donde $e_{n,m}$ denota el m -ésimo término de la sucesión e_n . En particular, $x_n \leq e_{n,n} = 1$.

Por otra parte $e_{n,m} = 0$, entonces $0 \leq x_m \leq 0$ si $m \neq n$. Por lo tanto, tomando $\lambda = x_n$, resulta que $x = \lambda e_n$. Lo que indica que e_n es un átomo.

Ejemplo 3.3.2 El vector $(2, 1)$ no es un átomo en \mathbb{R}^2 con su orden usual.

Notemos que $(0, 0) \leq (1, 1) \leq (2, 1)$ pero no existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(1, 1) = \lambda(2, 1)$.

Ejemplo 3.3.3 El espacio de funciones $C([0, 1])$ no posee átomos.

Supongamos que existe una función $h \in C([0, 1])$ que h es un átomo.

Ya que $[0, 1]$ es compacto, por el teorema de Weierstrass h alcanza su mínimo en $[0, 1]$. Supongamos que h no es constante. Basta tomar $f(x) = \min\{h(x) : x \in [0, 1]\}$ para cada $x \in [0, 1]$. Claramente, $0 \leq f(x) \leq h(x)$, pero no puede existir un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lambda h(x)$.

Por otro lado, si la función h es constante, digamos $h = c > 0$. Entonces basta tomar la función afín que va del origen al punto $(1, c)$ para ver que no existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lambda h(x)$.

Por lo tanto, no existen átomos en el espacio de funciones $C([0, 1])$.

3.4. Espacio cociente

Sea E un espacio de Riesz y J un ideal en E . Entonces J es un subespacio vectorial de E . Definamos la siguiente relación,

$$x \sim y \text{ si } x - y \in J.$$

Como J es un subespacio vectorial, se verifica directamente que \sim define una relación de equivalencia en E . Si $x \in E$, denotaremos por $[x]$ su clase de equivalencia, es decir, $[x] = \{y \in E : y \sim x\}$, y diremos que x es un representante de $[x]$. Es sencillo verificar que

$$[x] = x + J := \{x + w : w \in J\}.$$

De esta manera, para $x, y \in E$ se cumple que

$$[x] = [y] \quad \text{si, y sólo si} \quad x - y \in J.$$

La colección de todas estas clases de equivalencia la llamaremos *espacio cociente* y lo denotaremos por E/J .

Definimos en E/J las siguientes operaciones,

$$[x] + [y] = [x + y], \quad \lambda [x] = [\lambda x], \quad \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Notemos que con estas operaciones E/J es un espacio vectorial por lo que en adelante al referirnos al espacio cociente tendremos en cuenta que es el *espacio vectorial cociente*.

Además, E/J puede ser transformado en espacio de Riesz como se mostrará a continuación.

Definición 3.4.1 Sea $x \in E$. Diremos que

$$[x] \geq 0 \quad \text{si existe } y \in E^+ \text{ tal que } [x] = [y]. \quad (3.6)$$

Al conjunto de elementos en E/J que cumplan (3.6) lo denotaremos provisionalmente por C .

Lema 3.4.1 *El conjunto C es un cono.*

Demostración: i) Probemos que si $[x] \geq 0$ y $[y] \geq 0$, entonces $[x] + [y] \geq 0$.

$$\begin{aligned} [x] \geq 0 \text{ y } [y] \geq 0 &\implies \exists z, w \in E^+ \text{ tal que } [x] = [z] \text{ y } [y] = [w] \\ &\implies [x] + [y] = [z] + [w] = [z + w]. \end{aligned}$$

Ya que $z + w \in E^+$, se sigue que $[x] + [y] \geq 0$.

ii) Para $\lambda \geq 0$, se cumple que $\lambda [x] \geq 0$.

$$\begin{aligned} [x] \geq 0 &\implies \text{ existe } z \in E^+ \text{ tal que } [x] = [z] \\ &\implies \lambda [x] = \lambda [z] = [\lambda z], \end{aligned}$$

entonces como $[\lambda z] \in E^+$, se concluye que $\lambda [x] \in C$.

iii) $(C)^+ \cap (-C)^+ = \{[0]\}$. Sea $x \in E$ tal que $[x] \in (C)^+ \cap (-C)^+$, entonces existe $z \in E^+$ tal que $[x] = [z]$ y existe $-z \in (-E)^+$ tal que $[x] = [-z]$. Así,

$$2[x] = [x] + [x] = [z] + [-z] = 0.$$

Por lo tanto, $[x] = 0$. ■

De acuerdo a la definición 1.3.4, podemos definir un orden en E/J , a saber,

$$[x] \leq [y] \quad \text{si, y sólo si, } [y] - [x] \geq 0. \quad (3.7)$$

Además $C = (E/J)^+$. Notemos que las siguientes afirmaciones son equivalentes a $[x] \leq [y]$:

i) $[y - x] \geq 0$,

- ii) existe $z \in E^+$ tal que $[y - x] = [z]$,
- iii) existen $z \in E^+$ y $w \in J$ tales que $y - x - z = w$,
- iv) existe $w \in J$ tal que $x + w \leq y$.

Probemos ahora que E/J es un retículo, esto es, $[x] \vee [y]$ existe en E/J para cualesquiera $[x], [y] \in E/J$. Para ello, probaremos que

$$[x] \vee [y] = [x \vee y], \quad \forall x, y \in E. \quad (3.8)$$

Es claro que $[x \vee y] \geq [x]$ y $[x \vee y] \geq [y]$. Sea $[z]$ otra cota superior de $[x]$ y $[y]$, entonces existen $w_1, w_2 \in J$ tales que $z - x \geq w_1$, $z - y \geq w_2$. Entonces, $z - x \geq w$ y $z - y \geq w$ donde $w = w_1 \wedge w_2 \in J$. Así,

$$z \geq (x + w) \vee (y + w) = (x \vee y) + w,$$

se sigue que $[z] \geq [x \vee y]$.

Por lo tanto, hemos probado la siguiente proposición:

Proposición 3.4.1 *Sea E un espacio de Riesz y J un ideal en E , entonces E/J es un espacio de Riesz con el orden definido en (3.7).*

En general el espacio cociente puede no ser arquimediano. Para esto se requiere que J sea uniformemente cerrado en E , i.e., para todo $x \in E^+$ se cumple que $J \cap J_x$ es cerrado en J_x con la norma inducida por X . Ver [5] para detalles.

3.5. Homomorfismos reticulares

Sean E y F espacios vectoriales sobre \mathbb{R} . Recordemos que $T : E \rightarrow F$ es un *operador lineal* si para cada $x, y \in E$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes condiciones:

- i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$.
- ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Definición 3.5.1 Sean E y F dos espacios de Riesz y $T : E \rightarrow F$ un operador lineal. Diremos que T es un *homomorfismo reticular* si para todo $x, y \in E$ se cumple la siguiente igualdad:

$$Tx \vee Ty = T(x \vee y).$$

Si además se cumple que T es uno-a-uno, entonces diremos que T es un *isomorfismo reticular*.

Corolario 3.5.1 Sean E y F dos espacios de Riesz y $T : E \rightarrow F$ un operador lineal. Son equivalentes:

i) T es un homomorfismo reticular.

ii) $T(|x|) = |Tx|$.

iii) $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$.

Demostración: (i) \implies (ii) Supongamos que $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ para cada $x, y \in E$. Por la definición de módulo, $T(|x|) = T(x \vee (-x)) = Tx \vee (-Tx) = |Tx|$.

(ii) \implies (iii) Supongamos que $T(|x|) = |Tx|$ para cada $x \in E$. Por la proposición 1.4.1, se tiene que,

$$\begin{aligned} 2T(x \wedge y) &= T(x + y - |x - y|) = Tx + Ty - T|x - y| \\ &= Tx + Ty - |Tx - Ty| = 2(Tx \wedge Ty). \end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ se obtiene lo deseado.

(iii) \implies (i) Sean $x, y \in E$ y supongamos que $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$. Por el corolario 1.4.1 que,

$$\begin{aligned} T(x \vee y) &= -T((-x) \wedge (-y)) = -(T(-x) \wedge T(-y)) \\ &= -((-Tx) \wedge (-Ty)) = Tx \vee Ty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es un homomorfismo reticular. ■

Ejemplo 3.5.1 Sean E un espacio de Riesz y $x \in E^+$. Definamos $T : \mathbb{R} \rightarrow E$ por $T(\lambda) = \lambda x$. Entonces T es un homomorfismo reticular.

Demostración: Claramente T es un operador lineal. Por el corolario anterior, basta probar que $T(|\lambda|) = |T\lambda|$. Ya que $x \in E^+$, se cumple que $x = |x|$, entonces

$$T(|\lambda|) = |\lambda|x = |\lambda||x| = |\lambda x| = |T\lambda|. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.5.1 [Kakutani] Si E es un espacio de Riesz arquimediano con una unidad fuerte e , entonces existe un espacio compacto Hausdorff K y un mapeo lineal $T : E \rightarrow C(K)$ tal que

i) $T(E)$ es un subespacio de Riesz de $C(K)$ que es denso.

ii) $T_e = 1_K$.

iii) $\|T_x\|_\infty = \|x\|_e$ para todo $x \in E$.

Demostración: Véase [6]. ■

Definición 3.5.2 Sean E un espacio de Riesz arquimediano y $x \in E^+$. Consideremos el espacio compacto Hausdorff K_x y el mapeo lineal $T : J_x \rightarrow C(K_x)$ definidos por el teorema anterior. Si para cada $x \in E^+$ se cumple que $T_x : J_x \rightarrow C(K_x)$ es sobreyectiva, entonces diremos que E es *uniformemente completo*.

Ejemplo 3.5.2 Denotaremos por \mathcal{S} al conjunto de todas las sucesiones reales que sólo toman un número finito de valores. Probemos que con el orden puntual, \mathcal{S} forma un espacio de Riesz.

Es evidente que la sucesión constante cero está en \mathcal{S} . Sean $x, y \in \mathcal{S}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, los conjuntos $\{\lambda x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ son finitos. Por lo tanto $\lambda x + y \in \mathcal{S}$ y así \mathcal{S} es un subespacio vectorial de \mathcal{S} .

El orden en \mathcal{S} se hereda a partir de $S(\mathbb{R})$. Veremos que con este orden, \mathcal{S} es un subtítulo.

Resta ver que para cualquier par $x, y \in \mathcal{S}$, siempre existe $x \vee y \in \mathcal{S}$.

De acuerdo al lema 2.2.5, se tiene que $x \vee y$ se calcula término a término para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión $\{x_n \vee y_n\}$ toma un número finito de valores puesto que se forma a partir de $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$. Por lo tanto, $x \vee y \in \mathcal{S}$.

Hemos probado que \mathcal{S} es un subespacio de Riesz.

Enseguida mostraremos que \mathcal{S} no es uniformemente completo. Observemos que la sucesión constante uno es un elemento de \mathcal{S} ya que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$. Recordemos que,

$$\|s\|_1 = \inf\{\lambda \geq 0 : |s_n| \leq \lambda 1\}.$$

Por el lema 3.1.6 sabemos que $\|s\|_1 = \|s\|_\infty$. Es decir, la sucesión constante 1 es una unidad fuerte en \mathcal{S} e induce la norma del supremo.

Sea

$$x_n = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, 0, 0, \dots). \quad (3.9)$$

Veamos que $\{x_n\}$ es de Cauchy.

Supongamos $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $n > m \geq N$. Notemos que

$$\|x_n - x_m\|_\infty = \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{N}.$$

Por lo tanto, $\{x_n\}$ es de Cauchy.

Veamos ahora que $\{x_n\}$ no es convergente en \mathcal{S} . Tomemos $s \in \mathcal{S}$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s(n_0) = 0$, $\forall n \geq n_0$. Luego, para $n \geq n_0$ se cumple que

$$\|s - x_n\|_\infty \geq \frac{1}{n_0}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Esto indica que $\{x_n\}$ no converge a s . Por lo tanto, usando el lema 2.2.2, se sigue que J_1 no puede ser sobreyectiva. En consecuencia, \mathcal{S} no es completo y en vista de la definición 3.5.2 \mathcal{S} no es uniformemente completo.

Capítulo 4

Espacios Dedekind y Retículos de Banach

4.1. Espacios Dedekind completos y Dedekind σ –completos

Definición 4.1.1 Un espacio vectorial ordenado E es

- i) *Dedekind completo* si cada subconjunto no-vacío acotado superiormente tiene supremo.
- ii) *Dedekind σ –completo* si cada subconjunto contable acotado superiormente tiene supremo.

Notemos que para cualquier subconjunto no-vacío en E , ser Dedekind completo implica ser Dedekind σ –completo.

Proposición 4.1.1 Si E es un espacio de Riesz Dedekind completo, entonces E tiene la propiedad arquimediana.

Demostración: Supongamos que $nx \leq y$ para $x, y \in E$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $(nx)^+ = nx^+ \leq y^+$. Por hipótesis, existe $\alpha = \sup\{nx^+ : n \in \mathbb{N}\}$.

Tenemos que si $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $2n \in \mathbb{N}$; es decir, α es cota superior de $\{2nx^+ : n \in \mathbb{N}\}$.

Supongamos que β es otra cota superior de $\{2nx^+ : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $nx^+ \leq 2nx^+ \leq \beta$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Del lema 3.2.1, resulta que

$$\alpha = \sup\{2nx^+ : n \in \mathbb{N}\} = 2 \sup\{nx^+ : n \in \mathbb{N}\} = 2\alpha,$$

se sigue que $\alpha = 0$. Por lo tanto, $x \leq x^+ \leq \alpha = 0$. ■

Ejemplo 4.1.1 \mathbb{R}^n con el orden usual es un espacio de Riesz Dedekind completo.

Demostración: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ no-vacío y acotado superiormente, entonces existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $a \leq x$ para cada $a \in A$. Fijemos $i \in \{1, \dots, n\}$ y consideremos $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, se cumple que $a_i \leq x_i$. Ya que A es no-vacío, entonces $A_i = \{a_i \in \mathbb{R} : (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \in A\}$ es no-vacío y acotado superiormente por x_i . Por el axioma del supremo, existe $\sup A_i$. Así, haciendo variar i , resulta que $(\sup A_1, \sup A_2, \dots, \sup A_n)$ existe.

Claramente $(\sup A_1, \sup A_2, \dots, \sup A_n)$ es una cota superior de A . Si consideramos que $u = (u_1, \dots, u_n)$ es otra cota superior de A , entonces $a_i \leq u_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por las propiedades del supremo, $\sup A_i \leq u_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, hemos probado que,

$$\sup A = (\sup A_1, \sup A_2, \dots, \sup A_n).$$

Lo que indica que \mathbb{R}^n es Dedekind completo. ■

Ejemplo 4.1.2 Sea D un conjunto no-vacío, entonces $F(D)$ es un espacio Dedekind completo.

Demostración: Si $A \subset F(D)$ es un subconjunto no-vacío y acotado superiormente, se cumple que existe $h \in F(D)$ tal que $f \leq h$ para cada $f \in A$. Entonces $f(x) \leq h(x)$ para cada $x \in D$ y cada $f \in A$, por lo tanto existe $\sup\{f(x) : f \in A\}$. Aplicando la proposición 2.2.1 se obtiene la conclusión.

Ejemplo 4.1.3 Sea $D \neq \emptyset$. Entonces el conjunto de funciones acotadas $B(D)$ es Dedekind completo.

Demostración: Sea $A \neq \emptyset$ un subconjunto acotado superiormente de $B(D)$.

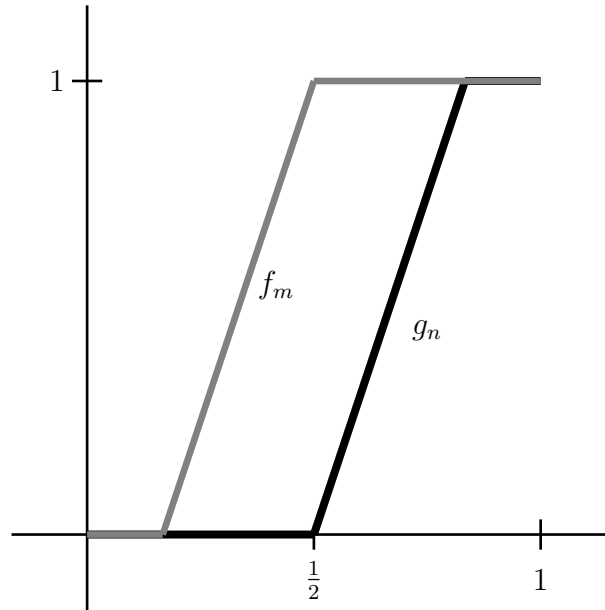
Para cada $f \in A$ existe $M_f \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M_f$ para cada $x \in D$. Por otro lado, ya que A está acotado superiormente, existe $h \in B(D)$ tal que $f \leq h$ para cada $f \in A$. Entonces $f(x) \leq h(x) \leq |h(x)| \leq M_h$ para cada $x \in D$ y cada $f \in A$. Por lo tanto, por la proposición 2.2.1, existe $g \in F(D, \mathbb{R}^n)$ tal que $g(x) = \sup\{f(x) : f \in A\}$. Claramente g es acotada superiormente, puesto que debe ocurrir que $g \leq h$, es decir, $g(x) \leq h(x) \leq |h(x)| \leq M_h$ para cada $x \in D$. Ya que A es no-vacío, podemos tomar $f_0 \in A$ tal que $f_0(x) \leq g(x)$. Además, $|f_0(x)| \leq M_{f_0}$ implica que $-M_{f_0} \leq f_0(x) \leq M_{f_0}$. Por lo tanto, $-M_{f_0} \leq f_0(x) \leq g(x)$, lo que indica que g es acotada inferiormente. Así, $B(D)$ es Dedekind completo. ■

Ejemplo 4.1.4 Veamos que el espacio de Riesz $C([0, 1])$ no es Dedekind σ -completo. Sea A la sucesión de funciones

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ n(x - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Notemos que cada una de las siguientes funciones es cota superior de A ,

$$f_m(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{m} \\ m(x - (\frac{1}{2} - \frac{1}{m})), & \frac{1}{2} - \frac{1}{m} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Supongamos que h fuese el supremo de g_n , entonces por ser la mínima cota superior, $h \leq f_m$ para cada m . Así, $h(x) \leq f_m(x)$ para cada $x \in (0, \frac{1}{2})$ y $h(x) \leq f_m(x) = 0$ para cada $x \in (\frac{1}{2}, 1) = 1$. Se sigue que,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} h(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} h(x) = 1.$$

Por lo tanto, h no sería continua. Se concluye que $C([0, 1])$ no es σ -completo.

Observación: En el ejemplo 4.1.3 vimos que las funciones acotadas son un espacio Dedekind completo, y por lo tanto Dedekind σ -completo. También en secciones pasadas vimos que para un conjunto no-vacío K , $C(K) \subset B(K)$. Sin embargo en el ejemplo anterior el intervalo $[0, 1]$ es un conjunto compacto y $C([0, 1])$ no es Dedekind σ -completo, esto es, la propiedad de ser Dedekind completo o Dedekind σ -completo no se hereda.

Ejemplo 4.1.5 Consideremos el espacio de funciones $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que f es constante salvo en un conjunto numerable, dicho espacio lo denotaremos por \mathcal{C} . Entonces, \mathcal{C} es Dedekind σ -completo pero no Dedekind completo.

Demostración: Claramente la función cero está en \mathcal{C} .

Sean f y $g \in \mathcal{C}$, entonces existen $B_1 \subset [0, 1]$ y $B_2 \subset [0, 1]$ conjuntos numerables tales que $f(x) = c_1$ y $g(x) = c_2$ para cada $x \in [0, 1] \setminus B_1$ y cada $x \in [0, 1] \setminus B_2$ respectivamente. Puesto que la unión de dos conjuntos numerables es un conjunto numerable, entonces

$(f + g)(x) = c_1 + c_2$, que es constante para cada $x \in [0, 1] \setminus (B_1 \cup B_2)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $(\lambda f)(x) = \lambda c_1$ para cada $x \in [0, 1] \setminus B_1$. Por lo tanto, \mathcal{C} es un subespacio vectorial. Además, ya que $\mathcal{C} \subset F([0, 1], \mathbb{R})$, se tiene que con el orden puntual, \mathcal{C} es un espacio vectorial ordenado.

Por otra parte, continuando con la notación anterior, en la proposición 2.2.1, probamos que $(f \vee g)(x) = \sup\{f(x), g(x)\} = \max\{c_1, c_2\}$ para cada $x \in [0, 1] \setminus (B_1 \cup B_2)$. Así, $f \vee g$ es constante en $[0, 1] \setminus (B_1 \cup B_2)$. Ya que lo anterior nos indica que $f \vee g \in \mathcal{C}$, se sigue que \mathcal{C} es un subespacio de Riesz.

Sea $A \subset \mathcal{C}$ un conjunto numerable no-vacío y acotado superiormente. Queremos probar que existe $f \in \mathcal{C}$ tal que $f = \sup A$.

Como A es numerable, expresemos A como la sucesión de funciones $\{f_n\} \subset \mathcal{C}$. La sucesión $\{f_n\}$ está acotada superiormente en \mathcal{C} , esto es, existe $f \in \mathcal{C}$ tal que $f_n \leq f$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Asimismo, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por c_n a la imagen de la función f_n para cada $x \in [0, 1] \setminus B_n$, donde $B_n \subset [0, 1]$ es el conjunto numerable en el que $f_n(x) \neq c_n$.

Ya que la union numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable, tenemos que $f_n(x) \leq f(x)$ para cada $x \in [0, 1] \setminus \bigcup B_n$. Notemos que $\{c_1, c_2, c_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ es no-vacío y también está acotado superiormente. Por el axioma del supremo, existe $\sup\{c_1, c_2, c_3, \dots\}$. De acuerdo a la proposición 2.2.1, podemos concluir que para cada $x \in [0, 1] \setminus \bigcup B_n$, se cumple que $f(x) = \sup\{c_1, c_2, c_3, \dots\}$.

Veamos ahora que \mathcal{C} no es Dedekind completo. Definamos A como la unión de las siguientes familias de funciones:

Para cada $y \in [0, \frac{1}{2}]$

$$f_y(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } y = x, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Mientras que para los $y \in (\frac{1}{2}, 1]$, definamos como sigue:

$$f_y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } y = x, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que $A \subset \mathcal{C}$. Se cumple también que las funciones del conjunto A están acotadas superiormente por la función constante uno.

Supongamos que existe una función $g \in \mathcal{C}$ tal que $g = \sup A$. Entonces se cumple que $f_x \leq g$ para cada $x \in [0, 1]$. Por otra parte, ya que la función constante uno es cota superior de A , debe ocurrir que $g(x) \leq 1$ para cada $x \in [0, 1]$. De lo anterior tenemos que g es la función constante uno en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

Ya que $g \in \mathcal{C}$, se cumple que g es numerable salvo en un conjunto numerable, digamos

B . Claramente $(\frac{1}{2}, 1] \not\subset B$. Tomemos $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1] \setminus B$ y consideremos la siguiente función:

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [0, 1], x \neq x_0 \\ \frac{3}{4}, & x = x_0. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Es claro que $h < g$ y $h \in \mathcal{C}$. Además, para cada $f \in A$ se cumple que $f \leq h$. Pero entonces tenemos una función que es cota superior de A y es menor que la función $\sup A$, lo cual es una contradicción.

4.2. Operadores lineales positivos

Al conjunto de todos los operadores lineales $T : E \rightarrow F$ lo denotaremos por $\mathcal{L}(E, F)$. Tengamos presente que $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio vectorial.

Definición 4.2.1 Sean E y F espacios de Riesz y $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

(i) Diremos que T es un *operador lineal positivo* si para cada $x \in E^+$ se cumple que $Tx \in F^+$. La colección de operadores lineales positivos la denotaremos por $\mathcal{L}(E, F)^+$.

(ii) Diremos que T es un *operador regular* si T es la diferencia de dos operadores lineales positivos. Denotaremos por $\mathcal{L}^r(E, F)$ a la colección de todos los operadores regulares.

(iii) Diremos que T es un *operador lineal reticularmente acotado* si la imagen de cada subconjunto reticularmente acotado de E es un subconjunto reticularmente acotado de F . Este espacio se denota por $\mathcal{L}^b(E, F)$.

Lema 4.2.1 El conjunto de operadores lineales positivos es un cono en $\mathcal{L}(E, F)$.

Demostración: Supongamos $T, S \in \mathcal{L}(E, F)^+$. Entonces,

(i) Para cualquier $x \in E^+$ se cumple que $Tx \geq 0$ y $Sx \geq 0$. Luego, $Tx + Sx = (T + S)x \geq 0$ lo que implica que $T + S$ es un operador positivo.

(ii) Sea $\lambda \geq 0$ y $x \in E^+$. Entonces $\lambda x \geq 0$ implica que $T\lambda x = \lambda Tx \geq 0$.

(iii) $\mathcal{L}(E, F)^+ \cap (-\mathcal{L}(E, F)^+) = \{0\}$.

Supongamos $T \in \mathcal{L}(E, F)^+ \cap (-\mathcal{L}(E, F)^+) = \{0\}$. Sea $x \in E^+$, tenemos que $Tx \geq 0$ y $-Tx \geq 0$ o bien $Tx \geq 0$ y $Tx \leq 0$. Por lo tanto $Tx = 0$. Tomemos ahora $x \in E$, recordemos que $x = x^+ - x^-$, entonces $Tx = Tx^+ - Tx^- = 0 - 0 = 0$. Con lo que se prueba que T aplicado a cada $x \in E$ es cero. Se concluye que T es el operador lineal cero.

La otra contención es inmediata. ■

Lema 4.2.2 El espacio $\mathcal{L}^r(E, F)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E, F)$.

Demostración: Veamos que $\mathcal{L}^r(E, F)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E, F)$.

(i) Para cada $T \in \mathcal{L}^+(E, F)$ se cumple que $T - T = 0 = 0 - 0$ por lo que el operador lineal cero es diferencia de operadores lineales positivos. Así $0 \in \mathcal{L}^r(E, F)$.

(ii) Expresemos $L_1, L_2 \in \mathcal{L}^r(E, F)$ como $L_1 = T_1 - S_1$ y $L_2 = T_2 - S_2$, donde S_1, S_2, T_1 y $T_2 \in \mathcal{L}^+(E, F)$. Entonces $L_1 + L_2 = (T_1 - S_1) + (T_2 - S_2) = (T_1 + T_2) - (S_1 + S_2)$. Por lo tanto, ya que $\mathcal{L}(E, F)^+$ es un cono, se cumple que $T_1 + T_2$ y $S_1 + S_2 \in \mathcal{L}(E, F)$, es decir, $L_1 + L_2 \in \mathcal{L}^r(E, F)$.

(ii) Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $S, T \in \mathcal{L}^+(E, F)$. Si $L = S - T$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda L = \lambda(S - T) = \lambda S - \lambda T$. En este caso se tiene que $L \in \mathcal{L}^r(E, F)$ pues sigue siendo diferencia de operadores lineales positivos ya que $\mathcal{L}(E, F)^+$ es un cono.

Por otra parte, si $\lambda < 0$, entonces $(-\lambda) \geq 0$. Luego, $\lambda L = \lambda(S - T) = \lambda S - \lambda T = (-\lambda)T - (-\lambda)S$. Lo anterior sigue siendo una diferencia de operadores lineales positivos.

Se sigue que $\lambda L \in \mathcal{L}^r(E, F)$ ■

Hemos probado que $\mathcal{L}^+(E, F)$ es un cono. Con base en la definición 1.3.4, obtenemos en $\mathcal{L}^r(E, F)$ el siguiente orden:

$$S \geq T \quad \text{si} \quad S - T \in \mathcal{L}(E, F)^+, \quad (4.1)$$

se sigue que el espacio $\mathcal{L}^r(E, F)$ es un espacio vectorial ordenado.

Lema 4.2.3 *El conjunto de operadores reticularmente acotados $\mathcal{L}^r(E, F)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Demostración: Ya que $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio vectorial, probaremos que $\mathcal{L}^b(E, F)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E, F)$. El operador lineal cero siempre es reticularmente acotado, por lo que $0 \in \mathcal{L}^b$.

Sean $S, T \in \mathcal{L}^b(E, F)$ y $A \subset E$ un conjunto reticularmente acotado. Entonces existen $x, y \in E$ tales que $x \leq a \leq y$ para cada $a \in A$. Ya que S es orden acotado, se cumple que existen $x_1, y_1 \in F$ tales que $x_1 \leq Sa \leq y_1$. Análogamente para T existen $x_2, y_2 \in F$ tales que $x_2 \leq Ta \leq y_2$ para cada $a \in A$. Puesto que $(S + T)a = Sa + Ta$, se sigue que $x_1 + x_2 \leq Sa + Ta \leq y_1 + y_2$. Por lo tanto $S + T$ es un operador lineal reticularmente acotado.

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $T \in \mathcal{L}^b(E, F)$, entonces si A es reticularmente acotado, se tiene que existen $x, y \in F$ tales que $x \leq Ta \leq y$.

Para $\lambda \geq 0$ se tiene que $\lambda x \leq \lambda Ta \leq \lambda y$. Como $\lambda Ta = (\lambda T)a$, resulta que λT es un operador lineal reticularmente acotado.

El caso en que $\lambda < 0$ se hace de forma similar, salvo que la desigualdad queda $\lambda y \leq \lambda Ta \leq \lambda x$.

Por lo tanto $\mathcal{L}^b(E, F)$ es un espacio vectorial. ■

Lema 4.2.4 *Sea $T \in L(E, F)$ un operador lineal positivo y $x, y \in E$.*

i) Si $x \leq y$, entonces $Tx \leq Ty$.

ii) T es reticularmente acotado.

Demostración: (i) Supongamos que T es positivo. Como $x \leq y$, se cumple que $0 \leq y - x$. Por lo tanto $0 \leq T(y - x) = Ty - Tx$, de lo que se sigue que $Tx \leq Ty$.

(ii) Supongamos que A es un conjunto reticularmente acotado en E , esto es, existen $x, y \in E$ tales que $x \leq a \leq y$ para cada $a \in A$. Tomemos $a \in A$, observemos que $a - x \geq 0$, entonces $T(a - x) = Ta - Tx \geq 0$, esto es, $Tx \leq Ta$ para cada $a \in A$. De la misma manera se prueba que $Ta \leq Ty$.

Por lo tanto, $Tx \leq Ta \leq Ty$ para cada $a \in A$, lo que prueba que T es reticularmente acotado. ■

Lema 4.2.5 Si $L : E \rightarrow F$ es un operador regular, entonces H es un operador reticularmente acotado. Se sigue que $\mathcal{L}^r(E, F) \subset \mathcal{L}^b(E, F)$.

Demostración: Sea $L \in \mathcal{L}^r(E, F)$. Entonces $L = S - T$, donde $S, T \in \mathcal{L}^+(E, F) \subset \mathcal{L}^b(E, F)$. Como $\mathcal{L}^b(E, F)$ es un espacio vectorial, se concluye que $L \in \mathcal{L}^b(E, F)$. ■

En general $\mathcal{L}^b(E, F)$ y $\mathcal{L}^r(E, F)$ no son iguales.

Ejemplo 4.2.1 Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un operador lineal. Entonces,

i) existen números únicos $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$T(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \text{ para cada } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

ii) T es positivo si, y sólo si, $a_1, \dots, a_n \geq 0$.

Demostración: (i) Sea e_i el i -ésimo vector de la base canónica. Por lo tanto, para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tenemos que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Usando la linealidad, $T(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n T(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i T(e_i) = \sum_{i=1}^n T(e_i) x_i$. Por lo tanto, $a_i = T(e_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, lo que nos garantiza la existencia.

Supongamos que existen números reales a_i, a_2, \dots, a_n y b_i, b_2, \dots, b_n tales que $\sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n b_i x_i$ para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Basta tomar $x = e_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ para ver que $a_i = b_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

(ii) (\implies) Supongamos que T es positivo y $T(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$. Como $e_i \geq 0$ y $T(e_i) = a_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se cumple que $a_i \geq 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

(\impliedby) Supongamos que $a_i \geq 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $x \in E^+$, tenemos que $e_i \geq 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^n a_i x_i = Tx \geq 0$. Lo que indica que T es positivo. ■

Teorema 4.2.1 Sean E y F espacios de Riesz tales que E es arquimediano y F es Dedekind completo. Entonces $\mathcal{L}^r(E, F) = \mathcal{L}^b(E, F)$ es un espacio de Riesz Dedekind completo. En este caso, si $x \in E^+$ se cumple

$$i) T^+(x) = \sup\{Ty : 0 \leq y \leq x\}.$$

$$ii) T^-(x) = \inf\{Ty : 0 \leq y \leq x\}.$$

$$iii) |T|(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}.$$

para cada $T \in \mathcal{L}^r(E, F)$.

Demostración: Véase el teorema 1.3.2 de [6]. ■

Éstas fórmulas para T^+ , T^- , y $|T|$ se conocen como las fórmulas de *Riesz-Kantorovich*.

Definición 4.2.2 Ya que el conjunto de los números reales es un espacio de Riesz Dedekind completo, tenemos que los operadores reticularmente acotados y los operadores regulares coinciden y forman el *dual reticular* de un espacio de Riesz arquimediano E , al que denotaremos por E^\sim , que es un espacio de Riesz Dedekind completo bajo el orden dual.

4.3. Retículos de Banach

Definición 4.3.1 Un *retículo normado* es un espacio de Riesz con una norma con la propiedad de que $|x| \leq |y|$ implica que $\|x\| \leq \|y\|$. La propiedad anterior la llamaremos *reticularidad*. Un retículo normado que además es un espacio de Banach, lo llamaremos un *retículo de Banach*.

Observación: En un retículo normado E , siempre se cumple que $\||x|\| = \|x\|$. Lo anterior se sigue del hecho que $||x|| = |x|$.

Ejemplo 4.3.1 Los espacios de Banach reales clásicos, $B(D)$, $C(K)$, ℓ_∞ , c , c_0 , son retículos de Banach con su norma usual y el orden puntual.

Demostración: Recordemos que para el caso de funciones reales, la función módulo y la función valor absoluto coinciden.

Sean f y $g \in B(D)$. Si $|f| \leq |g|$, entonces $|f|(x) \leq |g|(x)$. Se sigue que $\sup\{|f|(x) : x \in D\} = \||f|\| = \|f\| \leq \sup\{|g|(x) : x \in D\} = \||g|\| = \|g\|$.

Ya probamos que $B(D)$ es un espacio de Banach, se sigue que $B(D)$ es un retículo de Banach.

Por otra parte, como $C(K) \subset B(K)$ y $C(K)$ es un espacio de Banach; entonces $C(K)$ es un retículo de Banach.

Recordemos que $\ell_\infty = B(N, \mathbb{R})$ por lo que este caso es un caso especial del anterior. Por lo tanto, ℓ_∞ es un retículo de Banach.

Recordemos que $c \subset \ell_\infty$. Luego, una sucesión de Cauchy $\{x_n\} \subset c$, es una sucesión de Cauchy en ℓ_∞ . Ya que ℓ_∞ es completo, existe una sucesión $z \in \ell_\infty$ tal que $x_n \rightarrow z$. Por lo tanto, basta probar que $z \in c$.

Expresemos $x_n = \{a_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z = \{z_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se cumple que

$$\|a_{n,m} - z_m\| \leq \frac{\epsilon}{3}, \text{ para cada } m \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Tomemos $N \in \mathbb{N}$. Como x_N es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} , se tiene que

$$\|a_{N,k} - a_{N,m}\| \leq \frac{\epsilon}{3} \text{ si } m, k \geq N. \quad (4.3)$$

Por lo tanto, usando (4.2) y (4.3), resulta

$$\begin{aligned} \|z_m - z_k\| &= \|z_m - a_{N,m} + a_{N,m} - a_{N,k} + a_{N,k} - z_k\| \\ &\leq \|z_m - a_{N,m}\| + \|a_{N,m} - a_{N,k}\| + \|a_{N,k} - z_k\| \\ &= \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que z es de Cauchy en \mathbb{R} . Ya que \mathbb{R} es completo, resulta que $z \in c$. Por lo tanto, c es un retículo de Banach.

Seguiremos con la notación de la prueba anterior. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en c_0 . Tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en c . Entonces, existe $y \in c$ tal que $x_n \rightarrow y$. Debemos probar que para cada $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N_\epsilon$, entonces $\|y_m\| \leq \epsilon$.

Sea $\epsilon > 0$, por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\|x_n - y\| \leq \frac{\epsilon}{2}$, es decir, $\|a_{n,m} - y_m\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Tomando $n = N$, se cumple que

$$\begin{aligned} \|y_m\| &= \|y_m - a_{N,m} + a_{N,m}\| \\ &\leq \|y_m - a_{N,m}\| + \|a_{N,m}\|. \end{aligned}$$

Puesto que cada $a_{n,m}$ es una sucesión en c_0 para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que para el $\epsilon \geq 0$ dado existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq K$ implica que $\|a_{N,m}\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Por lo tanto,

$$\|y_m\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Lo que indica que $y \in c_0$. Se concluye que c_0 es un retículo de Banach. ■

Definición 4.3.2 Sean (X, d) y (Y, e) espacios métricos. Diremos que la función $f : X \rightarrow Y$ es *uniformemente continua* si para cada $\epsilon > 0$ corresponde un $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$ se cumple que $e(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Definición 4.3.3 Sea E un espacio de Riesz normado. Definamos la función $\|\cdot\| : E \times E \rightarrow E$ tal que para cada $(x, y) \in E \times E$,

$$\|(x, y)\| = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}. \quad (4.4)$$

Proposición 4.3.1 *La función definida en (4.4) es una norma.*

Demostración: Claramente $\|\cdot\| \geq 0$. Además $\|(x, y)\| = 0$ si, y sólo si, $\max\{\|x\|, \|y\|\} = 0$, si, y sólo si, $\|x\| = \|y\| = 0$, si, y sólo si, $(x, y) = (0, 0)$.

Sea $(x, y) \in E \times E$. Tenemos que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, se cumple que $\|(\lambda x, \lambda y)\| = \max\{\|\lambda x\|, \|\lambda y\|\} = |\lambda| \max\{\|x\|, \|y\|\} = \lambda \|(x, y)\|$.

Tenemos que $(x, y) + (u, w) = (x + u, y + w)$ para cada $(x, y), (u, w) \in E \times E$. Ya que $\|x + u\| \leq \|x\| + \|u\|$ y $\|y + w\| \leq \|y\| + \|w\|$, resulta que

$$\begin{aligned} \|(x, y) + (u, w)\| &= \max\{\|x + u\|, \|y + w\|\} \\ &\leq \max\{\|x\| + \|u\|, \|y\| + \|w\|\} \\ &\leq \max\{\|(x, y)\| + \|u\|, \|(x, y)\| + \|w\|\} \\ &\leq \max\{\|(x, y)\| + \|(u, w)\|, \|(x, y)\| + \|(u, w)\|\} \\ &= \|(x, y)\| + \|(u, w)\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (4.4) define una norma. ■

Teorema 4.3.1 *Sean E un retículo normado y $x, y \in E$. Entonces, los operadores $x \rightarrow |x|$, $x \rightarrow x^+$, $x \rightarrow x^-$, $(x, y) \rightarrow x \vee y$ y $(x, y) \rightarrow x \wedge y$ son uniformemente continuos.*

Demostración: Probaremos la continuidad uniforme de $x \rightarrow |x|$.

Recordemos que del lema 1.4.3 $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Por la propiedad de reticularidad, se tiene que $\||x| - |y|\| \leq \|x - y\|$. Por lo tanto, para cualquier $\epsilon > 0$ bastará tomar $\delta = \epsilon$ para ver que si $\|x - y\| \leq \delta$, entonces $\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$.

El inciso (iii) del teorema 3.2.3 nos dice que $|x^+ - y^+| \leq |x - y|$ y $|x^- - y^-| \leq |x - y|$. Usando la propiedad de reticularidad, se cumple que $\|x^+ - y^+\| \leq \|x - y\|$ y $\|x^- - y^-\| \leq \|x - y\|$. Por lo tanto, la continuidad uniforme de $x \rightarrow x^+$ y $x \rightarrow x^-$ se sigue en forma análoga al caso anterior.

Para verificar la continuidad uniforme de $(x, y) \rightarrow x \vee y$ y $(x, y) \rightarrow x \wedge y$, probemos las siguientes desigualdades:

$$|x \vee y - u \vee w| \leq |x - u| + |y - w| \quad \text{y} \quad |x \wedge y - u \wedge w| \leq |x - u| + |y - w|. \quad (4.5)$$

Basta probar la primera desigualdad puesto que la segunda se prueba análogamente. Notemos que del inciso (ii) del teorema 3.2.3 obtenemos que

$$\begin{aligned} |x \vee y - u \vee w| &= |x \vee y - u \vee y + u \vee y - u \vee w| \\ &\leq |x \vee y - u \vee y| + |u \vee y - u \vee w| \\ &\leq |x - u| + |y - w|. \end{aligned}$$

Ya que $|x - u| + |y - w| = ||x - u| + |y - w||$, usando una vez más la propiedad de reticularidad, resulta que:

$$\begin{aligned}
 \|x \vee y - u \vee w\| &\leq \| |x - u| + |y - w| \| \\
 &\leq \| |x - u| \| + \| |y - w| \| \\
 &= \|x - u\| + \|y - w\| \\
 &\leq \text{máx}\{\|x - u\|, \|y - w\|\} + \text{máx}\{\|x - u\|, \|y - w\|\} \\
 &= 2 \text{máx}\{\|x - u\|, \|y - w\|\} \\
 &= 2\|(x - u, y - w)\| = 2\|(x, y) - (u, w)\|.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = 2\epsilon$ para garantizar la continuidad uniforme de $(x, y) \rightarrow x \vee y$.

La continuidad uniforme del operador $(x, y) \rightarrow x \wedge y$ se prueba de forma análoga usando la segunda desigualdad de (4.5). ■

Proposición 4.3.2 *Sea E un retículo normado, entonces E^+ es cerrado.*

Demostración: Notemos que $E^+ = \{x \in E : x^- = 0\}$. En vista de la continuidad del operador $x \rightarrow x^-$, tenemos que E^+ es cerrado puesto que es la imagen inversa del conjunto cerrado $\{0\}$. ■

Corolario 4.3.1 *Un retículo de Banach E es siempre arquimediano.*

Demostración: Supongamos que $nx \leq y$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, de $nx \leq y$, resulta que $nx^+ \leq y^+ = n|x^+| \leq |y^+|$. Ya que E es un retículo de Banach, $n\|x^+\| \leq \|y\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $\|x^+\| = 0$, lo que indica que $x^+ = 0$. Por lo tanto, $x = -x^- \leq 0$. ■

Ejemplo 4.3.2 El espacio c_{00} es un ideal en ℓ_∞ que no es cerrado.

Demostración: Sea $A \subset c_{00}$ la familia de sucesiones x_n para cada $n \in \mathbb{N}$, definidas como sigue:

$$x_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{si } m \leq n \\ 0, & \text{si } m > n. \end{cases}$$

Notemos que la sucesión $y = \{\frac{1}{m}\} \in \ell_\infty$ y $x_n \rightarrow y$. Claramente la sucesión $y \notin c_{00}$, por lo tanto c_{00} no es un ideal cerrado. ■

Bibliografía

- [1] Y. Abramovich and C.D. Aliprantis, *An Invitation to Operator Theory*, RI American Mathematical Society, Providence, 2002.
- [2] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Academic Press Inc, Orlando Florida, 1985.
- [3] F. Galaz Fontes, *Elementos de Análisis Funcional*, Centro de Investigación en Matemáticas A.C., Guanajuato, México, 2006.
- [4] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Riesz Spaces*, Vol. I, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1971.
- [5] W. A. J. Luxemburg and L. C. Moore Jr., *Archimedean Quotient Riesz Spaces*, Duke Math. 1967.
- [6] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Springer-Verlag, New York-Berlin Heidelberg, 1991.
- [7] H.H: Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, New York-Berlin Heidelberg, 1974.
- [8] H. U. Schwarz, *Banach Lattices and Operators*, Teubner-texte Zur Mathematik, Leipzig, Alemania, 1984.
- [9] A.W. Wickstead, *Vector and Banach Lattices*, Pure Mathematics Research Centre, Queen's University Belfast (Notas de internet).
- [10] A. C. Zaanen, *Riesz Spaces*, Vol II, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1983.