



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Modelación matemática de la evolución diaria  
de la temperatura y la radiación solar

Maestría

Camilo Abarca Estrada

Asesor: Moisés Soto Bajo

Puebla, Puebla, diciembre 2025.





**BUAP**

Mtro. Alfredo Avendaño Arenaza  
Director General de Bibliotecas  
Presente

A través de este medio me dirijo a usted para informarle que la tesis con título **“Modelación matemática de la evolución diaria de la temperatura y la radiación solar”** ha sido avalada bajo los preceptos de integridad académica; por lo tanto se autoriza la impresión de tesis del alumno:

Nombre del alumno: **Camilo Abarca Estrada**

Matrícula: **224470495**

Facultad: **Facultad de Ciencias Físico Matemáticas**

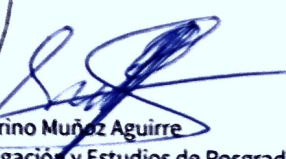
Programa Educativo: **Maestría en Ciencias Matemáticas**

Licenciatura o Posgrado: **Posgrado**

Sin más por el momento, agradezco la atención al presente.



**ATENTAMENTE**  
**“PENSAR BIEN, PARA VIVIR MEJOR”**  
H. Puebla de Z., 4 de diciembre de 2025

  
Dr. Severino Muñoz Aguirre  
Secretario de Investigación y Estudios de Posgrado

  
Dr. Moisés Soto Bajo  
Director de Tesis



# Dedicatoria

*A mis padres:*

*Por todo su tiempo y esfuerzo.*

*A mis hermanos y primos Jesús, Tania, Sandino, Esaú y Camilo:*

*Por todo el tiempo que pasamos juntos.*



## Agradecimientos

Al profesor Moisés Soto Bajo por todo su apoyo durante la realización de este trabajo: tanto por haberme introducido en este tema, como por haberme auxiliado en la organización de la base de datos y en la elaboración de programas.

A los compañeros Eduardo Pérez Domínguez y Betzabeth, por todo el trabajo que realizaron con el profesor Moisés respecto al análisis de datos, estudio de las ecuaciones del tiempo y del amanecer, y estudio de modelos de temperatura, porque el trabajo previamente realizado por ambos ha sentado la dirección de la presente tesis.

A mis padres por todo su tiempo y esfuerzo.

A todos los profesores que he tenido.



Le agradezco a la antes CONAHCYT, ahora SECIHTI, por el apoyo económico que recibí durante la realización de esta tesis correspondiente a cuatro meses, aunque ésta es una tesis de maestría, y por regla general una maestría dura dos años (24 meses) y oficialmente para el momento de redacción de esta tesis me deben otros 6 meses.



# Introducción

El objeto principal de esta tesis es estudiar diferentes cuestiones relacionadas con la temperatura en la superficie terrestre. Históricamente la principal motivación para estudiar la temperatura del aire ha sido su aplicación al estudio de los cultivos, véase [3], [6], [41], [77], [97], etc. Está bien documentado que el crecimiento de las plantas (por ejemplo la soya) varía de acuerdo con la temperatura del aire. En general la temperatura del aire tiene un rol importante en el ciclo de vida de distintas especies de seres vivos, como son las cosechas o las poblaciones de mosquitos. Por tanto el estudio de la temperatura del aire es de vital importancia para la planeación de cosechas, véase [97] y el estudio de su crecimiento, así como en el estudio de epidemias, véase [68]. Particularmente la temperatura del aire al nivel del suelo nos afecta de manera directa, porque vivimos rodeados de este aire y qué temperatura tiene en cada instante determina aspectos de nuestra vida cotidiana.

El aire es un fluido que rodea al planeta tierra. Su temperatura depende de un sinnúmero de variables y determinarla es altamente complicado. La temperatura del aire a bajas alturas (a ras del suelo) es similar a la temperatura del suelo, véase [11], [28] y [44]. Se ha comprobado que los datos presentan un comportamiento periódico, [36]. Esto era de esperarse, porque la principal fuente de calor de la tierra (con diferencia) es el sol. Físicamente la temperatura de la superficie terrestre es resultado de la energía térmica que entra por la atmósfera en forma de radiación menos la energía térmica que emite el planeta tierra. Por este motivo la cuantificación de la radiación solar que llega a la tierra es un factor clave para estudiar la temperatura. En consecuencia en este marco el estudio de la posición relativa de la tierra y el sol es muy relevante. En este trabajo se trata este tema en extenso.

En primer lugar para acometer el estudio de la posición relativa tierra-sol, es necesario entender y clarificar una serie de nociones de índole geométrica o espacial y temporal. Esencialmente por un lado se trata de manejar herramientas básicas que permitan la ubicación espacial de objetos, tanto en un entorno del sol, como internamente en el sol o la tierra, y sus posiciones relativas y movimientos. Por otro lado se trata de tener sistemas efectivos de medición del tiempo, para hacer el seguimiento de las dinámicas que están involucradas. Esto se desarrolla en el capítulo 1 de la tesis. En primer lugar se habla de las cuestiones teóricas más básicas: medida de ángulos y distancias, la geometría de la tierra y sus movimientos de traslación y rotación, así como los marcos de referencia más simples para describir la posición de puntos sobre el globo terráqueo y sobre el firmamento. Se describen ciertos puntos, direcciones, ángulos y planos que son importantes a la hora de describir estos movimientos, y formas de describir su variación temporal. En particular aquí destacan los distintos sistemas de coordenadas espaciales (coordenadas geográficas y heliográficas, ecuatoriales y horizontales, que en esencia son coordenadas esféricas con respecto a ciertos puntos y direcciones de referencia).

En segundo lugar, se trata el tema de la medición del tiempo, que puede aparentar ser algo evidente, pero que en realidad es un tema muy complejo. De manera fundamental se pueden considerar diferentes criterios para los sistemas de medición del tiempo pero que en esencia están determinados por la escala y la metodología y/o causas involucradas. Cabe mencionar aquí la escala anual, ligada al movimiento de traslación y los calendarios; la escala diaria, ligada al movimiento de rotación y el tiempo solar aparente; y la escala atómica (segundo atómico y UTC), relacionada con la medida uniforme (constante) del tiempo.

Históricamente el calendario juliano supuso un gran avance para la medición del tiempo, véase [56], [58] y [87]. Fue una solución para el problema del desfase de los años a corto plazo, pero con el pasar de los siglos se desfasó tanto que el papa Gregorio estableció una corrección que hoy en día conocemos como calendario gregoriano. Una diferencia entre ambos calendarios es el instante que se usa para determinar el comienzo de un día. Para el calendario juliano los días comienzan en el mediodía solar (cuando el sol alcanza la mayor altura posible), mientras que en el calendario gregoriano el día comienza en la medianoche. Por las particularidades del calendario juliano resulta más útil usar una modificación del calend-

rio juliano para calcular los instantes de amanecer y atardecer que el calendario gregoriano. También se dedica una sección a la conversión de fecha juliana a fecha gregoriana y viceversa.

Es innegable que en el estudio de la radiación solar los instantes de amanecer y atardecer de una fecha y lugar de la superficie terrestre concretos son básicos para describir el fenómeno (aquí también es relevante lo que se conoce como ecuación del tiempo). Hay distintas versiones de lo que se conoce como ecuaciones del amanecer y atardecer, que aquí son denominadas clásicas. A pesar de su uso extendido la mayoría de las referencias encontradas simplemente las mencionan y hacen uso de ellas. Entre las referencias encontradas la más antigua es [43]. Sin embargo, ni en ella ni en las fuentes posteriores ha sido posible encontrar una deducción rigurosa y clara. En algunas pocas se hace referencia a Trigonometría esférica para su deducción, pero sin entrar en muchos detalles. Por este motivo, en el capítulo 1 se deducen las ecuaciones del amanecer y del atardecer, tanto la versión clásica en la que se supone un sol unipuntual, como una versión mejorada (también clásica) donde se toma en consideración un sol esférico de cierto grosor y donde además se añade un ángulo asociado a la refracción. Además se desarrolla un refinamiento, que tiene en cuenta la distancia variable (diaria) de la tierra y el sol. Es importante mencionar aquí que únicamente se utilizan nociones elementales de Geometría analítica, en el espacio euclidiano tridimensional.

En el capítulo 2 se describe un catálogo de modelos de temperatura encontrados a lo largo de la literatura. Este catálogo es una ampliación del capítulo 2 de [68]. Puesto que es común que en las bases de datos sean reportadas únicamente las temperaturas mínima y máxima diarias, en este trabajo se siguió como motivación para el análisis de los modelos la misma pregunta planteada en [68]: ¿Es posible estimar la evolución diaria de la temperatura (con una resolución temporal al menos de horas) en un lugar dado de la República Mexicana contando únicamente con datos de temperatura mínima y máxima diaria (aparte de la fecha y la ubicación geográfica)? Existe a lo largo de la literatura una larga lista de modelos de temperatura, que requieren una mayor o menor cantidad de parámetros o datos para calibrarse, y que atienden a distintos niveles de modelización. Muchos de estos modelos están pensados para alguna región en concreto. En este trabajo, aquellos modelos de temperatura que dependen de la temperatura máxima y mínima diaria, según el lugar (esto es para una latitud  $\phi$  y longitud  $\lambda$  dadas) y tiempo (fecha y en su caso instantes del amanecer y del atardecer), pero no de instantes como el tiempo de máxima o mínima temperatura, son considerados admisibles. De acuerdo con este criterio, se realiza una clasificación de los modelos analizados.

En general los modelos encontrados son esencialmente descriptivos, aunque algunos de ellos atienden parcialmente a las causas o la dinámica intrínseca del fenómeno. Sin embargo, una excepción notable se da en [37] y [38], donde se tiene en cuenta la radiación solar como causa principal del calentamiento de la superficie terrestre. Motivados en parte por este enfoque, se desarrolló un modelo físico-geométrico con la finalidad de describir la geometría y mecánica de la evolución del sistema tierra-sol, persiguiendo los siguientes objetivos principales: primero, describir con mayor precisión la radiación solar recibida en un punto de la corteza terrestre, lo que abre una puerta para desarrollar un modelo de temperatura más preciso (entre otras posibles aplicaciones), y segundo, obtención de un refinamiento de las ecuaciones del amanecer y atardecer. En el capítulo 3 se desarrolla el modelo físico-geométrico, mientras que los objetivos son tratados en el capítulo 4 y en el anexo.

En el capítulo 3 se parte de unas hipótesis geométricas y mecánicas, entre las que destacan las Leyes de Kepler. Las leyes de Newton y la Ley de gravitación universal sirven para deducir las Leyes de Kepler (tema clásico en Astrofísica). Éstas son la base para distintas parametrizaciones temporales de la eclíptica (movimiento de traslación), dado un marco de referencia general. En particular, aparte de la parametrización clásica, que usa la anomalía verdadera, se introdujo una parametrización de la eclíptica con un parámetro  $\beta$ , que tiene interpretación geométrica como ángulo, pero sobre todo que da lugar a ecuaciones diferenciales más sencillas. Esto está relacionado con el Problema de Kepler, que relaciona las anomalías media y verdadera. Por otra parte éste se sobrepone a la parametrización del movimiento

de rotación terrestre, para lo que se introduce un marco de referencia geocéntrico móvil.

En el capítulo 4 se presentan aplicaciones del modelo geométrico, que son esencialmente dos, como ya se ha dicho. En primer lugar, se introducen unas coordenadas heliográficas para la ubicación de puntos en la superficie del sol, para estudiar las posiciones relativas de puntos en las superficies del sol y la tierra. Con base en esto se introducen las condiciones de visibilidad, que son las restricciones geométricas (en salida y llegada) que se requieren para que un fotón pueda llegar de un punto del globo solar al globo terráqueo. Esto permite definir, describir y estudiar el área visible (e inclusive parametrizar su frontera) desde un punto  $z$  sobre el globo terráqueo.

Como corolarios de lo anterior se obtiene lo siguiente: por un lado se puede cuantificar la cantidad de radiación solar recibida en cada instante por un punto de la superficie terrestre. En el capítulo 4 se incluye un cálculo de la radiación emitida por la zona visible del sol para un punto  $z$  sobre el globo terráqueo en un instante  $t$ . Esto es importante porque abre la posibilidad de mejorar los modelos de temperatura existentes. Se ha observado que los periodos en que los distintos modelos de la literatura tienen un peor desempeño son los periodos de amanecer y atardecer, lo que es esperable, porque el observador  $z$  en el *periodo del amanecer* pasa de no ver al sol, a ver un punto y luego un casquete, que se va viendo parcialmente hasta completar toda su extensión. En el *periodo del atardecer* naturalmente viceversa (pasa de ser visible un casquete, a ser visible un punto y luego no ser visible en absoluto). Por otro lado se obtiene una versión refinada de las ecuaciones del amanecer y atardecer, con base en el desarrollo anterior. Cabe destacar que se pasa de los *instantes del amanecer y atardecer*, al concepto de *periodos del amanecer y atardecer*. Las dos condiciones de visibilidad, que toman forma de desigualdades, dan lugar a las restricciones del amanecer y atardecer, cuando se convierten en igualdades simultáneamente. Esto junto con la compleción del casquete solar visible, permite definir estos periodos.



# Índice general

<b>1. Sistemas de medición espaciales y temporales a escala humana</b>	<b>1</b>
1.1. Preliminares matemáticos	1
1.1.1. Funciones techo y piso	1
1.1.2. Función módulo generalizado	1
1.1.3. Medición de ángulos	2
1.1.3.1. Ángulos medidos en grados y radianes	2
1.1.3.2. Medición de ángulos en el (1-) toro topológico	2
1.2. Consideraciones sobre lugares, movimientos y posiciones relativas	3
1.2.1. Consideraciones geométricas sobre lugares	3
1.2.1.1. Globo terráqueo	3
1.2.1.2. Rotación y traslación terrestres	3
1.2.1.2.1. Traslación y plano eclíptico	3
1.2.1.2.2. Rotación y plano ecuatorial	3
1.2.1.2.3. Bóveda celeste	4
1.2.1.2.4. Puntos Aries y Capricornio	4
1.2.1.2.5. Afelio y Perihelio	4
1.2.1.2.6. Anomalías media y verdadera	4
1.2.1.3. Combinación de los movimientos de traslación y rotación	5
1.2.1.3.1. Precesión y oblicuidad	5
1.2.2. Sistemas de coordenadas espaciales	6
1.2.2.1. Coordenadas geográficas: latitud y longitud	6
1.2.2.2. Coordenadas ecuatoriales	7
1.2.2.3. Coordenadas horizontales: azimutal y altitud	8
1.3. Sistemas de medición del tiempo	9
1.3.1. Sistemas de medición del tiempo a escala anual	9
1.3.1.1. Fechas prolepticas	9
1.3.1.2. Calendario juliano	10
1.3.1.3. Calendario gregoriano	10
1.3.1.4. Conversión de sistema juliano a gregoriano y viceversa	11
1.3.2. Sistemas de medición del tiempo a escala diaria, tiempo solar aparente y tiempo solar medio	15
1.3.2.1. Hora y ángulo hora solar	15
1.3.2.2. Tiempo solar aparente (local)	16
1.3.2.3. Sol y tiempo solar medio	16
1.3.2.4. Tiempo universal coordinado	17
1.3.2.4.1. UTC, precesión y tiempo universal coordinado	17
1.3.2.4.2. Tiempo Atómico Internacional	17
1.3.2.4.3. Ecuación del tiempo	17
1.3.2.5. Periodos notables del día	18
1.3.2.5.1. Amanecer y atardecer	18
1.3.2.5.2. Refracción atmosférica	18
1.3.2.5.3. Mediodía solar y Medianoche solar. Día y noche	19
1.3.2.5.4. Cálculo de los instantes, duraciones	19
1.3.2.6. Relación entre las coordenadas ecuatoriales, horizontales y el ángulo hora solar	20

1.3.2.6.1.	Deducción de las ecuaciones del amanecer y atardecer, suponiendo sol puntual . . . . .	21
1.3.2.6.2.	Ecuaciones del amanecer y atardecer suponiendo un sol esférico . . . . .	22
1.3.3.	Relación entre $a^\odot$ y $\theta^\odot$ . . . . .	23
1.3.3.1.	Refracción . . . . .	24
1.3.3.2.	Ecuación del amanecer . . . . .	25
1.3.3.3.	Husos horarios . . . . .	26
<b>2.</b>	<b>Modelos de evolución diaria de temperatura</b>	<b>29</b>
2.1.	Notación y fórmulas básicas . . . . .	29
2.2.	Modelos aproximativos . . . . .	30
2.2.1.	De Carson [18] . . . . .	30
2.2.2.	De Richardson, Seeley y Walker [73] . . . . .	30
2.2.3.	Sanders [77] . . . . .	30
2.2.4.	De Gringorten, [36] . . . . .	31
2.2.4.1.	De Gringorten . . . . .	31
2.2.4.2.	De Hansen . . . . .	31
2.2.5.	De Heurer, Heermann, McKee y Benci [41] . . . . .	31
2.2.6.	De Walter [91] . . . . .	32
2.2.7.	De Watanabe [94] . . . . .	34
2.2.8.	De Allen [3] . . . . .	34
2.2.9.	De Wilkerson, Jones, Boote, Ingram y Mishoe [96] . . . . .	35
2.2.10.	De Boyer [32] . . . . .	35
2.2.11.	De Bergh, Wyk, Wyk y Udahemuka [13] . . . . .	36
2.3.	De horas de sol . . . . .	38
2.3.1.	De Anway, Brittain, Hunt, Innis, Parton, Rodell y Sauer [6] . . . . .	38
2.3.2.	De de Wit [97] . . . . .	38
2.4.	Del periodo de la noche . . . . .	40
2.4.1.	De Johnson y Fitzpatrick [48] . . . . .	40
2.4.2.	De Parton y Logan [65] . . . . .	42
2.4.3.	De Kimball y Bellamy [52] . . . . .	44
2.4.4.	De Linvill [53] . . . . .	47
2.4.5.	De Tejeda Martínez [85] . . . . .	48
2.4.6.	De Cesaraccio, Spano, Duce y Snyder [20] . . . . .	48
2.4.7.	De Schädlich, Göttsche y Olesen [78] . . . . .	49
2.4.7.1.	De Schädlich, Göttsche y Olesen . . . . .	49
2.4.7.2.	Modificación de Gholamnia, Alavipanah , Bolorani, Hamzeh y Kiavarz [34] . . . . .	50
2.4.8.	De Bergh, Wyk, Wyk y Udahemuka [13] . . . . .	51
2.5.	Del comportamiento asintótico del decaimiento de la temperatura en la noche	53
2.5.1.	De Göttsche y Olesen (2001) [37] . . . . .	53
2.6.	Del calentamiento: radiación solar . . . . .	55
2.6.1.	De Göttsche y Olesen (2009) [38] . . . . .	55
2.6.2.	De Felber, Stoeckli y Calanca [31] . . . . .	56
2.7.	Estadísticos-Ciencia de datos . . . . .	58
2.7.1.	De Sadler y Schroll [76] . . . . .	58
2.7.1.1.	Modelo probabilístico CDF . . . . .	58
2.7.1.2.	Modelo empírico <i>TFIT</i> . . . . .	59
2.7.2.	De Cresswell, Morse y Thompson [23] . . . . .	60
2.7.3.	De Brandsma y Können [16] . . . . .	61
2.7.4.	De Smith, McClendon y Hoogenboom [81] . . . . .	61
2.7.5.	De Zeng, Wardlow, Tadesse, Shan, Hayes, Li y Xiang [98] . . . . .	61
2.8.	Resumen . . . . .	61



4.3.2.	Punto más cercano del sol a la superficie terrestre . . . . .	100
4.3.3.	El primer punto que se asoma al amanecer . . . . .	101
4.3.3.1.	Distinción del primer punto en asomarse en el amanecer y el primer punto en ocultarse al atardecer . . . . .	102
4.3.3.1.1.	Deducción de las condiciones . . . . .	102
4.3.3.1.2.	Suficiencia de las condiciones . . . . .	103
4.4.	Ecuaciones del tiempo . . . . .	103
4.4.1.	Cuantificación de la radiación emitida por el Sol . . . . .	103
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>105</b>
<b>A.</b>	<b>Apéndice</b>	<b>109</b>
A.1.	Leyes de Kepler . . . . .	109
A.1.1.	Primera ley de Kepler . . . . .	109
A.1.2.	Segunda ley de Kepler . . . . .	110
A.1.3.	Tercera ley de Kepler . . . . .	111
A.2.	La esfera como variedad diferenciable . . . . .	112
A.2.1.	La esfera como variedad riemanniana . . . . .	112
A.2.1.1.	Coordenadas geográficas . . . . .	113
A.2.1.2.	Coordenadas horizontales . . . . .	113
A.2.2.	Forma volumétrica sobre la esfera . . . . .	114
A.2.3.	Dos integrales sobre la esfera . . . . .	115
A.2.3.1.	Radiación emitida entre el amanecer y el atardecer . . . . .	115
A.2.3.2.	Radiación emitida durante el amanecer y atardecer . . . . .	116
A.2.3.2.1.	Cálculo de la integral usando Stokes-Cartan más cambio de variable . . . . .	117

# Capítulo 1

## Sistemas de medición espaciales y temporales a escala humana

### 1.1. Preliminares matemáticos

#### 1.1.1. Funciones techo y piso

Dado un número real  $\alpha$  se define la función piso  $\lfloor \cdot \rfloor$  como el mayor entero  $n$  menor o igual que  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto \lfloor \alpha \rfloor =: \max_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \leq \alpha}} n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

La función *techo*  $\lceil \cdot \rceil$  se define de manera similar, como el menor entero mayor o igual que el número real  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto \lceil \alpha \rceil =: \min_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \geq \alpha}} n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

La diferencia entre la función piso y la función techo es uno si  $\alpha$  no es un número entero, si no es cero:

$$\lceil \alpha \rceil - \lfloor \alpha \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}, \\ 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Notación:**  $\llbracket n, m \rrbracket =: \{n, \dots, m\}$ , con  $n \leq m$  y  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

#### 1.1.2. Función módulo generalizado

Dados dos números reales  $r, s \in \mathbb{R}$  existen  $n \in \mathbb{Z}$  y  $q \in \mathbb{R}$ , tales que

$$r = n \cdot s + q, \quad 0 \leq q < s. \tag{1.3}$$

Puede expresarse el valor de  $n$  en términos de  $r$  y  $s$ :

$$\begin{aligned} \frac{r}{s} &= n + \frac{q}{s}, \quad 0 \leq \frac{q}{s} < 1, \\ \left\lfloor \frac{r}{s} \right\rfloor &= n. \end{aligned}$$

También puede expresarse el valor de  $q$  en términos de  $r$  y  $s$ :

$$\begin{aligned} \frac{r}{s} &= \left\lfloor \frac{r}{s} \right\rfloor + \frac{q}{s}, \\ q &= r - s \cdot \left\lfloor \frac{r}{s} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Se define la función *módulo (generalizado)* como este número  $q$ ,

$$\text{mod}(r, s) =: q. \quad (1.4)$$

Ésta es una generalización de la función módulo, usualmente definida de la misma forma en matemáticas para los números naturales.

### 1.1.3. Medición de ángulos

Por ángulo se entiende la apertura formada por dos semirrectas que tienen en común el origen. Para medir ángulos se debe aceptar un convenio, a modo de evitar confusiones sobre en qué dirección se está midiendo un ángulo, de lo contrario no hay forma de distinguir un ángulo  $\alpha$  del ángulo  $-\alpha$ . Se fijan direcciones y un sentido. Por ejemplo para medir latitudes el convenio es que al moverse hacia el este la latitud aumente.

#### 1.1.3.1. Ángulos medidos en grados y radianes

En los textos de matemáticas puras los ángulos suelen medirse en radianes, unidad de medida que se usará en este texto. En física, específicamente en astronomía, es más común el uso de los *grados* ( $360^\circ = 2\pi$  radianes), véase [3], [4] o [56]. Los grados se subdividen en arco-minutos ( $1^\circ = 60$  arco-minutos) y éstos a su vez se subdividen en segundos (1 arco-minuto=60 arco-segundos).

También se usan los términos *hora*, *minuto* y *segundo* para hablar de unidades temporales, véase la sección 1.3.2.1 *Hora y ángulo hora solar*.

Las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente y cotangente se usarán tomando su argumento en radianes como es usual en matemáticas, de modo que, por ejemplo:  $\text{sen}(\pi) = 0$ . En [68] se define para trabajar con grados una familia de funciones trigonométricas, que son las funciones trigonométricas usuales usando el cambio de argumento adecuado. Para este trabajo se optó por el uso de las funciones trigonométricas con sus argumentos en radianes como es usual en matemáticas, pero para un argumento en grados, por ejemplo la función seno, debe evaluarse del siguiente modo:

$$\text{sen}(\alpha^\circ) =: \text{sen}\left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha\right). \quad (1.5)$$

Los ángulos al medirse en grados o radianes se toman de acuerdo con alguna convención en algún intervalo, que bien puede ser de la forma  $[-\gamma, \gamma]$  o  $[0, 2\pi\gamma]$ , para  $\gamma$  igual a 90, 180 si se trabaja en grados, o  $\gamma$  igual a  $\frac{\pi}{2}$  o  $\pi$  si se trabaja en radianes. La convención adoptada depende de qué medición angular se esté realizando, para cada medición angular a lo largo del presente trabajo se aclara la convención.

#### 1.1.3.2. Medición de ángulos en el (1-) toro topológico

Los ángulos también pueden representarse usando herramientas matemáticas más complejas, usando por ejemplo el (1-) *toro topológico*, que se define como el siguiente conjunto:

$$\mathbb{T} =: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad (1.6)$$

sobre este conjunto está definida una *proyección canónica*, que se acostumbra denotar  $\pi$ , no confundir con el número  $\pi$ , esta proyección no es un número sino una función dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\pi} \mathbb{T} \\ t &\mapsto t + 2\pi\mathbb{Z} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Sobre el toro topológico no existe el problema de elegir algún intervalo que sea más o menos conveniente para representar un ángulo, porque aquellos valores que distan un múltiplo entero de  $2\pi$  son enviados por la proyección canónica al mismo valor:  $\pi(t) = \pi(t + 2k\pi)$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

En el presente trabajo cuando el ángulo está representado en el toro se usan las mismas expresiones trigonométricas de senos, cosenos y demás, aunque estrictamente hablando no sean las mismas funciones, por la siguiente razón:

Dado que las funciones trigonométricas son  $2\pi$ -periódicas todos sus valores están determinados por los valores que toman en  $[0, 2\pi)$  y para cualquier función  $2\pi$ -periódica (por ejemplo  $f = \text{sen}$ ) existe una única función del (1-) toro topológico que vuelve conmutativo el siguiente diagrama<sup>1</sup>:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
 \downarrow \pi & \nearrow \tilde{f} & \\
 \mathbb{T} & & \\
 \downarrow r & & \\
 \mathbb{T} & & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \tilde{f}(t+2\pi\mathbb{Z}) =: \\
 \uparrow \\
 t+2\pi\mathbb{Z}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 f(\lceil \frac{t}{2\pi} \rceil - t)
 \end{array}
 \quad (1.8)$$

Como se dijo, por simplicidad en el presente trabajo se denota de la misma forma tanto a las funciones  $f = \text{sen}$ ,  $\text{cos}$  y  $\text{tan}$  como sendas funciones  $\tilde{f}$ .

## 1.2. Consideraciones sobre lugares, movimientos y posiciones relativas

### 1.2.1. Consideraciones geométricas sobre lugares

#### 1.2.1.1. Globo terráqueo

Sabemos que el planeta Tierra tiene una forma que cambia con el transcurso del tiempo: los mares tienen mareas y la actividad tectónica modifica la superficie terrestre. No obstante una buena aproximación es una esfera, a ésta se le conoce como la *esfera (o globo) terrestre*. Si los mares se mantuviesen quietos y cubriesen toda la superficie terrestre formarían una figura conocida como *geoide*. La geoide es la superficie equipotencial que define la suma de energía potencial gravitacional terrestre más su fuerza centrífuga (debido a su desplazamiento) que salvo por el relieve es la forma del planeta (comparte centro de masa). Lo usual es que se obtenga una buena aproximación de la geoide mediante series trigonométricas de la diferencia de ella y la elipsoide, véase [2], pero una mejor aproximación se obtiene al emplear la Teoría de la relatividad, véase [33]. La diferencia entre ambas aproximaciones ronda 1 centímetro. Para el presente texto será suficiente la aproximación del globo terráqueo.

#### 1.2.1.2. Rotación y traslación terrestres

**1.2.1.2.1. Traslación y plano eclíptico** El planeta Tierra gira alrededor del sol, a la curva que forma se le conoce como *eclíptica* y al plano que la contiene *plano eclíptico*. La eclíptica es una elipse muy similar a una circunferencia, su excentricidad es de 0.0167 (véase [56]) y tiene al Sol en uno de sus focos, el cual está por lo tanto cerca de su centro.

**1.2.1.2.2. Rotación y plano ecuatorial** Además del movimiento de traslación el planeta Tierra gira sobre su propio eje. A este movimiento se le denomina *rotación*. Al eje alrededor del cuál rota se le conoce como *eje de rotación*, las semirrectas que lo conforman se identifican como los *polos positivo* y *negativo* (no coinciden con sendos polos magnéticos negativo y positivo, pero sí son cercanos). Al plano perpendicular al eje de rotación terrestre

<sup>1</sup>Aquí que el diagrama conmute significa que  $f = \tilde{f} \circ \pi$ .

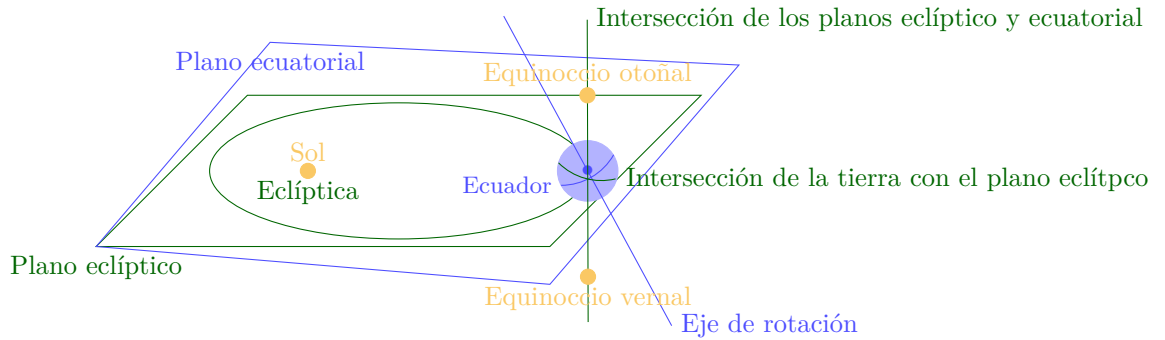


Figura 1.1: Plano ecuatorial y ecuador en azul, plano y curva eclípticos en verde.

se le conoce como *plano ecuatorial*, y a su intersección con la superficie, es decir con el globo terráqueo, *ecuador*.

**1.2.1.2.3. Bóveda celeste** Es común en Astronomía hablar de la posición de los objetos sólo en términos de su posición angular, véase [56] y [87]. A la proyección (esférica) de los cuerpos celestes sobre el globo terráqueo se le llama *bóveda celeste*.

**1.2.1.2.4. Puntos Aries y Capricornio** La intersección de los planos ecuatorial y eclíptico es una recta que pasa por el centro de la Tierra. En esta recta se distinguen dos sentidos, uno que va desde el centro de la tierra hasta la posición del sol en el equinoccio vernal (*punto Aries*), equinoccio que marca el comienzo de la primavera en el hemisferio norte terrestre, y otro que parte del centro de la Tierra y va a la posición del sol en el equinoccio otoñal (*punto Capricornio*), véase la figura 1.2, que marca el comienzo del otoño también en el hemisferio norte, véase [74]. Es decir que los puntos Aries y Capricornio son los puntos de la posición del sol en los comienzos de sendos primavera y otoño. Todo lo que depende de la intersección de estos dos equinoccios depende de la fecha, porque como se dijo la oblicuidad no es constante.

**1.2.1.2.5. Afelio y Perihelio** El *afelio* y el *perihelio* son sendos puntos de la eclíptica más lejano y cercano al sol [56]. De manera general, para un cuerpo que orbita otro cuerpo, a los puntos de su órbita más lejano y cercano del cuerpo que orbitan se les llama sendos apoapsis y periapsis.

Dado que la eclíptica es una elipse los puntos Afelio y Perihelio están conectados por el *eje mayor* de la eclíptica, recta que también pasa por los focos, es decir que también pasa por el centro del sol.

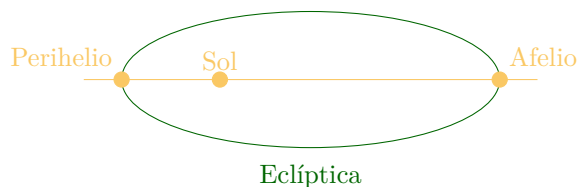


Figura 1.2: Verde: eclíptica, amarillo: Sol, Afelio, Perihelio y el eje mayor de la órbita. La excentricidad de la órbita ha sido exagerada para mejorar la claridad.

**1.2.1.2.6. Anomalías media y verdadera** El sol tiene un movimiento rotacional alrededor de su propio eje, así que se le puede definir su propio plano ecuatorial de la misma forma en que se define el plano ecuatorial (terrestre). El plano ecuatorial solar y el plano eclíptico (el plano que contiene la elipse que forma la órbita terrestre) se intersectan en

una recta, en la cual se distinguen dos semirrectas que parten del centro del sol, llamadas *nodo descendente* y *ascendente*. La tierra atraviesa el nodo ascendente cuando pasa por el hemisferio sur solar hacia el norte, y la tierra atraviesa el nodo descendente cuando pasa por el hemisferio norte del sol hacia el sur.

Se define la *longitud del nodo ascendente*  $\Omega$  como el ángulo formado por dos semirrectas que confluyen en el centro de la tierra: la del punto Aries y la del nodo ascendente [56]. Se define el *argumento del perihelio* análogamente, como el ángulo comprendido entre la semirrecta que pasa por el centro del sol y va al nodo ascendente, y la semirrecta que va del centro del sol al perihelio, de hecho la longitud del perihelio es la suma del argumento del perihelio y la longitud del nodo ascendente.

La llamada *anomalía verdadera* es el ángulo comprendido entre la semirrecta que va desde el centro del sol hacia el perihelio (solsticio de invierno) y la semirecta que va desde el centro del sol a la posición del centro de la tierra.

La *anomalía media (o ficticia)* es el ángulo que formaría una *tierra ficticia* con el perihelio, medido con respecto al sol. Una tierra ficticia que circulase a través de una trayectoria circular de radio  $S_1$ ,  $S_1$  la mitad de la distancia del perihelio y el afelio, moviéndose con una rapidez angular constante tal que tardase el mismo tiempo en darle la vuelta al sol partiendo del (y volviendo al) perihelio que el tiempo que tarda la tierra, es decir un año.  $S_1$  de hecho es el *semieje mayor* de la elipse que describe la tierra en su movimiento de traslación.

Se llama *ecuación del centro* a la diferencia entre las anomalías verdadera y media.

### 1.2.1.3. Combinación de los movimientos de traslación y rotación

**1.2.1.3.1. Precesión y oblicuidad** El plano ecuatorial y el plano eclíptico no coinciden, sino que forman un ángulo *de oblicuidad* que cambia conforme la fecha, pero que ronda los  $23^\circ$ ,  $\varepsilon \approx 23.44^\circ = 0.4091$  radianes., véase [56].

El eje de la tierra no se mantiene en un mismo lugar respecto al plano eclíptico, a su movimiento se le conoce como *precesión general*, ésta por simplicidad se estudia como la suma de dos movimientos: *precesión*, parte *aperiódica*, y *nutación*, la parte *periódica*, véase [86]. La precesión se debe principalmente a la atracción gravitacional de la luna y los otros planetas del sistema solar. Mientras que la nutación se debe principalmente a la atracción gravitacional solar. Ambos movimientos dependen de la posición de los otros cuerpos y de la geometría de la tierra, estructura interna de la tierra, pero se pueden modelar matemáticamente con una precisión razonable.

La oblicuidad no es producida por la precesión, sino por la nutación, véase [56].

*Movimiento polar*: Aparte de esto afectan otros fenómenos complejos, difíciles de modelar (variaciones geográficas o meteorológicas, derretimiento de los glaciares y variación en la distribución en la masa de la tierra). Esto se calibra mediante mediciones astronómicas.

*Precesión*: movimiento circular del eje de rotación respecto a la eclíptica; *nutación*: perturbación de la precesión. La precesión es un movimiento angularmente uniforme con rapidez angular  $\omega = 50$  segundos de arco por año, el eje polar da una vuelta alrededor de la normal de la eclíptica en aproximadamente  $n = 26,000$  años, ya que si  $n \cdot \omega = 360^\circ = 360 \cdot 3600''$ , entonces

$$\begin{aligned} n &= \frac{360 \cdot 3600''}{\omega} = \frac{360 \cdot 600}{50} \text{ años} \\ &= 25,920 \text{ años} \approx 26,000 \text{ años.} \end{aligned}$$

Hay otras aportaciones, la principal es un movimiento sinusoidal de periodo de 18.6 años debido a la órbita lunar. Se usan aproximaciones trigonométricas con precisión de milisegundos de arco, véase [87].

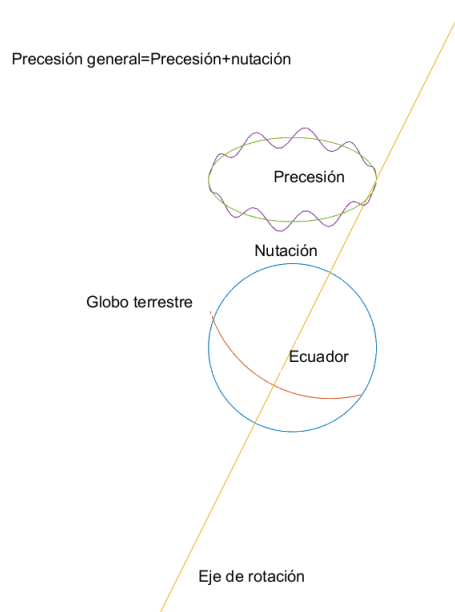


Figura 1.3: En azul la precesión y en verde la *precesión general* (precesión más nutación).

## 1.2.2. Sistemas de coordenadas espaciales

En esta sección se trata la forma en la que ubicamos puntos en la corteza o superficie terrestre (globo terráqueo) de manera cuantitativa, mediante el uso de sistemas de referencia y coordenadas en ellos.

Un sistema de referencia que toma como origen al centro de la tierra se conoce como *geocéntrico* o *terrestre*, y si toma al del sol, *heliocéntrico*. Es conveniente usar sistemas de referencia cartesianos o esféricos, en particular nos interesaremos por coordenadas geocéntricas esféricas.

Los marcos de referencia estandarizados en esencia siguen este paradigma, se construyen tomando como ejes de referencia, para definir las coordenadas angulares, distintos puntos de referencia. La variabilidad (debida por ejemplo a la oblicuidad) entre ellos hace que no sean equivalentes.

### 1.2.2.1. Coordenadas geográficas: latitud y longitud

Como se dijo antes, una esfera es una buena aproximación de la forma del planeta tierra. Lo usual es trabajar una esfera usando meramente coordenadas angulares, llamémoslas *coordenadas esféricas* (de radio constante). Se les llama *coordenadas geográficas* al par  $(\phi, \lambda)$  de latitud y longitud, que se definen a continuación:

Para definir los *meridianos* y la *latitud* necesitamos el concepto de *círculo máximo*, un *círculo máximo* es una circunferencia con centro en el origen (el centro del planeta Tierra) cuyo radio es el centro de la esfera (en este caso: el globo terráqueo).

Los *meridianos* son los círculos máximos que pasan por los polos y por tanto son perpendiculares al ecuador en los dos puntos en que se intersectan. La *latitud*  $\phi$  es una medida angular, dado un punto sobre el globo terráqueo se mide siguiendo su meridiano, se mide de manera que el ecuador esté en la latitud 0 y los polos norte y sur tengan sendos valores  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  radianes y  $-90^\circ = -\frac{\pi}{2}$  radianes. Esta coordenada toma valores en  $[-90, 90]$  grados o en  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  radianes.

La *longitud*  $\lambda$  es un ángulo en  $[0, 360]$  en grados o en  $[0, 2\pi]$  en radianes; si se mide la longitud hacia el *oeste* se le asigna un valor negativo; la longitud siempre se mide paralelamente al meridiano de Greenwich proyectando al ecuador sobre la misma longitud y desplazándose sobre el ecuador; el meridiano de Greenwich tiene longitud cero. Por otro lado los *paralelos* son intersecciones de planos paralelos al ecuador con el globo terráqueo. Los paralelos tienen latitud constante y los meridianos son curvas con longitud constante.

Las coordenadas geográficas vienen determinadas por el eje de rotación, el meridiano de Greenwich y los sentidos Norte-Sur y Este-Oeste. Por tanto, no cambian con el tiempo desde una perspectiva intrínseca del globo terráqueo. Tampoco dependen de la posición de un observador. Se puede decir entonces que son coordenadas globales en espacio y tiempo.

### 1.2.2.2. Coordenadas ecuatoriales

Para medir las posiciones sobre la esfera celeste, lo usual es que se empleen ángulos análogos a la longitud  $\lambda$  y latitud  $\phi$  terrestres, sendos *ascensión recta*  $\alpha$  y *declinación*  $\delta$ . A este par  $(\alpha, \delta)$  se le llama *coordenadas ecuatoriales*, en analogía a cómo se describen posiciones en la tierra usando meridianos y paralelos (longitud y latitud), se usan para medir la posición de un cuerpo en la bóveda celeste, en particular el sol.  $\delta$  es un ángulo en  $[-90, 90]$  en grados o en  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  en radianes, toma el valor 0 en el ecuador,  $\delta = \frac{\pi}{2}$  en el polo norte y  $\delta = -\frac{\pi}{2}$  en el polo sur. Mientras que  $\alpha$  es un ángulo en  $[0, 360]$  en grados o en  $[0, 2\pi]$  en radianes,  $\alpha = 0$  en el punto Aries,  $\alpha = \pi$ , en el punto Capricornio. Estas coordenadas pueden verse como unas coordenadas geográficas, en las que se asume un desfase en la longitud, de acuerdo con la posición del punto Aries.

En el presente trabajo se usan en concreto para describir la posición del sol, así que en particular se usa una *declinación solar* y una *ascensión recta solar*.

Las coordenadas geográficas dependen de los polos norte y sur (equivalentemente del eje de rotación), análogamente las coordenadas ecuatoriales dependen de los puntos Aries y Capricornio, el ángulo  $\alpha$  es el análogo del ángulo  $\lambda$  y el ángulo  $\delta$  es el análogo del ángulo  $\phi$ ;  $\delta$  coincide con la medición de  $\phi$  de la proyección sobre el globo terráqueo, pero  $\alpha$  no coincide con  $\lambda$ , está desfasado ( $\lambda$  se mide respecto al meridiano de Greenwich y  $\alpha$  respecto al círculo máximo que conecta a los polos y pasa por el punto Aries, teniendo el valor 0 para dicho punto). Dependen de la posición relativa de los planos ecuatorial y eclíptico, o lo que es lo mismo, de la precesión general. Por tanto, estas coordenadas en el globo terráqueo no están definidas de manera intrínseca. Dependen de la fecha, incluso del instante (dependiendo de la aproximación que se tome de la precesión general). Fijada la fecha, no dependen de la posición de un observador en el globo terráqueo. En resumen, son coordenadas locales en el tiempo (para una fecha determinada), pero globales en el espacio (en el globo terráqueo).



Figura 1.4: Longitud y latitud, izquierda y ascensión recta y declinación solar, derecha

### 1.2.2.3. Coordenadas horizontales: azimutal y altitud

Un observador en una posición geográfica sobre la superficie terrestre tiene una visión limitada por su *plano tangente*. Se le llama *horizonte terrestre* al límite de su visión sobre la bóveda celeste. En algunas fuentes se define como el plano tangente al observador, véase [42] y [14], pero esto no es exactamente así. Recordemos que la bóveda celeste es una proyección esférica del firmamento sobre el globo terráqueo, dado que el plano tangente se corresponde sobre el firmamento con el alcance de su visión, la zona sobre la bóveda celeste es la proyección esférica del plano tangente, que es una semiesfera. Luego el horizonte astronómico, que es el límite del alcance de su visión, no puede ser el plano tangente, sino el borde de su proyección sobre la bóveda celeste, que es el borde de dicha semiesfera, es decir: una circunferencia, que de hecho es un círculo máximo perpendicular al vector posición de un observador desde el centro de la tierra.

Se le llama *cénit* (o *zénit*) a la proyección de la semirrecta que conecta la posición del observador con el centro de la tierra sobre la bóveda celeste, véase [84] y [14]. En [14] se define como *la posición máxima que toma el sol sobre el cielo*, no obstante sólo cuando la proyección del sol sobre la bóveda celeste coincide con la proyección de la eclíptica sobre la bóveda celeste el sol toma esa posición. Visto desde la tierra quien gira es el sol y por esta razón al proyectar sobre la Bóveda celeste el centro del sol siempre está sobre la curva eclíptica. De modo que cuando el observador no está sobre la proyección de la curva eclíptica sobre la bóveda celeste al proyectar la posición del sol sobre la bóveda jamás coincide con la proyección de la posición del observador.

El nadir se define de modo que el nadir y el cénit sean puntos *antipodales*, es decir que se encuentran en extremos opuestos de la esfera. A menudo se denotan el cénit y el nadir con  $z$  y  $z'$ .

Estas coordenadas dependen de la posición del observador. Cénit y nadir tienen roles similares a los polos norte y sur. En lugar de un *meridiano de Greenwich* se usa una proyección de los cuatro puntos cardinales sobre el horizonte: para cada punto cardinal se toma el valor sobre el horizonte más cercano a cada punto cardinal, véase la figura 1.5, para diferenciar a los puntos cardinales de sus proyecciones sobre el horizonte se usa una marca sobre los segundos. Nótese que desafortunadamente estas coordenadas no están definidas para el polo norte ni para el polo sur.

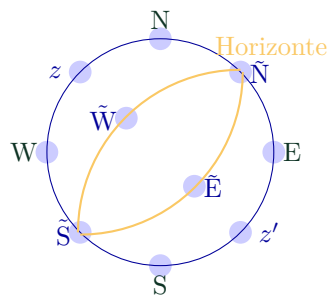


Figura 1.5: Los puntos cardinales reales están indicados con letras verdes; sus proyecciones al horizonte, azules con virgulilla; el horizonte, amarillo. También son azules el cénit ( $z$ ) y el nadir ( $z'$ ).

Dado un objeto en el firmamento se define su *altitud* análogamente a la latitud, tomando en lugar del polo norte la posición del observador, se mide en  $[-90, 90]$  grados o en  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  radianes, véase la figura 1.6, de modo que el cénit tiene altitud de 90 grados y el nadir de -90 grados. Aunque se use el término *altitud* no se está hablando de altura, así como las coordenadas anteriores, son coordenadas angulares. Se usa el término *altitud*, porque desde la perspectiva del observador al medir esta coordenada para la posición de algún objeto sobre la esfera celeste esta coordenada se mide *ascendentemente*. En consecuencia este sistema de

coordenadas no está bien definido para un observador que se encuentra en el polo norte o sur. El análogo del ecuador es el *horizonte*.

El *ángulo azimutal*  $Az$  se define de manera análoga a la longitud, véase figura 1.6, se realiza la medición comenzando en el punto  $\tilde{N}$  y avanzando hacia  $\tilde{E}$ . En  $\tilde{E}$ ,  $Az = 90^\circ$ ; en el  $\tilde{S}$ ,  $Az = 180^\circ$ , y en el  $\tilde{W}$ ,  $Az = 270^\circ$ , véase figura 1.5.

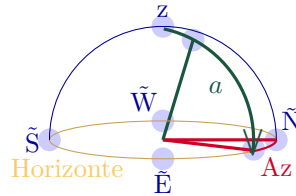


Figura 1.6: Coordenadas horizontales. El horizonte es amarillo; los nodos del cenit y el observador, azul celeste; el ángulo de altitud, verde, y el ángulo azimutal, rojo.

Las *coordenadas horizontales* son el par  $(a, Az)$ , donde  $a$  es la *altitud*, y  $Az$ , el *ángulo azimutal*. Al ángulo complementario al azimutal se le llama (*ángulo*) *cenit*  $\theta$ , (o *cenital*), contrario a lo que indica el nombre, no coincide con el *cenit*, porque el cenit es un punto en la bóveda celeste. El par es análogo a las coordenadas geográficas, siendo la altitud un ángulo análogo a la latitud, y el azimutal, a la longitud. En esta analogía los puntos cenit y nadir ocupan los lugares de sendos polos norte y sur y el horizonte tiene el papel del ecuador.

### 1.3. Sistemas de medición del tiempo

A lo largo de esta sección, se denota con hora, minuto y segundo unidades temporales, unidades que están definidas en el Sistema Métrico Internacional, refiriéndose a la fecha gregoriana (que es la que usualmente se usa en la vida cotidiana). Estas mediciones son a escala diaria, mensual y anual. Para las mediciones del tiempo en fracciones del día (horas, minutos y segundos), se usa el estándar conocido como UTC, siendo la unidad de medida el segundo atómico.

#### 1.3.1. Sistemas de medición del tiempo a escala anual

En su momento el calendario juliano fue una innovación que permitió tener un registro más preciso del tiempo. La innovación de este calendario fue la introducción de un *año bisiesto*, no obstante la introducción de un año bisiesto solamente fue una solución a corto plazo. Con el pasar de los siglos, el error fue acumulándose. Hasta que por el siglo XIV el papa Gregorio decidió realizar un cambio de calendario, este segundo calendario hoy en día es el más usado y el estándar a nivel mundial, véase [87] y [17].

Hoy en día acostumbramos contar a partir de uno, de uno en uno, y solemos fijar al cero como el comienzo. Por ejemplo al fijar el plazo de tiempo que se tiene para preparar un examen, el día que se fija este plazo se toma como el día cero, día uno cuando se ha cumplido un día. No obstante esta concepción no siempre fue así, recordemos que el cero es un concepto relativamente reciente, lo normal es que se comenzara a contar desde el uno. En la concepción original de ninguno de los calendarios (ni juliano ni gregoriano) se comienza a contar desde el cero. En el calendario gregoriano se pasa del año  $-1$  (o 1 antes de nuestra era) al 1 después de nuestra era.

##### 1.3.1.1. Fechas prolépticas

La siguiente es una aclaración sobre los días de los calendarios: los calendarios han sufrido modificaciones a lo largo de su historia, por ejemplo el calendario juliano. A las

modificaciones posteriores al periodo temporal en que fue establecido un calendario se les conoce como *prolépticas*. También se conoce como *prolépticas* a las fechas que se obtienen extendiendo el calendario hacia atrás, antes de su establecimiento.

### 1.3.1.2. Calendario juliano

El *calendario juliano* debe su nombre a que fue implementado por Julio César en el periodo de transición de República a Imperio del imperio romano en el año 46 antes de nuestra era (fecha según el calendario gregoriano, véase la siguiente sección). Divide al año en doce meses, comenzando en el mes de abril (mayo se toma como el mes 0 y abril como el mes uno, como se indica en la tabla 1.8). El *día juliano* es un conteo de los días transcurridos, los días julianos comienzan a partir del *mediodía*, es decir el momento en que el sol está arriba del observador. El calendario juliano presentó la innovación del *año bisiesto*, los años duran lo mismo, excepto cada cuatro años, pues se agrega un día más. El calendario juliano sufrió modificaciones, alcanzando su forma final en el año 8 (fecha en el calendario gregoriano), véase [58]. El calendario juliano fue el primero en fijar el comienzo del año el primero de enero, algo que tiene en común con el calendario gregoriano. No obstante el día en que comienza el año ha sido desplazado históricamente, así como el primer día del calendario.

Originalmente el calendario juliano comenzaba a contar los días el mediodía del primero de enero. Christendom usaba el 25 de marzo, véase [87]. En el siglo XVI, Joseph Justus Scaliger desplazó el año uno del calendario juliano, a modo de evitar el uso de números negativos lo desplazó a la fecha que en el calendario gregoriano es el año 4713 antes de nuestra era. Ese año fue la última vez que los siguientes ciclos coincidieran: el *ciclo solar* de 28 años (periodos temporales a partir de los cuales los días de la semana y las fechas se repiten en el calendario juliano), el *ciclo lunar* de 19 años (periodos temporales a partir de los cuales las fases de la luna se repiten en las mismas fechas del calendario) y la indicción romana de 15 años. Esta última es un periodo de quince años instaurada años después de la muerte de Julio César, que servía como unidad administrativa en el imperio romano, marcaba el tiempo para la recolección de impuestos, véase [87].

¿Cuándo volverán a coincidir esos tres ciclos? En su mínimo común múltiplo. Desafortunadamente la cantidad de años que tardan los tres ciclos son primos relativos, sendos: 28, 19 y 15, así que su mínimo común múltiplo se obtiene multiplicando los tres a la vez: 7980. Podemos concluir que coincidirán de nuevo cuando se cumpla esa fecha en el calendario juliano (con la modificación de Scaliger) que será en el calendario gregoriano en el año 3628. Se le conoce como *ciclo juliano* al periodo de 7980 años, que como se dijo es el periodo temporal que tardan en coincidir los ciclos solar, lunar y de indicción; no obstante es un nombre *proléptico*, puesto que no guarda relación con Julio César, ni con el calendario juliano original, sólo guarda relación con la elección del primer año hecha por Joseph Justus Scaliger en el siglo XVI, véase [58] y [87].

A lo largo de este texto con *fecha juliana* se hace referencia a la fecha en el calendario juliano con la modificación de Justus Scaliger del año uno (lo que nos evita el uso de números negativos, el cual es problemático en el calendario gregoriano, véase la siguiente sección) y sigue la convención, también empleada en [68] de que el año juliano comience el primero de marzo. El término *día juliano* sigue la convención empleada en [68] y en [58], es la cantidad de días transcurridos, contando el día uno del calendario juliano de Scaliger, para representarlo no se usan sólo números enteros. Es decir que el día  $D$  del mes  $M$  del año  $A$  a las  $h$  horas con  $m$  minutos y  $s$  segundos tiene asociado un número cuya parte entera es la cantidad de días julianos transcurridos para la fecha dada por  $A$ ,  $M$  y  $D$  y la parte fraccionaria (siendo la unidad el día) dada por  $h$  más  $m$  y  $s$  en el UTC, véase 1.3.2.4.1 *Tiempo Universal Coordinado* y véase [87].

### 1.3.1.3. Calendario gregoriano

Hoy en día el calendario más usado a nivel mundial es el *gregoriano*.

El calendario gregoriano no es (ni siquiera en la época de su creación) el calendario más preciso, ya entonces era ligeramente más preciso el calendario persa (véase [17]), pero por cuestiones histórico-políticas ha terminado siendo el calendario dominante. El cambio de calendario juliano a gregoriano fue bastante irregular alrededor del globo, los primeros países en realizar el cambio fueron España, Portugal e Italia, véase [17].

Tiene su origen en el desfase que experimentó el calendario *juliano* en la edad media. El calendario gregoriano fue concebido como una corrección de su predecesor. Ambos parten de la medición local del sol, para el calendario juliano el día comienza en el *mediodía solar*, véase la sección 1.3.2.5.3 *Mediodía solar y Medianoche solar. Día y noche*, porque es más fácil realizar observaciones directamente al sol. En cambio en el calendario gregoriano el día comienza en la *medianoche solar*. Razón por la cual solía calibrarse mediante observaciones nocturnas del movimiento estelar.

Para algunas aplicaciones es más cómodo usar la fecha juliana. La innovación que introdujo el calendario juliano fue que introdujo el *año bisiesto* (cada cuatro años se le añade un día al mes de febrero), en el calendario Gregoriano se hizo una corrección: los múltiplos de 400 son bisiestos (a partir del año 0, o sea 1 antes de nuestra era), por ejemplo: 1200, 1600 y 2000 son bisiestos, los otros múltiplos de 100 (es decir los múltiplos de 100 que no son múltiplos de 400) no son años bisiestos, por ejemplo: 1700, 1800 y 1900; los demás múltiplos de 4 también son bisiestos, por ejemplo: 2004, 2008 y 2024. Se puede extender el calendario gregoriano a fechas anteriores al año uno, para ello se pueden adoptar dos convenciones, la más común consiste en contar con años *antes de nuestra era* (o *antes de cristo*) que siempre son números naturales y la segunda consiste en contar con números negativos, como se muestra en la imagen 1.7. Representar los años de la segunda forma es más conveniente para identificar los años bisiestos usando los criterios anteriores, sólo que ahora son números negativos, por ejemplo:  $-4, -8, -16, \dots, -400$ , etc., años que siguiendo la primera representación están desfasados por uno, son sendos: 5, 9, 16,  $\dots$ , 401,  $\dots$

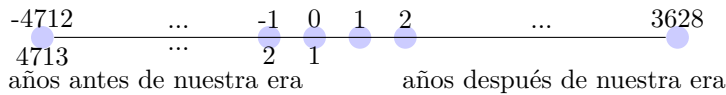


Figura 1.7: Representación de los años en el calendario gregoriano entre el primer año del calendario juliano: 4713 antes de nuestra era (-4712), y el año en que se cumple el primer ciclo juliano, 3628. Abajo se encuentra la representación de las fechas anteriores a nuestra era. Arriba del lado izquierdo del año 1 se encuentran las fechas usando 0 y enteros negativos.

#### 1.3.1.4. Conversión de sistema juliano a gregoriano y viceversa

En esta sección se presentan algunos algoritmos, primero para pasar de la fecha de un día dado en el calendario gregoriano al día juliano. Es común que se le diga *día juliano* (o *Julian date* en inglés), no obstante es solamente una cantidad, no una fecha en el calendario como podría ser alguna festividad. En el presente texto, así como en la referencia [58], en lugar del término *fecha juliana* se optó por el término *día juliano*. Las fórmulas aquí empleadas fueron tomadas de [40], también se pueden consultar en [68]. En [58] se encuentra un algoritmo distinto.

Primero se realizará la conversión de fecha gregoriana:  $A_G, M, D$  a juliana:  $A_J, M', D'$  y viceversa, para ello se requiere de la variable auxiliar  $A'$ . Las variables  $A_G, M$  y  $D$  representan sendos año, mes y día siguiendo el calendario gregoriano, mientras que  $A'$  es una variable auxiliar que se usará para calcular el año juliano  $A_J$ , y  $M'$ , el mes en la fecha juliana.

Los años en la convención aquí usada del calendario juliano comienzan el primero de marzo, de modo que los meses de enero y febrero deben contarse como parte del año anterior,

Mes	$M'$	$M$
Marzo	0	3
Abril	1	4
Mayo	2	5
Junio	3	6
Julio	4	7
Agosto	5	8
Septiembre	6	9
Octubre	7	10
Noviembre	8	11
Diciembre	9	12
Enero	10	1
Febrero	11	2

Figura 1.8: Relación de los meses con las variables auxiliares  $M$  y  $M'$

por esta razón se define la variable auxiliar:

$$\begin{aligned} A' &= A_G - \left\lfloor \frac{12 - M}{10} \right\rfloor \\ &= \left\lceil A_G - \frac{12 - M}{10} \right\rceil. \end{aligned}$$

$M$  representa los meses del año en el calendario gregoriano,  $M \in \llbracket 1, 12 \rrbracket$ , mientras que  $M'$  representa para una fecha dada el mes del año en curso en la versión modificada del calendario juliano antes mencionada,  $M' \in \llbracket 0, 11 \rrbracket$ .  $M'$  comienza a contar los meses en marzo, como en la figura 1.8.

Así los valores de  $M'$  siguen la siguiente regla (véase la tabla 1.8):

$$M'(M) = \begin{cases} M - 3 & \text{si } M \in \llbracket 3, 12 \rrbracket \\ M + 9 & \text{si } M \in \{1, 2\}, \end{cases} \quad (1.9)$$

relación que puede expresarse con la función módulo como:

$$M' = \text{mod}(M - 3, 12), \quad (1.10)$$

cuya inversa viene dada por:

$$M = \text{mod}(M' + 2, 12) + 1. \quad (1.11)$$

Para determinar el valor  $D$  está el problema de que los días comienzan en horas distintas en el calendario gregoriano y en el calendario juliano. Pasadas las 12:00 horas  $D' = D$ , pero antes de las 12,  $D' = D - 1$ :

$$D' = D'(D, h) = D + \left\lfloor \frac{h}{12} \right\rfloor, \quad (1.12)$$

y para un mes  $M$  y año  $A_G$   $D \in \llbracket 1, D_M \rrbracket$ , donde  $D_M$  está dada como en la figura 1.8. Más adelante se aclara esto del comienzo de un día.

Como se dijo antes el calendario juliano arranca en el año 4713 antes de nuestra era (este año también se escribe -4712), véase la sección 1.3.1.2 *Calendario juliano*, de modo que el año en la fecha juliana  $A_J$  está dado por

$$A_J = 4713 + A'. \quad (1.13)$$

La cantidad de días transcurridos dado  $A_J$  no es simplemente un múltiplo de 365, por los años bisiestos, así que hay que contar la cantidad de múltiplos de 4 (todos los años bisiestos

Mes	$D_M(A_G, M)$	
Enero	31	
Febrero	28	si $A_G$ no es bisiesto
	29	si $A_G$ es bisiesto
Marzo	31	
Abril	30	
Mayo	31	
Junio	30	
Julio	31	
Agosto	31	
Septiembre	30	
Octubre	31	
Noviembre	30	
Diciembre	31	

Figura 1.9: Cantidad de días  $D_M = D_M(A_G, M)$  que tiene cada mes  $M$  en el calendario gregoriano, siendo  $A_G$  el año gregoriano y  $M$  el mes

son múltiplos de 4), pero a partir del año 1 antes de nuestra era (0) hay también que restarle los múltiplos de 100 (por los años que son múltiplos de 4, pero no son bisiestos) y sumarle los múltiplos de cuatrocientos (porque de nuevo se trata de años bisiestos).

Para calcular el día juliano introduciremos más variables auxiliares:  $y$ ,  $y'$  y  $d$ . La variable auxiliar  $y$  cuenta la cantidad de días de los años transcurridos, siguiendo la convención de que los años múltiplos de 4 son bisiestos, es decir:

$$y(A_J) =: \begin{cases} \lfloor 365.25(A_G - 1) \rfloor, & \text{si } A_J > 0, \\ 0, & \text{si } A_J = 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

por ejemplo  $y(2) = 365$ ,  $y(3) = 2 \cdot 365$ ,  $y(4) = 3 \cdot 365$  y  $y(5) = 4 \cdot 365 + 1$ .

La cuenta de los días transcurridos  $y$  dada una cantidad de años necesita refinarse, hace falta restarle la cantidad de siglos que no son múltiplos de 400. Esta convención de que los siglos que no son múltiplos de cuatrocientos es válida, únicamente a partir del año 0 (1 antes de nuestra era en el calendario gregoriano),  $A_J = 4712$ , por ejemplo los años julianos  $A_J = 100$ ,  $A_J = 4613$  ( $A_G = -100$ ) sí son bisiestos. Nótese que de un múltiplo de 400 (por ejemplo 0) al siguiente transcurren 3 siglos (100, 200 y 300) que no son bisiestos, pero el año original más 400 sí lo es (400). Esto queda expresado con la función:

$$y' =: \begin{cases} y - \left\lfloor \frac{A'_G - 1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A'_G - 1}{400} \right\rfloor, & \text{si } A_G \geq 0, \\ y, & \text{si } A_G < 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

$$= \begin{cases} y - \left\lfloor \frac{A_J - 4713}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A_J - 4713}{400} \right\rfloor, & \text{si } A_G \geq 0, \\ y, & \text{si } A_G < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Sea  $D_M^J =: D_M(A_G(A_J), M(A_G, M'))$ , es decir que  $D_M^J$  es la cantidad de días que tiene un mes  $M'$  y año  $A_J$ , siguiendo la convención de la tabla 1.8. Mediante evaluación directa puede comprobarse que

$$D_M^J(M') =: D_M(A_G(A_J), M(M')) \quad (1.17)$$

$$= \lfloor 30.6 \cdot (M' + 1) + 0.5 \rfloor - \lfloor 30.6 \cdot M' + 0.5 \rfloor, \quad M' \in \llbracket 0, 11 \rrbracket, \quad (1.18)$$

véase las figuras 1.9 y 1.8. Para  $M' = 11$ , es decir febrero, no es necesario hacer esa evaluación, porque una vez que termina el mes de febrero termina el año, y por ende tampoco es necesaria la dependencia de  $A_J$ . Ésta es la razón por la cual se adopta en general la convención de que la fecha juliana comienza en marzo. Aunque se definió  $D_M$  como función del año  $A_G$  y del mes  $M$ , como solamente el valor del mes de febrero  $M = 2$ ,  $M' = 11$

depende del año  $D_M^J$  es función solamente de  $M'$  para  $M' \in \llbracket 0, 11 \rrbracket$ .

Luego dada  $M'$ , la cantidad de días de los meses transcurridos desde el comienzo del año hasta el mes  $M'$  está dada por la siguiente expresión:

$$d =: \sum_{n=0}^{M'-1} D_M^J(n) \quad (1.19)$$

$$= \lfloor 30.6 \cdot M' + 0.5 \rfloor, \quad M' \in \llbracket 1, 10 \rrbracket. \quad (1.20)$$

Para  $M' = 0$ , no hay días transcurridos, porque está comenzando el año. Para  $M' = 11$  el mes en curso es febrero, el último mes del año, así que cuando pasa febrero termina el año y por lo tanto no hay necesidad de incluir a febrero en el conteo de los días de los meses transcurridos.

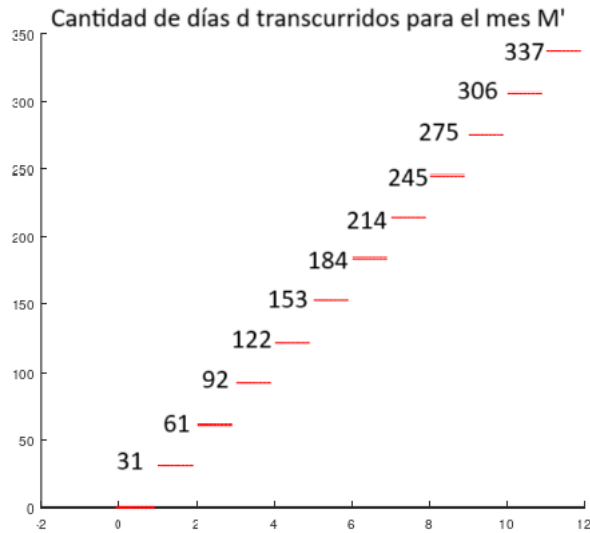


Figura 1.10: Días de los meses transcurridos  $d$  hasta el mes en curso  $M' \in \llbracket 0, 11 \rrbracket$ .

Se define la parte entera del *día juliano* como la suma de los días transcurridos desde el que se considera como el primer día juliano, sin embargo la convención de quién es el primer día juliano no respeta la convención anterior de quién es el primer año, ni cuando comienzan los años julianos.

En principio para obtener el día juliano simplemente habría que sumar los días de los años  $y'$ , meses  $d$  y días del mes  $D$  transcurridos:  $y' + d + D$ . Se aclaró que se cuenta como año 1 el año -4712 (4713 antes de nuestra era, fecha gregoriana) y que se sigue la convención de que los años comienzan en marzo. No obstante, para el día juliano sí se cuentan los días desde el 1 de enero del año -4712. Por ende hay que sumar también estos días transcurridos; como el año -4712 fue bisiesto febrero tuvo 29 días, así que los 31 días de enero más los 29 días de febrero suman 60.

Aquí hay otro problema: los días en nuestra convención comienzan a partir de las 12:00 horas, así que quedaría fuera del conteo la mañana del día primero de enero. Para contar los días julianos se toma el primer día juliano de modo que estas horas entren en la cuenta. Ello conlleva paradójicamente a que el primer día juliano haya comenzado antes que el primer año, es decir que el primer día juliano comenzó a las 12:00 horas del día 31 de diciembre del año -4713 (4714 antes de nuestra era, fecha gregoriana), así que hay que sumar 61 días, esto es:

$$\begin{aligned}
JDN &=: y' + d + D + \left\lfloor \frac{h}{12} \right\rfloor + 60 \\
&= y' + d + D + 60.
\end{aligned}$$

Llamamos *día juliano*  $J$  a la suma de la expresión anterior más la fracción del día transcurrida. Es común que la parte entera del día juliano se denote con  $JDN$  (viene del inglés *Julian Date Number*, que significa *Número de Día Juliano*) y al día juliano total como  $JD$ , por simplicidad esta segunda en este trabajo simplemente se denota  $J$ , entonces  $JDN =: \lfloor J \rfloor$ .

$$J = JDN + \frac{h - 12}{24} + \frac{m}{1440} + \frac{s}{86400}.$$

( $h$  representa las horas;  $m$ , los minutos, y  $s$ , los segundos transcurridos).

De manera análoga puede deducirse el cambio inverso, de fecha juliana a gregoriana, primero definimos las variables auxiliares

$$\begin{aligned}
g &= \left\lfloor 0.75 \left\lfloor \frac{JDN - 44795}{36524.25} \right\rfloor + 0.5 \right\rfloor - 37, \\
N &= g + JDN.
\end{aligned}$$

Sea  $d'$  el número de días transcurridos desde el primero de marzo:

$$\begin{aligned}
d' &= \lfloor \text{mod}(N - 59.25, 365.25) \rfloor \\
A_G &= \left\lfloor \frac{N}{365.25} \right\rfloor - 4712 \\
M &= \text{mod} \left( \left\lfloor \frac{d' + 0.5}{30.6} \right\rfloor + 2, 12 \right) + 1 \\
D &= \lfloor \text{mod}(d' + 0.5, 30.6) \rfloor + 1
\end{aligned}$$

### 1.3.2. Sistemas de medición del tiempo a escala diaria, tiempo solar aparente y tiempo solar medio

#### 1.3.2.1. Hora y ángulo hora solar

Hora es un término que puede referirse a dos conceptos que aunque fuertemente relacionados no son equivalentes: por un lado, la hora *solar* es una fracción del día, exactamente una vigesimocuarta parte, desafortunadamente los días no duran siempre lo mismo y por lo tanto las horas solares no son siempre de la misma duración. Por otro lado, la hora *atómica*, u *hora del Sistema Internacional*, es una unidad de medida internacional que se determina mediante fenómenos físicos de duración fija (más adelante se aclara el concepto de *tiempo atómico*).

Los términos de minutos y segundos también pueden referirse a unidades de medidas del tiempo fijas o a fracciones del día. Angularmente una forma de dividir el día es en *horas*:  $360^\circ = 24\text{h}$ ; las horas a su vez se subdividen en minutos:  $60' = 1\text{h}$ , y los minutos a su vez se subdividen en segundos:  $1' = 60''$ . De modo que  $1\text{h} = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$ ,  $1' = \frac{360^\circ}{1440} = \frac{1^\circ}{4}$  y  $1'' = \frac{360^\circ}{86400} = \frac{1^\circ}{240}$ . A diferencia de [68] en este texto se usan los símbolos  $'$  y  $''$  para minuto y segundo y no para arco-minuto o arco-segundo, véase [68] y [87]. Visto desde la tierra, el sol tiene un trayecto casi periódico. Al segmento de arco en el que se encuentre el sol de su trayecto diario en el que se encuentra se le llama la *hora solar*,  $\text{HOR} = \text{HOR}_\lambda$ , el subíndice  $\lambda$  significa que depende de la latitud, tomando la convención de que una hora solar sea una vigesimocuarta parte del día, y por lo tanto no es una unidad fija, a esta hora se le asocia un ángulo  $\omega = \omega_\lambda = (\text{HOR}_\lambda - 12)15^\circ/\text{h}$  que toma valores en  $[0, 360]$  y se mide en grados,

véase figura 1.11, véase [68] y [87]. La medición de los días se realiza desde un amanecer hasta el siguiente, asignándole al amanecer el ángulo hora solar de 6 h.

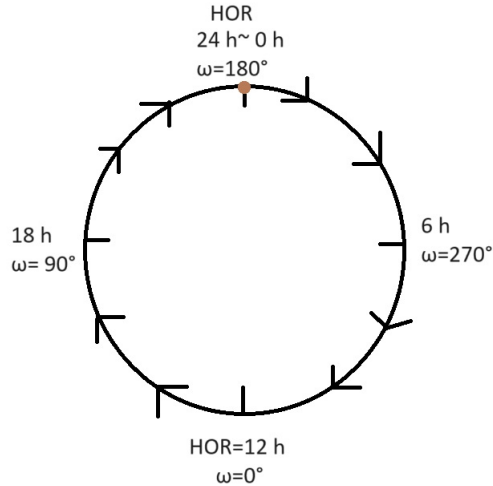


Figura 1.11: Ángulo hora solar. HOR= 6 h en el amanecer, HOR= 12 h en el mediodía solar, HOR= 18 h en el atardecer y HOR= 24 en la medianoche solar.

**Notación:** A lo largo del texto se usará  $t$  para referirse al tiempo (de acuerdo con la hora estándar, véase la sección 1.3.2.4.1 *Tiempo Universal Coordinado*). Para aclarar que se trata del tiempo en un día dado se usará el índice superior  $k$ , donde  $k$  hace referencia al día en cuestión. Será necesario usar valores asociados a cada día, por ejemplo: el tiempo en el que se dan las temperaturas máxima y mínima para un punto sobre el globo terráqueo dado, éstos se denotarán  $t_{\min}^k$  y  $t_{\max}^k$ .

### 1.3.2.2. Tiempo solar aparente (local)

Los días no tienen siempre la misma duración, en un lugar determinado depende del momento del año. El *día solar* aparente es el día tal como lo observamos, tomando las 12 h como el momento en que el sol está frente a nosotros (el día solar no es igual a lo largo de todo el globo terráqueo). El tiempo solar aparente no usa como unidades a la hora, minuto y segundo *temporales*, sino angulares, conocidos como *ángulo hora solar*; es decir que no usa unidades del sistema métrico internacional, sino que usa fracciones del día, de este modo el día siempre dura 24 horas (horas angulares, HOR). Antaño se medía la hora usando herramientas como los relojes de sol, los cuales no miden horas *temporales*, al menos no horas con la misma duración, sino *horas solares*.

El día solar aparente depende de la ubicación geográfica, es decir que es local, suele usarse como referencia el día solar observado desde el meridiano de Greenwich.

### 1.3.2.3. Sol y tiempo solar medio

El día tiene duración variable a lo largo del año, según la región. Una forma de disminuir su variabilidad consiste en fijar en el firmamento un punto de referencia, ubicado geográficamente entre los dos focos de la eclíptica, donde si estuviese el sol la duración de los días sería más regular; dado que la excentricidad de la eclíptica es pequeña, este punto se encuentra cercano al centro de la eclíptica y cercano al sol. A este punto se le llama *sol (pro)medio* o *ficticio*. Un *día solar medio* es un “día”, medido de la manera usual, pero tomando en lugar del sol al sol medio, estos días tienen una duración regular, véase [56]. Antaño era más popular el tiempo solar aparente, pero la situación cambió con el advenimiento de los relojes

mecánicos, que permitían tomar mediciones más regulares del tiempo, véase [56].

#### 1.3.2.4. Tiempo universal coordinado

El desarrollo de la tecnología, tanto en sistemas de medición del tiempo (relojes) como de aplicaciones que requieren más precisión, fue haciéndose más necesaria la definición e implementación de diferentes sistemas de medición del tiempo, grosso modo los principales son:

- UT0: tiempo solar medio con segundos solares, o sea de longitud variable.
- UT1: corrección de UT0 tomando en cuenta precesión. Existen varios UT1, no equivalentes.
- UT2: corrección de UT1 teniendo en cuenta más fenómenos que afectan el movimiento polar.
- UTC: basado en segundos de longitud fija (atómicos), pero con ajustes cada cierto tiempo. Para controlar las diferencias de UTC con UT1 (primero se controlaba la diferencia entre UTC y UT2), al principio se hacían ajustes de 0.1 o 0.2 segundos, actualmente de una cantidad entera de segundos. La diferencia entre UTC y TAI (TAI es el tiempo atómico internacional) es una cantidad entera de segundos.

Los segundos de ajuste empleados en UTC (pueden ser segundos ganados o perdidos) no se pueden prever completamente, ya que su ajuste no depende sólo de la aplicación de modelos, sino de medidas empíricas.

Actualmente UTC es aceptado internacionalmente como el estándar. En inglés es llamada *Coordinated Universal Time* y en francés *Temps Universel Coordonné*, la fecha y hora dada en UTC puede verse en: [88].

**1.3.2.4.1. UTC, precesión y tiempo universal coordinado** A mediados del siglo XX el desarrollo tecnológico permitió dar una definición del segundo atómico en términos de frecuencia atómica natural, en lugar de en términos de fenómenos astronómicos. Esta definición se adoptó en el sistema internacional de unidades. En 1967 se construyó una escala temporal que esencialmente hace un promedio de mediciones de relojes atómicos de diferentes centros de investigación por todo el mundo, que es denominada *Tiempo Internacional Atómico*, en inglés *International Atomic Time*, y en francés: *Temps International Atomique*, internacionalmente se toman las siglas TAI. Las mediciones requieren correcciones relativistas, véase [7] y [56].

**1.3.2.4.2. Tiempo Atómico Internacional** UTC es actualmente reconocido como el estándar temporal internacional. Difiere con TAI una cantidad entera de segundos. UTC como se dijo antes está basado en segundos de longitud fija (atómicos), pero con ajustes cada cierto tiempo, que actualmente consisten en la adición (o no) de un segundo cada cierto tiempo, a modo de que se mantenga cercano a (y continúe difiriendo una cantidad entera de segundos de) TAI, véase [56] y [8].

**1.3.2.4.3. Ecuación del tiempo** La *ecuación del tiempo* describe a lo largo del año la diferencia entre el tiempo solar medio y el tiempo solar aparente, son expresiones de naturaleza empírica, por eso no existe una única ecuación del tiempo, sino que hay varias. Suele denotarse por  $E$ , véase [56]. En este trabajo la letra  $E$  (mayúscula) se reserva para un ángulo llamado *Anomalía excéntrica*, véase 3.3, así que para la ecuación del tiempo se usará la minúscula  $e$ .

**Algoritmos** Sea el tiempo local aparente LAT, y LST, tiempo estándar local.

$$\text{LAT} - \text{LST} = 114.591559 \frac{\text{min}}{\text{radianes}} \cdot (\lambda_{st} - \lambda) + e, \quad (1.21)$$

En [44] a  $\lambda_{st}$  se le llama *longitud estándar*. En la práctica lo común para determinar la hora es determinarla para un punto en particular sobre la superficie terrestre y después hacer una conversión para determinarla en los demás puntos.  $\lambda_{st}$  es la longitud de este punto desde dónde se mide el tiempo. Lo más práctico es que este punto de referencia esté en el meridiano de Greenwich, en particular que sea la intersección del meridiano de Greenwich con el ecuador, entonces  $\lambda_{st} = 0$ . Notemos que la *corrección de longitud*  $114.591559 \frac{\text{min}}{\text{radianes}} \cdot (\lambda_{st} - \lambda)$  es positiva si el meridiano está al este del estándar y es negativa si está al oeste. La expresión original está dada en radianes, el factor  $114.591559 \frac{\text{min}}{\text{radianes}}$  convierte esta expresión en radianes a una expresión en minutos (como la unidad de medición del tiempo es el segundo atómico, el resultado está en *minutos atómicos*).

$$\tilde{M} = (\text{DOY} - 1) \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi}{365} \right). \quad (1.22)$$

DOY es el día del año, varía en  $[[1, 365]]$ , no toma en cuenta los años bisiestos.  $\tilde{M}$  es el *ángulo día*, el cual nos dice angularmente cuál es el día del año.

Es importante ver que si la longitud  $\lambda$  se encuentra al este del meridiano donde se hace el cálculo, entonces  $\lambda_{st} - \lambda > 0$ , por el contrario si se encuentra al oeste es negativo. Se suele usar la siguiente expresión para estimar la ecuación del tiempo, véase [44] (el factor  $\frac{24 \cdot 60}{2\pi} = \frac{720}{2\pi} \approx 114.591559$  se debe a que originalmente la expresión está en radianes, así que convierte los radianes a minutos):

$$e = 114.591559 \cdot (0.000075 + 0.001868 \cos(\tilde{M})) \quad (1.23)$$

$$- 0.032077 \text{sen}(\tilde{M}) - 0.014615 \cos(2\tilde{M}) - 0.04089 \text{sen}(2\tilde{M}). \quad (1.24)$$

### 1.3.2.5. Periodos notables del día

**1.3.2.5.1. Amanecer y atardecer** Tradicionalmente el *amanecer* es el momento en que el sol aparente está por encima del observador, es decir que es cuando desde la tierra el sol parece estar justo por encima del observador, tocando el horizonte en la mañana, y el *atardecer* cuando el sol toca el horizonte en la tarde. Por efecto de la refracción atmosférica, la posición real del sol no coincide con la posición observada. Cuando estos fenómenos ocurren la altitud del sol aparente es  $0^\circ = 0$  radianes en el sistema de coordenadas horizontales y el ángulo zenit real del sol es de  $90^\circ 50' = 1.585341$  radianes, véase [87] y [4]. Esas convenciones son lo estándar, sin embargo, dado que cualitativamente se observan diferencias en el comportamiento de la temperatura, diferencias que en la mayoría de los distintos modelos de temperatura aquí expuestos, se ve reflejada modelando la temperatura entre amanecer y atardecer con una expresión y con otra, entre el atardecer y el próximo amanecer. Para este trabajo se usa una convención distinta, véase *4.3.1 Definiciones*.

**1.3.2.5.2. Refracción atmosférica** Al atravesar la atmósfera la luz solar se *refracta*, en consecuencia el amanecer se adelanta y el atardecer se retrasa, es decir que desde la tierra no se observan cuando suceden, sino un poco antes o después. En condiciones atmosféricas normales cuando se observan desde alguna posición sobre la esfera terrestre el amanecer o el atardecer el sol se encuentra aproximadamente 50 arco-minutos ( $a_0 = 0.83^\circ = 0.014486$  radianes) por debajo del horizonte. Cerca de 16 arco-minutos de esta altitud es el radio aparente del sol, mientras que los 34 arco-minutos restantes se corresponden al efecto de refracción atmosférica, véase [56].

**1.3.2.5.3. Mediodía solar y Medianoche solar. Día y noche** El *mediodía solar* ocurre en el momento en que el sol se encuentra más cercano al cénit, mientras que la *medianoche solar* ocurre cuando el sol se encuentra en su punto más cercano al punto opuesto, llamado *Nadir*. La hora de los dos eventos varía a lo largo del año, debido a la trayectoria de la tierra alrededor del sol y a que el propio camino del sol varía con respecto al tiempo. La palabra *día* suele referirse al lapso entre el amanecer y el atardecer de un día y noche como el periodo comprendido entre el atardecer de un día y el amanecer del siguiente [68].

**1.3.2.5.4. Cálculo de los instantes, duraciones** A continuación las ecuaciones que se emplean en el presente texto para calcular el momento del amanecer y atardecer; la duración del día y la noche, para cualquier día del año, en cualquier posición longitud y latitud, véase [44].

Primero definamos las siguientes variables auxiliares:

- $\omega$  ángulo hora solar (medida en radianes).
- $\phi$  latitud del observador (medida en radianes).
- $\delta$  declinación solar (medida en radianes).
- $\theta$  ángulo del zenit del sol (medida en radianes).
- $\alpha$  ángulo de ascensión recta solar (medida en radianes).
- $a$  ángulo azimutal (complementario al zenit) (se mide en grados).
- $J$  fecha juliana.
- $n$  número de días que han transcurrido desde el primero de enero del año 2000, 12:00:00.
- $J^*$  es una aproximación del tiempo solar medio en  $n$  expresado como el día juliano más la fracción del día transcurrida desde su comienzo hasta el instante de la observación.
- $\lambda$  longitud del observador (medida en radianes).
- $M$  anomalía media del sol (medida en radianes).
- $C$  ecuación del centro para la tierra (medida en radianes).
- $\lambda^\odot$  longitud eclíptica del sol (medida en radianes).
- $J_{med}$  es la fecha juliana a la que ocurre el mediodía solar.
- $J_r$  es la fecha juliana del amanecer.
- $J_s$  es la fecha juliana del atardecer.
- LSN hora a la que ocurre el mediodía, viene del inglés *local solar noon* (se mide en horas).
- $t_r$  y  $t_s$  son sendas horas del amanecer y el atardecer (se mide en horas).
- $Y$  y  $Z$  duraciones de sendos día y noche (se mide en horas).

Además se han hecho las siguientes aproximaciones:

- El valor de la longitud del perihelio se toma como  $102.9372^\circ = 1.7966$  radianes.
- La fecha juliana equivalente al primero de enero a las 12 : 00 : 00 se toma como 241545.
- Se emplea como aproximación a la ecuación del tiempo la expresión

$$e \approx 0.0053 \cdot \text{sen} \left( \frac{180}{\pi} \cdot M \right) - 0.0069 \cdot \text{sen} \left( \frac{360}{\pi} \cdot \lambda^\odot \right). \quad (1.25)$$

- Se toma la oblicuidad  $\varepsilon = 23.44^\circ = 0.4091$  radianes.

### 1.3.2.6. Relación entre las coordenadas ecuatoriales, horizontales y el ángulo hora solar

Sea un observador en un punto  $z$  del globo terráqueo. Sea  $q$  la posición del sol y sea  $C_G$  el centro de la tierra.

Por simplicidad en esta sección se trabaja con el ángulo de co-altitud  $\theta^\odot$  del sol en lugar de su ángulo de altitud  $a$ , es decir que para el ángulo de altitud  $a^\odot$  (véase la figura 1.12):

$$a^\odot + \theta^\odot = \frac{\pi}{2}.$$

De este modo:

$$\cos(\theta^\odot) = \frac{\langle \overrightarrow{C_G z}, \overrightarrow{zq} \rangle}{\|\overrightarrow{C_G z}\| \cdot \|\overrightarrow{zq}\|}. \quad (1.26)$$

Además se toma el ángulo  $\tilde{\theta}^\odot$  medido de manera que (véase la figura 1.12)

$$\cos(\tilde{\theta}^\odot) = \frac{\langle \overrightarrow{C_G z}, \overrightarrow{C_G q} \rangle}{\|\overrightarrow{C_G z}\| \cdot \|\overrightarrow{C_G q}\|} \quad (1.27)$$

$$\|\overrightarrow{C_G p}\| = R_G. \quad (1.28)$$

Por simplicidad denotemos las coordenadas de latitud y longitud del punto  $z$  simplemente como  $\phi$  y como  $\lambda$ . Para describir la posición del punto  $q$  angularmente primero se proyecta al globo terráqueo, sea esta proyección  $Q$ , después se miden sendos ángulos de latitud y longitud, sendos:  $\phi^\odot$  y  $\lambda^\odot$ , véase la figura 1.12. Nos auxiliamos de una base ortonormal positivamente orientada estándar:  $(\vec{e}_G, \vec{e}_E, \vec{e}_N)$ , que se describe y explica a detalle en la sección 3.4.2 (ésta es la asociada a los ángulos de latitud y longitud), exactamente quiénes son los vectores no es lo más importante, la idea es usar unas coordenadas esféricas apropiadas, que nos permitan aprovechar los ángulos  $\phi$ ,  $\lambda$  y  $\delta$ .

$$Q = C_G + \frac{R_G}{\|\overrightarrow{C_G q}\|} \cdot \overrightarrow{C_G q} \quad (1.29)$$

$$= C_G + R_G \cdot (\cos(\lambda^\odot) \cdot \cos(\phi^\odot) \cdot \vec{e}_G + \cos(\phi^\odot) \cdot \text{sen}(\lambda^\odot) \cdot \vec{e}_E + \text{sen}(\phi^\odot) \cdot \vec{e}_N) \quad (1.30)$$

y

$$z = C_G + R_G \cdot (\cos(\lambda) \cdot \cos(\phi) \cdot \vec{e}_G + \cos(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda) \cdot \vec{e}_E + \text{sen}(\phi) \cdot \vec{e}_N) \quad (1.31)$$

Como los rayos del sol provienen de una fuente muy lejana y se suponen todos los rayos paralelos los ángulos  $\tilde{\theta}^\odot$  y  $\theta^\odot$  son muy cercanos por las hipótesis, y porque la distancia de la tierra al sol es grande comparada con el tamaño de la tierra; así que se trabaja por simplicidad con  $\tilde{\alpha}$  (en los momentos de amanecer y atardecer, como el punto  $q$  visto desde la tierra atraviesa el horizonte ambos ángulos coinciden).

El ángulo hora solar  $\omega$  suele medirse en grados, como se aclaró en la sección 1.1.3, en el presente trabajo al cambiar las unidades de medición de un ángulo no es necesario definir un nuevo ángulo, así que será medido en radianes. De la figura 1.12

$$\omega = \lambda - \lambda^\odot. \quad (1.32)$$

Recordemos que para medirse la declinación de un cuerpo sobre el firmamento celeste primero tiene que proyectarse, la declinación solar  $\delta$  coincide con el ángulo  $\phi^\odot$ . Cumple la relación

$$\text{sen}(\delta) = \text{sen}(\lambda^\odot) \cdot \text{sen}(\varepsilon). \quad (1.33)$$



### Suposiciones

1. El sol consiste en un solo punto.
2. La tierra recorre una órbita circular con velocidad angular constante en su movimiento de traslación, estando el sol en el centro. Por esta razón en los tiempos del amanecer y el atardecer se toman las circunstancias del mediodía solar, obviando el movimiento de rotación terrestre en estos momentos.
3. La rotación terrestre tiene una velocidad angular constante.
4. La tierra es una esfera.
5. No hay efectos de refracción ni atmosféricos que afecten el paso de la luz.

**Ecuaciones del amanecer y atardecer** En el amanecer y en el atardecer el punto  $q$  atraviesa el horizonte. Para las coordenadas horizontales eso significa que:  $\overrightarrow{C_G z} \perp \overrightarrow{C_G q}$ ,  $\theta^\odot \approx \frac{\pi}{2}$  y  $\cos(\theta^\odot) = 0$ .

Substituyendo en la ecuación (1.35):

$$0 = \cos(\omega) \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) + \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\delta), \quad (1.37)$$

luego

$$-\cos(\omega) \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) = \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\delta),$$

dividiendo

$$\cos(\omega) = -\frac{\text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\delta)}{\cos(\phi) \cdot \cos(\delta)} \quad (1.38)$$

$$= -\tan(\phi) \cdot \tan(\delta), \quad (1.39)$$

despejando  $\omega$ :

$$\omega = \arccos(-\tan(\phi) \cdot \tan(\delta)). \quad (1.40)$$

Los ángulos asociados a sendos amanecer y el atardecer se denotan  $\omega_r$  y  $\omega_s$ . La relación con  $\omega$  es:  $|\omega| = \omega_s$  y  $\omega_r = -|\omega|$ .

$$t_m - 12 < t_r < t_m < t_s < t_m + 12,$$

en el amanecer ( $t_m$  es el mediodía solar, es un instante intermedio entre  $t_r$  y  $t_s$ ), tomando  $\omega_r$  el ángulo hora asociado al amanecer

$$-\pi \text{ radianes} < \omega_r < 0,$$

si análogamente se toma el  $\omega$  asociado al atardecer

$$0 < \omega_s < \pi \text{ radianes}. \quad (1.41)$$

$t_r$  y  $t_s$  se obtienen de sendos ángulos  $\omega_r$  y  $\omega_s$ , usando las ecuaciones del tiempo.

**1.3.2.6.2. Ecuaciones del amanecer y atardecer suponiendo un sol esférico** Para esta fórmula se usa el centro del sol  $q = C_\odot$ , así como en la ecuación (1.38), se usa la aproximación  $\theta^\odot \approx \tilde{\theta}^\odot$ .

$$\cos(\theta^\odot) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a_0\right) = \text{sen}(a_0), \quad (1.42)$$

substituyendo en (1.38):

$$\text{sen}(a_0) = \cos(\omega) \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) + \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\delta), \quad (1.43)$$

$$\cos(\omega) = \frac{\text{sen}(a_0) - \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\delta)}{\cos(\phi) \cdot \cos(\delta)}. \quad (1.44)$$

### 1.3.3. Relación entre $a^\odot$ y $\theta^\odot$

Sea  $\tilde{\beta}$  el ángulo suplementario a  $\theta^\odot$  (es decir que suman  $\pi$ ) y sea  $\tilde{\gamma}$  el ángulo  $\angle C_G q z$ ,  $q = C_\odot$ . En el triángulo de vértices  $C_G$ ,  $z$  y  $q = C_\odot$ , usando el teorema de los senos:

$$\frac{\text{sen}(\tilde{\beta})}{\|\overrightarrow{C_G C_\odot}\|} = \frac{\text{sen}(\tilde{\gamma})}{\|\overrightarrow{C_G z}\|}, \quad (1.45)$$

recordemos que

$$\|\overrightarrow{C_G z}\| = R_G, \quad \tilde{\beta} = \pi - \theta^\odot,$$

$$\gamma = \pi - \tilde{\theta}^\odot - \tilde{\beta} = \pi - \tilde{\theta}^\odot - \pi + \theta^\odot = \theta^\odot - \tilde{\theta}^\odot.$$

Sea

$$d_\odot = \|\overrightarrow{C_G C_\odot}\|, \quad (1.46)$$

$d_\odot$  se suele tomar como la distancia media entre la tierra y el sol (cuando se supone que la órbita terrestre es circular), pero para el  $k$ -ésimo día puede tomarse como la distancia entre la tierra y el sol en algún momento en específico, por ejemplo el mediodía  $t_m^k$ .

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta^\odot - \tilde{\theta}^\odot) &= \text{sen}(\gamma) = \frac{\|\overrightarrow{C_G z}\|}{\|\overrightarrow{C_G C_\odot}\|} \cdot \text{sen}(\beta) \\ &= \frac{R_G}{d_\odot} \cdot \text{sen}(\theta^\odot) \\ &= \text{sen}(\theta^\odot - \tilde{\theta}^\odot). \end{aligned}$$

Nótese que

$$0 < R_G \ll d_\odot, \text{sen}(\theta^\odot - \tilde{\theta}^\odot) \approx 0, \theta^\odot \approx \tilde{\theta}^\odot.$$

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta^\odot - \tilde{\theta}^\odot) &= \text{sen}(\theta^\odot) \cdot \cos(\tilde{\theta}^\odot) - \cos(\theta^\odot) \cdot \text{sen}(\tilde{\theta}^\odot) \\ &= \frac{R_G}{d_\odot} \cdot \text{sen}(\theta^\odot), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\tan(\theta^\odot) = \frac{\text{sen}(\tilde{\theta}^\odot)}{\cos(\tilde{\theta}^\odot) - \frac{R_G}{d_\odot}} \quad (1.47)$$

$$= \frac{\cos(\tilde{\theta}^\odot)}{\cos(\tilde{\theta}^\odot) - \frac{R_G}{d_\odot}} \cdot \tan(\tilde{\theta}^\odot). \quad (1.48)$$

De trigonometría sabemos que

$$\frac{1}{(\cos(\tilde{\theta}^\odot))^2} = 1 + (\tan(\tilde{\theta}^\odot))^2, \quad (1.49)$$

tomando recíprocos y substituyendo la ecuación (1.48):

$$\begin{aligned}
\left(\cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right)\right)^2 &= \frac{1}{1 + \left(\tan\left(\theta^\odot\right)\right)^2} \\
&= \left[1 + \frac{\left(\cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right) - \frac{R_G}{d_\odot}\right)^2 \cdot \tan\left(\theta^\odot\right)}{\left(\cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right)\right)^2}\right]^{-1} \\
&= \left[\frac{\left(\cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right) - \frac{R_G}{d_\odot}\right)^2 \cdot \tan\left(\theta^\odot\right)}{\left(\cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right)\right)^2}\right]^{-1} \\
&= \frac{\left(\cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right)\right)^2}{\left(\cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right) - \frac{R_G}{d_\odot}\right)^2 \cdot \tan\left(\theta^\odot\right)},
\end{aligned}$$

por ende

$$1 = \left(\cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right) - \frac{R_G}{d_\odot}\right)^2 \cdot \left(\tan\left(\theta^\odot\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right)\right)^2 \quad (1.50)$$

$$= \left(\left(\tan\left(\theta^\odot\right)\right)^2 + 1\right) \cdot \left(\cos\left(\theta^\odot\right)\right)^2 - \frac{2R_G}{d_\odot} \cdot \cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right) + \left(\frac{R_G}{d_\odot}\right)^2 \quad (1.51)$$

restando

$$0 = \left(\sec\left(\theta^\odot\right)\right)^2 \cdot \left(\cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right)\right)^2 - \frac{2R_G}{d_\odot} \cdot \cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right) + \left(\frac{R_G}{d_\odot}\right)^2 - 1.$$

Es una ecuación cuadrática, aplicándole la fórmula general se obtienen una raíz positiva y una negativa, la raíz positiva es:

$$\cos\left(\tilde{\theta}^\odot\right) = \frac{\frac{2R_G}{d_\odot} + \sqrt{\frac{4R_G^2}{d_\odot^2} + \left(1 - \frac{R_G}{d_\odot} \cdot \left(\sec\left(\theta^\odot\right)\right)^2\right)}}{2\left(\sec\left(\theta^\odot\right)\right)^2} \quad (1.52)$$

$$= \frac{\left(\cos\left(\theta^\odot\right)\right)^2}{2} \cdot \left[\frac{2R_G}{d_\odot} + \sqrt{\frac{4R_G}{d_\odot} + \left(1 - \left(\frac{R_G}{d_\odot}\right)^2\right) \cdot \sec\left(\theta^\odot\right)}\right] \quad (1.53)$$

Substituyendo en (1.44):

$$\cos(\omega) = \frac{-\frac{1}{\cos(\phi) \cdot \cos(\delta)} \cdot \left[\text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\delta)\right]}{+\frac{\left(\cos\left(\theta^\odot\right)\right)^2}{2} \cdot \left[\frac{2R_G}{d_\odot} + \sqrt{\frac{4R_G^2}{d_\odot^2} + \left(1 - \left(\frac{R_G}{d_\odot}\right)^2\right) \cdot \sec\left(\theta^\odot\right)}\right]} \quad (1.54)$$

$$= \frac{-\frac{1}{\cos(\phi) \cdot \cos(\delta)} \cdot \left[\text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\delta)\right]}{+\frac{\left(\text{sen}\left(a_\odot\right)\right)^2}{2} \cdot \left[\frac{2R_G}{d_\odot} + \sqrt{\frac{4R_G^2}{d_\odot^2} + \left(1 - \left(\frac{R_G}{d_\odot}\right)^2\right) \cdot \sec\left(\theta^\odot\right)}\right]} \quad (1.55)$$

### 1.3.3.1. Refracción

Se han obtenido dos aproximaciones de las ecuaciones del amanecer y atardecer. Los ángulos HOR asociados a sendos amanecer y atardecer se fijan a la misma distancia del medio día solar (angularmente las 12 horas). Estas aproximaciones han sido obtenidas usando relaciones trigonométricas de los ángulos involucrados (en la última aproximación también se hizo uso de la distancia del centro de la tierra al centro del sol, el cual varía a lo largo del año). Si se quiere tomar en cuenta la refracción, la forma más simple de hacerlo es tomar el ángulo  $a_0$  ligeramente más grande. Recordemos que en condiciones atmosféricas normales cuando se observa desde alguna posición sobre la esfera terrestre el amanecer o atardecer el sol se encuentra 50 arco-minutos ( $0.83^\circ$ ) por debajo del horizonte. Cerca de 16 arco-minutos restantes se corresponden al efecto de la refracción atmosférica, véase [87].

### 1.3.3.2. Ecuación del amanecer

La siguiente ecuación relaciona el zenit con la latitud, la declinación solar y el ángulo hora solar, véase [44] y [56]:

$$\cos(\theta) = \text{sen}(a) = \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\delta) + \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) \cos(\omega). \quad (1.56)$$

En el amanecer y atardecer el ángulo zenit del sol es aproximadamente  $\theta = 90^\circ = \pi$  radianes, entonces la ecuación toma la forma:

$$\cos(\omega_0) = -\tan(\phi) \cdot \tan(\delta), \quad (1.57)$$

donde  $w_0$  es el ángulo hora solar en el atardecer (si se toma un valor positivo) o el amanecer (para un valor negativo).

Desafortunadamente para la ecuación anterior no se tomó en consideración la distorsión debida a la refracción que se produce cuando la luz entra por la atmósfera terrestre, debida a la composición químico-física atmosférica y al diámetro solar (50 arco-minutos). Al tomar esto último en consideración, resulta en cambio:

$$\cos(\omega_0) = \frac{\text{sen}(a_0) - \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\delta)}{\cos(\phi) \cdot \cos(\delta)}. \quad (1.58)$$

Esta expresión permite calcular los tiempos en que ocurren tanto el atardecer como el amanecer siguiendo el siguiente algoritmo:

1.  $n = \lceil J - 2451545 + 0.0008 \rceil$ .
2.  $J^* = n - \frac{\lambda}{2\pi}$ .
3.  $M = \text{mód}(6.240059 + 0.01720196 \cdot J^*, 2\pi)$ .
4.  $C = \frac{2\pi}{360}(1.9148\text{sen}(M) + 0.02 \cdot \text{sen}(2 \cdot M) + 0.0003 \cdot \text{sen}(3 \cdot M))$ .
5.  $\lambda^\odot = \text{mód}(M + C + \frac{\pi}{2} + J^* + 1.7966, 2\pi)$ .
6.  $J_{med} = 2451545 + J^* + 0.0053\text{sen}(M) - 0.0069 \cdot \text{sen}(2 \cdot \lambda^\odot)$ .
7.  $\text{sen}(\delta) = \text{sen}(\lambda^\odot) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{180} \cdot 23.44\right)$ .
8. Se calcula  $\omega_0$  con la ecuación (1.58).
- 9.

$$J_r = J_{med} - \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$J_s = J_{med} + \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Así se conoce el momento exacto del amanecer y del atardecer.

Para conocer el número de horas que tiene un día dado se sigue lo siguiente: siguiendo la definición de ángulo hora solar, podemos deducir que el cociente  $\frac{\omega_0}{15}$  es igual al intervalo de horas entre el amanecer y el mediodía solar, o entre el mediodía solar y el atardecer.

$$t_r^k = \text{LSN} - \frac{24}{2\pi} \cdot \omega_0 \quad (1.59)$$

$$t_s^k = \text{LSN} + \frac{24}{2\pi} \cdot \omega_0, \quad (1.60)$$

de modo que la cantidad de horas que tiene el día, es el tiempo de horas de luz solar, que es por tanto:

$$Y^k = t_s^k - t_r^k = \frac{24}{\pi} \cdot \omega_0 \approx 7.639\omega_0 \quad (1.61)$$

y el tiempo de *noche* es por tanto

$$Z^k = t_r^{k+1} - t_s^k. \quad (1.62)$$

### 1.3.3.3. Husos horarios

La evolución del día es diferente para regiones distintas del planeta, por razones geopolítico-económicas se usan por regiones *husos horarios*. Los *husos horarios* son la forma en que está dividido el planeta respecto de las cuales se tiene una hora u otra, es decir que en un mismo huso horario se tiene la misma hora, pero dados dos husos horarios diferentes no. Como se dijo responde no sólo a razones geográficas, sino también político-económicas y por ello es una división irregular.

Salvo por las zonas fronterizas en México se han adoptado cuatro husos horarios según la región: UTC-5,6,7 y 8, véase la tabla 1.1 y la figura 1.13, véase también la referencia [19].

Zona	Noroeste	Pacífico	Centro	Sureste
Huso horario	UTC-8	UTC-7	UTC-6	UTC-5
Meridiano	120° al oeste de Greenwich	105° al oeste de Greenwich	90 ° al oeste de Greenwich	75° al oeste de Greenwich
Estados	Baja California Norte	Baja California Sur, Sonora, Sinaloa y Nayarit	Chihuahua, Durango, Coahuila, Nuevo Leon, Tamaulipas, Zacatecas, San Luis Potosí, Jalisco, Guanajuato, Querétaro, Hidalgo Veracruz Colima Michoacán, Estado de México, Ciudad de México, Morelos, Tlaxcala, Puebla, Guerrero, Oaxaca, Tabasco, Chiapas, Campeche y Yucatán	Quintana Roo

Cuadro 1.1: Husos horarios en México

La hora en la zona de la frontera está dictada por el decreto [63].

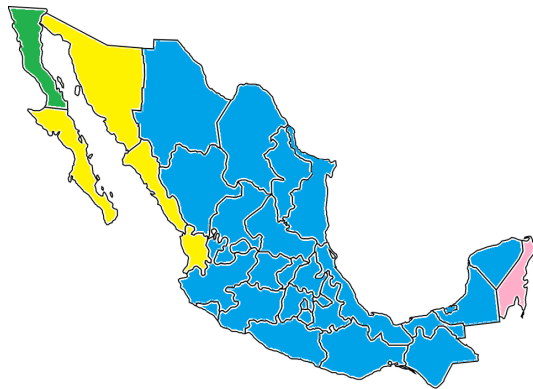


Figura 1.13: Husos horarios de México. Las zonas del país noroeste, pacífico, centro y sureste están representadas por sendos verde, amarillo, azul y rosa.



## Capítulo 2

# Modelos de evolución diaria de temperatura

### 2.1. Notación y fórmulas básicas

A continuación se presentan varios modelos de la evolución de la temperatura. Salvo por elementos auxiliares, los modelos usan la siguiente nomenclatura. En general  $t$  significa tiempo-

Símbolo	Significado
$t$	variable tiempo
$k$	día
$t_r^k$	hora del amanecer
$t_s^k$	hora del atardecer
$t_m^k$	mediodía
$t_{\max}^k$	hora en la que se alcanza la máxima temperatura
$t_{\min}^k$	hora en la que se alcanza la mínima temperatura
$Y^k$	duración del día
$Z^k$	duración de la noche
$T$	temperatura
$T_{\max}^k$	máxima temperatura
$T_{\min}^k$	mínima temperatura

Figura 2.1: Nomenclatura empleada para describir los diferentes modelos de temperatura

po y  $k$  es para el  $k$ -ésimo día. En algunos modelos se asume que  $Y^k$  y  $Z^k$  tienen la misma duración independientemente del día, en otros modelos se ajustan usando las ecuaciones del amanecer y del atardecer.

De los símbolos anteriores algunos se calculan estos otros:

$$T_r^k = T^k(t_r^k) \quad (2.1)$$

$$T_m^k = T^k(t_m^k) \quad (2.2)$$

$$T_s^k = T^k(t_s^k) \quad (2.3)$$

$$\bar{T}^k = \frac{T_{\max}^k + T_{\min}^k}{2} \quad (2.4)$$

$$Y^k = t_s^k - t_r^k \quad (2.5)$$

$$\Delta T^k = T_{\max}^k - T_{\min}^k \quad (2.6)$$

$$Z^k = t_r^{k+1} - t_s^k \quad (2.7)$$

El mediodía solar se aproxima tomando el punto medio entre el amanecer y el atardecer

$$\tilde{t}_m^k \approx t_m^k = \frac{t_r^k + t_s^k}{2} = t_r^k + \frac{Y^k}{2} = t_s^k - \frac{Y^k}{2}. \quad (2.8)$$

En los modelos más recientes ([78], [37], etc.) se habla de “Ciclo de temperatura diario” y “Temperatura de la superficie de la zona”, los cuales se abrevian DTC (en inglés: Day Temperature Cycle) y LST (en inglés: Land Surface Temperature). Esto es así porque ajustan los valores obtenidos con mediciones satelitales.

## 2.2. Modelos aproximativos

### 2.2.1. De Carson [18]

El modelo de Carson [18] es de tipo trigonométrico. No justifica su elección de series de Fourier; como es tratamiento numérico es de hecho una transformada discreta de Fourier.

La forma en que calibra el modelo es interpolar los datos empíricos usando coeficientes de Fourier. Los datos se toman a distintas profundidades del suelo.

Este modelo sirve siempre y cuando se tengan datos para calibrarlo y en ese caso las conclusiones/resultados permiten sacar resultados de la temperatura.

Para nuestro problema este modelo no nos interesa por varios motivos. Se podría usar este modelo para la temperatura del aire. El modelo no está describiendo fenomenológicamente la temperatura, sino que lo que hace es imponer un polinomio trigonométrico y calibrarlo. También siguen la misma metodología con los datos del aire, es decir que la aplican para el suelo y el aire igualmente.

La principal desventaja es que para calibrar este modelo se necesita toda una serie temporal; el modelo usa un filtro de paso bajo. No es aplicable a nuestra situación, por el tipo de datos. En este modelo se ajustan series temporales. El enfoque es empírico.

Con muy pocos armónicos se tienen una buena aproximación. Se compara con modelos más complejos que tienen en cuenta la física de los datos y de los medios. En [45] se reutiliza la técnica para modelar la temperatura de una zona de Nigeria (Lagos y Abuja). Aunque en [45] no se hace referencia a [18].

### 2.2.2. De Richardson, Seeley y Walker [73]

En [73] se propone un modelo de temperatura (véase [41]). Solamente se buscó modelar la temperatura de las horas de sol, razón por la que el siguiente modelo no está pensado para todo el día, sino sólo para  $t \in \llbracket 24 \cdot (k - 1), 24 \cdot (k - 1) + 12 \rrbracket$ , esto es  $t \in \llbracket t_{\min}^k, t_{\max}^k \rrbracket$ . Está dado por la expresión:

$$T(t) = T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \frac{t - t_{\min}^k}{12}. \quad (2.9)$$

### 2.2.3. Sanders [77]

En [77] se presenta una mejora del modelo anterior, véase [41]. Se toma  $t_{\min}^k = 24 \cdot (k - 1)$  y  $t_{\max}^k = 24 \cdot (k - 1) + 10$ . Para  $t \in \llbracket t_{\min}^k, t_{\max}^k \rrbracket$

$$T(t) = T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \frac{t - t_{\min}^k}{10}. \quad (2.10)$$

Para  $t \in \llbracket t_{\max}^k, t_{\min}^{k+1} \rrbracket$

$$T(t) = T_{\min}^{k+1} + (T_{\max}^k - T_{\min}^{k+1}) \cdot \frac{t - t_{\min}^{k+1}}{14}. \quad (2.11)$$

## 2.2.4. De Gringorten, [36]

### 2.2.4.1. De Gringorten

En [36] Irving I. Gringorten fue pionero en el uso de cadenas de Markov para modelar la evolución de la temperatura para determinar su evolución hora con hora (o patrones estocásticos, modelando eventos climatológicos), a diferencias de enfoques más deterministas. Se usa una distribución de probabilidad gaussiana para estandarizar series de temperatura en el tiempo. Sin embargo Sharon en [79] mostró que el modelo de Gringorten tiene dos inconvenientes: requiere muchas mediciones y sobreestima los eventos climáticos. Sharon mostró que dado que los datos de temperatura hora con hora están fuertemente correlacionados no se requieren tantas mediciones. En [36] se aclara que el calentamiento y enfriamiento diarios dificultan la aplicación de un modelo tipo Markov de un parámetro sin incorporar el ciclo.

### 2.2.4.2. De Hansen

Una mejora fue presentado por Hansen. Guiado por las observaciones de [79] de [36], Hansen modela la temperatura combinando una combinación lineal de senos (polinomio trigonométrico). El primero modela las fluctuaciones de temperatura a escala anual; el segundo, a escala diaria; el tercero, a escala de 12 horas, y el cuarto, a escala de ocho horas. No queda claro para cuál región.

## 2.2.5. De Heurer, Heermann, McKee y Benci [41]

En [41] se presenta un modelo dado por curvas logarítmicas. La elección de las funciones fue empírica.

Se asume que  $t_{\min}^k = t_r^k$ . La idea es separar el día en dos partes.

Para  $t \in [t_r^k, t_{\max}^k)$

$$T(t) = T_{\min}^k + A_1^k \cdot \log(C_1^k \cdot (t - t_r^k) + 1), \quad (2.12)$$

para  $t \in [t_{\max}^k, t_r^{k+1})$

$$T(t) = T_{\max}^k + A_2^k \cdot \log(C_2^k \cdot (t - t_{\max}^k) + 1). \quad (2.13)$$

Para tener continuidad en  $t_{\min}^{k+1}$  y en  $t_{\max}^k$  deben ajustarse las constantes  $A_1^k$  y  $A_2^k$ . Tomando los límites laterales en  $t_{\max}^k$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow (t_{\max}^k)^-} T(t) &= A_1^k \cdot \log(C_1^k \cdot t_{\max}^k + 1) + T_{\min}^k \\ &= T_{\max}^k \\ &= \lim_{t \rightarrow (t_{\max}^k)^+} T(t) \end{aligned}$$

Así que

$$A_1^k = \frac{\Delta T^k}{\log(C_1^k \cdot (t_{\max}^k - t_r^k) + 1)}. \quad (2.14)$$

Tomando los límites laterales en  $t_{\min}^{k+1} = t_r^{k+1}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow (t_{\min}^{k+1})^-} T(t) &= A_2^k \cdot \log(C_2 \cdot t_{\min}^{k+1} + 1) + T_{\min}^{k+1} \\ &= T_{\min}^k \\ &= \lim_{t \rightarrow (t_{\min}^{k+1})^+} T(t). \end{aligned}$$

Así que

$$A_2^k = \frac{T_{\min}^{k+1} - T_{\max}^k}{\log(C_2^k \cdot (t_r^{k+1} - t_{\max}^k) + 1)}. \quad (2.15)$$

Luego para  $t \in [t_r^k, t_{\max}^k]$

$$T(t) = T_{\min}^k + \frac{\Delta T^k}{\log(C_1^k \cdot (t_{\max}^k - t_r^k) + 1)} \cdot \log(C_1^k \cdot (t - t_r^k) + 1). \quad (2.16)$$

y para  $t \in [t_{\max}^k, t_r^{k+1}]$

$$T(t) = T_{\max}^k + \frac{T_{\min}^{k+1} - T_{\max}^k}{\log(C_2^k \cdot (t_r^{k+1} - t_{\max}^k) + 1)} \cdot \log(C_2^k \cdot (t - t_{\max}^k) + 1), \quad (2.17)$$

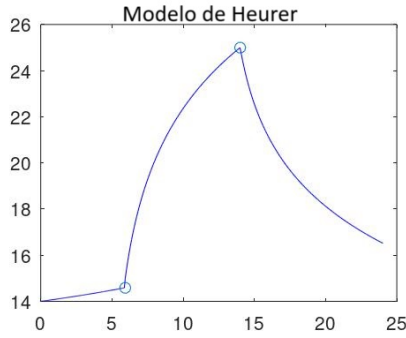


Figura 2.2: Curva asociada al modelo de Heurer (tiempo contra temperatura). Se ha tomado  $C_1^k = C_2^k = 1$ . Se han señalado los momentos  $t_r^k$  y  $t_{\max}^k$ .

### Observaciones:

1. En [41] se asume que el amanecer es siempre a la misma hora, es decir que no varía con la fecha, entonces  $t_r^{k+1} - t_r^k = 24$ , y que tampoco varía la hora de máxima temperatura, es decir  $t_{\max}^{k+1} - t_{\max}^k = 24$ ; razón por la cual en [41] se define  $d = t_{\max}^k - t_r^k$ , así

$$24 - d = t_r^{k+1} - t_{\max}^k.$$

No obstante, generalmente no es el caso.

2. La curva está ajustada de modo que alcance el valor  $T_{\min}^k$  en  $t_r^k$  y el valor  $T_{\max}^k$  en  $t_{\max}^k$ . Para el valor máximo no hay problema (siempre que  $T_{\max}^k > T_{\min}^{k+1}$ ), porque la curva se toma de modo que sea el máximo en los segmentos  $[t_r^k, t_{\max}^k]$  y  $[t_{\max}^k, t_r^{k+1}]$ .
3. Las constantes  $C_1^k$  y  $C_2^k$  se ajustan con los datos, así que requiere varias mediciones por día para calibrarse. También requiere de conocer el momento  $t_{\max}^k$  de cada día.
4. La curva en general no es continuamente diferenciable en  $t_r^k$  ni en  $t_{\max}^k$ .

### 2.2.6. De Walter [91]

El objetivo de Walter [91] era modelar las horas de sol, para Kenia. El modelo consistía en una *curva unitaria* adecuadamente escalada.

Se reduce la complejidad del modelo porque se reduce el número de parámetros de los que depende. Los 3 primeros términos de la serie de Fourier tienen la misma importancia, por eso se toma para ellos una curva unitaria adecuadamente escalada, aunado a que se asume que las temperaturas diarias siguen el mismo patrón todos los días del año.

Se tienen dos tipos de constantes: amplitud y desfase (como son tres términos seno, son tres desfases). El modelo depende de los desfases, que dependen a su vez de la posición del sol, esencialmente del medio día solar. Para su modelo usa máximos y mínimos de las horas de sol, afectando cuando se da la mínima. Así pues tiene una característica no admisible: que depende de datos de temperatura para calibrarse.

Sean  $T_{\max}^k$ ,  $T_{\min}^k$ ,  $T_{u\max}^k$  y  $T_{u\min}^k$  sendas temperaturas máxima, mínima, máxima de la curva unitaria y mínima de la curva unitaria, estos dos últimos términos se obtienen de la curva unitaria, es decir que primero debe calibrarse aquella. En el modelo de Walter  $T_{u\max} = 0.561$  y  $t_{u\min} = -0.453$ .

Sea

$$T_u(\theta) =: \sum_{n=1}^3 a_n \cdot \text{sen}(n \cdot \theta + \varepsilon_n) \quad (2.18)$$

para  $\theta = \frac{2\pi t}{24}$  (asumiendo días de 24 horas). Y sea

$$T(t) = T_M^k + R \cdot T_u\left(\frac{2\pi t}{24}\right). \quad (2.19)$$

El término  $T_M^k$  es la temperatura media (integral), nótese que cumple lo siguiente:

$$T_M^k =: \int_0^{2\pi} T(\theta) d\theta, \quad (2.20)$$

y se define la constante  $\gamma$  de desviación de la curva unitaria como:

$$\gamma =: \frac{T_{u\max}^k + T_{u\min}^k}{2},$$

en el artículo de Walter,  $\gamma = 0.054$ .

Calibrar datos de la temperatura

$$\begin{array}{c} \downarrow a_j, \varepsilon_j \\ \downarrow (a_1 = \frac{1}{2}) \\ T_{u\max}^k, T_{u\min}^k, \gamma, R \end{array}$$

Se cumple que

$$\begin{aligned} T_{\max}^k &= T_M^k + R \cdot T_{u\max}^k \\ T_{\min}^k &= T_M^k + R \cdot T_{u\min}^k. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_0^{2\pi} T_u(\theta) d\theta = 0$$

y que para cualquier constante  $T_i$  (que suele ser una temperatura inicial):

$$\int_0^{2\pi} \left( T_i - T\left(\frac{2\pi t}{24}\right) \right) dt = T_i^k - T_M^k.$$

Por un lado la semisuma (la mitad de la suma) tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{T}^k &= \frac{(T_M^k + R \cdot M_u) + (T_M^k + R \cdot m_u)}{2} \\ &= T_M^k + R \cdot \frac{T_{u\max}^k + T_{u\min}^k}{2} \\ &= T_M^k + R \cdot \gamma. \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}\Delta T^k &= (T_M^k + R \cdot T_{u\max}^k) - (T_M^k + R \cdot T_{u\min}^k) \\ &= R \cdot (T_{u\max}^k - T_{u\min}^k),\end{aligned}$$

despejando la  $R$  vemos que

$$R = \frac{\Delta T^k}{T_{u\max}^k - T_{u\min}^k},$$

substituyendo el valor de  $R$  para  $T_M^k$ :

$$\begin{aligned}T_M^k &= \bar{T}^k - \gamma \cdot \frac{\Delta T}{T_{u\max}^k - T_{u\min}^k} \\ &= \bar{T}^k - \frac{T_{u\max}^k + T_{u\min}^k}{2(T_{u\max}^k - T_{u\min}^k)} \cdot \Delta T^k.\end{aligned}\tag{2.21}$$

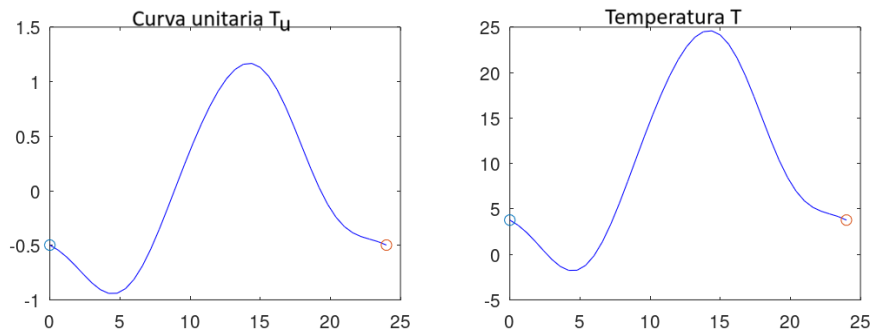


Figura 2.3: Izquierda: curva unitaria, derecha: modelo de Walter a escala con temperatura media igual a cero.

En [48] dice que en [91] Walter tomó una función de tal suerte que alcanza máximo y mínimo en sendas 4.48 y 18 horas.

### 2.2.7. De Watanabe [94]

En [94] se usa un modelo sinusoidal para aproximar la evolución de la temperatura durante horas de sol.

No queda claro exactamente cómo luce el modelo, porque en el artículo el interés principal está en estimar las unidades de calor de la temperatura promedio para predecir el efecto de la temperatura en un proceso biológico.

### 2.2.8. De Allen [3]

La idea principal del artículo [3] es aproximar la temperatura de diferentes partes del día usando senos diferentes. La idea consiste en dividir el día en dos partes. Es similar al modelo sinusoidal anterior, en cuanto a que se requieren los valores de temperatura máxima y mínima, que se ajustan análogamente, pensando en el mediodía, y se repite el proceso para la segunda mitad del día. El problema que presenta es que requiere no solamente conocer cuáles son esas temperaturas máxima y mínima, sino también conocer en qué momento se dan sendas temperaturas. No es un modelo de la temperatura en sí, sino de los “grados de día”, los cuales son importantes en agricultura para modelar el crecimiento de cultivos. Asume que la temperatura de un día dado está dada por una función seno, los “grados de día” son el área comprendida entre la curva y unos parámetros llamados “threshold”.

El artículo [3] tiene un enfoque muy algorítmico, con expresiones trigonométricas similares a los anteriores.

Para  $t \in [t_{\min}^k, t_{\max}^k)$

$$T(t) = T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \left( \pi \cdot \frac{t - t_{\min}^k}{2 \cdot (t_{\max}^k - t_{\min}^k)} \right). \quad (2.22)$$

Para  $t \in [t_{\max}^k, t_{\min}^{k+1})$

$$T(t) = T_{\max}^k - (T_{\max}^k - T_{\min}^{k+1}) \cdot \text{sen} \left( \pi \cdot \frac{t - t_{\max}^k}{2 \cdot (t_{\min}^{k+1} - t_{\max}^k)} \right). \quad (2.23)$$

La función es continua, pero en general no es continuamente diferenciable en  $t_{\min}^k$  ni en  $t_{\max}^k$ .

El modelo requiere de conocer los momentos de máxima y mínima temperatura.

### 2.2.9. De Wilkerson, Jones, Boote, Ingram y Mishoe [96]

Así como Fitzpatrick y Johnsson o Parton y Logan se hace una división entre el “día” y la “noche”, sin embargo estos dos periodos no comprenden las horas de luz y oscuridad, sino que el primero comienza dos horas después del amanecer y termina al atardecer; el segundo, desde el atardecer hasta dos horas después del amanecer del día siguiente.

La descripción que sigue del modelo se ha tomado de [72], donde se hace referencia a [96]. Sin embargo en [96] no se encuentra como tal el modelo explicado. Se usa la siguiente ecuación para modelar la temperatura, no obstante en [96] no viene una descripción de qué ecuación se emplea para modelar la temperatura, el artículo se centra en el estudio de ciertas propiedades y ecuaciones relacionadas al crecimiento de la soya.

Para  $t \in [t_s^{k-1}, t_r^k + 2)$

$$T(t) =: \frac{T_{\min}^k - b^{k-1}}{t_r^k + 2 - t_s^{k-1}} \cdot (t - t_s^{k-1}) + b^{k-1}, \quad (2.24)$$

donde

$$b^k =: T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi (t_s^k - t_r^k - 2)}{t_s^k - t_r^k} \right), \quad (2.25)$$

$$(2.26)$$

y para  $t \in [t_r^k + 2, t_s^k)$ :

$$T^k(t) =: T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi (t - t_r^k - 2)}{t_s^k - t_r^k} \right) \quad (2.27)$$

A diferencia del modelo anterior y al de Johnsson y Fitzpatrick para modelar las horas sin luz solar usa rectas, pero como ellos usa una trigonométrica para modelar el día.

Este modelo requiere las temperaturas máxima y mínima diaria, el momento del amanecer ( $t_r^k$ ) y del atardecer ( $t_s^k$ ) diarios.

### 2.2.10. De Boyer [32]

Douglas G. Boyer presentó un modelo de temperaturas para la zona montañosa de la región de los Apalaches del tipo sinusoidal, ajustó el seno usando regresión por mínimos cuadrados. La fórmula propuesta es similar a la usada por Anway (2.41), véase [6]:

$$T^k = b_0 + b_1 \cdot \text{sen}((k - 110^\circ) \cdot 0.0172), \quad (2.28)$$

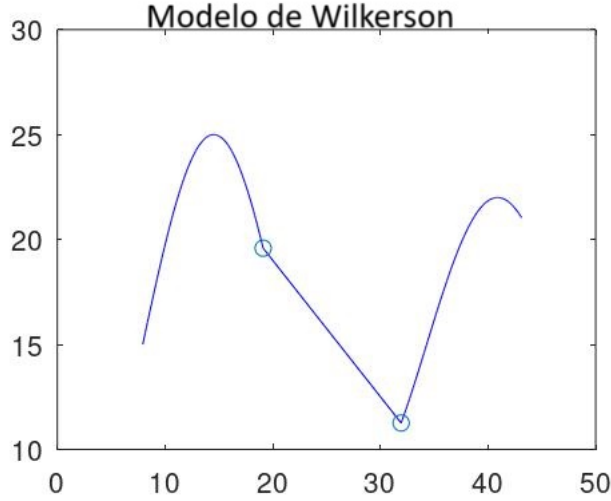


Figura 2.4: Curva asociada al modelo de Wilkerson. Están señalados los puntos en los que pasa de una curva sinusoidal a una recta y viceversa ( $t_s^k$  y  $t_r^{k+1} + 2$ ).

donde  $k \in [1, 365]$ ,  $k$  es el día del año en fecha juliana;  $b_0$ , la temperatura medida del valor promedio anual (en la fórmula anterior es el promedio integral, pues escalando  $t \mapsto \hat{t}$  e integrando de 0 a 1:  $\int_0^1 T(\hat{t}) d\hat{t} = b_0$ );  $b_1$  la amplitud de la onda de la temperatura de medio año (esta amplitud se obtiene como la mitad de la resta de las temperaturas máxima y mínima); en el artículo original la constante que multiplica el argumento es  $0.986 \approx \frac{360}{365}$ , es necesaria para convertir la fecha juliana en unidades angulares ( $360^\circ/365$  días), porque se usa un seno en grados, así que debería cambiarse este 9.86 a  $9.86 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.0172$  para usar el seno en radianes.  $T$  es una función de  $k$ , no obstante no es una expresión cuyo valor cambie a lo largo del día, sino que es una expresión que tiene un valor para un día determinado, pudiendo ser:  $T_m^k$ , la promedio;  $T_{\max}^k$ , la máxima, o  $T_{\min}^k$ , la mínima motivo por el cual para que la notación del modelo sea consistente en lugar de escribir  $T(k)$  se ha optado por  $T^k$ . En [32] Boyer dice que el menor error para mínimos cuadrados se obtiene cuando  $\text{sen}(t_i) = 0$  el 20 de abril, de ahí que se le resten los  $110^\circ = 1.919$  radianes.

$$\begin{aligned} T_{\min}^k &= \frac{29.3 - 0.62 \cdot z - 0.566 \cdot \phi}{+(11.8 - 0.16 \cdot z - 0.0002 \cdot \phi) \cdot \text{sen}((k - 110^\circ) \cdot 0.0172)}, \\ T_{\max}^k &= \frac{69.5 - 0.54 \cdot z - 1264 \cdot \phi}{+(-6.73 - 0.14 \cdot z + 0.5092 \cdot \phi) \cdot \text{sen}((k - 110^\circ) \cdot 0.0172)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

$\phi$  es la latitud en grados y  $z$  la altitud. El modelo requiere para su implementación de datos de longitud, latitud, altura y fecha juliana, así que puede extenderse a modelos que también dependan de la longitud  $\lambda$ . A diferencia de los modelos anteriores, no ajusta la temperatura de un día hora con hora, sino la temperatura de un año día con día.

Tanto  $b_0$  como  $b_1$  son transformaciones afines del plano en la recta, es decir que no son constantes, dependen de la latitud  $\phi$  y de la altitud  $z$ , fueron calibradas en [32] usando mínimos cuadrados para la zona de los Apalaches y para cualquier otra región deben recalibrarse.

### 2.2.11. De Bergh, Wyk, Wyk y Udahemuka [13]

Las mediciones satelitales pueden usarse para estimar la temperatura tanto en la superficie terrestre como en el aire. Sin embargo las mediciones son interrumpidas por la presencia de nubes. En [13] se trata de resolver ese problema interpolando. Para ello se presentan dos modelos de temperatura. A continuación el segundo, en [13] se dice que por la técnica empleada es del tipo estadístico, sin embargo por el núcleo reproductor empleado (un núcleo de Dirichlet) equivale a truncar con una serie de senos y cosenos, razón por la que ha sido

clasificado como método trigonométrico.

Se aplica para el problema particular de interpolar la información obtenida por los datos de temperatura la técnica estadística del núcleo de un espacio de Hilbert. A continuación una descripción:

La idea es usar un núcleo reproductor. Dado un espacio de Hilbert  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  cuyos elementos sean funciones  $f$

$$\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad (2.30)$$

una función

$$\mathbb{R} \xrightarrow{K} H \quad (2.31)$$

(se abrevia  $K(s)(t)$  como  $K(t, s)$ ) se dice núcleo reproductor si para toda  $f \in H$

$$\langle f, K(t) \rangle = f(t). \quad (2.32)$$

La teoría de espacios de Hilbert con núcleo reproductor tiene una tradición que se remonta al menos a los años 60, véase [13] y [64].

El problema de aproximación consiste encontrar la función  $\tilde{f}$  que se aproxime mejor a la  $f$  anterior en los valores  $t_\nu$  para tiempos  $t_\nu$  dados  $\{t_1, \dots, t_N\} \subset N \in \mathbb{N}$ . Los elementos de  $H$  pueden visualizarse como vectores de  $N$  elementos:

$$f_\nu =: f(t_\nu), \quad (2.33)$$

sujeto a

$$\langle \tilde{f}, K(t) \rangle = f_\nu \quad (2.34)$$

En la práctica suelen descartarse ciertos elementos, por el ruido, así que se trabaja más bien con ciertos datos  $t_\nu$  con  $\nu \in \llbracket 1, M \rrbracket \subset \mathbb{N}$ .

En [13] se dice que  $\tilde{f}$  debe ser de la forma

$$\tilde{f}(s) = \sum_{\nu=1}^M a^\nu \cdot K(\tilde{t}_\nu, s) \quad (2.35)$$

para ciertos valores  $\tilde{t}_\nu$  conocidos como *centros del núcleo*. El problema puede verse en forma matricial, definiendo una matriz

$$A =: [K(\tilde{t}_\nu, t_\mu)]_{\nu \in \llbracket 1, M \rrbracket}^{\mu \in \llbracket 1, N \rrbracket} \quad (2.36)$$

y un vector

$$\vec{a} =: [a^\nu]_{\nu \in \llbracket 1, M \rrbracket}, \quad (2.37)$$

la constricción se vuelve

$$\tilde{f}(s) = A\vec{a}, \quad (2.38)$$

problema que se puede resolver tomando una inversa generalizada de la matriz  $A$  (por ejemplo de Moore-Penrose, véase [10] y [92]:

$$\vec{a} = A^{-1}\tilde{f}(s). \quad (2.39)$$

En [13] se toma el núcleo

$$K(s, t) = \frac{\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot u \cdot (s - t)\right)}{\text{sen}\left(\frac{u}{2} \cdot (s - t)\right)}, \quad (2.40)$$

donde  $u$  es un parámetro de dilatación y  $n$  es el *número armónico*. Esta elección se debe a que por el teorema de la recolección de datos de Shannon, que dice que una función de banda limitada puede reconstruirse desde los datos de muestras suficientemente cercanas y por la periodicidad de los datos.

## 2.3. De horas de sol

### 2.3.1. De Anway, Brittain, Hunt, Innis, Parton, Rodell y Sauer [6]

El modelo sinusoidal de [6] consiste en un seno escalado más una constante, véase [48]:

$$T(t) =: T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \text{sen} \left( 2\pi \cdot \frac{t - t_r^k}{2(Y^k + 4h)} \right), \quad (2.41)$$

donde  $t_{\max}^k$  es la hora de la máxima temperatura;  $Y^k$ , el número de horas de sol;  $t_r^k$  la hora del amanecer;  $t_s^k$ , la del atardecer;  $t_m^k$  el tiempo medio, y  $h$  es un ángulo hora, exactamente una vigésima cuarta parte del día, equivalente a  $15^\circ$  (ángulos hora).

El modelo original esta planteado en términos de las horas transcurridas desde el amanecer  $N^k = t - t_r^k$ . Se asume que la hora de máximo calor es dos horas después del tiempo  $\frac{Y^k}{2}$ , es decir  $t_{\max}^k =: \frac{Y^k + 4}{2}$ .

La curva se ajusta a los valores de cada día, no coincide con los valores ni del día anterior, ni del día siguiente: en la noche la temperatura sube y tiene un brinco al comenzar el día siguiente.

Este modelo tiene datos inadmisibles para nuestro problema, requiere de conocer los tiempos de los máximos y mínimos.

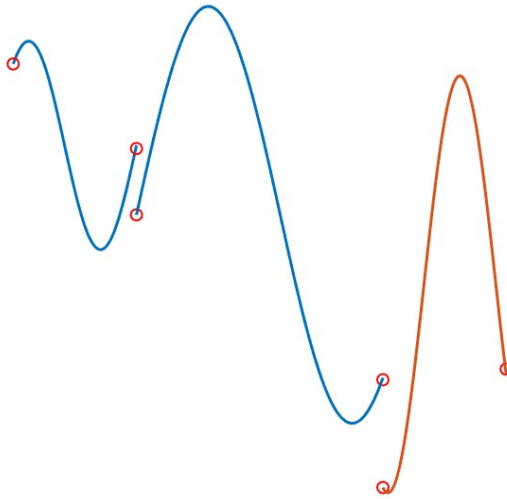


Figura 2.5: Modelo sinusoidal de J. C. Anway et al.

#### Observación:

En [75] se usa el modelo de [6], pero se ajusta estadísticamente.

### 2.3.2. De de Wit [97]

En el libro [97] se da una descripción algorítmica y cualitativa además de un programa de la evolución de la temperatura, pero no se da una fórmula explícita. Así pues presenta programas en FORTRAN, en los cuales se siguen los pasos descritos. Es también un modelo sinusoidal, porque expresa la temperatura en términos de sumas de cosenos y una constante. Sean usan las variables auxiliares: Se hace la suposición de que la temperatura máxima se alcanza en las 14:00 horas y la mínima en el amanecer, razón por la cual se divide el día entre el amanecer y las 14:00 horas, y entre las 14:00 horas y el amanecer del siguiente día,

de modo que si  $t \in [t_r^k, 24 \cdot (k-1) + 14)$  entonces

$$T(t) = \bar{T}^k - \frac{\Delta T^k}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot (t - t_r^k)}{24 \cdot (k-1) + 14 - t_r^k}\right), \quad (2.42)$$

si  $t \in [24 \cdot (k-1) + 14, t_r^{k+1})$ , entonces

$$T(t) = \frac{T_{\max}^k + T_{\min}^{k+1}}{2} + \frac{T_{\max}^k - T_{\min}^{k+1}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot (t - 24 \cdot (k-1) - 14)}{t_r^{k+1} - 24 \cdot (k-1) - 14}\right) \quad (2.43)$$

Note que la curva de la temperatura crece hasta alcanzar su máximo a las dos de a tarde (las 14:00 horas). La función ha sido construida para ser continua en los puntos de transición.

Calculemos los límites laterales de la curva en los tiempos  $t_r^k = t_{\min}^k$  y:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow t_r^k \\ t \leq t_r^k}} T(t) &= T_{\min}^k \\ \lim_{\substack{t \rightarrow t_r^k \\ t \geq t_r^k}} T(t) &= \bar{T}^k - \frac{\Delta T}{2} \\ &= \frac{T_{\max}^k + T_{\min}^k - T_{\max}^k + T_{\min}^k}{2} \\ &= T_{\min}^k \end{aligned} \quad (2.44)$$

y para  $t_{\max}^k$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow t_{\max}^k \\ t \leq t_r^k}} T(t) &= T_{\min}^k \\ &= \bar{T}^k + \frac{\Delta T^k}{2} \\ &= \frac{T_{\max}^k + T_{\min}^k + T_{\max}^k - T_{\min}^k}{2} \\ &= T_{\max}^k \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow t_{\max}^k \\ t \geq t_r^k}} T(t) &= \bar{T}^k - \frac{\Delta T}{2} \\ &= T_{\max}^k \end{aligned} \quad (2.46)$$

Las derivadas también son continuas, porque los límites laterales en ambos puntos valen cero:

$$d^- T(t_r^k) = 0 \quad (2.47)$$

$$d^+ T(t_r^k) = 0 \quad (2.48)$$

$$d^- T(t_{\max}^k) = 0 \quad (2.49)$$

$$d^+ T(t_{\max}^k) = 0. \quad (2.50)$$

Como la función es continuamente diferenciable para los demás tiempos, lo es siempre. O sea que existe siempre  $\frac{dT}{dt}(t)$  y es una función continua. Diferenciando lateralmente de nuevo:

$$d^- \frac{dT}{dt}(t_r^{k+1}) = \frac{T_{\max}^k - T_{\min}^k}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{t_r^{k+1} - t_{\max}^k}\right)^2 \quad (2.51)$$

$$d^+ \frac{dT}{dt}(t_r^k) = \frac{\Delta T^k}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{t_{\max}^k - t_r^k}\right) \quad (2.52)$$

$$d^- \frac{dT}{dt}(t_{\max}^k) = -\frac{\Delta T^k}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{t_{\max}^k - t_r^k}\right)^2 \quad (2.53)$$

$$d^+ \frac{dT}{dt}(t_{\max}^k) = -\frac{T_{\max}^k - T_{\min}^{k+1}}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{t_r^{k+1} - t_{\max}^k}\right)^2. \quad (2.54)$$

Podemos concluir que  $T$  es dos veces continuamente diferenciable en  $t_r^k$  si y sólo si

$$\frac{T_{\max}^k - T_{\min}^k}{(t_{\max}^k - t_r^k)^2} = \frac{T_{\max}^{k-1} - T_{\min}^k}{(t_r^k - t_{\max}^{k-1})^2} \quad (2.55)$$

y en  $t_{\max}^k$  si y sólo si

$$\frac{T_{\max}^k - T_{\min}^k}{(t_{\max}^k - t_r^k)^2} = \frac{T_{\max}^k - T_{\min}^{k+1}}{(t_r^{k+1} - t_{\max}^k)^2}. \quad (2.56)$$

Condiciones que generalmente no se cumplen.

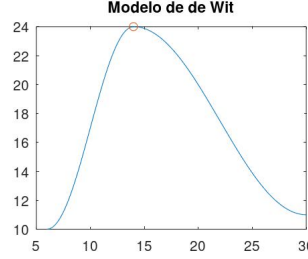


Figura 2.6: Curva asociada al modelo de de Wit. Se ha señalado el valor de la temperatura en  $t_{\max}^k$ .

## 2.4. Del periodo de la noche

### 2.4.1. De Johnson y Fitzpatrick [48]

Johnson y Fitzpatrick combinaron dos modelos, aunque ambos fueron pensados inicialmente para modelar la temperatura durante las horas de sol, el de Walter se usa entre el momento de máxima temperatura, que se asume que ocurre a las 18 horas, y el de mínima temperatura, que se asume que ocurre a las 4.48 horas; estos valores fueron tomados del modelo de Walter.

Para las horas del día  $t \in [t_r^k, t_s^k)$ ,  $t$  en el tiempo local aparente, se usa el modelo sinusoidal de Anway, es decir que se usa la expresión:

$$T(t) =: T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \text{sen} \left( \frac{2\pi \cdot (t - t_r^k)}{2 \cdot (Y^k + 4)} \right), \quad (2.57)$$

Johnson y Fitzpatrick hacen uso de la misma curva unitaria  $T_u$  que Walter, ecuación (2.18), cambiando la constante  $T_M^k$  del promedio integral por la media aritmética  $\bar{T}^k$ ,  $t \in [t_s^k, t_r^{k+1})$ :

$$T(t) =: \bar{T}^k + \Delta T^k (T_u(t + a^k(t)) + p^k(t)), \quad (2.58)$$

con los mismos coeficientes, véase [91] (el término  $T_M^k$  es interpretado como la media aritmética, es decir  $\bar{T}^k$ ) de una función auxiliar  $a^k$  que es la recta que conecta los siguientes puntos (lado izquierdo) en sendos valores (lado derecho):

$$a^k(t_r^k) = 4.48 - t_r^k \quad (2.59)$$

$$a^k(t_s^k) = 18 - t_s^k, \quad (2.60)$$

$$a^k(t) =: \frac{a^k(t_r^{k+1}) - a^k(t_s^k)}{t_r^{k+1} - t_s^k} \cdot (t - t_s^k) + a^k(t_s^k). \quad (2.61)$$

En [48] se dice que en el modelo de Walter, [91] los valores máximo y mínimo son alcanzados a las 4.48 y 18 horas, la función de la recta  $a^k$  es que esos valores sean alcanzados en el amanecer y el atardecer.

También hacen uso de una función “de fijado”:  $p^k(t)$ . Esta función se usa también para interpolar, se usará para modificar la función de Walter, para que en los puntos  $t_s^k$  y  $t_r^{k+1}$

tome sendos valores  $\lim_{\substack{t \rightarrow t_s^k \\ t \leq t_s^k}} T(t)$  y  $\lim_{\substack{t \rightarrow t_r^{k+1} \\ t \geq t_r^{k+1}}} T(t)$ .

Está dada por:

$$p^k(t_s^k) = \frac{\lim_{\substack{t \rightarrow t_s^k \\ t \leq t_s^k}} T(t) - \bar{T}^k}{\Delta T^k} - T_u \quad (18) \quad (2.62)$$

$$= \frac{T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \text{sen} \left( \frac{2\pi \cdot (t_s^k - t_r^k)}{2 \cdot (Y^k + 4)} \right) - \bar{T}^k}{\Delta T^k} - T_u \quad (18) \quad (2.63)$$

$$= \frac{T_{\min}^k - \bar{T}^k}{\Delta T^k} + \text{sen} \left( \frac{2\pi \cdot (t_s^k - t_r^k)}{2 \cdot (Y^k + 4)} \right) - T_u \quad (18) \quad (2.64)$$

$$= -\frac{1}{2} + \text{sen} \left( \frac{2\pi \cdot (t_s^k - t_r^k)}{2 \cdot (Y^k + 4)} \right) - T_u \quad (18) \quad (2.65)$$

$$p^k(t_r^{k+1}) = \frac{\lim_{\substack{t \rightarrow t_r^{k+1} \\ t \geq t_r^{k+1}}} T(t) - \bar{T}^k}{\Delta T^k} - T_u \quad (4.48) \quad (2.66)$$

$$= \frac{T_{\min}^{k+1} + \Delta T^{k+1} \cdot \text{sen} \left( \frac{2\pi \cdot (t_r^{k+1} - t_r^{k+1})}{2 \cdot (Y^{k+1} + 4)} \right) - \bar{T}^k}{\Delta T^k} - T_u \quad (4.48) \quad (2.67)$$

$$= \frac{T_{\min}^{k+1} - \bar{T}^k}{\Delta T^k} - T_u \quad (4.48) \quad (2.68)$$

$$p^k(t) = : \frac{p^k(t_r^{k+1}) - p^k(t_s^k)}{t_r^{k+1} - t_s^k} \cdot (t - t_s^k) + p^k(t_s^k). \quad (2.69)$$

La función de la función  $p^k$  es que la curva resultante sea continua, es decir que  $p^k(t)$  interpola.

Luego para  $t \in [24k + 18, 24(k + 1) + 4.48]$  (hora local aparente) la temperatura está dada por la relación:

$$T(t) = : \bar{T}^k + R \cdot [T_u(t + a^k(t)) + p^k(t)] \quad (2.70)$$

$$= \bar{T}^k + \Delta T^k \cdot \left[ \sum_{n=1}^3 a_n \cdot \text{sen} \left( 2\pi n \frac{t + a^k(t)}{24} + \varepsilon_n \right) + p^k(t) \right]. \quad (2.71)$$

(en [48] se usan los valores  $\varepsilon_1 = 23^\circ 28' = 4.0602176$  radianes,  $\varepsilon_2 = 55^\circ 21' = 0.9660397$  radianes y  $\varepsilon_3 = 73^\circ 19' = 1.2796172299$  radianes).

#### Observaciones:

1. El modelo en [48] está pensado de manera que no se calibre día con día, es decir que está pensado en que la temperatura sigue un ciclo de 24 horas. En el presente texto eso ha sido corregido.
2. Una consecuencia del punto anterior es que el modelo no está pensado para ser continuamente diferenciable en las horas en que comienza el modelo  $t_r^k = 4.48$  h y termina  $t_s^k = 18$  h. No obstante dada la cantidad de parámetros ( $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ ) sí se podría ajustar para ser continuamente diferenciable.

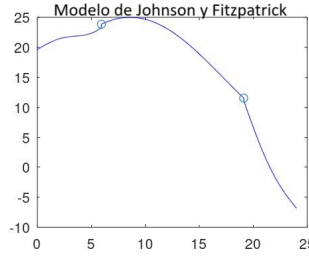


Figura 2.7: Curva del modelo de Johnson y Fitzpatrick. Señalados los puntos de amanecer y atardecer

3. Para adaptarse a una zona distinta tendrían que cambiarse las horas en las que se toma el Anway y se cambia al modelo de Walter.
4. Para calibrarse el modelo requiere de varias mediciones de la temperatura a lo largo del día. Lo que lo vuelve inadmisibles.

### 2.4.2. De Parton y Logan [65]

Así como el modelo de Johnson y Fitzpatrick, Parton y Logan [65] modelan la temperatura de las horas de sol usando una función trigonométrica, pero a diferencia de ellos modelan la temperatura de las horas sin luz solar usando una exponencial. Es el primer modelo que combina una exponencial con una suma de funciones trigonométricas, usa tres parámetros:

1.  $a^k$  es el coeficiente de retraso de la temperatura máxima del día  $k$ .
2.  $b^k$  es el coeficiente de temperatura de la noche del día  $k$ .
3.  $c^k$  es el coeficiente de retraso de la temperatura mínima del día  $k$ .

Estos parámetros se exploran más adelante.

el modelo está dado por las ecuaciones:

Para  $t \in [t_{\min}^k, t_s^k]$

$$T(t) =: T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi (t - t_{\min}^k)}{Y^k + 2a^k} \right), \quad (2.72)$$

y para  $t \in [t_s^k, t_{\min}^{k+1}]$

$$T(t) =: T_{\min}^k + (T_s^k - T_{\min}^k) \cdot e^{-\frac{b^k (t - t_s^k)}{Z^k}}, \quad (2.73)$$

además  $t_{\min}^k = t_r^k + c^k$ ,  $c^k$  se toma como un valor pequeño, de modo que  $t_{\min}^k$  y  $t_r^k$  coincidan. Para que la función sea continua hay que hacer que los límites derecho e izquierdo coincidan:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow (t_{\min}^{k+1})^-} T(t) &= T_{\min}^k + (T_s^k - T_{\min}^k) \cdot e^{-\frac{b^k (t_{\min}^{k+1} - t_s^k)}{Z^k}} \\ &= T_{\min}^{k+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow (t_{\min}^{k+1})^+} T(t) \\ e^{-\frac{b^k (t_{\min}^{k+1} - t_s^k)}{Z^k}} &= \frac{T_{\min}^{k+1} - T_{\min}^k}{T_s^k - T_{\min}^k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b^k &= -\frac{Z^k}{t_{\min}^{k+1} - t_s^k} \cdot \log\left(\frac{T_{\min}^{k+1} - T_{\min}^k}{T_s^k - T_{\min}^k}\right) \\
&= -\frac{t_r^{k+1} - t_s^k}{t_{\min}^{k+1} - t_s^k} \cdot \log\left(\frac{T_{\min}^{k+1} - T_{\min}^k}{T_s^k - T_{\min}^k}\right),
\end{aligned}$$

$b^k$  está bien definido si y sólo si  $T_{\min}^{k+1} - T_{\min}^k > 0$ , condición que a menudo no se cumple.

$$\begin{aligned}
t_s^k - t_{\min}^k &= Y^k - c^k, \\
c^k &= Y^k - t_s^k + t_{\min}^k \\
&= t_{\min}^k - t_r^k.
\end{aligned}$$

(significado de  $c^k$ ).

Por otro lado el seno alcanza el valor máximo  $T_{\max}^k = T(t_{\max}^k)$ , en  $t = t_{\max}^k$ , es decir cuando  $\sin\left(\frac{\pi(t_{\max}^k - t_{\min}^k)}{Y^k + 2a^k}\right) = 1$ , lo cual ocurre si y sólo si

$$\begin{aligned}
\frac{\pi \cdot (t_{\max}^k - t_{\min}^k)}{Y^k + 2a^k} &= \frac{\pi}{2}, \\
t_{\max}^k &= t_{\min}^k + \frac{Y^k + 2a^k}{2} \\
&= t_{\min}^k + \frac{t_s^k - t_r^k}{2} + a^k
\end{aligned}$$

(significado de  $a^k$ ).

$$\begin{aligned}
t_{\max}^k - \frac{t_r^k + t_s^k}{2} &= t_{\min}^k + \frac{t_s^k + t_r^k}{2} + a^k - \frac{t_r^k + t_s^k}{2} \\
&= t_r^k + c^k + \frac{t_s^k - t_r^k}{2} + a^k - \frac{t_r^k + t_s^k}{2} \\
&= c^k + a^k, \text{ luego} \\
t_{\max}^k &= \frac{t_r^k + t_s^k}{2} + c^k + a^k \\
&= t_m^k + c^k + a^k,
\end{aligned}$$

así que la máxima se alcanza  $c^k + a^k$  después del medio día. Para que realmente sea después del medio día, es necesario que  $c^k + a^k < 0$ .

Analicemos el argumento del seno: se está modelando la temperatura con una función seno aproximadamente una cuarta parte de su periodo, para que la función seno sea una expresión positiva tiene que cumplirse la condición anterior de  $c^k + a^k < 0$ , así

$$\begin{aligned}
\frac{t_s^k - t_{\min}^k}{Y^k + 2a^k} &= \frac{t_s^k - t_r^k - c^k}{t_s^k - t_r^k + 2a^k} \\
&= 1 - \frac{c^k + a^k}{t_s^k - t_r^k + 2a^k}, \text{ luego} \\
\frac{c^k + 2a^k}{Y^k + 2a^k} &< 1, \text{ luego} \\
\text{sen}\left(\frac{\pi(t_s^k - t_{\min}^k)}{Y^k + 2a^k}\right) &> 0, \text{ luego} \\
T_s^k &> T_{\min}^k.
\end{aligned}$$

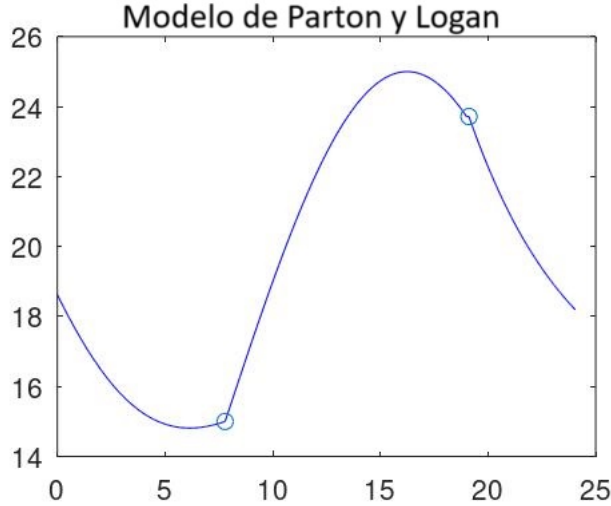


Figura 2.8: Curva asociada al modelo de Parton y Logan. Encerrado en círculos están los puntos en los que cambia de exponencial a sinusoidal o viceversa

Análogamente para  $c^k + a^k \geq 0$  se obtiene  $T_s^k \geq T_{\min}^k$ . De modo que en el periodo  $[t_s^k, t_{\min}^{k+1}]$  para  $b^k$  positiva el modelo es creciente, en lugar de decreciente, contrario a las hipótesis originales.

**Observaciones:**

- El modelo requiere las temperaturas máxima y mínima, pero los valores  $t_{\max}^k$  y  $t_{\min}^k$  se obtienen sumando y restándole los valores  $a^k$   $c^k$  a  $t_r^k$  y  $t_s^k$ . La ecuación depende de los valores de  $t_r^k$  y de  $t_s^k$ .
- El modelo presupone que  $T_{\min}^k \leq T_{\min}^{k+1}$ , lo que no a menudo no sucede.
- Notemos que si  $T_{\min}^k > T_s^k$  y  $b^k < 0$  en la noche subiría la temperatura.
- $T_{\min}^{k+1}$  no puede estar por debajo de  $T_{\min}^k$ , pues la exponencial (cuando su argumento es negativo) tiene como asíntota a  $T_{\min}^k$ .
- $T_{\min}^{k+1}$  debe estar entre  $T_{\min}^k$  y  $T_s^k$  para que la función esté bien definida y en la noche se muestre decaimiento.
- Puede usarse este modelo sin que muestre decaimiento, pero hay que tomar  $T_{\min}^{k+1}$  mayor que  $T_{\min}^k$  para que sea una función continua. No obstante si se toma una  $T_{\min}^{k+1}$  ligeramente menor, dado que la exponencial decae rápidamente la función es discontinua, pero la discontinuidad es pequeña.
- En [21] se usa este método, pero se ajusta estadísticamente. Naturalmente el resultado mejora, debido al ajuste, sin embargo contrario a la idea original del método se requiere de la temperatura de cada hora. Con el pasar de los años ha sido usado en varios artículos, por ejemplo en [69].

**2.4.3. De Kimball y Bellamy [52]**

El modelo de Parton y Logan es un modelo mixto que busca reflejar el decaimiento de la temperatura en las horas en las que ya no hay luz solar, no obstante, como se aclaró en la sección inmediata anterior, el modelo de Parton y Logan tiene ciertos inconvenientes. El modelo [52] de Kimball y Bellamy es una versión del modelo de Parton y Logan que busca mediante la introducción de nuevos parámetros mostrar un modelo más realista de la temperatura. Por ejemplo el modelo de Parton y Logan puede ser discontinuo en  $t_{\min}^k$  si  $T_{\min}^k \geq T_{\min}^{k+1}$ , en [52] se introduce una constante  $d^k$  para evitarlo.

$t_{\min}^k$  y  $t_{\max}^k$  están dadas por las mismas expresiones que en el modelo de Parton y Logan, [65].

Para  $t \in [t_{\min}^k, t_s^k]$

$$T(t) = T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi \cdot (t - t_{\min}^k)}{Y^k + 2a^k} \right) \quad (2.74)$$

Para  $t \in [t_s^k, t_{\min}^{k+1}]$

$$T(t) = (T_{\min}^k - d^k) + (T_s^k - (T_{\min}^k - d^k)) \cdot e^{-\frac{b^k \cdot (t - t_s^k)}{Z^k + c^k}}. \quad (2.75)$$

La expresión de Kimball y Bellamy tienen los mismos tres parámetros ( $a^k$ ,  $b^k$  y  $c^k$ ) que el modelo original de Parton y Logan.  $d^k$ ,  $t_s^k$  y  $T_s^k =: T(t_s^k)$  no son parámetros, sino variables auxiliares; la variable auxiliar  $d^k$  es la modificación que realizaron Kimball y Bellamy del modelo de [65], modificación que fue realizada a modo de garantizar la continuidad de la expresión en  $t_{\min}^{k+1}$ .

Veamos cual es el valor que debe adoptar la variable auxiliar  $d^k$ , tomando límites laterales se obtienen las siguientes expresiones en  $t_s^k$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow (t_s^k)^+} T(t) &= T_{\min}^k - d^k + (T_s^k - T_{\min}^k + d^k) \cdot e^{-\frac{b^k \cdot (t_s^k - t_s^k)}{Z^k + c^k}} \\ &= T_s^k \end{aligned}$$

y

$$\lim_{t \rightarrow (t_s^k)^-} T(t) = T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \text{sen} \left( \pi \frac{t_s^k - t_{\min}^k}{Y^k + 2a^k} \right),$$

comparando:

$$T_s^k =: T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \text{sen} \left( \pi \frac{t_s^k - t_{\min}^k}{Y^k + 2a^k} \right). \quad (2.76)$$

Tomando los límites laterales en  $t_{\min}^{k+1}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow (t_{\min}^{k+1})^+} T(t) &= T_{\min}^{k+1} + (T_{\max}^{k+1} - T_{\min}^k) \cdot \text{sen} \left( \pi \cdot \frac{t_{\min}^{k+1} - t_{\min}^{k+1}}{Y^{k+1} + 2a^{k+1}} \right), \\ &= T_{\min}^{k+1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow (t_{\min}^{k+1})^-} T(t) &= T_{\min}^k - d^k + (T_s^k - T_{\min}^k + d^k) \cdot e^{-\frac{b^k \cdot (t_{\min}^{k+1} - t_s^k)}{Z^k + c^k}} \\ &= T_{\min}^k - d^k + (T_s^k - T_{\min}^k + d^k) \cdot e^{-\frac{b^k \cdot (t_{\min}^{k+1} - t_s^k + c^k)}{t_r^{k+1} - t_s^k + c^k}} \\ &= T_{\min}^k - d^k + (T_s^k - T_{\min}^k + d^k) \cdot e^{-b^k} \end{aligned}$$

En el artículo [52] Kimball y Bellamy no usan  $Z^k$ , sino  $24 - Y^k$ , no obstante para que las expresiones sean consistentes se hizo la corrección  $24 - Y^k \mapsto Z^k$ .

$$T_{\min}^{k+1} = T_{\min}^k - d^k + e^{-b^k} \cdot \left( d^k + \Delta T^k \cdot \text{sen} \left( \pi \cdot \frac{Y^k - c^k}{Y^k + 2a^k} \right) \right), \quad (2.77)$$

agrupando:

$$T_{\min}^{k+1} - T_{\min}^k - e^{-b^k} \cdot \Delta T^k \cdot \text{sen} \left( \pi \cdot \frac{Y^k - c^k}{Y^k + 2a^k} \right) = d^k \cdot (e^{-b^k} - 1), \quad (2.78)$$

dividiendo

$$d^k = \frac{T_{\min}^{k+1} - T_{\min}^k - e^{-b^k} \cdot \Delta T^k \cdot \text{sen} \left( \pi \cdot \frac{Y^k - c^k}{Y^k + 2a^k} \right)}{(e^{-b^k} - 1)}. \quad (2.79)$$

La expresión que describe la temperatura en las horas de sol puede expresarse equivalentemente en términos de un coseno:

$$T(t) = T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{t - t_{\max}^k}{t_{\max}^k - t_{\min}^k} \right), \quad (2.80)$$

esta expresión en términos de coseno permite verificar con mayor facilidad que los valores máximo y mínimo se alcancen en  $t_{\min}^k$  y  $t_{\max}^k$ .

Kimball y Bellamy a partir de ciertas relaciones le asignan valores fijos a los parámetros introduciendo un parámetro nuevo  $\alpha^k$ ,

Kimball y Bellamy ahora proceden a reducir en uno el número de parámetros, expresando  $a^k$  en términos de  $c^k$ :

$$\begin{aligned} c^k + a^k &= k - 1 + 12 - \frac{t_r^k + t_s^k}{2} \\ &= k - 1 + 12 - \frac{t_s^k}{4} - \frac{3t_r^k}{4} \end{aligned}$$

luego

$$a^k = k - 1 + 12 - \frac{t_s^k + 3t_r^k}{4} - c^k, \quad (2.81)$$

ahora Kimball y Bellamy toman  $c^k =: \alpha^k \cdot Y^k$ , por razones empíricas se toma  $\alpha^k = 0.06$  para Phoenix, E.U.A., de este modo

$$a^k = k - 1 + 12 - \alpha^k \cdot (t_s^k - t_r^k) \quad (2.82)$$

$$= k - 1 + 12 - \left( \frac{1}{4} + \alpha^k \right) \cdot t_s^k - \left( \frac{3}{4} - \alpha^k \right) \cdot t_r^k, \quad (2.83)$$

luego

$$\begin{aligned} t_s^k &= k - 1 + 12 + \frac{Y^k}{2} \alpha^k \cdot Y^k \\ &= k - 1 + 12 + \left( \frac{1}{2} - \alpha^k \right) \cdot (t_s^k - t_r^k), \end{aligned}$$

$$T_s^k = T(t_s^k) = T_{\min}^k + (T_{\max}^k - T_{\min}^k) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{t_s^k - t_{\max}^k}{t_{\max}^k - t_{\min}^k} \right),$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{t_s^k - t_{\max}^k}{t_{\max}^k - t_{\min}^k} &= \frac{\frac{Y^k}{4} - \alpha^k \cdot Y^k}{(k - 1) + 12 - t_r^k + \frac{Y^k}{4} - \alpha^k \cdot Y^k} \\ &= \frac{\left( \frac{1}{4} - \alpha^k \right) \cdot Y^k}{(k - 1) + 12 - t_r^k + \frac{Y^k}{4} - \alpha^k \cdot Y^k} \\ &= \frac{\left( \frac{1}{4} - \alpha^k \right) \cdot Y^k}{4 \cdot (k - 1 + 12 - t_r^k) + (1 - 4 \cdot \alpha^k) \cdot Y^k} \end{aligned}$$

Si  $4 \cdot (k - 1 + 12 - t_r^k) = 2 \cdot Y^k$ , entonces

$$\frac{t_s^k - t_{\max}^k}{t_{\max}^k - t_{\min}^k} = \frac{(1 - \alpha^k) \cdot Y^k}{2 + 1 - 4 \cdot Y^k} \quad (2.84)$$

$$= \frac{1 - 4 \cdot \alpha^k}{3 - 4 \cdot \alpha^k}, \quad (2.85)$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
 2 \cdot (k - 1 + 12 - t_r^k) &= t_s^k - t_r^k \\
 \Rightarrow 2 \cdot k - 1 + 24 &= t_s^k - t_r^k \\
 \Rightarrow k - 1 + 12 &= \frac{t_s^k - t_r^k}{2}
 \end{aligned}$$

#### 2.4.4. De Linvill [53]

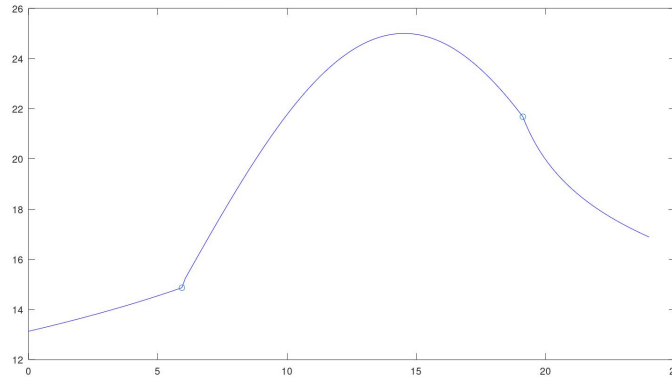


Figura 2.9: Gráfica del modelo de Linvill. Señalados están los puntos  $t_r^k$  y  $t_s^k$

Físicamente el planeta tierra atraviesa por un periodo de tiempo en el que la superficie se calienta, pero después la temperatura decrece. Normalmente para modelar la temperatura se usa un modelo sinusoidal, para que el modelo sinusoidal refleje que las temperaturas máxima y mínima no se alcanzan exactamente en los momentos de amanecer y atardecer, el argumento de la función sinusoidal es una diferencia  $t - t_{\min}^k$  dividido por  $t_{\max}^k - t_{\min}^k$ , todo multiplicado por  $\frac{\pi}{2}$ .

En [53] se usa la siguiente expresión para modelar la temperatura desde el amanecer hasta un cierto momento, en el que comienza el periodo de descenso de la temperatura,  $t \in [t_r^k, t_s^k]$ :

$$T(t) = T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi \cdot (t - t_r^k)}{2 \cdot (t_m^k + 2 - t_r^k)} \right) \quad (2.86)$$

Se asume que la temperatura mínima se alcanza al amanecer:  $t_r^k = t_s^k$ .

Para modelar el periodo de enfriamiento ( $t \in (t_s^k, t_r^{k+1})$ ) Linvill cambia a la siguiente expresión logarítmica:

$$T(t) =: T_s^k - \frac{T_s^k - T_{\min}^{k+1}}{\log(t_r^{k+1} - t_s^k + 1)} \cdot \log(t - t_s^k + 1), \quad (2.87)$$

donde  $t_s^k - t_s^{k+1}$  representa las horas de la noche (del atardecer del día  $k$  al amanecer del día  $k + 1$ ) y la constante  $T$  es la temperatura alcanzada en el momento  $t_s^k$ .

$$T_s^k =: \lim_{t \rightarrow (t_s^k)^-} T(t) \quad (2.88)$$

$$= (T_{\max}^k - T_{\min}^k) \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi \cdot (t_s^k - t_r^k)}{2 \cdot (t_m^k - t_r^k + 2)} \right) + T_{\min}^k \quad (2.89)$$

La función  $T$  es por construcción continua, pero en los momentos del amanecer y el

atardecer la derivada no es continua, pues las derivadas laterales son:

$$d^-T(t_s^k) = (T_{\max}^k - T_{\min}^k) \cdot \left( \frac{\pi}{2 \cdot (t_m^k - t_r^k + 2)} \right) < 0, \quad (2.90)$$

$$d^+T(t_s^k) = \frac{T_s^k - T_{\min}^k}{\log(t_r^{k+1} - t_s^k + 1)} \cdot \left( \frac{d \log}{dt}(t - t_s^k + 1) \right) \quad (t = t_s) \quad (2.91)$$

$$= \frac{T_s^k - T_{\min}^k}{\log(t_r^{k+1} - t_s^k + 1)} \cdot \left( \frac{1}{t_s^k - t_s^k + 1} \right) \quad (2.92)$$

$$= \frac{-(T_{\max}^k - T_{\min}^k) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi \cdot (t_s^k - t_r^k)}{2 \cdot (t_m^k - t)} \right) - T_{\min}^{k+1} - T_{\min}^k}{\log(t_r^{k+1} - t_s^k + 1)} < 0, \quad (2.93)$$

es decir que  $d^+T(t_r^k), d^-T(t_r^k) < 0$ , pero viendo las expresiones puede verse que en general no coinciden sus los valores. Similarmente en el amanecer:  $d^+T(t_r^k) > 0$  y  $d^-T(t_r^k) < 0$ .

En el amanecer la derivada lateral por la izquierda

$$d^+T(t_r^k) = 1,$$

que es el valor máximo de la derivada. Es decir que la pendiente después del amanecer decrece.

#### 2.4.5. De Tejada Martínez [85]

En [85] se propone un modelo de temperatura para modelar la temperatura media mensual y se combina con el modelo de [97], para obtener la evolución de la temperatura a lo largo del tiempo. Para modelar un aumento rápido y descenso lento de temperatura se partió de la función auxiliar:

$$y(t) = a \cdot t^b \cdot e^{ct}. \quad (2.94)$$

La temperatura promedio mensual se obtiene con la ecuación,  $t \in [1, 12]$ :

$$\hat{T}(t) = T_{\min} + \Delta T \cdot y(t). \quad (2.95)$$

( $\Delta T$  se calcula como el promedio de máxima y mínima mensual).

En [85] se asumió que el tiempo de la temperatura mínima se alcanza en el amanecer. Las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$  se calibran estadísticamente.

**Observación:** Es un método pensado para modelar temperaturas mensuales, así como el de [32]. Puede combinarse con cualquier otro método, ajustando las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$  puede aproximarse temperaturas mínimas, máximas o promedio mensuales.

#### 2.4.6. De Cesaraccio, Spano, Duce y Snyder [20]

En [20] se propone un modelo empírico con la meta de ajustar las temperaturas durante el día (horas de sol). El procedimiento fue el siguiente: se tomaron los datos de las temperaturas (datos tomados cada hora) de cinco estaciones climatológicas automatizadas de SIMS, Sistema de Manejo de Información de Riego de California, en inglés: "California Irrigation Management Information System". Las estaciones se eligieron para que reflejaran los diferentes climas de California: zona costeras, desértica y montañosa. Para calibrar el modelo se usaron los datos de los años 1993, 1994 y 1995 y los datos de los años entre 1996 y 1999 se usaron para probar el modelo.

El modelo es comparado con los modelos de De Wit [97], Parton y Logan [65] y el de Wilkerson [96]. Se calcularon las regresiones entre los valores esperados y obtenidos de temperatura, así como los coeficientes de determinación. Se calculó la desviación estándar y la *desviación estándar absoluta* con ambos datos se estimó la consistencia de los modelos con

los datos de temperatura del aire cada día.

Para el modelo se dividió el día en tres segmentos:

Para  $t \in (t_{\min}^k, t_{\max}^k]$

$$T(t) =: T_{\min}^k + (\Delta T^k) \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \cdot \left( \frac{t - t_r^k}{t_{\max}^k - t_r^k} \right) \right). \quad (2.96)$$

Para  $t \in (t_{\max}^k, t_s^k)$

$$T(t) =: T_s^k + (T_{\max}^k - T_r^k) \cdot \text{cos} \left( \frac{\pi}{2} \cdot \left( \frac{t - t_{\max}^k}{4} \right) \right). \quad (2.97)$$

Para  $t \in [t_s^k, t_{\min}^{k+1}]$

$$T(t) =: T_s^k + \left( \frac{T_{\min}^{k+1} - T_s^k}{\sqrt{t_{\min}^{k+1} - t_s^k}} \right) \cdot \sqrt{t - t_s^k}. \quad (2.98)$$

Las variables de entrada del modelo son:  $T_{\max}^k$  y  $T_{\min}^k$  (en el modelo se asume que  $T_r^k = T_{\min}^k$  y que  $t_{\max}^k$  sucede dos horas después del atardecer). Se calcula la temperatura  $T_r^{k+1}$  en el amanecer del día siguiente con la expresión:

$$T_s^k = T_{\max}^k - c \cdot (T_{\max}^k - T_r^{k+1}), \quad (2.99)$$

donde  $c$  es una variable estimada empíricamente en 0.39. El modelo depende de las variables de entrada  $T_{\max}^k$ ,  $T_{\min}^k$  y  $T_{\min}^{k+1}$ .

Suponiendo  $T_s^k > T_{\min}^{k+1}$  y  $\left( \frac{T_{\min}^{k+1} - T_s^k}{\sqrt{t_{\min}^{k+1} - t_s^k}} \right) < 0$ , entonces la temperatura comienza desde  $T_{\min}^k = T(t_{\min}^k)$  y aumenta sinusoidalmente hasta alcanzar el valor  $T_{\max}^k = T(t_s^k - 4)$ . Posteriormente la temperatura desciende hasta alcanzar la temperatura en el atardecer  $T(T_s^k) = t_s^k$  mediante un coseno. En el tercer periodo la temperatura desciende hasta la mínima  $T_{\min}^{k+1}$  del día siguiente por medio de la raíz cuadrada.

La función está definida de modo que es continua, sin embargo tiene un punto donde no es diferenciable:

$$d^+ T(t_s^k) = \infty \quad (2.100)$$

En [20] muestran que el modelo que proponen es mejor para el estado de California, Estados Unidos.

## 2.4.7. De Schädlich, Göttsche y Olesen [78]

### 2.4.7.1. De Schädlich, Göttsche y Olesen

Para  $t \in [t_r^k, t_s^k)$  se usa la ecuación:

$$T(t) = T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \text{cos} \left( \frac{\pi}{Y^k} \cdot (t - t_m^k) \right) \quad (2.101)$$

La constante  $Y^k$  es la duración del  $k$ -ésimo día. Se aproxima mediante la ecuación:

$$Y^k = \frac{2}{15} \cdot \arccos(-\tan(\phi) \cdot \tan(\delta)), \quad (2.102)$$

$\phi$  es la latitud (del observador) y  $\delta$  es la declinación solar relacionada con el ángulo día solar

$$\delta = 23.45 \cdot \text{sen} \left( \frac{2 \cdot \pi}{365} \cdot (284 + DOY) \right) \quad (2.103)$$

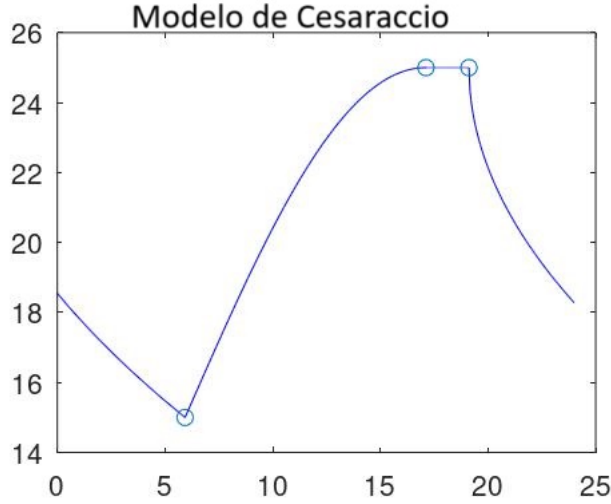


Figura 2.10: Curva del modelo de Cesaraccio. Han sido señalados los puntos donde cambia la curva de raíz cuadrada a seno, luego a coseno y finalmente de nuevo a raíz cuadrada

Nótese que el argumento es el ángulo  $\tilde{M}$  día solar desfasado 284 días (en la expresión original, [34], la expresión está en grados).

Para  $t \in [t_s^k, t_r^{k+1}]$  se usa la ecuación:

$$T(t) = T_{\min}^k + \left[ \Delta T^k \cdot \cos \left( \frac{\pi}{Y^k} \cdot (t_s^k - t_m^k) \right) \right] \cdot e^{-\frac{t-t_s^k}{\kappa}}. \quad (2.104)$$

El parámetro  $\kappa$  depende del día. Para el segundo segmento del día se multiplica por una exponencial que vale 1 para el tiempo  $t = t_s^k$ , de modo que en ese punto la función  $T$  siempre es continua. En [78] se propone el modelo pensando en que este parámetro sea ajustado estadísticamente. Sin embargo si se quiere garantizar la continuidad de la función en el tiempo  $t = t_r^k$ , tomando límites laterales

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_r^{k+1} \\ t \leq t_r^{k+1}}} T(t) = T_{\min}^{k+1} + \Delta T^{k+1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{Y^{k+1}} \right). \quad (2.105)$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_r^{k+1} \\ t \geq t_r^{k+1}}} T(t) = T_{\min}^k + \left[ \Delta T^k \cdot \cos \left( \frac{\pi}{Y^k} \cdot (t_s^k - t_m^k) \right) \right] \cdot e^{-\frac{t_r^k - t_s^k}{\kappa}}, \quad (2.106)$$

despejando:

$$\kappa = \frac{t_r^k - t_s^{k+1}}{\log \left( \frac{T_{\min}^k - T_{\min}^{k+1} + \Delta T^{k+1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{Y^{k+1}} \cdot (t_r^{k+1} - t_m^{k+1}) \right)}{\Delta T^k \cdot \cos \left( \frac{\pi}{Y^k} \cdot (t_s^k - t_m^k) \right)} \right)}. \quad (2.107)$$

Así la función es continua en todo su dominio, desafortunadamente en general, las derivadas no. En [78] se toma una exponencial con argumento negativo, para que refleje el decaimiento de la temperatura, sin embargo la expresión anterior puede no ser negativa.

#### 2.4.7.2. Modificación de Gholamnia, Alavipanah, Bolorani, Hamzeh y Kiavarz [34]

En [34] se busca un modelo de temperatura del aire, la llaman *DTC*, en inglés *diurnal temperature cycle*, que pueda funcionar con datos obtenidos vía remota usando datos obtenidos satelitalmente. El modelo propuesto es una modificación del modelo de [65] y [78]. Para este modelo se usan los datos de *LST*, en inglés *land surface temperature* (no confundir con el tiempo estándar local, véase sección 1.3.2.4.3).

En [34] se modificó el modelo anterior ligeramente, se le añadió un parámetro experimental que fue ajustado individualmente para cada estación de temperatura:

Para  $t \in [t_r^k, t_s^k)$  se usa la ecuación:

$$T(t) = T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\omega_{\text{air}}} \cdot (t - t_m)\right) \quad (2.108)$$

donde  $\omega_{\text{air}}$  es una constante asociada al aire, da la amplitud del semiperiodo del coseno, está dada por la expresión:

$$\omega_{\text{air}} = Y^k + 2 \cdot \beta. \quad (2.109)$$

$\beta$  es una constante que es usada para adaptar el periodo del coseno a las variaciones de temperatura del aire.

Análogamente se modifica la ecuación para  $t \in [t_s^k, t_r^{k+1})$ :

$$T(t) = T_{\min}^k + \left[ \Delta T^k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\omega_{\text{air}}} \cdot (t_s - t_m)\right) \right] \cdot e^{-\frac{t-t_s}{\kappa}}. \quad (2.110)$$

#### Observaciones:

1. Se usó el método de minimización de Levenberg-Marquardt para estimar los parámetros libres.
2. Para la elaboración del modelo, la estimación de la temperatura del aire DTC, se usó la información de LST con aquellos días en los que el cielo fue reportado como despejado, en una distribución temporal homogénea.
3. En [34] el parámetro  $\beta$  se estima para cada estación de temperatura (es decir que es un parámetro local). Se considera un parámetro experimental.
4. En [34] se dice que el error es aceptable.
5. Es un modelo pensado no solamente para una región de un país, sino para toda la nación de Irán.

#### 2.4.8. De Bergh, Wyk, Wyk y Udahemuka [13]

Las mediciones saltelitales pueden usarse para estimar la temperatura tanto en la superficie terrestre como en el aire. Sin embargo las mediciones son interrumpidas por la presencia de nubes. En [13] se trata de resolver ese problema interpolando. Para ello se presentan dos modelos de temperatura. A continuación el modelo mixto:

$$T(t) = T_0 + T_a^k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\omega_1^k} \cdot (t - t_m^k)\right) \quad \text{si } t \in [t_s^{k-1}, t_m^k), \quad (2.111)$$

$$T(t) = T_0 + T_a^k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot (t - t_m^k)\right), \quad \text{si } t \in [t_m^k, t_s^k) \quad (2.112)$$

$$T(t) = T_0 + T_a^k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot (t - t_m^k)\right) \cdot e^{-\frac{t-t_s^k}{\kappa}} \quad \text{si } t \in [t_s^k, t_r^{k+1}). \quad (2.113)$$

La función  $T^k(t)$  está definida de modo que es continuamente diferenciable por trozos. En  $t = t_m$  ambos cosenos valen uno, así que la función es continua. Más aun

$$\begin{aligned} d^-T(t_m^k) &= \lim_{\substack{t \rightarrow t_m^k \\ t \leq t_m^k}} \frac{dT^k}{dt}(t) = -T_a^k \cdot \frac{\pi}{\omega_1^k} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{\omega_1^k} \cdot (t_m^k - t_m^k)\right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.114)$$

y

$$d^+T(t_m^k) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_m^k \\ t \geq t_m^k}} \frac{dT^k}{dt}(t) = -T_a \cdot \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot (t_m^k - t_m^k) \right) = 0, \quad (2.115)$$

sin importar los valores  $\omega_1^k$  y  $\omega_2^k$  que se elijan la función es continuamente diferenciable en  $t_m^k$ .

En el tiempo  $t = t_s^k$

$$d^-T(t_s^k) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_s^k \\ t \leq t_s^k}} \frac{dT}{dt}(t) = -T_a^k \cdot \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot (t_s^k - t_m^k) \right) \quad (2.116)$$

y

$$d^+T(t_s) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_s^k \\ t \geq t_s^k}} \frac{dT}{dt}(t) = -T_a^k \cdot \left[ \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot (t_s^k - t_m^k) \right) \cdot e^{-\frac{t_s^k - t_s^k}{\kappa}} + \frac{1}{\kappa} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot (t_s^k - t_m^k) \right) \cdot e^{-\frac{t_s^k - t_s^k}{\kappa}} \right]. \quad (2.117)$$

Nótese que

$$d^+T(t) = d^-T^k(t) - \frac{T_a^k}{\kappa} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot (t_s^k - t_m^k) \right). \quad (2.118)$$

Sin importar el valor de  $\kappa$  en los números reales la función  $T(t)$  no es continuamente diferenciable en el tiempo  $t = t_s^k$ .

En  $t = t_r^k$  tomando los límites laterales

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_r^{k+1} \\ t \leq t_r^{k+1}}} T(t) = T_0 + T_a^k \cdot \cos \left( \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot (t_r^{k+1} - t_m^k) \right) \cdot e^{-\frac{t_r^{k+1} - t_s^k}{\kappa}}, \quad (2.119)$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_r^{k+1} \\ t \geq t_r^{k+1}}} T(t) = T_0 + T_a^{k+1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{\omega_1^{k+1}} \cdot (t_r^{k+1} - t_m^{k+1}) \right), \quad (2.120)$$

despejando el valor de  $\kappa$

$$\kappa = \frac{1}{t_r^{k+1} - t_s^k} \cdot \log \left( \frac{T_0^k + T_a^k \cdot \cos \left( \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot (t_r^{k+1} - t_m^k) \right)}{T_0^{k+1} + T_a^{k+1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{\omega_1^{k+1}} \cdot (t_r^{k+1} - t_m^{k+1}) \right)} \right). \quad (2.121)$$

El término exponencial fue introducido para modelar el decaimiento de la temperatura en la noche, para lo cual  $\kappa$  debe ser un número positivo, pero eso ocurre si y sólo si

$$\frac{T_0^k + T_a^k \cdot \cos \left( \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot (t_r^{k+1} - t_m^k) \right)}{T_0^{k+1} + T_a^{k+1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{\omega_1^{k+1}} \cdot (t_r^{k+1} - t_m^{k+1}) \right)} < 1 \quad (2.122)$$

$$\Leftrightarrow T_0^k + T_a^k \cdot \cos \left( \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot (t_r^{k+1} - t_m^k) \right) < T_0^{k+1} + T_a^{k+1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{\omega_1^{k+1}} \cdot (t_r^{k+1} - t_m^{k+1}) \right). \quad (2.123)$$

dependiendo de los valores empleados esto puede o no cumplirse.

Tomando las derivadas laterales

$$d^-T(t_r^{k+1}) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_r^{k+1} \\ t \leq t_r^{k+1}}} \frac{dT}{dt}(t) = -T_a^k \cdot e^{-\frac{t_r^{k+1} - t_s^k}{\kappa}} \cdot \left[ \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot (t_r^{k+1} - t_m^k) \right) + \frac{1}{\kappa} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{\omega_2^k} \cdot (t_r^{k+1} - t_m^k) \right) \right]. \quad (2.124)$$

y

$$d^+T(t_r^{k+1}) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_r^{k+1} \\ t \geq t_r^{k+1}}} \frac{dT}{dt}(t) = -T_a^{k+1} \cdot \frac{\pi}{\omega_1^{k+1}} \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{\omega_1^{k+1}} \cdot (t_r^{k+1} - t_m^{k+1}) \right). \quad (2.125)$$

El valor de  $\omega_2^k$  se puede calcular usando el teorema de la función implícita.

La modificación de este modelo es la división del día, añadiendo una nueva constante  $\omega_2^k$  para que la función se ajuste mejor a los diferentes valores de temperatura del día, pero para ello se requeriría de una mayor cantidad de valores de temperatura a lo largo del día (no bastan solamente los valores máximo y mínimo). Sin embargo también es posible usar ese valor para que la función se ajuste mejor en el mediodía del siguiente día  $t_s^{k+1}$ .

### Observaciones:

1. No importa cómo se elija un número real  $\kappa$  la función no es continuamente diferenciable en el atardecer.
2. Contrario al objetivo original de [13] puede ajustarse para ser continua y continuamente diferenciable en todo punto, salvo en el amanecer. Si se sigue el enfoque originalmente propuesto la función es discontinua tanto en el amanecer como en el atardecer.
3. No es sencillo determinar analíticamente el valor que  $\omega_2^k$  debe tener para garantizar la continuidad y la diferencibilidad en el amanecer.
4. Dada la partición del día puede la elección  $T_a^k = \Delta T^k$  no ser adecuada, así que  $T_a^k$  en principio es un parámetro que también tiene que ajustarse, así como el término  $T_0$ , que no es claro si debe tomarse igual a  $T_{\min}^k$  o ajustarse tomando otro valor.

## 2.5. Del comportamiento asintótico del decaimiento de la temperatura en la noche

### 2.5.1. De Göttsche y Olesen (2001) [37]

El artículo [37] aborda el problema de cómo mejorar la medición de la temperatura usando satélites. Para ellos se explica la acción y efecto de las nubes y otros factores físicos, pero también se plantea un modelo de temperatura.

El modelo, véase [37], está pensado para mejorar la recolección de datos satelitales de temperatura. El término sinusoidal fue elegido con base en la ecuación de difusión térmica. El término exponencial se tomó, porque es común en fenómenos de decaimiento, como en la ley de enfriamiento de Newton. Es de naturaleza empírica. Las variables de entrada son:  $t_s^k$ , la temperatura en la que comienza el decaimiento de la temperatura;  $t_{max}^k$ , tiempo en el que ocurre la temperatura máxima, y  $T_{max}^k$  y  $T_{min}^k$ , sendas temperaturas máxima y mínima.  $T_{min}^k$  es la mínima temperatura registrada en la mañana (se asume que es en un momento cercano al amanecer).

El término  $T_s^k$  se define como la hora a la que la temperatura empieza a decaer exponencialmente. Y el término  $\delta T$  se define usando una expresión que daremos más adelante. Se divide el día en dos partes: Para  $t \in [t_r^k, t_s^k)$ :

$$T(t) =: T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \cos \left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot (t - t_{\max}^k) \right). \quad (2.126)$$

Para  $t \in [t_s^k, t_r^{k+1})$ :

$$T(t) =: (T_{\min}^k + \delta T) + \left[ \Delta T^k \cdot \cos \left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot (t_s^k - t_{\max}^k) \right) - \delta T \right] \cdot e^{-\frac{t - t_s^k}{\kappa}}, \quad (2.127)$$

donde la constante  $\delta T$  se toma de forma que la función  $T(t)$  sea continua en  $t_r^{k+1}$ . Asimismo  $\kappa$  se toma de modo que la función sea continua en  $t = t_s^k$ .

El modelo es por construcción una función continuamente diferenciable en  $[t_r^k, t_r^{k+1})$ . Igualando las derivadas laterales de  $T$  (véase (2.126) y (2.127):

$$\begin{aligned} d^- T(t_s^k) &= -\frac{\pi \cdot \Delta T^k}{t_s^k - t_r^k} \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot (t_s^k - t_{\max}^k) \right) \\ d^+ T(t_s^k) &= \frac{-\left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot (t_s^k - t_{\max}^k) \right) - \delta T \right)}{\kappa} \cdot e^{-\frac{(t_s^k - t_s^k)}{\kappa}}, \end{aligned}$$

comparando:

$$-\frac{\pi \cdot (T_{\max}^k - T_{\min}^k)}{t_s^k - t_r^k} \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot (t_s^k - t_{\max}^k) \right) = \frac{-\left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot (t_s^k - t_{\max}^k) \right) - \delta T \right)}{\kappa}.$$

Despejando  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot (t_s^k - t_{\max}^k) \right) - \delta T \right) \cdot (t_s^k - t_r^k)}{\frac{\pi \cdot \Delta T^k}{t_s^k - t_r^k} \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot (t_s^k - t_{\max}^k) \right)} \\ &= \frac{t_s^k - t_r^k}{\pi} \cdot \left[ \cot \left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot (t_s^k - t_{\max}^k) \right) - \frac{\delta T}{T_{\max}^k T_{\min}^k} \cdot \csc \left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot (t_s^k - t_{\max}^k) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.128)$$

$$(2.129)$$

Ahora calculemos el valor de  $\delta T$ . Comparando ambos límites laterales en  $t_r^{k+1}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow t_r^{k+1} \\ t \geq t_r^{k+1}}} T(t) &= T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \cos \left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot (t_r^k - t_{\max}^k) \right) \cdot e^{-\frac{t_r^{k+1} - t_s^k}{\kappa}} \\ &\quad + \delta T \left( 1 + e^{-\frac{t - t_s^k}{\kappa}} \right) \\ \lim_{\substack{t \rightarrow t_r^{k+1} \\ t \geq t_r^{k+1}}} T(t) &= T_r^{k+1} + \Delta T^{k+1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{t_s^{k+1} - t_r^{k+1}} \cdot (t_r^{k+1} - t_{\max}^{k+1}) \right) \end{aligned}$$

igualando y despejando  $\delta T$ :

$$\begin{aligned} \delta T &=: \left[ T_r^{k+1} + \Delta T^{k+1} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{t_s^{k+1} - t_r^{k+1}} \cdot (t_r^{k+1} - t_{\max}^{k+1}) \right) - T_{\min}^k \right. \\ &\quad \left. - \Delta T^k \cdot \cos \left( \frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot (t_r^k - t_{\max}^k) \right) \cdot e^{-\frac{t_r^{k+1} - t_s^k}{\kappa}} \right] \cdot \left( 1 + e^{-\frac{t_r^{k+1} - t_s^k}{\kappa}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Usando 2.129 y 2.130 se obtiene un sistema de ecuaciones que determina el valor de  $\kappa$  y de  $\delta T$  que vuelven a la función continua en todo punto y diferenciable en todo momento, salvo en  $t_r^{k+1}$ . El sistema de ecuaciones no es fácilmente soluble.

### Observaciones:

1. Así como en [78] se usó el método de minimización de Levenberg-Marquardt para estimar los parámetros libres.
2. En [37] se dice que

$$\delta T =: T_{\min}^k - \lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) \quad (2.131)$$

( $T(t)$  dada por la segunda expresión), pero también dice, como se aclaró antes,  $\delta T$  es una constante que se ajusta de modo que la función  $T$  sea continua en  $t_r^{k+1}$ .

$\delta T > 0$  asegura que el valor de  $T(t)$  se mantenga por encima del mínimo, es decir que  $T(t) \geq T_{\min}^k + \delta T > T_{\min}^k$ , justificando el rol de  $T_{\min}^k$ . Si además tomamos algún valor  $t$  para el cual  $T(t) = T_{\min}^k$  (este valor tiene el derecho de llamarse  $t_{\min}^k$ ), usando la fórmula 2.131:

$$T_{\min}^k = t_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot (t_{\min}^k - t_{\max}^k)\right)$$

$$\text{luego } \cos\left(\frac{\pi}{t_s^k - t_r^k} \cdot (t_{\min}^k - t_{\max}^k)\right) = 0,$$

de modo que

$$t_{\max}^k = t_{\min}^k + \frac{t_s^k - t_r^k}{2}. \quad (2.132)$$

Dada  $t_{\min}^k$  la expresión anterior determina el valor de  $t_{\max}^k$  y por ende deja de ser una variable auxiliar. En éste, así como en varios de los modelos anteriores, se supone que la temperatura mínima se da cerca del amanecer. En particular para  $t_{\min}^k = t_r^k$ ,  $t_{\max}^k = \frac{t_s^k + t_r^k}{2}$ .

3. En el amanecer  $T(t_r^k)$  no es continuamente diferenciable, porque no coinciden los límites laterales de las derivadas.

## 2.6. Del calentamiento: radiación solar

### 2.6.1. De Göttsche y Olesen (2009) [38]

En [38] se presenta una mejora del modelo del presentado en [37] tomando en cuenta el grosor de la atmósfera.

Se asumen días de 24 horas. Así el ángulo hora solar puede expresarse en radianes<sup>1</sup> con la relación

$$\widetilde{\text{HOR}} = \frac{\pi t}{12} \text{ radianes} \quad (2.133)$$

en grados su ángulo complementario  $\tilde{\omega}$  (expresado en radianes<sup>2</sup>) cumple la relación

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi \cdot (t - t_m^k)}{12}. \quad (2.134)$$

Se calcula el ángulo cénit del sol  $\theta^\odot$  siguiendo la expresión

$$\theta^\odot = \arccos\left(\sin(\delta) \cdot \sin(\phi) + \cos(\delta) \cdot \cos(\phi) \cdot \cos\left(\widetilde{\text{HOR}}\right)\right) \quad (2.135)$$

$$= \arccos\left(\sin(\delta) \cdot \sin(\phi) + \cos(\delta) \cdot \cos(\phi) \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right). \quad (2.136)$$

Se propone una corrección del modelo de [37] en [38] en términos del ángulo  $\widetilde{\text{HOR}}$  (equivalente puede verse en términos del ángulo  $\tilde{\omega}$ ), a continuación en términos del tiempo:

Para  $t \in [t_r^k, t_s^k)$

$$T(t) = T_{\min}^k + \Delta T^k \cdot \cos(\theta^\odot(t)) \cdot \frac{e^{\tau \cdot (m_{\min} - m(\theta^\odot(t)))}}{\cos(\theta_{\min}^\odot)}. \quad (2.137)$$

<sup>1</sup>La unidad habitual de este ángulo es la hora angular, pero se ha expresado en radianes por consistencia dimensional.

<sup>2</sup>El ángulo  $\tilde{\omega}$  suele expresarse en grados, pero se está expresando en radianes para que todas las expresiones siguientes estén en radianes.

Para  $t \in [t_s^k, t_r^{k+1})$

$$T(t) = T_{\min}^k + \left[ \Delta T^k \cdot \cos(\theta^\odot(t_s^k)) \cdot \frac{e^{\tau \cdot (m_{\min} - m(\theta^\odot(t_s^k)))}}{\cos(\theta_{\min}^\odot)} - \delta T \right] \cdot e^{\frac{-(t-t_s^k)}{\kappa}}. \quad (2.138)$$

Siendo

$$\theta_{\min}^\odot =: \arccos(\sin(\delta) \cdot \sin(\phi) + \cos(\delta) \cdot \cos(\phi)) \quad (2.139)$$

y

$$m_{\min} =: m(\theta_{\min}^\odot), \quad (2.140)$$

para la masa de aire  $m$  dada por la ecuación:

$$m(\theta^\odot) =: \frac{R_G \cdot g \cdot 28.97g}{2.39456 \cdot 10^3} \cdot \cos(\theta^\odot) + \sqrt{\left( \frac{R_G \cdot g \cdot 28.97g}{2.39456 \cdot 10^3} \cdot \cos(\theta^\odot) \right)^2 + 2 \cdot \frac{R_G \cdot g \cdot 28.97g}{2.39456 \cdot 10^3} + 1} \quad (2.141)$$

### Observaciones:

1. El modelo es muy parecido al de Parton y Logan, [65] por la combinación de función sinusoidal y exponencial. Sin embargo la forma en que se asignan los valores es diferente y por la variabilidad de la masa de aire  $m$  es una función distinta, el artículo [38] deduce la expresión aproximando y usando principios físicos.
2. Así como en [78] y en [37] se aproximan los parámetros libres usando el algoritmo de Levenberg Marquardt.
3. La constante  $T_{\min}^k$  (llamada  $T_0$  en el artículo [38]) simboliza una *temperatura residual* (la temperatura antes de que comience a calentarse la superficie terrestre por acción del sol).
4. En [38] se explica que la fórmula para la masa de aire fue tomada de [90], pero que expresiones más simples para aproximar el valor de  $m$  fueron propuestas antes.

### 2.6.2. De Felber, Stoeckli y Calanca [31]

En [31] se propone una variación del modelo de Parton y Logan [65], del desfase y el seno (para que la curva avanzara desde la máxima temperatura), también se le añadió un término al decaimiento exponencial de la noche para que alcanzara el mínimo.

El modelo está pensado para Suiza, país caracterizado por su compleja topografía y amplio rango térmico. Para este modelo se usan dos parámetros, que fueron calibrados para la geografía de Suiza:

1.  $a^k$  es el retraso de la temperatura máxima.
2.  $b^k$  es el coeficiente de la noche (depende de la zona y se estima empíricamente).
3.  $c = c^k$  (en el modelo se toma  $c$  constante) es el retraso de la temperatura mínima respecto al amanecer. Se usa para corregir la duración de las horas de sol y de noche. En [31] no se aclara como se toma.

Se divide al día en tres partes: Para  $t$  antes de la temperatura mínima  $t \in [t_s^{k-1}, t_{\min}^k = t_r^k + c^k)$

$$T(t) =: T_{\min}^k + (T_s^{k-1} - T_{\min}^k) \cdot \left[ e^{-\frac{b \cdot (t-t_s^{k-1})}{t_r^k - t_s^{k-1} + c^k}} - \frac{t - t_s^{k-1}}{t_r^k - t_s^{k-1} + c^k} \cdot e^{-b^k} \right], \quad t < t_r^k + c^k = t_{\min}^k. \quad (2.142)$$

La temperatura  $T_s^k$  se toma siguiendo la expresión:

$$T_s =: \lim_{\substack{t \rightarrow t_s^k \\ t \leq t_s^k}} T(t). \quad (2.143)$$

Para  $t \in [t_{\min}^k = t_r^k + c, t_s^k)$  se toma una expresión sinusoidal:

$$T(t) =: T_{\min}^k + (T_{\max}^k - T_{\min}^k) \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi \cdot (t - t_r^k - c^k)}{t_s^k - t_r^k + 2 \cdot a^k - 2 \cdot c^k} \right). \quad (2.144)$$

Las horas del amanecer  $t_s^k$  y el atardecer  $t_r^k$  se calcularon para cada zona como función de la latitud y la longitud. Para  $t \in [t_s^k, t_r^{k+1} + c = t_{\min}^{k+1}]$  pero tomando sendos datos<sup>3</sup>:

$$T(t) =: T_{\min}^{k+1} + (T_s^k - T_{\min}^{k+1}) \cdot \left[ e^{-\frac{b^k \cdot (t - t_s^k)}{t_r^{k+1} - t_s^k + c^k}} - \frac{t - t_s^k}{t_r^{k+1} - t_s^k + c^k} \cdot e^{-b^k} \right], \quad (2.145)$$

Ahora calculemos el tiempo  $t_{\max}^k$ : la función seno alcanza su máximo en  $\frac{\pi}{2}$ , lo que se traduce para el modelo en la siguiente igualdad:

$$\frac{\pi \cdot (t_{\max}^k - t_r^k - c^k)}{t_s^k - t_r^k + 2a^k - 2c^k} = \frac{\pi}{2},$$

luego

$$t_{\max}^k - t_r^k - c^k = \frac{t_s^k - t_r^k + 2a^k - 2c^k}{2} \quad (2.146)$$

$$t_{\max}^k = t_r^k + \frac{t_s^k - t_r^k + 2a^k}{2} \quad (2.147)$$

$$= \frac{t_r^k + t_s^k}{2} + a^k. \quad (2.148)$$

El parámetro  $a^k$  es, como en el modelo original de Parton y Logan, el desfase del punto medio entre el amanecer y el atardecer y el momento de temperatura.

### Observaciones:

1. Los parámetros en [37] se estiman en  $a^k = 2.71$ ,  $b^k = 3.14$  y  $c^k = 0.75$ , usando estos parámetros y suponiendo que las horas de sol son exactamente 12 ( $12 = t_r^k - t_s^k$ ), se estima que  $t_s^k$  está a  $\frac{3}{4}$  del semiperiodo de la función seno.
2. Como se dijo, se añadió un término  $\left(-\frac{t - t_s^{k-1}}{t_r^k - t_s^{k-1}} \cdot e^{-b^k}\right)$  a modo de que  $T(t_r^k + c) = T_{\min}^k$  (hipótesis del modelo,  $t_{\min}^k = t_r^k + c^k$ ).
3. En el modelo la temperatura sigue a la exponencial, tomando la temperatura mínima primero hasta llegar a la temperatura de  $t_s^k$ . El modelo está hecho de modo que pase por la temperatura máxima y mínima.
4. En el artículo [31] se menciona que el modelo opera con los tiempos dados en TST, en inglés: *true solar time*, “tiempo solar real”, se hacen conversiones para la hora local.
5. El modelo es continuo, pero no es suave en los puntos de pegado.

<sup>3</sup>Si se toma el comienzo del día en el mediodía, como se hace en la fecha juliana, entonces sólo se separa el día en dos.

## 2.7. Estadísticos-Ciencia de datos

### 2.7.1. De Sadler y Schroll [76]

En [76] se propone un modelo de temperatura que usa tanto temperaturas como tiempos normalizados. La razón para la normalización del tiempo es que la duración del año es variable. Al normalizarlo la hora pasa de estar entre 0 y 24 horas, a estar entre 0 y 1. El tiempo no se normaliza dividiendo entre 24 horas, dado que las horas de sol varían día con día, sino que se usan la expresiones siguiente (se asumen días de 24 horas):

$$\begin{aligned}\hat{t} &=: \frac{1}{4} \cdot \frac{t}{t_r^k} && \text{si } 0 \leq t < t_r^k \\ \hat{t} &=: \frac{1}{2} \cdot \frac{t-t_r^k}{t_s^k-t_r^k} + \frac{1}{4} && \text{si } t_r^k \leq t < t_s^k \\ \hat{t} &=: \frac{1}{4} \cdot \frac{t-t_s^k}{24-t_s^k} + \frac{3}{4} && \text{si } t_s^k \leq t < 24.\end{aligned}\tag{2.149}$$

Expresiones cuyas inversas están dadas por:

$$\begin{aligned}t &= 4 \cdot t_r^k \cdot \hat{t} && \text{si } 0 \leq \hat{t} < \frac{1}{4} \\ t &= (t_s^k - t_r^k) \cdot \left(2 \cdot \hat{t} - \frac{1}{2}\right) + t_r^k && \text{si } \frac{1}{4} \leq \hat{t} < \frac{3}{4} \\ t &= (24 - t_s^k) \cdot \left(4 \cdot \hat{t} - 3\right) + t_s^k && \text{si } \frac{3}{4} \leq \hat{t} < 1.\end{aligned}\tag{2.150}$$

Las expresiones anteriores siguen las siguientes relaciones:

Fragmento del día		Segmento del
desde	hasta	intervalo $[0, 1]$
la media noche	el amanecer	$[0, 0.25]$
$0h$	$t_r^k$	
el amanecer	atardecer	$[0.25, 0.75]$
$t_r^k$	$t_s^k$	
atardecer	la siguiente medianoche	$[0.75, 1]$
$t_s^k$	$24h$	

#### 2.7.1.1. Modelo probabilístico CDF

La temperatura muestra un comportamiento acumulativo. En probabilidad y estadística el comportamiento acumulativo suele ser capturado usando expresiones como la *distribución beta*, razón por la cual en [76] fue tomada inicialmente como función para modelar la distribución de la temperatura:

$$f(x; \alpha\beta) =: \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \quad x \in [0, 1].\tag{2.151}$$

$\alpha$  y  $\beta$  son parámetros positivos que fueron estimados a partir de la media y la varianza de la temperatura. La media de la distribución beta está dada por:

$$E =: \frac{\alpha}{\alpha + \beta},\tag{2.152}$$

y la varianza (véase [39]):

$$\sigma =: \frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha + \beta + 1) \cdot (\alpha + \beta)^2}.\tag{2.153}$$

Este sistema de ecuaciones puede despejarse para obtener los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .

Las expresiones anteriores pueden escribirse en términos de la temperatura y el tiempo sin normalizar componiendo las expresiones con las transformaciones inversas a las normalizaciones.

De modo que la función de temperatura se define como su integral:

$$T(t) =: \int_0^t f(x)dx, \quad (2.154)$$

en [76] dice que el valor para  $T(t)$  se obtuvo integrando numéricamente. A este modelo en [76] se le llamó: *CDF*, siglas de: “cumulative distribution function”, que se traduce como: “función de distribución acumulada”.

Los datos fueron tomados de 14 sitios del país E.U.A. y se compararon con cuatro modelos existentes. Se comparó el modelo usando la prueba de bondad de Kolmogorov-Smirnov en cada estación de *Florence*<sup>4</sup>, se tomaron datos correspondientes a los años de 1985 a 1987. Concluyeron que el modelo no dio resultados satisfactorios para seis de 20 estaciones. Dado el bajo porcentaje de estaciones para las que el resultado no fue satisfactorio y el tamaño del error, se decidió continuar con el modelo.

### Observaciones:

1. En la formulación original [76]

$$\hat{t} = \frac{1}{4} \cdot \frac{t}{t_s^k}, \text{ si } 0 \leq t < t_r^k,$$

sin embargo esta expresión no alcanza el valor  $\frac{1}{4}$  en  $t = t_r^k$ . Valor que se alcanza con la modificación que se presentó más arriba, a saber:

$$\hat{t} = \frac{1}{4} \cdot \frac{t}{t_r^k}, \text{ si } 0 \leq t < t_r^k,$$

2. La función elegida es continuamente diferenciable para  $\hat{t}$  en  $(0, 1)$ . Pero cada día depende de sus temperaturas máxima y mínima, sin tener en cuenta máxima o mínima del día anterior o siguiente. Razón por la cual en general presenta discontinuidades en la medianoche (cuando cambia el día).
3. La función  $T$  así obtenida es estrictamente creciente. No es un buen candidato para modelar la temperatura.

#### 2.7.1.2. Modelo empírico *TFIT*

El modelo anterior presenta discontinuidades al cambiar de días (se evalúa la integral tomando como  $t = 0$  el comienzo de cada día, de modo que no guarda relación con la integral del día anterior, ni posterior).

Antes de presentar el modelo será necesaria una variable auxiliar llamada *temperatura normalizada hora con hora*:

$$\hat{T}^k(t) =: \frac{T^k(t) - T_{\min}^k}{T_{\max}^k - T_{\min}^k}, \quad t \in [0, 24], \quad (2.155)$$

donde el término  $T^k(t)$  es el valor medido el día  $k$ -ésimo a la hora  $t$ , no obtenido de alguna fórmula.  $t$  no sigue las mismas convenciones que los modelos anteriores (es un entero entre 0 y 24), pero no afecta ningún cálculo.

Tal y como está planteada, la ecuación debería usarse sólo a partir de datos conocidos. Sin embargo en el artículo [76] se sugiere su uso en combinación con la formulación anterior. Es decir que se integra la gaussiana para obtener ciertos datos de temperatura que no se usan directamente, sino tras ser normalizados son substituidos en la expresión anterior.

El modelo probabilístico no es por sí sólo un buen estimador. Se usa la expresión anterior para ajustarlo a los datos reales, a este ajuste en [76] se le llama *TFIT* (para evitar confusión

<sup>4</sup>Es una ciudad de Carolina del Sur, E.U.A.

a la función que modela la temperatura se le denota  $T_{FIT}$ ). Sigue la misma separación del día en tres segmentos:

$$\begin{aligned} T_{FIT}(t) &=: T_{\max}^{k-1} - \left(1 - \hat{T}^k(t)\right) \cdot (T_{\max}^{k-1} - T_{\min}^k), & \text{si } 0 \leq t < t_r^k \\ T_{FIT}(t) &=: \hat{T}(t) \cdot (T_{\max}^k - T_{\min}^k) + T_{\min}^k, & \text{si } t_r^k \leq t < t_s^k \\ T_{FIT}(t) &=: T_{\max}^k - \left(1 - \hat{T}^k(t)\right) \cdot (T_{\max}^k - T_{\min}^{k+1}), & \text{si } t_s^k \leq t \leq 24. \end{aligned} \quad (2.156)$$

Aquí  $T^k(t)$  es la temperatura calculada según el *percentil 50*; es decir tomando el valor que se encuentra en el centro del conjunto de datos, dividiéndolo en partes iguales, véase [22].

El valor  $\hat{T}^k(t)$  se obtiene integrando una distribución probabilística, así que es una función continua y creciente, de hecho es estrictamente creciente. Al substituir los valores de la ecuación continuamente creciente  $\hat{T}$  en la ecuación (2.156) se obtiene una función continua en cada segmento del día: de la medianoche al amanecer, del amanecer al atardecer y del atardecer a la medianoche. Pero para que las tres fórmulas describieran una función continua  $\hat{T}$  debería alcanzar su máximo al amanecer y un valor mínimo en la medianoche. Lo cual no sucede.

### Observaciones:

1. El método tiene un enfoque simple: ajustar una curva que parece comportarse bien. Presupone que la distribución de la temperatura es homogénea.
2. La curva es continua a trozos, entre la medianoche y el amanecer, entre el amanecer y el atardecer, y entre el atardecer y la siguiente medianoche.
3. Si se conociera la temperatura en cada instante  $T^k(t)$  se obtendría el valor de  $\hat{T}^k(t)$  evaluándola. La función  $\hat{T}^k(t)$  sería continua, pero dependiendo de los datos podría ser continuamente diferenciable o no. Aun así la función  $T_{FIT}$  presentaría discontinuidades.
4. El modelo asume varias cosas sobre la evolución de la temperatura. Aunque dado los resultados que se reportan parecen ser similares a los valores reales, tiene una modelación deficiente. Asimismo varias de estas suposiciones difieren de las suposiciones de los modelos anteriores, por ejemplo: la hora en la que se alcanzan las temperaturas máxima y mínima. Partiendo el día en partes suficientemente pequeñas siempre puede ajustarse mejor que un valor dado, porque se ajustan valores promediando.

### 2.7.2. De Cresswell, Morse y Thompson [23]

En [23] desarrollan un modelo de la temperatura ambiental (del aire) a partir de la temperatura del suelo. La idea es obtener la temperatura del suelo mediante mediciones satelitales.

Sea  $T_{\text{suelo}} = T_{\text{suelo}}(t)$  la temperatura del suelo. En [23] se asumió que la temperatura del aire puede obtenerse de la temperatura del suelo usando un ajuste cuadrático respecto al ángulo cénit solar ( $\theta^\odot$ ). Fue calibrado de manera empírica. Se divide el día en tres periodos: Para  $\theta^\odot$  con ángulo hora solar entre las 0 y las 6 horas (0 y  $\frac{\pi}{2}$  radianes)

$$T(t) = T_{\text{suelo}}(t) + \left(0.0003 \cdot (\theta^\odot)^2 - 0.1783 \cdot \theta^\odot + 24.18\right) \quad (2.157)$$

Para  $\theta^\odot$  con ángulo hora solar entre las 6 y las 12 horas ( $\frac{\pi}{2}$  y  $\pi$  radianes)

$$T(t) = T_{\text{suelo}}(t) + \left(0.0149 \cdot (\theta^\odot)^2 - 2.6853 \cdot \theta^\odot + 123.78\right). \quad (2.158)$$

Para  $\theta^\odot$  con ángulo hora solar entre las 6 y las 12 horas ( $\pi$  y  $\frac{3\pi}{2}$  radianes)

$$T(t) = T_{\text{suelo}}(t) - \left(-0.0044 \cdot (\theta^\odot)^2 + 0.1344 \cdot \theta^\odot + 9.5248\right). \quad (2.159)$$

Para  $\theta^\odot$  con ángulo hora solar entre las 6 y las 12 horas ( $\frac{3\pi}{2}$  y  $2\pi$  radianes)

$$T(t) = T_{\text{suelo}}(t) + \left(0.0016 \cdot (\theta^\odot)^2 - 0.562 \cdot \theta^\odot + 45.158\right). \quad (2.160)$$

**Observación:**

El método es de naturaleza empírica. No se justifica la decisión de aproximar la temperatura del aire con una expresión cuadrática del ángulo  $\theta^\odot$ .

### 2.7.3. De Brandsma y Können [16]

A diferencia de la mayoría de los métodos anteriores, Brandsma y Können usan el algoritmo *del vecino más cercano*, para modelar la evolución de la temperatura.

Se tomaron las mediciones de la temperatura diaria entre los años 1951 y 2000 de la zona De Bilt, Países Bajos para calcular temperaturas máxima, mínima y promedio.

En [16] se compara el método con otros. Se compara su eficiencia a lo largo del año, no para valores de cierto día.

**Observaciones:**

1. El modelo, por la técnica empleada, es considerado del tipo estadístico. La técnica se conoce más propiamente como *k-vecino más cercano*, véase [24].
2. No se desarrolla un método propio, más bien se utiliza un método estadístico establecido, para obtener el valor de las temperaturas máxima, mínima y promedio por día (por eso se compara con otros métodos a lo largo del año). Para modelar la evolución de la temperatura en un mismo día se requerirían mediciones a la misma hora de los distintos días a lo largo del año por varios años, por las variaciones de temperatura a lo largo del día para días distintos en un mismo año.
3. No modela temperaturas diarias, en ese aspecto es similar al método de [32].

### 2.7.4. De Smith, McClendon y Hoogenboom [81]

En [81] se entrenó una red neuronal con datos de 68 estaciones meteorológicas a lo largo del estado de Georgia, E. U. A.

**Observación:**

En el artículo no se modelaron las temperaturas, sino que se entrenó una inteligencia artificial.

### 2.7.5. De Zeng, Wardlow, Tadesse, Shan, Hayes, Li y Xiang [98]

Es un modelo simple de temperatura pensado para la zona conocida como “Corn Belt region of the Midwestern United States”. Se basa en análisis por regresión lineal.

## 2.8. Resumen

A continuación en distintas tablas se reportan características de los modelos de temperatura antes expuestos:

<i>Modelos sinusoidales</i>			
Artículo	Autor	Fecha y lugar	Resumen
Analysis of Soil and Air Temperatures by Fourier Techniques	J. E. Carson [18]	1963, Illinois, E. U. A.	Estudio y datos de y sobre la variación de la temperatura en el aire y el suelo
Notes on the utilization of the records from third order climatological stations for agricultural purposes	A. Walter [91]	1967, Kenia	Estimación, a partir de datos climatológicos de las horas de sol en la superficie
Tech Report No 156	J. C Anway, E. G. Brittain, H. W. Hunt, G. S. Innis, W. J. Parton, C. F. Rodell y R. H. Sauer, [6]	1972, Colorado, E.U.A.	Se propone un modelo de la temperatura para ajustar las horas de sol usando un seno más una constante
A modified sine wave method for Calculating Degree days	J. C. Allen [3]	1976 Florida E. U. A.	Se aclaran la naturaleza de los modelos más simples de temperatura usando sólo temperaturas máximas y mínimas y se describe un algoritmo para FORTRAN
The Mounthly Mean Diurnal Temperature Curve	M. E. Johnson y A. E. Fitzpatrick [48]	1977, Australia	Se propone una versión mejorada del modelo de Walter, que resulta de combinarlo con un seno para el día
Simulation of assimilation respiration and transportation on crops	de Wit [97]	1978, E. U. A	Se presenta una descripción simple de un modelo sinusoidal
Modelling Soybean Grouth for crop management	G. G. Wilkerson [96]	1983, E. U. A.	Se divide al día en dos segmentos que se aproximan con una recta y un seno
Estimation of daily temperature means using elevation and latitude in mountainous terrain	D. G. Boyer [32]	1984, Virginia, E.U.A.	Se propone un modelo de la temperatura que solo requiere de la ubicación geográfica, se ajusta usando mínimos cuadrados
A comparison of data driven and model-driven approaches to brightness temperature diurnal cycle interpolation	F. van den Bergh, M. A. van Wyck, B. J. van Wyck y G. Udahemuka [13]	2007, Sudáfrica	Se usa la técnica del núcleo reproductor de un espacio de Hilbert

<i>Modelos mixtos</i>			
Artículo	Autor	Fecha y lugar	Resumen
A Model For Diurnal variation in soil and air Temperature	W. J. Parton J. A. Logan [65]	1981, Colorado, E.U.A	Se propone un modelo mixto que usa la función seno en el día y una exponencial para la noche
Generation of diurnal solar radiation, temperature and humidity patterns	B. A. Kimball y L.A. Bellamy [52]	1986, Phoenix, E. U.A.	Se propone (entre otras cosas) una modificación del modelo sinusoidal de Parton y Logan.
Calculating Chilling Hours and Chill Units from Daily Maximum and Minimum Temperature Observations	D. E. Linvill [53]	1990 Carolina del Sur, E. U. A.	Se propone un modelo sinusoidal para las horas de sol y el enfriamiento de la noche se modela usando una expresión logarítmica. Es el primero en hacerlo
Influence of Land surface Parameters and Atmosphere on METEOSAT Brightness Temperatures and Generation of Land Surface Temperature Maps by Temporally and Spatially Interpolating Atmospheric correction	S. Schädlich, F. M. Götsche y F. S. Olesen [78]	2001, Alemania	Está pensado para modelar la temperatura empleando datos obtenidos satelitalmente. Es similar al modelo de [37]
Modelling of diurnal cycles of brightness temperature extracted from METEOSAT data	F. M. Götsche y F. S. Olesen [37]	2001, Alemania	Está pensado para modelar la temperatura empleando datos obtenidos satelitalmente. Para el decaimiento se multiplica por una exponencial, añade una constante para ajustar el valor. No es diferenciable en el amanecer
An improved model for determining degree days values	C. Cesaraccio, D. Spano P. Duce R. L. Snyder	2001, Suiza	Se modelan las horas de sol con un coseno y para las horas de la noche se usa una raíz cuadrada

Una clasificación alternativa es en modelos admisibles y no admisibles. Se han dejado de lado los modelos estadísticos porque requieren de varias mediciones a lo largo del día. Entre los modelos sinusoidales y mixtos se han seleccionado únicamente aquellos que son admisibles, los que constituyen una minoría. Los modelos considerados inadmisibles requieren conocer el tiempo  $t_{\max}^k$ ,  $t_{\min}^k$  o varias mediciones de un día para calibrar parámetros. Los modelos admisibles son:

1. G. G. Sanders, [77].
2. J. C. Anway, E. G. Brittain, H. W. Hunt, G. S. Innis, W. J. Parton, C. F. Rodell y R. H. Sauer, [6].
3. M. E. Johnson y E. A. Fitzpatrick, [48].
4. C. T. de Wit et al, [97].
5. G. G. Wilkerson, J. W. Jones, K. J. Boote, K. T. Ingram y J. W. Mishoe, [96].
6. D. E. Linvill, [53].

<i>Modelos mixtos</i>			
Artículo	Autor	Fecha y lugar	Resumen
A comparison of data driven and model driven approaches to brightness temperature diurnal cycle interpolation	F. van den Bergh, M. A. van den Wyck, B. J. van den Wyck y G. Udahemuka, [13]	2007, Sudáfrica	Se presenta una variante del método mixto de [78]
Modelling the effect of optical thickness on diurnal cycles of land surface temperature	F. M. Götsche, F. S. Olesen [38]	2009, Alemania	Se presenta una mejora del modelo propuesto en [37]. Se parte de consideraciones físicas
Generic calibration of a simple model of diurnal temperature variations for spatial analysis of accumulated degree days	R. Felber, S. Stoeckli, P. Calanca [31]	2018, Suiza	Se propone una variante del modelo de Parton y Logan, pensada para Suiza

<i>Modelos estadísticos– Ciencia de datos</i>			
Artículo	Autor	Fecha y lugar	Resumen
An Empirical Model of Diurnal Temperature Patterns	E. J. Sadler y E. E. Schroll, [76]	1997, Carolina del Sur, E. U. A.	Usa temperaturas y tiempos normalizados. Se divide al día en 3 partes. Primero se integra una distribución Beta y se ajusta después
Estimating surface air temperatures, from Meteosat land surface temperatures using an empirical solar zenith angle	M. P. Cresswell, A. P. Morse, M. C. Thompson S. J. Connor [23]	1999, Liverpool, Inglaterra	Se propone un método empírico que ajusta la temperatura del aire usando la del suelo y una ecuación cuadrática de $\theta^\odot$
Application of nearest-neighbor resampling for homogenizing temperature records on a daily to sub-daily level	T. Brandsma G. P. Können [16]	2006, Países Bajos	Se aplica el algoritmo del vecino más cercano sobre los datos recabados de temperatura de distintas de la zona de De Bilt entre 1951 y 2000, para calcular temperaturas medias, mínimas y máximas diarias
Estimation of daily air temperature Based on MODIS Land Surface Temperature Products over the Corn Belt in the US	L. Zeng, B. D. Wardlow, T. Tadasse, J. Shan, M. Hayes D. Li y D. Xiang, [98]	2015, “Corn Belt”, E. U. A.	Se aplica la técnica de regresión lineal

7. S. Schädlich, F. M. Götttsche y F. S. Olesen, [78].

Existe modelos de temperatura para otros contextos: Se encuentra en la literatura un método pensado para la predicción de la temperatura mensual: [85], sin embargo los métodos de [32] y [24] pueden aplicarse para predecir la temperatura a escala diaria o mensual. Mientras que el segundo y tercer artículo están pensados para ajustar temperaturas medias, máximas y mínimas el primero no. Para ajustar [32] y [24] a temperaturas de cada hora se requeriría de la información de temperaturas de cada hora de cada día del año de varios años.

En la literatura se encuentran los siguientes artículos de revisión de modelos de temperatura: [47], [71], [26], [1], [93], [95], [57], [72] y [9].

En países europeos y en Irán se han desarrollado y adaptado métodos para estudiar la temperatura del aire y del suelo usando mediciones satelitales. Véase [23], [78], [34], [49] [35].

En la literatura hay varios modelos de cómo los ambientes urbanos modifican la temperatura del aire. Véase [29], [83] y [80].

En la literatura se encuentra una variedad de modelos de temperatura del suelo: de la superficie y el subsuelo. El problema de determinar la temperatura del aire está hermanado con el problema de encontrar la temperatura, tanto del suelo como del subsuelo. Estos modelos son usados con frecuencia en agricultura. Véase [78], [34], [25], [49], [99], [27].



## Capítulo 3

# Modelo físico-geométrico del sistema Tierra-Sol

### 3.1. Notación e hipótesis del modelo

#### 3.1.1. Hipótesis geométricas sobre el sistema Tierra-Sol

A continuación se modelan los movimientos de traslación y de rotación terrestre. Para ello se hacen las siguientes suposiciones:

1. El globo terráqueo es una esfera de radio  $R_G$ .
2. El globo (esfera) solar es una esfera de radio  $R_\odot$ .
3. El globo solar permanece fijo.
4. El movimiento de rotación tiene una velocidad angular uniforme.
5. El movimiento de rotación terrestre es una rotación alrededor del eje  $e_N$ , el cual siempre apunta a la misma dirección  $\vec{e}_N$  ( $\vec{e}_N = \overrightarrow{C_G e_N}$  es siempre el mismo vector). A la duración del día se le denotará  $T_G$ .
6. El movimiento de traslación terrestre satisface la segunda ley de Kepler (la primera ley de Kepler dice que la tierra describe una elipse). A la duración del año se le denotará  $T_\odot$ .
7. Se supone que el planeta tierra siempre describe la misma figura en su movimiento de traslación, independientemente del año.
8. Los años tienen la misma duración, es decir que el globo terráqueo tarda siempre el mismo tiempo en recorrer la eclíptica, independientemente del año.

#### 3.1.2. Hipótesis mecánicas: movimiento de traslación

##### 3.1.2.1. Las leyes de Kepler y la eclíptica

Las leyes de Kepler son observaciones empíricas realizada por el matemático alemán Johannes Kepler, véase [50] y [51]. En [30] dice que el primero en deducirlas de las leyes de Newton fue Johann Bernoulli.

Las tres leyes de Kepler determinan el movimiento de traslación terrestre (y más generalmente de cualquier astro).

1. La primera ley de Kepler establece que el movimiento de traslación describe una elipse.
2. La segunda ley de Kepler reza: la Tierra barre áreas iguales en tiempos iguales.

3. La tercera ley de Kepler reza: el cuadrado del periodo orbital es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita.

El centro de la Tierra se denota  $C_G$ , la posición del centro de la Tierra cambia respecto al tiempo  $C_G = C_G(t)$ , por la primera ley de Kepler se traslada alrededor de una elipse, a esta elipse se le llama *eclíptica* y la denotamos  $\mathbb{E}$ . La segunda ley de Kepler nos habla sobre las áreas barridas, pero también determina la rapidez con la que  $C_G$  recorre la eclíptica. La tercera ley de Kepler nos habla del *periodo orbital*, es decir del año, sin embargo se está tomando el valor del periodo orbital como:  $T_{\odot} = 365.25$  días atómicos.

### 3.1.2.2. Geometría de la eclíptica

Al plano que contiene a la eclíptica se le llama *plano eclíptico*. El centro de la tierra está en el *perihelio* (en el punto de la órbita más cercano al sol) en el tiempo del *solsticio de invierno*. Sea  $O$  el centro de la eclíptica, se toma  $S_1$  el *semieje mayor* y  $S_2$ , el *semieje menor*. Se toman además la dirección  $\vec{e}_1$  como la dirección del centro del sol al perihelio y se toma  $\vec{e}_2$  como la dirección del centro de la eclíptica a la posición de la tierra en el equinoccio de primavera (momento en que la distancia de  $O$  a  $C_G$  es  $S_2$ ).

Sea  $\tilde{\varepsilon}$  la excentricidad<sup>1</sup> de la eclíptica.  $S_{\nu}$  simboliza semieje mayor, menor y la distancia focal para sendos 1, 2 y  $F$ . A continuación daremos una deducción de los valores de  $S_1$  y  $S_2$  partiendo de datos como la distancia entre la tierra y el sol en el perihelio y afelio.

De hecho estos dos datos (distancia entre la tierra y el sol en los momentos de afelio y perihelio) también pueden usarse para calcular el valor de la excentricidad.

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{S_F}{S_2} \quad (3.1)$$

El solsticio de invierno se alcanza en  $O + S_1 \cdot \vec{e}_1$ , y el equinoccio de verano está en el punto:  $O + S_2 \cdot \vec{e}_2$ .

Las elipses tienen dos focos, uno de los focos de la eclíptica es el sol, al que se le denota en este trabajo  $C_{\odot}$ . Por construcción ambos focos se encuentran en el eje del vector  $\vec{e}_1$ . Por construcción el centro de la eclíptica se encuentra en el origen. Por ende el segundo foco se encuentra en  $-C_{\odot}$ .

Esta curva es una elipse con centro en el origen, semieje mayor  $S_1$  en el eje  $x^1$  y semieje menor  $S_2$  en el eje  $x^2$ . En esta sección se mostrará que esta expresión de hecho cumple con la segunda ley de Kepler.

Por simplicidad se harán los cálculos pensando en la misma elipse, puede tanto pensarse en el plano complejo como en el plano eclíptico.

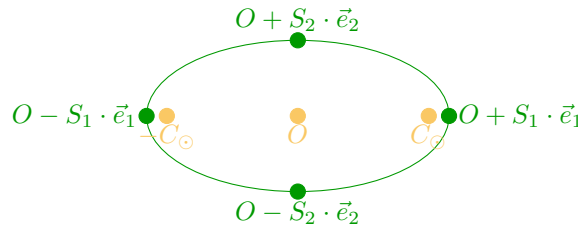


Figura 3.1: Posición de los solsticios de invierno ( $O + S_1 \cdot \vec{e}_1$ ) y verano ( $O - S_1 \cdot \vec{e}_1$ ), y de los equinoccios de primavera ( $O + S_2 \cdot \vec{e}_2$ ) y otoño ( $O - S_2 \cdot \vec{e}_2$ ). El sol se encuentra en la posición  $C_{\odot}$ . El segundo foco es el punto  $-C_{\odot}$ . El origen se simboliza con la letra  $O$ .

<sup>1</sup>A menudo se usa la letra  $\varepsilon$  también para representar la oblicuidad. Para evitar confusiones se usa en este trabajo  $\tilde{\varepsilon}$  para la excentricidad.

Se toman los vectores  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$  como se muestra en la figura para ubicar objetos sobre el plano eclíptico. Se toma un tercer vector  $\vec{e}_3$  de modo que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sea una base ortonormal orientada positivamente ( $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ ), lo que permite ubicar objetos sobre el espacio tridimensional.

La posición del centro de la tierra es  $C_G \in \mathbb{E}$ . En *Sección 3.2.2 Coordenadas y funciones auxiliares empleadas para la representación de la posición del centro de la tierra en el plano eclíptico* se aclaran dos parametrizaciones de la curva eclíptica y en *Sección A.1 Leyes de Kepler* se habla de su relación con las leyes de Kepler. No se tiene una versión explícita de  $C_G$  como función del tiempo.

El afelio se alcanza en el momento de mayor distancia de la tierra y el sol, cuando la tierra se encuentra alineada con los focos, en el solsticio de verano:  $-S_1 \cdot \vec{e}_1$ ; y el perihelio, menor, cuando la tierra se encuentra alineada con ambos focos, en el solsticio de invierno:  $S_1 \vec{e}_1$ . Es decir que la distancia en el perihelio entre la tierra y el sol es:

$$d(O + S_1 \cdot \vec{e}_1, C_\odot) = S_1 - \|C_\odot\|$$

y la distancia en el afelio entre la tierra y el sol es:

$$d(O + (-S_1 \cdot \vec{e}_1), C_\odot) = S_1 + \|C_\odot\|.$$

Luego dos veces el semieje mayor es:

$$2 \cdot S_1 = d(O + (S_1 \cdot \vec{e}_1), C_\odot) + d(O + (-S_1 \cdot \vec{e}_1), C_\odot), \quad (3.2)$$

expresión que nos permite calcular  $S_1$ .

Si se dispone de la excentricidad se puede obtener el valor de  $S_F$  multiplicando

$$S_F = \tilde{\varepsilon} \cdot S_1. \quad (3.3)$$

Una propiedad de las elipses es que la suma de las distancias de un punto dado a ambos focos es constante. En particular para el punto  $C_G = O + S_2 \cdot \vec{e}_2$ :

$$2 \cdot S_1 = d(O + S_2 \cdot \vec{e}_2, O + (-C_\odot)) + d(O + (S_2 \cdot \vec{e}_2), C_\odot) \quad (3.4)$$

$$= 2 \cdot d(O + S_2 \cdot \vec{e}_2, C_\odot), \quad (3.5)$$

luego

$$d(O + S_2 \cdot \vec{e}_2, C_\odot) = S_1. \quad (3.6)$$

Por otro lado:

$$S_2^2 = S_F^2 + S_1^2, \quad (3.7)$$

despejando  $S_2$ :

$$S_2 = \sqrt{S_1^2 - S_F^2} \quad (3.8)$$

$$= S_1 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{S_F}{S_1}\right)^2} \quad (3.9)$$

$$= S_1 \cdot \sqrt{1 - \tilde{\varepsilon}^2}. \quad (3.10)$$

Alternativamente pueden obtenerse los valores de  $S_1$  y  $S_2$  sin usar el valor de  $\tilde{\varepsilon}$ :

$$2 \cdot S_1 = d(O + S_1 \cdot \vec{e}_1, C_\odot) + d(O + (-S_1 \cdot \vec{e}_1), -C_\odot) + 2 \cdot S_F \quad (3.11)$$

$$= 2 \cdot (d(O + S_1 \cdot \vec{e}_1, C_\odot) + S_F), \quad (3.12)$$

despejando  $S_F$ :

$$S_F = S_1 - d(O + S_1 \cdot \vec{e}_1, C_\odot), \quad (3.13)$$

luego

$$S_2 = \sqrt{S_1^2 - S_F^2} \quad (3.14)$$

$$= \sqrt{S_1^2 - S_F^2} \quad (3.15)$$

$$= \sqrt{S_1^2 - (S_1 - d(O + S_1 \cdot \vec{e}_1, C_\odot))^2} \quad (3.16)$$

$$= \sqrt{2 \cdot S_2 \cdot d(O + S_1 \cdot \vec{e}_1, C_\odot) - d(O + S_1 \cdot \vec{e}_1, C_\odot)^2}. \quad (3.17)$$

### 3.1.3. Marco de referencia general

Como se dijo antes,  $O$  denota el centro de la eclíptica y se toman los vectores  $\vec{e}_1$  como la dirección de  $O$  a la posición  $C_G$  en el solsticio de invierno (entonces la distancia de  $C_G$  a  $O$  es  $S_1$ ) y  $\vec{e}_2$  se toma como la dirección de  $C_G$  en el equinoccio de primavera (entonces la distancia de  $C_G$  a  $O$  es  $S_2$ ). Además se añade un tercer vector  $\vec{e}_3$  de modo que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sea una *base ortonormal positivamente orientada*

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2. \quad (3.18)$$

La *referencial*  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  con origen en  $O$ , es útil para ubicar la posición de los astros sobre el firmamento celeste.

### 3.1.4. Rotación terrestre

#### 3.1.4.1. Geometría del globo terráqueo

El globo terráqueo es una parte del firmamento celeste: una esfera móvil con centro  $C_G$  (es móvil porque el centro  $C_G$  se mueve) y radio  $R_G$ .

Para ubicar objetos sobre el globo terráqueo (o más aun sobre el firmamento celeste) se usan generalmente las siguientes dos bases coordenadas:

1. La base coordenada *geográfica*  $(\vec{e}_G, \vec{e}_E, \vec{e}_N)$  orientada positivamente, donde  $\vec{e}_G$  es el vector que apunta en la dirección *Greenwich* (latitud  $\phi = 0$ , longitud  $\lambda = 0$ );  $\vec{e}_E$ , *este* (latitud  $\phi = 0$ , longitud  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ ), y  $\vec{e}_N$ , *norte* (dirección ortogonal a las otras dos).

Paramétricamente el globo terráqueo está dado por la expresión

$$\Phi^{-1} \left( \left[ \begin{array}{c} \phi \\ \lambda \end{array} \right]; t \right) = C_G(t) + R_G \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) \vec{e}_G + R_G \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\lambda) \vec{e}_E + R_G \cdot \sin(\phi) \vec{e}_N, \quad (3.19)$$

cuando se sobreentiende el valor de  $t$  indistintamente se usa la notación  $\Phi(\phi, \lambda)$  o  $\Phi \left( \left[ \begin{array}{c} \phi \\ \lambda \end{array} \right] \right)$ .

En A.2 *La esfera como variedad diferenciable* se detalla la función anterior y su inversa. A la función inversa  $\Phi = (\phi, \lambda)$ , se le llama *coordenadas geográficas*, véase 1.2.2.1 *Coordenadas geográficas: latitud y longitud*.

2. Denotemos con  $z$  un punto sobre el globo terráqueo. Se define el vector

$$\vec{e}_z = \frac{\overrightarrow{C_G z}}{\left\| \overrightarrow{C_G z} \right\|}, \quad (3.20)$$

a partir de este vector se definen dos vectores nuevos:  $\vec{e}_{\tilde{E}}$  y  $\vec{e}_{\tilde{N}}$ . La terna  $(\vec{e}_{\tilde{N}}, \vec{e}_{\tilde{E}}, \vec{e}_z)$  es conocida como la base *horizontal*. Tienen definidas unas coordenadas *horizontales* similarmente a las geográficas. Véase la sección 1.2.2.3 *Coordenadas horizontales: azimutal y altitud* y A.2.1.2 *Coordenadas horizontales*

A su inversa se le llaman *coordenadas horizontales*.

### 3.1.4.2. Rotación terrestre

El planeta tierra realiza dos movimientos rotatorios, llamados *rotación* y *traslación*. El movimiento de traslación será descrito en la sección de coordenadas heliocéntricas, a continuación una descripción del movimiento de rotación (sin tener en cuenta la nutación):

Primero describamos separadamente el fenómeno de la rotación terrestre.

Sea un punto  $z$  sobre el globo terráqueo (se ha elegido el símbolo  $z$  por el cénit).  $\overrightarrow{C_G(t)z}$  es el vector que apunta del origen al punto  $z$ . Para denotar la rotación terrestre en este trabajo se usa  $R_{G*}$ , se usa indistintamente para representar la función

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto R_{G*}(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

o la función ( $p$  un punto indistinto del firmamento celeste, incluyendo el globo terráqueo)

$$R_{G*} \left( \begin{bmatrix} t \\ p \end{bmatrix} \right) = R_{G*}(t) \overrightarrow{C_G p}. \quad (3.22)$$

como el lector puede verificar, se denotan indistintamente ambas funciones porque la primera se usa para definir la segunda. La rotación terrestre es descrita más fácilmente en términos de la base  $(\vec{e}_G, \vec{e}_E, \vec{e}_N)$ , llamemos  $z_G$  a su representación en términos de esta base, para  $z_G$  la rotación toma el aspecto:

$$z_G \mapsto e^{\frac{t \cdot 2\pi}{T_G} \cdot w_3} z_G \quad (3.23)$$

donde se está usando exponenciación matricial, explícitamente:

$$e^{\frac{t \cdot 2\pi}{T_G} \cdot w_3} =: \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{t \cdot 2\pi}{T_G}\right) & -\text{sen}\left(\frac{t \cdot 2\pi}{T_G}\right) & 0 \\ \text{sen}\left(\frac{t \cdot 2\pi}{T_G}\right) & \cos\left(\frac{t \cdot 2\pi}{T_G}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

además

$$w_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Escojamos un tiempo  $t_0$  y sea  $R_{GEN}^{123}$  el cambio de base

$$\begin{aligned} R_{GEN}^{123} \\ (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) &\rightarrow (\vec{e}_G(t_0), \vec{e}_E(t_0), \vec{e}_N(t_0)) \end{aligned} \quad (3.26)$$

(los paréntesis significan que está mandando una base en la otra respetando el orden).

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  es una base ortonormal, por lo que matricialmente  $R_{GEN}^{123}$  es representado por:

$$R_{GEN}^{123} = [ \vec{e}_G(t_0) \quad \vec{e}_E(t_0) \quad \vec{e}_N(t_0) ] \quad (3.27)$$

(representando los vectores  $(\vec{e}_G(t_0), \vec{e}_E(t_0), \vec{e}_N(t_0))$  en términos de la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ).

$$R_{GEN}^{123} = [ \vec{e}_G(t_0) \quad \vec{e}_E(t_0) \quad \vec{e}_N(t_0) ]_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad (3.28)$$

Aplicando este cambio de base se obtiene la expresión de la rotación  $z \mapsto z_G$ , es decir:

$$R_{G*}(t) =: (R_{GEN}^{123})^{-1} \circ e^{\frac{2\pi(t-t_0)}{T_G} w_2} \circ R_{GEN}^{123}, \quad (3.29)$$

$$R_{G*} \left( \begin{bmatrix} t \\ p \end{bmatrix} \right) =: (R_{GEN}^{123})^{-1} \circ e^{\frac{2\pi(t-t_0)}{T_G} w_2} \circ R_{GEN}^{123} \left( \overrightarrow{C_G(t)p} \right) \quad (3.30)$$

$$= [ \vec{e}_G(t_0) \quad \vec{e}_E(t_0) \quad \vec{e}_N(t_0) ]_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}^{-1} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{(t-t_0) \cdot 2\pi}{T_G}\right) & -\text{sen}\left(\frac{(t-t_0) \cdot 2\pi}{T_G}\right) & 0 \\ \text{sen}\left(\frac{(t-t_0) \cdot 2\pi}{T_G}\right) & \cos\left(\frac{(t-t_0) \cdot 2\pi}{T_G}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\cdot [ \vec{e}_G(t_0) \quad \vec{e}_E(t_0) \quad \vec{e}_N(t_0) ]_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \overrightarrow{C_G(t)p} \quad (3.32)$$

en particular

$$\vec{e}_\nu(t_0) = R_{G^*}(\vec{e}_\nu(t)), \quad \nu \in \{G, E, N\}. \quad (3.33)$$

Nótese que el vector  $\vec{e}_N$  es un punto fijo:  $\vec{e}_N(t) = \vec{e}_N(t_0) \forall t$ , porque no se ha tenido en cuenta la precesión.

En la sección 3.4.4.1 *Valor explícito de la matriz de rotación* se calcula el valor explícito de la matriz  $R_{G^*}$ .

## 3.2. El problema de Kepler

### 3.2.1. Sistema de referencia temporal

Las unidades temporales empleadas son los *días atómicos*. Un día atómico se entiende como la colección de 60 *minutos atómicos*, que a su vez se entienden como la colección de 60 *segundos atómicos*, recuérdese que el segundo atómico es una unidad de medida fija. Esto significa que una *hora atómica* consiste en  $24 \times 60 \times 60 = 86400$  segundos atómicos.

Por simplicidad se toma el tiempo inicial  $t_0$  igual a las 12 horas del 19 de marzo (equinoccio de primavera) del año 2024 (fue año bisiesto), porque es un momento desde el cual son fáciles de calcular las direcciones de Greenwich  $\vec{e}_G$ , este geográfico  $\vec{e}_E$  y norte  $\vec{e}_N$ , que se describen más adelante.

Esto es así para facilitar los cálculos.

### 3.2.2. Coordenadas polares y elípticas

Se usa la convención de que los puntos son denotados con las letras  $p, z$  sobre el plano o con letras mayúsculas cuando son puntos definidos en la recta real ( $\Gamma$  o  $B$ ), los *puntos* son constantes o funciones de  $t$ , debido a que se la meta de esta descripción es estudiar una curva que depende del tiempo. Algunas funciones auxiliares también se denotan con letras mayúsculas, como se aclara a continuación. Se reservan los símbolos  $\gamma, \beta$  para coordenadas. Para la posición del centro de la tierra vista como una función que depende de la variable temporal se usa el símbolo  $C_G(t)$ .

Para el ángulo  $\gamma$  de las coordenadas polares, o para el parámetro  $\beta$  que se introduce más adelante, puede tomarse como abierto (de la eclíptica) toda la eclíptica menos un punto, y como abierto (de llegada) en  $\mathbb{R}$  puede usarse el intervalo abierto  $(0, 2\pi)$ , o si se prefiere puede tomarse toda la elipse en el espacio de salida y en el de llegada el intervalo semicerrado  $[0, 2\pi)$  para parametrizar usando  $\eta = \gamma^{-1}$  o  $\tilde{\eta} = \beta^{-1}$ .

#### 3.2.2.1. Funciones auxiliares

Primero recordemos que

$$\arg(z) = \text{Im} \circ \log(z),$$

tomando como es usual la parte imaginaria como un número real.

Sea  $M_\odot(p) = p - C_\odot$ . En cualquier punto  $p$  del plano:  $dM_\odot(p) = 1_2$  (la identidad en el plano).

asimismo tomando  $L_i$  la aplicación que toma un real y lo multiplica por  $i$  (matricialmente  $L_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ).

La derivada es una derivada de variable real, razón por la cual puede diferenciarse cada una de las funciones de la descomposición. Me auxiliaré un poco con cálculo complejo,

porque la derivada real de una función de los complejos a los complejos es la matriz cuadrada asociada al número complejo, esto es

$$[df(z)] = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \circ \frac{df}{dz}(z) & -\operatorname{Im} \circ \frac{df}{dz}(z) \\ \operatorname{Im} \circ \frac{df}{dz}(z) & \operatorname{Re} \circ \frac{df}{dz}(z) \end{bmatrix}.$$

### 3.2.2.2. Coordenadas polares

Para ubicar espacialmente puntos en el plano usemos la referencial  $(C_{\odot}; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ : fijamos el origen en  $C_{\odot}$  y usamos las direcciones  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$ .

Las coordenadas polares están definidas en todo el plano, están dadas por la expresión

$$\Theta(P, \Gamma) = C_{\odot} + P \cdot (\cos(\Gamma)\vec{e}_1 + \operatorname{sen}(\Gamma)\vec{e}_2) = (P \cos(\Gamma) + S_1 \tilde{\varepsilon})\vec{e}_1 + P \operatorname{sen}(\Gamma)\vec{e}_2 \quad (3.34)$$

en el plano complejo puede verse como  $\Theta(P, \Gamma) = S_1 \tilde{\varepsilon} + P \cdot e^{i\Gamma}$ . La inversa de las coordenadas polares es la función que parte del plano eclíptico  $\Pi_{\odot}$ :

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{\odot} & \xrightarrow{(\rho, \gamma)} & \mathbb{R}^2, \\ p & \mapsto & \begin{bmatrix} P \\ \Gamma \end{bmatrix} \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned} P = \rho(p) &=: \left\| \overrightarrow{C_{\odot}p} \right\| = \|M_{\odot}(p)\| = \|p - C_{\odot}\|, \\ \Gamma = \arg \left( \overrightarrow{C_{\odot}p} \right) &= \arg(M_{\odot}(p)) = \arg(p - C_{\odot}). \end{aligned}$$

Propiamente hablando se usará la carta  $(\mathbb{E} \setminus \{O + S_1 \vec{e}_1\}, \Theta^2)$ , que cubre toda la eclíptica menos un punto.

En coordenadas polares el radio queda descrito en términos del ángulo por la ecuación, véase [66] o [89]:

$$P = \rho(\Gamma) = \frac{S_2^2}{S_1 \cdot (1 - \tilde{\varepsilon} \cos(\Gamma))}, \quad (3.35)$$

de manera que la elipse está parametrizada en términos de  $\Gamma$  por la expresión

$$p = \eta(\Gamma) =: \frac{S_2^2}{S_1 \cdot (1 - \tilde{\varepsilon} \cos(\Gamma))} \cdot (\cos(\Gamma)\vec{e}_1 + C_{\odot}) + \frac{S_2^2}{S_1 \cdot (1 - \tilde{\varepsilon} \cos(\Gamma))} \cdot \operatorname{sen}(\Gamma)\vec{e}_2. \quad (3.36)$$

( $p$  un punto de  $\mathbb{E}$ ).

$\eta = \gamma^{-1}$  como función sobre la elipse.

### 3.2.2.3. Coordenadas elípticas

Para las coordenadas polares nos auxiliamos de la referencial  $(C_{\odot}; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , sin embargo para las coordenadas elípticas usaremos la referencial  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Las referenciales difieren sólo en el origen.

Sea  $S$  la aplicación lineal del plano en el plano con matriz asociada

$$[S] = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

Las *coordenadas elípticas* están definidas en todo el plano, son similares a las coordenadas polares (salvo por  $S$ ), están dadas por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{e} & \Pi_{\odot}, \\ \begin{bmatrix} R \\ B \end{bmatrix} & \mapsto & R \cdot S(\cos(B)\vec{e}_1 + \operatorname{sen}(B)\vec{e}_2) \end{array}$$

la inversa  $(r, \beta)$  es similar a la inversa de las coordenadas polares, no es necesario conocer la expresión explícita de  $r$ , porque no se usará;  $\beta$  está dada por:

$$\beta(p) = \arg \circ S^{-1}(p),$$

El par  $(\mathbb{E} \setminus \{O + S_1 \vec{e}_1\}, \beta)$  forma una carta de la elipse que solamente no cubre el punto  $O + S_1 \vec{e}_1$ . La parametrización asociada es

$$\tilde{\eta}(B) = S(\cos(B)\vec{e}_1 + \text{sen}(B)\vec{e}_2),$$

visto en el plano complejo:

$$\tilde{\eta}(B) = S \circ e^{iB}.$$

Notemos que

$$P^2 = \left\| \overrightarrow{C_{\odot} C_G} \right\|^2 = S_1^2(\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2 \text{sen}(B)^2.$$

El parámetro  $\beta$  admite una interpretación geométrica como ángulo:

Ptolomeo para describir el movimiento de los astros supuso que sus movimientos alrededor de la tierra eran elipses y las descompuso como la suma de otras dos elipses, una elipse grande llamada *deferente* y una elipse más pequeña. Esta idea funciona en general para describir el movimiento de cualquier astro alrededor de otro, por las leyes de Kepler (los movimientos descritos son elipses), véase [5].

Se toman dos circunferencias, de radios  $R_1$  y  $R_2$ , de modo que su suma sea igual al semieje mayor, y su diferencia, al semieje menor como se ilustra en la figura 3.2

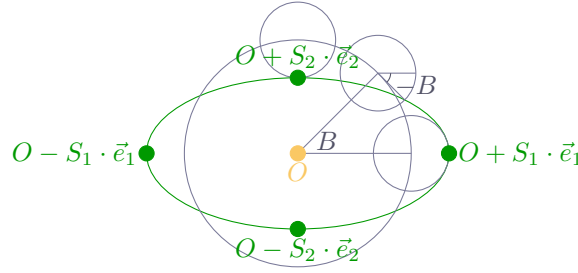


Figura 3.2: Eclíptica vista como suma de epiciclos. La deferente es la circunferencia mayor (primer epiciclo), el segundo epiciclo es una circunferencia *móvil* que ha sido dibujada en tres momentos: en el solsticio de invierno, un valor para mostrar cómo se mide el ángulo  $B$  y en el equinoccio de primavera. También se han indicado el centro de la eclíptica (el mismo que el de la deferente)

El ángulo  $B$  es el ángulo del origen  $O$  al centro del segundo epiciclo. El ángulo de este centro a la posición terrestre es el ángulo  $-B$ . Es decir que la posición del centro de la Tierra está parametrizada por

$$\begin{aligned} C_G &= R_1 \cdot (\cos(B)\vec{e}_1 + \text{sen}(B)\vec{e}_2) + R_2 \cdot (\cos(-B)\vec{e}_1 + \text{sen}(-B)\vec{e}_2) \\ &= (R_1 + R_2) \cos(B)\vec{e}_1 + (R_1 - R_2) \text{sen}(B)\vec{e}_2 \\ &= S_1 \cos(B)\vec{e}_1 + S_2 \text{sen}(B)\vec{e}_2, \end{aligned}$$

o sea que en efecto se recupera la parametrización de la eclíptica.

#### 3.2.2.4. Relación funcional entre $\gamma$ y $\beta$

Dado que  $\gamma$  y  $\beta$  son dos parametrizaciones distintas de la eclíptica están relacionadas por la relación funcional

$$\gamma^{-1}(\Gamma) = \beta^{-1}(B),$$

más explícitamente

$$\left( \frac{S_2^2}{S_1 \cdot (1 - \tilde{\varepsilon} \cos(\Gamma))} \right) \cdot (\cos(\Gamma)\vec{e}_1 + \text{sen}(\Gamma)\vec{e}_2) = S_1 \cos(B)\vec{e}_1 + S_2 \text{sen}(B)\vec{e}_2. \quad (3.37)$$

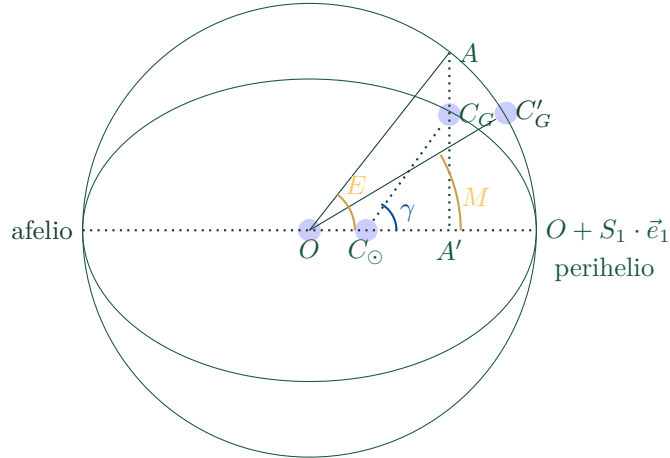


Figura 3.3: Eclíptica (elipse) y órbita de una tierra con duración de los días regular.  $C_G$  es la posición del centro de la tierra;  $C'_G$ , de la tierra *(pro)medio*;  $C_\odot$ , del sol;  $O$ , sol *(pro)medio*;  $E$  es el ángulo de anomalía excéntrica;  $M$ , ángulo de anomalía media, y  $\gamma$ , la anomalía real (el ángulo asociado al día del año comenzando en el perihelio)

### 3.2.2.5. Anomalías

Para referirse a los tres ángulos  $\gamma$ ,  $M$  y  $E$  se usa el término *anomalías*, están representadas por la figura 3.3.

## 3.2.3. La ecuación del centro de Kepler

### 3.2.3.1. Anomalía media y verdadera

El *tiempo local aparente* depende de la posición de la tierra, o sea que depende tanto del movimiento de rotación terrestre como de traslación. La variabilidad de la duración del día es consecuencia de la excentricidad de la eclíptica, puesto que si tanto el movimiento de rotación como el movimiento de traslación tuvieran velocidad angular constante, los días tendrían la misma duración. Fue por esta razón que se decidió tomar una circunferencia con centro en el centro de la eclíptica  $O$  (recuérdese que el centro de la eclíptica coincide con el centro del *sol ficticio* o *(pro)medio*) para determinar una primera versión del tiempo estándar UT0, recuérdese que hoy en día se usa una versión refinada, llamada UTC, véase la sección 1.3.2.4.1 *Tiempo Universal Coordinado* o véase [87].

Una tierra ficticia con el mismo radio que el globo terráqueo pero con una órbita circular de radio tal que sus días tienen una duración regular es llamada *tierra media*, (*promedio* o *ficticia*). La *anomalía media*  $M$  es la posición angular de la tierra media, esto es

$$M = 2\pi \frac{t - t_0}{T_\odot}, \quad (3.38)$$

tomando  $t_0$  el tiempo en que la tierra pasó por última vez por el perihelio. Recuérdese que  $T_\odot$  es el periodo de un año (una vuelta alrededor del sol). Véase la figura 3.3.  $B$  es el *ángulo día solar*, es el ángulo asociado al día en curso. Se proyecta perpendicularmente la posición del centro del sol al eje que conecta el afelio y perihelio y después se traza una recta perpendicular que pasa sobre este punto, donde esta recta intersecta la circunferencia de la órbita de la tierra media, este es el punto  $A$ . La *anomalía excéntrica*  $E$  es el ángulo del perihelio a este punto  $A$  en la órbita circular de la tierra media, fue introducida por Kepler para simplificar los cálculos, véase [61].

**3.2.3.1.1. La anomalía verdadera  $\gamma$  en términos de la anomalía excéntrica  $E$**  La posición del sol en términos de la excentricidad de la elipse  $\tilde{\epsilon}$  es

$$C_\odot = O + S_1 \cdot \tilde{\epsilon} \cdot \vec{e}_1$$

substituyendo

$$\begin{aligned}
\tan(\gamma) &= \frac{\|\overrightarrow{A'C_G}\|}{\|\overrightarrow{C_\odot C_G}\|} \\
&= \frac{\frac{S_2}{S_1} \|\overrightarrow{A'A}\|}{\|\overrightarrow{OC_\odot} - \overrightarrow{OC_\odot'}\|} \\
&= \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{\|\overrightarrow{A'A}\|}{\|\overrightarrow{OC_\odot} - \overrightarrow{OC_\odot'}\|} \\
&= \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{S_1 \cdot \text{sen}(E)}{S_1 \cdot \cos(E) - \tilde{\varepsilon} \cdot S_1} \\
&= \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{\text{sen}(E)}{\cos(E) - \tilde{\varepsilon}} \\
&= \frac{\sqrt{1 - \tilde{\varepsilon}^2} \cdot \text{sen}(E)}{\cos(E) - \tilde{\varepsilon}},
\end{aligned}$$

porque  $\frac{S_2}{S_1} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$  es la posición del centro de la tierra en el perihelio (véase la ecuación (3.10)), i. e.

$$\tan(\gamma) = \frac{\sqrt{1 - \tilde{\varepsilon}^2} \cdot \text{sen}(E)}{\cos(E) - \tilde{\varepsilon}}, \quad (3.39)$$

que también se puede expresar

$$\tan(B) \cdot (\cos(E) - \tilde{\varepsilon}) = \sqrt{1 - \tilde{\varepsilon}^2} \cdot \text{sen}(E)$$

elevando al cuadrado

$$(\tan(\gamma))^2 \cdot (\cos(E) - \tilde{\varepsilon})^2 = (1 - \tilde{\varepsilon}^2) \cdot (\text{sen}(E))^2$$

luego por trigonometría (y substituyendo la expresión anterior) se tiene la relación

$$\begin{aligned}
\cos(\gamma) &= \sqrt{\frac{1}{1 + (\tan(\gamma))^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(\cos(E) - \tilde{\varepsilon})^2}{(\cos(E) - \tilde{\varepsilon})^2 + (1 - \tilde{\varepsilon}^2) \cdot (\text{sen}(E))^2}} \\
&= \frac{\cos(E) - \tilde{\varepsilon}}{1 - \tilde{\varepsilon} \cdot \cos(E)}.
\end{aligned}$$

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\gamma)}{1 + \cos(\gamma)}} \quad (3.40)$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \tilde{\varepsilon} \cdot \cos(E) - \cos(E) + \tilde{\varepsilon}}{1 - \tilde{\varepsilon} \cdot \cos(E) + \cos(E) - \tilde{\varepsilon}}} \quad (3.41)$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + \tilde{\varepsilon}) \cdot (1 - \cos(E))}{(1 - \tilde{\varepsilon}) \cdot (1 + \cos(E))}} \quad (3.42)$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \tilde{\varepsilon}}{1 - \tilde{\varepsilon}}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos(E)}{1 + \cos(E)}} \quad (3.43)$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \tilde{\varepsilon}}{1 - \tilde{\varepsilon}}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right). \quad (3.44)$$

Sea  $\gamma' = \frac{\gamma}{2}$  y sea  $b$  de modo que  $\cos(b) = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$ , así

$$\tan(B') = \frac{\tan\left(\frac{E}{2}\right)}{\cos(b)},$$

o equivalentemente

$$\gamma' = \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{E}{2}\right)}{\cos(b)}\right),$$

diferenciando:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\gamma'}{dE} &= \frac{\cos(b)}{1 - (\operatorname{sen}(b))^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{E}{2}\right)\right)^2} = \frac{\cos(b)}{1 - (\operatorname{sen}(b))^2 \cdot \frac{1+\cos(E)}{2}} \\ &= \frac{2 \cos(b)}{1 + (\cos(b))^2 - (\operatorname{sen}(b))^2 \cdot \cos(E)} \end{aligned}$$

Tanto  $B'$  como su derivada son funciones periódicas. Obtengamos la serie de Fourier de  $\frac{dB'}{dE}$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dB'}{dE} \cdot dE = \frac{1}{2\pi} \int dB' = 1, \\ a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \frac{dB'}{dE} \cdot \cos(nE) dE, \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \frac{dB'}{dE} \cdot \operatorname{sen}(nE) dE, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por simplicidad se hará uso de variable compleja para obtener los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dE \\ &= \frac{i}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos(b) \cdot (z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}})}{(\operatorname{sen}(b))^2 \cdot \left(z^2 - 2 \cdot \frac{(1+(\cos(b))^2)}{(\operatorname{sen}(b))^2} z + 1\right)} dz, \quad z = e^{Ei}, \end{aligned}$$

la curva  $\Gamma$  le da la vuelta dos veces al origen. El denominador tiene las raíces

$$\left(\frac{1 - \cos(b)}{\operatorname{sen}(b)}\right)^2 = \left(\tan\left(\frac{b}{2}\right)\right)^2 = \left(\tan\left(\frac{b}{2}\right)\right)^2 \quad \text{y} \quad \left(\frac{1 + \cos(b)}{\operatorname{sen}(b)}\right)^2 = \left(\cot\left(\frac{b}{2}\right)\right)^2.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{i}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos(b)}{(\operatorname{sen}(b))^2} \cdot \left(\frac{z^{\frac{n}{2}} + z^{\frac{n}{2}}}{(z - (\tan\left(\frac{b}{2}\right))) \cdot (z - (\cot\left(\frac{b}{2}\right)))}\right) dz \\ &= \frac{i}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos(b)}{(\operatorname{sen}(b))^2} \cdot \left(\frac{z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}}}{(\tan\left(\frac{b}{2}\right))^2 - (\cot\left(\frac{b}{2}\right))^2}\right) \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{z - (\tan\left(\frac{b}{2}\right))^2} - \frac{1}{z - (\cot\left(\frac{b}{2}\right))^2}\right] dz \\ &= -\frac{i}{4\pi} \int_{\Gamma} (z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}}) \cdot \left[\frac{1}{z - (\tan\left(\frac{b}{2}\right))^2} - \frac{1}{z - (\cot\left(\frac{b}{2}\right))^2}\right] dz \\ &= -\frac{i}{4\pi} \int_{\Gamma} (z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}}) \left[\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tan\left(\frac{b}{2}\right)^2}{z}\right)^n + \tan\left(\frac{b}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(z \tan\left(\frac{b}{2}\right)\right)^n\right] dz \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = -\frac{i}{2\pi} \left(\tan\left(\frac{b}{2}\right)\right)^n 4i\pi = 2 \left(\tan\left(\frac{b}{2}\right)\right)^n \end{aligned}$$

esto es

$$a_n = 2 \left( \tan \left( \frac{b}{2} \right) \right)^n, n > 0, n \text{ par.} \quad (3.45)$$

Los términos  $b_n$  se obtienen de manera similar, si  $n$  es impar  $b_n$  desaparece, sino

$$-\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{z} \left( \tan \left( \frac{b}{2} \right) \right)^n - \frac{1}{z} \left( \tan \left( \frac{b}{2} \right) \right)^n \right) = 0$$

Así que la serie de Fourier sólo tiene términos cosenos.

La serie de Fourier para  $2 \frac{d\gamma'}{dE}$  y para  $\gamma' = \frac{\gamma}{2}$  es por tanto

$$2 \frac{d\gamma'}{dE} = 1 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \tan \left( \frac{b}{2} \right) \right)^{2n} \cdot \cos(nE) \quad (3.46)$$

$$B' = \frac{E}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \tan \left( \frac{b}{2} \right) \right)^{2n} \cdot \frac{\text{sen}(nE)}{n} + c \quad (3.47)$$

para una constante  $c$ .

Aproximando

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1-\tilde{\varepsilon}}{1+\tilde{\varepsilon}}} = \cos(b) &\rightarrow \left( \tan \left( \frac{b}{2} \right) \right)^2 = \frac{1-\cos(b)}{1+\cos(b)} = \frac{1-\sqrt{\frac{1-\tilde{\varepsilon}}{1+\tilde{\varepsilon}}}}{1+\sqrt{\frac{1-\tilde{\varepsilon}}{1+\tilde{\varepsilon}}}} = \frac{1-2\sqrt{\frac{1-\tilde{\varepsilon}}{1+\tilde{\varepsilon}}} + \frac{1-\tilde{\varepsilon}}{1+\tilde{\varepsilon}}}{1-\frac{1-\tilde{\varepsilon}}{1+\tilde{\varepsilon}}} \\ &= \frac{1+\tilde{\varepsilon}+1-\tilde{\varepsilon}-2\sqrt{1-\tilde{\varepsilon}^2}}{1+\tilde{\varepsilon}-1+\tilde{\varepsilon}} = \frac{1-\sqrt{1-\tilde{\varepsilon}^2}}{\tilde{\varepsilon}} \\ &= \frac{1-(1-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{2}-\frac{\tilde{\varepsilon}^4}{8})}{\tilde{\varepsilon}} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \frac{\tilde{\varepsilon}^3}{8}. \end{aligned}$$

Lo que nos permite obtener la aproximación

$$\gamma = E + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \frac{\tilde{\varepsilon}^3}{8} \right)^4 \cdot \frac{\text{sen}(nE)}{n} \approx E + \left( \tilde{\varepsilon} + \frac{\tilde{\varepsilon}^3}{4} \right) \cdot \text{sen}(E) + \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{4} \text{sen}(2E) + \frac{\tilde{\varepsilon}}{12} \text{sen}(3E). \quad (3.48)$$

### 3.2.3.1.2. Deducción de la ecuación del centro de Kepler :

Sean las regiones

- $\Delta_1$ : el segmento de la eclíptica con centro en el origen del punto  $S_1 \cdot \vec{e}_1$  al punto  $C_G$ .
- $\Delta_2$ : el triángulo de vértices  $O$ ,  $C_G$  y  $C_{\odot}$ .
- $\Delta_3$ : el segmento de elipse delimitado por los puntos  $C_{\odot}$ ,  $C_G$  y  $S_1 \cdot \vec{e}_1$ .
- $\tilde{\Delta}_1$ : el segmento de la circunferencia con centro en el origen y de radio uno de radio  $S_1$ .
- $\tilde{\Delta}_2$ : el triángulo de vértices  $O$ ,  $C_{\odot}$  y  $A$ .
- $\tilde{\Delta}_3$ : el segmento de la circunferencia con centro en el origen y de radio uno de radio  $S_1$  comprendido entre los puntos  $C_{\odot}$ ,  $A$  y  $S_1 \cdot \vec{e}_1$ .

Lo que se hará es un cambio de variable porque es más fácil obtener áreas de secciones de círculos que de elipses. Sea

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &\xrightarrow{\alpha} \mathbb{S} \\ \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^1 \\ \frac{S_2}{S_1} \cdot y^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde  $\mathbb{E}$  es la elipse y  $\mathbb{S}$  es la circunferencia de la figura 3.3.

El eje  $x^1$  permanece invariante bajo acción de  $\alpha$  (es decir que  $\alpha(\mu \cdot \vec{e}_1) = \mu \cdot \vec{e}_1$ ). El cambio de variable transforma las regiones del modo:

$$\alpha(\tilde{\Delta}_\nu) = \Delta_\nu. \quad (3.50)$$

Así se cumple la relación de áreas

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_3} dx^1 \wedge dx^2 &= \left( \int_{\Delta_1} - \int_{\Delta_2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \left( \int_{\tilde{\Delta}_1} - \int_{\tilde{\Delta}_2} \right) J\alpha dy^1 \wedge dy^2 \\ &= \frac{S_2}{S_1} \left( \int_{\tilde{\Delta}_1} - \int_{\tilde{\Delta}_2} \right) dy^1 \wedge dy^2. \end{aligned}$$

Del lado izquierdo calculamos las áreas usando geometría euclídea:

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} \cdot \left( \frac{E}{2\pi} \cdot (\pi \cdot S_1^2) - \frac{\| \overrightarrow{OC_\odot} \| \cdot \| \overrightarrow{A'A} \|}{2} \right) &= \frac{S_2}{S_1} \cdot \left( \frac{E}{2} S_1^2 - S_1^2 \cdot \frac{\tilde{\varepsilon} \cdot \text{sen}(E)}{2} \right) \\ &= \frac{S_1 S_2}{2} \cdot (E - \tilde{\varepsilon} \cdot \text{sen}(E)). \end{aligned}$$

Por otro lado, usando  $M = \frac{(t_2 - t_1)}{T_\odot} 2\pi$  de la segunda ley de Kepler sabemos que

$$\int_{\Delta_3} dx^1 \wedge dx^2 = \frac{S_1 S_2}{2} \cdot M,$$

por ende

$$E = M + \tilde{\varepsilon} \cdot \text{sen}(E). \quad (3.51)$$

Esta ecuación se conoce como la *ecuación de Kepler*.

Dada una expresión de la forma

$$x'' = x' + x f(x'')$$

( $x$ ,  $x'$  y  $x''$  variables en  $\mathbb{R}$ ) una función  $g(x'')$  puede aproximarse como serie de Taylor

$$g(x'') \approx g(x') + x \frac{dg}{dx''}(x') f(x') + \frac{(x)^2}{2!} \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \frac{dg(x')}{dx''} \cdot [f(x')]^2 \right\} + \dots \quad (3.52)$$

(en [61] le atribuye la expansión a Lagrange), para un parámetro suficientemente pequeño. Se toman las variables  $x'' = E$ ,  $x' = M$  y  $x = \tilde{\varepsilon}$  y se toman las funciones  $f(M) = \text{sen}(M)$  y  $g(E) = E$ ,  $f(E) = \text{sen}(E)$ . Resultando

$$E = M + \tilde{\varepsilon} \cdot \text{sen}(M) + \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial M} (\text{sen}(M))^2 + \frac{\tilde{\varepsilon}^3}{6} \frac{\partial^2}{\partial M^2} (\text{sen}(M))^3 \dots \quad (3.53)$$

$$= M + \tilde{\varepsilon} \cdot \text{sen}(M) + \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{2} \text{sen}(2M) + \frac{\tilde{\varepsilon}^3}{8} (3\text{sen}(3M) - \text{sen}(M)) + \dots \quad (3.54)$$

No es posible resolver *en forma cerrada* la ecuación de Kepler. Razón por la cual se suelen usar aproximaciones numéricas, por ejemplo: truncar la serie (3.54) hasta el término cúbico.

**3.2.3.1.3. La anomalía verdadera  $\gamma$  en términos de la anomalía media  $M$**  Para expresar el resultado en términos de  $M$  primero expandamos en series el seno de  $2E$  y  $3E$  en series de  $M$ :

$$\begin{aligned}\text{sen}(2E) &= \text{sen}(2M) + \tilde{\varepsilon} \text{sen}(M) \cdot 2 \cos(2M) + \dots \\ &= \text{sen}(2M) + \tilde{\varepsilon} \cdot (\text{sen}(3M) - \text{sen}(M)) \cdot \\ \text{sen}(3E) &= \text{sen}(3M) + \dots\end{aligned}$$

Comparando (3.54) con (3.48)

$$\gamma \approx E + \left( \tilde{\varepsilon} + \frac{\tilde{\varepsilon}^3}{4} \right) \cdot \text{sen}(E) + \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{4} \cdot \text{sen}(2E) + \frac{\tilde{\varepsilon}}{12} \cdot \text{sen}(3E) \quad (3.55)$$

$$= M + \left( 2\tilde{\varepsilon} + \frac{\tilde{\varepsilon}^3}{4} \right) \cdot \text{sen}(E) + \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{4} \cdot \text{sen}(2E) + \frac{\tilde{\varepsilon}}{12} \cdot \text{sen}(3E) \quad (3.56)$$

$$\approx M + 2\tilde{\varepsilon} \text{sen}(M) + \frac{5}{4} \tilde{\varepsilon}^2 \cdot \text{sen}(2M) + \tilde{\varepsilon}^3 \cdot \left( -\frac{1}{4} \text{sen}(M) + \frac{13}{12} \text{sen}(3M) \right) + \tilde{\varepsilon}^4 \cdot \dots \quad (3.57)$$

Esta aproximación solamente hace uso hasta el término cúbico ( $\tilde{\varepsilon}^3$ ), véase [61].

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dM} \cdot \frac{dM}{dt} = \frac{2\pi}{T_{\odot}} \frac{d\gamma}{dM} \quad (3.58)$$

$$\approx \frac{2\pi}{T_{\odot}} \cdot \left[ 1 + 2\tilde{\varepsilon} \cos(M) + \frac{5}{2} \tilde{\varepsilon}^2 \cos(2M) + \tilde{\varepsilon}^3 \cdot \left( -\frac{1}{4} \cos(M) + \frac{13}{4} \cos(3M) \right) \right]. \quad (3.59)$$

El término  $\frac{2\pi}{T_{\odot}}$  es la velocidad angular media. La tasa de desviación es de 3.5% ( $\approx 2\tilde{\varepsilon}$ ), véase [61].

En [61] se describe también la aproximación obtenida desde la perspectiva de la tierra, es decir desde las mediciones que puede realizar el observador. Una deducción de la ecuación del centro de Kepler también puede encontrarse en las referencias [67] y [46] y [82].

### 3.3. Movimiento de traslación: Ecuación diferencial para el centro de la Tierra

Recordemos que la segunda ley de Kepler reza: el centro de la Tierra barre áreas iguales en tiempos iguales.

En versión integral:

$$\int_{\Delta(t_1, t_2)} dx^1 \wedge dx^2 = \frac{2\pi(t_2 - t_1)}{T_{\odot}},$$

donde  $\Delta(t_1, t_2)$  es la zona barrida. En *A.1 Deducción de las leyes de Kepler de las leyes de Newton* se deducen las leyes de Kepler a partir de las expresiones de la mecánica newtoniana.

#### 3.3.1. Ecuación diferencial para la anomalía verdadera

Tomando  $\gamma$  en un intervalo suficientemente pequeño el segmento de elipse  $\Delta$  puede tomarse una región  $\square$  como en la figura 3.4.

Realizando el cambio de variable a coordenadas polares (recordemos que el ángulo  $\gamma$  es

$$\square \xrightarrow{\Theta} \triangle$$



Figura 3.4: Aunque la figura  $\square$  no fue representada de manera exacta, es apreciable cómo en el plano  $(\rho, \gamma)$ , es el área bajo cierta curva  $\rho = \rho(\gamma)$

llamado anomalía verdadera)

$$\begin{aligned} \int_{\Delta(t_1, t_2)} dx^1 \wedge dx^2 &= \int_{\square} J\Theta \, d\rho \wedge d\gamma \\ &= \int_{\square} \begin{vmatrix} \frac{\partial \Theta^1}{\partial \rho} & \frac{\partial \Theta^2}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \Theta^1}{\partial \gamma} & \frac{\partial \Theta^2}{\partial \gamma} \end{vmatrix} d\rho \wedge d\gamma \\ &= \int_{\square} \begin{vmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} & \frac{\partial \Theta}{\partial \gamma} \end{vmatrix} d\rho \wedge d\gamma \\ &= \int_{\square} \begin{vmatrix} e^{i\gamma} & \rho i e^{i\gamma} \end{vmatrix} d\rho \wedge d\gamma \\ &= \int_{\square} \rho \, d\rho \wedge d\gamma \\ &= \int_{\gamma(t_1)}^{\gamma(t_2)} \int_0^{\rho(\gamma)} \rho \, d\rho d\gamma \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\rho^2}{2} \frac{d\gamma}{dt} dt. \end{aligned}$$

comparando las expresiones

$$\frac{S_1 \cdot S_2 \cdot \pi}{T_{\odot}} \cdot (t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{d\gamma}{dt} dt,$$

fijando  $t_1$ , por el teorema fundamental del cálculo

$$\frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \frac{S_1 \cdot S_2 \pi}{T_{\odot}}. \quad (3.60)$$

La ecuación (A.1) fue probada para cuando  $t_2$  y  $t_1$  son suficientemente cercanos, para comprobar el resultado en general dados dos tiempos  $t_1$  y  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ) divídase el segmento  $[t_1, t_2]$  en segmentos lo suficientemente pequeños para que la descomposición tenga sentido.

Por el teorema fundamental del cálculo esta última ecuación (A.1) equivalente a la expresión integral (3.60). Desafortunadamente la expresión analítica para el ángulo  $\gamma$ , dada  $\rho$  por la ecuación (3.35) no es fácil de obtener.

### 3.3.2. Ecuación diferencial para el parámetro $\beta$

Ha sido presentada la segunda ley de Kepler en forma integral y en forma diferencial (para las coordenadas polares). A continuación con auxilio de la regla de la cadena se presenta la ecuación diferencial asociada para el parámetro  $\beta$ . Se hace de dos maneras distintas.

### 3.3.2.1. Cambio de variable usando diferenciación implícita

La eclíptica  $\mathbb{E}$  está parametrizada tanto por  $\eta$  como por  $\tilde{\eta}$  (véase *Sección 3.2.2.2 Coordenadas polares* y *Sección 3.2.2.3 Coordenadas elípticas*), esto significa que los valores de  $\Gamma$  y de  $B$  están relacionados del siguiente modo

$$p = \eta(\Gamma) = \tilde{\eta}(\Gamma).$$

Como se observó en estas secciones

$$\begin{aligned} P &= \frac{S_2^2}{S_1(1 - \tilde{\varepsilon} \cos(B))} \\ &= \sqrt{S_1^2(\cos(B) - \tilde{\varepsilon}) + S_2^2 \text{sen}^2(B)}, \end{aligned}$$

esto es

$$(P \cos(\Gamma) + \tilde{\varepsilon} S_1) \vec{e}_1 + P \text{sen}(\Gamma) \vec{e}_2 = S_1 \cos(B) \vec{e}_1 + S_2 \text{sen}(B),$$

que equivale al sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} S_1 \cos(B) &= P \cos(\Gamma) + \tilde{\varepsilon} S_1, \\ S_2 \text{sen}(B) &= P \text{sen}(\Gamma). \end{aligned}$$

Como

$$S_2 = S_1 \sqrt{1 - \tilde{\varepsilon}},$$

despejando  $\tilde{\varepsilon}^2$ :

$$\tilde{\varepsilon}^2 = 1 - \frac{S_2^2}{S_1^2},$$

por tanto

$$S_1^2 - S_2^2 = S_1^2 \tilde{\varepsilon}^2.$$

Derivando  $P$

$$\frac{dP}{d\Gamma} = \frac{S_2^2}{S_1} \cdot \frac{-\tilde{\varepsilon} \text{sen}(\Gamma)}{(1 - \tilde{\varepsilon} \cos(\Gamma))^2} \quad (3.61)$$

$$= \frac{S_1}{S_2^2} P^2 \cdot (-\tilde{\varepsilon} \text{sen}(\Gamma)) \quad (3.62)$$

$$= -\frac{S_1 \tilde{\varepsilon}}{S_2^2} \text{sen}(\Gamma) P^2, \quad (3.63)$$

luego

$$P^2 + \left( \frac{dP}{d\Gamma} \right)^2 = P^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{S_1^2 \tilde{\varepsilon}^2}{S_2^4} \text{sen}^2(\Gamma) P^2 \right\} \quad (3.64)$$

Derivando

$$-S_1 \text{sen}(B) \frac{dB}{dt} = \left[ \frac{dP}{d\Gamma} - P \cdot \text{sen}(\Gamma) \right] \cdot \frac{d\Gamma}{dt} S_2 \cos(B) \frac{dB}{dt} = \left[ \frac{dP}{d\Gamma} \cos(\Gamma) + P \cos(\Gamma) \right] \cdot \frac{d\Gamma}{dt}$$

La expresión anterior puede reescribirse matricialmente cómo el producto

$$\frac{dB}{dt} \cdot \begin{bmatrix} S_2 \cos(B) \\ -S_1 \text{sen}(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Gamma) & \text{sen}(\Gamma) \\ -\text{sen}(\Gamma) & \cos(\Gamma) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ \frac{dP}{d\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \frac{d\Gamma}{dt},$$

tomando la norma

$$\begin{aligned}
[S_1^2 \text{sen}^2(B) + S_2^2 \cos^2(B)] \cdot \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 &= \left\{ \left[ \left[ \frac{dP}{d\Gamma} - P \cdot \text{sen}(\gamma) \right] \right]^2 + \left[ \frac{dP}{d\Gamma} \cos(\Gamma) + P \cos(\Gamma) \right]^2 \right\} \cdot \left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)^2 \\
&= \left[ \left(\frac{dP}{dt}\right)^2 + P^2 \right] \cdot \left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)^2 \\
&= P^2 \cdot \left[ 1 + \frac{S_1^2 \tilde{\varepsilon}^2}{S_1^4} \text{sen}^2(\Gamma) \cdot P^2 \right] \cdot \frac{4\pi^2 S_1^2 S_2^2}{T_\odot^2} \cdot \frac{1}{P^4} \\
&= \frac{4\pi^2 S_1^2 S_2^2}{P^2 T_\odot^2} \cdot \left[ 1 + \frac{S_1^2 \tilde{\varepsilon}^2}{S_2^4} \text{sen}^2(\Gamma) \cdot P^2 \right] \\
&= \frac{4\pi^2 S_1^2 S_2^2}{P^2} \cdot \left[ 1 + \frac{S_1^2 \tilde{\varepsilon}^2}{S_2^2} \text{sen}^2(B) \right] \\
&= \frac{4\pi S_1^2 S_2^2}{P^2 T_\odot} \cdot \frac{1 + \frac{S_1^2 \tilde{\varepsilon}^2}{S_2^2} \text{sen}^2(B)}{S_1^2 (\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2 \text{sen}^2(B)}
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dB}{dt}\right)^2 &= \frac{4\pi^2 S_1^2 S_2^2 \left[ 1 + \frac{S_1^2 \tilde{\varepsilon}^2}{S_2^2} \right]}{T_\odot^2 [S_1 \text{sen}^2(B) + S_2^2 \cos^2(B)] [S_1^2 (\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2 \text{sen}^2(B)]} \\
&= \frac{4\pi^2 S_1^2 S_2^2 \left[ 1 + \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_2^2} \text{sen}^2(B) \right]}{T_\odot^2 [S_2^2 + (S_1^2 - S_2^2) \text{sen}^2(B)] [S_1^2 (\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2 \text{sen}^2(B)]} \\
&= \frac{4\pi^2 S_1^2}{T_\odot^2 [S_2^2 + (S_1^2 - S_2^2) \text{sen}^2(B)] [S_1^2 (\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2 \text{sen}^2(B)]} \\
&= \frac{4\pi^2 S_1^2 S_2^2 \left[ 1 + \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_2^2} \text{sen}^2(B) \right]}{T_\odot^2 [S_2^2 + (S_1^2 - S_2^2) \text{sen}^2(B)] [(S_1^2 - S_2^2) \cdot \cos^2(B) - 2\tilde{\varepsilon} S_1^2 \cos(B) + S_1^2 \tilde{\varepsilon}^2 + S_2^2]} \\
&= \frac{4\pi^2 S_1^2 S_2^2 \left[ 1 + \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_2^2} \text{sen}^2(B) \right]}{T_\odot^2 [S_2^2 + (S_1^2 - S_2^2) \text{sen}^2(B)] [\tilde{\varepsilon}^2 S_1^2 \cos^2(B) - 2\tilde{\varepsilon} S_1^2 \cos(B) + S_1^2 \tilde{\varepsilon}^2 + S_1^2 (1 - \tilde{\varepsilon}^2)]} \\
&= \frac{4\pi^2 S_2^2 \left[ 1 + \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_2^2} \text{sen}^2(B) \right]}{T_\odot^2 [S_2^2 + (S_1^2 - S_2^2) \text{sen}^2(B)] [\tilde{\varepsilon}^2 \cdot \cos^2(B) - 2\tilde{\varepsilon} \cos(B) + 1]} \\
&= \frac{4\pi^2 S_2^2 \left[ 1 + \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_2^2} \text{sen}^2(B) \right]}{T_\odot^2 [S_2^2 + (S_1^2 - S_2^2) \text{sen}^2(B)] [1 - \tilde{\varepsilon} \cos(B)]^2} \\
&= \frac{4\pi^2 [S_2^2 + (S_1^2 - S_2^2) \text{sen}^2(B)]}{T_\odot^2 [S_2^2 + (S_1^2 - S_2^2) \text{sen}^2(B)] [1 - \tilde{\varepsilon} \cos(B)]^2} \\
&= \frac{4\pi^2}{T_\odot^2 [1 - \tilde{\varepsilon} \cos(B)]^2},
\end{aligned}$$

por ende

$$\left| \frac{dB}{dt} \right| = \frac{2\pi}{T_\odot \cdot (1 - \tilde{\varepsilon} \cos(B))}.$$

### 3.3.2.2. Cambio de variable usando geometría diferencial

Aquí puede usarse un poco de la teoría de *variedades con borde*, de hecho para los propósitos de este escrito es más que suficiente, porque si se toma  $\gamma$  (o  $\beta$ ) definida en toda la eclíptica no es continua solamente en un punto (el asociado a  $\beta = \gamma = 0$ ), sin embargo sus inversas ( $\eta$  o  $\tilde{\eta}$ ) sí lo son y eso nos permite *bajar* diferenciales a la variedad. De hecho aunque las variables  $\gamma$  y  $\beta$  presentan la misma discontinuidad, sus composiciones son biyecciones del intervalo  $[0, 2\pi)$  de clase  $\mathcal{C}^0$ ,  $\mathcal{C}^1$ , de hecho analíticas. Esto último justifica

que  $d\gamma(C_G)$  y  $d\beta(C_G)$  permitan *levantar* la ecuación diferencial definida en la recta a la variedad de la elipse (el término técnico es: *levantar campos vectoriales*), véase la figura 3.3.2.3.

Introducimos la coordenada  $\beta$ , ésta no es un ángulo, pero por la excentricidad terrestre toma valores cercanos a los de  $\gamma$ .

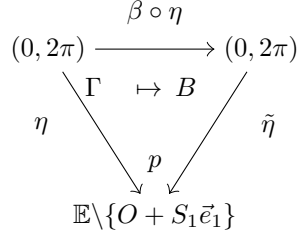


Figura 3.5: Relación de las variables involucradas.  $\eta$  y  $\tilde{\eta}$  son dos parametrizaciones de la elipse, con inversas  $\gamma$  y  $\delta$ .  $p = C_G(t)$

### 3.3.2.3. Ecuación diferencial en la variedad

La ecuación diferencial a la que hemos llegado es una ecuación diferencial para el ángulo  $\Gamma$ . Usando geometría diferencial podemos *levantar* esta ecuación diferencial a la variedad:

Tomamos como coordenada el ángulo  $\Gamma$ , es decir que se toma el argumento de la posición vista como punto en un plano

$$\gamma(p) = \arg(p - C_\odot),$$

la parametrización

$$\eta(\Gamma) = \rho \cdot [(S_1 \tilde{\varepsilon} + \cos(\Gamma)) \vec{e}_1 + \text{sen}(\Gamma) \vec{e}_2] = \frac{S_2^2}{S_1 \cdot (1 - \tilde{\varepsilon})} \cdot [S_1 (\cos(\Gamma) + S_1 \tilde{\varepsilon}) \vec{e}_1 + \text{sen}(\Gamma) \vec{e}_2]$$

(como funciones  $\eta = \gamma^{-1}$ ). Puede resultar conveniente visualizar esta expresión en el plano complejo:

$$\eta(\Gamma) = \rho(\Gamma) \cdot e^{i\Gamma} = \frac{S_2^2}{S_1 \cdot (1 - \tilde{\varepsilon})} \cdot e^{i\Gamma} + S_1 \tilde{\varepsilon},$$

luego

$$p = \eta(\Gamma).$$

Ahora nos fijamos no en un punto arbitrario  $p$  sobre la elipse, sino en el punto  $p = C_G(t)$  en un tiempo  $t$  dado. Derivando

$$\frac{dC_G}{dt} = d\eta(\Gamma) \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d\Gamma}{dt} \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

El segundo paso se debe a la notación de geometría diferencial:  $d\eta(\Gamma)$  levanta los vectores del espacio usado en la parametrización a vectores tangentes, en este caso:  $d\eta(\Gamma)1 = \frac{\partial}{\partial \gamma}(C_G)$ , porque estamos parametrizando usando un abierto de  $\mathbb{R}$ , que tiene dimensión 1.

Salvo por la notación la ecuación diferencial se ve igual que la ecuación diferencial original en las coordenadas polares. No conozco herramientas que permitan resolverla analíticamente sobre la variedad, pero sí conozco herramientas que permiten integrar numéricamente directamente sobre la variedad, no sé si sea conveniente. Por otro lado esta ecuación funciona como un paso intermedio para escribir la ecuación diferencial en otras coordenadas.

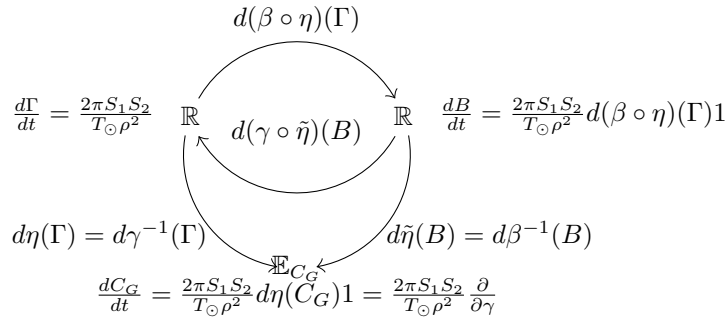


Figura 3.6: Las diferenciales  $d\tilde{\eta}(\Gamma)$  y  $d\eta(\Gamma)$  bajan, pasa de estar definida en la recta a estar definida en la elipse. Sus inversas  $d\beta(p)$  y  $d\gamma(p)$ .  $\mathbb{E}_p$  es el espacio tangente de la elipse en el punto  $p = C_G(t)$  en el tiempo  $t$ .

### 3.3.3. Ecuación diferencial coordenadas elípticas

Para resolver este problema llegamos a la conclusión de que posiblemente la dificultad para presentar una solución analítica radica en las coordenadas usadas.

Hay dos formas equivalentes de obtener la ecuación diferencial para estas coordenadas: primero, es posible expresar la ecuación sobre la variedad de la forma  $\frac{dC_G}{dt} = f(C_G) \frac{\partial}{\partial \beta}$ , para la función  $f$  adecuada y luego bajarla al espacio vectorial asociado. Segundo: es posible aplicar (desde la ecuación diferencial original) un cambio de variable, lo que equivale a cambiar de coordenadas ( $B(t) = \beta \circ \gamma^{-1}(\Gamma)$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \frac{dB}{d\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} \\ &= d(\beta \circ \gamma^{-1})(\Gamma) \frac{d\Gamma}{dt} \\ &= d(\beta \circ \eta)(\Gamma) \frac{d\Gamma}{dt}, \end{aligned}$$

auxiliándonos del teorema de la función inversa

$$\begin{aligned} d(\beta \circ \gamma^{-1})(\Gamma) &= [d(\beta \circ \gamma^{-1})^{-1}(B)]^{-1} \\ &= [d(\gamma \circ \beta^{-1})(B)]^{-1} \\ &= [d(\gamma \circ \tilde{\eta})(B)]^{-1}, \end{aligned}$$

la función  $\beta \circ \eta(\Gamma)$  es una función de variable real y se habla de su derivada en el sentido usual, es decir que  $\frac{dB}{d\Gamma} = d(\beta \circ \gamma^{-1})(\Gamma)$  es una diferencial en el sentido del cálculo clásico, que podemos descomponer (apoyándonos del cálculo complejo y las funciones anteriores:

$$\begin{aligned}
d(\gamma \circ \tilde{\eta})(B) &= d\text{Im} \circ \log \circ M_{\odot} \circ S \circ e^{L_i}(B) \\
&= [0 \quad 1] \circ d\log(M_{\odot} \circ S(e^{iB})) \circ dM_{\odot}(Se^{iB})[S][e^{iB}]_{(1,i)}^{(1,i)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= [0 \quad 1] \left[ \frac{1}{Se^{iB} - C_{\odot}} \right]_{(1,i)}^{(1,i)} 1_2 \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} \cos(B) & -\text{sen}(B) \\ \text{sen}(B) & \cos(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= [0 \quad 1] \left[ \frac{\overline{Se^{iB}} - S_1\tilde{\varepsilon}}{S_1^2(\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2\text{sen}^2(B)} \right]_{(1,i)}^{(1,i)} 1_2 \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} \cos(B) & -\text{sen}(B) \\ \text{sen}(B) & \cos(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= [0 \quad 1] \left[ \frac{\overline{Se^{iB}} - S_1\tilde{\varepsilon}}{S_1^2(\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2\text{sen}^2(B)} \right]_{(1,i)}^{(1,i)} \begin{bmatrix} S_1 \cos(B) & -S_1 \text{sen}(B) \\ S_2 \text{sen}(B) & S_2 \cos(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= [0 \quad 1] \frac{1}{S_1^2(\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2\text{sen}^2(B)} \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} S_1(\cos(B) - \tilde{\varepsilon}) & S_2 \text{sen}(B) \\ -S_2 \text{sen}(B) & S_1(\cos(B) - \tilde{\varepsilon}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \cos(B) & -S_1 \text{sen}(B) \\ S_2 \text{sen}(B) & S_2 \cos(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{S_1^2(\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2\text{sen}^2(B)} \cdot [0 \quad 1] \begin{bmatrix} S_1(\cos(B) - \tilde{\varepsilon}) & S_2 \text{sen}(B) \\ -S_2 \text{sen}(B) & S_1(\cos(B) - \tilde{\varepsilon}) \end{bmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} S_1 \cos(B) & -S_1 \text{sen}(B) \\ S_2 \text{sen}(B) & S_2 \cos(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

como en general  $[0 \quad 1] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = d$ , no hay que realizar por completo el producto matricial, solo hay que realizar el producto y la suma de la entrada inferior derecha

$$\frac{d\Gamma}{dB} = \frac{1}{S_1^2(\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2\text{sen}^2(B)} \cdot (S_1 S_2 (1 - \tilde{\varepsilon} \cos(B)))$$

O sea

$$d(\beta \circ \gamma^{-1})^{-1}(\Gamma) = \frac{S_1^2(\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2\text{sen}^2(B)}{S_1 S_2 (1 - \tilde{\varepsilon} \cos(B))},$$

luego

$$\begin{aligned}
\frac{dB}{dt} &= \frac{2\pi S_1 S_2}{T_{\odot}} \frac{S_1^2(\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2\text{sen}^2(B)}{S_1 S_2 (1 - \tilde{\varepsilon} \cos(B))} \cdot \frac{1}{\rho^2} \\
&= \frac{2\pi S_1 S_2}{T_{\odot}} \frac{S_1^2(\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2\text{sen}^2(B)}{S_1 S_2 (1 - \tilde{\varepsilon} \cos(B))} \cdot \frac{1}{\left\| \overrightarrow{C_{\odot} C_G} \right\|^2} \\
&= \frac{2\pi S_1 S_2}{T_{\odot}} \frac{S_1^2(\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2\text{sen}^2(B)}{S_1 S_2 (1 - \tilde{\varepsilon} \cos(B))} \cdot \frac{1}{\|S_1(\cos(B) - \tilde{\varepsilon})\vec{e}_1 + S_2 \text{sen}(B)\vec{e}_2\|^2} \\
&= \frac{2\pi S_1 S_2}{T_{\odot}} \frac{S_1^2(\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2\text{sen}^2(B)}{S_1 S_2 (1 - \tilde{\varepsilon} \cos(B))} \cdot \frac{1}{S_1^2(\cos(B) - \tilde{\varepsilon})^2 + S_2^2\text{sen}^2(B)} \\
&= \frac{2\pi}{T_{\odot}} \cdot \frac{1}{1 - \tilde{\varepsilon} \cos(B)}.
\end{aligned}$$

Expresión que sí sabemos cómo trabajar.

### 3.3.4. Parametrización de la eclíptica

Como se dijo anteriormente la eclíptica está parametrizada tanto por la expresión  $\tilde{\eta}(\beta)$  como por  $\eta(\gamma)$ .

El centro de la Tierra  $C_G(t)$  cambia de posición con respecto al tiempo. Las versiones diferenciales de la segunda ley de Kepler que se exploraron más arriba, dictan cómo tiene que evolucionar  $C_G$  en función del tiempo. Más propiamente hablando

$$\tilde{\eta}(\beta(t)) = C_G = \eta(\gamma(t)),$$

donde  $\beta(t)$  y  $\gamma(t)$  son las soluciones de las ecuaciones diferenciales asociadas a la segunda ley de Kepler. Desde la época de Newton es bien sabido que estas expresiones no se pueden resolver *forma cerrada* (no admiten solución analítica). La solución por la que se ha optado desde un inicio ha sido la de aproximar numéricamente, véase [30]. Más recientemente se han realizado esfuerzos por obtener *soluciones cuasianalíticas*, véase [12] y [15].

## 3.4. Movimiento de rotación

### 3.4.1. Globo terráqueo fijo

El globo terráqueo rota y se traslada conforme transcurre el tiempo. Sin embargo puede resultar más conveniente visualizar un globo terráqueo fijo, el globo terráqueo tal y cómo se encontraba en el instante  $t_0$ .

Dado  $z = z(t)$  sobre el globo terráqueo sea  $z_G = z(t_0)$ .  $z_G$  tiene ángulos de latitud y longitud, pero no depende del tiempo (porque se ha fijado), y viceversa: dados dos ángulos de latitud y longitud  $\phi$  y  $\lambda$  determinan un único valor  $z_G$ ,

$$z_G = \Phi^{-1} \left( \left[ \begin{array}{c} \phi \\ \lambda \end{array} \right]; t_0 \right).$$

Se le asocia al globo terráqueo un sistema de referencia (co)móvil, la referencial

$(C_G(t_0); \vec{e}_G(t_0), \vec{e}_E(t_0), \vec{e}_N)$ , donde  $\vec{e}_N$  a diferencia de  $C_G(t)$ ,  $\vec{e}_G(t)$  y  $\vec{e}_N(t)$  es constante: no cambia con el transcurso del tiempo. El instante  $t_0$  fue elegido de manera que fuera sencillo calcular el valor de la matriz de rotación a partir de él y los valores de los elementos de la referencial anterior:

En el instante  $t_0$ , las 12 horas del equinoccio de primavera del año bisiesto 2024, por ser un equinoccio los días y noches duran lo mismo. En ese momento la tierra pasa por el eje generado por el vector  $\vec{e}_1$ . Por la hora en el meridiano de Greenwich es de medianoche.

Por la oblicuidad y la elección de los vectores  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  y  $\vec{e}_3$  el vector  $\vec{e}_N$  se encuentra en el plano que pasa por el centro de la tierra generado por los vectores  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_3$ . La oblicuidad  $\varepsilon$  es un dato conocido: 0.4091 radianes o 23.44 grados,

$$\vec{e}_N = \cos(\varepsilon)\vec{e}_1 + \sin(\varepsilon)\vec{e}_3, \quad (3.65)$$

Por la oblicuidad y elección de los vectores  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  y  $\vec{e}_3$ , el vector  $\vec{e}_N$  se encuentra en ese momento también en el plano que pasa por el centro de la tierra generado por los vectores:  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_3$ . La oblicuidad  $\varepsilon$  es un dato conocido: 6.104 radianes o 23.44 grados.

$$\vec{e}_N = \cos(\varepsilon)\vec{e}_1 + \sin(\varepsilon)\vec{e}_3 \quad (3.66)$$

( $\vec{e}_N$  es constante a lo largo del tiempo).

Por otro lado como  $\vec{e}_N$  y  $\vec{e}_G$  se encuentran en el momento  $t_0$  ambos en el plano  $\mathcal{L} \{ \vec{e}_1, \vec{e}_3 \}$  y forman una base ortonormal ( $\vec{e}_G, \vec{e}_N$ ) positivamente orientada de dicho plano, para obtener  $\vec{e}_G$  hay que usar la misma expresión, pero desfasándola  $\frac{\pi}{2}$ :

$$\vec{e}_G(t_0) = \cos \left( \varepsilon - \frac{\pi}{2} \right) \vec{e}_1 + \sin \left( \varepsilon - \frac{\pi}{2} \right) \vec{e}_3 \quad (3.67)$$

$$= \sin(\varepsilon) \cdot \vec{e}_1 - \cos(\varepsilon) \cdot \vec{e}_3, \quad (3.68)$$

por propiedades de senos y cosenos.

Para determinar la posición del vector  $\vec{e}_E(t_0)$ , como la base  $(\vec{e}_N, \vec{e}_E, \vec{e}_G)$  es una base ortogonal positivamente orientada puede usarse el producto cruz:

$$\vec{e}_E(t_0) = \vec{e}_N \times \vec{e}_G \quad (3.69)$$

$$= (\cos(\varepsilon) \cdot \vec{e}_1 + \text{sen}(\varepsilon) \cdot \vec{e}_3) \times (\text{sen}(\varepsilon) \cdot \vec{e}_1 - \cos(\varepsilon) \cdot \vec{e}_3) \quad (3.70)$$

$$= (\cos(\varepsilon))^2 \cdot \vec{e}_2 + (\text{sen}(\varepsilon))^2 \cdot \vec{e}_2 \quad (3.71)$$

$$= \vec{e}_2. \quad (3.72)$$

En resumen, en  $t_0$  se tiene la base:

$$\vec{e}_G(t_0) = \text{sen}(\varepsilon) \cdot \vec{e}_1 - \cos(\varepsilon) \cdot \vec{e}_3 \quad (3.73)$$

$$\vec{e}_E(t_0) = \vec{e}_2 \quad (3.74)$$

$$\vec{e}_N(t_0) = \cos(\varepsilon) \vec{e}_1 + \text{sen}(\varepsilon) \vec{e}_3. \quad (3.75)$$

### 3.4.2. Marco de referencia geográfico móvil

Para determinar la posición de los elementos de la base comóvil  $(\vec{e}_G(t), \vec{e}_E(t), \vec{e}_N)$  en términos de la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  se hará uso del ángulo de oblicuidad y de la expresión antes obtenida de la rotación terrestre. Como se dijo el vector  $\vec{e}_N$  es invariante ante el movimiento de rotación, pero no ante el de traslación. Los otros dos vectores:  $\vec{e}_G(t)$  y  $\vec{e}_E(t)$  no son invariantes ante rotación, ni traslación. Tómese  $t_0$  como un momento dónde sea fácil calcular los vectores  $\vec{e}_G$ ,  $\vec{e}_E$  y  $\vec{e}_N$ , por ejemplo: las 12 horas del equinoccio de primavera de un año bisiesto, como es el 19 de marzo de 2024. En los equinoccios los días y noches duran lo mismo (aminorando la variabilidad de la duración del día). En ese momento la tierra pasa por el eje generado por el vector  $\vec{e}_1$ . Por la hora en el meridiano de Greenwich es de medianoche, o sea que el sol se encuentra completamente oculto, detrás de la tierra visto desde ese meridiano. Esto geográficamente significa que el vector  $\vec{e}_G$  se encuentra en el plano que pasa por el centro de la tierra generado por los vectores:  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_3$ .

### 3.4.3. Relación de los marcos de referencia geográfico fijo y móvil

Recordemos que el marco de referencia  $(C_G(t_0); \vec{e}_G(t_0), \vec{e}_E(t_0), \vec{e}_N(t_0))$  no depende del tiempo y es útil para determinar la posición de los distintos astros sobre el firmamento solar, respecto a la posición del observador, sin atender al tiempo, o de los puntos sobre el globo terráqueo  $z_G$ , en función solamente de sus ángulos de latitud  $\phi$  y longitud  $\lambda$ .

Los vectores  $\vec{e}_G$ ,  $\vec{e}_E$ ,  $\vec{e}_N$  varían como funciones del tiempo. Ellos son de utilidad para representar la evolución de los distintos puntos del firmamento celeste (vistos desde algún punto  $z$  sobre el globo terráqueo) y la evolución de los puntos  $z$  sobre el globo terráqueo.

### 3.4.4. Parametrización del movimiento de rotación

#### 3.4.4.1. Valor explícito de la matriz de rotación

Notemos que la base  $(\vec{e}_N, \vec{e}_E, \vec{e}_G)$  tiene la matriz asociada

$$\begin{bmatrix} \cos(\varepsilon) & 0 & \text{sen}(\varepsilon) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\varepsilon) & 0 & -\cos(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

que es su propia inversa. Luego la matriz de rotación terrestre (véase la sección 3.1.4.2 *Rotación terrestre*) adquiere la forma:

$$R_{G^*} \left( \begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon) & 0 & \text{sen}(\varepsilon) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\varepsilon) & 0 & -\cos(\varepsilon) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) & -\text{sen}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) & 0 \\ \text{sen}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) & \cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$R_{G^*} \left( \begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon) & 0 & \text{sen}(\varepsilon) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\varepsilon) & 0 & -\cos(\varepsilon) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) \cdot \cos(\varepsilon) & -\text{sen}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) & \cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) \cdot \text{sen}(\varepsilon) \\ \text{sen}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) \cdot \cos(\varepsilon) & \cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) & \text{sen}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) \cdot \text{sen}(\varepsilon) \\ \text{sen}(\varepsilon) & 0 & -\cos(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$R_{G^*} \left( \begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) \cdot (\cos(\varepsilon))^2 + (\text{sen}(\varepsilon))^2 & -\text{sen}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) \cdot \cos(\varepsilon) & (\text{sen}(\varepsilon) \cdot \cos(\varepsilon)) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) - 1\right) \\ \text{sen}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) \cdot (\cos(\varepsilon)) & \cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) & \text{sen}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) \cdot \text{sen}(\varepsilon) \\ (\text{sen}(\varepsilon) \cdot \cos(\varepsilon)) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) - 1\right) & -\text{sen}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) \cdot \text{sen}(\varepsilon) & \cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot(t-t_0)}{T_G}\right) \cdot (\text{sen}(\varepsilon))^2 + (\cos(\varepsilon))^2 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

### 3.4.4.2. Rotación y traslación terrestre

Finalmente la combinación de movimientos de traslación y rotación toma el aspecto:

$$R^G \left( \begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix} \right) =: C_G(t) + R_{G^*} \left( \begin{bmatrix} t \\ \vec{C}_G(t)z \end{bmatrix} \right) \quad (3.79)$$

donde  $z$  es un punto sobre la superficie terrestre en el momento  $t = \text{JDN} + \frac{t'}{24h} = 0$ . Para el movimiento de traslación  $t'$  no es significativa y para el movimiento de rotación, por la periodicidad JDN tampoco.

La aproximación de la órbita terrestre con una circunferencia es una buena primera aproximación para determinar el tiempo estándar, porque UT0 (obtenido con la aproximación de la órbita terrestre como una circunferencia de radio adecuado y centro  $O$ ) y UTC (el estándar actual) son cercanos. No obstante si en un momento dado se conoce el tiempo estándar de acuerdo con UTC, puede emplearse en lugar del valor de UT0 y así obtener una mejor aproximación.

### 3.4.5. Parametrización de puntos sobre el globo terráqueo

Para visualizar un punto sobre el globo terráqueo fijo, es decir el globo terráqueo en el instante  $t_0$  se usa la notación  $z_G$ , este punto está determinado por las coordenadas de latitud  $\phi$  y longitud  $\lambda$ . Este punto tiene coordenadas  $(\vec{e}_G(t_0), \vec{e}_E(t_0), \vec{e}_N)$  fijas, que permiten visualizar los astros sobre el firmamento cómo son vistos desde la tierra.

Pero cuando se quiere visualizar la evolución del planeta Tierra o los puntos  $z$  sobre él conviene tomar un marco móvil. En particular se usa la referencial comóvil  $(C_G(t); \vec{e}_G(t), \vec{e}_E(t), \vec{e}_N)$

que ha sido descrita más arriba.

La posición en cualquier instante de tiempo para un punto  $z = z(t)$  visto desde el globo terráqueo *móvil* toma el aspecto:

$$\begin{aligned} z(t) &= R^G \left( \begin{bmatrix} t \\ z(t) \end{bmatrix} \right) = \Phi \left( \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \end{bmatrix}; t \right) \\ &= C_G(t) + R_{G^*}(t) z_G \left( \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= C_G(t) + R_{G^*}(t) \cdot (\cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) \vec{e}_G(t_0) + \cos(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda) \vec{e}_E(t_0)) + \text{sen}(\phi) \vec{e}_N \end{aligned}$$

más arriba se encuentra una expresión explícita de la matriz de rotación  $R_{G^*}(t)$  y para los vectores de la base fija  $(\vec{e}_G(t_0), \vec{e}_E(t_0), \vec{e}_N(t_0))$ .

Recordemos que más arriba están dadas las expresiones que rigen el comportamiento de  $C_G(t)$ , pero que dado que no es posible resolver analíticamente la ecuación diferencial asociada a la segunda ley de Kepler, lo mejor que se puede obtener es una aproximación numérica.

## Capítulo 4

# Aplicaciones del modelo Geométrico

### 4.1. Geometría del globo (esfera) solar

#### 4.1.1. Parametrización del globo solar

Para parametrizar el globo solar primero tomaremos una base ortogonal adecuada, se obtendrá una referencial añadiéndole un origen y se describirán sus propias coordenadas. A continuación se presentan dos, puesto que ambas resultan de utilidad: Sea

$$\vec{e}_{\odot 3} = \vec{e}_{\odot 3}(t, z(t)) =: \frac{\vec{C}_{\odot z}}{\|\vec{C}_{\odot z}\|} \quad (4.1)$$

(el índice 3 se debe a que tendrá un rol análogo al polo norte). Ahora aplicando un paso del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt definimos un vector ortogonal

$$\vec{e}_{\odot 1} = \frac{\vec{e}_z - \langle \vec{e}_z, \vec{e}_{\odot 3} \rangle \vec{e}_{\odot 3}}{\|\vec{e}_z - \langle \vec{e}_z, \vec{e}_{\odot 3} \rangle \vec{e}_{\odot 3}\|} \quad (4.2)$$

$$= \frac{\vec{C}_G z - \langle \vec{C}_G z, \vec{e}_{\odot 3} \rangle \vec{e}_{\odot 3}}{\|\vec{C}_G z - \langle \vec{C}_G z, \vec{e}_{\odot 3} \rangle \vec{e}_{\odot 3}\|}, \quad (4.3)$$

se elige un tercer vector  $\vec{e}_{\odot 2}$  de modo que  $(\vec{e}_{\odot 1}, \vec{e}_{\odot 2}, \vec{e}_{\odot 3})$  sea una base ortonormal positiva a derechas:

$$\vec{e}_{\odot 2} = \vec{e}_{\odot 3} \times \vec{e}_{\odot 1}. \quad (4.4)$$

A la base anterior se le añade el punto  $C_{\odot}$ , lo que nos deja con una referencial móvil (es móvil porque los vectores cambian, aunque el punto  $C_{\odot}$  no lo haga):  $(C_{\odot}; \vec{e}_{\odot 1}, \vec{e}_{\odot 2}, \vec{e}_{\odot 3})$ . La siguiente función parametriza el globo solar:

$$\Phi_{\odot}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \phi_{\odot} \\ \lambda_{\odot} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} z(t) \\ t \end{bmatrix} \right) = C_{\odot} + R_{\odot} \cdot \cos(\phi_{\odot}) \cdot \cos(\lambda_{\odot}) \cdot \vec{e}_{\odot 1} \\ + R_{\odot} \cdot \cos(\phi_{\odot}) \cdot \sin(\lambda_{\odot}) \cdot \vec{e}_{\odot 2} + R_{\odot} \cdot \sin(\phi_{\odot}) \cdot \vec{e}_{\odot 3}. \quad (4.5)$$

esta función ha sido elegida en analogía con aquella empleada para parametrizar el globo terráqueo en términos de longitud y latitud. Cuando  $\phi_{\odot} = \lambda_{\odot} = 0$ , entonces  $\Phi_{\odot}^{-1}(\phi_{\odot}, \lambda_{\odot}) = \vec{e}_{\odot 3}$ . Estas funciones se definen sobre el mismo dominio que la función  $\Phi^{-1}$  de latitud y longitud terrestres. En *A.2 La esfera como variedad diferenciable* se detalla la función anterior y su inversa.

#### 4.1.2. Espacio normal

Se define el *espacio normal*,  $N_{\odot}(q)$ , como el complemento ortogonal al *espacio tangente*. Primero se mostrará que el espacio tangente  $\Pi_{\odot}(q)$  es ortogonal al vector  $\vec{C}_{\odot} q$ :

El espacio  $\Pi_{\odot}(q)$  consiste de los vectores tangentes en el punto  $q$  a la esfera solar. Así que para mostrar el resultado se mostrará que para toda curva suave en el punto  $q$ , su vector derivada es ortogonal al vector  $\overrightarrow{C_{\odot}q}$ . Sea  $\gamma$  una curva de un intervalo  $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$  a la esfera solar, que manda el cero al punto  $q$ ,  $\gamma$  diferenciable en 0. La esfera está dada como la imagen inversa del cero para la función

$$g(q) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\nu=1}^3 (q^{\nu})^2, \quad (4.6)$$

notemos que

$$dg(q) = \left( \overrightarrow{C_{\odot}q} \right)^* \quad (4.7)$$

(el dual de  $q$ ), o equivalentemente

$$\nabla g(q) = \overrightarrow{C_{\odot}q}. \quad (4.8)$$

Se toma la acción del vector tangente  $\frac{d\gamma}{dt}(0)$  sobre  $g$ :

$$\left( \frac{d\gamma}{dt}(0) \right) g = \frac{g \circ \gamma}{dt}(0) \quad (4.9)$$

$$= dg(q) \frac{d\gamma}{dt}(0) \quad (4.10)$$

$$= \left\langle \nabla g(q), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle \quad (4.11)$$

$$= \left\langle \overrightarrow{C_{\odot}q}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle, \quad (4.12)$$

luego  $\left\langle \overrightarrow{C_{\odot}q}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0$ . Como  $\gamma$  fue arbitraria,  $\Pi_{\odot} \perp \overrightarrow{C_{\odot}q}$ .

Sea

$$\hat{n}(q) = \frac{\overrightarrow{C_{\odot}q}}{R_{\odot}}, \quad (4.13)$$

dividir entre el radio del sol hace que  $\hat{n}(q)$  sea unitario, pero no es necesario.

Que el espacio tangente en un punto  $q$  de una esfera sea ortogonal al vector  $\overrightarrow{C_{\odot}q}$  se traduce en que:

$$N_{\odot}(q) = \mathcal{L} \{ \hat{n}(q) \}, \quad (4.14)$$

porque  $N_{\odot}(q)$  tiene dimensión 1.

#### 4.1.2.1. Descomposición de $\mathbb{R}^3$ usando el espacio tangente y normal

Notemos que

$$\mathbb{R}^3 = \Pi_{\odot}(q) \oplus N_{\odot}(q), \forall q \text{ en la superficie solar.} \quad (4.15)$$

La representación de un vector como suma de un elemento de los espacios normal y tangente es única y por la ortogonalidad de ambos es posible obtener la componente del espacio normal usando producto interno:

$$\langle \vec{v}, \hat{n}(q) \rangle \cdot \hat{n} \quad (4.16)$$

la componente en el espacio normal (porque  $\hat{n}$  se toma unitario, sino hay que dividir entre su norma).

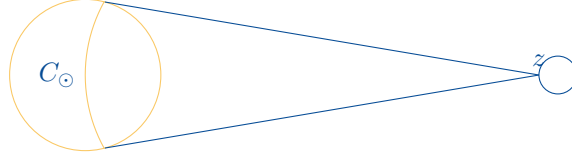


Figura 4.1: Zona visible del sol desde un punto  $z$  en el globo terráqueo entre el fin del periodo de amanecer y el comienzo del periodo del atardecer



Figura 4.2: Este diagrama ha sido exagerado para volver más visible que el área del globo solar visible para un punto  $z$  en un tiempo  $t$  es un casquete, no la totalidad de un hemisferio

### 4.1.3. Área visible del sol durante el día

Durante el día la zona visible del sol  $\mathbb{F}(z(t), t)$  está determinada por el instante  $t$  y el punto  $z = z(t)$ , por las constricciones dadas en la sección 4.2.1 *Constricciones de los fotones que salen de un punto  $q$  en la superficie solar para que sean visibles en un punto  $p$  en el globo terráqueo*. A continuación se da una caracterización de la región  $\mathbb{F}(z(t), t)$  entre el final del amanecer y el comienzo del atardecer:

Sea  $z = z(t)$  un punto sobre el globo terráqueo. Para el punto  $z$  la zona del sol visible es el conjunto  $\mathbb{F}(z(t), t)$ , subconjunto del globo solar. La condición para que un fotón salga del globo solar en dirección a un punto  $z$  sobre el globo terráqueo es

$$\langle \vec{zq}, \vec{C_\odot q} \rangle \leq 0,$$

para el punto que es visible y está alineado con el centro del sol y el punto  $z$

(el punto  $S' = C_\odot + R_\odot \cdot \frac{\vec{C_\odot z}}{\|\vec{C_\odot z}\|}$ ) puede verificarse que el producto anterior es negativo, pero para los  $q$  con  $\vec{S'q} \perp \vec{C_\odot q}$  es positivo, de modo que hay puntos en los que el producto interno anterior vale cero.

Tracemos una recta del punto  $z$  al centro del globo solar  $C_\odot$ , tomemos cualquier recta que también pase por el punto  $z$  perpendicular a ésta y tomemos el plano afín formado por ambas rectas. Este plano corta a la esfera solar en una sección, por construcción este corte es un círculo máximo (véase la figura 4.2). Sea un punto en el que se cumple la condición de salida, es decir donde el producto interno anterior vale cero, este punto está a cierto ángulo del punto  $z$  midiendo desde la recta que conecta a  $z$  con  $C_\odot$ , por simetría el punto sobre la superficie del sol que forma menos el mismo ángulo también cumple la condición del producto interno (que valga cero). Sean  $q_1$  y  $q_2$  estos puntos. Geométricamente eso significa que los vectores  $\vec{zq}$  y  $\vec{C_\odot q}$  son ortogonales. Por ende el cuadrilátero de vértices  $C_\odot, q_1, q_2, C_\odot$  y  $z$  tiene al menos dos ángulos rectángulos:  $\angle zq_1 C_\odot$  y  $\angle zq_2 C_\odot$ . Sea  $\phi_{\odot 0}$  el ángulo  $\angle q_1 z q_2$ , como los ángulos de un cuadrilátero suman  $2\pi$ , el ángulo  $\beta = \angle q_1 C_\odot q_2$  tiene ángulo

$$\begin{aligned} \beta &= 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \phi_{\odot 0} \\ &= \pi - \phi_{\odot 0}. \end{aligned}$$

Notemos que por simetría el segmento de recta que conecta  $z$  con  $C_{\odot}$  bisecta a los ángulos  $\phi_{\odot 0}$  y  $\beta$ . Por lo tanto

$$\angle q_1 z C_{\odot} = \frac{\phi_{\odot 0}}{2} \quad (4.17)$$

y

$$\angle q_1 C_{\odot} z = \frac{\pi - \phi_{\odot 0}}{2}, \quad (4.18)$$

el triángulo de vértices  $q_1$ ,  $C_{\odot}$  y  $z$  es un triángulo rectángulo, usemos este hecho para calcular el ángulo  $\phi_{\odot 0}$ :

1. El segmento de recta que conecta al centro del sol  $C_{\odot}$  con el punto  $q_1$  mide  $C_{\odot}$ .
2. El segmento de recta que conecta al centro del sol  $C_{\odot}$  con el punto  $z$  mide  $\left\| \overrightarrow{C_{\odot} z} \right\|$ .
3. El segmento de recta que conecta al centro del sol  $C_{\odot}$  con el punto  $q_1$  mide  $\left\| \overrightarrow{C_{\odot} q_1} \right\|$ .
4. Como es un triángulo rectángulo

$$\text{sen} \left( \frac{\phi_{\odot 0}}{2} \right) = \frac{R_{\odot}}{\left\| \overrightarrow{C_{\odot} z} \right\|}, \quad (4.19)$$

por trigonometría el seno y coseno al cuadrado suman uno, así que

$$\cos(\phi_{\odot 0}) = \sqrt{1 - \left( \frac{R_{\odot}}{\left\| \overrightarrow{C_{\odot} z} \right\|} \right)^2}. \quad (4.20)$$

Por otro lado

$$\phi_{\odot 0} = 2 \arcsen \left( \frac{R_{\odot}}{\left\| \overrightarrow{C_{\odot} z} \right\|} \right). \quad (4.21)$$

5. Como es un triángulo rectángulo

$$\cos \left( \frac{\phi_{\odot 0}}{2} \right) = \frac{\left\| \overrightarrow{z q} \right\|}{\left\| \overrightarrow{C_{\odot} z} \right\|} \quad (4.22)$$

luego

$$\left\| \overrightarrow{z q} \right\| = \left\| \overrightarrow{C_{\odot} z} \right\| \cdot \cos(\phi_{\odot 0}) \quad (4.23)$$

$$= \left\| \overrightarrow{C_{\odot} z} \right\| \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{R_{\odot}}{\left\| \overrightarrow{C_{\odot} z} \right\|} \right)^2} \quad (4.24)$$

Por simetría no importa que punto  $q_1$  fue elegido, para todos ellos el ángulo  $\phi_{\odot 0}$  es el mismo.

#### 4.1.3.1. Parametrización de la zona visible del globo solar

La razón por la que la parametrización  $\Phi_{\odot}^{-1}$  se definió de esa manera es que para  $\phi_{\lambda} = 0$ , se obtiene el valor del punto  $S'$ , aquel que se encuentra sobre el globo solar, entre el punto  $z$  y el centro del sol, sí  $\phi_{\odot}$  conforme se aleja  $q$  del punto  $S'$  crece. Para  $\phi_{\odot} \in [0, \phi_{\odot 0}]$ , al variar todos los valores de  $\lambda_{\odot}$  sobre todo  $[0, 2\pi]$  (salvo para el punto  $S'$ , que es el único punto que tiene asociado el valor  $\phi_{\odot} = 0$  radianes, no obstante que varía  $\lambda_{\odot}$  no hace diferencia).

$$\mathbb{F}(z(t), t) = \Phi_{\odot}^{-1} \left( [0, \phi_{\odot 0}] \times [0, 2\pi]; \begin{bmatrix} z(t) \\ t \end{bmatrix} \right). \quad (4.25)$$

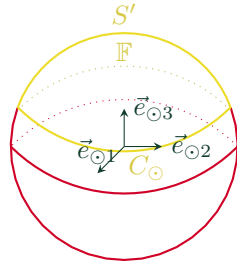


Figura 4.3: Representación de la esfera solar, el punto  $z$  se supone en la dirección  $\vec{e}_{\odot 3}$ . Amarillo región  $\mathbb{F}$ , verde base ( $\vec{e}_{\odot 1}, \vec{e}_{\odot 2}, \vec{e}_{\odot 3}$ )

#### 4.1.3.2. Parametrización del área visible del sol durante el amanecer y el atardecer

Durante el amanecer y el atardecer el sol pasa por el horizonte, lo que significa que la región visible pasa de ser un casquete polar a un punto y desaparecer.

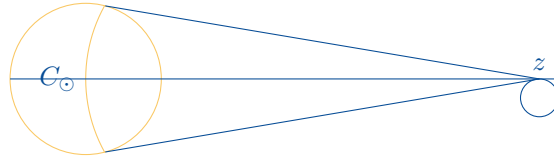


Figura 4.4: Zona visible del sol desde un punto  $z$  en el globo terráqueo durante el periodo del amanecer o del atardecer. Los puntos  $q_1$  y  $q_2$  son aquellos dónde se intersecta el borde de la frontera del casquete visible con el plano tangente del observador.

Parametrizar esta zona de corte es más sencillo usando la referencial  $(C_{\odot}; \vec{e}_{\tilde{N}}, \vec{e}_{\tilde{E}}, \vec{e}_z)$ . Piénsese en el globo terráqueo en la parametrización usual. Los paralelos son geoméricamente equivalentes a la intersección de un plano perpendicular al vector  $\vec{e}_{\tilde{N}}$ . Durante el amanecer y el atardecer el observador ve cómo el horizonte corta al sol. Unas coordenadas análogas a las usuales con el vector  $\vec{e}_z$  en lugar del vector  $\vec{e}_{\tilde{N}}$  permitirían parametrizar el corte como un paralelo (razón de la elección de una nueva base). Es decir que el corte por el horizonte está parametrizado por la circunferencia:

$$\left\{ C_{\odot} + R_{\odot} \cdot \left[ \cos(\tilde{\varphi}_{\odot}) \cdot \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) \vec{e}_{\tilde{N}} + \cos(\tilde{\varphi}_{\odot}) \cdot \text{sen}(\tilde{\lambda}_{\odot}) \cdot \vec{e}_{\tilde{E}} + \text{sen}(\tilde{\varphi}_{\odot}) \cdot \vec{e}_z \right] \mid \tilde{\varphi}_{\odot} = \tilde{\varphi}_{\odot 0}, \tilde{\lambda}_{\odot} \in [0, 2\pi] \right\}. \quad (4.26)$$

Para convertir la circunferencia que contiene el segmento  $\partial(\mathbb{F})_{2,2}$  en un paralelo basta usar una rotación, que en particular deja fijo al vector  $\vec{e}_z$ , o sea que es alrededor suyo,

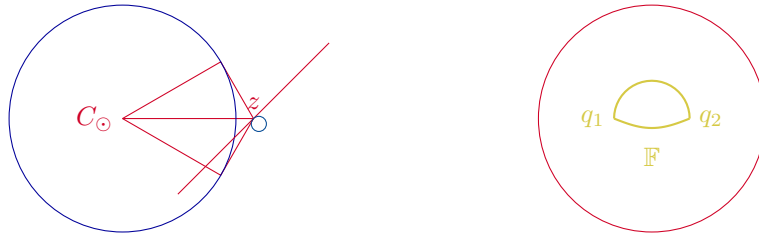


Figura 4.5: Zona visible del sol en los periodos de amanecer y atardecer. La cercanía entre el punto  $z$  y el sol ha sido exagerada, para evidenciar que jamás es visible una semiesfera, sino el corte de un casquete.

matricialmente

$$e^{\xi W_2} = \begin{bmatrix} \cos(\xi) & 0 & -\text{sen}(\xi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\xi) & 0 & \cos(\xi) \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

el lado izquierdo significa que se trata una rotación alrededor del vector  $\vec{e}_{\odot 2}$  un ángulo  $\xi$ . La rotación transforma un plano en otro, o equivalentemente mueve el vector ortogonal del primer plano en el vector ortogonal del segundo plano, por ende

$$\xi = \arccos(\langle \vec{e}_z, \vec{e}_{\odot 3} \rangle). \quad (4.28)$$

$\xi = \xi(t)$  es un ángulo que está bien definido en todo momento  $t$ , pero que es empleado únicamente para determinar la región  $(\partial\mathbb{F})_{2,2}$  durante los periodos de amanecer y atardecer. En los periodos de amanecer y atardecer hay tres momentos en que los vectores  $\vec{e}_z$  y  $\vec{e}_{\odot 3}$  son *colineales*: en el instante del amanecer (atardecer), en el instante en que termina el amanecer y es tangente el globo solar al plano tangente de la tierra en el pnto  $z$  (o atardecer) y cuando es visible exactamente la mitad del globo solar. Esto significa que el ángulo  $\xi$  vale cero en esos tres instantes.

El segmento de arco del sol que intersecta al horizonte y es visible es la intersección de la circunferencia anterior y el conjunto

$$\Phi_{\odot}^{-1} \left( [0, \phi_{\odot 0}] \times [0, 2\pi]; \begin{bmatrix} z(t) \\ t \end{bmatrix} \right).$$

El conjunto  $\mathbb{F}(z(t), t)$  es el subconjunto de este conjunto con los puntos que se encuentran por arriba del corte del horizonte en la esfera. Un inconveniente es que las bases  $(\vec{e}_{\tilde{N}}, \vec{e}_{\tilde{E}}, \vec{e}_z)$  y  $(\vec{e}_{\odot 1}, \vec{e}_{\odot 2}, \vec{e}_{\odot 3})$  no comparten vectores, salvo en tres momentos: en el instante del amanecer, en el instante del atardecer y cuando el horizonte corta exactamente la mitad del sol. Puesto que el vector  $\vec{e}_{\odot 1}$ , de la segunda base, no es paralelo a  $\vec{e}_z$ , ni perpendicular a él, en cambio los vectores  $\vec{e}_{\tilde{N}}$  y  $\vec{e}_{\tilde{E}}$  siempre son perpendiculares al vector  $\vec{e}_z$ . Así que parametrizar la esta región no es tarea fácil. No obstante parametrizar su frontera sí lo es.

$$\partial\mathbb{F}(t, z(t)) = (\partial\mathbb{F})_{2,1} \cup (\partial\mathbb{F})_{2,2}, \quad (4.29)$$

donde  $(\partial\mathbb{F})_{2,1}$  es el segmento de arco

$$(\partial\mathbb{F})_{2,1} = \{ \Phi_{\odot}^{-1}(\phi_{\odot}, \lambda_{\odot}) \mid \lambda_{\odot} \in [-\lambda_{\odot 0}, \lambda_{\odot 0}], \phi_{\odot} = \phi_{\odot 0} \text{ fija} \} \quad (4.30)$$

y

$$(\partial\mathbb{F})_{2,2} = \{ \tilde{\Phi}_{\odot}^{-1}(\tilde{\phi}_{\odot}, \tilde{\lambda}_{\odot}) \mid \tilde{\lambda}_{\odot} \in [-\tilde{\lambda}_{\odot 0}, \tilde{\lambda}_{\odot 0}], \tilde{\phi}_{\odot} = \tilde{\phi}_{\odot 0} \text{ fija} \}. \quad (4.31)$$

$(\partial\mathbb{F})_{2,1}$ ,  $(\partial\mathbb{F})_{2,2}$  son de tal suerte que su intersección consiste en dos puntos en el amanecer y atardecer, excepto en el comienzo y en el final (donde sólo es un punto):

$$(\partial\mathbb{F})_{2,1} \cap (\partial\mathbb{F})_{2,2} = \{q_1, q_2\}. \quad (4.32)$$

$$\lambda_{\odot 0}, \tilde{\lambda}_{\odot 0} \in [-\pi, \pi].$$

Para determinar los puntos  $q_1$  y  $q_2$  nos servimos de que son los únicos puntos  $q$  que cumplen las siguientes condiciones:

1.  $\left\| \overrightarrow{C_{\odot} q} \right\| = R_{\odot}. \quad (4.33)$

2.  $\langle \vec{e}_z, \vec{zq} \rangle = 0. \quad (4.34)$

3.  $\langle \vec{e}_{\odot 3}, \vec{zq} \rangle = 0. \quad (4.35)$

Estas condiciones determinan unívocamente a los puntos  $q_1$  y  $q_2$ , porque son los únicos puntos que las satisfacen (las dos condiciones de perpendicularidad obligan a  $\overrightarrow{zq_1}$  y  $\overrightarrow{zq_2}$  a estar en una recta que pasa por el origen, pero se le pide que además intersecten una esfera, una esfera sólo intersecta a una recta en dos puntos).

Determinando estos dos puntos se obtienen los valores de las  $\lambda_{\odot\nu}$  y  $\tilde{\lambda}_{\odot\nu}$ ,  $\nu \in \{1, 2\}$ , extrayendo la segunda componente después de aplicar  $\Phi_{\odot}$ .

## 4.2. Descripción de la región solar visible

Se llama *ecuación del amanecer (o del atardecer)* a una expresión que permita obtener el tiempo del amanecer (atardecer) en tiempo local aparente a partir de las coordenadas ecuatoriales y horizontales. En la literatura ([87], [56], [44], [28], entre otras) se encuentra una aproximación que se obtiene de hacer simplificaciones como suponer que la tierra recorre una órbita circular. Dado que esta ecuación es la que se maneja en la literatura, es tratada primero. Posteriormente se tratan aspectos geométricos para proponer una mejor aproximación.

### 4.2.1. Constricciones de los fotones que salen de un punto $q$ en la superficie solar para que sean visibles en un punto $p$ en el globo terráqueo

Para que la luz llegue de un punto  $q$  sobre la superficie solar hasta un punto  $p$  sobre el globo terráqueo deben cumplirse las siguientes condiciones:

1. 
$$\langle \overrightarrow{qp}, \overrightarrow{C_{\odot}q} \rangle \geq 0, \quad (4.36)$$

la condición anterior geoméricamente significa que el sol no obste el paso del fotón del punto  $q$  al punto  $p$ , o equivalentemente que el punto  $q$  esté en la cara visible del sol.

2. 
$$\langle \overrightarrow{qp}, \overrightarrow{C_Gp} \rangle \leq 0. \quad (4.37)$$

la condición anterior geoméricamente significa que la tierra no obste el paso del fotón del punto, o equivalentemente que el punto  $q$  se encuentre en la zona iluminada por el punto  $p$ .

Una deducción de estas condiciones se encuentra en la sección 4.3.3.1 *Distinción del primer punto en asomarse en el amanecer y el primer punto en ocultarse al atardecer*.

#### 4.2.1.1. Constricciones

Recordemos que

$$\mathbb{F}(p, t) = \left\{ q \in \mathbb{S}_{\odot} \mid \langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{C_{\odot}q} \rangle \geq 0, \langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{C_Gp} \rangle \leq 0 \right\}. \quad (4.38)$$

En 4.1.3.1 se dio la parametrización del casquete visible.

- Es de día para  $z$  si:

$$\mathbb{F}(z, t) \neq \emptyset. \quad (4.39)$$

- Es de noche para  $z$  si:

$$\mathbb{F}(z, t) = \emptyset. \quad (4.40)$$

Así que para  $z$  en el globo terráqueo y  $t$  dados (cuando es de día para  $z$ ) zona  $\mathbb{F}$  es difícil de describir, pero su frontera es más simple, véase *Sección 4.1.3.1 Parametrización de la zona visible del globo solar*.

En particular nos interesan los instantes exactos del amanecer y del atardecer. En esos instantes los puntos  $q_1$  y  $q_2$  coinciden ( $q_1 = q_2$ ), además si ignoramos la acción de la atmósfera, la tierra y el sol comparten (en sendos puntos  $z$  y  $q_1$ ) el *espacio tangente afín*, lo que geoméricamente significa que  $\overrightarrow{q_1 z}$  es ortogonal a  $\overrightarrow{C_\odot q_1}$  y a  $\overrightarrow{C_G z}$ .

Geoméricamente podríamos tomar en esos instantes  $q = C_\odot + R_\odot \cdot \vec{e}_z$ . Quisiéramos de estas relaciones recuperar una expresión para determinar  $t$  a partir de la posición geométrica de  $z$ . El problema es que hemos definido a  $q_1$  a partir de  $z$ , lo que forza las relaciones de ortogonalidad

1. 
$$\overrightarrow{q_1 z} \perp \overrightarrow{C_\odot q_1} \quad (4.41)$$

2. 
$$\overrightarrow{q_1 z} \perp \overrightarrow{C_G z}. \quad (4.42)$$

Y por tanto no podemos recuperar los instantes del amanecer y del atardecer. Cambiemos la segunda constricción. En el momento del comienzo (o final) del amanecer (o del atardecer) se tiene la relación

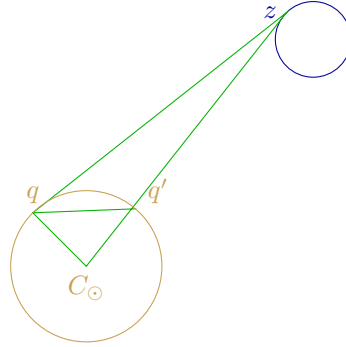


Figura 4.6: Representación del primer punto de la superficie solar visible en un punto  $z$  sobre la superficie terrestre.

$$\cos(\angle qzC_\odot) = \left\langle \vec{e}_{\odot 3}, \frac{\overrightarrow{qz}}{\|\overrightarrow{qz}\|} \right\rangle = \|\overrightarrow{qz}\|^{-1} \langle \vec{e}_{\odot 3}, \overrightarrow{qz} \rangle, \quad (4.43)$$

luego

$$\angle qzC_\odot = \arccos \left( \|\overrightarrow{qz}\|^{-1} \langle \vec{e}_{\odot 3}, \overrightarrow{qz} \rangle \right) \quad (4.44)$$

Luego

$$\begin{aligned} \langle \vec{e}_{\odot 3}, \overrightarrow{qz} \rangle &= \left\langle \frac{\overrightarrow{C_\odot z}}{\|\overrightarrow{C_\odot z}\|}, (R_G - R_\odot) \vec{e}_z + (C_G - C_\odot) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{R_G \cdot \vec{e}_z - S_1 \tilde{\epsilon} \cdot \vec{e}_1}{\|\overrightarrow{C_\odot z}\|}, (R_G - R_\odot) \vec{e}_z + (\tilde{\eta}(B) - S_1 \tilde{\epsilon} \cdot \vec{e}_1) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\overrightarrow{C_\odot z}\|} (R_G(R_G - R_\odot) + S_1^2 \tilde{\epsilon}^2 - S_1 \tilde{\epsilon} \cos(B) + R_G \langle \vec{e}_z, \tilde{\eta}(B) \rangle). \end{aligned}$$

Por otro lado por trigonometría

$$\begin{aligned} \langle \vec{e}_{\odot 3}, \vec{qz} \rangle &= \cos(\angle qz C_{\odot}) \\ &= \frac{R_{\odot}}{\|R_G \cdot \vec{e}_z + C_G - S_1 \tilde{\varepsilon} \cdot \vec{e}_1\|} \\ &= \frac{R_{\odot}}{\|\vec{C}_{\odot} z\|}, \end{aligned}$$

comparando concluimos que

$$R_{\odot} = R_G(R_G - R_{\odot}) + S_1^2 \tilde{\varepsilon}^2 - S_1 \tilde{\varepsilon} \cos(\beta) + R_G \langle \vec{e}_z, \tilde{\eta}(B) \rangle,$$

lo que nos permite definir una nueva constricción

$$G^3 \left( \begin{bmatrix} t \\ B \end{bmatrix} \right) =: R_G(R_G - R_{\odot}) + S_1^2 \tilde{\varepsilon}^2 - S_1 \tilde{\varepsilon} \cos(B) + R_G \langle \vec{e}_z, \tilde{\eta}(B) \rangle - R_{\odot} = 0 \quad (4.45)$$

Ahora definimos la función  $G = \begin{bmatrix} G^1 \\ G^3 \end{bmatrix}$ , es una función

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (4.46)$$

tal que en cada punto  $\begin{bmatrix} t \\ B \end{bmatrix}$  la diferencial  $dG \left( \begin{bmatrix} t \\ B \end{bmatrix} \right)$  es un isomorfismo lineal (del plano en el plano), es decir que es *invertible*.

## 4.3. El amanecer y atardecer en el modelo físico-geométrico

### 4.3.1. Definiciones

Cuando se supone un sol puntual el amanecer y atardecer pueden definirse como momentos en los que el Sol atraviesa el horizonte, pero cuando se supone esférico, es más difícil. Si se toma como referencia el centro del sol, se recuperan nociones similares, pagando el precio de que se habla de amanecer y atardecer en función de que sea visible exactamente la mitad del casquete delimitado por el ángulo  $\phi_{\odot 0}$  máximo de la zona visible. Se ignora el propio proceso de amanecer y atardecer.

En este trabajo se toma la siguiente convención: los *instantes (exactos) de amanecer y atardecer* son los momentos a partir de los cuales suceden sendas situaciones:

1. Es exactamente visible un único punto de la superficie solar, pero siguiendo al tiempo  $t$  el sol se vuelve visible. Se denota  $t_r^k$ .
2. Es exactamente visible un único punto de la superficie solar, pero siguiendo al tiempo  $t$  el sol se vuelve completamente invisible. El instante anterior a la *noche*. Se denota  $t_s^k$ .

En ambos casos  $k$  hace referencia al  $k$ -ésimo día, porque la hora exacta de amanecer y atardecer varía día con día.

Naturalmente se entienden como periodos de *día* y *noche* a los periodos comprendidos entre  $t_r^k$  y  $t_s^k$  y entre  $t_s^k$  y  $t_r^{k+1}$ .

El *periodo del amanecer* es el periodo comprendido entre el instante exacto del amanecer y el instante en que el sol es completamente visible, pero aún hay un punto sobre el horizonte. Mientras que el *periodo del atardecer* es el periodo comprendido entre el instante en que el sol es completamente visible, pero aún hay un punto sobre el horizonte y el instante exacto del atardecer.

### 4.3.2. Punto más cercano del sol a la superficie terrestre

Sea  $z$  un punto sobre el globo terráqueo. Nos preguntamos cuál es el punto sobre la superficie del sol más cercano. En esta sección se mostrará que si se supone que el sol es una esfera perfecta, entonces el punto más cercano es el punto donde la semirecta que conecta al centro del sol con el punto  $z$  corta la superficie solar.

Al punto  $z$  se le ha denotado así por el cénit. Llamemos  $S'$  al punto de la superficie del sol que está donde la intersección al segmento de recta que conecte al punto  $z$  con el centro del sol. Ahora tomemos algún punto  $S$  sobre la superficie del sol. A continuación se mostrará que este punto  $S$  tiene una distancia mayor o igual que la del punto  $S'$  a  $z$ .

Sea un punto  $S$  sobre la superficie solar. Trazamos el triángulo cuyos vértices son:  $S$ ,  $z$  y  $C_{\odot}$  (el centro del sol). Por construcción  $S$  está en la recta que conecta a  $z$  con  $C_{\odot}$ . Llamamos a los ángulos del siguiente modo:

1.  $\alpha$  es el ángulo formado por los segmentos de recta que conectan  $S$  con  $z$  y  $S'$  con  $z$ .
2.  $\beta$  es el ángulo formado por los segmentos de recta que conectan  $S$  con  $S'$  y  $z$  con  $S$ .
3.  $\gamma$  es el ángulo formado por los segmentos de recta que conectan  $S$  con  $C_{\odot}$  y  $S'$  con  $C_{\odot}$ .
4.  $\delta$  es el ángulo formado por los segmentos de recta que conectan  $S$  con  $S'$  y  $z$  con  $S'$ .



Figura 4.7: Triángulo que conecta los puntos  $z$ ,  $S$  y  $C_{\odot}$ .  $S'$  es un punto de un lado del triángulo.

1. El sol visto desde un punto de la superficie terrestre es pequeño. Así que puede estimarse el ángulo  $\alpha$  entre  $0$  y  $\frac{\pi}{2}$ .
2. Notemos que el triángulo con vértices  $S'$ ,  $S$  y  $C_{\odot}$  es un triángulo isósceles, debido a que la distancia del centro  $C_{\odot}$  a los puntos  $S'$  y  $S$  es la misma. Así que los otros dos ángulos son iguales entre sí e iguales al valor  $\frac{\pi-\gamma}{2}$ .
3. Por el comentario anterior, de la figura se observa que  $\alpha$ ,  $\beta + \frac{\pi-\gamma}{2}$  y  $\gamma$  son los tres ángulos del triángulo de vértices  $z$ ,  $C_{\odot}$  y  $S'$ . Por ser los tres ángulos de un mismo triángulo deben sumar  $\pi$  radianes. Restando:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{3}{2}\gamma, \quad (4.47)$$

notemos que  $\beta \leq \frac{\pi}{2}$ .

4. De la figura se observa que  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  son los tres ángulos del triángulo de vértices  $z$ ,  $S$  y  $S'$ . Como son los tres ángulos de un triángulo deben sumar  $\pi$  radianes. Restando:

$$\begin{aligned} \delta &= \pi - \alpha - \beta \\ &= \pi - \alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{3}{2}\gamma \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\gamma. \end{aligned}$$

luego  $\delta \geq \frac{\pi}{2} \geq \alpha, \beta$ .



normal.

El triángulo de vértices  $S$ ,  $S'$  y  $C_\odot$  es un triángulo rectángulo con dos lados de igual tamaño (los segmentos que conectan a  $S'$  y  $S$  miden el radio del sol), por lo que sus tres ángulos deben ser:  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  y  $\frac{\pi}{2}$ .

#### 4.3.3.1. Distinción del primer punto en asomarse en el amanecer y el primer punto en ocultarse al atardecer

En esta sección se dará la expresión que determina al primer punto en asomarse al amanecer.

Recordemos que el espacio tangente del globo terráqueo en un punto  $z$  (dado un tiempo  $t$ )  $\vec{\Pi}_z$  es un plano generado por la base ortonormal  $(\vec{e}_{\vec{N}}, \vec{e}_{\vec{E}})$ .

El espacio tangente  $\vec{\Pi}_G(z)$  es un espacio vectorial, el *espacio tangente afín*, consiste en el espacio tangente trasladado, para que pase por el punto  $z$ , es decir:

$$\Pi_G(z) = \vec{\Pi}_G(z) + z. \quad (4.49)$$

Como se dijo: para un punto  $z = z(t)$  sobre el globo terráqueo, el amanecer y atardecer son los momentos en los que ciertos puntos de la superficie del sol pasan de no ser visibles a serlo o viceversa. Antes del amanecer no se cumple el par de condiciones para ningún punto de la superficie solar, porque están fuera del rango de visibilidad del punto  $z(t)$ . Es visible para el punto  $z(t)$  algún punto  $q$  si es que se encuentre *por encima del horizonte* y no lo es si se encuentra *por debajo*. Estas nociones de estar por arriba o por debajo se pueden formalizar usando productos internos y proyectando al espacio tangente afín, sin embargo no es necesario.

**4.3.3.1.1. Deducción de las condiciones** En particular al comienzo y final del amanecer y atardecer hay un único punto  $q$  de la superficie terrestre que es visible desde el punto  $z(t)$ , eso geoméricamente significa que el horizonte es tangente a la esfera solar, o lo que es lo mismo: la esfera solar y el globo terráqueo comparten espacio tangente afín ( $\Pi_G(z) = \Pi_\odot(q)$ ), así que el vector  $\vec{qz}$  está en el plano tangente:  $\vec{qz} \in \vec{\Pi}_G(z)$ .

Recordemos que el vector  $\vec{C_\odot q}$  es tangente a cada vector del espacio tangente  $\vec{\Pi}_\odot(q) = \vec{\Pi}_G(z)$ , así que

$$\langle \vec{C_\odot q}, \vec{e}_{\vec{N}} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{C_\odot q}, \vec{e}_{\vec{E}} \rangle = 0.$$

Usaremos estas dos ecuaciones para caracterizar los tiempos  $t$  en los que comienzan y terminan el amanecer y el atardecer. Nótese que también el punto  $q$  es una incógnita. El punto  $q$  está en una esfera, esta constricción nos dice que para determinarlo necesitamos dos ecuaciones, como además se quiere determinar el tiempo  $t$  se requiere de una ecuación adicional. Como el vector  $\vec{qz}$  es un elemento del espacio tangente del globo terráqueo es tangente al vector  $\vec{C_G z}$ ; lo que nos deja el sistema de ecuaciones:

$$\langle \vec{C_\odot q}, \vec{e}_{\vec{N}} \rangle = 0 \quad (4.50)$$

$$\langle \vec{C_\odot q}, \vec{e}_{\vec{E}} \rangle = 0 \quad (4.51)$$

$$\langle \vec{C_G z}, \vec{qz} \rangle = 0 \quad (4.52)$$

$$\|\vec{C_\odot q}\|^2 = R_\odot^2. \quad (4.53)$$

(la última condición es la constricción a la que está sujeto el punto  $q$ , como elemento de la esfera solar).

**4.3.3.1.2. Suficiencia de las condiciones** A continuación mostraremos que las ecuaciones anteriores determinan al punto  $q$  y al tiempo  $t$  de los comienzos de amanecer y atardecer.

1. Si se cumplen las ecuaciones (4.50) y (4.51) entonces los vectores  $\vec{e}_{\vec{N}}$  y  $\vec{e}_{\vec{E}}$  son ortogonales al vector  $\overrightarrow{C_{\odot}q}$ , pero como los vectores ortogonales a  $\overrightarrow{C_{\odot}q}$  forman el espacio tangente  $\overrightarrow{\Pi}_{\odot}(q)$ , entonces  $\vec{e}_{\vec{N}}, \vec{e}_{\vec{E}} \in \overrightarrow{\Pi}_{\odot}(q)$ . Como  $\overrightarrow{\Pi}_{\odot}(q)$  es un espacio vectorial de dimensión 2 y los vectores  $\vec{e}_{\vec{N}}$  y  $\vec{e}_{\vec{E}}$  son linealmente independientes:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Pi}_{\odot}(q) &= \mathcal{L} \{ \vec{e}_{\vec{N}}, \vec{e}_{\vec{E}} \} \\ &= \overrightarrow{\Pi}_G(z),\end{aligned}$$

es decir que

$$\overrightarrow{\Pi}_{\odot}(q) = \overrightarrow{\Pi}_G(z).$$

2. Por (4.52)  $\vec{qz}$  es ortogonal a  $\overrightarrow{C_Gz}$ , luego  $\vec{qz} \in \overrightarrow{\Pi}_G(z)$ . Por otro lado

$$q = z + \vec{qz},$$

como  $q$  es la suma de  $z$  y un vector en el espacio tangente  $\overrightarrow{\Pi}_G(z)$ ,  $q$  está en el espacio tangente afín  $\Pi_G(z)$ , es decir:  $q \in \overrightarrow{\Pi}_G(z)$ .

3. Como los espacios tangentes son iguales los espacios tangentes afines son paralelos y como comparten un punto son iguales:  $\Pi_{\odot}(q) = \Pi_G(z)$ .

Nótese que las ecuaciones (4.50) y (4.51) garantizan que los espacios tangentes sean iguales, pero no que los espacios tangentes afines lo sean. Esto es: las condiciones (4.50) y (4.51) garantizan que los espacios tangentes afines sean paralelos. Para cada momento del día existen dos puntos antipodales en la esfera solar tales que sus espacios afines son paralelos a  $\Pi_G(z)$ , razón por la que es necesaria la última condición (4.52).

## 4.4. Ecuaciones del tiempo

El ángulo  $\varphi$  se mide desde el solsticio de invierno

### 4.4.1. Cuantificación de la radiación emitida por el Sol

Por simplicidad supongamos que el globo solar tiene una superficie con temperatura uniforme y constante. Supongamos por simplicidad también que es un cuerpo negro. Entonces la ley de Stefan-Boltzmann nos dice cuánta radiación emite, está dada por la fórmula (véase [70])

$$Q_{\odot} = \frac{\sigma(T_{\odot})^4 R_{\odot}^2}{\pi} \int_{\mathbb{F}} \text{sen}(\phi_{\odot}) \cos(\phi_{\odot}) d\phi_{\odot} \wedge d\lambda_{\odot} \quad (4.54)$$

en A.2.3.1 *Radiación emitida entre el amanecer y el atardecer* se hace cuidadosamente el cálculo de la integral en cada caso, a continuación los valores que toma la integral:

1. Después de que ha amanecido completamente, pero antes de que comience a anoecer

$$Q_{\odot} = R_{\odot}^2 \sigma (T_{\odot})^4 \cdot (1 - \text{sen}^2(\phi_{\odot 0})), \quad (4.55)$$

2. Cuando el punto  $C_{\odot} + R_{\odot} \cdot \vec{e}_{\odot 3}$  está en el plano tangente  $\Pi_G(z)$  se ve exactamente la mitad del casquete del caso 1:

$$Q_{\odot} = \frac{R_{\odot}^2 \sigma (T_{\odot})^4}{2} \cdot (1 - \text{sen}^2(\phi_{\odot 0})), \quad (4.56)$$

3. Durante el comienzo y final del amanecer y atardecer, cerca del comienzo del amanecer o cerca del final del atardecer
4. Durante el comienzo y final del amanecer y atardecer, cerca del final del amanecer y del comienzo del atardecer



## Capítulo 5

# Conclusiones

El capítulo 1 expone conceptos importantes en Astronomía que son fundamentales para la comprensión geométrica de los movimientos involucrados, así como para entender la medición del tiempo a escala diaria y anual. Dentro de este capítulo se encuentra una deducción elemental (se usa únicamente geometría analítica del espacio tridimensional) de la versión más extendida de las ecuaciones del amanecer, en la que se supone un sol unipuntual y un refinamiento en el que se supone un sol esférico de un grosor dado (que para el observador es pequeño) y se toma en cuenta un pequeño ángulo asociado a la refracción. Esto es de destacarse, porque el autor no ha encontrado en la literatura una descripción detallada. La referencia más antigua encontrada durante la elaboración de este trabajo en la que se mencionan las ecuaciones del amanecer y atardecer es [43], pero en ella no se hace una deducción propiamente, sino que se referencia a la Trigonometría esférica sin dar más detalles.

La medición del tiempo no es algo que suele aclararse en la mayoría de las referencias consultadas, sin embargo tiene un rol capital, porque por la geometría de la esfera (por simplicidad se usa la idealización de una esfera llamada *globo terráqueo*) los instantes de amanecer y de atardecer equivalen a que el sol atraviese el *horizonte*, lo que es más fácilmente determinable a partir de mediciones angulares. Esto es, que es más sencillo determinar los instantes de amanecer y de atardecer a partir de mediciones angulares. Mediciones que sí están relacionadas con el tiempo *estándar* (UTC), a través de la *ecuación del centro de Kepler* y de la *ecuación del tiempo*, véase [58], [44], [56] y [87]. Por esta razón se juzgó necesario incluir unas secciones para estas *ecuación del centro de Kepler*, *ecuación del tiempo*, así como para aclarar cómo se mide el tiempo estándar UTC y la conversión de calendarios gregoriano y juliano y el concepto de día juliano.

Del catálogo de modelos de evolución de la temperatura presentado en el capítulo 2, se puede concluir que la mayoría de los modelos no son admisibles, de hecho muchos de ellos son de porte más bien estadístico. En tiempos recientes se han aprovechado técnicas estadísticas nuevas para modelar la temperatura, inclusive entrenar redes neuronales para que la predigan, véase [81]. Un problema con este enfoque es que requiere muchas mediciones de la temperatura por cada día del año por varios años. Sin embargo también es de destacarse que el uso de técnicas estadísticas para la estimación de la evolución diaria de la temperatura no es algo nuevo, véase [36].

Los modelos de evolución diaria de la temperatura ajustan funciones para que alcancen ciertos valores máximos y mínimos en determinados instantes, instantes que de una u otra forma dependen de los tiempos de amanecer y atardecer para los modelos admisibles, así que estos modelos se caracterizan por su uso de los instantes del amanecer y atardecer. Razón por la cual se decidió en el presente trabajo incluir la deducción de las ecuaciones clásicas del amanecer y atardecer, en las que se supone un sol unipuntual, y la mejora (también clásica) en la que se añade un ángulo  $a_0$  asociado al grosor del sol (visto desde la tierra) y un pequeño ángulo debido a la refracción (capítulo 1). También se ha realizado un refinamiento de las ecuaciones del amanecer y el atardecer al añadir la variabilidad de la distancia existente

entre el sol y la tierra (capítulo 3). Aquello que determina las ecuaciones del amanecer y atardecer es la suma de movimientos de rotación y de traslación terrestres (una descripción dentro del modelo físico-geométrico empleado en este trabajo se encuentra en el capítulo 3).

Para su adecuada comprensión las ecuaciones del tiempo requieren de entender la *mecánica* del movimiento de traslación de la tierra alrededor del sol (la versión mejorada de las ecuaciones del amanecer también requiere del entendimiento de esta mecánica).

Aunado a lo anterior, está la siguiente observación realizada durante la elaboración del catálogo de modelos de evolución diaria de la temperatura presentado en el capítulo 2: los modelos de evolución diaria de la temperatura presentan dificultades para ajustar la temperatura en los periodos de amanecer y atardecer. De la lectura y comparación de los artículos (y libros) en los que se presentan los distintos modelos y una lectura de la sección dedicada a la radiación solar de un libro especializado de física: [70], se puede concluir que el problema radica en la simplificación excesiva que se hace al modelar la temperatura en los instantes de amanecer y atardecer. Se asume para cada punto en la noche no hay radiación proveniente del sol, pero que en el instante del amanecer hay un cambio cualitativo (un *salto*): inmediatamente el sol le irradia a la tierra con la misma intensidad que en el mediodía solar (a las 12 horas en tiempo local aparente). Esto abre para trabajos futuros la posibilidad para una modelación más precisa de la evolución diaria de la temperatura.

Es pertinente señalar que todo modelo físico-matemático tiene un rango de aplicación o grado de aproximación a la realidad limitado, dependiente de las simplificaciones asumidas en el proceso de modelización. En el caso que nos ocupa únicamente se está teniendo en cuenta la geometría y mecánica del sistema tierra-sol, que es el factor principal que influye en la temperatura de la superficie terrestre. Se están ignorando otros factores que también influyen, como la geometría de la superficie terrestre (geoide), véase [2] y [33], la termodinámica que rige la evolución de la temperatura en un medio, la dinámica en la atmósfera, como por ejemplo factores climatológicos como el viento, o la refracción de la luz.

En resumen los avances más significativos que presenta este trabajo de tesis son los siguientes:

1. Compendio de conceptos y herramientas para la ubicación espacial dentro del planeta tierra y el sistema solar, y de medición del tiempo.
2. Repaso de algoritmos para el cálculo del día y la fecha juliana, y el cambio entre calendarios.
3. Deducción elemental y refinamiento de las ecuaciones del amanecer y atardecer clásicas.
4. Realización de un catálogo exhaustivo de modelos de evolución diaria de la temperatura en la superficie terrestre, y clasificación de acuerdo a un criterio de admisibilidad de índole práctica.
5. Estudio de las Leyes de Kepler y su relación con las leyes de Newton, incluyendo la Ley de gravitación universal.
6. Introducción de una parametrización de la eclíptica y del movimiento del centro de la tierra al recorrerla, que involucra una ecuación diferencial más sencilla que para la clásica.
7. Desarrollo de un modelo físico-geométrico que describe en términos elementales (Geometría analítica en el espacio euclidiano tridimensional), la geometría y mecánica de la evolución del sistema tierra-sol.
8. Introducción de las condiciones de visibilidad, que son las restricciones geométricas (en salida y llegada) que se requieren para que un fotón pueda llegar de un punto del globo solar al globo terráqueo, y del concepto de área solar visible desde un punto de la tierra.

9. Introducción de los conceptos de periodos del amanecer y atardecer y distinción de los instantes de amanecer y atardecer.
10. Cuantificación en cada instante  $t$  de la radiación emitida desde la región solar visible  $\mathbb{F}$ , visible desde un punto  $z$ .
11. Obtención de un refinamiento de las ecuaciones del amanecer y atardecer, a partir del modelo físico-geométrico y las condiciones de visibilidad.



# Apéndice A

## Apéndice

Se ha hecho una distinción entre los valores que toman las funciones de las funciones, sin embargo esta distinción solo se mantendrá en *3.3.2.2 Versión diferencial en coordenadas elípticas de la segunda ley de Kepler* para evitar confusiones, por simplicidad se identifican  $\gamma$  con  $\Gamma$ ,  $\beta$  con  $B$  y  $\rho$  con  $P$  en lo que sigue del capítulo.

### A.1. Leyes de Kepler

En esta sección sea  $m_G$  la masa de la tierra;  $m_\odot$ , la del sol; y  $G$  la constante de gravitación universal.

Es conveniente visualizar la segunda ley de Kepler en términos de las coordenadas polares. Hasta ahora han sido expresados los vectores posición de los puntos sobre el firmamento celeste en términos de la referencial  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , sin embargo para expresar la segunda ley de Kepler es más conveniente la referencial  $(C_\odot; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ :

$$\begin{aligned} X &= O + (x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2) \\ &= C_\odot + (\overrightarrow{C_\odot O}) + (x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2) \\ &= C_\odot + ((S_1 \tilde{\epsilon} + x^1) \cdot \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2). \end{aligned}$$

Es decir que en la primera coordenada toma el valor  $(S_1 \tilde{\epsilon} + x^1)$  y en la segunda  $x^2$ .

A continuación se derivan las leyes de Kepler de las leyes de Newton (incluida la ley de gravitación universal). En [66] se aclara que desde cierta perspectiva pueden pensarse como equivalentes las leyes de Kepler y la ley de Newton de la gravitación universal.

#### A.1.1. Primera ley de Kepler

Para la tierra y el sol la primera ley de Kepler dice que la eclíptica (la curva descrita por la tierra) es una elipse.

Por la primera ley de Kepler la fuerza es igual a la masa por la aceleración (segunda derivada de la posición), mientras que esta fuerza está dada por la ley de gravitación universal de Newton como  $-\frac{G \cdot m_\odot \cdot m_G}{\rho^2}$ , esto es:

$$m_G \frac{d^2 X}{dt^2} = -\frac{G \cdot m_\odot \cdot m_G}{\rho^2}.$$

Esto nos da un sistema de 3 ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^1}{dt^2} &= -\frac{Gm_{\odot}x^1}{\rho^3} \\ &= -\frac{Gm_{\odot}x^1}{\left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{d^2x^2}{dt^2} &= -\frac{Gm_{\odot}x^2}{\rho^3} \\ &= -\frac{Gm_{\odot}x^2}{\left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{d^2x^3}{dt^2} &= -\frac{Gm_{\odot}x^3}{\rho^3} \\ &= -\frac{Gm_{\odot}x^3}{\left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Usando álgebra se obtiene la ecuación de un plano, véase [66]. Esto significa que la curva descrita está en plano. Lo que justifica la elección de coordenadas  $(x^1, x^2)$ , esto es:  $x^3 = 0$ .

También puede mostrarse (véase [66]) que la ecuación diferencial anterior se corresponde con la ecuación diferencial de una elipse, que implícitamente está dada por

$$\left(\frac{x^1}{S_1}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{S_2}\right)^2 = 1$$

Como se dijo más arriba el radio  $\rho$  puede describirse en términos del ángulo:

$$\rho = \frac{S_2^2}{S_1 \cdot (1 - \tilde{\varepsilon} \cdot \cos(\gamma))},$$

recuérdese que en función del parámetro  $\beta$  queda descrito como

$$\rho = S_1^2 \cos(\beta) + S_2^2 \sin^2(\beta).$$

### A.1.2. Segunda ley de Kepler

La segunda ley de Kepler (para la tierra) reza: el centro de la tierra (el segmento de recta que conecta el centro de la tierra con el centro del sol) barre áreas iguales en tiempos iguales. Explícitamente para  $\Delta = \Delta(t_1, t_2)$  la región comprendida por  $C_{\odot}$ , y los puntos sobre la eclíptica en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ :

$$\int_{\Delta(t_1, t_2)} dx^1 \wedge dx^2 = \frac{S_1 \cdot S_2 \cdot \pi}{T_{\odot}} \cdot (t_2 - t_1). \quad (\text{A.1})$$

La ecuación (3.60) puede verse como consecuencia de la conservación del momento angular. La conservación del momento angular a su vez se puede ver como consecuencia de las leyes de Newton, o equivalentemente de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

En 3.3.1 Ecuación diferencial para la anomalía verdadera se deduce la versión diferencial de la segunda ley de Kepler a partir de la versión integral anterior.

Usando coordenadas elípticas (en términos del parámetro  $\beta$ ) la expresión diferencial es más sencilla (véase 3.3.2.2 Versión diferencial en coordenadas elípticas de la segunda ley de Kepler):

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{2\pi}{T_{\odot}(1 - \tilde{\varepsilon} \cos(\beta))}. \quad (\text{A.2})$$

### A.1.3. Tercera ley de Kepler

La tercera ley de Kepler reza: el cuadrado del periodo orbital ( $T_{\odot}$ ) es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita  $S_1$ . Puede verse como corolario de los resultados antes obtenidos en la primera y segunda ley de Kepler, véase [66] o [89].

A continuación obtendremos una derivación a partir de las expresiones obtenidas: Primero recordemos que la segunda ley de Kepler (versión diferencial para el ángulo  $\beta$ ) toma el aspecto

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{2\pi}{T_{\odot}(1 - \tilde{\varepsilon} \cos(\beta(t)))}. \quad (\text{A.3})$$

Se muestra a continuación que está expresión es equivalente a una expresión con otro coeficiente, comparando coeficientes se concluye la tercera ley de Kepler.

Sabemos por la primera ley de Kepler que el movimiento del centro de la tierra describe una elipse y que está dado paraméricamente por

$$\eta(\beta) = S_1 \cos(\beta(t)) + S_2 \text{sen}(\beta(t)) = C_G,$$

derivando

$$\frac{dC_G}{dt} = -S_1 \frac{d\beta}{dt} \text{sen}(\beta(t)) \vec{e}_1 + S_2 \frac{d\beta}{dt} \cos(\beta(t)) \vec{e}_2, \quad (\text{A.4})$$

derivando por segunda vez

$$\frac{d^2 C_G}{dt^2} = -S_1 \cdot \left[ \frac{d^2 \beta}{dt^2} \text{sen}(\beta(t)) + \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \cos(\beta(t)) \right] \vec{e}_1 + S_2 \cdot \left[ \frac{d^2 \beta}{dt^2} \cos(\beta(t)) - \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \text{sen}(\beta(t)) \right] \vec{e}_2. \quad (\text{A.5})$$

Por la primera ley de Kepler el movimiento de  $C_G(t)$  se da en el plano eclíptico  $\Pi_o = O + \mathcal{L}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ . Por la ley de gravitación universal de Newton (y la segunda ley de Newton), dividiendo entre la masa  $m_G$ :

$$Gm_{\odot} \cdot \frac{\overrightarrow{C_G(t)C_{\odot}}}{\left\| \overrightarrow{C_G(t)C_{\odot}} \right\|^3} = \frac{d^2 C_G}{dt^2}(t), \quad (\text{A.6})$$

lo que nos deja con la siguiente ecuación vectorial

$$\begin{aligned} & \frac{Gm_{\odot}}{S_1^3} \cdot \frac{\text{sen}^2(\beta(t)) - \cos(\beta(t)) \cdot (1 - \tilde{\varepsilon} \cos(\beta(t)))}{(1 - \tilde{\varepsilon} \cos(\beta(t)))^3} \\ &= -S_1 \cdot \left[ \frac{d^2 \beta}{dt^2} \text{sen}(\beta(t)) + \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \cos(\beta(t)) \right] \vec{e}_1 + S_2 \cdot \left[ \frac{d^2 \beta}{dt^2} \cos(\beta(t)) - \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \text{sen}(\beta(t)) \right] \vec{e}_2, \end{aligned}$$

agrupando los términos del numerados de la segunda fracción y reduciendo en uno el índice del exponente del denominador

$$\begin{aligned} & -\frac{Gm_{\odot}}{S_1^3} \cdot \frac{1}{(1 - \tilde{\varepsilon} \cos(\beta))^2} \\ &= -S_1 \cdot \left[ \frac{d^2 \beta}{dt^2} \text{sen}(\beta(t)) + \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \cos(\beta(t)) \right] \vec{e}_1 + S_2 \cdot \left[ \frac{d^2 \beta}{dt^2} \cos(\beta(t)) - \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \text{sen}(\beta(t)) \right] \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Podemos interpretar esta ecuación vectorial como un sistema de dos ecuaciones. De este sistema de ecuaciones podemos despejar  $\frac{d^2 \beta}{dt^2}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \beta}{dt^2} &= \frac{1}{\text{sen}(\beta(t))} \cdot \left\{ -\frac{Gm_{\odot}}{S_1^3} \cdot \frac{\tilde{\varepsilon} \cos(\beta(t))}{(1 - \tilde{\varepsilon} \cos(\beta))^3} - \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \cdot \cos(\beta(t)) \right\} \\ &= \frac{1}{\cos(\beta(t))} \cdot \left\{ -\frac{Gm_{\odot}}{S_1^3} \cdot \frac{\text{sen}(\beta(t))}{(1 - \text{sen}(\beta(t)))^3} + \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \cdot \text{sen}(\beta(t)) \right\}, \end{aligned}$$

despejando

$$\frac{d\beta}{dt} = \sqrt{\frac{Gm_{\odot}}{S_1^3}} \cdot \frac{1}{1 - \tilde{\varepsilon} \cos(\beta(t))}. \quad (\text{A.7})$$

Finalmente comparando (A.3) con (A.7) concluimos que

$$T_{\odot}^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_{\odot}} \cdot S_1^3, \quad (\text{A.8})$$

que es la tercera ley de Kepler.

## A.2. La esfera como variedad diferenciable

La esfera  $\mathbb{S}^2$  (de radio 1 con centro en el origen) es una superficie, subconjunto del espacio  $\mathbb{R}^3$ . La esfera tiene estructura de *variedad diferenciable*, como subconjunto del espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  es posible inducirle un producto interno.

Sea  $Q$  un punto en la esfera. Los vectores tangentes a la esfera en ese punto forman un espacio vectorial de dimensión 2, un plano  $\mathbb{S}_Q^3$ , véase [59]. Como  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la estructura de producto interno del espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  le induce un producto interno  $g$ .

Una parametrización para la esfera  $\mathbb{S}^2$  es la siguiente<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} & \Phi^{-1} \\ (\phi, \lambda) & \mapsto \cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) \cdot \vec{e}_1 + \cos(\phi) \cdot \sin(\lambda) \cdot \vec{e}_2 + \sin(\phi) \cdot \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

para una base ortogonal  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Al par  $(A', (\phi, \lambda) = \Phi)$  se le llama *carta*, donde  $A'$  es la esfera menos un semiarco conectando  $\vec{e}_3$  con  $-\vec{e}_3$  (es necesario quitarle este semiarco para que  $\Phi^{-1}$  sea localmente inversible). Puede invertirse  $\Phi^{-1}$  de modo que

$$A = \Phi(A') = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi). \quad (\text{A.10})$$

Esta carta parametriza toda la esfera salvo en un semiarco que conecta los polos norte y sur  $\vec{e}_3$  y  $-\vec{e}_3$ . La función anterior puede adaptarse para que abarque abiertos alrededor de los polos, véase [59] y [60]. Para lo siguiente no es necesario cubrir los polos, porque sólo son dos puntos.

Diferenciando es posible obtener dos vectores tangentes:

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(Q) = -\sin(\phi) \cdot \cos(\lambda) \cdot \vec{e}_1 - \sin(\phi) \cdot \sin(\lambda) \cdot \vec{e}_2 + \cos(\phi) \cdot \vec{e}_3 \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(Q) = -\cos(\phi) \cdot \sin(\lambda) \cdot \vec{e}_1 + \cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) \cdot \vec{e}_2 \quad (\text{A.12})$$

(la notación es tomada prestada de geometría diferencial).

Los vectores anteriores forman una base para el espacio tangente  $\mathbb{S}_Q^2$ .

### A.2.1. La esfera como variedad riemanniana

Una variedad riemanniana es una variedad diferenciable equipada con un producto interno. El producto interno del espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  induce un producto interno  $g$  sobre el espacio tangente  $\mathbb{S}_Q^2$ :

<sup>1</sup>Esta notación no está relacionada con la empleada a lo largo del escrito, es meramente ilustrativa.

$$g(\vec{v}(Q), \vec{w}(Q)) = \left\langle v^1 \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}(Q) + v^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda}(Q), w^1 \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}(Q) + w^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda}(Q) \right\rangle \quad (\text{A.13})$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} -\text{sen}(\phi) \cdot \cos(\lambda) & \cos(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda) \\ -\text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda) & \cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) \\ \cos(\phi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}, \right. \quad (\text{A.14})$$

$$\left. \begin{bmatrix} -\text{sen}(\phi) \cdot \cos(\lambda) & -\cos(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda) \\ -\text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda) & \cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) \\ \cos(\phi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (\text{A.15})$$

$$= \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\text{sen}(\phi) \cdot \cos(\lambda) & -\text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda) & \cos(\phi) \\ \cos(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda) & \cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -\text{sen}(\phi) \cdot \cos(\lambda) & -\cos(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda) \\ -\text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda) & \cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) \\ \cos(\phi) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

es decir que  $g$  se puede representar con la matriz

$$[g] = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\phi) \cdot \cos(\lambda) & -\text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda) & \cos(\phi) \\ -\cos(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda) & \cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\text{sen}(\phi) \cdot \cos(\lambda) & -\cos(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda) \\ -\text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda) & \cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) \\ \cos(\phi) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$= \begin{bmatrix} (\text{sen}(\phi) \cdot \cos(\lambda))^2 + (\text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda))^2 + (\cos(\phi))^2 & 0 \\ 0 & (\cos(\phi) \cdot \text{sen}(\lambda))^2 + (\cos(\phi) \cdot \cos(\lambda))^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\cos(\phi))^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

El par  $(\mathbb{S}^2, g)$  es una variedad riemanniana.

### A.2.1.1. Coordenadas geográficas

Así como se definieron las coordenadas esféricas sobre  $\mathbb{S}^2$ , se definen sobre el globo terráqueo, tomando la referencial  $(C_G; \vec{e}_G, \vec{e}_E, \vec{e}_N)$ , siendo  $C_G$  la posición del centro de la tierra y  $(\vec{e}_G, \vec{e}_E, \vec{e}_N)$  la base ortonormal orientada positivamente con direcciones *Greenwich*, *este* y *norte*, véase la sección 1.2.2.1 *Coordenadas geográficas: latitud y longitud*,

$$\Phi^{-1}(\phi, \lambda) = C_G + \cos(\phi) \cos(\lambda) \vec{e}_G + \cos(\phi) \text{sen}(\lambda) \vec{e}_E + \text{sen}(\phi) \vec{e}_N \quad (\text{A.21})$$

En este trabajo se denotan igual que las coordenadas anteriores sobre la esfera, porque las coordenadas anteriores solo se usan en esta sección.

### A.2.1.2. Coordenadas horizontales

Sea  $z \in \mathbb{S}_G \setminus \{C_G + \vec{e}_N, C_G - \vec{e}_N\}$ , entonces a los puntos sobre la intersección del globo terráqueo  $\mathbb{S}_G$  con el plano tangente del globo en el punto  $z$  más cercanos a sendos  $\vec{e}_E$  y  $\vec{e}_N$  se les denota  $\vec{e}_{\hat{E}}$  y  $\vec{e}_{\hat{N}}$ .

Unas coordenadas igualmente importantes son las *horizontales* se obtienen después de realizar una rotación  $R$ , rotación que está caracterizada por mover una base ortonormal en otra base ortonormal

$$(\vec{e}_G, \vec{e}_E, \vec{e}_N) \xrightarrow{R} (\vec{e}_{\hat{N}}, \vec{e}_{\hat{E}}, \vec{e}_z), \quad (\text{A.22})$$

(aquí los paréntesis significan que manda una base en la otra respetando el orden). Cuando  $\vec{e}_E$  y  $\vec{e}_N$  están en el espacio tangente no se realiza ningún cambio.

$(a, \theta) = (\phi, \lambda) \circ R$  son las *coordenadas horizontales* de *altitud* y *ángulo cénit*, se define el *ángulo azimutal*  $Az$  como el ángulo complementario del ángulo cénit  $\theta$ .

## A.2.2. Forma volumétrica sobre la esfera

A una variedad riemanniana se le asocia una *forma volumétrica canónica*, que es un objeto matemático que se usa para integrar sobre la esfera.

Primero se calcula el determinante

$$\det(g) = (\cos(\phi))^2, \quad (\text{A.23})$$

después se le extrae raíz cuadrada

$$\sqrt{\det(g)} = \cos(\phi) \quad (\text{A.24})$$

(el coseno evaluado en  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  no toma valores negativos).

La forma volumétrica<sup>2</sup> es

$$\sqrt{\det(g)} d\phi \wedge d\lambda = \cos(\phi) d\phi \wedge d\lambda.$$

La integral de una funcional  $f$  sobre la esfera se define como

$$\int_{\mathbb{S}^2} f(Q) \cdot \cos(\phi) d\phi \wedge d\lambda =: \int_A f \circ \Phi^{-1}(\phi, \lambda) \cdot \cos(\phi) d\phi \wedge d\lambda \quad (\text{A.25})$$

el lado derecho se interpreta como una integral en  $\mathbb{R}^2$  en el sentido usual.

Ahora explicaremos porque esta carta es suficiente para integrar: primero tenemos que aclarar que no queremos integrar sobre toda la esfera, sino sobre la semiesfera delimitada por el ecuador (la intersección de la esfera con el plano generado por  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$ ). La carta  $(A', (\phi, \lambda))$  se puede extender al par  $(\mathbb{S}^2 \setminus \{\vec{e}_3, -\vec{e}_3\}, \frac{\pi}{2}), (\phi, \lambda), (\phi, \lambda)[A] = \tilde{A} =: (-\frac{\pi}{2} \times (0, 2\pi))$ , desafortunadamente cuando consideramos a  $(\phi, \lambda)$  sobre todo  $A'' =: \mathbb{S}^2 \setminus \{\vec{e}_3, -\vec{e}_3\}$  no es continua<sup>3</sup>, sin embargo su inversa  $\Phi^{-1} = (\phi, \lambda)^{-1}$  es una biyección (en particular es inyectiva) y sí es continua. Esto nos permite trasladar la forma de área  $\cos(\phi)d\phi \wedge d\lambda$  a una forma de área  $\cos(x^1) dx^1 \wedge dx^2$  que sí está definida en todo el rectángulo  $\tilde{A}$ . Como  $\Phi^{-1}$  es una función continua e inyectiva, induce una forma sobre  $A'' = \mathbb{S}^2 \setminus \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  que por construcción es una extensión de la forma original  $\cos(\phi) d\phi \wedge d\lambda$  ¿Qué hemos ganado con extenderla de este modo? Integrar sobre cualquier  $B \subset A''$  respecto a la forma  $\cos(\phi) d\phi \wedge d\lambda$ , vista como *forma inducida por  $\Phi^{-1}$  desde  $A''$* , consiste en integrar sobre  $\Phi[B]$  respecto a la forma  $\cos(x^1) dx^1 \wedge dx^2$  sobre el rectángulo  $\tilde{A}$ . Este rectángulo es una *variedad diferenciable con borde*, que puede verse como subvariedad de algún conjunto más fácil de trabajar como por ejemplo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [0, 2\pi]$  (que es también una variedad diferenciable con borde) o todo  $\mathbb{R}^2$ , así que pueden aplicarse todas las técnicas de integración. Notemos que si  $B$  intersecta la el arco que conecta a  $\vec{e}_3$  con  $-\vec{e}_3$  (y los puntos interseccionados son puntos *interiores* de  $B$ ), entonces  $\Phi[B]$  intersecta el *borde*  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \{0\}$ , pero también  $\Phi[B]$  (cerradura como subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ ) intersecta al segmento de recta  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \{2\pi\}$ , donde la forma  $\cos(x^1) dx^1 \wedge dx^2$  toma los mismos valores que sobre el primer segmento de recta, como ambos segmentos tienen orientaciones distintas la integral sobre ellos se cancela. O sea que al integrar sobre los subconjuntos  $B$  de  $\tilde{A}$  no hay que preocuparse por lo sucedido sobre el arco que conecta los polos  $\vec{e}_3$  y  $-\vec{e}_3$ . Como la idea es aplicar Stokes-Cartan, sólo hay que preocuparse por el comportamiento de la forma de área en  $\partial B$ . Por cierto para un subconjunto  $B$ , su borde (visto como subconjunto de  $\tilde{A}$ , i.e. nunca se considera a ninguno de los polos, ni  $\vec{e}_3$  ni  $-\vec{e}_3$ ) es trasladado por  $\Phi$  al *borde* de  $\Phi[B]$  (visto como subconjunto de  $A''$  y no como subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ ).

Más adelante se habla de la noción de *punto frontera regular* de regiones  $\mathbb{F}_n$ , todo lo dicho debe visualizarse en la región  $\Phi[\mathbb{F}]$  vista como suconjunto de  $A''$  (o si se prefiere de  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [0, 2\pi]$ , no hay necesidad de usar a todo  $\mathbb{R}^2$ ). Para obtener la integral sobre  $\mathbb{F}$  no se usará directamente Stokes-Cartan, sino que se ve como límite de las integrales sobre los

<sup>2</sup>Dado que la esfera es una superficie (es decir que tiene dimensión 2), no se le suele decir *de volumen*, en [59], [60] se le llama *areolar* o *de área*.

<sup>3</sup> $(\phi, \lambda)$  es una biyección entre  $A''$  y  $\tilde{A}$ , así que en términos técnicos podemos decir que no es continua, porque la topología de  $\tilde{A}$  es más fina que la de  $A''$ .

conjuntos  $\mathbb{F}_n$ .

En resumen: para integrar sobre  $\tilde{A} = \mathbb{S}^2 \setminus \{\vec{e}_3, -\vec{e}_3\}$  puede usarse al par  $(\tilde{A}, (\phi, \lambda))$  como *carta*, aunque técnicamente no sea una, porque aplica la misma teoría de integración, en particular se puede usar la versión del teorema de Stokes-Cartan que para cada problema sea más conveniente, por esta razón en lo sucesivo se le dirá *carta*.

### A.2.3. Dos integrales sobre la esfera

Desde un punto  $z$  sobre la tierra la zona visible del sol es un casquete esférico entre el fin del amanecer y el comienzo del atardecer, pero durante el amanecer y atardecer la zona  $\mathbb{F}$  es geoméricamente más complicada.

Se mostró que la *forma areolar, de área* de la esfera (de radio 1), vista *canónicamente* (es decir en la forma usual) como variedad riemanniana es  $\cos(\phi) d\phi \wedge d\lambda$ , por la proposición 11.2.6, [60] página 172, la forma areolar canónica del globo solar es  $R_\odot^2 \cos(\phi_\odot) d\phi_\odot \wedge d\lambda_\odot$  (midiendo adecuadamente los ángulos) y del globo terráqueo es  $R_G^2 \cos(\phi) d\phi \wedge d\lambda$  ( $\phi$ , la latitud, y  $\lambda$ , la longitud). Similarmente podría haberse deducido la forma volumétrica tal y cómo se hizo para la esfera unitaria, véase también [54] o [55].

La zona visible  $\mathbb{F}$  es un casquete esférico entre el fin del amanecer y el comienzo del atardecer, pero cuando amanece y atardece es una región más complicada. Por esta razón se usará el teorema de Stokes-Cartan, que nos permite traducir la integral sobre una superficie en una integral sobre una curva.

Recordemos que la expresión de la radiación emitida por la zona visible del sol  $\mathbb{F}$  es:

$$Q_\odot = \frac{\sigma (T^\odot)^4 R_\odot^2}{\pi} \int_{\mathbb{F}} \sin(\phi_\odot) \cdot \cos(\phi_\odot) d\phi_\odot \wedge d\lambda_\odot,$$

por esta razón a continuación se calcula la integral  $\int_{\mathbb{F}} \sin(\phi_\odot) \cdot \cos(\phi_\odot) d\phi_\odot \wedge d\lambda_\odot$ . Para este cálculo se procede por casos: en los periodos de amanecer y atardecer (estos casos se tienen que subdividir en otros casos, porque el punto  $C_\odot + \vec{e}_{\odot 3}$  es muy mal portado, no permite que se realice el cálculo teniéndolo en cuenta directamente) y entre los periodos de amanecer y atardecer. No obstante todos estos casos pueden verse como dos tipos de integrales sobre la región  $\mathbb{F}$ : cuando  $\mathbb{F}$  es un casquete o cuando  $\mathbb{F}$  es una porción del casquete donde el punto  $C_\odot + R_\odot \cdot \vec{e}_{\odot 3}$  no es visible. El primer caso se calcula en la sección inmediata siguiente y en la sección posterior se calcula el segundo caso, pero dentro de todas las posibles situaciones geométricas que suceden en los periodos de amanecer y atardecer (que el punto  $C_\odot + R_\odot \cdot \vec{e}_{\odot 3}$  no sea visible, o que lo sea, pero que esté en el plano tangente  $\Pi_G(z)$  o no), que se calculan a partir de este caso, porque como se dijo antes pueden verse como casos particulares de estas dos integrales.

#### A.2.3.1. Radiación emitida entre el amanecer y el atardecer

En [60] se presentan varias versiones del teorema de Stokes-Cartan (también se habla en [55], [54] de la generalidad que se puede alcanzar con Stokes-Cartan). Sin embargo antes se define la noción *punto frontera regular* de modo que no dependa de las cartas, y se asume que siempre se tienen los mapas para las que estos puntos lo verifican. Esto es importante, porque se usan las coordenadas en sendos mapas, habiendo descompuesto antes la región adecuadamente. Para usar el mapa  $(\mathbb{S}_\odot \setminus \{C_\odot \pm R_\odot \cdot \vec{e}_3\}, (\phi_\odot, \lambda_\odot))$  hay que comprobar que se cumplan las hipótesis respecto al abierto  $\mathbb{S}_\odot \setminus \{C_\odot \pm R_\odot \cdot \vec{e}_3\}$ .

El mapa nuevo cubre a la esfera salvo por  $C_\odot \pm R_\odot \cdot \vec{e}_3$ . En este mapa el casquete que abarca el polo  $C_\odot + R_\odot \cdot \vec{e}_3$  y está delimitado por un paralelo de latitud  $\phi_{\odot 0} \in [0, \frac{\pi}{2})$  menos el polo  $C_\odot + R_\odot \cdot \vec{e}_3$ , puede verse de nuevo como variedad con borde, cubriendo adecuadamente con subconjuntos de  $\mathbb{S}_\odot \setminus \{C_\odot \pm R_\odot \cdot \vec{e}_3\}$  y restringiendo  $(\phi_\odot, \lambda_\odot)$ . Sus puntos son o bien puntos interiores o bien puntos frontera. De modo que los puntos frontera (el paralelo de

latitud  $\phi_{\odot 0}$ ) cumplen la condición de ser *frontera regular* (véase [60], *grosso modo* significa que existen cartas coherentes con el atlas usado para  $\mathbb{S}_{\odot}$  que cumplen la condición 9, página 28) para el mapa  $(\mathbb{S}_{\odot} \setminus \{C_{\odot} \pm R_{\odot} \cdot \vec{e}_3\}, (\phi_{\odot}, \lambda_{\odot}))$ . Como se dijo la carta cubre al casquete menos el polo norte, este conjunto *no es compacto*, así que no se puede aplicar directamente ninguna forma de Stokes-Cartan (en [55] y [54] también se habla de la versión clásica de Stokes-Cartan y de la regularidad de los puntos frontera).

Si en cambio tomamos la región  $\mathbb{F}_n$  comprendida entre los paralelos de latitud  $\phi_{\odot 0}$  y  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$ , comprobamos que esta región puede cubrirse por mapas que la vuelven variedad con borde descomponiendo en los subconjuntos adecuados y restringiendo los ángulos  $(\phi, \lambda)$  adecuadamente. Comprobamos que se verifican las hipótesis del teorema 11.1.2, [60], página 135, para el mapa  $(\mathbb{S}_{\odot} \setminus \{C_{\odot} \pm R_{\odot} \cdot \vec{e}_3\}, (\phi_{\odot}, \lambda_{\odot}))$  (véase también [54] o [55]).

Esto nos permite usar Stokes-Cartan sobre los conjuntos  $\mathbb{F}_n$ , primero notemos que

$$d\left((\text{sen}(\phi))^2 d\lambda\right) = 2\text{sen}(\phi) \cdot \cos(\phi) d\phi \wedge d\lambda.$$

Tomando límite y aplicando Stokes-Cartan:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{F}} \text{sen}(\phi_{\odot}) \cdot \cos(\phi_{\odot}) d\phi_{\odot} \wedge d\lambda_{\odot} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{F}_n} \text{sen}(\phi_{\odot}) \cdot \cos(\phi_{\odot}) d\phi_{\odot} \wedge d\lambda_{\odot} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{F}_n} d\left((\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 d\lambda_{\odot}\right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathbb{F}_n} (\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 d\lambda_{\odot} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{(\partial\mathbb{F}_n)_1} (\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 d\lambda_{\odot} \right) - \frac{1}{2} \int_{(\partial\mathbb{F})_2} (\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 d\lambda_{\odot} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \cdot \left( \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) \right)^2 - \pi (\text{sen}(\phi_{\odot 0}))^2 \\ &= \pi(1 - \text{sen}(\phi_{\odot 0})^2), \end{aligned}$$

descomponiendo  $\partial\mathbb{F}_n$  como  $(\partial\mathbb{F}_n)_1$ : el paralelo de latitud  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$ , y  $(\partial\mathbb{F}_n)_2$ : el paralelo de latitud  $\phi_0$ . Nótese que para cualquier  $n$ ,  $(\partial\mathbb{F}_n)_2$  es el mismo paralelo. El signo menos se debe a que al ser sendos extremos superior e inferior, tienen orientaciones positiva y negativa.

Esto significa que entre el fin del amanecer y el comienzo del atardecer

$$\frac{\sigma (T^{\odot})^4 R_{\odot}^2}{\pi} \int_{\mathbb{F}} \text{sen}(\phi_{\odot}) \cdot \cos(\phi_{\odot}) d\phi_{\odot} \wedge d\lambda_{\odot} = R_{\odot}^2 \sigma (T^{\odot})^4 \left(1 - (\text{sen}(\phi_{\odot 0}))^2\right) \quad (\text{A.26})$$

(para  $T^{\odot}$  la temperatura de la superficie del sol).

En cambio durante el amanecer y el atardecer la zona visible del sol es sólo una parte de este casquete. La curva que delimita inferiormente ya no es una circunferencia, sino un segmento de paralelo conectado con otro segmento de circunferencia. Este segundo segmento de circunferencia puede verse como un paralelo, en otras coordenadas esféricas, que podemos tomar de modo que compartan la orientación.

Repetimos el procedimiento, salvo que ahora dividiremos la curva inferior en dos:  $(\partial\mathbb{F})_{2,1}$ , el segmento de paralelo de latitud  $\phi_{\odot 0}$ , y  $(\partial\mathbb{F})_{2,2}$ , el segmento de latitud  $\tilde{\phi}_{\odot 0}$  (no en las coordenadas  $(\phi_{\odot}, \lambda_{\odot})$ , sino  $(\tilde{\phi}_{\odot}, \tilde{\lambda}_{\odot}) = (\phi_{\odot}, \lambda_{\odot}) \circ R$ , para una rotación  $R$  adecuada).

### A.2.3.2. Radiación emitida durante el amanecer y atardecer

Para los momentos en los que es visible la mitad del casquete (es decir que  $\vec{e}_3$  es visible desde la tierra) la región  $\mathbb{F}$  es geoméricamente más complicada (también su frontera

$\partial\mathbb{F}$ ). Esta región es una parte del casquete delimitado por un paralelo de latitud  $\phi_{\odot 0}$  y un segmento de arco en la frontera, auxiliándonos de una rotación  $R$  que transforme a este segmento de arco en un segmento de paralelo, podemos cubrirlo con cartas  $(U, (\phi, \lambda))$ . Salvo por los puntos donde comienza y termina este segmento de arco (llamémoslos  $q_1$  y  $q_2$ ), son *puntos frontera regulares*.

Así, tomando prestada la notación  $\text{Frr}$  de [60] para hablar del conjunto de *puntos frontera regulares*, el conjunto  $N = \partial\mathbb{F} \setminus \text{Frr}\mathbb{F} = \{q_1, q_2\}$  es *diferenciablemente despreciable* (definición 11.1.1, [60], página 136). Ni en [55], ni [54] se usa una notación para denotar el conjunto de puntos frontera regular.

Antes de proceder a calcular la integral se explicará un cambio de variable del que nos auxiliaremos.

**A.2.3.2.1. Cálculo de la integral usando Stokes-Cartan más cambio de variable**  
Ahora para aplicar el teorema de Stokes-Cartan procedemos por casos:

1. **Cuando el punto  $C_{\odot} + R_{\odot} \cdot \vec{e}_3$  no es visible**

En los instantes en los que el punto  $C_{\odot} + R_{\odot} \cdot \vec{e}_3$  no es visible no es necesario aproximar la región  $\mathbb{F}$  como un límite, a diferencia del caso anterior, puede aplicarse directamente el teorema 11.1.3, [60], página 137, porque se cumplen las hipótesis (el soporte de la función a integrar intersectado con la región sobre la que se integra es compacto, el conjunto  $N = \partial\mathbb{F} \setminus \text{Frr}(\mathbb{F})$  es *diferenciablemente despreciable*, y todas las formas involucradas son integrables, véase también [54] o [55]).

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{F}} \text{sen}(\phi_{\odot}) \cdot \cos(\phi_{\odot}) \, d\phi_{\odot} \wedge d\lambda_{\odot} &= \int_{\mathbb{F}} d\left(\frac{1}{2}(\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 d\lambda_{\odot}\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\mathbb{F}} (\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 d\lambda_{\odot} = \frac{1}{2} \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,1}} (\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 d\lambda_{\odot} + \frac{1}{2} \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} (\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 d\lambda_{\odot} \\ &= \lambda_{\odot 0} \cdot \text{sen}(\phi_{\odot 0})^2 + \frac{1}{2} \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} (\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 d\lambda_{\odot}, \end{aligned}$$

Ahora para calcular la integral sobre la región  $(\partial\mathbb{F})_{2,2}$  nos auxiliamos de la técnica de cambio de variable. Se le advierte al lector que durante el cálculo de la integral aparecen expresiones racionales de funciones trigonométricas, así que para poder calcularlas se optó por el uso del algoritmo de la división y por descomponer la integral original en integrales más simples:

a) (reparametrización de  $(\partial\mathbb{F})_{2,2}$ )

Con la carta  $(\mathbb{S}_{\odot} \setminus \{C_{\odot} \pm R_{\odot} \cdot \vec{e}_3\}, (\phi_{\odot}, \lambda_{\odot}))$  la región  $(\partial\mathbb{F})_{2,2}$  no es sencilla, a diferencia de un paralelo, donde la latitud  $\phi_{\odot}$  es constante; porque ni  $\phi_{\odot}$ , ni  $\lambda_{\odot}$  son constantes. No obstante, sí pueden definirse nuevas coordenadas  $(\phi_{\odot}, \lambda_{\odot})$  de modo que la integral original se transforme en una integral sobre un paralelo (es decir:  $\phi_{\odot}$  constante).

Para ello tomaremos cierta rotación  $R$ , después de saber cómo actúa podremos saber cómo tomarla. Queremos transformar un paralelo  $P$  en la circunferencia  $P'$  que contiene al segmento  $(\partial\mathbb{F})_{2,2}$ . Buscamos la rotación que transforme un plano en otro, para ello necesitamos el ángulo formado por ambos planos. Este ángulo  $\xi$  equivale al ángulo formado por los vectores ortogonales al paralelo en  $P$  (que es  $\vec{e}_{\odot 3}$ ) y el vector ortogonal a  $P'$ . Recordemos que  $P'$  es un arco contenido por el plano tangente afín que pasa por el punto  $z$ , y por ende es perpendicular al vector  $\vec{C}_G z$ , i. e. perpendicular a  $\vec{e}_z = \frac{\vec{C}_G z}{\|\vec{C}_G z\|}$ . El ángulo formado por los planos tangentes es el ángulo formado por los vectores  $\vec{e}_{\odot 3}$  y  $\vec{e}_z$ :  $\cos(\xi) = \langle \vec{e}_{\odot 3}, \vec{e}_z \rangle$ .

Por la elección de la base  $(\vec{e}_{\odot 1}, \vec{e}_{\odot 2}, \vec{e}_{\odot 3})$  el vector  $\vec{e}_{\odot 2}$  permanece fijo ante la rotación. Matricialmente para la base ordenada  $(\vec{e}_{\odot 1}, \vec{e}_{\odot 2}, \vec{e}_{\odot 3})$ :

$$[R]_{(\vec{e}_{\odot 1}, \vec{e}_{\odot 2}, \vec{e}_{\odot 3})}^{(\vec{e}_{\odot 1}, \vec{e}_{\odot 2}, \vec{e}_{\odot 3})} = \begin{bmatrix} \cos(\xi) & 0 & -\text{sen}(\xi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\xi) & 0 & \cos(\xi) \end{bmatrix},$$

Definimos nuevas coordenadas con esta rotación  $R$  de la siguiente forma:

$$(\phi_{\odot}, \lambda_{\odot}) \mapsto (\tilde{\phi}_{\odot}, \tilde{\lambda}_{\odot}) = (\phi_{\odot}, \lambda_{\odot}) \circ R.$$

En estas nuevas coordenadas el teorema de cambio de variable reza:

$$\int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} (\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 d\lambda_{\odot} = \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} (\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 \frac{d\lambda_{\odot}}{d\tilde{\lambda}_{\odot}} d\tilde{\lambda}_{\odot}.$$

b) (cálculo de  $\text{sen}(\phi_{\odot 0})$  y de  $\frac{d\lambda_{\odot}}{d\tilde{\lambda}_{\odot}}$ )

$\text{sen}(\phi_{\odot})$  equivale a la tercera componente de  $\frac{\overrightarrow{C_{\odot}q}}{R_{\odot}}$ :

$$\text{sen}(\phi_{\odot}) = \left\langle \vec{e}_{\odot 3}, \frac{1}{R_{\odot}} \overrightarrow{C_{\odot}q} \right\rangle \quad (\text{A.27})$$

$$= \left\langle \vec{e}_{\odot 3}, R^{-1} \circ \Phi^{-1}(\tilde{\phi}_{\odot}, \lambda_{\odot 0}) \right\rangle \quad (\text{A.28})$$

$$= -\text{sen}(\xi) \cdot \cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) + \cos(\xi) \cdot \text{sen}(\tilde{\phi}_{\odot 0}). \quad (\text{A.29})$$

Para calcular la derivada  $\frac{d\lambda_{\odot}}{d\tilde{\lambda}_{\odot}}$  nos auxiliaremos de la estructura de variedad riemanniana:

Primero notemos que tomando la aplicación lineal  $A$  con matriz asociada

$$[A]_{(\vec{e}_{\odot 1}, \vec{e}_{\odot 2}, \vec{e}_{\odot 3})}^{(\vec{e}_{\odot 1}, \vec{e}_{\odot 2}, \vec{e}_{\odot 3})} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces  $\frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_{\odot}}(q) = Aq$ . Además  $\frac{\partial}{\partial \lambda_{\odot}}(q) = R^{-1}Aq$ .

$$\frac{d\lambda_{\odot}}{d\tilde{\lambda}_{\odot}} = \frac{\partial \lambda_{\odot}}{\partial \tilde{\lambda}_{\odot}} \quad (\text{A.30})$$

$$= g\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_{\odot}}(q), \text{grad} \lambda_{\odot}(q)\right) \quad (\text{A.31})$$

$$= g\left(R^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_{\odot}}(q), \text{grad} \lambda_{\odot}(q)\right) \quad (\text{A.32})$$

$$= g\left(R^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_{\odot}}(q), \frac{1}{(\cos(\phi_{\odot}))^2} \frac{\partial}{\partial \lambda}(q)\right) \quad (\text{A.33})$$

$$= \frac{1}{(\cos(\phi_{\odot}))^2} \cdot g\left(R^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_{\odot}}(q), \frac{\partial}{\partial \lambda}(q)\right) \quad (\text{A.34})$$

$$= \frac{1}{(\cos(\phi_{\odot}))^2} \cdot g\left(R^{-1} A(\overrightarrow{C_{\odot}q}), A(\overrightarrow{C_{\odot}q})\right), \quad (\text{A.35})$$

$$= \frac{1}{(\cos(\phi_{\odot}))^2} \cdot \left\langle R^{-1} A R(\overrightarrow{C_{\odot}q}), A R(\overrightarrow{C_{\odot}q}) \right\rangle \quad (\text{A.36})$$

$$= \cos(\xi) \cdot \left(\cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \text{sen}(\tilde{\lambda}_{\odot})\right)^2 + (\cos(\xi))^2 \cdot \left(\cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \cos(\tilde{\lambda}_{\odot})\right)^2 \quad (\text{A.37})$$

$$+ \left(\text{sen}(\xi) \cdot \text{sen}(\tilde{\phi}_{\odot 0})\right)^2 \quad (\text{A.38})$$

$$- 2 \cos(\xi) \cdot \text{sen}(\xi) \cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \text{sen}(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) \quad (\text{A.39})$$

por las propiedades del gradiente y porque para el plano tangente  $\Pi_{\odot}(q)$  a  $\mathbb{S}_{\odot}$  en cada punto  $q$ :  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\Pi_{\odot}(q)}$ .

Por otro lado

$$\begin{aligned} (\cos(\phi_{\odot}))^2 &= \left\| \frac{\partial}{\partial \lambda_{\odot}}(q) \right\|^2 \\ &= (\cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}))^2 \cdot \left( (\sin(\tilde{\lambda}_{\odot}))^2 + (\cos(\xi) \cdot \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}))^2 \right) \\ &\quad + \sin(\xi) \cdot \sin(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot (\sin(\xi) \cdot \sin(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \\ &\quad - 2 \cos(\xi) \cdot \cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \cos(\tilde{\lambda}_{\odot})), \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{\odot}}{d\tilde{\lambda}_{\odot}} &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial}{\partial \lambda_{\odot}}(a) \right\|^2} \cdot \left[ \cos(\xi) \cdot (\cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \sin(\tilde{\lambda}_{\odot}))^2 \right. \\ &\quad + (\cos(\xi))^2 \cdot (\cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}))^2 \\ &\quad + (\sin(\xi) \cdot \sin(\tilde{\phi}_{\odot 0}))^2 \\ &\quad \left. - 2 \cos(\xi) \cdot \sin(\xi) \cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \sin(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) \right] \end{aligned}$$

Tenemos un cociente de *polinomios trigonométricos*. Tanto numerador como denominador son funciones cuadráticas, así que es posible reescribir ambos cómo polinomios trigonométricos de  $\cos(\tilde{\lambda}_{\odot})$ , pongamos al numerador como  $a_0 + \dots + a_2 \cos^2(\tilde{\lambda}_{\odot})$  y al denominador como  $b_0 + \dots + b_2 \cos^2(\tilde{\lambda}_{\odot})$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{\odot}}{d\tilde{\lambda}_{\odot}} &= \frac{a_0 + \dots + a_2 \cos^2(\tilde{\lambda}_{\odot})}{b_0 + \dots + b_2 \cos^2(\tilde{\lambda}_{\odot})} \\ &= \frac{\frac{a_2}{b_2} (b_2 \cos^2(\tilde{\lambda}_{\odot}) + \frac{a_1 b_2}{a_2} \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) + \frac{a_0 b_2}{a_2})}{b_0 + \dots + b_2 \cos^2(\tilde{\lambda}_{\odot})} \\ &= \frac{a_2}{b_2} + \frac{\left( a_1 - \frac{a_2 b_1}{b_2} \right) \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) + \left( a_0 - \frac{a_2 b_0}{b_2} \right)}{b_2 \cos^2(\tilde{\lambda}_{\odot}) + b_1 \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) + b_0} \\ &= c_2 + \frac{c_1 \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) + c_0}{b_2 \cos^2(\tilde{\lambda}_{\odot}) + b_1 \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) + b_0}, \end{aligned}$$

para

$$\begin{aligned} a_0 &= \cos(\xi) \cdot \cos^2(\tilde{\phi}_{\odot 0}) + \sin^2(\xi) \cdot \sin^2(\tilde{\phi}_{\odot 0}), \\ a_1 &= -2 \cos(\xi) \cdot \sin(\xi) \cdot \cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \sin(\tilde{\phi}_{\odot 0}), \\ a_2 &= -\cos(\xi) \cdot \cos^2(\tilde{\phi}_{\odot 0}) + \cos^2(\xi) \cdot \cos^2(\tilde{\phi}_{\odot 0}), \\ b_0 &= \cos^2(\tilde{\phi}_{\odot 0}) + \sin^2(\xi) \cdot \sin^2(\tilde{\phi}_{\odot 0}), \\ b_1 &= -2 \cos(\xi) \cdot \sin(\xi) \cdot \cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \sin(\tilde{\phi}_{\odot 0}) - \sin^2(\xi) \cdot \sin^2(\tilde{\phi}_{\odot 0}), \\ b_2 &= -\cos^2(\tilde{\phi}_{\odot 0}) + \cos^2(\xi) \cdot \cos^2(\tilde{\phi}_{\odot 0}), \\ c_0 &= a_0 - \frac{a_2 b_0}{b_2}, \quad c_1 = a_1 - \frac{a_2 b_1}{b_2} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{a_2}{b_2}. \end{aligned}$$

De este modo

$$\begin{aligned}
\int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} (\text{sen}(\phi_{\odot})^2 d\lambda_{\odot} &= \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \left[ -\text{sen}(\xi) \cdot \cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) \right. \\
&\quad \left. + \cos(\xi) \cdot \text{sen}(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \right]^2 \\
&\quad \cdot \left( c_2 + \frac{c_1 \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) + c_0}{b_2 \cos^2(\tilde{\lambda}_{\odot}) + b_1 \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) + b_0} \right) d\tilde{\lambda}_{\odot} \\
&= c_2 \cdot \left[ \left( \text{sen}^2(\xi) \cdot \cos^2(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \right) \cdot \left( \tilde{\lambda}_{\odot 0} + \frac{\text{sen}(2\tilde{\lambda}_{\odot 0})}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - 4\text{sen}(\xi) \cdot \cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \cos(\tilde{\lambda}_{\odot 0}) + 2\cos(\xi) \cdot \text{sen}(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \tilde{\lambda}_{\odot 0} \right] \\
&\quad + \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \left[ -\text{sen}(\xi) \cdot \cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) + \cos(\xi) \cdot \text{sen}(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \right]^2 \\
&\quad \cdot \frac{c_1 \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) + c_0}{b_2 \cos^2(\tilde{\lambda}_{\odot}) + b_1 \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) + b_0} d\tilde{\lambda}_{\odot}
\end{aligned}$$

c) (separación de  $\int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \left[ -\text{sen}(\xi) \cdot \cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \cdot \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) + \cos(\xi) \cdot \text{sen}(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \right]^2$   
 $\cdot \frac{c_1 \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) + c_0}{b_2 \cos^2(\tilde{\lambda}_{\odot}) + b_1 \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) + b_0} d\tilde{\lambda}_{\odot}$  en dos integrales más simples)

El problema anterior se ha simplificado. Para calcular la última integral, si la entendemos como la composición de una función racional  $\frac{\varphi}{\chi} \in \mathbb{R}(u)$ , compuesta con un coseno, aplicando el *algoritmo de la división* podemos simplificar la expresión

$$\frac{\varphi}{\chi}(u) = d_3 u + d_2 + \frac{d_0 + d_1 u}{b_2 u^2 + b_1 u + b_0},$$

donde

$$\begin{aligned}
d_3 &= \frac{b_2}{c_1 \cdot \text{sen}^2(\xi) \cdot \cos^2(\tilde{\phi}_{\odot 0})}, \\
d_2 &= \frac{c_1 \cdot \cos^2(\xi) \text{sen}^2(\xi) \cos^2(\tilde{\phi}_{\odot 0}) - d_3}{b_2} \\
&= \frac{c_1 \cdot \cos^2(\xi) \text{sen}^2(\xi) \cos^2(\tilde{\phi}_{\odot 0}) - \frac{b_2}{c_1 \cdot \text{sen}^2(\xi) \cdot \cos^2(\tilde{\phi}_{\odot 0})}}{b_2}, \\
d_1 &= -b_0 \cdot d_3 - \frac{b_1}{b_2} \cdot \left( b_1 \cdot d_3 + c_0 \text{sen}^2(\xi) \cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) - 2c_1 \cos(\xi) \text{sen}(\xi) \cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \right), \\
d_0 &= c_0 \cos^2(\xi) \cdot \cos^2(\tilde{\phi}_{\odot 0}) - \frac{b_0}{b_2} \left( -\frac{b_1 b_2}{c_1 \text{sen}^2(\xi) \cos^2(\tilde{\phi}_{\odot 0})} \right. \\
&\quad \left. + c_0 \text{sen}^2(\xi) \cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) - 2c_1 \cos(\xi) \text{sen}(\xi) \cos(\tilde{\phi}_{\odot 0}) \right),
\end{aligned}$$

d) (integral de  $\int \frac{d\tau}{\tau+b}$ )

Para calcular la integral  $\int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} d_3 \cos(\tilde{\lambda}_{\odot}) d\tilde{\lambda}_{\odot}$  nos auxiliaremos de la integral  $\int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \frac{d\tau}{\tau+b}$  (en el siguiente paso):  
Para resolver la integral haremos uso de un cambio de variable: queremos una

$\mu = \mu(\tau)$  tal que  $\frac{d\mu}{d\tau} = \frac{1}{\tau+b}$ , porque de ese modo la integral se convierte en

$$\int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \frac{d\tau}{\tau+b} = \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \frac{d\tau}{\tau+b} = \int_{\mu(-\tau_0)}^{\mu(\tau_0)} d\mu = \mu(\tau_0) - \mu(-\tau_0),$$

la ecuación diferencial  $\frac{d\mu}{d\tau} = \frac{1}{\tau+b}$  es equivalente por el teorema de la función inversa a

$$\frac{d\tau}{d\mu} = \tau + b,$$

aplicando cambio de variable  $\tau' = \tau + b$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\tau'}{d\mu} &= \frac{d\tau}{d\mu} = \tau + b \\ &= \tau', \end{aligned}$$

ecuación diferencial que tiene como familia de soluciones  $\tau' = \tau'(0) \cdot e^\mu$ , luego  $\tau = (\tau(0) + b) \cdot e^\mu - b$ , cuya inversa viene dada por

$$\mu = \log \left( \frac{\tau + b}{\tau(0) + b} \right).$$

Por simplicidad supongamos que  $\tau(0) = 0$ , entonces

$$\mu = \log \left( \frac{\tau}{b} + 1 \right). \quad (\text{A.40})$$

e) (cálculo de  $\int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \frac{d_1 \cos(\tilde{\lambda}_\odot) + d_0}{b_2 \cos^2(\tilde{\lambda}_\odot) + b_1 \cos(\tilde{\lambda}_\odot) + b_0} d\tilde{\lambda}_\odot$ )

$$\begin{aligned} &\int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \frac{d_1 \cos(\tilde{\lambda}_\odot) + d_0}{b_2 \cos^2(\tilde{\lambda}_\odot) + b_1 \cos(\tilde{\lambda}_\odot) + b_0} d\tilde{\lambda}_\odot \\ &= \frac{1}{b_2} \cdot \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \frac{e_0}{\cos(\tilde{\lambda}_\odot) - u_1} + \frac{e_2}{\cos(\tilde{\lambda}_\odot) - u_2} d\tilde{\lambda}_\odot \\ &= \frac{2}{b_2} \cdot \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \frac{1}{\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} - u_1} + \frac{1}{\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} - u_2} \cdot \frac{d\tau}{1+\tau^2} \\ &= \frac{2}{b_2} \cdot \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \frac{1}{1-\tau^2 - u_1(1+\tau^2)} \\ &\quad + \frac{1}{1-\tau^2 - u_2(1+\tau^2)} d\tau \\ &= \frac{2}{b_2} \cdot \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \frac{1}{-u_1 - 1} \cdot \frac{1}{\tau^2 + 1 - u_1} \\ &\quad + \frac{1}{-u_2 - 1} \cdot \frac{1}{\tau^2 + 1 - u_2} \tau^2 + 1 - u_2 \cdot d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{b_2} \cdot \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \frac{1}{-u_1 - 1} \left( \frac{-\frac{1}{2}}{\tau + \sqrt{\frac{1-u_1}{-1-u_1}}} + \frac{\frac{1}{2}}{\tau - \sqrt{\frac{1-u_1}{-1-u_1}}} \right) \\
&\quad + \frac{1}{-u_2 - 1} \cdot \left( \frac{-\frac{1}{2}}{\tau + \sqrt{\frac{1-u_2}{-1-u_2}}} + \frac{\frac{1}{2}}{\tau - \sqrt{\frac{1-u_2}{-1-u_2}}} \right) d\tau \\
&= \frac{1}{b_2} \cdot \left( \log \left( \frac{\tau}{\sqrt{\frac{1-u_1}{-1-u_1}}} + 1 \right) - \log \left( \frac{\tau}{-\sqrt{\frac{1-u_1}{-1-u_1}}} + 1 \right) \right) \\
&\quad + \log \left( \frac{\tau}{\sqrt{\frac{1-u_2}{-1-u_2}}} + 1 \right) - \log \left( \frac{\tau}{-\sqrt{\frac{1-u_2}{-1-u_2}}} + 1 \right) \Bigg|_{-\tau_0}^{\tau_0} \\
&= \frac{1}{b_2} \cdot \left( \log \left( \frac{\tan(\tilde{\lambda}_\odot)}{\sqrt{\frac{1-u_1}{-1-u_1}}} + 1 \right) - \log \left( \frac{\tan(\tilde{\lambda}_\odot)}{-\sqrt{\frac{1-u_1}{-1-u_1}}} + 1 \right) \right) \\
&\quad + \log \left( \frac{\tan(\tilde{\lambda}_\odot)}{\sqrt{\frac{1-u_2}{-1-u_2}}} + 1 \right) - \log \left( \frac{\tan(\tilde{\lambda}_\odot)}{-\sqrt{\frac{1-u_2}{-1-u_2}}} + 1 \right) \Bigg|_{-\tilde{\lambda}_{\odot 0}}^{\tilde{\lambda}_{\odot 0}} \\
&\quad + \log \left( \frac{\tau}{\sqrt{\frac{1-u_2}{-1-u_2}}} + 1 \right) - \log \left( \frac{\tau}{-\sqrt{\frac{1-u_2}{-1-u_2}}} + 1 \right) \Bigg|_{-\tau_0}^{\tau_0} \\
&= \frac{1}{b_2} \cdot \left[ -\frac{1}{u_1 + 1} \cdot \left( \log \left( \frac{\tan(\tilde{\lambda}_\odot)}{\sqrt{\frac{1-u_1}{-1-u_1}}} + 1 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \log \left( \frac{\tan(\tilde{\lambda}_\odot)}{-\sqrt{\frac{1-u_1}{-1-u_1}}} + 1 \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{u_2 + 1} \cdot \left( \log \left( \frac{\tan(\tilde{\lambda}_\odot)}{\sqrt{\frac{1-u_2}{-1-u_2}}} + 1 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \log \left( \frac{\tan(\tilde{\lambda}_\odot)}{-\sqrt{\frac{1-u_2}{-1-u_2}}} + 1 \right) \right) \right]_{\tilde{\lambda}_\odot = -\tilde{\lambda}_{\odot 0}}^{\tilde{\lambda}_{\odot 0}}
\end{aligned}$$

f) (resultado final de la integración)

La integral a calcular es  $\int_{\mathbb{F}} \sin(\phi_\odot) \cos(\phi_\odot) d\phi_\odot \wedge d\lambda_\odot$ , sin embargo es una expresión difícil de manejar. En los pasos anteriores se procedió a descomponerla y calcular integrales más simples, sumando el resultado final toma el aspecto:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{F}} \text{sen}(\phi_{\odot}) \cos(\phi_{\odot}) d\phi_{\odot} \wedge d\lambda_{\odot} &= \text{sen}^2(\phi_{\odot}) + \frac{d_3}{2} \text{sen}(\lambda_{\odot 0}) + \frac{d_2}{2} \lambda_{\odot 0} \\
&+ \frac{1}{2b_2} \cdot \left[ -\frac{1}{u_1 + 1} \cdot \left( \log \left( \frac{\tan(\tilde{\lambda}_{\odot})}{\sqrt{\frac{1-u_1}{-1-u_1}}} + 1 \right) - \log \left( \frac{\tan(\tilde{\lambda}_{\odot})}{-\sqrt{\frac{1-u_1}{-1-u_1}}} + 1 \right) \right) \right. \\
&\left. - \frac{1}{u_2 + 1} \cdot \left( \log \left( \frac{\tan(\tilde{\lambda}_{\odot})}{\sqrt{\frac{1-u_2}{-1-u_1}}} + 1 \right) - \log \left( \frac{\tan(\tilde{\lambda}_{\odot})}{-\sqrt{\frac{1-u_1}{-1-u_2}}} + 1 \right) \right) \right]_{\tilde{\lambda}_{\odot} = -\tilde{\lambda}_{\odot 0}}^{\tilde{\lambda}_{\odot 0}}
\end{aligned}$$

## 2. Cuando el punto $C_{\odot} + R_{\odot} \cdot \vec{e}_3$ es visible y no está en el plano tangente

En los momentos en que sí es visible y no está dentro del plano tangente a la tierra en el punto  $z: \Pi_G(z)$  (geométricamente significa que el observador no lo ve en el horizonte) de nuevo, aproximamos a la región con una sucesión de conjuntos  $\mathbb{F}_n$ , que son las regiones delimitadas superiormente por el paralelo  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$  e inferiormente por  $\partial\mathbb{F}$  (para el siguiente argumento hay que excluir este caso, porque este es el punto no cubierto por nuestra carta y es parte de la frontera  $\partial\mathbb{F}$ ). Así como el caso inmediato anterior, se cumplen las hipótesis del teorema 11.1.3, [60], página 137, (el soporte de la función a integrar intersectado con la región sobre la que se integra es compacto, el conjunto  $N = \partial\mathbb{F} \setminus \text{Frr}(\mathbb{F})$  es *diferenciabilmente despreciable*, y todas las formas involucradas son integrables), véase también [54] o [55].

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{F}} \text{sen}(\phi_{\odot}) \cdot \cos(\phi_{\odot}) d\phi_{\odot} \wedge d\lambda_{\odot} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{F}_n} \text{sen}(\phi_{\odot}) \cdot \cos(\phi_{\odot}) d\phi_{\odot} \wedge d\lambda_{\odot} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{F}_n} d \left( \frac{1}{2} (\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 d\lambda_{\odot} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathbb{F}_n} (\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 d\lambda_{\odot} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{(\partial\mathbb{F}_n)_1} (\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 d\lambda_{\odot} \right) - \frac{1}{2} \int_{(\partial\mathbb{F})_2} (\text{sen}(\phi_{\odot}))^2 d\lambda_{\odot} \\
&= \pi - \frac{1}{2} \int_{(\partial\mathbb{F})_2} \text{sen}^2(\phi_{\odot 0}) d\tilde{\lambda}_{\odot}
\end{aligned}$$

Para calcular esta última integral separamos la región en dos exactamente como en el caso anterior:  $(\partial\mathbb{F})_2 = (\partial\mathbb{F})_{2,1} \cup (\partial\mathbb{F})_{2,2}$ . La integral sobre la región  $(\partial\mathbb{F})_{2,1}$  es fácil de calcular,

$$\frac{1}{2} \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,1}} \text{sen}^2(\phi_{\odot}) d\lambda_{\odot} = \text{sen}^2(\phi_{\odot}) \lambda_{\odot},$$

para calcular la integral  $(\partial\mathbb{F})_{2,2}$  usamos la fórmula de cambio de variable, teorema 10.3.6, [60], página 95 (véase también [54] o [55]):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \text{sen}^2(\phi_{\odot}) d\lambda_{\odot} &= \frac{1}{2} \int_{(\partial\mathbb{F})'_{2,2}} \text{sen}^2(\phi_{\odot} \circ R) d(\lambda_{\odot} \circ R) \\
&= \frac{1}{2} \int_{(\partial\mathbb{F})'_{2,2}} \text{sen}^2(\tilde{\phi}_{\odot}) d\tilde{\lambda}_{\odot} = \frac{1}{2} \int_{(\partial\mathbb{F})'_{2,2}} \text{sen}^2(\phi_{\odot}) d\tilde{\lambda}_{\odot},
\end{aligned}$$

donde  $R$  es una rotación de  $\pi$  radianes alrededor del eje  $\vec{e}_{\odot 3}$  (es decir que es una rotación que deja fijos a los paralelos, pero que los rota media vuelta). Induce las nuevas coordenadas:  $\tilde{\lambda}_{\odot} = \lambda_{\odot} \circ R$ , que de hecho es el mismo ángulo  $\phi_{\odot}$  y  $\tilde{\phi}_{\odot} = \phi_{\odot} \circ R$ , que es el ángulo  $\tilde{\lambda}_{\odot}$  desfasado  $\pi$  radianes.  $(\partial\mathbb{F})'_{(2,2)}$  es  $R^{-1}(\partial\mathbb{F})_{2,2}$ . Esta rotación nos permite

visualizar a la integral  $\frac{1}{2} \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \text{sen}^2(\phi_{\odot}) d\lambda_{\odot}$  como la integral  $\frac{1}{2} \int_{(\partial\mathbb{F})_{2,2}} \text{sen}^2(\phi_{\odot}) d\lambda_{\odot}$  del caso anterior:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{F}} \text{sen}(\phi_{\odot}) \cos(\phi_{\odot}) d\lambda_{\odot} &= \pi - \text{sen}^2(\phi_{\odot}) \lambda_{\odot 0} - \frac{d_3}{2} \text{sen}(\lambda_{\odot 0} - \pi) - \frac{d_2}{2} (\lambda_{\odot 0} - \pi) \\ &- \frac{1}{2b_2} \cdot \left[ -\frac{1}{u_1 + 1} \cdot \left( \log \left( \frac{\tan(\lambda_{\odot 0} - \pi)}{\sqrt{\frac{1-u_1}{-1-u_1}}} + 1 \right) - \log \left( \frac{\tan(\lambda_{\odot 0} - \pi)}{-\sqrt{\frac{1-u_1}{-1-u_1}}} + 1 \right) \right) \right. \\ &\left. - \frac{1}{u_2 + 1} \cdot \left( \log \left( \frac{\tan(\lambda_{\odot 0} - \pi)}{\sqrt{\frac{1-u_2}{-1-u_1}}} + 1 \right) - \log \left( \frac{\tan(\lambda_{\odot 0} - \pi)}{-\sqrt{\frac{1-u_1}{-1-u_2}}} + 1 \right) \right) \right]_{\lambda_{\odot} = -\bar{\lambda}_{\odot 0}}^{\bar{\lambda}_{\odot 0}} \end{aligned}$$

### 3. Cuando el punto $C_{\odot} + R_{\odot} \cdot \vec{e}_3$ está en el plano tangente

El valor de la integral para el instante en el cual el punto  $C_{\odot} + R_{\odot} \cdot \vec{e}_3$  está en el plano tangente  $\Pi_G(z)$  es la mitad del valor que se alcanzó el primer caso.

# Bibliografía

- [1] R. T. Akinnubi y M. O. Adeniyi. “Modeling of diurnal pattern of air temperature in a tropical environment: Ile-Ife and Ibadan, Nigeria”. En: *Modelling Earth System Environment* (2017).
- [2] S. M. Kopeikin et al. “Towards an exact relativistic theory of Earth’s geoid undulation”. En: *Elsevier* (2015).
- [3] J. C. Allen. “A modified sine wave method for Calculating Degree days”. En: *Florida Agriculture Exp. Stn. Journal Series* (1976).
- [4] *Analemas, Lemniscatas y la Ecuación del Tiempo*. Consultado el 7 de junio de 2024. 2018. URL: <https://institucional.us.es/blogimus/2018/04/analemas-lemniscatas-y-la-ecuacion-del-tiempo/>.
- [5] Anonymous. En: *Muse Virtual de la Ciencia, Consejo Superior de Investigación Científica, Ministro de Ciencia, Innovación y Universidades, Gobierno de España* (Recuperado en noviembre de 2025).
- [6] J. C. Anway et al. *Report No. 156*. Inf. téc. Colorado State University, 1972.
- [7] E. F. Arias y B Guinot. “Atomic time - keeping from 1955 to the present”. En: *Metrologia* (2005).
- [8] *Atomique time, Britannica*. Consultado el 2024. URL: <https://www.britannica.com/science/atomic-time#ref107137>.
- [9] J. M. Baker, D. C. Reicosky y D.G. Baker. “Estimating Time Dependence of Air Temperature Using Daily Maxima and Minima: A Comparison of Three Methods”. En: *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* (1988).
- [10] O. M. Baksalary y G. Tenkler. “The Moore–Penrose inverse: a hundred years on a frontline of physics research”. En: *The European Physical Journal H, Springer* (2021).
- [11] R. G. Barry y J. C. Richard. *Atmosphere, Weather and Climate*. Routledge, Taylor y Francis Group, 2010.
- [12] V. A. Beloiarov et al. “Quasi-Analytical Solution of Kepler’s Equation as an Explicit Function of Time”. En: *Unpublished, Preprints.org* (2024).
- [13] F. van den Bergh et al. “A comparison of data driven and model-driven approaches to brightness temperature diurnal cycle interpolation”. En: *South African Institute Electrical Engineers* (2007).
- [14] K. Bikos. “Altitude & Azimuth: The horizontal coordinate System”. En: *Time and date* (Retrieved in november 2024). URL: <https://www.timeanddate.com/astronomy/horizontal-coordinate-system.html>.
- [15] R. Borghi. “On the Bessel Solution of Kepler’s Equation”. En: *Multidisciplinary Digital Publishing Institute, Journal Mathematics* (2024).
- [16] T. Brandsma y G. P. Können. “Application of Nearest-Neighbor resampling for homogenizing temperature records on a daily to sub-daily level”. En: *International Journal of Climatology* (2006).
- [17] *Calendarios (III): Año cero y reforma Gregoriana*. URL: <https://latrompetadejerico.com/calendarios/ano-cero-reforma-gregoriana/>.

- [18] J. E. Carson. “Analysis of Soil and Air Temperatures by Fourier Techniques”. En: *Journal of geophysical research* (1963).
- [19] CENAM. “Hora Oficial de los Estados Unidos Mexicanos”. En: *Gobierno de México* (2022). URL: [https://www.cenam.mx/hora\\_oficial/default2.aspx](https://www.cenam.mx/hora_oficial/default2.aspx).
- [20] C. Cesaraccio et al. “An improved model for determining degree-day values from daily temperature data”. En: *Int J Biometeorol* (2001).
- [21] V. J. Cifuentes Sánchez y García. “Desarrollo de un método de cálculo de temperaturas horarias del aire a partir de temperaturas máxima y mínima”. En: (2001).
- [22] A. Cisternas. “Qué significa estar en el percentil 50”. En: *Mundo Tuerca* (2023). URL: [https://mundotuerca.cl/que-significa-estar-en-el-percentil-50/#google\\_vignette](https://mundotuerca.cl/que-significa-estar-en-el-percentil-50/#google_vignette).
- [23] M. P. Cresswell, A. P. Morse y M.C. Thompson. “Estimating surface air temperatures, from Meteosat land surface temperatures, using an empirical solar zenith angle model”. En: *International Journal of Remote Sensing* (1999).
- [24] D. Dieruf. *What is the Nearest Neighbor Algorithm? Method & Examples*. Consultado el 16 de mayo de 2025. 2025. URL: <https://www.datastax.com/guides/what-is-nearest-neighbor>.
- [25] F. Droulia et al. “Ground temperature estimations using simplified analytical and semi-empirical approaches”. En: *Solar Energy* (2009).
- [26] S. B. Duan et al. “Evaluation of six land-surface diurnal temperature cycle models using clear-sky in situ and satellite data”. En: *Remote Sensing of Environment* (2012).
- [27] J. Dudhia. “A Multi-layer soil temperature model for MM5”. En: *National Center for Astronomical Research, Boudler Colorado* (1996).
- [28] J. Duffie y W. A. Beckman. *Solar engeneering of Thermal processes*. Wiley, 2013.
- [29] M. M. Elnahas y T. J. Williamson. “An improvement of the CTTC model for predicting urban air temperatures”. En: *Energy and Building* (1997).
- [30] Christian Lubich Ernst Hairer y Gerhard Wanner. *Geometric Numerical Integration*. Springer Series in Computational Mathematics, 2006.
- [31] R. Felber, S. Stoeckli y P. Calanca. “Generic calibration of a simple model of diurnal temperature variations for spatial analysis of accumulated degree-days”. En: *nt J Biometeorol, Springer* (2018).
- [32] Boyer D. G. “Estimation of daily temperature means using elevation and latitude in mountainous terrain”. En: *Water Resources Bulletin, American WaterResources Association* (1984).
- [33] Sideris M. G. “Geoid Determination, Theory and Principles”. En: *Encyclopedia of Solid Earth Geophysics* (2011).
- [34] M. Gholamnia et al. “Diurnal Air Temperature Modeling Based on the Land Surface Temperature”. En: *Remote Sensing, Multidisciplinary Digital Publishing Institute* (2017).
- [35] R. K. Gholamnia et al. “Spatio-temporal analysis of diurnal air temperature parametrization in Weather Stations over Iran”. En: *Enviromental Science* (2018).
- [36] I. I. Gringorten. “A stochastic model of the frequency and duration of weather events”. En: *Journal of Applied Metereology* (1966).
- [37] F. M. Göttsche y F. S. Olesen. “Modelling of diurnal cycles of brightness temperature extracted from METEOSAT data”. En: *Remote Sensing of Environment, Elsevier* (2001).
- [38] F. M. Göttsche y F. S. Olesen. “Modelling the effect of optical thickness on diurnal cycles of land surface temperature”. En: *Remote Sensing of Environment, Elsevier* (2009).
- [39] T. C. Haan. “Statistical Methods Hydrology”. En: *Library of congress cataloging-in-Publication Data* (1974).

- [40] D. A. Hatcher. “Simple Formulae for Julian Day Number and Calendar Dates”. En: *Journal of the Astronomical Royal Society* (1984).
- [41] G. R. Heurer et al. “Predicting Winter Wheat Phenology Using Temperature and Photoperiod, Climatology Report 78-2,” en: *Dept. Atmos. Sci., Colorado State Univ.* (1978).
- [42] *Horizonte Astronómico*. Recuperado de: URL: [https://es.wikipedia.org/wiki/Horizonte\\_astron%C3%B3mico#:~:text=Se%20llama%20horizonte%20astron%C3%B3mico%20al%20c%C3%ADrculo%20que%20limita,celeste%20por%20el%20plano%20tangente%20a%20la%20Tierra..](https://es.wikipedia.org/wiki/Horizonte_astron%C3%B3mico#:~:text=Se%20llama%20horizonte%20astron%C3%B3mico%20al%20c%C3%ADrculo%20que%20limita,celeste%20por%20el%20plano%20tangente%20a%20la%20Tierra..)
- [43] W. J. Humphreys. “Physics of the air. Chapter IV”. En: *Journal of the Franklin Institute* (1917).
- [44] M. Iqbal. *An Introduction to Solar Radiation*. Academic Press, Hartcourt Brace Javanovich Publishers, 1983.
- [45] B. C. Isikwue et al. “Application of Harmonic Analysis in the Preliminary Prediction of Air Temperature over Lagos and Abuja, Nigeria”. En: *British Journal of Environment Climate Change* (2011).
- [46] A Jenkins. “The Sun’s Position in the Sky”. En: *European Journal of Physics* (2013).
- [47] M. E. Johnson y E. A. Fitzpatrick. “A comparison of Two Methods of Estimating a Mean Diurnal Temperature Curve During in Daylight Hours”. En: *Archiv für Meteorologie Geophysik und Bioklimatologie* (1977).
- [48] M. E. Johnson y E. A. Fitzpatrick. “The Monthly Mean Diurnal Temperature Curve”. En: *Archiv für Metereologie, Geophysik und Bioklimatologie, Springer Varlag* (1977).
- [49] S. Kang S. Kim y O. D. Lee. “Predicting spatial and temporal patterns of soil temperature based on topography, surface cover and air temperature”. En: (2000).
- [50] J. Kepler. *Astronomia Nova  $\Lambda\Gamma\Sigma$  seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellae Martis ex observationibus G.V. Tychohis Brahe.* , 1609.
- [51] J. Kepler. *Harmonices mundi libri V.* , 1619.
- [52] B. A. Kimball y L. A. Bellamy. “Generation of diurnal solar radiation, temperature and humidity patterns”. En: *Energy in Agriculture, Elsevier Sciences Publisher* (1986).
- [53] D. E. Linvill. “Calculating Chilling Hours and Chill Units from Daily Maximum and Minimum Temperature Observations”. En: *HortScience* (1990).
- [54] do Carmo Manfredo Perdigão. *Differential forms and applications*. Springer, 1994.
- [55] do Carmo Manfredo Perdigão. *Formas diferenciais e aplicações*. IMPA, 1971.
- [56] D.D. McCarthy y P. K. Seidelmann. *TIME-From Earth Rotation to Atomique Physics*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co.KGaa, 2009.
- [57] T. R. McVicar y D. L. P. Jupp. “Using covariates to spatially interpolate moisture availability in the Murray-Drling Basin, A novel use of remotly sensed data”. En: *Elsevier* (2002).
- [58] J. Meeus. *Astronomical Algorithms*. Willman-Bell, inc., 1998.
- [59] G. Morales Luna. *Variedades diferenciables: Un enfoque debido a O. A. Biberstein. II: Cálculo diferencial en variedades*. Instituto Politécnico Nacional, 2014.
- [60] G. Morales Luna. *Variedades diferenciables: Un enfoque debido a O. A. Biberstein. III: Cálculo Integral en variedades*. Instituto Politécnico Nacional, 2014.
- [61] M. Müller. “Equation of Time-Problem in Astronomy”. En: *Acta Physica Polonica A* (1995).
- [62] Servicio Metereológico Nacional. “¿Qué hacemos?” En: *Recuperado de: <https://www.gob.mx/smn/que-hacemos>* (Consultado en noviembre 2025).
- [63] Andrés Manuel López Obrador. “Decreto por el que se reforma la fracción II y se adiciona una fracción III al artículo 5 de la Ley de los Husos Horarios en los Estados Unidos Mexicanos.” En: *Diario Oficial de la Federación, Estados Unidos Mexicanos* (2022).

- [64] Baver Okutmuştur. *Functional calculus*. 2020. Cap. A Survey on Hilbert Spaces and Reproducing Kernels.
- [65] J. A. Parton W. J. y Logan. “A Model For Diurnal variation in soil and air Temperature”. En: *Agricultural meteorology, Elsevier Scientific Publishing Company* (1981).
- [66] M. Plakhtonyk. “Kepler’s laws with introduction to differential calculus (book for scholars who are interested in physics and mathematics)”. En: *Research Gate* (2017).
- [67] O. Probst. “The apparent motion of the Sun revisited”. En: *European Journal of Physics* (2002).
- [68] E. Pérez Domínguez. “Modelos de evolución diaria de temperatura: aplicación al caso al caso de Puebla, Tesis de Licenciatura”. En: *Benémrita Universidad Autónoma de Puebla* (2023).
- [69] Waichler S. R. y M. S. Wigmosta. “Development of Hourly Meteorological Values From Daily Data and Significance to Hydrological Modeling at H. J. Andrews Experimental Forest”. En: *Journal of Hydrology* (2003).
- [70] Bird R. Byron, Warren E. Stewart y Lightfoot Edwin N. *Transport Phenomena*. John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [71] T. Reek, Dothy S. R. y Owen T. T. “A Deterministic Approach to the Validation of Historical Daily Temperature and Precipitation Data from the Cooperative Network”. En: *Bulletin American Meteorological Society* (2021).
- [72] D. C. Reikosky et al. “Accoracy of hourly air temperatures calculated from daily minima and maxima”. En: *Elsevier Science Publisher* (1989).
- [73] R. A. Richardson, D. S. Seeley y D. R. Walker. “A Model for Estimating the Completion of Rest for ‘Redhaven’ and ‘Elberta’ Peach Trees”. En: *HortScience* (1974).
- [74] S. Romero. “La ciencia del equinoccio de otoño”. En: *Muy Interesante* (2023). URL: <https://www.muyinteresante.com/ciencia/3334.html>.
- [75] J. Régnière y P. Bolstad. “Statical Simulation of Daily Earth Temperature Patterns in Eastern North America to Forecast Seasonal Events in Insect Pest Management”. En: *Journal Series, Nebraska Agriculture Station* (1994).
- [76] E. J. Sadler y R. E. Schroll. “An Empirical Model of Diurnal Temperature Patterns”. En: *Agronomy Journal* (1997).
- [77] C. G. Sanders. “Comments on a model for estimating the completion of rest for ‘Redhaven’ and ‘Elberta’ peach trees”. En: *HortScience* (1975).
- [78] S. Schädlich, F. M. Götsche y F. S. Olesen. “Influence of Land Surface Parameters and Atmosphere on METEOSAT Brightness Temperatures and Generation of Land Surface Temperature Maps by Temporally and Spatially Interpolating Atmospheric Correction”. En: *Remote Sensing of Environment, Elsevier* (2001).
- [79] D. Sharon. “On the Further Development of Gringorten’s stochastic model for climatological prediction”. En: *Journal of Applied Meteorology* (1967).
- [80] L. Shashua-Bar y M. E. Hoffman. “The Green CTTCmodel for predicting the air temperature in small urban wooded sites”. En: *Energy and Building* (2002).
- [81] B. A. Smith, R. W. McClendon y G. Hoogenboom. “Improving Air Temperature Prediction with Artificial Neural Networks”. En: *International Journal of Computational Intelligence* (2006).
- [82] A. B. Sproul. “Derivation of the solar geometric relationships using vector analysis”. En: *Renewable energy* (2007).
- [83] H. Swaid y M. E. Hoffman. “Prediction of Urban Air Temperature Variations using the Analytical CTTC Model”. En: *Energy and Building* (1990).
- [84] Swinburne University of Technology. “Horizontal Coordinate System”. En: *COSMOS, The Swinburne Astronomy Online Encyclopedia* (Retrieved in november 2024).
- [85] A. Tejada Martínez. “An exponential model of the curve of mean monthly hourly air temperature”. En: *Atmósfera, Facultad de Física de la universidad Veracruzana* (1991).

- [86] S. T. M. Thorton y Marion J. B. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Thomson Brooks/Cole, 2004.
- [87] S. E. Urban y Seidelmann P. K. *Explanatory Supplement to the astronomical almanac*. University Science books, Mill Valley California, 2013.
- [88] *UTC Time Now*. 2024. URL: <https://www.utctime.net>.
- [89] E. Vogt. “Elementary derivation of Kepler’s Laws”. En: *American Journal of Physics* (1995).
- [90] M. Vollmer y S. D. Gendzelman. “Colours of the Sun and Moon: the role of the optical air mass”. En: *European Journal of Physics* (2006).
- [91] A. Walter. “Notes on the utilization of records from third order climatological stations for agricultural porpuses”. En: *Agriculture Metereology-Elsevier Publishing Company, Amsterdam* (1967).
- [92] G. Wang, Y. Wei y S. Qiao. *Generalized Inverses: Theory and Computations*. Development in Mathematics, Springer y Science Press Beijing, 2010.
- [93] M Wann, D. Yan y H. J. Gold. “Evaluation and calibration of three models for daily cycle and air temperature”. En: *Agricultural and Forest Metereology, Elsevier Science Publisher* (1985).
- [94] N. Watanabe. “An improved method for computing heat accumulation from daily maximum and minimum temperatures”. En: *Applied Entomology and Zoology* (1978).
- [95] A. Weiss y C. J. Hays. “Calculating daily mean air temperatures by different methods: implications from a non-linear algorithm”. En: *Agriculture and Forestal Metereology, Elsevier* (2005).
- [96] G. G. Wilkerson et al. “Modeling Soybean Growth for Crop Management”. En: *American Society of Agricultural Engineers* (1983).
- [97] C. T. de Wit y et al. *Simulation of assimilation respiration and transportation of crops*. Centre for Agricultral Publishing y Documentation, 1978.
- [98] L. Zeng et al. “Estimation of Daily Air Temperature Based on MODIS Land Surface Temperature Products over the Corn Belt in the US”. En: *Remote Sensing, Multidisciplinary Digital Publishing Institute* (2015).
- [99] D. Zheng, Hunt E. R. y S. W. Running. “A daily soil temperature model based on air temperature and precipitation for continental aplications”. En: *Numerical Terradynamic Simulation Group* (1993).