BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMATICAS
LICENCIATURA EN ACTUARÍA

OPTIMIZACIÓN MEDIANTE EL MÉTODO SIMPLEX: APLICACIÓN Y DESARROLLO DE SOFTWARE EN VBA EXCEL.
Estado de Puebla-México.

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO DE LICENCIADO EN ACTUARÍA QUE PRESENTA:

J O S U É G I L B E R T O M A R T Í N E Z L U C E R O

DIRECTOR DE TESIS:

FERNANDO VELASCO LUNA

PUEBLA, AGOSTO 2025

Dedicatoria

El presente trabajo está dedicado a mis padres: Sandra y Gilberto, por su interminable paciencia, su inigualable cariño y su permanente apoyo que me permitió realizar otra más de mis metas.

A mi hermano Erick, mi cuñada Stephanie y mi sobrina Annie, por todo el amor y confianza durante mi desarrollo personal.

A todas las maravillosas personas que me dieron el privilegio de recibir su amistad y enseñanza en mi paso por la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

A todos los profesionales que se involucraron en mi desarrollo académico, a través de su enseñanza, su apoyo y su confianza.

Agradecimientos

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en particular a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, por permitirme desarrollar mis estudios, enriquecer mis conocimientos y vincularme con personas maravillosas.

A todos los profesores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, en particular al Profesor Guillermo López Mayo †, por fungir como guía para mi desarrollo personal y profesional, y por generar la inspiración para la creación del presente trabajo.

Al Profesor Fernando Velasco Luna, así como al Profesor Luis Haro Álvarez, por su disposición para dirigir y evaluar esta tesis, así como a los profesores: José Asunción Hernández, Itzel Xochipa Pérez y Francisco Solano Tajonar Sanabria, por su apoyo y disposición a fungir como sinodales. Finalmente, agradezco a todos los profesionales que se involucraron directa o indirectamente en el desarrollo de esta tesis, por sus valiosos sugerencias, comentarios y correcciones.

Índice General

OPTIMIZACIÓN MEDIANTE EL MÉTODO SIMPLEX: APLICACIÓN Y DESARROLLO DE SOFTWARE EN VBA EXCEL

Introducción

La Programación Lineal o Investigación de Operaciones es una de las disciplinas más recientes en Matemática Aplicada y desde su origen despertó interés en distintas áreas científicas, ya que utiliza técnicas de optimización que, entre otras cosas, permiten analizar recursos, costos y ganancias. Estas técnicas sufrieron un desarrollo acelerado por su facilidad de uso y su capacidad de servir como guía para la toma de decisiones en situaciones reales.

Desde la revolución industrial los procesos de planeación y optimización cobraron enorme relevancia, desde 1951 la Programación Lineal ha tenido aplicaciones industriales y económicas que se encuentran en autores como: A. Charnes (septiembre 4, 1917 – diciembre 19, 1992) y W. Cooper (julio 23, 1914 – junio 20, 2012). Durante este periodo también se desarrolló el Modelo de Procesos gracias a Alan Manne (mayo 1 ,1925-septiembre 25, 2005), y Harry Markowitz (agosto 24, 1927- junio 22, 2023).

En la era de la globalización, las estrategias de la Matemática Aplicada son cada vez más populares. La comunidad empresarial requiere de trabajadores actualizados en las distintas técnicas y que sean capaces de interpretar la Matemática Aplicada y sus procesos.

Los diversos colegios han ampliado su plan de estudios para incluir materias de Programación Lineal y desarrollo de software, sin embargo, la interpretación de los resultados se encuentra fuera del foco de atención comparada con el conocimiento teórico, paradójicamente, la capacidad para interpretar de manera adecuada un análisis matemático resulta ser una aptitud muy solicitada en el mundo laboral.

La aplicación de métodos cuantitativos en la toma de decisiones empresariales es conocida como *Administración Científica*, los estudiantes han encontrado una ventana de oportunidad para la automatización de procesos repetitivos, aumentando la producción, reduciendo costos, pero sobre todo liberando tiempo para focalizar la atención en la interpretación de los resultados para generar estrategias tempranas en la prevención del riesgo empresarial.

El presente trabajo de investigación está dirigido a estudiantes y profesores familiarizados con la Programación Lineal y el Método Simplex, esperando que sirva de guía a futuro en su vida profesional o como instrumento de trabajo. Presento esta tesis llamada "Optimización mediante el Método Simplex: Aplicación y Desarrollo de Software en VBA Excel".

La simplificación y comprobación del Método Simplex se realizó a través del desarrollador de software en la extensión digital de Excel (Visual Basic). El enfoque adoptado para la representación del método es a través de los *Tableaus* descritos por George Dantzing en 1947.

Esta tesis consta de cinco capítulos: en el primer capítulo se exponen los antecedentes de la Programación Lineal, así como sus componentes y normas, además se presentan los problemas clásicos que dieron popularidad al Método Simplex.

En el segundo capítulo se presenta el Método Simplex, sus antecedentes, teoría, fundamentos y características. Se define el algoritmo Simplex y se identifican formas equivalentes del Problema de Programación Lineal.

En el tercer capítulo se discute el conjunto de soluciones a un Problema de Programación Lineal, se debate la interpretación del resultado propuesto por el algoritmo Simplex, así como su interpretación geométrica. Se ejemplifica y se realiza el proceso de solución en forma manual para después comprobarlo con el software.

En el cuarto capitulo se presenta el Método de las Dos Fases, su estructura y características, con el objetivo de identificar las características del método se ejemplifican distintos casos, finalmente se presenta la Regla de Bland y un breve análisis de la Complejidad Computacional del Método Simplex.

En el quinto capítulo se presenta un manual de usuario referente al software propuesto, incluyendo la descripción general del programa, su funcionamiento y un breve análisis de su aplicación.

Finalmente, se incluyen las conclusiones del trabajo realizado, como anexo se incluyen las demostraciones a los teoremas aplicados durante este estudio seguidas por el listado de las referencias consultadas.

Objetivos:

Objetivos Generales:

Estudiar el Método Simplex incluyendo el Método de las Dos Fases, su teoría, funcionamiento y características. Ejemplificar y exponer la eficiencia del Método Simplex en la optimización de sistemas de desigualdades lineales a través de la comparación de diversos problemas con el software creado.

Objetivos específicos:

La difusión del Método Simplex y el proveer de una herramienta de solución a distintos tipos de Problemas de Programación Lineal, mediante la creación de software en la extensión VBA (Visual Basic for Applications) de Excel.

Capítulo I.- Modelos de Programación Lineal

1.1.- Introducción

La modelización es un proceso complicado que requiere de un pensamiento: estructurado, focalizado y consecutivo que ayude a comprender problemas de toma de decisión.

Básicamente un modelo es una representación que verbaliza un problema específico, la construcción de modelos es una habilidad utilizada en la vida cotidiana y ha cobrado enorme importancia debido a su aplicación académica y profesional en los últimos años.

El desarrollo de un Modelo Matemático requiere estar enfocado en: la comunicación, la estructuración, la evaluación y la optimación de una idea compleja. El resultado de todo Modelo Matemático contendrá un sesgo, al ser una abstracción de una situación real que está limitada por el número de argumentos que contiene.

El objetivo de los Modelos Matemáticos a estudiar es la optimización, esta puede ser vista como un proceso estructurado para la toma de decisiones que involucran distintas opciones factibles, donde alguna resulta ser ideal bajo condiciones específicas. Existen distintos tipos de problemas reales donde se aplica la optimización como herramienta para la toma de decisión, desde la industria alimenticia, hasta la industria bélica.

La optimización fue vital durante la revolución industrial, aportando estrategias para mejorar la creación de inventarios, la inversión de tiempo y el uso del personal. Este tipo de estrategias terminarían impulsando la creación de "El Modelo de Filas" y "El Modelo de Asignaciones" que resultan ser fundamentales en los procesos productivos y de servicio en la era moderna.

1.2.- Antecedentes de la Programación Lineal

La Programación Lineal (PL) es una rama de la Matemática Aplicada que se dedica a estudiar la optimización (maximización o minimización) de una función lineal que está restringida por ecuaciones de primer grado (lineales).

La PL estudia distintos tipos de problemas en todo tipo de áreas de conocimiento, su popularidad radica en lo sencillo que es modelar y resolver un Problema de Programación Lineal (PPL), aplicando métodos apropiados para cada caso.

Una de las herramientas más poderosas de la PL es el Método Simplex, que se describe como un algoritmo de optimización matemática. Dentro de la gama de posibles problemas en los que se aplica el Método Simplex, esta tesis se centrará en los PPL con sistemas de ecuaciones lineales (restricciones) con signo de igualdad o desigualdad, donde se optimiza una única función llamada "Función Objetivo".

El primero en describir una teoría que se pueda relacionar con lo que hoy llamamos Programación Lineal fue G. Monge (9 de mayo, 1746 – 28 de julio, 1818), en el año 1801 con su publicación "Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie", ("Análisis Aplicado a la Geometría").

Monge es considerado como el padre de la Geometría Descriptiva, desarrolló un método geométrico aplicando principios matemáticos para la representación de objetos tridimensionales en un plano bidimensional.

El primer registro del uso de la optimización se originó en el año 1788, en un trabajo de J. Lagrange (25 enero, 1736 – 10 de abril, 1813), titulado, "Mécanique Analytiquez" y en 1826 con un trabajo de J. Fourier (21 de marzo, 1768 – 16 de mayo, 1830), titulado, "Solution d'une question particuliére".

Fourier fue uno de los primeros autores en diseñar un método de solución a un PPL, este consistía en la eliminación sucesiva de variables haciendo una extensión del Método de Reducción de Gauss.

El problema de Fourier consiste en un problema de regresión lineal el cual pretendía minimizar la función $f\ (a_0, a_1)$, donde:

$$f\ (a_0, a_1) = \text{Max}\ \{|\, y_0 - (a_1 x_1 + a_0)\,|, \ldots, \ |\, y_p - (a_1 x_p + a_0)\,|\}$$

Sin embargo, la imposibilidad del cálculo diferencial obligó a Fourier a rediseñar su método por:

$$\text{Min Z}$$

sujeto a

$$|\, y_i - (a_1 x_i + a_0)\,| \leq \text{Z}, \ (i = 1, \ldots, p)$$

Que resulta ser una forma análoga de representar un PPL, pues la i-ésima restricción puede ser sustituida por dos restricciones lineales:

$$-Z \leq |\ y_i - (a_1 x_i + a_0)\,| \leq Z$$

El primero en resolver el problema de Fourier fue De la Valle Poussin (14 de agosto, 1866 – 2 de marzo, 1962), en el año 1910, resulta interesante que el método utilizado se puede considerar como un caso particular del Método Simplex, este ejercicio se considera como la base teórica que motivo el formalismo matemático hoy alcanzado.

Los primeros registros que describen la Programación Lineal moderna son del autor: Leonid Vitalyevich Kantorovich (19 de enero 1912 – 7 de abril 1986); quien en 1939 publica su obra "Métodos Matemáticos de Organización y Planificación de la Producción", esta se enfocaba en dar solución a problemas de producción y distribución, utilizando una técnica matemática bien definida.

Su trabajo fue utilizado por la URRS durante la época de la postguerra para fijar precios en su modelo de economía, los precios debían fijarse al coste medio de producción en el sector más un pequeño impuesto de recuperación, el consumo entonces se calculaba sumando a los precios los impuestos, esto terminaría provocando inflación y especulación de bienes durante los próximos 20 años.

A lo largo de la historia cientos de matemáticos han realizado aportes a la PL, nombrarlos a todos sería imposible, sin embargo, los aportes iniciales son datados en la década de 1940 y son atribuidos a: John Von Neumman, Tjalling Koopmans, Albert Tucker y a varios estudiantes de Koopmans (R. Dofman, K. Arrow, P. Samuelson, H. Simon, D. Gale y H. Kuhn), por mencionar algunos.

Resulta interesante que en este contexto de la PL, el término "Programación" es sinónimo de planeación, tiene su origen en el ejército, ya que, los militares se refieren a sus diversos planes de entrenamiento como "Programas", luego de que G. Dantzing (8 de noviembre, 1914 – 13 de mayo, 2005) analizó el Problema de Planeación de la fuerza aérea, publicó su primer artículo llamado "Programación en una Estructura Lineal", considerado un texto fundamental en la Matemática Aplicada, tiempo después, en una plática con Bernarnd Koopmans (19 de enero, 1900 – 18 de agosto, 1981), el titulo se abrevio a "Programación Lineal", título que conserva hasta la actualidad.

Por otro lado, el término "Lineal" hace referencia a que todas las funciones involucradas en el modelo deben ser de primer orden, naturalmente, la Programación Lineal fue concebida con sus propios axiomas y propósitos, por lo que su aplicación se ve limitada en su mayoría en sistemas no lineales, sin embargo, es fácil reconocer la importancia de la Programación Lineal al notar que todas las computadoras incluyen una versión del Método Simplex en su código fuente.

Por último, el término "Método Simplex" surge en una discusión entre Dantzing y T. Motzkin (26 de marzo 1908 – 15 de diciembre 1970), quien señaló que el enfoque aplicado por Dantzing en la geometría de las columnas del problema se describía mejor como el movimiento de un Simplejo [1] a otro vecino.

1]Un poliedro convexo generado por n puntos en $\mathbb{R}^n$ *denotado por* S_n.

En la década de 1950 emergieron muchas extensiones de la Programación Lineal como la Programación No lineal, la Teoría de Flujo de Redes, los Métodos de la Gran Escala, la Programación Estocástica, la Programación Entera, por mencionar algunos, estos métodos buscan dar solución a problemas específicos centrándose en su propia metodología. A finales de 1970 estas disciplinas crecieron exponencialmente con la llegada de la era digital y la computadora.

La Programación Lineal fue desarrollada para dar respuesta a problemas complejos y es pieza central en distintas áreas de conocimiento como: Producción, Finanzas, Marketing, Lógica, Mezclas, Asignación de Tareas, entre otras.

Hoy en día la Programación Lineal es piedra angular de estudio para el Álgebra Lineal y es aplicada de manera cotidiana en distintas áreas de conocimiento.

1.3.- Modelos Matemáticos Aplicados a Programación Lineal

La Programación Lineal se dedica principalmente al estudio de Modelos Matemáticos en los que se tiene como prioridad optimizar cierta función lineal. Aún con sus limitaciones y su reciente creación, los Modelos Matemáticos aplicados en la PL han resaltado por servir como una excelente guía para tomar decisiones complejas y se destacan por su relativa facilidad.

La optimización se utiliza como herramienta de análisis en diversas áreas del conocimiento como manejo de: procesos, recursos, ganancias, inversiones, entre otras, además puede ser modelada como un PPL.

Esta tesis se centrará en PPL donde se verifiquen las siguientes propiedades:

Divisibilidad: Todas las variables tienen carácter continuo por lo que pueden tomar cualquier valor real.

Condición de no negatividad: Todas las variables siempre tomarán valores iguales o superiores a cero.

Proporcionalidad: La contribución de cada variable es individual y proporcional a su valor.

Aditividad: La contribución total de las variables es la suma de las contribuciones individuales de cada una de ellas.

Certidumbre: Todos los parámetros del modelo son conocidos.

A los distintos métodos que dan solución a un sistema de desigualdades y que se relacionan con la Programación Lineal se les clasifica como:

- Métodos Proyectivos: Se enfocan en hallar el valor óptimo, a través de la reducción de la función potencial, donde se cumple:

    1. La función objetivo decrece en cada iteración.
    2. El punto de solución se encuentra dentro de la región factible.
    3. Los algoritmos convergen en tiempo polinomial.

- Métodos de Escalado Afín: Se aproximan a la solución óptima en cada iteración, moviéndose a través de un elipsoide.

- Métodos de Barrera: Plantean una función objetivo no lineal sin restricciones, con una barrera logarítmica, esta última se le aplica un algoritmo de optimización.

1.4.- Modelos Clásicos de la Programación Lineal

1.4.1.-*El Problema de la Dieta*

Existe una colección de ejemplos específicos que se han convertido en clásicos para exponer el Método Simplex y su funcionamiento.

Uno de ellos es el conocido "Problema de la Dieta" propuesto y resuelto por George Stigler en 1947, cuyo planteamiento es el siguiente:

Un estudiante desea compensar ciertas carencias nutricionales en su dieta, por ello, asistió al médico, éste le hizo la recomendación de ingerir 2000 kcal, 55 g de proteína y 800 mg de calcio diariamente. El estudiante encuentra en el mercado seis alimentos que son fuentes baratas de los nutrientes que necesita.

Tabla 1.4.1.1.-Requerimientos generales

Alimento	Energía	Proteínas	Calcio	Cantidad	Precio
Avena	110	4	2	28g	$3.00
Pollo	205	32	12	100g	$8.00
Huevos	160	13	54	2u	$6.00
Leche	160	8	285	237cc	$5.00
Pastel	420	4	22	170g	$7.00
Carne de Cerdo	269	14	80	260g	$10.00

El estudiante observa que existen distintas combinaciones para hacer su dieta que satisfacen los requerimientos alimenticios. Por ejemplo: 8 raciones de carne de cerdo por $80 diarios, aún cuando se cumplen los requerimientos alimenticios, esta opción se considera insostenible ya que más de 2 kg diarios de carne no constituye una dieta apropiada desde el punto de vista médico, por otro lado, considere 2 porciones de pastel y 6 de leche, nuevamente se satisfacen los requerimientos alimenticios, sin embargo, esta opción tendría un costo de $42, lo que nuevamente resulta insostenible, en esta ocasión, para la economía de un estudiante sin un ingreso fijo.

Para evitar alguna confusión, el médico le recomendó consumir a lo más: 4 porciones de avena, 3 raciones de pollo, 2 raciones de huevo, 8 raciones de leche, y 2 raciones de pastel diariamente.

El problema central consiste en encontrar una dieta que satisfaga los requerimientos alimenticios considerando las recomendaciones hechas por el médico, buscando el menor costo posible. Por ello, el estudiante buscó apoyo con uno de sus profesores, quien le recomendó plantear un modelo para resolver el problema, le propone denotar por x_1 el número de raciones de avena, x_2 para el de pollo, etc. Por ello, el número de raciones máximas en su menú puede ser descrito como sigue:

$$0 \leq x_1 \leq 4, \quad 0 \leq x_2 \leq 3, \quad 0 \leq x_3 \leq 2$$
$$0 \leq x_4 \leq 8, \quad 0 \leq x_5 \leq 2, \quad 0 \leq x_6 \leq 2$$

Por otro lado, los requerimientos alimenticios de la dieta pueden ser modelados con la siguiente serie de desigualdades:

$$110\, x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 20x_5 + 260x_6 \geq 2000$$
$$4\, x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55$$
$$2\, x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800$$

Finalmente, el costo del menú es:

$$3\, x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6$$

En síntesis, el modelo matemático que representa las necesidades del estudiante se puede representar como:

$$\text{Min } 3\, x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6$$

Sujeto a

$$110\, x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 20x_5 + 260x_6 \geq 2000$$
$$4\, x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55$$
$$2\, x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800$$
$$0 \leq x_1 \leq 4,\ 0 \leq x_2 \leq 3,\ 0 \leq x_3 \leq 2,\ 0 \leq x_4 \leq 8,\ 0 \leq x_5 \leq 2,\ 0 \leq x_6 \leq 2$$

1.4.2.- El Problema del Transporte

Otro problema clásico es conocido como "Problema del Transporte", propuesto por F.L. Hitchcock en 1941 cuyo planteamiento es el siguiente:

Considere ciertas cantidades fijas: a_1, a_2, a_3,…, a_m, de ciertos m productos que se envían desde m localidades y se reciben en b_1, b_2, b_3,…, b_n cantidades en cada una de los n destinos. Asociados con cada envío del producto i al destino j hay costos de envío C_i.

Se desea determinar las cantidades x_{ij} entre cada par de origen-destino donde (i = 1,…, m, j = 1,…, n), buscando un envío exitoso con el menor costo posible.

Para modelar este ejemplo será necesario el siguiente arreglo:

Tabla 1.4.2.1.-*Tableau* General de un PPL

x_{11}	x_{12}	x_{13}	.	.	.	x_{1n}	a_1
x_{21}	x_{22}	x_{23}	.	.	.	x_{2n}	a_2
x_{31}	x_{32}	x_{33}	.	.	.	x_{3n}	a_3
.	.	.					.
.	.	.					.
.	.	.					.
x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	.	.	.	x_{mn}	a_m
b_1	b_2	b_3	.	.	.	b_{nm}	

El i-ésimo renglón define las variables asociadas con el i-ésimo origen, mientras que la j-ésima columna define las variables asociadas con el j-ésimo destino.

En este arreglo la suma de las variables del i-ésimo renglón es a_i, mientras que la suma de las variables de la j-ésima columna es b_j.

El problema consiste en encontrar las variables no negativas x_{ij} que minimicen el costo de transportación representado con la siguiente suma ponderada:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}x_{ij}$$

De este modo el Problema del Transporte se puede representar como:

$$Min\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}x_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} x_{ij}= a_i$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{m} x_{ij}= b_j$$

$$x_{ij} \geq 0,\ (i = 1,\ldots,\ m,\ j = 1,\ldots,\ n).$$

Para que el modelo sea consistente se debe suponer que:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{m} a_i = \sum\nolimits_{j=1}^{n} b_j$$

Que representa la suposición de que la cantidad enviada es igual a la cantidad recibida. De este modo el Problema del Transporte se convierte en un problema de tamaño [$(m+n)$ $(m\,n)$], donde todas las entradas son únicamente ceros y unos como se muestra a continuación:

Tabla 1.4.2.2.- *Tableau* del problema

x_{11}	x_{12}		x_{1n}	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	…	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}
1	1	…	1	0	0	…	0	…	0	0	…	0
0	0	…	0	1	1	…	1	…	0	0	…	0
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮
0	0	…	0	0	0	…	0	…	1	1	…	1
1	0	…	0	1	0	…	0	…	1	0	…	0
0	1	…	0	0	1	…	0	…	0	1	…	0
0	0	…	1	0	0	…	1	…	0	0	…	1

1.4.3.- El Problema de Mezclas

En una fábrica de madera se cortan dos tipos de tablas de los troncos que reciben: uno para trabajos de construcción y el otro para trabajos de decoración.

Supongamos que la fábrica produce mil metros de tabla para construcción en dos horas y les toma tres horas aplanar estos mil metros de tabla para su venta al público, además tarda dos horas en producir mil metros de tablas para decoración, pero toma cinco horas aplanar los mil metros de este tipo de tablas.

La línea de producción está activa durante ocho horas al día, mientras que la aplanadora durante quince horas. Si la ganancia por cada mil metros de tabla de construcción es de $100 y mil metros de tabla decorativa generan una ganancia de $120. ¿Cuántos metros de tabla de cada tipo deben producirse para generar la mayor ganancia?

Si denotamos a (x, y) como las cantidades de madera de trabajo de construcción y trabajo decorativo respectivamente. Por simplicidad suponga que las unidades de x y y son en cientos de metros. El número de horas requeridas para la producción es $(2\,x + 2\,y)$. Como la línea de producción solo está activa 8 horas, se debe cumplir que:

$$2\,x + 2\,y \leq 8$$

Del mismo modo, el proceso de aplanado puede ser modelado por $5\,x + 3\,y$, donde se debe cumplir que:

$$5\,x + 3\,y \leq 15$$

De manera intuitiva se tiene que:

$$x \geq 0, \;\; y \geq 0$$

La ganancia Z puede ser representada por:

$$Z = 120\,x + 100\,y$$

Finalmente, el modelo consiste en encontrar los valores de x y y que maximizan Z tales que:

$$\text{Max } Z = 120\,x + 100\,y$$

sujeto a

$$2\,x + 2\,y \leq 8$$

$$5\,x + 3\,y \leq 15$$

$$x \geq 0, \; y \geq 0$$

Aplicando el software desarrollado para esta tarea, se obtiene el siguiente resultado:

$$x = 1.5, \; y = 2.5, \; Z = 430$$

Capítulo II.- El Método Simplex

2.1.- Introducción

El "**Método Simplex**" es un algoritmo iterativo que busca dar solución a problemas de Programación Lineal enfocados en la optimización, además no se encuentra limitado por el número de variables en el modelo.

La idea detrás de su aplicación se generaliza como la de buscar un punto extremo de un conjunto de posibles soluciones del PPL, para luego encontrar otro punto extremo garantizando un mejor valor para la función objetivo, este proceso se repite hasta encontrar el punto con mejor valor.

Al resolver un PPL, nos podemos encontrar con cualquiera de las siguientes situaciones:

Solución única: En este caso, la solución óptima es un punto extremo de la región factible.

Soluciones Múltiples: Un Problema de Programación Lineal puede tener más de una solución óptima (infinitas).

Solución no acotada: En ocasiones, podemos encontrarnos con problemas que no tienen solución finita. Esta situación sólo se puede dar en el caso de que la región factible no esté acotada.

No Factibilidad: Esta situación se da cuando ningún punto del plano (o, en general, del espacio real $n-$dimensional) cumple simultáneamente todas las restricciones del problema, es decir, la región factible es un conjunto vacío.

Ahora bien, se nos pueden plantear los siguientes casos:

a) Si la región factible es vacía [Ø] el problema no tiene solución factible (INFACTIBILIDAD).

b) Si la región factible es acotada entonces siempre hay solución finita, que pude ser única o múltiple (OPTIMALIDAD).

c) Si la región factible es no acotada entonces puede ocurrir que exista una solución (única o múltiple, lo que NO nos asegura OPTIMALIDAD).

Existen diferentes representaciones de un PPL, esta tesis convendrá en denominar la *forma estándar* del Problema de Programación Lineal como sigue:

$$\begin{aligned} &\textbf{(Min, Max)}\ C^T x \\ &\textbf{Sujeto a:}\ \ \mathrm{A}\, x = \mathrm{b} \qquad\qquad (2.1.1) \\ &\qquad\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

donde:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Donde a la función: $f\ (x) = C^T x$ se llama "**Función Objetivo**", al vector $(\ c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ se le llama "**Vector de Costos**" y las variables x_1, $x_2 \ldots, x_n$ se les llama "**Variables de Decisión**", mientras que a los vectores columna de A se les denomina "**Vectores de Actividad**", el vector $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ recibe el nombre de "**Vector de Requerimientos**".

Suponga que el rango de la matriz A es m, es decir: Ran $(A) = m$, de este modo, sería posible el reordenamiento de las columnas de A para obtener:

$$\mathrm{A} = [B, A_N]$$

Donde B es una submatriz (m x m) no singular de A y A_N es la submatriz de A formada por las columnas de A que no pertenecen a B.

Sea:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} , \quad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}$$

Donde x_B es el vector formado por las variables básicas y x_N es el vector formado por las variables no básicas, análogamente se describen c_B y c_N.

Si se multiplica por bloques, se obtiene:

$$A\,x = [B, A_N]\,x = B\,x_B + A_N\,x_N = b$$

De lo cual se obtiene:

$$x = B^{-1}\,b - B^{-1}A_N\,x_N$$

Como B es invertible, se sustituye ese valor dentro de la función objetivo $Z = C^T x$ para obtener:

$$Z = [C_B^T, C_N^T] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$= C_B^T\,x_B + C_N^T\,x_N$$

$$= C_B^T\,[\,B^{-1}\,\mathrm{b} - B^{-1}A_N\,x_N] + C_N^T\,x_N$$

$$= C_B^T\,B^{-1}\,\mathrm{b} + [\,C_N^T - C_B^T\,B^{-1}A_N]\,x_N$$

El siguiente sistema de (m + 1) ecuaciones:

$$\begin{array}{l} x_B = B^{-1}\,\mathrm{b} - B_N^{-1}A_N\,x_N \\ \hline Z = C_B^T\,B^{-1}\,b + [\,C_N^T - C_B^T\,B^{-1}A_N\,]\,x_N \end{array} \tag{2.1.2}$$

Es una representación abreviada también llamada *diccionario* de (2.1.1) además se verifica que todo *diccionario* tiene asociado una solución básica, es decir, el *diccionario* en el que las variables básicas y la función objetivo están expresadas en términos de las variables no básicas.

El modelo (2.1.1) también puede ser representado de manera extendida:

$$
\begin{array}{ll}
(\text{Min, Max}) & c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \ldots + c_n\, x_n = f(x) \\
\text{s.a.} & a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\
 & a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = b_m \\
 & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Análogamente se denomina la forma canónica del PPL a:

$$
\begin{array}{c}
\textbf{(Min, Max)}\ C^T x \\
\textbf{Sujeto a}\ \ A\, x \leq \text{b} \\
x \geq 0
\end{array}
$$

Esta difiere de la forma estándar en que las restricciones del problema son de desigualdad.

Observación. - De no indicarse lo contrario se asume $m \leq n$.

Hay que recordar que cualquier restricción de igualdad es equivalente a dos restricciones de desigualdad.

Considere:

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n = b_i \qquad\qquad i = 1, \ldots, m$$

es equivalente a las restricciones:

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n \leq b_i \qquad\qquad i = 1, \ldots, m$$

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n \geq b_i \qquad\qquad i = 1, \ldots, m$$

Es común trabajar con desigualdades en los PPL, multiplicando ambos lados por (-1) para convertir una desigualdad de mayor o igual en una de menor o igual y viceversa.

2.1.1.- Variables de Exceso y Holgura

Existen distintas maneras de buscar una solución para un PPL, comúnmente este se otorgará en su forma canónica y habrá que tratarlo matemáticamente para llegar a su forma estándar.

Esto se logra a través de la inclusión de variables de holgura y de exceso en el modelo. Considere la restricción:

$$(1) \quad a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n \leq b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

la variable de holgura x_{n+1} para la restricción (1) se define como:

$$(2) \quad x_{n+1} = b_i - a_{i1}\, x_1 - a_{i2}\, x_2 - \ldots - a_{in}\, x_n \qquad \text{con } x_{n+1} \geq 0$$

Mientras que la variable de holgura x_{k+1} para la restricción (1) se define como:

$$(3) \quad x_{k+1} = a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n - b_i \qquad \text{con } x_{k+1} \geq 0$$

Debe observarse que, al pasar de la forma canónica a la forma estándar, es necesario introducir variables de exceso y/o de holgura a cada una de las m restricciones del problema, esto provoca que la matriz generada cambie su tamaño de (m x n) por [(m x (m x n))].

2.2.- Antecedentes del Método Simplex

La resolución de sistemas de ecuaciones ha sido motivo de interés para los más destacados matemáticos a lo largo de la historia, a tal punto que se desarrolló una rama completa de la matemática destinada a su estudio, conocida como "Programación Matemática" de esta se desprenden: el Álgebra Lineal y la Programación Lineal; dos materias de vital importancia para desarrollo de la tecnología moderna.

El Algoritmo o Método Simplex es una herramienta concebida por la necesidad de encontrar una solución óptima a sistemas de ecuaciones complejos, esta idea ha sido abordada en diversas publicaciones que pueden ser relacionadas directamente con alguna interpretación del Método Simplex, ya sea: por su estructura, su funcionamiento o por su conceptualización, en orden cronológico pueden ser mencionadas:

- El Método de Fourier-Motzkin (1826).

- El Método de Leotief (1941).

- El Método de Dantzing (1947).

- Los Métodos del Punto Interior

  Se describen como aquellos métodos que producen una solución en el interior del área factible del conjunto de soluciones. Existen diferentes versiones, se pueden mencionar:

  1.- Método Convexo de Von Neumann- Históricamente el primero (1948).
  2.- Método Afín de Dikin - Optimización sobre un elipsoide interior (1967).
  3.- Método Elipsoidal de Khachiyan- Con convergencia polinomial (1979).
  4.- Método Proyectivo de Karmarkar -Reducción de potencial (1984).
  5.- Métodos de Camino Central -Con barreras logarítmicas (1986).

2.2.1.- Cronología

1826 – Joseph Fourier se reúne con Carl Friedrich Gauss y resuelven ecuaciones lineales por eliminación, una estrategia que anticipa el nacimiento de la Programación Lineal.

1902 – Gyula Farkas concibe un método para resolver sistemas de inecuaciones lineales.

1941 – Leotief publica "The Structure of the American Economy" donde expone su método.

1946 – George Joseph Stigler publica "Los Costes de la Subsistencia" donde resuelve "El Problema de la Dieta".

1947 – George Dantzing publica el Algoritmo Simplex, Kantoróvich revela que formuló la teoría de manera paralela e independiente, John Von Neumann desarrolla la dualidad para los PPL.

1979 – Leonid Khachiyan presenta "El Método Elipsoidal".

1984 – Narendra Karmarkar introduce "El Método del Punto Interior" para PPL.

Siglo XXI – El método se encuentra incluido en múltiples versiones de software especializado como lo son: TORA, MICROMANAGER, LINDO, PROLIN y QSB, por mencionar algunos.

2.2.2.- El Método de Fourier -Motzkin

A continuación, presento brevemente algunos métodos preliminares al Método Simplex, el primero es "El Método de Fourier-Motzkin" uno de los más populares debido a su practicidad, fue desarrollado por Fourier y redescubierto por Motzkin quien lo utilizó para resolver problemas de Programación Lineal planteándolos como sistemas de desigualdades lineales.

Consiste en un algoritmo de eliminación de variables para resolver un sistema lineal de desigualdades. Este método guarda una profunda relación con el Método de Eliminación de Gauss para sistemas de desigualdades utilizado comúnmente para la resolución de problemas de Programación Matemática.

Para exponer el método de manera dinámica usaremos el siguiente ejemplo:

$$\text{Max } Z = 2\,x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.} \qquad \begin{aligned} x_1 + \,x_2 &\leq 5 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 &\leq 12 \\ x_1 &\leq 4 \end{aligned}$$

$$x_1\,,\; x_2 \geq 0$$

El Método de Fourier-Motzkin consiste en replantear este problema como un sistema de desigualdades de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcrl} x_1 & & & \geq 0 \\ & & x_2 & \geq 0 \\ -\;x_1 & - & x_2 & \geq -5 \\ -2\,x_1 & - & 3\,x_2 & \geq -12 \\ -\;x_1 & & & \geq -\,4 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & \geq Z \end{array}$$

A continuación, ordenaremos cada desigualdad colocando las variables del lado izquierdo.

$$\begin{array}{rcrl} x_1 & & & \geq 0 \\ & & x_2 & \geq 0 \\ -\ x_1 & - & x_2 & \geq -5 \\ -2\,x_1 & - & 3\,x_2 & \geq -12 \\ -\ x_1 & & & \geq -4 \\ 2\ x_1 & + & x_2 - Z & \geq 0 \end{array}$$

Ahora usaremos operaciones elementales para que en cada desigualdad x_1 tenga coeficiente 0,1 o -1.

$$\begin{array}{rcrl} x_1 & & & \geq 0 \\ & & x_2 & \geq 0 \\ -\ x_1 & - & x_2 & \geq -5 \\ -\ x_1 & - & \frac{3}{2}\,x_2 & \geq -6 \\ -\ x_1 & & & \geq -4 \\ x_1 & + & \frac{1}{2}\ x_2 - \frac{1}{2}Z & \geq 0 \end{array}$$

El siguiente paso consiste en sumar las desigualdades con coeficiente 1 con las que tienen coeficiente -1, obteniendo así:

$$\begin{array}{rl} x_2 & \geq 0 \\ x_2 & \geq -5 \\ -\frac{3}{2}\,x_2 & \geq -6 \\ 0 & \geq -4 \\ -\frac{1}{2}\ x_2 - \frac{1}{2}Z & \geq -5 \\ -\ x_2 + \frac{1}{2}Z & \geq -6 \\ \frac{1}{2}\ x_2 - \frac{1}{2}Z & \geq -4 \end{array}$$

Finalmente, se realizan operaciones elementales en este sistema, buscando acotar el valor de x_2 para posteriormente despejar x_1.

2.2.3.- El Método de Leotief

El modelo de planificación de Kantorovich fue retomado en 1941 por un estudiante de la Universidad de Leningrado llamado Leotief, quien creó un método intersectorial que fue replicado en la mayoría de las economías capitalistas para la proyección estadística de sus economías de manera exitosa.

Leotief utilizó un sistema de inecuaciones y ecuaciones lineales, recabando datos reales durante la gran depresión, para estimar: producción, consumo, importaciones, entre otros datos de interés. Su modelo se resume como sigue:

$$a_{11}\, x'_1 + a_{12}\, x'_2 + \ldots + a_{1n}\, x'_n = x_1 - d_1$$

$$\ldots$$

$$a_{n1}\, x'_1 + a_{n2}\, x'_2 + \ldots + a_{nn}\, x'_n = x'_n - d'_n$$

Donde x'_j es la producción de un bien especifico durante el último año, a_{in} x'_n expresa la cantidad de toneladas consumidas de este bien, el consumo total será: $a_{11}\, x'_1 + a_{12}\, x'_2 + \ldots + a_{1n}\, x'_n$, por último, la demanda final será d'_i.

Para el caso particular de estimar demandas finales: d_1, d_2,..., d_n serán usadas en lugar de d'_1, d'_2,..., d'_n, manteniendo a_{ij} constante , y se tendrá que resolver el sistema:

$$(1-a_{11})\, x_1 + \ldots + a_{1n}\, x_n = d_1$$

$$\ldots$$

$$a_{n1}\, x_1 + \ldots + (1-a_{nn})\, x_n = d_n$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

El Teorema de Hawkins-Simon establece que existe exactamente una solución al sistema $(x_1 + ... + x_n)$. Este modelo fue estudiado por USA, Francia y Suiza durante al menos 10 años para estimar valores significativos de sus economías.

En 1942 Tjallining Koopmans desarrolló una teoría de resolución para este tipo de problemas cuando trabajó en un puerto de Washington, donde trató de determinar los planes de embarque al mínimo costo total.

Simultáneamente, pero de forma independiente Kantorovich trabajaba en su propia versión de la teoría que fue publicada poco tiempo después. Ambos fueron galardonados con el Premio Nobel de Economía en 1975, por su contribución a la "Teoría de Optimización de Recursos".

En 1946 George Joseph Stigler publica "Los Costes de la Subsistencia" donde resuelve el "Problema de la Dieta". En 1982, recibe el Premio Nobel de Economía por sus estudios de las estructuras industriales, el funcionamiento de los mercados, las causas y efectos de la reglamentación pública.

Otro ejercicio que contribuyó de manera fundamental a la creación del Método Simplex fue "El Problema del Transporte" diseñado por Hitchcock (1941).
Este problema es uno de los más discutidos en la aplicación de la Investigación de Operaciones, el modelo más antiguo se atribuye a G. Monge (1781) con su publicación "Le problema Geometrique des Deblais" en las memorias de la Academia Francesas de Ciencias.

2.2.4.- El Método Simplex de Dantzing

En 1947 George Bernard Dantzing, formuló el enunciado general al que se reduce cualquier problema lineal y desarrolló un método iterativo muy eficaz de resolución, llamado “Método del Simplex”.

Entre su bibliografía Dantzing menciona que todas las publicaciones anteriores, no pueden ser consideradas como Programación Lineal, pues su enfoque central carecía de la necesidad de optimizar, es decir, carecía del uso de la función objetivo.

En sus memorias Dantzing menciona 3 principales circunstancias que lo llevaron a proponer un método de optimización para PPL:

1.-Su Formación Académica: Laureado de Berkeley en 1939, Dantzing protagonizó una historia peculiar en su alma mater, cuando de manera accidental llegó tarde a una clase de su doctorado con el estadista Jerzy Neyman, únicamente alcanzo a copiar los ejercicios del pizarrón, (pensando que era solo una tarea), sin embargo, encontró que eran ejercicios abiertos, uno de ellos se relaciona con el teorema Neyman-Pearson.

Dantzing reformuló el problema original, de manera que, se requería demostrar la existencia de un multiplicador de Lagrange óptimo en un PPL semi infinito con variables acotadas, esta idea fue anexada en su tesis de doctorado, al mismo tiempo Karush expondría en su tesina una extensión de este método.

2.-Estimulo y Creación: Desde 1938 Dantzing trabajó en la planificación de actividades y recursos controlados por el Pentágono, durante su estancia fue retado por sus compañeros para automatizar sus programas utilizando los más recientes ordenadores: el Mark I (electromecánico, 1944), el ENIAC (electrónico) y el EDSAC (el primero programable, 1947).

3.-El Modelo de Leotief: Dantzing estaba fascinado con el trabajo publicado por Leotief en 1932, donde observó una estructura matricial sencilla que modelaba la economía americana de manera apropiada y simple.

A mediados de 1948, producto de las tenciones de la guerra fría, la URSS decidió bloquear las comunicaciones terrestres entre residentes alemanes y Berlín, fue George Dantzing, quien diseñó un plan de abastecimiento aéreo al costo mínimo, utilizando Programación Lineal.

Finalmente, Jon Von Neumann fue quien estableció los fundamentos matemáticos de la Programación Lineal, al relacionar el tratamiento de matrices con la teoría de juegos de su famoso libro "Theory of Games and Economic Behavior", publicado en conjunto con Oscar Morgenstern en 1944.

El éxito del Método Simplex se atribuye al desarrollo de la computadora y su primera aplicación a gran escala fue en la determinación de una dieta apropiada para soldados estadounidenses al menor costo posible (Problema de la dieta), en el otoño de 1947, bajo la supervisión de J. Leaderman del Proyecto de Tablas Matemáticas de la Oficina Nacional de Estándares.

El método daba solución a un sistema de nueve ecuaciones con setenta y siete variables no negativas, usaba calculadoras de escritorio operadas manualmente y se requirieron 120 días-hombre para terminar. Las hojas de trabajo fueron expuestas en un muro en forma conjunta para formar una enorme tabla que estuvo expuesta durante años en la oficina de Leaderman.

El resultado obtenido por Leaderman y su equipo fue de crucial importancia durante la segunda guerra mundial y resulta más impresionante que el problema fuera estudiado con anterioridad por G.J. Stigler, quien obtuvo una solución que era 24 centavos mayor (a valor de 1939) que el costo mínimo real de $39.69.

El Método Simplex es relevante en el área teórica, ya que, ha sido muy útil para demostrar teoremas en general, es importante mencionar que resolver el Problema de Programación Lineal, es equivalente a resolver un sistema de desigualdades lineales, donde se debe considerar la hipótesis de no degeneración.

2.2.5.-Los Métodos de Punto Interior

La Metodología del Punto Interior (MPI) vio sus inicios en 1984, cuando Karmarkar propuso un algoritmo para Programación Lineal que despertó un enorme interés entre las mejores mentes del momento, prueba de ello, son los cientos de publicaciones que sucedieron los siguientes diez años, donde se proponían versiones alternas del método que demostraron eficiencia, al menos, a nivel teórico.

Estos algoritmos y sus herramientas extendieron su desarrollo a otro tipo de disciplinas y problemas característicos como: Programación Cuadrática Convexa, Programación Semidefinida, Problemas No Convexos y Problemas No Lineales. Además, cuenta con sus propias versiones actualizadas de software independiente.

El Método Simplex y el análisis que generan los Métodos de Punto Interior se encuentran íntimamente relacionados de muchas maneras, sin embargo, una diferencia clave entre ellos es que el Método Simplex supone la existencia de una solución inicial al PPL, después se moverá entre los puntos extremos del conjunto buscando optimizar la función, por otro lado, la MPI se ubica en el “centro” del conjunto para terminar en el “centro” del conjunto de soluciones optimas utilizando el Método del Camino Central.

Los principales resultados de la MPI son la dualidad débil y la dualidad fuerte, además de la existencia de una solución estrictamente complementaria (Teorema Goldman-Tucker), análogamente, las condiciones de la MPI garantizan la existencia del Camino Central.

Es importante mencionar la existencia de una clasificación entre las MPI, consiste en los algoritmos de escalamiento proyectivo y los algoritmos de escalamiento afín. Esta clasificación analiza la convergencia de los métodos, sin embargo, no representa ningún tipo de jerarquía entre los métodos, ya que, ambos métodos demostraron converger en el peor de los casos, en tiempo polinomial.

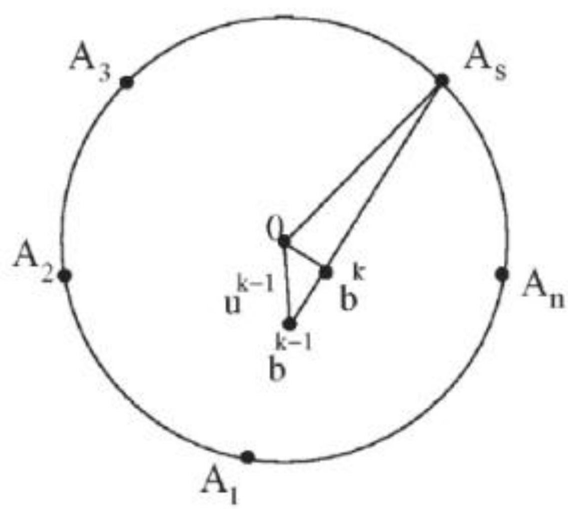
2.2.5.1.-El Método Convexo de Von Neuman (1948)

La MPI toma como principio el Método Simplex y se distingue de este por su utilidad en los PPL que utilizan un alto número de variables y/o de restricciones, en orden cronológico se pueden mencionar:

- **El Método Convexo de Von Neuman (1948)**
- **El Método Afín de Dikin (1967)**
- **El Método Elipsoidal de Khachiyan (1979)**
- **El Método Proyectivo de Karmarkar (1984)**
- **Los Métodos de Camino Central (1986)**

A mediados de 1948, el matemático y estadista Jon Von Neumman, reconocido por su trabajo en la universidad de Berlín, Hamburgo, Princeton y el Proyecto Manhattan, le presentó a Dantzing su Método Convexo, este está constituido en la idea de encontrar una solución factible en un PPL, el método tiene algunas características interesantes como: simplicidad y convergencia inicial rápida, sin embargo, este algoritmo en particular tendrá una convergencia lenta con problemas de gran escala.

C.T.L.S. Ghidini et al. / Linear Algebra and its Applications 436 (2012) 1267–1284



2.2.5.1.1.-Representación del Método de Newman

El método inicia encontrando las columnas A_s de A que forman el mayor ángulo con el residuo b^{k-1}= $A\ x^{k-1}$, luego, el siguiente residuo b^k esta dado por la proyección del origen con el segmento que conecta b^{k-1} con A_s (Figura 2.2.5.1.1).

En el algoritmo de Von Neumman, el nuevo residuo será más pequeño que el anterior, el triángulo (0 $b^{k-1}b^k$) tiene hipotenusa u^{k-1} = 0 b^{k-1}y lado $u^k = b^k$.

Una interpretación del diagrama de flujo del algoritmo puede ser:

1.- Inicialización: Se propone el Vector x_0 y una aproximación $b^0 = P\ x_0$

2.- Calculo de dirección: Se busca una dirección P_s de mejora.

3.- No Factibilidad: Si no hay mejora posible, el problema es no factible.

4.- Nueva aproximación: Se calculan x^k y $b^{k+1} = P\ x^{k+1}$.

El criterio de salida establece que el error relativo (ε) debe ser menor que cierto porcentaje arbitrario, y se encuentra dado por la formula:

$$\varepsilon = \|b^{k-1} - b^k\| \ / \ \|b^{k-1}\| \text{ con } 0 < \varepsilon < 1.$$

2.2.5.2.-El Método Afín de Dikin (1967)

La MPI ha sido extensamente estudiada y por su naturaleza suele ser clasificada en dos tipos: el primer tipo consiste en los *Algoritmos Proyectivos*, estos se caracterizan por ser difíciles de describir, pero fáciles de analizar, la idea principal de este tipo de algoritmos es forzar la convergencia de una secuencia de puntos previamente generados hacia la llamada "Trayectoria Central", donde se ha de extraer el resultado, en este tipo de razonamiento se verifica la convergencia en tiempo polinomial del algoritmo.

En la segunda clasificación se ubican los *Algoritmos de Escalamiento Afín*, estos se distinguen por ser fáciles de describir, pero difíciles de analizar, dicho de otro modo, los Métodos de Escalamiento Afín se basan en ideas geométricas simples e intuitivas, sin embargo, demostrar la convergencia de estos métodos resulta ser una cuestión matemática interesante y complicada.

Uno de los Métodos de Escalamiento Afín más popular es el propuesto a mediados de 1967 por I. I. Dikin, en este método se verifica la convergencia global, además, las variables en el dual convergerán hacia el conjunto de soluciones factibles del dual. El mismo Dikin hace mención que al inicio del algoritmo, se aplica una variante del Método de Newton, para determinar un punto interior en el área de soluciones factibles.

El método propone el uso del dual y el primal del PPL como sigue:

Primal:	Dual:
Min $C^T x$	Max -$b^T x$
s.a. $A x = b$	s.a. c +A^T
$x \geq 0$	$v \geq 0$

Previo a la ejecución del algoritmo, se establecen las condiciones de optimalidad:

Factibilidad del primal: $A\,x = b,\ x \geq 0$

Factibilidad del dual: $c + A^T\ v \geq 0$

Problema Complementario: $x^T\ (c + A^T\ v) = c^T\ x + b^T\ v = 0$

Para $y \geq 0$, la elipse de Dikin se define como:

$$\xi(y) = \{\, x \mid (x-y)^T\ \mathrm{H}\ (x - y) \leq 1\} \qquad \mathrm{H} = \mathrm{diag}\ (y)^{-2}\ ,$$

$\xi(y) \subseteq \mathbb{R}^n$, se desprende que:

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{x_i - y_i}{y_i^2}\right) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_i - y_i}{y_i^2} \leq 1 \ \Rightarrow \ |\, x_i - y_i \,| \leq y_i \ \Rightarrow \ x_i \geq 0$$

Análogamente, es necesario establecer la actualización de Dikin:

Sea $\mathrm{H} = \mathrm{diag}\ (x^k)^{-2}$ donde x^{k+1} es una solución de:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}\ C^T\ x \\ &\text{s.a. }\ A\,x = b \\ &(x\text{-}x^k)^T\ \mathrm{H}(x\ \text{-}x^k) \leq 1 \end{aligned}$$

Es necesario aplicar el Teorema de KKT para hallar: $\nabla x^k = x^{k+1} - x^k$:

$$\begin{vmatrix} H & A^T \\ A & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nabla x \\ \mu v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mu c \\ 0 \end{vmatrix}$$

Donde μ se obtiene después de resolver las restricciones de la elipse de Dikin, de manera explícita:

$$V^k = -(A H^{-1} A^T)^{-1} AH^{-1} \mathrm{c}$$

$$s^k = -H^{-1} (\mathrm{c} + A^T V^k)$$

$$\mu^k = 1 / \sqrt{s^{kT} H s^k}$$

$$\nabla x^k = \mu^k s^k$$

Criterio de Salida:

a) Todas las iteraciones del método deben ser sobre el problema primal:

$$A x^k = b, \ x^k \geq 0$$

b) La factibilidad del problema dual y la dualidad fuerte del mismo, están garantizadas solo en el límite del conjunto.

c) El criterio de salida establece:

$$\mathrm{Min}(\mathrm{c} + A^T V^k) \geq -\varepsilon_{df} \ , \ \left| c^T x^k + b^T V^k \right| \leq \varepsilon_{gap}$$

Donde ε_{df} es una pseudo barrera del método, se convertirá en autentica barrera si y solo si: c $+A^T V^k \geq 0$

$$\underset{i}{\mathrm{Max}} \ \frac{1}{\mu} \frac{\nabla x_i^k}{(x_i^k)^2} \leq \varepsilon_{df} \ , \ \frac{1}{\mu} \left| \sum_i \frac{\nabla x_i^k}{x_i^k} \right| \leq \varepsilon_{gap}$$

Una interpretación del diagrama de Flujo del algoritmo es:

1.-Se comienza con un x_0 estrictamente factible: $x_0 \geq 0$, $A_x = b$

2.-Se propone un x^{k+1} , que sea solución de:

$$\begin{array}{ll} & \text{Min } C^T x \\ \text{s.a.} & A\,x = b \\ & \\ & x \in \xi\,(x^k) \end{array}$$

3.- Se calcula x^{k+1} .

4.- Se verifica la factibilidad.

5.- Se verifica el criterio de salida.

Las siguientes figuras son una representación del método:

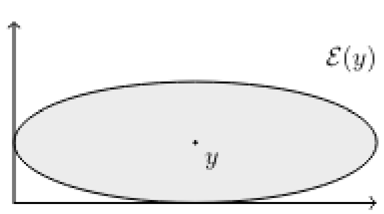


Figura 2.2.5.2.1.-Representación del Método

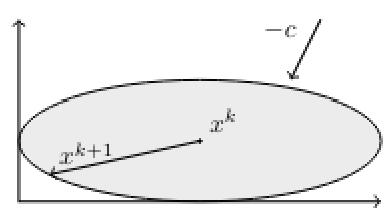


Figura 2.2.5.2.2.-Primera Iteración

2.2.5.3.-Método Elipsoidal de Khachiyan (1979)

El Método Elipsoidal fue desarrollado por L.G Khachiyan, inspirado por el trabajo de distintos matemáticos como: Shor, Yudin y Nemirovski, en 1979 publicó una demostración para un algoritmo que resolvía el PPL en tiempo polinomial, creando así, al menos de manera teórica un algoritmo con mayor eficiencia.

El algoritmo recibe como entrada un conjunto convexo y devuelve un punto del mismo conjunto, averiguando si es un conjunto vacío o no. Su trabajo fue reconocido con el premio Fulkerson de Matemáticas Discretas de la American Mathematical Society.

El algoritmo se aplica de la siguiente manera: Dado un conjunto K determinado por desigualdades lineales, $A\,x < b$, se construye una elipse que contenga todos los puntos de K. La elipse es construida "más pequeña" en cada iteración, de manera que, después de cierto número de iteraciones se converge a un punto de K, o se concluye que K es vacío.

Suponga que se desea encontrar un vector x de dimensión n tal que:

$$A^T\ x \leq b$$

Donde A^T es una matriz de $(m \text{ x } n)$ y b es un vector de dimensión m. Si denotamos por $A_1,\ldots,A_m$ a las columnas de A, entonces equivalentemente:

$$A^{Ti}\ x \leq b_j \qquad \text{para} \quad 1 \leq i \leq m.$$

Supondremos adicionalmente que $n \geq 2$.

Esto generará una sucesión de elipsoides ε_0, ε_1,..., ε_n, de modo que cada uno contenga un vector x que satisfaga $A^T\ x \leq b$, si es que tal vector existe el diagrama de flujo del algoritmo elipsoidal puede ser representado como:

1.- Inicialización: Se define el elipsoide inicial ε_0.

2.-Factibilidad: Se prueba si el centro x_k de ε_k satisface $A^T\ x \leq b$.

3.-Restriccion de salida: Se identifica una restricción $A^{Ti}\ x \leq b_i$ que no se satisface para x_k.

4.-Nuevo Elipsoide: Se calcula un nuevo elipsoide ε_{k+1}.

La siguiente figura es una representación del método:

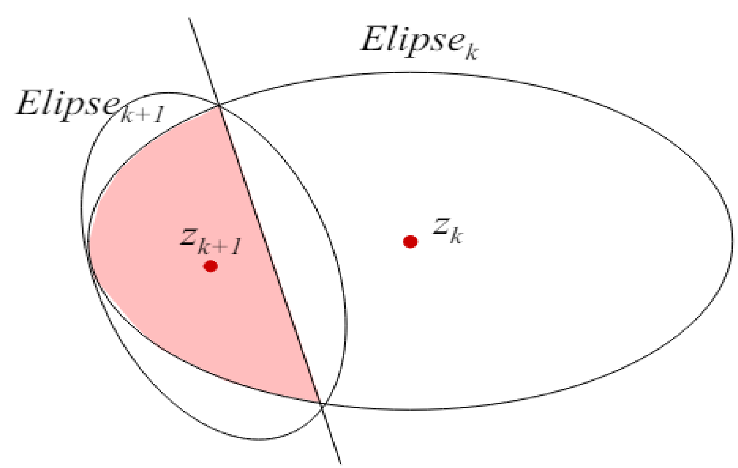


Figura 2.2.5.3.1.-Representación del Método de Khachiyan

2.2.5.4.- El Método Proyectivo de Karmarkar (1984)

El método propone transformar el PPL a un formato especifico, este consiste en centrar y escalar el PPL en su forma unitaria para después encontrar una dirección de mejora, moverse garantizando las condiciones iniciales, finalmente se reduce el espacio factible de solución aplicando nuevamente la transformación. Este proceso se repite hasta que la solución es menor que cierto $\varepsilon > 0$.

El método asume tres propiedades sobre el PPL original: la primera propiedad es que existe al menos un punto factible, y que, el conjunto de puntos óptimos es acotado, la segunda propiedad es que el problema puede ser transformado a su forma "canónica" y la tercera propiedad es que el valor de la función objetivo en el óptimo es conocido. Cabe mencionar que es posible adaptar el método a problemas donde el óptimo no es conocido.

La forma "canónica" de cualquier PPL se obtiene agregando una nueva variable x_n al modelo, esta nueva variable deberá ser igual a uno.

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } C^T x \\
&\text{Sujeto a } \; A\,x = 1 \\
&\qquad e^T x = 1 \\
&\qquad x \geq 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Donde A es una matriz $(n \text{ x } m)$, x, c son vectores en $\mathbb{R}^n$, e es un vector unitario en $\mathbb{R}^n$. Karmarkar propone la forma canónica del PPL como:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } C^T x \\
&\text{Sujeto a } \; \mathrm{A}\,x - b\,x_n = 0 \\
&\qquad\qquad x_n = 1 \\
&\qquad x\,,\, x_n \geq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

El diagrama de flujo del método se puede expresar como:

1.-El método inicia con un punto interior x^* que es una solución factible de (1).

2.- El problema es transformado utilizando una transformación proyectiva, para obtener un problema equivalente en el espacio transformado.

3.- Se calcula una proyección de la dirección de mayor descenso.

4.-Se avanza sobre la dirección de mayor descenso.

5.-El resultado es transformado al espacio original.

El Método de Karmarkar puede ser dividido en dos operaciones centrales: la primera es el escalamiento de las variables, buscando acercar x_k hacia el vector unitario e; la segunda operación es el escalamiento de cada punto hacia la suma de sus variables, el resultado final es que x_k es transformado en:

$$(e\ /\ n) = (1/\ n\ , \ldots\ , 1\ /\ n)^T$$

Además, la suma de los componentes en cualquier punto del espacio transformado es 1. Matemáticamente la transformación proyectiva envía a x hacia:

$$x = \frac{x^{-1}x}{e^T x^{-1}x}$$

Donde x^{-1} = Diag (x_k). La correspondiente transformación inversa es:

$$x = \frac{x\bar{x}}{a^T x\bar{x}}$$

2.2.5.5.- Los Métodos del Camino Central (1986)

.

Existen diferentes propuestas para esta metodología, la propuesta general consiste en avanzar por el interior del espacio de soluciones factibles buscando proximidad con el punto óptimo, a través de pasos de tamaño μ lo que representa la “barrera”.

El “Camino Central” es una curva algebraica, descrita por restricciones lineales y cuadráticas que surgen por la introducción de variables de exceso y de holgura al modelo.

Considere el siguiente PPL en su forma estándar:

$$\begin{aligned} &\text{Min } C^T x \\ \text{s.a.}\quad &\text{A } x = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Donde A es una matriz con n columnas y rango d, adicionalmente se asume que el poliedro generado es acotado, es decir, es un politopo. Se define la función de la barrera logarítmica de la siguiente manera:

$$f_\mu (x) = c^T x + \mu \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

Donde μ > 0, esto define una serie de problemas de optimización relacionados:

$$\begin{aligned} &\text{Max } f_\mu (x) \\ \text{s.a.}\quad &A\, x = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Dado que la función logaritmo es estrictamente convexa en el eje real positivo, la función $f_\mu\ (x)$ es estrictamente cóncava y alcanza un único máximo $x^*(\mu)$ en el interior de la región factible del politopo.

Cabe mencionar que $f_\mu\ (x)$ tiende a $-\infty$ cuando x se acerca a la frontera de P. El Camino Central del PPL, se define como la curva $\{\ x^*(\mu)\ \mid\ \mu > 0\}$, que se encuentra estrictamente dentro del politopo P.

Para comprender mejor esta noción, considere el problema dual:

$$\text{Min } b^T\ y$$

$$\text{s.a. } A^T\ y \geq c$$

Las soluciones del problema primal y dual están caracterizadas por las siguientes condiciones complementarias:

$$A\,x = b\ , \quad A^T\ y - s = x$$

$$x, s \geq 0\ , \quad x_i\ s_i = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

El Camino Central se obtiene reemplazando 0 por μ:

$$A\,x = b\ ,\ A^T\ y - s = x$$

$$x_i\ s_i = \mu \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Si eliminamos las coordenadas de los vectores y, s se obtiene la ecuación del camino central $x = x^*(\mu)$, este resultado se obtiene de las propiedades generales de los multiplicadores de Lagrange. El Camino Central $x^*(\mu)$ converge hacia la solución óptima del problema original cuando $\mu \to 0$.

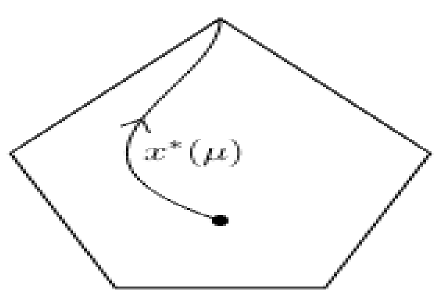


Figura 2.2.5.5.1.- El Camino Central: una curva sobre un politopo factible.

2.2.6.- El Método Simplex en la Actualidad

La importancia moderna del Método Simplex radica en la velocidad para encontrar soluciones a sistemas de desigualdades lineales, basta señalar que realizar un cálculo en problemas de más de quinientas variables a mano sería prácticamente imposible, sin embargo, utilizando computadoras modernas se reduce a menos de cinco minutos.

El Método Simplex es tan conocido que se han desarrollado distintas variantes, como el Método Elipsoidal (Khachiyan), el Método Gráfico (Dantzing) y la Metodología del Punto Interior (Karmarkar), cabe mencionar que este último tuvo un impacto enorme no solo en el área de la Programación sino también en la Computación y la Matemática, debido a que teóricamente era superior al Algoritmo Simplex, esto provocaría una serie de publicaciones que cuestionaban y enriquecían el algoritmo, motivando el estudio de los Métodos Interiores[(1).]

Después de 1947 el Problema de Programación Lineal es planteado como el de encontrar soluciones básicas factibles que, geométricamente, coincidan con los vértices del poliedro que está definido por las restricciones en su forma estándar. El proceso de intercambiar las columnas que no forman parte de la base por columnas base puede ser visto como el desplazamiento del algoritmo entre puntos extremos del poliedro. Esta nueva interpretación traería una enorme popularidad y desarrollo para la Programación Lineal.

Los siguientes 30 años el Método de Simplex fue el favorito para la resolución de Problemas Lineales de gran tamaño. En el año 2000 fue incluido entre los 10 algoritmos más transcendentes del siglo XX, es decir el “top ten” de la revista “Computing in Science and Engineering”.

(1) La técnica de optimización denominada Puntos Interiores tiene iteraciones por el interior de la región factible a diferencia del Método Simplex que tiene iteraciones por sus puntos extremos, disminuyendo considerablemente el tiempo de solución de los problemas.

Hoy en día todas las computadoras incluyen alguna forma del Método Simplex en su software básico. En 1951 el ordenador SEAC (Standards Eastern Automatic Computer) resolvía problemas con 48 restricciones y 72 variables. En 1963 el IBM 7090 resolvía problemas con 1024 restricciones y 10 años más tarde otro IBM, el modelo 360, era ya capaz de utilizar 32,000 restricciones.

En la era de la globalización, el impacto del Método Simplex se puede ver en la administración empresarial, donde cotidianamente surgen situaciones difíciles de controlar, como lo son: el aprovechamiento de recursos, la minimización de costos, la distribución de la fuerza laboral, entre otros. También lo podemos ver en la bolsa de valores, donde se debe analizar el riesgo de pérdida en determinado portafolio de inversión para así elegir una estrategia apropiada sujeto a las restricciones dictadas por el mercado.

Incluso podemos percibir el impacto del Método Simplex en las propias estrategias de inversión, ya que, estas buscan maximizar la ganancia a través de la optimización, que es construida utilizando valores subjetivos como: oferta, demanda, disponibilidad o incluso la probabilidad de desastres naturales en el caso particular del mercado de *commodities*.

Resulta curioso que el principal motivo para el impulso acelerado en la tecnología digital (y en consecuencia del Método Simplex), se dio por la enorme inversión de los gobiernos en distintas guerras, esto tendría como consecuencia el desarrollo anticipado de las Ciencias Computacionales.

El Método Simplex es una herramienta importante que continúa ahorrando millones a todo tipo de empresas y negocios, por ejemplo:

- En 1981, en el laboratorio American Edwards se fabricó una nueva válvula cardiaca para ser utilizada en seres humanos. Sid Hilal y Warren Erikson desarrollaron un Programa Lineal para seleccionar la combinación de proveedores que se acercara más a la medida correcta de las válvulas cardiacas humanas. Resultado: ahorros anuales de 1,5 millones de dólares.

- SANTOS, Ltd., Australia ahorró 3 millones de dólares en 1987 optimizando las inversiones de capital para producir gas natural durante 25 años.

- Texaco Inc., ahorró 30 millones de dólares en 1989 optimizando la mezcla de ingredientes disponibles para que los productos de gasolina cumplieran con los requerimientos de ventas y calidad.

Sin duda alguna el Método Simplex mantiene vigencia y relevancia en la ciencia actual, aún es objeto de estudio para universitarios e investigadores, su teoría y aplicaciones continúan siendo exploradas alrededor del mundo.

2.3.- Preliminares

Definición 2.3.1.- Sea V un conjunto de elementos no vacío, y sea f una función inyectiva en V, tal que $V \subseteq \mathbb{R}^n$, y $f : V \to \mathbb{R}$, decimos que V forma un campo escalar con f.

Definición 2.3.2.- Un conjunto no vacío de elementos, V, en el que están definidas las operaciones de suma (interna) y multiplicación por escalares de un cuerpo $\mathbb{H}$ (operación externa), cumpliendo las diez condiciones o axiomas siguientes, V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{H}$.

Para la suma:

1) Cerradura: $\forall\, u, v \in V$, $(u + v) \in V$

2) Asociativa: $\forall\, u, v, w \in V$, $u + (v + w) = u + (v + w)$

3) Conmutativa: $\forall\, u, v \in V$, $u + v = v + u$

4) Existencia de elemento neutro: $\exists\ 0 \in V \mid u + 0 = 0 + u = u$, $\forall\, u \in V$

5) Existencia de elemento opuesto: $\forall\, u \in V$, $\exists\ (-u) \mid u + (-u) = (-u) + u = 0$

Para la multiplicación por escalares del cuerpo:

6) Cerradura: $\forall\, u \in V \wedge \forall\, \alpha \in \mathbb{H}$, $(\alpha \cdot u) \in V$

7) Distributiva con la suma de vectores: $\alpha\,(u + v) = \alpha\, v + \alpha\, v$, $\forall\, u, v \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{H}$

8) Distributiva con la suma de escalares: $(\alpha + \beta)\, u = \alpha\, u + \beta \mathrm{u}$, $\forall\, u \in V$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{H}$

9) Pseudo-asociativa respecto de la multiplicación por escalares:

$$\alpha\,(\beta\, u) = (\alpha\, \beta)\, u\,, \quad \forall\, u \in V, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{H}$$

10) $1 \cdot u = u \cdot 1$ es el elemento neutro del producto en el cuerpo $\mathbb{H}$.

Definición 2.3.3.- Sea un conjunto finito de elementos $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subseteq$ V, con V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{H}$. Se dice que $v \in$ V es una combinación lineal de los elementos de S si:

$$\exists\ c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{H}\ \mid\ v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_p v_p$$

A los escalares c_1, c_2, . . ., c_p se les llama coeficientes de la combinación. Estos pueden tomar cualquier valor de $\mathbb{H}$, incluido el 0.

Definición 2.3.4.- Un conjunto de elementos $S = \{ v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subseteq$ V es linealmente dependiente si existen unos escalares $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$, no todos nulos, tales que:

$$c_1 v_1 + c_2\ v_2 + \ldots + c_p v_p = 0_v$$

Definición 2.3.5.- Un conjunto es linealmente independiente si y solo si no es linealmente dependiente. Es decir, si:

$$c_1 v_1 + c_2\ v_2 + \ldots + c_p v_p = 0_v \Rightarrow c_i = 0, \forall\ i = 1, \ldots, p$$

Definición 2.3.6.- Una función $f: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal si existen $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que $f\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i\ x_i$.

Definición 2.3.7.- Se dice que S es un conjunto afín, si contiene la recta que pasa por cualesquiera dos de sus puntos, es decir, si:

$$x, y \in \text{S} \rightarrow \alpha\ x + (1 - \alpha)\ y \in S, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Definición 2.3.8.- Diremos que una combinación lineal $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$, de los puntos x_1, x_2, . . ., x_p es una combinación afín de dichos puntos, si:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1, \alpha_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \ldots, n)$$

Definición 2.3.9.- Un conjunto finito de puntos es *afínmente independiente,* si ninguno de sus puntos puede expresarse como combinación afín de los restantes.

Definición 2.3.10.- Un conjunto afín V es de dimensión r si el número máximo de puntos afínmente independientes es (r +1).

Definición 2.3.11.- Un hiperplano H $\subseteq \mathbb{R}^n$, es un conjunto afín de dimensión (n-1) en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.3.12.- Todo hiperplano H= $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid a^T\ x \geq b \}$ genera en el espacio $\mathbb{R}^n$ dos semi-espacios cerrados H^+ y H^-, definidos por:

$$H^+ = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b \} \quad \wedge \quad H^- = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \geq b \}$$

Observación 2.3.1.- $H^+ \cup H^- = \mathbb{R}^n$, análogamente, $H^+ \cap H^-$ = H

Definición 2.3.13.- Dados dos vectores x,y $\in \mathbb{R}^n$, se define su producto interno denotado por $(x \cdot y)$ ⌄ $x^T y$ como:

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad , \qquad i = 1, \ldots, n$$

Definición 2.3.14.- La norma euclidiana de un vector x está dada por:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

Observación 2.3.2.- La norma euclidiana de un vector satisface las siguientes propiedades:

a) $\|x\| \geq 0$
b) $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$
c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$
d) $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\ \|x\| \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ , \forall\, x \in \mathbb{R}^n$

Definición 2.3.15.- La distancia entre dos puntos x, $y \in \mathbb{R}^n$ se define como:

$$d\,(x, y) = \|x - y\|$$

Definición 2.3.16.- La bola cerrada con centro en x_0 y radio $r \geq 0$, se define como:

$$B_r(x_0) = \{\, x \in \mathbb{R}^n : \|x_0 - x\| \leq r \,\}$$

Definición 2.3.17.- Un conjunto S en $\mathbb{R}^n$ se dice que es acotado si existe una bola abierta que lo contiene. En caso contrario diremos que el conjunto S es no acotado.

Definición 2.3.18.- Un sistema arbitrario de m ecuaciones lineales con n incógnitas se puede definir como:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = b_m \end{array} \qquad (2.3.18)$$

Donde:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ es la matriz formada por los coeficientes, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ es la matriz de las variables, b $= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ es la matriz de los términos independientes.

Observemos que:

a) El sistema descrito en (2.3.18) contiene únicamente coeficientes de primer orden, además puede ser expresado como $A\,x = b$.

b) Para el caso particular en que $A\,x = 0$ con $b_i = 0$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots\, m$, al sistema se le denominara sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

c) Para el caso particular en que $A\,x = b$ con $b_i \neq 0$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots\, m$, al sistema se le denominara sistema de ecuaciones lineales no homogéneas.

Definición 2.3.19.- Sea $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \Longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\bar{a} \in \mathbb{R}$.

Decimos que f tiene un máximo global en $\bar{a}$ si $f\,(\bar{x}) \leq f\,(\bar{a})$ para todo $\bar{x} \in S$, a $f(\bar{a})$ le llamamos el máximo global de f en S.

Decimos que f tiene un máximo relativo en $\bar{a}$ si existe una bola abierta $B_r\,(\bar{a})$ tal que para todo $\bar{x}\ \in B_r\,(\bar{a})$, $f\,(\bar{x}\,) \leq f\,(\bar{a})$.

Decimos que f tiene un mínimo absoluto en $\bar{a}$ si $f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$ para todo $\bar{x} \in S$. A $f\,(\bar{a})$ se le conoce como el mínimo global de f en S.

Decimos que f tiene un mínimo local en $\bar{a}$ si existe una bola abierta $B_r\,(\bar{a})$ tal que para todo $\bar{x}\ \in B_r\,(\bar{a})$, $f\,(\bar{x}) \leq f\,(\bar{a})$.

Teorema 2.3.1.- Sea $f\colon S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Supongamos que f tiene un valor extremo en un punto interior $\bar{a}$ de S, además f es diferenciable en $\bar{a}$. Entonces el gradiente de f se anula en $\bar{a}$, es decir:

$$\nabla f(\bar{a}) = 0$$

Definición 2.3.20.- Si existen $b \in \mathbb{R}$ y h una función lineal tal que $h\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b$ esto representa una restricción lineal.

Definición 2.3.21.- Una combinación lineal de los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_p$ se dice que es una combinación convexa de ellos si:

$$\sum_{i=1}^{P} \alpha_i = 1 \qquad \wedge \qquad \alpha_i \geq 0\,,\ i = 1, 2, \ldots\, m$$

Definición 2.3.22.- Un conjunto C es convexo si todas las combinaciones convexas formadas por puntos de C pertenecen a C, es decir:

$$\forall\, x_1, x_2 \in C: \forall\, \lambda \in [0, 1] \rightarrow \lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \in C.$$

Definición 2.3.23.- Dado un conjunto S, se define su envoltura o cerradura convexa, denotada por $conv\,(S)$, como el conjunto de todas las combinaciones convexas de los puntos de S.

Definición 2.3.24.- Sean K_1 y K_2 dos conjuntos convexos y sea $K = K_1 \cap K_2$ entonces K es un conjunto convexo.

Definición 2.3.25.- La suma $(K_1 + K_2)$ de dos conjuntos K_1, K_2 convexos es un conjunto convexo.

Definición 2.3.26.- Dados dos conjuntos ajenos S_1, S_2 en $\mathbb{R}^n$, se dice que el hiperplano $H = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b \}$ separa a S_1de S_2 si $S_1 \subset H^+ \wedge S_2 \subset H^-$, es decir:

$$a^T x \leq b \qquad \forall x \in S_1$$

$$a^T x \geq b \qquad \forall x \in S_2$$

Definición 2.3.27.- El hiperplano H es un hiperplano de soporte del conjunto S, si H tiene intersección no vacía con S y si S está contenido en uno de los dos semi-espacios cerrados H_1 y H_2 definidos por el hiperplano H .

Observación 2.3.3.- Sea S un conjunto no vacío en $\mathbb{R}^n$, un punto y$\notin S$ entonces existe un hiperplano H que separa a y de S, es decir, existe:

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$$

Tal que $a^T y > b \wedge a^T x \leq b, \forall x \in S$.

Definición 2.3.28.- Un conjunto no vacío $C \in \mathbb{R}^n$ es llamado un cono convexo con vértice en el origen si para cualquier $x \in C$, se verifica que $\lambda x \in C$, $\forall \lambda \geq 0$.

Definición 2.3.29.- Un punto x en el conjunto convexo C, es un punto extremo de C si no hay dos puntos x_1, x_2 en C, con $x_1 \neq x_2$, tales que x pueda expresarse como:

$$x = x_1 + (1 - \alpha)\, x_2 \text{ para algún } 0 < \alpha < 1$$

Definición 2.3.30.- Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo no vacío. Un vector $d \in \mathbb{R}^n$, distinto de cero, es una dirección de S si para todo $x \in S$ se verifica que $(x + \lambda\, d) \in S$, $\forall\, \lambda \geq 0$.

Definición 2.3.31.- Una dirección d de S es una dirección extrema si no se puede escribir como combinación lineal positiva de dos direcciones distintas, es decir, si:

$$d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \text{ para } \lambda_1, \lambda_2 > 0, \text{ entonces } d_1 = \alpha\, d_2 \text{ para algún } \alpha > 0$$

Observación 2.3.4.- En la función objetivo del PPL, $f\ (x) = C^T x$ se verifica que:

$$\text{Max } [\, f\ (x)] = - \text{ Min } [\, - f\ (x)].$$

$$\text{Min } [\, f\ (x)] = - \text{ Max } [\, - f\ (x)].$$

Definición 2.3.32.- Se dice que una función real f definida en un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ es convexa si para cualesquiera x, $y \in S$:

$$f\ (\alpha\, x + (1 - \alpha)\, y) \leq \alpha\, f\ (x) + (1 - \alpha)\, f\ (y)\ ,\ 0 \leq \alpha \leq 1$$

Observación 2.3.5.- La función objetivo del PPL, $f\ (x) = C^T\ x$ es una función lineal y convexa.

Definición 2.3.33.- Se llama poliedro a un conjunto de la forma $p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Con $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$, es decir, un poliedro es una intersección finita de semi -espacios.

Observación 2.3.6.- Un poliedro es un conjunto cerrado y convexo que puede ser representado por una cantidad finita de desigualdades lineales.

Definición 2.3.34.- Un poliedro convexo generado por n puntos en $\mathbb{R}^n$ en posición general se denomina simplejo y se denota como S^n.

Observación 2.3.7.- Un punto de un poliedro P es un vértice si y solo si no puede expresarse como combinación convexa de otros dos puntos distintos de P.

Definición 2.3.35.- Sea c, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ con A una matriz de n x m. El problema primal de un PPL se define como:

$$\text{(P)}\ \ \text{Min}\, x\ \{C^T \ : A\,x \ = b \mid x \geq 0\}$$

Análogamente, el dual se define como:

$$\text{(D)}\ \ \text{Max}\ (y, s)\ \{b^T\ y:\ A^T\ y + s \ = c \mid s \geq 0\}$$

El posible conjunto de soluciones factibles para (P) y (D) se define como P y D respectivamente.

El problema (P) se considera factible si P es no vacío, si P es vacío entonces (P) es incompatible, si existe una secuencia de posibles soluciones que haga que la solución tienda a infinito negativo entonces (P) es no acotado. Una afirmación análoga es válida para (D).

Definición 2.3.36.- Si x es factible para el primal (P), y y es factible para el dual (D), además $c^T x = b^T y$, entonces x es solución óptima para (P) además y es solución óptima para (D).

Teorema 2.3.2.- Si el problema primal (P) tiene una solución óptima x_j^*= (x_1^*, x_2^* , x_3^*,…, $x_n^*)^T$, entonces el dual (D) tiene una solución óptima y_i^*= (y_1^*, y_2^* , y_3^*,…, $y_n^*)^T$.

Definición 2.3.37.- Se dice que la restricción $a^i x \leq b_i$ es activa en x^* si $a^i x^* = b_i$, es decir, si se satisface como igualdad en x^*, mientras que al conjunto $K = \{\, i : a^i\, x = b_i \}$ de índices en x^*, se le denomina conjunto activo.

Teorema 2.3.3.- La función objetivo de (P) es menor o igual que la función objetivo de (D), para cualquiera x, y soluciones en sus respectivos problemas.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$$

Teorema 2.3.4.- El dual (D) del problema dual es el problema primal (P), en otras palabras, si el objetivo primal es minimizar entonces el objetivo del dual es maximizar.

Teorema 2.3.5.- La solución $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*)^T$ es solución óptima del problema primal (P) si y solo si existen escalares $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, $\mu_j \geq 0$, $j \in J$ tales que:

$$\mathrm{c} = \sum_{i \in I} \lambda_i a^i + \sum_{j \in J} \mu_j (-e_j)$$

Definición 2.3.38.- A un vector que satisface las restricciones de un PPL incluyendo las de no negatividad se le llama "*solución factible*" y al conjunto de todas las soluciones factibles se le llama "*región factible*", además, a las soluciones factibles que constituyan un vértice del poliedro se les denomina "*soluciones básicas factibles*".

Observación 2.3.8.- Un conjunto factible de un PPL, puede ser visto como un poliedro.

Observación 2.3.9.- Si la intersección de las regiones correspondiente a cada una de las restricciones es vacía (Ø), el problema no tiene solución.

Proposición 2.3.1.- Sea $X = \{\, x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$. El punto x es un vértice o punto extremo de X si y solo si x es una solución posible básica del sistema.

Definición 2.3.39.- Sea x un punto de solución a un PPL, si por lo menos una componente de x_B es igual a cero entonces x se denomina solución básica degenerada del PPL.

Definición 2.3.40.- Se define como solución óptima a aquel punto de la región factible que obtiene el valor óptimo de la función objetivo.

Observación 2.3.10.- Está condicionada la existencia y la unicidad de la solución óptima.

Teorema 2.3.6.- Considere el siguiente Problema de Programación Lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Máx. } C^T x \\ &\text{s. a} \quad A\,x = b \\ &\qquad\quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Donde $C \in \mathbb{R}^n$, A es una matriz de $m \times n$ con rango m y $b \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que la región factible $\{ F = x \in \mathbb{R}^n : A\,x = b,\ x \geq 0\}$ es no vacía y sean x_1, x_2,⋯, x_k los puntos extremos y d_1, d_2,⋯, d_l las direcciones extremas de la región factible F. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución óptima finita es que $c^T\ d_j \leq 0$, $\forall j = 1, \cdots, l$. Si este es el caso, entonces existe un punto x_j extremo que resuelva el problema.

Teorema Fundamental de la Programación Lineal

Dado un PL, en su forma estándar.

$$\begin{aligned} &\text{Máx. } C^T x \\ &\text{s. a } \quad A\,x = b \\ &\qquad\quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Supongamos que el rango de A es m, se tiene que:

(a) Si existe una solución posible, también existe una solución posible básica.

(b) Si el problema tiene una solución posible óptima, entonces también tiene una solución posible básica óptima.

Regla de Bland

Es una variante del Método Simplex, se utiliza cuando el PPL tiene una solución básica inicial degenerada, es decir, que alguna de las soluciones contiene un cero en alguna de sus variables, por lo que la aplicación del método provoca ciclaje. Este obstáculo ha sido superado mediante la aplicación del "Método Lexicográfico", el cual establece un orden lexicográfico a las restricciones del problema, lo que permite reordenar el problema para evitar el ciclaje.

La Regla de Bland es un criterio que aprovecha el orden lexicográfico previo a la aplicación del Método Simplex, con el propósito de que este finalice en un número finito de iteraciones siempre que la variable de entrada a la base sea la de menor índice entre las que tienen coeficiente positivo en la función objetivo, mientras que la variable de salida se escoge como la que tiene el menor índice entre las variables que restringen el aumento de la variable de entrada.

Capítulo III.- Solución a un Problema de Programación Lineal

3.1.- Introducción

En la Matemática Aplicada existen distintos métodos que buscan dar solución a sistemas de ecuaciones lineales, el desarrollo de este capítulo está centrado en los resultados obtenidos al utilizar dos metodologías de resolución: la primera a través del Método Gráfico y la segunda mediante la representación de *Tableaus* desarrollada por G. Dantzing.

El Método Simplex es un algoritmo iterativo de búsqueda, en particular, busca el valor óptimo (Máx. o Mín.) de la función lineal $f\ (x)= C^T x$, dentro del poliedro P, definido por el sistema de restricciones lineales $Ax = b$.

El algoritmo usa una solución básica inicial x_0, es decir, el método supone la existencia de una solución básica inicial. Después, se evalúa la función objetivo en ese punto, a continuación, se buscará otro punto que tenga un mejor valor en la función objetivo que aún satisfaga las restricciones iniciales, es decir, una solución básica factible.

De acuerdo con lo visto anteriormente, la aplicación del Método Simplex puede reducirse a la búsqueda de los vértices de un poliedro y a la comparación de estos valores evaluados en la función objetivo para seleccionar el valor óptimo.

Considerando que el poliedro tiene un número finito de vértices, bastaría con tomar el mayor de los valores de la función objetivo sobre el conjunto de evaluaciones de dichos puntos en la función original.

Sin embargo, conocer el número exacto de vértices de un poliedro arbitrario es una tarea que aún continua en fase de investigación, P. McMullen (1970), nos proporciona una cota superior para el numero de vértices.

$$f\ (m,n)=\binom{n \quad - \quad [\frac{m+1}{2}]}{n \quad - \quad m} + \binom{n \quad - \quad [\frac{m+2}{2}]}{n \quad - \quad m}$$

Donde $[x]$ representa la función parte entera o mayor entero. Así, por ejemplo:

Con m = 8, n = 16, f (8,16) = 660.

3.2.- El Método Gráfico

Uno de los métodos de solución más dinámicos es el conocido “Método Gráfico”, este método propone graficar las restricciones y la función objetivo en un plano cartesiano para después buscar la intersección y obtener el poliedro generado, para finalmente encontrar el óptimo.

Este es un método fácil de aplicar y sencillo de enseñar, ya que es método muy visual, sin embargo, presenta algunas limitantes, ya que su uso se ve limitado a tres dimensiones como máximo, adicionalmente, los PPL con muchas variables aumentan la dificultad en la interpretación de los resultados.

El método presenta una enorme limitante al no poder realizar un análisis de sensibilidad luego de realizar cambios en los coeficientes o al lado derecho de las restricciones, sin embargo, la tecnología ha quebrantado esta limitante. Actualmente existen distintas herramientas para graficar que facilitan el análisis de sensibilidad, por otro lado, obtener puntualmente el óptimo puede ser complicado en ciertos casos debido a que el óptimo se obtiene de manera visual.

Es importante mencionar que este es un método de solución, por ello, siempre será necesario considerar las características del modelo matemático inicial para generar apropiadamente el poliedro, cabe mencionar que el conjunto generado puede ser: vacío, finito o no acotado.

El procedimiento general para aplicar el Método Gráfico puede ser descrito de la siguiente manera:

1.-Dibujar un sistema de coordenadas cartesianas.
2.-Establecer una escala apropiada para el problema.
3.-Graficar las restricciones, incluyendo las de no negatividad, estas definirán una región de acuerdo con el signo de la restricción que las genera.
4.-La intersección de todas las regiones determinará la región factible.
5.- Se determinan los puntos extremos y se evalúa la función en ellos para obtener el óptimo.

El acercamiento practico general para resolver PPL es conocer el conjunto factible del poliedro para ello considere:

$$\begin{aligned} \text{Máx.} \quad & C^T x = k \\ \text{s. a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Donde k es constante, de este modo, $f\ (x)$ describe la ecuación de un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ que es normal al vector c. Si asignamos los valores k_1, k_2, con $0 < k_1 < k_2$, obtendremos hiperplanos H_1, H_2.

Repitiendo este proceso se puede concluir que el valor máximo de la función objetivo ocurre en él o los puntos de contacto del hiperplano P con el hiperplano de soporte a P que es normal al vector c.

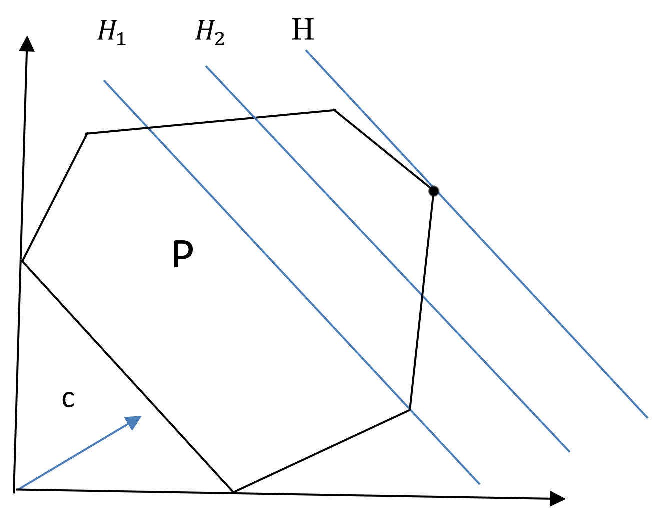


Figura 3.2.1.- Representación Geométrica del PPL

Ejemplo 3.2.1.- PPL con solución única. (Tomado del libro "Curso de Programación Lineal, Teoría y Aplicaciones")

$$\text{Max } 3x_1 + 2x_2$$
$$\text{s.a. } x_1 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

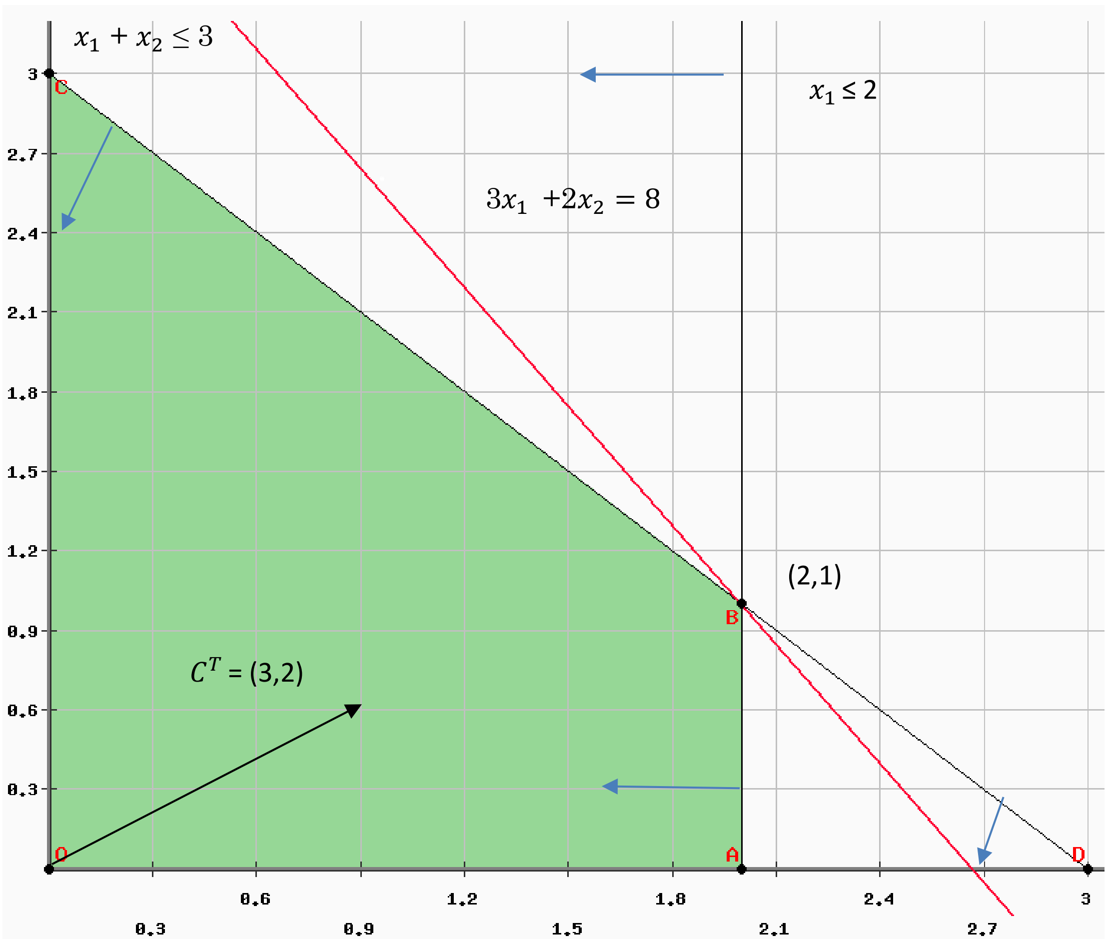


Figura 3.2.1.1.- PPL con Solución Óptima Única

Observe que la gráfica 3.2.1.1 consiste de las desigualdades que forman el poliedro P, expresado por el área en color verde, las flechas azules señalan hacia las áreas que satisfacen las desigualdades correspondientes, la linea roja representa un hiperplano de soporte para C^T, finalmente, observe que el punto óptimo del problema se alcanza únicamente en el punto (2,1) que es normal al vector C^T =(3,2).

Ejemplo 3.2.2.- PPL con Múltiples Soluciones Optimas. (Tomado del libro "Curso de Programación Lineal, Teoría y Aplicaciones")

$$\text{Max} \quad 2\,x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.} \qquad x_1 + 2\,x_2 \leq 4$$

$$2\,x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1,\, x_2 \quad \geq 0$$

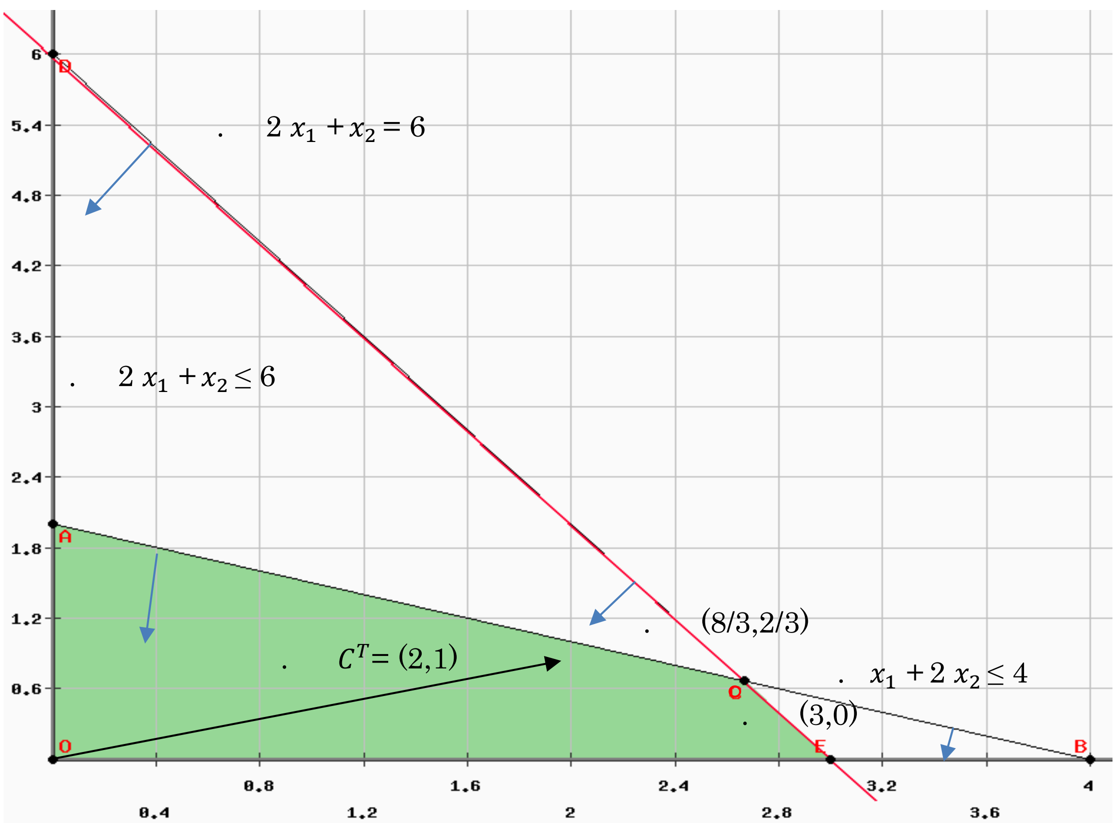


Figura 3.2.2.1.- PPL con Múltiples Soluciones

Observe que la función alcanza su máximo valor en todos los puntos del segmento $\overrightarrow{OE}$, donde O^T = (8/3, 2/3) ^ E^T = (3 ,0), estos puntos satisfacen todas las restricciones del PPL, (incluidas las de no negatividad), y todos tienen el mismo valor en la función objetivo: f (3,0) = 6, f (8/3, 2/3) = 6, por lo que se reconoce que todos los puntos son óptimos.

Ejemplo 3.2.3.- PPL No Acotado (Tomado del libro "Curso de Programación Lineal, Teoría y Aplicaciones")

$$\text{Max} \quad 4\,x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad 2\,x_1 - x_2 &\geq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ -x_1 + 8x_2 &\leq 44 \\ x_1,\, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

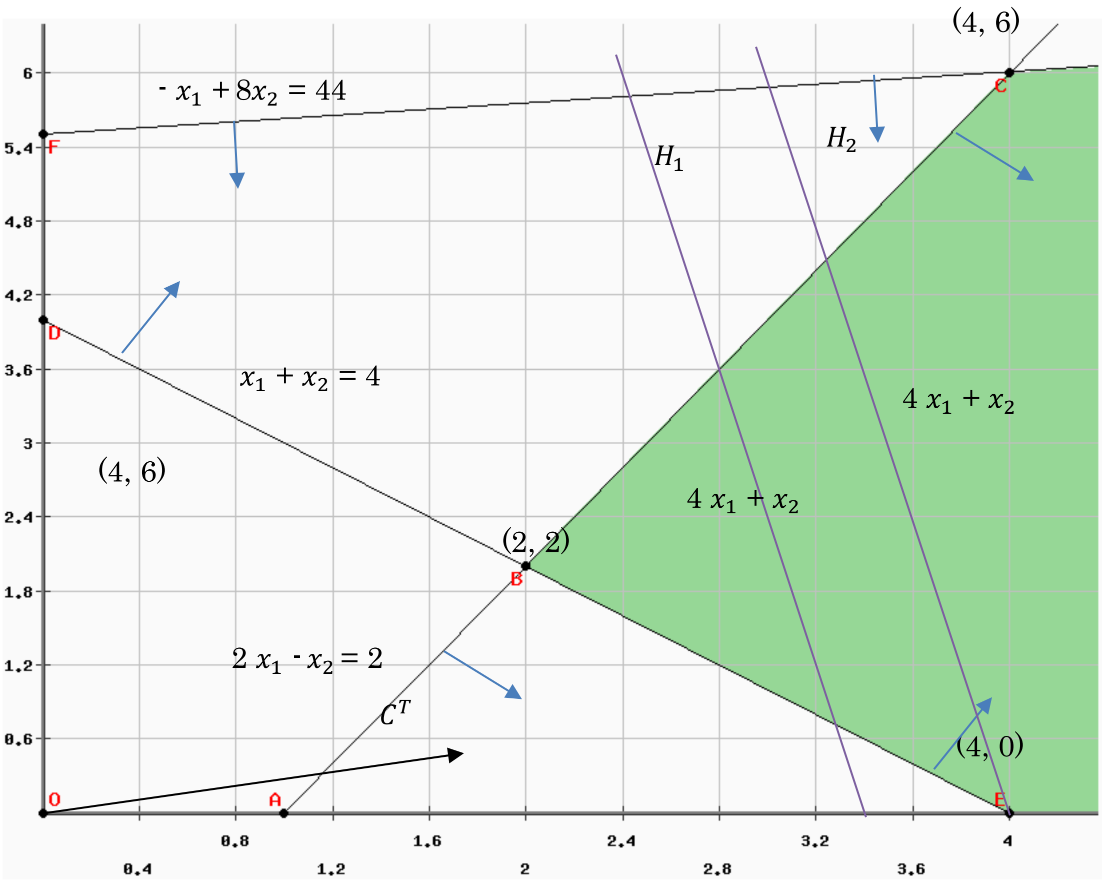


Figura 3.2.3.1.- PPL No Acotado

Observe que existen una infinidad de soluciones posibles, a diferencia del ejemplo anterior, es posible tomar valores de x que sean crecientes, encontrando puntos que satisfagan las restricciones a lo largo de todo el plano.

Compruebe que H_1es un hiperplano de soporte para C^T, análogamente, H_2 es también un hiperplano de soporte para C^T al ser una traslación de H_1, este proceso puede repetirse de manera infinita, encontrando hiperplanos de soporte para C^T, por lo que la solución es NO ACOTADA.

Ejemplo 3.2.4.- PPL Incompatible (Vacío)

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2\,x_1 + 3\,x_2 \\ \text{s.a.} & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1 - 5\,x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

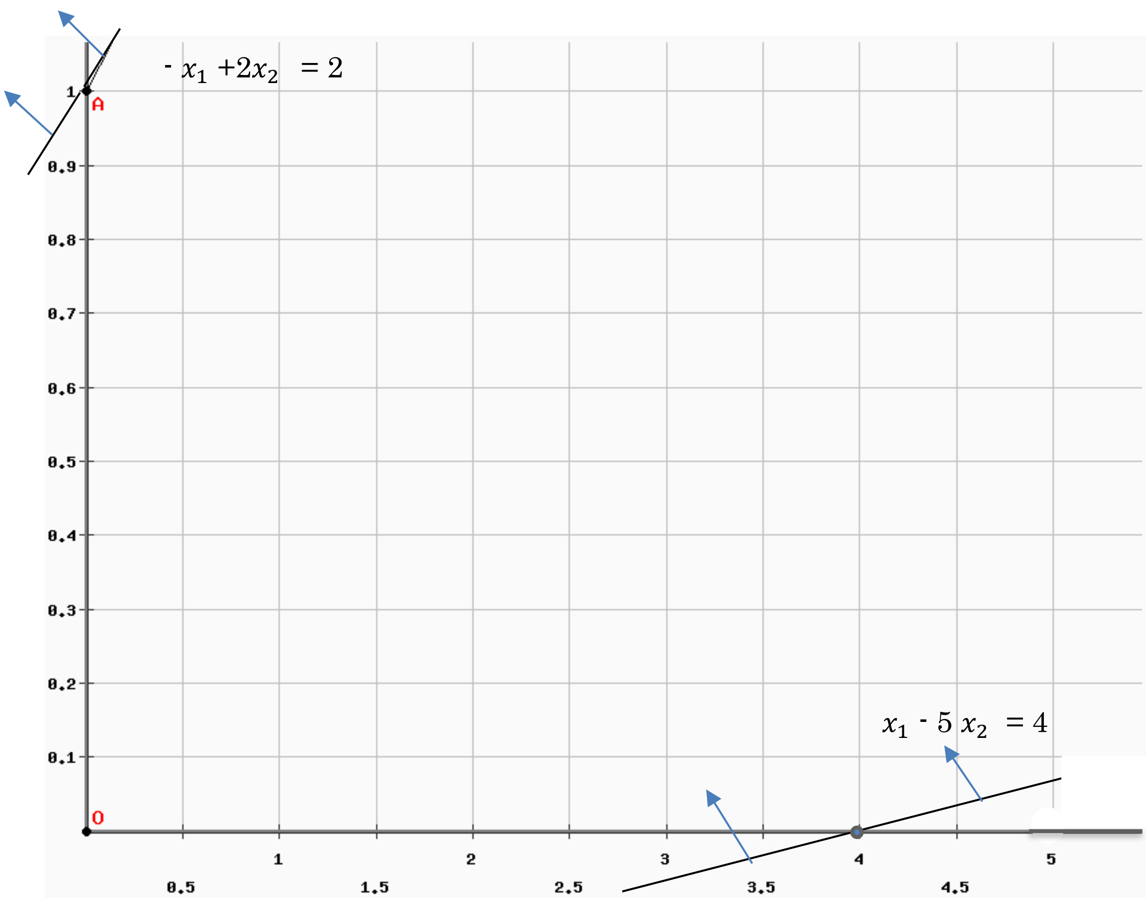


Figura 3.2.4.1.- PPL No Acotado

Observe que la Figura 3.2.4.1 representa un conjunto vacío, por lo que el conjunto factible es también un conjunto vacío, por lo que el problema se considera INCOMPATIBLE.

3.3.- El Método Simplex con *Tableaus*

De manera geométrica se observa que una iteración del Método Simplex que parte de una solución factible a otra, implica el movimiento de un vértice a otro adyacente al mismo, de modo que se defina una trayectoria que tiene como vértice de inicio el punto factible inicial y como punto final aquel que mejora el valor de la función objetivo.

Existe una interpretación alterna, diseñada por G. Dantzing, esta interpretación por "*Tableaus*", ocurre en el espacio $\mathbb{R}^{m+1}$, y será el principal recurso de trabajo en el desarrollo de este capítulo.

Una iteración del Método Simplex con *Tableaus* consiste en todas las operaciones matemáticas necesarias para pasar de una solución factible a otra, mejorando el valor de la función objetivo en el proceso, esto se logra haciendo que una variable no básica sea sustituida por una variable básica en el *Tableau* mediante operaciones, este proceso se repite hasta encontrar un valor que no pueda ser mejorado.

Resulta curiosa la etimología de la representación por *Tableaus* del Método Simplex. La palabra "*Tableau*" es de origen francés y significa tabla, por otro lado, el termino Simplex, significa "simplejo" en inglés.

Cabe mencionar que el desarrollo del algoritmo Simplex con *Tableaus* presenta casos particulares que provocan indeterminaciones o ciclaje del método, estos serán abordados a detalle en el Capítulo V.

Para comprender porque este nombre se acopla de manera ideal considere:

$$\text{Max} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\text{s.a.} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n \leq b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Observe que el PPL se encuentra en su forma canónica, para iniciar es necesario llevar el PPL a su forma estándar, para ello, se introducen variables de holgura, que son positivas y nos ayudan a replantear el PPL como sigue:

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\text{s.a} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n + x_{n+2} = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n + x_{n+m} = b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Tableau* 3.3.1.- El Método Simplex con *Tableaus

	x_1	x_2	.	.	.	x_n	x_{n+1}	.	.	.	x_{n+m-1}	x_{n+m}		LD
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	.	.	.	a_{1n}	1	.	.	.	0	0		b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	.	.	.	a_{2n+1}	0	.	.	.	0	0		b_2
.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	0	0		.
.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	0	0		.
.	.	.	.	.	.	.	0	.	.	.	1	0		.
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	.	.	.	a_{mn}	0	.	.	.	0	1		b_m
-Z	$-c_1$	$-c_2$	.	.	.	$-c_n$	0	.	.	.	0	0		0

El proceso para construir el *Tableau* 3.3.1 es el siguiente:

1.-Las variables son colocadas como título de columna en orden ascendente.

2.-Las variables de holgura son usadas como título de fila.

3.-La última columna está compuesta por las entradas del vector de recursos b.

4.-La última fila está compuesta por las entradas negativas del vector de costos c. (Para el caso de desigualdad con $\leq$).

5.-Las variables de holgura toman valor de 0 en el vector de costos.

6.-Las columnas respectivas a variables básicas son rellenadas con las entradas de la matriz A.

7.-Las columnas respectivas a variables de holgura o exceso forman una submatriz con determinante 1.

Ejemplo 3.3.1.- Para demostrar mejor el método considere el ejemplo 3.2.1.

$$\text{Max Z} = 3x_1 \ +2x_2$$

$$\text{s.a.} \ \ x_1 \qquad \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \ \geq 0$$

Donde su *Tableau* es:

***Tableau* 3.3.1.1.-Encontrando la variable de salida**

	x_1	x_2	x_3	x_4		LD
x_3	1	0	1	0		2
x_4	1	1	0	1		3
-Z	-3	-2	0	0		0

El objetivo del método es conseguir que las variables en la columna señalada con rojo sean variables básicas, también se busca que la función objetivo tenga un valor distinto a cero.

Paso 1.-Para encontrar la variable que entra en el *Tableau* (también llamado base), es necesario observar los coeficientes de C, y tomar el valor con mayor magnitud negativa para nuestro caso x_1 con valor (-3).

Nota 1. - En el caso de Maximizar, los valores de -Z son los valores de C^T dentro de la función objetivo con signo contrario, para el caso de Minimizar la función Z conserva su signo.

Paso 2.- Para encontrar la variable que sale de la base es necesario encontrar el menor valor del conjunto de las divisiones entre los vectores de recursos y los coeficientes de la variable de entrada para nuestro caso $e_1 = (b_1 \ / \ a_{11}) = (2 \ /1) = 2$, $e_2 = (b_2/a_{21}) = (3/1) = 3$, donde $a_{ij} > 0 \ \ \forall \ i \ , j$, además $b_k \geq 0 \ \ \forall \ k$, con $i, j, k = 1, \ldots, n$.

Por ello, la variable que sale de la base es x_3 y la variable de entrada es x_1, ahora señalamos el menor de los cocientes, ya que esta fila será la que nos ayude a conseguir un nuevo *Tableau*, esta recibe el nombre de “Pivote”.

***Tableau* 3.3.1.2.-Encontrando la variable de entrada.**

		x_1	x_2	x_3	x_4		LD
(3) (-1)	x_3	**1**	0	1	0		2
	x_4	1	1	0	1		3
	-Z	-3	-2	0	0		0

Paso 3.- A continuación, se deberá multiplicar por un escalar toda la fila de la casilla pivote, buscando obtener “1” en ella, sin embargo, ese es el valor actual, por ello, se multiplicará toda la fila pivote por 1 para conservarla.

Nota 2.- Estas operaciones afectan a todas las filas de la matriz, incluido el vector b, además, es posible operar con cualquier escalar de la recta real.

Paso 4.- A continuación, modificaremos el resto de las filas, buscando obtener un 0 en toda la columna del pivote, para ello multiplicaremos toda la fila pivote por (-1) y se la sumamos al resto.

Paso 5.-Ahora es necesario recalcular el vector de costos, buscando colocar un 0 en la columna pivote, esto se logrará sumado o restado múltiplos de la fila pivote, será necesario multiplicar el renglón pivote por 3 y sumarlo al renglón de C para obtener un 0.

Nota 3.- Es importante notar que la función objetivo debe aumentar su valor para el caso de maximizar, y deberá reducir su valor en el caso de minimizar.

Tableau* 3.3.1.3.- Construcción del nuevo *Tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4		LD
x_1	1	0	1	0		2
x_4	0	1	-1	1		1
-Z	0	-2	3	0		6

Observe que la función objetivo aumentó su valor, sin embargo, x_4 aún forma parte de la base (variable no básica), por ello, hay que repetir desde el paso 1, hasta obtener el siguiente *Tableau* (iteración Simplex).

***Tableau* 3.3.1.4.-*Tableau* Óptimo del Problema**

	x_1	**x_2**	**x_3**	**x_4**		LD
x_1	1	0	1	0		2
x_2	0	1	-1	1		1
-Z	0	0	1	2		8

Nota 4.- La repetición de todos los pasos está condicionada a que el valor de la función objetivo sea positivo, y que el resto de las operaciones estén bien definidas.

Como se puede observar, todas las variables en la base son básicas, la función objetivo alcanzó un valor positivo, así mismo los valores de C son todos positivos, por ello, podemos concluir que el *Tableau* 3.3.1.4 es óptimo, de este modo el punto:

$$x^T = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})^T = (2,1)^T$$

es una solución óptima del ejemplo 3.3.1.

Ejemplo 3.3.2.- PPL con múltiples soluciones óptimas. (Tomado del libro: "Curso de Programación Lineal, Teoría y Aplicaciones")

$$\text{Max} \quad 2\,x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.} \qquad x_1 + 2\,x_2 \leq 4$$

$$2\,x_1 + \quad x_2 \leq 6$$

$$x_1,\, x_2 \quad \geq 0$$

En este caso tenemos un PPL con múltiples soluciones, observemos el *Tableau* 3.3.2.1. que es el *Tableau* inicial del problema:

***Tableau* 3.3.2.1.-Construcción del *Tableau* Inicial**

	x_1	x_2	x_3	x_4		LD
x_3	1	2	1	0		4
x_4	**2**	1	0	1		6
-Z	-2	-1	0	0		0

Observemos que en la fila de -Z el valor con mayor magnitud negativa es la columna de x_1, con el valor de menos dos (-2), luego, los coeficientes de e_{ij} son los siguientes: e_{11}= (4/1) = 4, e_{12} = (6/2) = 3, así nuestro primer pivote será la fila que contiene el valor (2). se aplica un proceso análogo al ejercicio anterior (Paso 1 al Paso 5) obtenido el siguiente *Tableau óptimo*:

***Tableau* 3.3.2.2.- *Tableau* Óptimo del PPL**

	x_1	x_2	x_3	x_4		LD
x_3	0	1.5	1	-0.5		1
x_4	1	0.5	0	0.5		3
-Z	0	0	0	1		6

Como podemos observar este *Tableau* es óptimo y se obtuvo luego de dos iteraciones del método, así $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (3,0,1,0)^T$ es una solución básica factible del PPL donde -Z = 6.

Por otro lado, considere el *Tableau 3.3.2.1.* esta vez se elige a x_2 como la variable de entrada, lo que se representa mediante el siguiente *Tableau*:

Tableau* 3.3.2.3.- *Tableau Inicial Alternativo

	x_1	x_2	x_3	x_4		LD
x_3	1	**2**	1	0		4
x_4	2	1	0	1		6
-Z	-2	-1	0	0		0

Observe que (2) es el pivote correspondiente, aplicando dos iteraciones del Método Simplex se obtiene el siguiente *Tableau*:

Tableau 3.3.2.4.- *Tableau* Óptimo Alternativo

	x_1	x_2	x_3	x_4		LD
x_2	0	1	0.6667	-0.3333		0.6667
x_1	1	0	-0.3333	0.6667		2.6667
-Z	0	0	0	1		6

Finalmente, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ = (8/3, 2/3, 0,0)^T con -Z = 6 es también una solución óptima del PPL.

Ejemplo 3.3.3.- PPL No Acotado. (Tomado del libro: "Curso de Programación Lineal, Teoría y Aplicaciones")

$$\text{Max} \quad 4x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad 2x_1 - x_2 &\geq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ -x_1 + 8x_2 &\leq 44 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Luego de dos iteraciones del Método Simplex sobre el ejemplo 3.3.3, es posible llegar al siguiente *Tableau*:

***Tableau* 3.3.3.1.-*Tableau* de la Segunda Iteración**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		LD
x_1	1	0	-0.3333	-0.3333	0		2
x_2	0	1	**0.3333**	-0.6667	0		2
x_5	0	0	-3	5	1		30
-Z	0	0	-1	-2	0		10

Observe que x_2 es ahora la variable que abandona la base, mientras que x_3 es la variable que entra a la base, aplicando las operaciones necesarias se obtiene:

Tableau 3.3.3.2.- *Tableau* Final del PPL

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		LD
x_1	1	1	0	-1	0		4
x_3	0	3	1	-2	0		6
x_5	0	9	0	-1	1		48
-Z	0	3	0	**-4**	0		16

Observe que el *Tableau* 3.3.3.2 es **NO Óptimo** pues en el reglón de –Z encontramos un valor negativo, sin embargo, todos los coeficientes e_{ij} tienen valores negativos por lo que se concluye que el problema es NO ACOTADO.

Ejemplo 3.3.4.- Región factible vacía. (Tomado del libro: "Curso de Programación Lineal, Teoría y Aplicaciones")

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 3\,x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 - x_2 \leq -1 \\ & -\,x_1 - x_2 \leq -3 \\ & 2\,x_1 + x_2 \leq -3 \\ & \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

En este caso encontramos una situación particular, ya que, las variables no básicas son incapaces de abandonar la base, por ello, es necesario agregar variables artificiales, (sobre las cuales se ha de profundizar en el capítulo IV), obteniendo el siguiente *Tableau*:

Tableau 3.3.4.1.- *Tableau* con Variables Artificiales

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_6	-1	**1**	-1	0	0	1	0		1
x_7	1	1	0	-1	0	0	1		3
x_5	2	1	0	0	1	0	0		2
W	0	-2	1	1	0	0	0		-4

Tableau 3.3.4.2.-Segunda Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_5	**3**	2	1	2	1	0	0		225
x_6	1	1	1	1	0	1	0		117
x_7	4	3	3	4	0	0	1		450
-Z	-19	-13	-12	-17	0	0	0		0

Progresando de manera análoga a los casos anteriores obtenemos la siguiente sucesión de *Tableaus*:

Tableau 3.3.4.3.- Segunda Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_2	-1	1	-1	0	0	1	0		1
x_7	2	0	1	-1	0	-1	1		2
x_5	**3**	0	1	0	1	-1	0		1
W	-2	0	-1	1	0	2	0		-2

Tableau 3.3.4.4.- Tercera Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_2	0	1	-0.666	0	0.333	0.666	0		1.333
x_7	0	0	0.333	-1	0.666	-0.333	1		1.333
x_1	1	0	**0.333**	0	0.333	-0.333	0		0.333
W	0	0	-0.333	1	0.666	1.333	0		-1.333

Tableau 3.3.4.5.- Cuarta Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_2	2	1	0	0	1	0	0		2
x_7	-1	0	0	-1	-1	0	1		1
x_3	3	0	1	0	1	-1	0		1
W	1	0	0	1	1	1	0		-1

Observe que este último *Tableau* es óptimo, pues todas las entradas de W son mayores o iguales a cero, sin embargo, la función objetivo toma un valor de (-1), lo cual es contradictorio para el caso de maximización, por ello, se concluye que el problema es INCOMPATIBLE.

Mediante estos ejercicios se comprueba que existen distintos casos del PPL, que se distinguen por ciertas propiedades matemáticas especificas (No Acotado, Incompatible, Múltiples Soluciones, etc.), existen otros tipos de problemas que se caracterizan por su interacción matemática con el Método Simplex, debido a que sus propiedades especificas provocan un desborde en el algoritmo Simplex, esto se atribuye al escalamiento del problema, a su planteamiento general o a las propiedades únicas del poliedro definido por las restricciones del problema, este tipo de problemas será estudiado a continuación.

Capítulo IV.- Casos Particulares del Método Simplex

4.1.- El Método de las Dos Fases

El Algoritmo Simplex ha sido revolucionario desde su creación por su facilidad y alcance en la ciencia, sin embargo, el método presenta algunas limitantes, en primera instancia se ve limitado para ecuaciones no lineales, además, el uso de múltiples variables o coeficientes de gran magnitud provocan indeterminaciones en el método, esto se debe a que el Método Simplex supone la existencia de una solución básica inicial.

El Método de las Dos fases fue diseñado por G. Dantzing, para resolver PPL en los que las variables de holgura actúan como variables básicas cuando el problema se encuentra ya en su forma canónica, además, las entradas del vector de recursos son no negativas, por ello, las variables de holgura son incapaces de abandonar la base, provocando que el problema no tenga una solución factible inicial.

El Método Simplex puede ser considerado como un caso particular del Método de las Dos Fases, este solo ha de aplicarse luego de que NO se dispone de una solución factible inicial del PPL en su forma canónica.

Este método difiere del Simplex en que primero hay que resolver un problema auxiliar que trata de minimizar la suma de las variables auxiliares o artificiales. Una vez resuelto este primer problema y reorganizado el *Tableau* final, se pasa a la segunda fase, que consiste en realizar el Método Simplex de manera normal sobre el problema original. Para ser más explícitos considere el PPL en su forma canónica:

$$\text{Máx.} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$$

$$\text{s. a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j = b_i$$

$$x_j \geq 0 \qquad i, j = (1, \dots, n)$$

El problema asociado con él es:

$$\text{Min.} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$\text{s. a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \; + \; x_{n+i} = b_i$$

$$x_{j,}\, x_{n+i} \;\geq 0 \qquad i, j = (1, \ldots, n)$$

Donde las variables x_{n+i} reciben el nombre de variables artificiales, estas son variables que cumplen la condición de no negatividad y son consideradas como variables no básicas, además proporcionan una solución básica inicial, permitiendo a las variables de holgura convertirse en variables básicas, es decir:

$$x_{n+1} = b_i, \text{ si } b_i > 0, \text{ o}$$

$$x_{n+1} = -b_i, \text{ si } b_i < 0$$

Este problema auxiliar es de tamaño (m x ($n + m$)), y puede ser trasladado de su forma canónica a su forma estándar y viceversa. Por otro lado, cuando la función objetivo tiene un valor mínimo igual a cero, significa que todas las variables artificiales son cero, esto implica que encontramos una solución básica factible, para ser utilizada en la segunda iteración.

De este modo, podemos concluir que el problema de encontrar una solución básica factible para un sistema de ecuaciones lineales se reduce de resolver otro problema auxiliar de PL.

Ejemplo 4.1.1.- Solución óptima. (Tomado del libro "Curso de Programación Lineal, Teoría y Aplicaciones")

$$\text{Max} \quad 3\,x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.a} \quad 2\,x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 - 2\,x_2 + 5\,x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 > 0$$

Este tipo de problemas no cuentan con una solución básica factible que se detecte a primera vista. Por ello, será necesario resolver dos ecuaciones con dos variables cada una, generando una matriz (2 x 2), esto provocará cálculos que crecerán de manera exponencial entre más grande sean n y m.

Para evitar este exceso de cálculos, Dantzing desarrolló el Método de las Dos Fases, que consiste en aplicar el Método Simplex para resolver un problema auxiliar que se obtiene a partir del problema original, obteniendo una solución básica inicial que servirá como punto inicial para la segunda iteración del Método Simplex, que se aplica en el problema original.

El *Tableau* del problema auxiliar para el ejemplo 4.1.1, es el siguiente:

Tableau* 4.1.1.1.- Construcción del Primer *Tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		LD
x_4	2	1	1	1	0		5
x_5	**1**	-2	5	0	1		1
W	0	0	0	1	1		0

A diferencia del Método Simplex, el Método de las Dos Fases busca minimizar la suma de las variables artificiales para conseguir que se conviertan en variables no básicas, minimizando el valor de la función objetivo, para ello, se coloca un "1" en la columna correspondiente a las variables artificiales.

Finalmente, será necesario quitar las variables artificiales del *Tableau* para ello es necesario colocar un 0 en columna de las variables artificiales.

***Tableau* 4.1.1.2.- Seleccionando el Pivote**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		LD
x_4	2	1	1	1	0		5
x_5	**1**	-2	5	0	1		1
W	-3	1	-6	0	0		-6

El *Tableau* anterior describe un *Tableau* en la forma tradicional propuesta por Dantzing, por ello, podemos aplicar el Método Simplex, obteniendo el siguiente *Tableau*:

***Tableau* 4.1.1.3.- Primera Iteración**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		LD
x_4	0	**5**	-9	1	-2		3
x_1	1	-2	5	0	1		1
W	0	-5	9	0	3		-3

Se continúa aplicando el Método Simplex hasta obtener una solución:

***Tableau* 4.1.1.4.-*Tableau* Óptimo de la Primera Fase**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		LD
x_2	0	1	-1.8	0.2	-0.4		0.6
x_1	1	0	1.4	0.4	0.2		2.2
W	0	0	0	1	1		0

Como podemos observar el *Tableau* anterior es óptimo, por ello, podemos interpretar que la función W alcanza su mínimo en x_1= 2.2 y x_2 = 0.6, ahora se regresa a la función del problema original $f(x)$ = Max Z = $f\ (x_0)$.

Las columnas x_4 y x_5 pertenecientes a las variables artificiales son suprimidas y el vector de recursos es sustituido con los coeficientes de la función original, luego de otra iteración, obtenemos como resultado el siguiente *Tableau*:

***Tableau* 4.1.1.5.- *Tableau* Óptimo de la Segunda Fase**

	x_1	x_2	x_3		LD
x_2	0	1	-1.8		0.6
x_1	1	0	1.4		2.2
-Z	0	0	1.4		7.2

Como podemos observar, el *Tableau* anterior es óptimo, ya que, cada uno de los vectores de costos tiene un valor mayor o igual a cero, la función objetivo alcanzó un valor mayor a cero y todas las variables en la base son básicas.

Por ello, podemos concluir que la solución al problema es x_1 = 2.2, x_2 = 0.6 con Z = 7.2.

Ejemplo 4.1.2.- Problema No Acotado (Tomado del libro "Curso de Programación Lineal, Teoría y Aplicaciones")

Considere el problema:

$$\text{Max } 2\,x_1 + 5\,x_2$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 - x_2 \geq 4$$

$$2\,x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Añadiendo las variables de exceso y holgura se obtiene el problema:

$$\text{Max } 2\,x_1 + 5\,x_2$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 - x_2 - x_3 \qquad = 4$$

$$2\,x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 3$$

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geq 0$$

Como no existe una solución básica inicial, procedemos a aplicar el Método de las Dos Fases, siendo el problema auxiliar:

$$\text{Min} \qquad x_5$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 - x_2 - x_3 \quad + x_5 = 4$$

$$2\,x_1 + x_2 \quad + x_4 \qquad = 3$$

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5 \geq 0$$

El *Tableau* de este problema, es el siguiente:

***Tableau* 4.1.2.1.- Primera Iteración de la Primera Fase**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		LD
x_5	2	1	0	1	0		3
x_4	1	-1	-1	0	1		4
W	0	0	0	0	1		0

Realizando operaciones para el vector de costos obtenemos:

Tableau 4.1.2.2.- Segunda Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		LD
x_5	1	-1	-1	0	1		4
x_4	**2**	1	0	1	0		3
W	-1	1	1	0	0		-4

Realizando otra iteración del método, obtenemos:

Tableau 4.1.2.3.-Tercera Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		LD
x_5	0	-1.5	-1	-0.5	1		2.5
x_1	1	0.5	0	0.5	0		1.5
W	0	1.5	1	0.5	0		-2.5

Como puede observarse, este último *Tableau* es óptimo, sin embargo, el valor final de la función W es (-2.5), lo cual supone una contradicción, esto significa que el problema original es Incompatible.

Este ejercicio expone como el Método de las Dos Fases resulta efectivo para la determinación de problemas incompatibles, ya que, no permitirá la ejecución de la segunda fase, dado que el valor de la función es distinto de cero. Adicionalmente, este ejercicio demuestra como trabajar con desigualdades de mayor o igual combinadas con desigualdades de menor o igual, lo que provoca que el vector de recursos tenga signo negativo, por ello, es necesario agregar una variable artificial en este tipo de problemas para inicializar el método.

Ejemplo 4.1.3.- Problema No Acotado

Considere el modelo:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 3\,x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 - x_2 \quad \leq -1 \\ & x_1 - x_2 \quad \leq -3 \\ & 2\,x_1 - x_2 \quad \leq 2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Agregando las variables necesarias, se obtiene el siguiente *Tableau*:

Tableau **4.1.3.1.- Primera Iteración**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_6	-1	**1**	-1	0	0	1	0		1
x_7	-1	1	0	-1	0	0	1		3
x_5	2	-1	0	0	1	0	0		2
W	2	-2	1	1	0	0	0		-4

Tableau **4.1.3.2.- Segunda Iteración**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_2	-1	1	-1	0	0	1	0		1
x_7	0	0	**1**	-1	0	-1	1		2
x_5	1	0	-1	0	1	1	0		3
W	0	0	-1	1	0	2	0		-2

Tableau 4.1.3.3.- Tercera Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1		3
x_3	0	0	1	-1	0	-1	1		2
x_5	1	0	0	-1	1	0	1		5
W	0	0	0	0	0	1	1		0

Como puede observarse en este último *Tableau*, la función objetivo alcanzó un valor de cero, por ello, es posible dar paso a la Segunda Fase del método, obteniendo los siguientes *Tableaus*:

***Tableau* 4.1.3.4.- Primera Iteración de la Segunda Fase**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		LD
x_2	-1	1	0	-1	0		3
x_3	0	0	1	-1	0		2
x_5	**1**	0	0	-1	1		5
-Z	-4	0	0	-1	0		3

***Tableau* 4.1.3.5.- Segunda Iteración de la Segunda Fase**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		LD
x_2	0	1	0	-2	1		8
x_3	0	0	1	-1	0		2
x_1	1	0	0	-1	1		5
-Z	0	0	0	**-5**	4		23

Como se puede observar en el *Tableau* 4.1.3.5, todas las variables básicas se encuentran en la base y la función alcanzó un valor positivo, sin embargo, aún es posible encontrar un valor negativo en el vector de costos, nótese que toda la columna contiene valores negativos, por lo que es imposible continuar con el método, finalmente podemos concluir que el problema es No Acotado.

Basado en los ejemplos expuestos previamente, podemos concluir que el Método de las Dos Fases es un algoritmo fundamentado en el Método Simplex, en particular, el Método de las Dos fases nos permite trabajar con PPL que simultáneamente incluyan desigualdades con signos distintos en el mismo modelo, esto se logra incluyendo variables artificiales para obtener una solución básica inicial, adicionalmente, el algoritmo forzará a estas variables a convertirse en cero para dar paso a la segunda iteración o fase del método.

El Método de las Dos Fases tiene un alcance significativo dentro de la Programación Lineal, particularmente en el desarrollo de problemas sin solución básica inicial, sin embargo, existen métodos alternativos para atacar estas dificultades, por ejemplo: "El Método Simplex Revisado" o "El Método de las Penalidades", también conocido como "Método de la M grande", en este método se manipula la función objetivo para que incluya las variables artificiales, estas deberán estar multiplicadas por una magnitud suficientemente grande para evitar su eliminación de la base a través de las operaciones regulares, esta cantidad es convencionalmente denotada por M.

4.2.- La Regla de Bland

Existe un conjunto de problemas que genera un conflicto grave con la manera tradicional de aplicar el Método Simplex, esto se debe a que no cuentan con una solución básica inicial, es decir, alguna de las variables básicas toma el valor cero, a este tipo de soluciones se le conocen como "soluciones básicas degeneradas".

Un PPL que incluya una o más soluciones básicas degeneradas provocará un número indeterminado de iteraciones del Método Simplex, a esta condición se le conoce como "ciclaje".

En Programación Lineal, los problemas que provocan ciclaje están descritos de una manera muy particular, es decir, satisfacen todas las condiciones iniciales del Método Simplex, luego de la aplicación del método se puede verificar que el valor de la función objetivo no se mejora, esto representa una contradicción dentro de los axiomas del método.

La condición de ciclaje en PL es un obstáculo que fue superado mediante la aplicación del "Método Lexicográfico", creado por Wolfe y Order, este método consiste en la inclusión de una perturbación $\varepsilon > 0$, buscando eliminar la degeneración en las soluciones básicas iniciales.

Considere el PPL en su forma general:

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

$$\text{s.a.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1, \ldots, n$$

Mientras que el problema perturbado es:

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

$$\text{s.a.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i + \varepsilon_1 \ , \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1, \ldots, n$$

Donde: $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{m-1} \leq \ldots \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1 < 1$

La interpretación geométrica de esta perturbación equivale a la traslación de las facetas del poliedro que contienen esta perturbación. Así mismo, este planteamiento nos permite establecer el orden lexicográfico de las expresiones que tienen la forma:

$$a = a_0 + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \ldots + a_m \varepsilon_m$$

$$b = b_0 + b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + \ldots + b_m \varepsilon_m$$

Se dice que "a" es lexicográficamente menor que "b", si $a_r < b_r$ y $a_k = b_k$ ($k = 0,1,2, \ldots, (r - 1)$).

Establecer el orden lexicográfico nos permite establecer otro criterio de selección para la variable de entrada a la base (siendo esta la variable de menor coeficiente negativo), así como la variable de salida de la base (siendo esta la variable con menor índice entre los discriminantes), esto nos permite prevenir el ciclaje del problema previo a la aplicación del Método Simplex, para ejemplificarlo, considere el siguiente PPL tomado del libro "Curso de Programación Lineal: Teoría y Aplicaciones":

Ejemplo 4.2.1.- PPL con Problemas de Ciclaje

$$\text{Max } 10\,x_1 - 57x_2 - 9\,x_3 - 24\,x_4$$

$$\text{s.a } \tfrac{1}{2}\,x_1 - \tfrac{11}{2}\,x_2 - \tfrac{5}{2}\,x_3 + 9\,x_4 \leq 0$$

$$\tfrac{1}{2}\,x_1 - \tfrac{3}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_3 + x_4 \leq 0$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Comencemos resolviendo este ejemplo usando la metodología tradicional, la cual propone elegir la variable de entrada como aquella con el menor coeficiente negativo, por otro lado, la variable de salida será aquella asociada con el menor cociente entre el vector de costos y la entrada de la matriz.

El *Tableau* inicial en la Segunda Fase de este problema es el siguiente:

Tableau **4.2.1.1- Primera Iteración de la Segunda Fase**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_6	0.3636	0	**0.1818**	-1.454	-0.272	1	0		0
x_2	-0.0909	1	0.45454	-1.636	-0.181	0	0		0
x_7	1	0	0	0	0	0	1		1
-Z	-4.8181	0	-16.909	117.27	10.363	0	0		0

Tableau **4.2.1.2- Segunda Iteración de la Segunda Fase**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_3	2	0	1	-8	-1.5	5.5	0		0
x_2	-1	1	0	**2**	0.5	-2.5	0		0
x_7	1	0	0	0	0	0	1		1
-Z	29	0	0	-18	-15	93	0		0

Tableau 4.2.1.3.- Tercera Iteración de la Segunda Fase

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_3	-2	4	1	0	**0.5**	-4.5	0		0
x_4	-0.5	0.5	0	1	0.25	-1.25	0		0
x_7	1	0	0	0	0	0	1		1
-Z	20	9	0	0	-10.5	70.5	0		0

Tableau 4.2.1.4.- Cuarta Iteración de la Segunda Fase

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_5	-4	8	2	0	1	-9	0		0
x_4	0.5	-1.5	-0.5	1	0	**1**	0		0
x_7	1	0	0	0	0	0	1		1
-Z	-22	93	21	0	0	-24	0		0

Tableau 4.2.1.5.- Quinta Iteración de la Segunda Fase

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_5	**0.5**	-5.5	-2.5	9	1	0	0		0
x_6	0.5	-1.5	-0.5	1	0	1	0		0
x_7	1	0	0	0	0	0	1		1
-Z	-10	57	9	24	0	0	0		0

Tableau 4.2.1.6.- Sexta Iteración de la Segunda Fase

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_1	1	-11	-5	18	2	0	0		0
x_6	0	**4**	2	-8	-1	1	0		0
x_7	0	11	5	-18	-2	0	1		1
-Z	0	-53	-41	204	20	0	0		0

Tableau 4.2.1.7.- Séptima Iteración de la Segunda Fase

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_1	1	0	**0.5**	-4	-0.75	8.75	0		0
x_2	0	1	0.5	-2	-0.25	0.25	0		0
x_7	0	0	-0.5	4	0.75	-8.75	1		1
-Z	0	0	-14.5	98	6.75	13.25	0		0

Tableau 4.2.1.8.- Octava Iteración de la Segunda Fase

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_3	2	0	1	-8	-1.5	5.5	0		0
x_2	-1	1	0	2	0.5	-2.5	0		0
x_7	1	0	0	0	0	0	1		1
-Z	29	0	0	-18	-15	93	0		0

Finalmente, podemos observar que el *Tableau* 4.2.1.8 es exactamente igual al *Tableau* 4.2.1.2. por lo que el método se encuentra dentro de un ciclo.

Para prevenir esta situación trabajaremos ahora el mismo ejemplo, seleccionando las variables acordes a la Regla de Bland, para ello considere el *Tableau* 4.2.1.3.

Tableau 4.2.1.9.- Segunda Iteración con Regla de Bland.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_3	-2	4	1	0	0.5	-4.5	0		0
x_4	-0.5	0.5	0	1	**0.25**	-1.25	0		0
x_7	1	0	0	0	0	0	1		1
-Z	20	9	0	0	-10.5	70.5	0		0

Nuevamente, x_5 es la variable de entrada a la base, sin embargo, x_4 es seleccionada como la variable de salida debido a la Regla de Bland. De este modo, obtenemos el siguiente *Tableau*:

Tableau 4.2.1.10.- Tercera Iteración con Regla de Bland.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_3	-1	3	1	-2	0	-2	0		0
x_5	-2	2	0	4	1	-5	0		0
x_7	**1**	0	0	0	0	0	1		1
-Z	-1	30	0	42	0	18	0		0

Tableau 4.2.1.11.- Cuarta Iteración con Regla de Bland.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_3	0	3	1	-2	0	-2	1		1
x_5	0	2	0	4	1	-5	2		2
x_1	1	0	0	0	0	0	1		1
-Z	0	30	0	42	0	18	1		1

Luego de cuatro iteraciones, se obtiene el *Tableau* 4.2.1.11, el cual es óptimo. Siendo la solución $x_3 = 1$, $x_5 = 2$, $x_1 = 1$, Z = 1.

Observe que la Regla de Bland garantiza que el Método Simplex converge en un número finito de iteraciones, sin embargo, esto no garantiza que sea un menor número de iteraciones comparado con la regla del mayor coeficiente positivo. En general, se ha observado que la regla del menor coeficiente converge en un menor número de iteraciones, sin embargo, no previene el ciclaje en los PPL.

Podemos concluir que la Regla de Bland y la Regla Lexicográfica son herramientas que proveen de un nuevo criterio para los PPL, sin embargo, no garantizan que el número de iteraciones sea menor comparado con la regla del menor cociente, así mismo, la aplicación de estos métodos es compatible con metodologías alternas como el Método de las Penalidades, El Método de las Dos Fases y los Problemas de Escalamiento.

4.3.- Complejidad Computacional de la PL

La investigación de Operaciones es la ciencia encargada de la aplicación de métodos analíticos para la toma de decisiones, además, busca optimizar el esfuerzo computacional requerido, este se mide por el número de operaciones por iteración, así como el número total de iteraciones necesarias para finalizar el método, por otro lado, la complejidad del algoritmo se refiere al promedio del esfuerzo computacional necesario en toda la gama de problemas en los que es aplicable el algoritmo así como "el peor de los casos" de su aplicación.

Como se ha ejemplificado previamente, existen distintas clasificaciones de PPL, la aplicación del Método Simplex en cada uno de ellos requiere diferentes niveles de esfuerzo computacional, en 1963, G. Dantzing reportó que el número de iteraciones del Método Simplex generalmente es menor que $(3\ m\ /\ 2)$ y pocas veces es mayor que $(3\ m)$, esto para el caso en que $m < 50$ y $(m + n) < 200$.

En el caso del Método Simplex se puede observar que el número de operaciones aumenta proporcionalmente con el número de restricciones y en menor cantidad con el aumento de variables. En 1978 D. Avis y Chvàtal publicaron la siguiente tabla, la cual expone la cantidad de iteraciones promedio que necesita el Método Simplex para finalizar, seleccionando la variable de entrada a la base como aquella con el mayor coeficiente positivo.

Tabla 4.3.1.- Número promedio de iteraciones en problemas aleatorios

m / n	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**
10	9.4	14.2	17.4	19.4	20.2
20		25.2	30.7	38	41.5
30			44.4	52.7	62.9
40				67.6	78.7
50					95.2

En el año 1972, V. Klee y Minty identificaron la caracterización de los problemas con los que el algoritmo Simplex tiene un comportamiento "problemático", estos problemas están descritos de la siguiente manera:

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j$$

$$\text{s.a} \quad 2 \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j + x_i \leq 100^{i-1}$$

$$x_j \geq 0.$$

Para el caso particular de n = 3 el problema de Klee y Minty se reduce a:

Ejemplo 4.3.1.- El Problema de Escalamiento

$$\text{Max } 100\, x_1 + 10\, x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & x_1 && \leq 1 \\ & 20\, x_1 + x_2 && \leq 100 \\ & 200\, x_1 + 20\, x_2 + x_3 && \leq 10000 \\ & x_1, x_2, x_3 && \geq 0 \end{aligned}$$

Los PPL que comparten esta estructura son conocidos coloquialmente como "**Problemas de Escalamiento**". El *Tableau* inicial para este problema es el siguiente:

***Tableau* 4.3.1.1.- Primera Iteración**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		LD
x_4	**1**	0	0	1	0	0		1
x_5	20	1	0	0	1	0		100
x_6	200	20	1	0	0	1		10000
-Z	-100	-10	-1	0	0	0		0

Aplicando el Método Simplex y eligiendo la variable de entrada a la base como aquella con el menor coeficiente, se obtienen los siguientes *Tableaus*:

Tableau 4.3.1.2.- Segunda Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		LD
x_1	1	0	0	1	0	0		1
x_5	0	**1**	0	-20	1	0		80
x_6	0	20	1	-200	0	1		9800
-Z	0	-10	-1	100	0	0		100

Tableau 4.3.1.3.- Tercera Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		LD
x_1	1	0	0	**1**	0	0		1
x_2	0	1	0	-20	1	0		80
x_6	0	0	1	200	-20	1		8200
-Z	0	0	-1	-100	10	0		900

Tableau 4.3.1.4.- Cuarta Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		LD
x_4	1	0	0	1	0	0		1
x_2	20	1	0	0	1	0		100
x_6	-200	0	**1**	0	-20	1		8000
-Z	100	0	-1	0	10	0		1000

Tableau 4.3.1.5.- Quinta Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		LD
x_4	**1**	0	0	1	0	0		1
x_2	20	1	0	0	1	0		100
x_3	-200	0	1	0	-20	1		8000
-Z	-100	0	0	0	-10	1		9000

Tableau 4.3.1.6.- Sexta Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		LD
x_1	1	0	0	1	0	0		1
x_2	0	1	0	-20	**1**	0		80
x_3	0	0	1	200	-20	1		8200
-Z	0	0	0	100	-10	1		9100

Tableau 4.3.1.7.- Séptima Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		LD
x_1	1	0	0	**1**	0	0		1
x_5	0	1	0	-20	1	0		80
x_3	0	20	1	-200	0	1		9800
-Z	0	10	0	-100	0	1		9900

Tableau 4.3.1.8.- *Tableau* Óptimo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		LD
x_4	1	0	0	1	0	0		1
x_5	20	1	0	0	1	0		100
x_3	200	20	1	0	0	1		10000
-Z	100	10	0	0	0	1		10000

Finalmente, el *Tableau* 4.3.1.8 es óptimo, para obtenerlo fue necesario aplicar siete iteraciones del Método Simplex, en general, es posible demostrar que los problemas con esta estructura tomaran (2^n -1) iteraciones para llegar a la solución.

Los problemas de escalamiento comparten esta estructura en la que una variable está definida en unidades, otra en centenas y otra en unidades de millar, esto provoca que el número de iteraciones necesarias para llegar a la solución sea cercano a (2^n -1).

La publicación del problema de Klee y Minty generó revuelo entre la comunidad científica que se dedicó a investigar si existían más problemas que generaran esta situación, a partir de entonces se desarrolló la teoría de la “Complejidad Computacional” que ayudó a determinar que el grado de convergencia del Método Simplex para este tipo de problemas se categoriza como Exponencial, sin embargo, en el resto de los problemas se observa una convergencia lineal, por ello, se concluyó que su convergencia es Polinomial en el caso promedio y Exponencial en el peor de los casos.

V.- Aplicación del Software

El objetivo específico de este proyecto de tesis es difundir la metodología descrita por la PL, en particular el Método Simplex y el Método de las Dos Fases, por ello, se propone un algoritmo condicional anidado sobre la extensión de desarrollo de software de Microsoft Excel 2010, conocida como Visual Basic Application (VBA) para la solución de PPL.

El software está dirigido a estudiantes y profesores previamente familiarizados con PPL y el Método Simplex. La propuesta consiste en un software independiente compartible con la versión 2010 de Excel y superiores, con requerimientos mínimos en el equipo del usuario, que no requiere de una conexión a Internet.

El programa utiliza un algoritmo basado en la generalización del Método Simplex descrita por Dantzing (1947) y fue diseñado para dar solución a problemas de PPL de máximo doce variables y doce restricciones considerando también la aplicación del Método de las Dos Fases, la Regla de Bland y el Escalamiento de Variables.

El programa es capaz de reconocer los siguientes tipos de PPL y aplicar la metodología necesaria para llegar a la solución:

1.- Problemas con Soluciones Finitas.

2.- Problemas con Soluciones Infinitas.

3.- Problemas sin Solución (Incompatibles, Con área de Solución vacía).

4.- Problemas con Desborde por Ciclaje (Regla de Bland).

5.- Problemas con Desborde por Escalamiento de Variables.

6.- Problemas sin solución básica inicial (Aplicación del Método de las Dos Fases).

5.1.- Descripción General

El programa se encuentra ubicado en un libro de Excel habilitado para macros. Consiste en una sola hoja de un libro de Excel con un botón de inicio, al presionarlo el programa comenzará, el resultado de su ejecución es la aplicación del Método Simplex o Método de las Dos Fases a un Problema de Programación especifico considerando los Problemas de Escalamiento y la aplicación de la Regla de Bland.

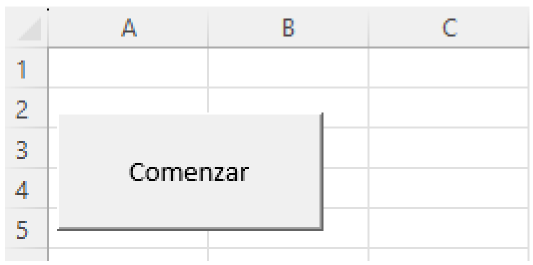


Imagen 5.1.1.- Botón de Inicio

El programa acepta un máximo de doce variables y doce restricciones, esta decisión está guiada por el hecho de que la mayoría de las computadoras tienen predeterminada una resolución de 1050 x 1020, de elegir un mayor número de variables, la ventana de inicio se desbordaría, provocando un fallo visual en la interfaz del usuario.

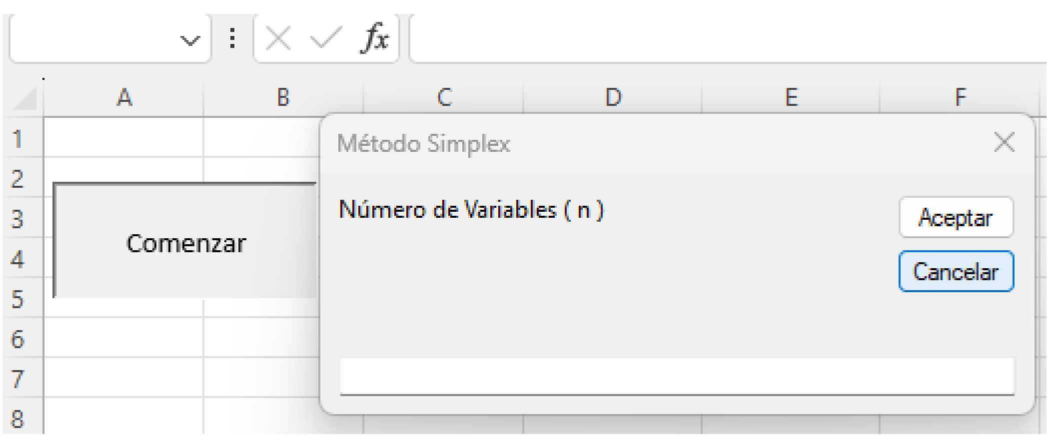


Imagen 5.1.2.- Definición de las Variables

El objetivo del algoritmo es aproximar el coeficiente “ε” a cero, para ello, el usuario deberá decidir la precisión del método, definiendo la cantidad de ceros a la derecha de épsilon ε, tal que: $\varepsilon_1 = 0.01$, $\varepsilon_2 = 0.001$, $\varepsilon_3 = 0.0001$ y $\varepsilon_k > 0$ para toda k.

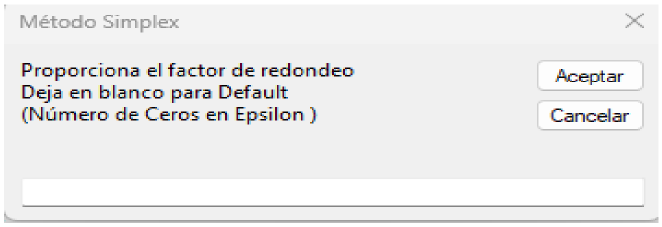


Imagen 5.1.3.- Definiendo el Factor de Redondeo

El software considera cualquier espacio en blanco como cero, así mismo está diseñado para trabajar el problema en su forma estándar, por lo que, durante el procesamiento, todos los problemas serán transformados a esta forma.

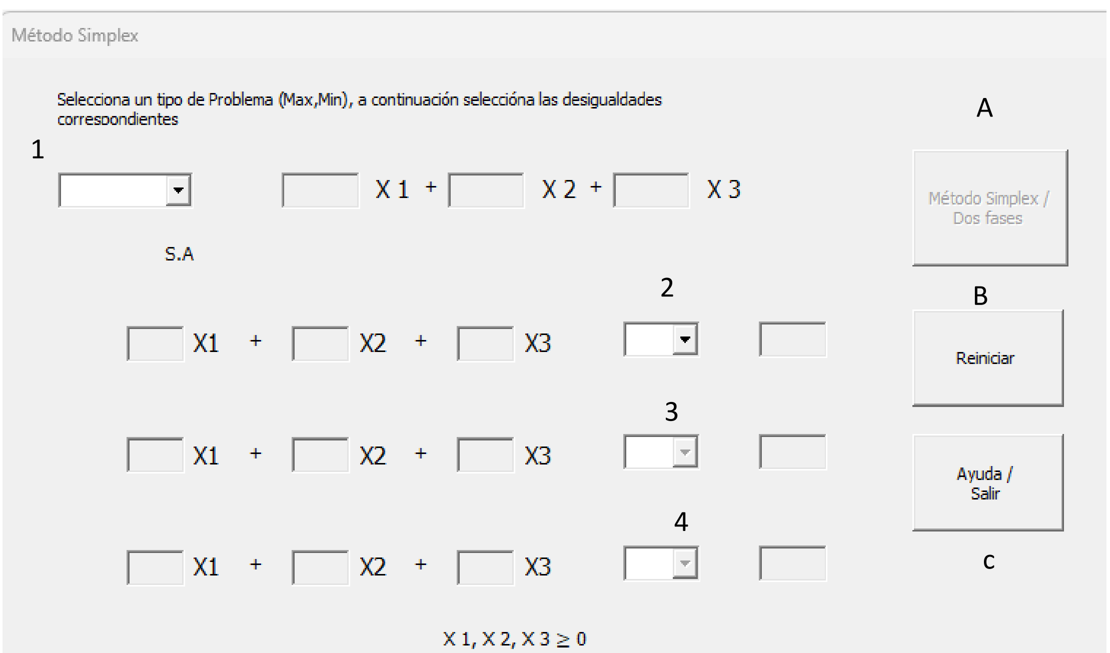


Imagen 5.1.4.- Captura de Datos Iniciales

Glosario de funciones (Imagen 5.1.4):

1) Selecciona el tipo de problema (Maximizar, Minimizar).
2) Selecciona el tipo de restricción de la Primera desigualdad.
3) Selecciona el tipo de restricción de la Segunda desigualdad.
4) Selecciona el tipo de restricción de la Tercera desigualdad.
A) Para Aplicar el Método.
B) Para borrar todo el formulario y reiniciar.
C) Despliega la ventana de ayuda y permite terminar el programa.

El programa considera todos los escenarios en la aplicación del Método Simplex, además, de existir algún error de captura el programa se detendrá de manera inmediata impidiendo fallos o ciclos en su ejecución.

El tiempo de ejecución es variable, sin embargo, es directamente proporcional al tamaño del problema y es menor que 3 minutos para problemas de 12 x 12, finalmente, la interpretación del resultado quedará abierta para el usuario.

Para iniciar el programa será necesario brindar los siguientes datos iniciales:

1.- El número de variables en el PPL inicial, descrita comúnmente como (n).

2.-El número de restricciones utilizadas en el PPL inicial, descrita comúnmente como (m).

Definir estas variables iniciales establecerá la dimensión del formulario donde el usuario deberá introducir el Problema de Programación en su forma estándar, sin embargo, también es posible introducir el problema en su forma canónica, incluyendo en ambos casos la matriz de A_{nm}, la función objetivo $f\ (x)$ y el objetivo de la optimización (Maximizar la función o Minimizar la función).

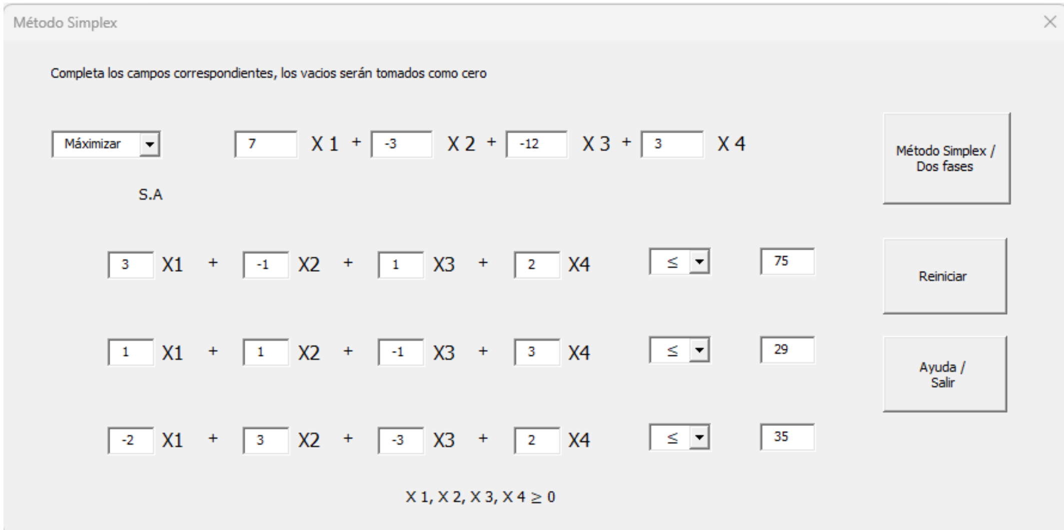


Imagen 5.1.5.-Captura de datos

3.- El usuario deberá decidir si desea aplicar la Regla de Bland para prevenir ciclaje:

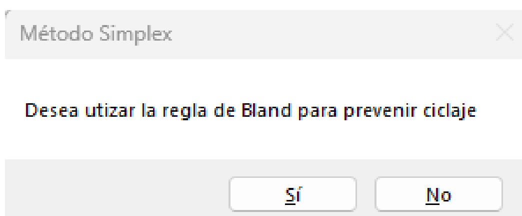


Imagen 5.1.6.- Aplicación de la Regla de Bland

El diagrama de flujo del código incluye resultados indeterminados, esto dependerá del problema trabajado, si es el caso, el programa notificará mediante una ventana emergente, indicando al usuario repetir el proceso.

Finalmente, el usuario deberá capturar todas las entradas de la matriz A_{nm}, cualquier espacio en blanco será considerado como 0.

Dentro de los posibles resultados de la ejecución de programa se encuentran:

1.- Un aviso de que el problema no tiene solución (No acotado, Indeterminado, vacío).

2.-Un aviso de que el problema genera ciclaje. (aplicando el método apropiado para solucionarlo).

3.- Un aviso de que el problema necesita ser trabajado con el Método de las Dos Fases (aplicando en consecuencia).

4.- Un aviso con una solución óptima al problema propuesto.

5.-Un aviso de error en la captura de datos.

5.2.- Especificaciones

El archivo es compatible con las versiones de Microsoft Excel 2007 y superiores, ocupa un espacio total de 180 KB y requiere un nivel bajo de procesamiento del CPU además no requiere de una conexión a Internet.

Cuando se introduce un carácter no valido o número que pueda desbordar el algoritmo por su magnitud, el programa se interrumpe en automático y mostrará un aviso emergente notificando del error particular que se presenta.

El algoritmo trabaja a través de una serie de condicionales que se basan en las restricciones establecidas por el usuario, se apoya enteramente de las celdas de Excel y genera un máximo predeterminado de *Tableaus* por fase, aunque esta condición puede ser retirada o modificada fácilmente.

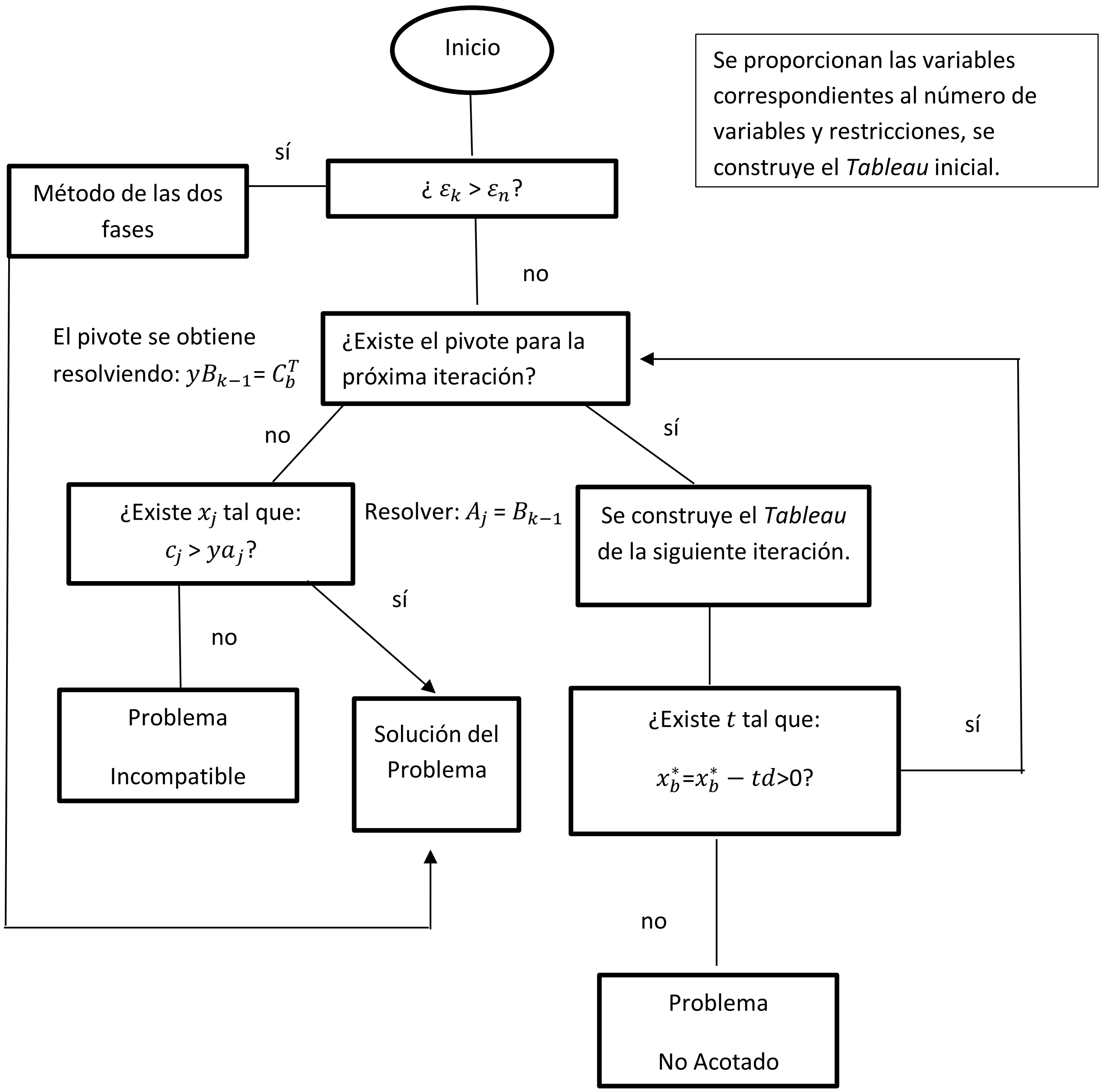
Bajo ciertas condiciones, el resultado de la ejecución será una ventana emergente que expone los valores óptimos del problema, así como todos los *Tableaus* necesarios para llegar a dicha solución, de otro modo, el resultado será una ventana que notifique las condiciones del problema (no acotado, vacío o indeterminado).

El software considera la economía de operaciones, por ello, aplicará la Regla de Bland o utilizará escalamiento en las variables, para así evitar que el programa alcance un estado de ciclaje que provoque un desborde del CPU.

Solo es posible trabajar un problema a la vez y al terminar su ejecución el formulario se reinicia automáticamente, por ello, el usuario deberá seleccionar la opción “Guardar como” si desea conservar los cambios, esto no afecta la ejecución general del problema.

El formulario contiene la opción “Ayuda” que despliega una pequeña guía para el usuario, la opción “Reiniciar” solo aplica para el cambio de las variables iniciales n y m, estas variables están restringidas a un valor máximo de 12, si se selecciona una cantidad mayor el problema no se ejecutará.

5.2.1.- Diagrama de Flujo



5.3.- Análisis y Aplicación del Software

Para comenzar con el análisis del software se proponen distintos PPL que tienen una salida particular dentro del diagrama de flujo del programa, esto es debido a su estructura general, así mismo se presentan algunos consejos para el manejo de este tipo de problemas, comencemos analizando el siguiente problema:

Ejemplo 5.3.1.- Primera Aplicación del Software

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = 120\,x_1 + 100\,x_2 \\ &\text{s.a} \qquad 2\,x_1 + 2\,x_2 \leq 8 \\ &\qquad\quad\;\; 5\,x_1 + 3\,x_2 \leq 15 \\ &\qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

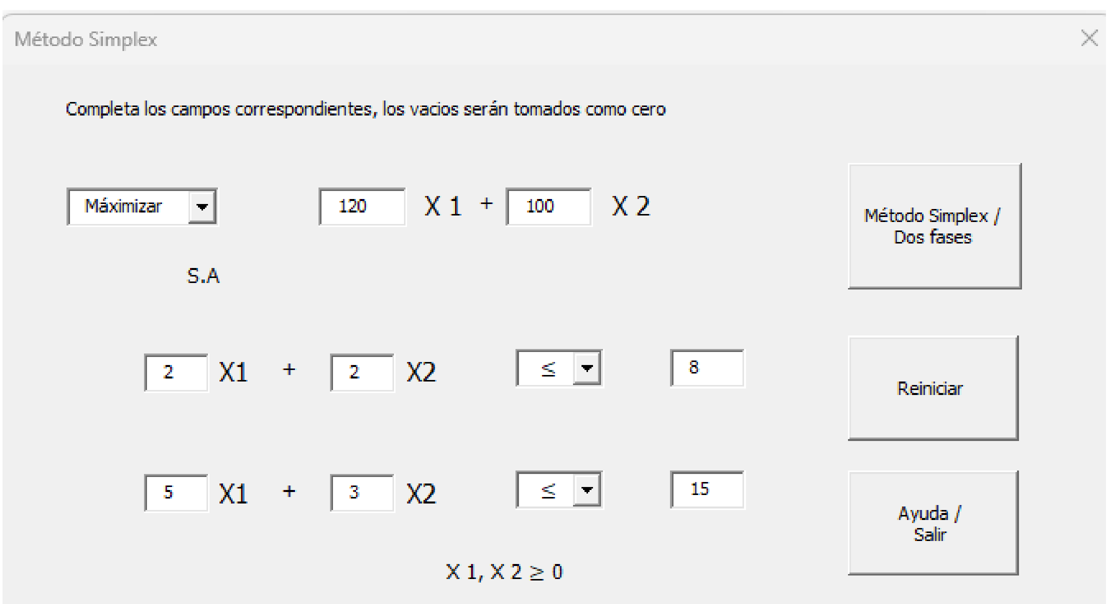


Imagen 5.3.1.1.-Captura de datos

Resultados:

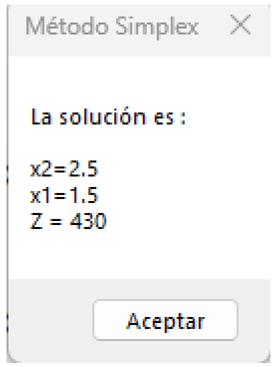


Imagen 5.3.1.2.- Resultados

Desglose de operaciones:

Tableau **5.3.1.1.- Primera Iteración**

	x_1	x_2	x_3	x_4		LD
x_3	2	2	1	0		8
x_4	**5**	3	0	1		15
-Z	-120	-100	0	0		0

Tableau **5.3.1.2.- Segunda Iteración**

	x_1	x_2	x_3	x_4		LD
x_3	0	**0.8**	1	-0.4		2
x_1	1	0.6	0	0.2		3
-Z	0	-28	0	24		360

Tableau **5.3.1.3.-** ***Tableau*** **Óptimo**

	x_1	x_2	x_3	x_4		LD
x_2	0	1	1.25	-0.5		2.5
x_1	1	0	-0.75	0.5		1.5
-Z	0	0	35	10		430

Observación: El programa resuelve en un tiempo aproximado de dos segundos requiriendo de tres iteraciones del método, generando sus *Tableaus* correspondientes, este tipo de PPL son caracterizados por el software como problemas “Simples” debido a que su ejecución es similar a la de la mayoría de los PPL y para obtener el resultado no es necesaria la aplicación de criterios adicionales.

A continuación, analicemos un problema que requiere de un criterio adicional, este es aplicado de manera automática por el software y se trata de la conversión del problema original a la forma canónica del ejercicio, para ello, el software introduce variables de exceso, holgura y/o artificiales según sea necesario.

5.3.2.- PPL con distintos signos en las desigualdades

Para analizar este caso se propone el ejemplo:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 6\,x_2 - 2\,x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad 2\,x_1 + 5\,x_2 + 8\,x_3 &\geq 1 \\ 3\,x_1 + 4\,x_2 - x_3 &\leq 5 \\ x_1 + 2\,x_2 + 6\,x_3 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

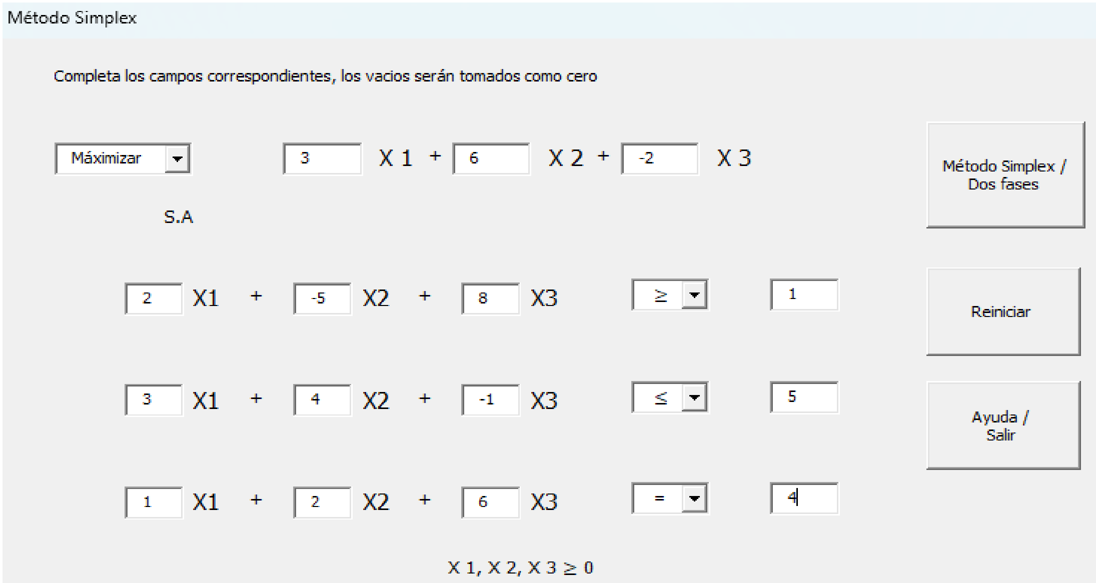


Imagen 5.3.2.1.-PPL con distintos signos

Solución:

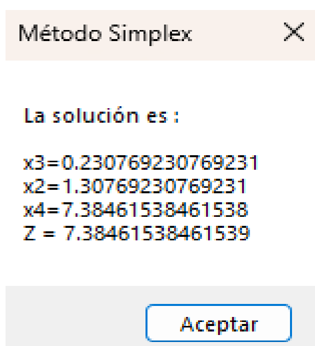


Imagen 5.3.2.2.- Resultados

Desglose de operaciones (Primera Fase):

Tableau 5.3.2.1.- Primera Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_1	1	2.5	**4**	-0.5	0	0	0.5		0.5
x_5	0	-3.5	-13	1.5	1	0	-1.5		3.5
x_6	0	-0.5	2	0.5	0	1	-0.5		3.5
W	0	0.5	-2	-0.5	0	0	1.5		-3.5

Tableau 5.3.2.2.- Segunda Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_3	0.25	0.625	1	-0.125	0	0	0.125		0.125
x_5	3.25	4.625	0	-0.125	1	0	0.125		5.125
x_6	-0.5	-1.75	0	**0.75**	0	1	-0.75		3.25
W	0.5	1.75	0	-0.75	0	0	1.75		-3.25

Tableau 5.3.2.3.- *Tableau* Óptimo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_3	0.166	0.333	1	0	0	0.167	0		0.667
x_5	3.166	4.333	0	0	1	0.167	0		5.667
x_4	-0.66	-2.333	0	1	0	1.333	-1		4.333
W	0	0	0	0	0	1	1		0

Segunda Fase:

Tableau 5.3.2.4.- Primera Iteración de la Segunda Fase

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		LD
x_3	0.1666	0.3333	1	0	0		0.6667
x_5	**3.1666**	4.3333	0	0	1		5.6667
x_4	-0.6666	-2.3333	0	1	0		4.3333
-Z	-3.3333	-6.6667	0	0	0		-1.3333

Tableau 5.3.2.5- Segunda Iteración de la Segunda Fase

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		LD
x_3	0	0.1052	1	0	-0.0526		0.3684
x_1	1	**1.3684**	0	0	0.3157		1.7894
x_4	0	-1.4210	0	1	0.2105		5.5263
-Z	0	-2.1052	0	0	1.0526		4.6315

Tableau 5.3.2.6.- *Tableau* Óptimo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		LD
x_3	-0.0769	0	1	0	-0.0769		0.2307
x_2	0.7307	1	0	0	0.2307		1.3076
x_4	1.0384	0	0	1	0.5384		7.3846
-Z	1.5384	0	0	0	1.5384		7.3846

5.3.3. Problema con Aplicación de la Regla de Bland

Consideremos nuevamente el ejemplo 4.2.1:

$$\text{Max } 10\,x_1 - 57x_2 - 9\,x_3 - 24\,x_4$$

$$\text{s.a } \quad \tfrac{1}{2}\,x_1 - \tfrac{11}{2}\,x_2 - \tfrac{5}{2}\,x_3 + 9\,x_4 \leq 0$$

$$\tfrac{1}{2}\,x_1 - \tfrac{3}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_3 + x_4 \leq 0$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Luego de ingresar este problema el software nos da la opción de aplicar la Regla de Bland, seleccionaremos la opción NO obteniendo el siguiente resultado:

Primera Fase: .

***Tableau* 5.3.3.1.-Primera Iteración**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		LD
x_8	-0.5	5.5	2.5	-9	-1	0	0	1	0		0
x_9	-0.5	**1.5**	0.5	-1	0	-1	0	0	1		0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	0	0		1
W	1	-7	-3	10	1	1	0	0	0		0

Tableau 5.3.3.2.- Segunda Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		LD
x_8	1.3333	0	0.6667	-5.3333	-1	**3.6667**	0	1	-3.6667		0
x_2	-0.3333	1	0.3333	-0.6667	0	-0.6667	0	0	0.6667		0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	0	0		1
W	-1.3333	0	-0.6667	5.3333	1	-3.6667	0	0	4.6667		0

Tableau 5.3.3.3.- Tercera Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		LD
x_6	0.3636	0	**0.1818**	-1.4545	-0.2727	1	0	0.2727	-1		0
x_2	-0.0909	1	0.4545	-1.6364	-0.1818	0	0	0.1818	0		0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	0	0		1
W	0	0	0	0	0	0	0	1	1		0

Tableau 5.3.3.4.-Cuarta Iteración

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_6	x_7	x_8	x_9		LD
x_3	2	0	1	-8	-1.5	5.5	0	1.5	-5.5		0
x_2	-1	1	0	**2**	0.5	-2.5	0	-0.5	2.5		0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	0	0		1
W	0	0	0	0	0	0	0	1	1		0

Tableau 5.3.3.5.- *Tableau* Final

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		LD
x_3	-2	4	1	0	0.5	-4.5	0	-0.5	4.5		0
x_4	-0.5	0.5	0	1	0.25	-1.25	0	-0.25	1.25		0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	0	0		1
W	0	0	0	0	0	**0**	0	1	1		0

Como se puede observar, el método concluye indicando que el problema es Incompatible.

Esto se debe a la selección particular de las variables que entran a la base, en este caso, se le indico al algoritmo que no utilizara la Regla de Bland, por ello, el algoritmo utilizó la regla del menor coeficiente para decidir la variable de entrada provocando que las variables no básicas sean incapaces de abandonar la base.

Si ejecutamos nuevamente el programa seleccionando ahora opción “Sí” para la Regla de Bland, obtendremos el siguiente resultado:

Primera Fase:

***Tableau* 5.3.3.6.-Primera Iteración con Regla de Bland**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		LD
x_8	-0.5	5.5	2.5	-9	-1	0	0	1	0		0
x_9	-0.5	**1.5**	0.5	-1	0	-1	0	0	1		0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	0	0		1
W	1	-7	-3	10	1	1	0	0	0		0

Tableau 5.3.3.7.-Segunda Iteración con Regla de Bland

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		LD
x_8	**1.333**	0	0.6667	-5.333	-1	3.667	0	1	-3.666		0
x_2	-0.333	1	0.3333	-0.667	0	-0.667	0	0	0.666		0
x_7	1	0	0	0	0	0	1	0	0		1
W	-1.333	0	-0.667	5.333	1	-3.667	0	0	4.666		0

Tableau 5.3.3.8.- Tercera Iteración *con Regla de Bland*

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		LD
x_1	1	0	0.5	-4	-0.75	2.75	0	0.75	-2.75		0
x_2	0	1	**0.5**	-2	-0.25	0.25	0	0.25	-0.25		0
x_7	0	0	-0.5	4	0.75	-2.75	1	-0.75	2.75		1
W	0	0	0	0	0	0	0	1	1		0

Tableau 5.3.3.9.-Cuarta Iteración con Regla de Bland

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		LD
x_1	1	-1	0	-2	-0.5	2.5	0	0.5	-2.5		0
x_3	0	2	1	-4	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5		0
x_7	0	1	0	2	0.5	-2.5	1	-0.5	2.5		1
W	0	0	0	0	0	0	0	1	1		0

Segunda Fase:

Tableau **5.3.3.10.- Primera Iteración de la Segunda Fase**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_1	1	-1	0	-2	-0.5	2.5	0		0
x_3	0	2	1	-4	-0.5	0.5	0		0
x_7	0	1	0	2	**0.5**	-2.5	1		1
-Z	0	29	0	40	-0.5	20.5	0		0

Tableau **5.3.3.11.- *Tableau* Óptimo**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		LD
x_1	1	0	0	0	0	0	1		1
x_3	0	3	1	-2	0	-2	1		1
x_5	0	2	0	4	1	-5	2		2
-Z	0	30	0	42	0	18	1		1

Como se puede observar el *Tableau* 5.3.3.11 es óptimo, en esta ocasión, el algoritmo llegó a una respuesta optima (x_1= 1, x_3= 1, x_5= 2$)^T$, con Z =1.

La Regla de Bland es una herramienta poderosa que nos ayuda en la resolución de PPL, su uso queda a criterio del usuario debido a que el uso de la regla no garantiza la localización de un valor óptimo, además, esta regla suele generar una mayor cantidad de *Tableaus* en comparación con la Regla de Menor Coeficiente. Por ello, se recomienda ejecutar cada PPL mínimo dos veces para evitar un falso positivo en la caracterización de los problemas.

El programa hace una verificación de los *Tableaus* para garantizar no caer en un ciclo, finalmente, la interpretación del resultado queda a cargo del usuario.

El algoritmo encuentra un resultado para una variedad de PPL, en caso de encontrarse con un error notificará mediante un mensaje, confirmando el motivo del error, es una herramienta simple que pretende asistir al usuario resolviendo PPL.

Las ventajas que ofrece son un tiempo de ejecución veloz, poco espacio de almacenamiento y la posibilidad de trabajar sin la necesidad de una conexión a Internet.

Conclusiones

Durante la presentación del presente trabajo: Se estudio el desarrollo y principios de la Programación Lineal, los fundamentos básicos que motivaron la creación del Método Simplex, así como algunos ejemplos clásicos, adicionalmente, se expuso la resolución de ejemplos, así como casos particulares del método. La propuesta de software es simple y eficaz, tiene bajos requerimientos y no necesita Internet.

De este trabajo se puede concluir:

El Método Simplex es una herramienta útil en la resolución de Problemas de Programación Lineal que puedan ser modelados mediante desigualdades lineales, puede ser interpretado como un algoritmo de optimización donde las diversas restricciones limitan el espacio de búsqueda del punto óptimo a un área específica.

El algoritmo Simplex es uno de los algoritmos más importantes del siglo XXI, debido a su alcance en los distintos campos de conocimiento (Programación Lineal, Álgebra Lineal, Investigación de Operaciones, etc.), así mismo ha servido como inspiración para la creación de nuevos algoritmos (Método de las Dos Fases, Métodos del Punto Interior, Modelos Proyectivos), que tuvieron gran impacto en distintas disciplinas de la ciencia, así mismo, el método ha ganado popularidad en el campo teórico por su versatilidad en la resolución de teoremas.

La introducción de múltiples restricciones, distintos signos de desigualdad o coeficientes de gran magnitud en las variables convierten el PPL en un nuevo problema con características particulares, estas pueden generar desborde o ciclaje en el método, por ello, es importante poder reconocer los distintos casos del Método Simplex para aplicar la metodología apropiada en su resolución.

El desarrollo de la computadora ofreció un abanico de oportunidades para la creación de software de todo tipo, priorizando una interfaz dinámica que permite una resolución superior en tiempo en comparación al trabajo manual, considerando la cantidad de operaciones por iteración y el número de iteraciones totales, sin embargo, la interpretación del resultado sigue siendo trabajo del usuario.

Anexo

Teorema 2.3.1.- Sea f: $S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Supongamos que f tiene un valor extremo en un punto interior $\bar{a}$ de S, además f es diferenciable en $\bar{a}$. Entonces el gradiente de f se anula en $\bar{a}$, es decir:

$$\nabla f(\bar{a}) = 0$$

Demostración:

Como f alcanza un máximo en $\bar{a}$ entonces existe $r > 0$ tal que $f\ (\bar{x}\ ) \leq f\ (\bar{a})$ para todo $\bar{x} \in B_r\ (\bar{a})$.

Para $i = 1, \ldots, n$ se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) = \lim_{\xi \to a_i} \frac{f(\xi \hat{e}_i) - f(\bar{a})}{\xi - \bar{a}_\mathrm{i}} \qquad (2.3.1.1)$$

Como f es diferenciable en $\bar{a}$ también se cumple:

$$\lim_{\xi \to a_i -} \frac{f(\xi \hat{e}_i) - f(\bar{a})}{\xi - \bar{a}_\mathrm{i}} = \lim_{\xi \to a_i +} \frac{f(\xi \hat{e}_i) - f(\bar{a})}{\xi - \bar{a}_\mathrm{i}} \qquad (2.3.1.2)$$

Dado que f tiene un máximo en $\bar{a}$,se cumple que $f(\xi \hat{e}_i) - f(\bar{a}) \leq 0$

Para el límite por la izquierda se verifica que $\xi - a_i \leq 0$, por lo tanto:

$$\lim_{\xi \to a_i -} \frac{f(\xi \hat{e}_i) - f(\bar{a})}{\xi - \bar{a}_\mathrm{i}} \geq 0$$

Para el límite por la derecha se verifica que $\xi - a_i \geq 0$, análogamente:

$$\lim_{\xi \to a_i +} \frac{f(\xi \hat{e}_i) - f(\bar{a})}{\xi - \bar{a}_\mathrm{i}} \leq 0$$

Dado la igualdad de los limites en la ecuación (2.3.1.2), entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) = \lim_{\xi \to a_i -} \frac{f(\xi \hat{e}_i) - f(\bar{a})}{\xi - \bar{a}_\mathrm{i}} = \lim_{\xi \to a_i +} \frac{f(\xi \hat{e}_i) - f(\bar{a})}{\xi - \bar{a}_\mathrm{i}} = 0$$

□

Teorema 2.3.2.- (Dualidad fuerte) Si el problema primal (P) tiene una solución óptima $x_j^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*)^T$, entonces el dual (D) tiene una solución óptima $y_i^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, \ldots, y_n^*)^T$.

Demostración:

El problema consiste en encontrar una solución factible $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, \ldots, y_n^*)$ que satisfaga:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \qquad (2.3.2.1)$$

Donde cualesquiera $x_j^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*)^T$ y $y_i^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, \ldots, y_n^*)^T$ verifican que:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (2.3.2.2)$$

Después de añadir las variables de holgura del problema primal, se obtiene:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, \ldots, m) \qquad (2.3.2.3)$$

Aplicando el Método Simplex, obtenemos un *diccionario* óptimo cuya última fila es de la forma:

$$Z = Z^* + \sum_{k=1}^{n+m} \bar{c}_k x_k \qquad (2.3.2.4)$$

donde $\bar{c}_k \leq 0$, si $k = 1, \ldots, (n+m)$, $\bar{c}_k = 0$, si x_k es variable básica y donde Z^* es el valor óptimo de la función objetivo, es decir:

$$Z^* = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j^* \qquad (2.3.2.5)$$

Se define:

$$y_i^* = -\bar{c}_{n+i} \quad (i = 1\ , \ldots, m) \qquad (2.3.2.6)$$

Tal que y_i^* satisface (2.3.2.1):

$$\sum_{j=1}^{n} C_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Esto se verifica si se sustituye (2.3.2.6) en (2.3.2.4):

$$= Z^* + \sum_{k=1}^{n+m} \bar{c}_k x_k$$

$$= Z^* + \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k x_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{c}_k x_k$$

$$= Z^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j - \sum_{i=1}^{m} y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

$$= Z^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j - \sum_{i=1}^{m} y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

$$= \left(Z^* - \sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i^* \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j$$

Recordemos que:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.3.2.7)$$

Igualando las dos expresiones anteriores, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$Z^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = 0$$

$$c_j = \overline{c_j} + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

dado que $\overline{c_k} \leq 0$ para toda $k = 1, \ldots, (n + m)$, se puede concluir que:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$y_i^* \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$Z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

$\square$

Teorema 2.3.3.- (Dualidad Débil) La función objetivo de (P) es menor o igual que la función objetivo de (D), para cualquiera x, y soluciones en sus respectivos problemas.

$$\mathrm{Z} = c^T x \leq b^T y = \mathrm{G}$$

Demostración:

Sean x, y soluciones factibles para los problemas Primal y Dual respectivamente. Entonces, se verifica:

A) Por ser x solución factible primal, entonces se cumple: $Ax \leq b$, $x \geq 0$

B) Por ser y solución factible dual, entonces se cumple: $A^T y \geq c$, $y \geq 0$

Multiplicando por y^T la desigualdad $Ax \leq b$ y por x^T la desigualdad $A^T y \geq c$ se tiene:

$$y^T Ax \leq y^T b = b^T\ y$$
$$x^T A^T y \geq x^T c = c^T\ x$$

Dado que $x^T A^T y = y^T Ax$ entonces se cumple:

$$Z = c^T\ x \leq y^T Ax \leq b^T y = G$$

□

Teorema 2.3.4.- El dual del problema dual es el problema Primal.

Demostración:

Considere el problema dual,

$$\text{Min } G = b^T\ y$$

s.a.

$$A^T y \geq c$$

$$y \geq 0$$

Para calcular el dual del problema, se plantea en forma de maximización.

$$-\text{Max }(-\text{G}) = -b^T\ y$$

s.a.

$$-A^T y \leq c$$

$$y \geq 0$$

Utilizando la relación Primal – Dual, el dual del problema anterior es:

$$-\text{Min }(-Z) = -\ C^T\ x$$

Sujeto a

$$-\ Ax \geq -\ b$$
$$x \geq 0$$

Escrito de forma equivalente, es el modelo:

$$\text{Max Z} = C^T\ x$$

Sujeto a

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

$\square$

Teorema 2.3.5.- (Karush-Kuhn-Tucker) La solución $x^* = (\ x_1^*,\ \ldots,\ x_n^*)^T$ es solución óptima del problema primal (P) si y solo si existen escalares $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$ y $\mu_j \geq 0$, $j \in$ J, tales que:

$$c = \sum\nolimits_{i \in I} \lambda_i a^i\ + \sum\nolimits_{j \in J} \mu_j(-e_j)$$

Donde I representa el conjunto de índices activos, mientras que J representa el conjunto de variables que son iguales a cero, a^i es el vector formado por los coeficientes de la i-ésima restricción y e_j es el vector unitario.

Demostración:

Sea $A'x \leq b'$ el subconjunto de restricciones de desigualdad activas en x^*, donde x^* es una solución óptima del problema primal (P), es decir, no existe algún x^* que mejore el valor de la función objetivo. Supongamos que existe una dirección d tal que $c^T\ d < 0$ y $A'\ d \geq 0$, la función objetivo podría ser mejorada ya que:

$$c^T\,(x^* - \lambda\ d) = c^T\ x - \lambda\, c^T\ d > c^T x^*$$

Para cualquier $\lambda \geq 0$, mientras que $x^* - \lambda\ d$ se mantiene como solución factible pues:

$$A'\ (x^* - \lambda\ d) = A'\ x^* - \lambda\ A'\ d = \ b' - \lambda\ A'\ d \leq \ b'$$

Además, es probable que para un valor de $\lambda \geq 0$ las restantes restricciones de desigualdad se mantengan inactivas en x^*. Esto resulta en una contradicción ya que no existe d tal que $c^T\ d < 0$ y tal que $A'\ d \geq 0$.

$\square$

Teorema 2.3.6.- Considere el siguiente Problema de Programación Lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Máx. } c^T x \\ &\text{s. a} \quad A\,x = b \\ &\qquad\quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Donde $c \in \mathbb{R}^n$, A es una matriz de $m \times n$ con rango m y $b \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que la región factible $\{F = x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$ es no vacía y sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$ los puntos extremos y $d_1, d_2, \ldots, d_l$, las direcciones extremas de la región factible F. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución óptima finita es que $c^T d_j \leq 0$, $\forall j = 1, \cdots, l$. Si este es el caso, entonces existe un punto extremo x_j que resuelva el problema.

Demostración:

Todo elemento de F se puede expresar como:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, x_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \, d_j$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0, \; \forall \; i = 1, \ldots, k$$

$$\mu_j \geq 0, \; \forall \; j = 1, \ldots, l$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$\text{Max } \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, (c^T x_i) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j (c^T \, d_j)\}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0, \; \forall \; i = 1, \ldots, k$$

$$\mu_j \geq 0, \; \forall \; j = 1, \ldots, l$$

Si $c^T \, d_j > 0$ para algún j, entonces μ_j puede elegirse arbitrariamente grande, proporcionando una solución no acotada. Esto comprueba que una condición necesaria y suficiente para solución óptima es $c^T \, d_j \leq 0, \forall \, j = 1, \ldots, l$.

Supongamos que $c^T \, d_j \leq 0, \; \forall \, j = 1, \ldots, l$, como se desea maximizar la función objetivo se elige $\mu_j = 0, \; \forall \, j$, con lo que el problema se reduce a:

$$\text{Max } c^T \, \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, (x_i)\}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0, \; \forall \; i = 1, \ldots, k$$

Es fácil observar que la solución óptima de este problema es finita, y se obtiene haciendo:

$$\lambda_i = 1, \lambda_j = 0$$

Para $i \neq j$ .Donde el índice de i está dado por:

$$c^T x_i = \underset{i \leq j \leq k}{\text{Max}}\, c^T x_j$$

Observe que:

$$\lambda_i = 1, \lambda_j = 0 \text{ con } i \neq j$$

Lo que implica que la solución se alcanza en el i-ésimo punto extremo. $\square$

Proposición 2.3.1.- Sea $X = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0\}$. El punto x es un vértice o punto extremo de X si y solo si x es una solución posible básica del sistema.

Demostración. Sea

$$Ax = b \qquad (2.3.1)$$

$$x \geq 0.$$

Consideremos $x^T = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, \ldots, 0)$ una solución básica del sistema (2.3.1) y A_i, $(i = 1, \ldots, n)$ la i -ésima columna de A.

Sustituyendo en nuestro sistema obtendremos:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_m A_m + 0 \cdot A_{m+1} + ... + 0 \cdot A_n = b$$

en donde $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son matrices de orden $(n \cdot m)$, suponiendo que el rango de A_m es m, esto nos asegura que existe una independencia lineal entre las filas de A.

Ahora bien, supongamos que x no es un vértice, o sea, que se puede expresar como una combinación convexa de dos puntos distintos de X, es decir, que existe y, $z \in X$ tales que:

$$x = \alpha\, y + (1 - \alpha)\, z,\ 0 < \alpha < 1 \quad \text{con} \quad y \neq z$$

Luego, como todas las componentes de x, y, z son no negativas y $\alpha \in (0, 1)$, se sigue que las $(n - m)$ últimas componentes de los vectores y y z deben ser nulas. Por lo tanto, se obtiene que:

$$y_1 A_1 + \ldots + y_m A_m = b \qquad \wedge \qquad z_1 A_1 + \ldots + z_m A_m = b$$

Como A_1, …, A_m son linealmente independientes, lo que implica que $x = y = z$, ya que x es una solución básica del sistema y es una combinación convexa de y y z. Por lo tanto, x tiene que ser un vértice de X.

□

Recíprocamente, supongamos que x es un punto extremo de X y que las k primeras componentes de x son positivas. Luego se debe demostrar que:

$$x_1 A_1 + \ldots\ldots\ldots + x_k A_k = b \qquad \text{con } x_i > 0,\ i = 1, \ldots, k$$

es una solución básica posible.

Para demostrar que x es una posible solución básica, debemos probar que los vectores $A_1,\ldots,A_k$ son linealmente independientes. Supongamos que A_i $(i = 1, \ldots, k)$ son linealmente dependientes, esto implica que existe una combinación lineal de estos A_i tales que:

$$\beta_1 A_1 + \ldots\ldots\ldots + \beta_k A_k = 0$$

en donde no todos los β_i son nulos.

Luego, sea:

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k, 0, \ldots, 0)$$

Dado que $x_i > 0$, $(i = 1, \ldots, k)$ es siempre posible escoger un ε tal que:

$$u = x + \varepsilon\, \beta \geq 0$$

$$v = x - \varepsilon\, \beta \geq 0$$

Luego, como $A\,u = b$ y $Av = b$ esto implica que $u, v \in X$ y podemos expresar x como una combinación lineal de u y v, esto es: $x = \frac{1}{2}\,u + \frac{1}{2}\,v$.

Esto contradice la suposición inicial de que x es un vértice. Por lo tanto, se concluye que $A_1, \ldots, A_k$ son linealmente independiente, por lo que x es una solución posible básica de (2.3.1).

$\square$

Teorema Fundamental de la Programación Lineal

Dado un PL, en su forma estándar.

$$\text{Máx. } c^T x$$
$$\text{s. a} \quad Ax = b$$
$$x \geq 0.$$

Supongamos que el rango de A es m, se tiene que:

(a) Si existe una solución posible, también existe una solución básica posible.

(b) Si el problema tiene una solución posible óptima, entonces también tiene una solución básica óptima posible.

Demostración.

a). Sean A_1, ..., A_n las columnas de A y $x^T = (x_1, \ldots, x_n)$ una solución posible, es decir:

$$x_1 A_1 + \ldots\ldots + x_n A_n = b$$

Supongamos que p elementos de estos x_n son positivos y asumamos que son los p primeros, para mayor simplicidad. Luego obtendremos que:

$$x_1 A_1 + \ldots\ldots + x_p A_p = b \qquad (1)$$

Separamos en dos casos:

<u>*Caso 1:*</u> A_1, …, A_p son linealmente independientes.

Como A_1, …, A_p son *l.i.,* esto implica que $p \leq m$. Ya que el rango de A es m, en el caso de que $p = m$, la afirmación (a) es cierta, puesto $p = m$ nos asegura siempre encontrar una solución para x_1, …, x_p que además es única.

Ahora bien, si $p < m$, como el rango de A es m, es posible encontrar $(m - p)$ vectores columnas de A, entre las $(n - p)$ columnas restantes, de modo que junto a las p que se tienen, formen un conjunto de m vectores linealmente independientes. Si asignamos el valor cero a las $(m - p)$ componentes de x asociadas con estas columnas, obtendremos una solución básica (degenerada).

<u>*Caso 2*</u>: A_1, …, A_p son linealmente dependientes.

En este caso tendremos que:

$$y_1 A_1 + \ldots + y_p A_p = 0 \qquad (2)$$

en donde no todos los y_i, $(i = 1, \ldots, p)$ son nulos, no es difícil ver que al menos un y_i es mayor que cero. Luego, multiplicando (2) por ε y sustrayendo esta nueva expresión a (1) obtenemos que:

$$(x_1 - \varepsilon\, y_1)\, A_1 + \ldots + (x_p - \varepsilon\, y_p)\, A_p = b$$

Este sistema de ecuaciones es válido para cualquier valor de ε. Sin embargo, si queremos obtener soluciones posibles, o sea, que sean no negativas, debemos tener precaución para escoger los valores de ε. Ahora bien, si ε = 0, obtendríamos la solución inicial de (1).

Si ε > 0 y aumenta, la componente $(x_i - \varepsilon\, y_i)$ aumentará, disminuirá o se mantendrá igual según y_i sea negativo, positivo o cero. Como al menos una componente y_i es positiva, sabemos que por lo menos una de estas componentes debe crecer. Luego, si escogemos un ε tal que:

$$\varepsilon = \min \{ \frac{x_i}{y_i} | \; y_i > 0\}$$

Así, habremos generado una nueva solución posible con a lo más $(p-1)$ componentes positivas. Si repetimos este proceso podemos eliminar componentes de x hasta que tengamos una solución posible, cuyas correspondientes columnas de A son linealmente independientes, lo que nos vuelve al Caso 1, por lo que con esto queda demostrada la parte (a) del Teorema Fundamental de la Programación Lineal.

Para (b). Sea $x^T = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ una solución posible óptima o sea que $c\, x^T = Z_0$ es el máximo de la función objetivo misma, y supongamos que contiene exactamente p variables positivas $x_1, \ldots, x_n$. Por lo que tendremos que:

$$x_1 A_1 + \ldots + x_p A_p = b$$

Nuevamente separamos dos casos.

<u>*Caso 1.1:*</u> $A_1, \ldots, A_p$son linealmente independientes.

Esta situación es semejante a la del Caso 1 para (a), donde $p \leq m$. Cuando $p = m$, el rango de A será m y como es *l.i.*, eso implica que x^Tes una solución posible básica y como c $x^T = Z_0$ y es el máximo, esto implica que x^T es una solución óptima básica. Ahora bien, cuando $p < m$ y el rango de A es m, es posible encontrar $(m-p)$ vectores columnas de A, entre las $(n - p)$ restantes, de manera que junto a las p que tenemos, formen un conjunto de m vectores linealmente independientes.

Si damos valor cero a las variables asociadas de dichas $(m-p)$ columnas, habremos conseguido una solución posible básica degenerada, pero solamente en los x_{p+1} vectores, ya que, hasta x_p esta la solución óptima posible, es decir:

$$x_1 A_1 + \ldots + x_p A_p + 0\ A_{p+1} + 0\ A_{n-p} = b,$$

por lo que volveríamos al caso anterior, entonces x^T es una solución óptima básica.

Caso 2.1: A_1, ..., A_p son linealmente dependientes.

Esta situación también es similar a la anterior del Caso 2 para (a), la diferencia es que ahora debemos demostrar que para cualquier ε todo vector $(x - \varepsilon\ y)$ que cumpla con la restricción de no negatividad es una solución óptima. El valor de la función objetivo asociado con la solución $(x - \varepsilon\ y)$ es $(c\ x - \varepsilon\ c\ y)$.

Para ε suficientemente pequeño, $(x - \varepsilon\ y)$ es solución posible para valores de ε tanto negativas como positivas, donde debe cumplirse que $cy = 0$, pues si $cy \neq 0$, un ε pequeño y con signo apropiado, permitiría obtener una solución posible tal que $c\ (x - \varepsilon\ y) > cx$, lo cual contradice la suposición inicial que x es una solución óptima. Luego, procediendo igual que en el Caso 2 para (b) anterior, esto asegura que las nuevas soluciones posibles, con un menor número de componentes positivas, también deben ser óptimas.

$\square$

Tabla - Relación Primal -Dual.

Objetivo	Max		Objetivo	Min
Restricción	$i \leq b_i$	↔	Variable	i ≥0
Restricción	$i = b_i$	↔	Variable	i no restringida
Restricción	$i \leq b_i$	↔	Variable	i ≤0
Variable	i ≥0	↔	Restricción	$i \leq c_j$
Variable	i no restringida	↔	Restricción	$i = c_j$
Variable	i ≤0	↔	Restricción	$i \leq c_j$

Referencias

Bazaraa, M., Jarvis & Sherali, H. *Linear programming and network flows,* Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons (2010).

Biografía de George Bernard Dantzig (https://www.phpsimplex.com).

Carro, R. *Investigación de Operaciones en Administración,* Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina (2009).

Carro R. & Gonzales D. *Modelos de líneas de espera*. Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina (2012).

Dantzig. G. B. *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton New Jersey (1963).

Dikin, I.I. *Iterative solution of problems of linear and quadratic programming*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (Volume 174, Number 4, pp: 747–748) (1967).

Fourier, J.B.J. *Solution d'une question particuliere du calcul des inegalities*, original 1826 paper with an abstract of an 1824 paper reprinted in Oeuvres de Fourier, Tome II (pp: 317-319) Olms: Hildesheim (1970).

Hillier, F. & Lieberman, G. *Introducción a la Investigación de Operaciones*, (9°a ed.) Ciudad de México, México: Mcgraw-Hill / Interamericana editores, S.A. de C.V (2010).

Journal of Computational and Applied Mathematics, (Volume 124, Issue, 1 December, pp: 281-302) (2000).

Kantorovich L.V. *Mathematical methods in the organization and planning of production*, translation of original 1939 paper, Management Sci.6, 366-422 (1960).

Kolman B. y Hill D. R. *Álgebra lineal,* (8° a ed.). México Pearson (2006).

Leotief W. *The structure of the American Economy*, 1919-1931. Oxford University Press. Oxford (1951).

López M. G. et al. *Curso de Programación Lineal: Teoría y Aplicaciones*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México (2018).

Luenberger, D., & Ye Y. *Linear and nonlinear programming*, Cham: Springer (2016).

Mora G. L.A. & Salas G.H. *Programación Lineal aplicada,* 2°a. ed. Bogotá: Ecoe Ediciones, (1963) (pp: 217. 347).

Raña J. & Ferrer Juan C. *Modelo de asignación de recursos en atención primaria*, Revista Médica de Chile, Santiago de Chile, Chile (2007).

Stanimirovia Pedrag S. & Petkovi Marko D. *Gauss Jordan elimination method for computing outer inverses, Applied Mathematics and Computation*, Volume 219, Issue 9, (2013) (pp: 4667-4679).

Taha, H. *Investigación de Operaciones,* (9° a edición). Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación (2012).

Terlaky, T. *Interior Point Methods of Mathematical Programming* (1996).

Thierauf R.J. & Groose R.H. T*oma de Decisiones por Medio. de Investigación de Operaciones*, Ed. Limusa, México (1976).

Von Neumann J. & Morgestern O. *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton New Jersey (1944).

Williams G. *Álgebra Lineal con aplicaciones*, Mcgraw Hill (2002