



t

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**INFLUENCIA DEL NIVEL COGNITIVO EN LA RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS DE SOBRA Y FALTA EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA Y
BACHILLERATO**

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

LIC. ALINNE ARLETT RAMÍREZ ESTRADA

DIRECTOR DE TESIS

DR JOSIP SLISKO IGNJATOV

CO-DIRECTOR DE TESIS

MTRO. PABLO RODRIGO ZELENY VÁZQUEZ

PUEBLA, PUE. MARZO 2026



Dr. Severino Muñoz Aguirre
Secretario de Investigación y Estudios de Posgrado
P R E S E N T E

Por este medio le informo que la C:

LIC. ALINNE ARLETT RAMÍREZ ESTRADA

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 26 de noviembre de 2025, con la tesis titulada:

“INFLUENCIA DEL NIVEL COGNITIVO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE SOBRA Y FALTA EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA Y BACHILLERATO”

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

Atentamente
H. Puebla de Z., 19 de marzo de 2026.

Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Coordinadora de la Maestría en Educación Matemática.



EDUR / agm

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Este trabajo se realizó gracias al apoyo por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) No. CVU 1340331.

AGRADECIMIENTOS PERSONALES

Agradezco a mi familia, a mi asesor de tesis, a mis compañeros, amigos y profesores que me permitieron llegar hasta aquí. Me agradezco a mí por la disciplina que he mostrado para cumplir para alcanzar este escalón. Y sobre todo a Dios por permitirme hacer todo lo que me propongo.

A David, quién me ha dado mil motivos para ser la mejor versión de mí.

Índice

Introducción	0
Capítulo 1	2
1.1 Enunciado del problema	2
1.2 Formulación del problema	2
1.3 Objetivos	3
1.4 Justificación	3
1.5 Hipótesis	4
Capítulo 2	5
2.1 Antecedentes	5
2.2 Cognición	11
2.2.1 Definición de cognición	11
2.2.2 Metacognición	11
2.2.3 Habilidades cognitivas	12
2.2.4.1 Definición de nivel cognitivo	14
2.2.4 Nivel cognitivo	14
2.3.5 Reflexión Cognitiva	17
2.3 Lógica	18
2.3.1 Definición de Lógica	18
2.3.2 Razonamiento lógico	19
2.4 Problemas en matemáticas	20
2.4.1 Problema matemático	20
2.4.2 ¿Cómo resolver un problema matemático?	21
2.4.3 Problemas de sobra y falta	23
Capítulo 3	24
3.1 Tipo y enfoque	24
3.2 Población y Muestra	24
3.3 Instrumentos	24
3.3.1 Test de razonamiento Lógico	24
3.3.2 Test de Reflexión Cognitiva	25
3.3.3 Problemas de sobra y falta	25
3.4 Procedimiento de recolección y análisis de datos	26
Capítulo 4	28
4.2 Comparación entre nivel secundaria y bachillerato	30

4.2.1 Test de Reflexión Cognitiva	30
4.2.2 Test de Razonamiento Lógico.....	51
4.2.3 Problemas de sobra y falta	53
4. 2 Correlación entre el nivel cognitivo y problemas de sobra y de falta	62
4.2.1 Correlación mediante el coeficiente de Spearman	62
4.2.2 Correlación mediante un análisis por grupos.....	65
4.2.3 Comparación de los resultados con otras investigaciones	69
Capítulo 5	70
Bibliografía.....	73
Anexos	80
Anexo 1.....	80
Test de Razonamiento Lógico (TRL o TOLT)	80
Anexo 2.....	88
Test de Reflexión Cognitiva (TRC)	88
Anexo 3.....	90
Problemas de sobra y falta.....	90

Resumen

Diversos estudios han indagado cuáles y qué tipo de factores muestran relevancia al resolver problemas matemáticos. Entre estos se han encontrado factores psico-afectivos, cognitivos y contextuales. El objetivo principal de esta investigación es analizar la correlación entre el nivel cognitivo con el puntaje de dos problemas aritmético-algebraicos conocidos como “problemas de sobra y falta”. Los objetivos secundarios son comparar los resultados de cada una de las pruebas en los dos niveles de escolaridad en los que se trabaja.

El estudio se realizó a través de una metodología de tipo cuantitativa con enfoque correlacional, la muestra fueron 313 estudiantes: 127 de tercero de secundaria y 186 de tercer año de bachillerato. Los instrumentos para elegir fueron: una adaptación del Test de Reflexión cognitiva (CRT) propuesta por Toplak y colaboradores (2014), el Test de Razonamiento Lógico (TOLT) en idioma español, y, un instrumento diseñado de dos problemas de sobra y falta contextualizados. Como variable predictora se usó la suma de los puntajes del CRT y el TOLT y como variable independiente el puntaje de la prueba de problemas de sobra y falta. Se analizaron los resultados mediante el coeficiente de Spearman para pruebas no normales, y también mediante un análisis por grupos según el nivel cognitivo. Así también se usó una prueba z de dos proporciones para medir la significancia estadística de la diferencia entre nivel secundaria y bachillerato.

Los resultados de la correlación mediante el coeficiente de Spearman señalan que existen correlaciones positivas entre las variables de interés. Sin embargo, no son correlaciones altas, sino moderadas. Mediante el análisis por grupos según el nivel cognitivo, los resultados mostraron que los alumnos que se desempeñan mejor en CRT y TOLT también logran resolver bien los dos problemas de sobra y de falta.

También se encontró una diferencia altamente significativa entre los resultados de los estudiantes de bachillerato y los de secundaria principalmente en el Test de Reflexión Cognitiva y en la resolución de problemas de sobra y falta. El Test de Razonamiento Lógico no presentó diferencia estadísticamente significativa entre ambos niveles. El Test de Razonamiento Lógico fue mejor predictor para el desempeño en la prueba problemas de sobra y falta en secundaria, mientras que el Test de Reflexión Cognitiva fue mejor predictor en nivel bachillerato.

Se concluye que el nivel cognitivo determinado por la suma de puntajes en el Test de Reflexión Cognitiva y en el Test de Razonamiento Lógico si tiene cierta influencia al resolver problemas de sobra y falta. Sin embargo, existen alumnos que presentaron un alto nivel cognitivo y un bajo rendimiento en los problemas y viceversa. El nivel de escolaridad si influye en el Test de Reflexión Cognitiva y en la resolución de problemas de sobra y falta, pero no en el Test de Razonamiento Lógico. El uso dual de los dos instrumentos de medición para el nivel cognitivo resultó optimo ya que en ambos niveles educativos el mejor predictor para la prueba de problemas de sobra y falta fue distinto.

Palabras clave: CRT, TOLT, Nivel Cognitivo, Problemas matemáticos, Problemas de sobra y falta

Abstract

Several studies have investigated which factors are relevant when solving mathematical problems. These factors include psycho-affective, cognitive, and contextual factors. The main objective of this research is to analyze the correlation between cognitive level and the score on two arithmetic-algebraic problems known as "surplus and missing problems." The secondary objectives are to compare the results of each of the tests at the two grade levels studied.

The study was conducted using a quantitative methodology with a correlational approach. The sample consisted of 313 students: 127 in their third year of secondary school and 186 in their third year of high school. The instruments selected were: an adaptation of the Cognitive Reflection Test (CRT) proposed by Toplak et al. (2014), the Logical Reasoning Test (TOLT) in Spanish, and an instrument designed with two contextualized surplus and missing problems. The sum of the CRT and TOLT scores was used as the predictor variable, and the score on the excess and lack problems test was used as the independent variable. Results were analyzed using Spearman's coefficient for non-normal tests and also through group analysis based on cognitive level. A two-proportion z test was also used to measure the statistical significance of the difference between middle and high school levels.

The results of the Spearman coefficient correlation test indicate positive correlations between the variables of interest. However, these are not high correlations, but rather moderate. Through group analysis based on cognitive level, the results showed that students who perform better on the CRT and TOLT also perform well on both the excess and lack problems.

A highly significant difference was also found between the results of high school and middle school students, mainly on the Cognitive Reflection Test and on solving excess and lack problems. The Logical Reasoning Test did not show any statistically significant differences between the two levels. The Logical Reasoning Test was the best predictor of performance on the surplus and missing problems test in secondary school, while the Cognitive Reflection Test was the best predictor at the high school level.

It is concluded that cognitive level, determined by the sum of scores on the Cognitive Reflection Test and the Logical Reasoning Test, does have some influence on solving surplus and missing

problems. However, some students presented a high cognitive level but poor performance on the problems, and vice versa. Educational level did influence the Cognitive Reflection Test and the solution of surplus and missing problems, but not the Logical Reasoning Test. The dual use of the two measuring instruments for cognitive level was optimal, as the best predictor for the surplus and missing problems test was different at both educational levels.

Keywords: CRT, TOLT, Cognitive Level, Math Problems, Surplus and Missing Problems

Introducción

La resolución de problemas matemáticos se ve influenciada por una amplia variedad de factores que abarcan dimensiones afectivas, cognitivas, metacognitivas y contextuales. Algunos estudios ponen en evidencia que los estudiantes con altas capacidades cognitivas tienden a tener una predisposición más positiva hacia las matemáticas, pues parecen utilizar un mayor repertorio de estrategias para optimizar su rendimiento, lo que da cuenta de aspectos volitivos y cognitivos implicados para mejorar el rendimiento y en sus aspiraciones futuras (Cerdeira et. al. 2017)

Esta investigación se enfoca en indagar qué influencia tiene el *nivel cognitivo* en la resolución de problemas matemáticos, en particular los *problemas de sobra y falta*. Este trabajo se hace mediante una investigación cuantitativa de tipo correlacional.

La primera variable del estudio es el nivel cognitivo. Se entiende por nivel cognitivo al grado de complejidad del pensamiento que un estudiante debe emplear para responder a una tarea o alcanzar un objetivo de aprendizaje (Anderson & Krathwohl 2001). En este trabajo, el nivel cognitivo está determinado por el promedio de los puntajes obtenidos en dos pruebas conocidas mundialmente como medidores para habilidades cognitivas específicas. El primero es una versión extendida del Test de Reflexión Cognitiva propuesta inicialmente por Frederick en 2005. Los autores de esta extensión son Toplak, West y Stanovich (2014). El segundo instrumento es el Test de Razonamiento Lógico (TRL, Díaz y Oliva Martínez, 1995) que es la versión española del Test of Logical Thinking (TOLT), elaborado por Tobin y Capie en 1981.

Para la segunda variable, la cual es la variable independiente, se ha diseñado una prueba con dos problemas de sobra y falta que tal como lo menciona Melchor (2020):

Los problemas de falta y sobra se utilizan en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en la educación primaria y secundaria. Estos problemas son útiles para enseñar a los estudiantes conceptos como adición, sustracción, igualdad y desigualdad, y también son una buena manera de desarrollar habilidades de pensamiento lógico y resolución de problemas. (p. 5)

Pero, ¿qué son “los problemas de sobra y falta”? Los problemas de sobra y falta son problemas matemáticos en los cuales se incluye una premisa inicial, y se otorgan pistas que incluyen dos valores incógnitos a encontrar: el número total de objetos a repartir y el número total entre el que se reparte, haciendo uso de las palabras “sobra” o “falta”.

Por ejemplo: “En una fiesta hay mesas con sillas en cada mesa. Si coloco 7 sillas en cada mesa sobra una silla, pero si coloco 8 sillas por cada mesa me faltan 6 sillas. ¿Cuántas mesas y cuantas sillas hay?”

En la investigación se determinó que el nivel cognitivo si es una variable predictora para el desempeño de problemas de sobra y de falta mediante el análisis de los resultados por un software estadístico y mediante la comparación de grupos según el desempeño en las pruebas cognitivas.

Capítulo 1

Planteamiento del problema

1.1 Enunciado del problema

Los resultados de la prueba PISA 2022 confirman una tendencia preocupante para México: el 65.8% de los estudiantes se ubican en el nivel más bajo de desempeño en matemáticas, mientras que únicamente el 2% alcanza los niveles superiores (5 y 6) (OECD, 2023). Esta situación refleja una crisis educativa que exige la implementación de estrategias eficaces para mejorar la capacidad de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos.

La dificultad de los estudiantes para enfrentar problemas matemáticos no puede atribuirse a una sola causa; intervienen factores biológicos, afectivos, sociales y, de manera central, cognitivos. Sin embargo, aún no se ha determinado con suficiente claridad en qué medida el nivel cognitivo influye en el rendimiento matemático, particularmente en problemas que requieren razonamiento lógico y reflexión, como los de “sobra y falta”.

La ausencia de investigaciones profundas sobre la relación entre el nivel cognitivo y la resolución de este tipo de problemas limita la posibilidad de diseñar estrategias pedagógicas basadas en evidencia. Identificar si existe una correlación significativa entre el perfil cognitivo de los estudiantes y su desempeño en problemas de sobra y falta permitiría introducir enfoques metacognitivos y de aceleración cognitiva que optimicen el aprendizaje matemático. De esta manera, se podrían superar las prácticas tradicionales centradas en la repetición mecánica y avanzar hacia métodos que fortalezcan el pensamiento crítico, el razonamiento lógico y la capacidad de aplicar las matemáticas en contextos reales.

1.2 Formulación del problema

Pregunta de investigación:

¿Cuál es la relación que existe entre el nivel cognitivo determinado por los resultados del Test de Razonamiento Lógico y el Test de Reflexión Cognitivo y entre la resolución de problemas de sobra y falta, en estudiantes de tercero secundaria y tercero de bachillerato?

Preguntas específicas:

- ¿Cuál es la diferencia entre los resultados del Test de Reflexión Cognitiva en estudiantes de secundaria y de bachillerato?
- ¿Cuál es la diferencia entre los resultados del Test de Razonamiento Lógico en estudiantes de secundaria y de bachillerato?
- ¿Cuál es la diferencia entre los resultados de la prueba de problemas de sobra y falta en estudiantes de secundaria y de bachillerato?

1.3 Objetivos

Objetivo general: Analizar la relación que existe entre el nivel cognitivo de estudiantes de tercero secundaria y tercero de preparatoria con la resolución de problemas de sobra y falta, mediante la intervención del Test de Razonamiento Lógico, Test de Razonamiento Cognitivo y dos problemas de sobra y falta contextualizados.

Objetivos específicos:

- Comparar los resultados obtenidos en el Test de Reflexión Cognitiva en estudiantes de secundaria y de bachillerato;
- Comparar los resultados obtenidos en el Test de Razonamiento Lógico en estudiantes de secundaria y de bachillerato;
- Comparar los resultados obtenidos la prueba de problemas de sobra y falta en estudiantes de secundaria y de bachillerato.

1.4 Justificación

Pruebas de rendimiento matemático, como Planea y PISA entre otras, señalan que el desempeño en la materia de Matemáticas en alumnos de nivel básico y medio superior es muy bajo, y va en decadencia en los últimos años.

Esta investigación se realiza con el fin de identificar si el nivel cognitivo tiene que ver con la resolución de problemas matemáticos, en específico los de sobra y falta, debido a que estudios

preliminares están en continua búsqueda de las causas de las dificultades de los alumnos para resolver problemas matemáticos.

Si podemos concluir que el nivel cognitivo es un factor que afecta grandemente a la resolución de problemas de sobra y falta, podríamos usar aceleración cognitiva (Etcheverry 2021; Tornero, 2014; Vernaez, 2021) como herramienta para optimizar el rendimiento en problemas matemáticos.

Los resultados de la presente investigación son trascendentales para tener una concepción mejorada de métodos de enseñanza eficaz para resolver problemas matemáticos, dado que las largas listas de ejercicios podrían ser sustituidas con problemas concretos que impliquen trabajar con razonamiento lógico y cognitivo. Por ende, esto favorecería a los docentes de matemáticas para formar alumnos capaces de resolver problemas, no sólo en el aula sino en la vida cotidiana, siendo parte de una sociedad critico-reflexiva.

1.5 Hipótesis

Se espera que los resultados del perfil cognitivo se asemejen a los resultados obtenido en la prueba de problemas de sobra y falta, es decir que exista una correlación positiva: Los alumnos que estén por encima de la media en las pruebas cognitivas estarán por encima de la media en los problemas de sobra y falta.

Capítulo 2

Marco conceptual

2.1 Antecedentes

El estudio de cómo los factores cognitivos influyen la resolución de problemas matemáticos es amplio. Sin embargo, específicamente en problemas de sobra y falta son escasos, tal como lo es el estudio “El desempeño de estudiantes de diferentes niveles educativos en la resolución de problemas de “sobra y falta”: la influencia del contexto y del nivel cognitivo” Melchor (2020). El autor halló que el nivel cognitivo medido por CRT y Razonamiento Lógico está directamente relacionado con la calidad de las estrategias de resolución en problemas de sobra y falta.

Entre los hallazgos más importantes de esta investigación están que los estudiantes con mayor razonamiento lógico-cognitivo tienden a abstraer, generalizar y usar álgebra, mientras que los de menor nivel se quedan en procedimientos aritméticos más frágiles.

Además, la combinación de evaluación individual, grupal y metacognitiva mostró que el razonamiento lógico no solo predice el éxito, sino que, también, puede fortalecerse mediante interacción y reflexión.

La correlación de habilidades cognitivas y desempeño en matemáticas de manera más general se exponen en las siguientes investigaciones.

Según Cancimanse Rodríguez (2023), los estudiantes con mayores habilidades cognitivas —como la atención sostenida, la memoria de trabajo, el razonamiento lógico y la flexibilidad cognitiva— alcanzan un mejor desempeño en la resolución de problemas matemáticos tipo Olimpiadas. Además, la autora destaca que la metacognición, entendida como la capacidad de planificar, monitorear y evaluar estrategias, constituye un factor diferenciador en la obtención de soluciones precisas y justificadas.

Patiño y colaboradores (2021) señalan que la resolución de problemas matemáticos está profundamente influenciada por los procesos cognitivos del estudiante, destacando que habilidades como la comprensión, la planificación y la evaluación son esenciales para enfrentar con éxito los desafíos matemáticos en el aula.

Inca (2018) sostiene que las funciones ejecutivas —como la planificación, la inhibición y la flexibilidad cognitiva— son esenciales para la resolución de problemas matemáticos que requieren:

- Comprensión del enunciado;
- Identificación de datos relevantes;
- Selección de estrategias de resolución;
- Verificación del resultado.

Orihuela De la Cruz (2025) sostiene que la resolución de problemas matemáticos en estudiantes está fuertemente influenciada por factores cognitivos como la lectura comprensiva, el pensamiento lógico y la experiencia previa, destacando que el desarrollo de estas habilidades permite una mejor interpretación del enunciado, una planificación más efectiva y una reflexión crítica sobre las soluciones propuestas.

Desoete y Roeyers (2005) concluyen que la resolución de problemas matemáticos en niños de tercer grado está determinada por múltiples habilidades cognitivas específicas —como el conocimiento del sistema numérico, la representación mental, la comprensión lingüística y la selección de información relevante—, y que el nivel cognitivo actúa como un predictor del desempeño, especialmente en niños con dificultades matemáticas, quienes muestran un perfil de habilidades menos maduras pero no cualitativamente distintas al de niños más jóvenes con desempeño similar.

Decker y Roberts (2015) señalan que la resolución temprana de problemas matemáticos depende no solo de las habilidades de cálculo, sino, también, de variables cognitivas específicas como la memoria de trabajo, el razonamiento fluido, la velocidad de procesamiento y la comprensión verbal, las cuales actúan como predictores diferenciales según el grado escolar y explican gran parte de la variabilidad en el desempeño matemático infantil.

En su investigación con estudiantes de secundaria, Toraman y colaboradores (2020) señalan que el nivel cognitivo, expresado a través de la conciencia metacognitiva y el pensamiento reflexivo hacia la resolución de problemas, se relaciona de manera significativa y positiva con el rendimiento en matemáticas, ya que los alumnos con mayor capacidad de autorregulación y reflexión logran analizar mejor las situaciones problemáticas, cuestionar sus propios procesos y evaluar alternativas de solución con mayor eficacia.

En nuestro estudio los indicadores de la variable predictora son: nivel cognitivo obtenido con los resultados de dos pruebas estandarizadas y mundialmente usadas que son el Test de Reflexión Cognitiva (CRT) por sus siglas en inglés y el Test de Razonamiento Lógico (TRL), también, conocido como TOLT (Test of Logical Thinking). A continuación, se presentan algunos resultados que indican la relación de estas pruebas por separado con la resolución de problemas o el rendimiento en matemáticas.

Debido a que existen numerosos estudios que hablan sobre la correlación entre el Test de Reflexión Cognitiva y sus distintas versiones y entre el desempeño en problemas matemáticos, se muestra una tabla comparativa de los hallazgos más importantes (véase Tabla 1.1 1):

Tabla 1.1 1

Correlación del Test de Reflexión Cognitiva con problemas matemáticos

Artículo	Autores / Año	Versión de CRT que usa	Correlación CRT Matemáticas ↔
The CRT and Students' Achievements in Mathematics and Physics	Doz y Sliško, 2024	CRT de 7 ítems (versión extendida)	Correlación positiva significativa con calificaciones en matemáticas y física.
Mathematical Beliefs and Cognitive Reflection	Gómez-Chacón, et al. 2011	CRT de 5 ítems (adaptado, problemas	Correlación positiva con rendimiento, pero las creencias

Artículo	Autores / Año	Versión de CRT que usa	Correlación CRT Matemáticas ↔
		aritméticos simples)	matemáticas explican más varianza que el CRT.
Evaluating the CRT (intuition, numeracy, insight)	Patel et al., 2019	CRT clásico (3 ítems) + insight problems (ej. lirios, hoyo de tierra)	CRT se solapa con numeracia; correlación con matemáticas atribuida en parte a habilidad numérica.
The CRT (Book)	Patel, 2017	CRT clásico y variantes extendidas	Concluye que mide intuición/reflexión + numeracia + insight; correlación con matemáticas no es pura.
Relationships among Math Beliefs, Fluid Intelligence, CRT	Rubio-Sánchez et al., 2023	CRT de 5 ítems (versión española)	Correlación baja con matemáticas; creencias matemáticas median entre inteligencia fluida y rendimiento.
The CRT: How much more than Numerical Ability?	Welsh, et al., 2013	CRT clásico (3 ítems, numéricos)	Correlación fuerte con numeracia; predice sesgos solo en problemas con cálculo numérico.
Children's CRT Predicts Conceptual Understanding in Science & Math	Young y Shtulman, 2020	CRT-D (9 ítems infantiles, tipo acertijo numérico y verbal)	Correlación positiva con comprensión de equivalencia matemática en primaria.
How Children's CRT Shapes Science Understanding	Young y Shtulman, 2020	CRT-D (9 ítems infantiles, tipo acertijo numérico y verbal)	Niños con mayor CRT-D entienden mejor enunciados matemáticos contraintuitivos y aprenden más tras instrucción.

Artículo	Autores / Año	Versión de CRT que usa	Correlación CRT Matemáticas ↔
Creencias, reflexión y rendimiento en secundaria	Gómez-Chacón et al., 2014	CRT + CreeMat	CRT correlaciona con rendimiento, pero creencias y memoria de trabajo son predictores más fuertes.
Dual Processes, Beliefs & Math Performance	Gómez-Veiga et al., 2018	CRT clásico y variantes	Consistente correlación positiva entre CRT y rendimiento matemático, aunque mediada por inteligencia fluida.
CRT y Física Universitaria	Kryjevskaja et al., 2020	CRT clásico (3 ítems)	CRT predice capacidad de superar intuiciones erróneas en física y matemáticas.
CRT y Creencias Paranormales / Religiosas	Pennycook et al., 2012–2015	CRT clásico (3 ítems)	Mejor CRT → menor creencia paranormal; correlación indirecta con razonamiento matemático.

Con respecto a la correlación entre el Test de Razonamiento Lógico y a la resolución de problemas matemáticos se encuentra las siguientes investigaciones:

1. Rohaeti, Hindun y Fitriani (2019)

Este estudio analizó la autoeficacia y el pensamiento crítico matemático en estudiantes de secundaria, clasificándolos según su etapa cognitiva con el TOLT y el Test de Longeot. Encontraron que la mayoría de los estudiantes estaban en la etapa de transición (68%). Los resultados mostraron que los estudiantes en etapas más avanzadas (formal) tenían mejores habilidades de pensamiento crítico matemático, aunque la relación con la autoeficacia no fue significativa.

El TOLT permitió identificar que el nivel de razonamiento lógico-formal condiciona la calidad de la resolución de problemas matemáticos complejos (Rohaeti et al., 2019).

2. Vázquez y Difabio de Anglat (2009)

Con una muestra amplia de 709 estudiantes de ingeniería en Argentina, aplicaron el TOLT y lo relacionaron con el rendimiento en álgebra, cálculo, física y química. Hallaron que los estudiantes con mayor nivel de pensamiento formal (según TOLT) obtenían mejores calificaciones en exámenes parciales y finales. Además, los razonamientos probabilístico y correlacional fueron los más débiles. Esto confirma que el TOLT predice el éxito en la resolución de problemas matemáticos universitarios, especialmente en áreas que requieren abstracción y modelización (Vázquez & Difabio de Anglat, 2009).

3. Rohaeti, Budiyanto & Sumarmo (2014)

En un diseño cuasi-experimental con estudiantes de preparatoria, se evaluó el impacto del aprendizaje basado en problemas (PBL) sobre el pensamiento lógico matemático y el aprendizaje autorregulado. El TOLT se utilizó como referencia conceptual para medir el razonamiento lógico. Los resultados mostraron que el PBL mejoró significativamente el pensamiento lógico matemático, aunque los puntajes siguieron siendo bajos en promedio. El TOLT sirvió como instrumento de referencia para identificar debilidades en razonamiento proporcional, combinatorio y probabilístico, claves en la resolución de problemas matemáticos no rutinarios (Rohaeti et al., 2014).

4. Lovianova y colaboradores (2022)

Este estudio en Ucrania implementó un enfoque basado en problemas para desarrollar el pensamiento lógico en secundaria, usando ecuaciones irracionales con parámetros. Aunque no aplicaron el TOLT directamente, se apoyaron en su marco teórico para justificar que resolver problemas con parámetros exige operaciones de análisis, síntesis y generalización, las mismas que evalúa el TOLT. Así, el TOLT se vincula indirectamente como marco de referencia para diseñar tareas que desarrollen el razonamiento lógico-matemático (Lovianova et al., 2022).

2.2 Cognición

2.2.1 Definición de cognición

La palabra "cognición" tiene sus orígenes en términos clásicos relacionados con el concepto de "conocer". Proviene del latín *cognoscere*, que significa "llegar a conocer, reconocer" (Bayne et al., 2019)

Tal como menciona Neisser (1967) “La cognición se refiere a los procesos mediante los cuales la información sensorial es transformada, reducida, elaborada, almacenada, recuperada y utilizada” (p. 4).

Por otra parte, una definición contemporánea afirma que “la cognición son todos los procesos mediante los cuales los individuos adquieren conocimiento y comprensión, incluidos percibir, recordar, razonar, juzgar e imaginar” (American Psychological Association, 2018).

La cognición implica procesos mentales, marcos de referencia mentales (mapas), estructura de redes mentales o neuronales, sistemas de información mental, nivel multidimensional de contactos y comunicación, niveles de interpretación, universos conceptuales, percepción, evaluación perceptiva y evaluación emotiva percibida (Rodriguez, 2007).

2.2.2 Metacognición

La palabra “metacognición” no es una palabra griega original, sino un neologismo creado en el ámbito de la psicología cognitiva contemporánea, especialmente a partir de los estudios sobre memoria de Tulving y Madigan (1969).

John Flavell acuñó originalmente el término metacognición a finales de la década de 1970 para significar “cognición sobre los fenómenos cognitivos” o, más simplemente, “pensar sobre el pensamiento” (Flavell, 1979, p. 906).

Gonzales (s.f.) afirma que la metacognición es: “Una serie de operaciones, actividades y funciones cognoscitivas llevadas a cabo por una persona, mediante un conjunto interiorizado de mecanismos

intelectuales que le permiten recabar, producir y evaluar información, a la vez que hacen posible que dicha persona pueda conocer, controlar y autorregular su propio funcionamiento intelectual.”

Norman y colaboradores (2019) afirman que la metacognición tiene al menos dos funciones. Una de ellas es monitorizar el estado actual de cualquier actividad cognitiva que estemos realizando. Por ejemplo, ¿qué tan bien entendemos el texto que estamos leyendo? O, si intentamos recordar algo, ¿hasta qué punto creemos que podremos lograrlo? La otra función es controlar nuestra propia cognición: esforzarnos más o menos por recordar algo, o cambiar a una estrategia diferente cuando nos atascamos al intentar resolver un rompecabezas. La monitorización y el control están estrechamente relacionados: el hecho de que ejerzamos o no control metacognitivo, y las formas en que intentamos regular nuestra cognición, a menudo dependerán del resultado de la monitorización metacognitiva.

Así la principal diferencia entre cognición y metacognición es que la cognición hace referencia a procesos u operaciones que están en marcha, mientras que la metacognición implica la supervisión o vigilancia, por parte del aprendiz, de las operaciones mentales que están en marcha, así como la habilidad para controlar las propias cogniciones.

2.2.3 Habilidades cognitivas

2.2.3.1 Definición de habilidades cognitivas

Las habilidades cognitivas son los procesos mentales que permiten al individuo analizar, sintetizar, aplicar y evaluar información para aprender, resolver problemas y desempeñarse en contextos profesionales y sociales (Frías et al., 2017).

Las habilidades cognitivas son las destrezas y procesos de la mente necesarios para realizar una tarea. Además, son las trabajadoras de la mente y facilitadoras del conocimiento al ser las responsables de adquirirlo y recuperarlo para utilizarlo posteriormente (Reed, 2007).

Por otra parte, Villarroel Chuca (2014) afirma que “las habilidades cognitivas son procesos mentales básicos que permiten al individuo adquirir conocimiento, comprenderlo y aplicarlo en la solución de problemas” (p. 15).

Millroodn y Maksimova (2018) afirman que una habilidad cognitiva del estudiante (learner cognitive skill) se define como un mecanismo funcional que le permite a un individuo procesar información y producir nuevo conocimiento. Estas habilidades son cruciales para:

- Crear, integrar y utilizar los medios para resolver desafíos y problemas situacionales;
- Actuar como mecanismos relacionados con el conocimiento y la competencia;
- Ser un activo crítico del capital humano, aumentando la productividad de individuos y comunidades.

2.2.3.2 Habilidades cognitivas específicas

Algunos autores (Irwin, 2017; Martínez, 2006; Norman, et al., 2019) otorgan algunos ejemplos de habilidades cognitivas específicas:

- Memoria
- Atención
- Función ejecutiva (executive functioning).
- Resolución de problemas (Problem solving)

Se define como la búsqueda de una meta cuando el camino hacia ella es incierto. Es una categoría significativa de actividad cognitiva.

- Pensamiento crítico (Critical thinking)

Implica evaluar ideas por su calidad, especialmente juzgando si tienen sentido o no.

Clavero (2001) clasifica las habilidades en cognitivas y metacognitivas definiéndolas de la siguiente manera:

I. *Habilidades cognitivas*. Son las facilitadoras del conocimiento, aquellas que operan directamente sobre la información: recogiendo, analizando, comprendiendo, procesando y guardando información en la memoria, para, posteriormente, poder recuperarla y utilizarla dónde, cuándo y cómo convenga. En general, son las siguientes: Atención, comprensión, elaboración y memorización y memorización

II. *Habilidades metacognitivas*. Son las facilitadoras de la cantidad y calidad de conocimiento que se tiene (productos), su control, su dirección y su aplicación a la resolución de problemas, tareas, etc. (procesos). En general son: conocimiento del conocimiento, y control de los procesos cognitivos, lo cual implica:

- Planificación: Diseño de los pasos a dar
- Autorregulación: Seguir cada paso planificado
- Evaluación: Valorar cada paso individualmente y en conjunto
- Reorganización (feedback): Modificar pasos erróneos hasta lograr los objetivos;
- Anticipación (forward): Avanzar o adelantarse a nuevos aprendizajes.

La discusión de Millroodn y Maksimova (2018) sobre el tema de las habilidades cognitivas se resumen en la siguiente taxonomía que distingue entre habilidades de orden inferior y de orden superior, además de las habilidades cuasi-cognitivas (véase Tabla 2.2.3.2 1):

Tabla 2.2.3.2 1

Taxonomía de habilidades cognitivas según Millroodn y Maksimova (2018)

2.2.4.1 Definición de nivel cognitivo.

Categoría	Ejemplos de Habilidades	Características
Habilidades Cognitivas de Orden Inferior (Lower-order cognitive skills)	Poseer conocimiento, utilizar conocimiento y demostrar conocimiento.	Su desarrollo es más rápido. Implican el procesamiento de detalles localizados ("pinpointed") en un texto y el entrenamiento de la memoria, apoyado por habilidades de comprensión.
Habilidades Cognitivas de Orden Superior (Higher-order cognitive skills)	Generar conocimiento, generar problemas y generar soluciones.	Implican el pensamiento de orden superior y el pensamiento crítico. El desarrollo de estas habilidades requiere esfuerzos duraderos y concertados y toma un camino de aprendizaje de por vida.
Habilidades Cuasi-Cognitivas (Quasi-cognitive skills)	Reflexiones metacognitivas, organización de procedimientos y uso del lenguaje.	

2.2.4 Nivel cognitivo

García y Benítez (2019) afirman que “el nivel cognitivo hace referencia al grado de complejidad de los procesos mentales que los estudiantes deben movilizar para resolver una tarea, lo cual permite diferenciar entre aprendizajes de orden básico y aprendizajes de orden superior” (p. 45).

Por otra parte en el ámbito educativo contemporáneo, (OCDE & Academia Nacional de Educación de EE. UU, 2025) el nivel cognitivo se entiende como la complejidad y profundidad del proceso mental que los estudiantes emplean al abordar una tarea, aprendizaje o percepción de contenidos. Este nivel tiene que ver con cómo combinan, aplican, evalúan o crean nueva información, a partir de sus conocimientos previos y estructura mental.

Anderson y Krathwohl (2001) afirman que, en el ámbito educativo, el nivel cognitivo se refiere al grado de complejidad del pensamiento que un estudiante debe emplear para responder a una tarea o alcanzar un objetivo de aprendizaje. Este concepto es fundamental para el diseño curricular y la evaluación, ya que permite clasificar los aprendizajes esperados desde procesos mentales simples, hasta procesos más complejos.

2.2.4.2 Niveles cognitivos.

Betchel (1994) afirma que existen tres niveles cognitivos descritos a continuación en la siguiente tabla (Tabla 2.2.4.2 1):

Tabla 2.2.4.2 1

Niveles cognitivos según Betchel (1994)

Nivel	Descripción y Enfoque
Nivel Superior (Agente Humano/Reglas Conscientes)	El nivel en el que los humanos funcionan como intérpretes de reglas conscientes, concentrándose en símbolos externos y cómo los agentes humanos los manipulan.
Nivel Cognitivo (El Sistema Cognitivo)	Si existe un nivel de procesamiento cognitivo que ocurre dentro de la persona, pero por encima del nivel de los procesos neurales, este requeriría un conjunto diferente de conceptos y herramientas de modelado. Este es el nivel en el que las teorías cognitivas intentan funcionar y para el cual aún no se conoce la naturaleza de las interacciones causales básicas.

Nivel Inferior (Neural/Implementacional)	Este nivel concierne a los mecanismos físicos que llevan a cabo el proceso cognitivo (el nivel implementacional de Marr). El conexionismo y los modelos de redes neuronales a menudo se sitúan en un nivel inferior que los modelos tradicionales de procesamiento de información, a veces vistos como modelos del funcionamiento de las estructuras en el cerebro
--	--

Siguiendo la Taxonomía de Bloom Anderson y Krathwohl (2001), consideran que los niveles cognitivos se estructuran jerárquicamente en seis categorías: recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear.

Un ejemplo de la aplicación de los niveles descritos anteriormente enfocados en el tema de fracciones sería el siguiente:

1. Recordar. El estudiante recuerda los términos de una fracción (numerador y denominador).
2. Comprender. El estudiante explica cómo representar una fracción en la recta numérica.
3. Aplicar. El estudiante resuelve ejercicios de suma de fracciones con igual denominador.
4. Analizar. El estudiante compara fracciones con distinto denominador para determinar cuál es mayor.
5. Evaluar. El estudiante justifica por qué una fracción es equivalente a otra usando representaciones gráficas.
6. Crear. El estudiante diseña un problema con fracciones que pueda resolver un compañero.

Por otra parte, la Taxonomía de Marzano y Kendall (2007) plantea una visión más amplia, que incluye lo cognitivo, lo metacognitivo y lo motivacional. Sus niveles son:

1. Recuperación → Recordar y reconocer información.
2. Comprensión → Construir significado e interpretar.
3. Análisis → Examinar, clasificar, identificar errores.
4. Utilización del conocimiento → Resolver problemas en la práctica.
5. Metacognición → Planear, monitorear y evaluar el propio aprendizaje.

6. Sistema del Yo → Actitudes, motivación y creencias que influyen en aprender.

2.3.5 Reflexión Cognitiva

2.1.5.1 Definición de reflexión cognitiva.

Sirota y colaboradores (2021) mencionan que la reflexión cognitiva se define principalmente como la habilidad de suprimir una intuición inicial (incorrecta) y de reflexionar cognitivamente al resolver problemas.

La reflexión cognitiva se define como la propensión a reflexionar sobre la propia actividad cognitiva, o la disposición a anular una respuesta intuitiva (incorrecta) con una respuesta más analítica (correcta). Se considera una capacidad crucial para el pensamiento racional y la toma de decisiones, que implica superar las intuiciones iniciales erróneas a favor de un análisis más profundo (Shtulman y Young, 2023).

Por otra parte, Jiang y colaboradores (2021) mencionan que la reflexión cognitiva es la habilidad de anular una respuesta pre-potente (intuitiva e inapropiada) y de involucrarse en una reflexión deliberada sobre el problema que conduce a respuestas apropiadas. Se describe como la propensión a reflexionar sobre la propia actividad cognitiva.

De acuerdo con la teoría del procesamiento dual (Kahneman, 2011; Tversky & Kahneman, 1974; Stanovich & West, 2000; Petty & Cacioppo, 1986; Sloman, 1996) la reflexión cognitiva implica anular el procesamiento de Tipo 1 (rápido, automático, requiere pocos recursos cognitivos) y activar el procesamiento de Tipo 2 (relativamente lento, deliberado, requiere más recursos cognitivos) para obtener la respuesta correcta.

2.1.5.2 ¿Cómo medir la reflexión cognitiva?

Tal como lo afirman (Shtulman y Young, 2023), el Test de Reflexión Cognitiva (CRT) original, desarrollado por Frederick (2005), es una herramienta diseñada para evaluar la reflexión cognitiva, es decir, la propensión de una persona a reflexionar sobre su propia actividad cognitiva.

Sirota y colaboradores (2021) añaden que la reflexión cognitiva se mide comúnmente con el Test de Reflexión Cognitiva (CRT por sus siglas en inglés). El CRT se creó para evaluar esta capacidad de suprimir una respuesta intuitiva que es incorrecta y, en su lugar, aplicar un pensamiento más deliberado y reflexivo.

Análogamente, Jiang y colaboradores (2021) afirman que la reflexión cognitiva es medida por el Test de Reflexión Cognitiva el cual incluye ítems diseñados para inducir una respuesta pre-potente (intuitiva) que es incorrecta.

2.1.5.3 Pensamiento rápido vs pensamiento formal

Un problema común entre los estudiantes es tener la creencia que es mejor contestar rápido a contestar correctamente. Ello los lleva a caer en ilusiones al resolver problemas, ignorando muchas veces la lógica y el sentido común u otras veces sujetándose a procesos vistos en clase válidos pero que no son siempre los adecuados para ese problema en particular.

Muchos investigadores han enfatizado la distinción entre dos tipos de procesos cognitivos: los que se ejecutan rápidamente con poca deliberación consciente y los que son más lentos y reflexivos. Stanovich y West (2000) llamaron a estos procesos “Sistema 1” y “Sistema 2”, respectivamente.

El **Sistema 1** ocurre instantáneamente y sin esfuerzo y no se ve afectado por el intelecto, el estado de alerta, la motivación o la dificultad del problema matemático que se intenta resolver o el tiempo.

Por el contrario, encontrar $\sqrt{19163}$ con dos decimales sin calculadora involucra procesos del **Sistema 2** para operaciones mentales que requieren esfuerzo, motivación, concentración y la ejecución de reglas aprendidas.

Es claro notar que si se pide a un estudiante encontrar $\sqrt{19163}$ no existirá una respuesta rápida o espontánea que el alumno pueda identificar intuitivamente. Sin embargo, existen otros problemas en los cuales si existe una solución rápida incorrecta en la que más de un estudiante puede pensar.

2.3 Lógica

2.3.1 Definición de Lógica

La lógica ha sido entendida históricamente como la ciencia que permite estructurar el razonamiento y alcanzar la verdad. Diversos exponentes de esta ciencia coinciden en que la lógica estudia las reglas del pensamiento correcto, proporcionando herramientas para argumentar de manera rigurosa

y evitar errores en el razonamiento (Aristóteles, ca. 350 a.C./2004; Ockham, 1990; Tomás de Aquino, 2006). Sin embargo, Leibniz (1989) amplió esta visión, proponiendo un enfoque simbólico y sistemático que anticipa la lógica matemática moderna.

Desde el punto de vista moderno, Russell (1970) afirma que la lógica es la ciencia que analiza las relaciones entre proposiciones y establece las bases formales del conocimiento, sirviendo como fundamento para la matemática y la filosofía.

La lógica, desde la perspectiva de Piaget (1999), es la axiomática de la razón y el pensamiento. Describe las formas ideales de equilibrio de las operaciones mentales en sistemas coherentes y reversibles. Se manifiesta en el individuo a través de un proceso constructivo y social.

2.3.2 Razonamiento lógico

Para Aristóteles “el razonamiento lógico es el proceso mediante el cual se extraen conclusiones válidas a partir de premisas verdaderas, utilizando reglas de inferencia que aseguran la coherencia del pensamiento” (Aristóteles ca. 350 a.C./2004)

Desde el punto de vista de Leibniz (1989), el razonamiento lógico es el proceso de representar y analizar el pensamiento de manera simbólica y sistemática, permitiendo deducir verdades y resolver problemas de forma rigurosa.

Un razonamiento lógico, en definitiva, es un proceso mental que implica la aplicación de la lógica. A partir de esta clase de razonamiento, se puede partir de una o de varias premisas para arribar a una conclusión que puede determinarse como verdadera, falsa o posible (Chaparro, et. al 2018).

2.3.2.1 ¿Cómo se mide el razonamiento lógico?

El razonamiento lógico se mide principalmente mediante pruebas estandarizadas que evalúan la capacidad de deducir, inducir, controlar variables y resolver problemas no rutinarios.

A continuación, se mencionan tres formas de medir el razonamiento lógico

1. Test of Logical Thinking (TOLT)

El razonamiento lógico se mide con instrumentos como el TOLT, que evalúa cinco modos de razonamiento formal: proporcional, control de variables, probabilístico, correlacional y combinatorio. Tobin y Capie (1981) demostraron que este test tiene alta confiabilidad ($\alpha = .85$) y validez como predictor del desempeño en ciencias y matemáticas.

2. Pruebas de razonamiento inductivo y deductivo

El razonamiento lógico también se mide a través de tareas que requieren inferencias deductivas (de lo general a lo particular) e inductivas (de lo particular a lo general). Estas pruebas valoran la validez de las conclusiones y la probabilidad de generalizaciones correctas (Dávila Newman, 2006).

3. Pruebas de pensamiento crítico y cognitivo

El razonamiento lógico puede evaluarse mediante instrumentos de pensamiento crítico que incluyen ítems de análisis, inferencia y evaluación de argumentos. Ossa-Cornejo y colaboradores (2017) señalan que estas pruebas permiten medir la capacidad de los estudiantes para aplicar reglas lógicas en contextos diversos.

2.4 Problemas en matemáticas

2.4.1 Problema matemático

Pólya (1945) afirma en su obra clásica que un problema matemático es “cualquier situación en la que se busca un resultado y no se conoce de antemano un método directo para alcanzarlo” (p. 6).

Schoenfeld (1992) plantea que un problema matemático es “una tarea para la cual el individuo no tiene un algoritmo disponible que garantice la solución, y debe recurrir a estrategias de exploración y razonamiento” (p. 335).

El NCTM (2000) define los problemas matemáticos como “tareas que plantean un desafío intelectual para el cual los estudiantes no poseen un método inmediato de solución, y que requieren la aplicación de conocimientos previos y estrategias de razonamiento” (p. 52).

Pérez Gómez y Beltrán Pozo (2011) definen un problema matemático como “una situación que requiere del estudiante un proceso de búsqueda y razonamiento, en la cual no es evidente de inmediato el procedimiento de solución” (p. 76).

Patiño Contreras, Prada Núñez y Hernández Suárez (2021) definen los problemas matemáticos como “situaciones que implican no solo la aplicación de operaciones, sino también la comprensión, el análisis y la toma de decisiones en contextos diversos” (p. 3).

2.4.2 ¿Cómo resolver un problema matemático?

Pólya (1945), en su obra *How to Solve It*, menciona que los pasos para resolver un problema matemático son:

1. Comprender el problema → Identificar datos, incógnitas y condiciones;
2. Concebir un plan → Seleccionar estrategias posibles (analogías, descomposición, ensayo y error);
3. Ejecutar el plan → Aplicar el procedimiento elegido paso a paso;
4. Examinar la solución → Revisar el resultado y verificar su coherencia.

Por otra parte, Schoenfeld (1992), en *Learning to Think Mathematically*, menciona los siguientes pasos para la solución de un problema:

1. Exploración inicial → Analizar el enunciado y generar representaciones;
2. Selección de estrategias → Probar diferentes caminos, ajustando según resultados parciales;
3. Monitoreo metacognitivo → Evaluar continuamente si la estrategia funciona;
4. Construcción de la solución → Integrar pasos en un razonamiento coherente;
5. Reflexión final → Revisar la validez y transferir aprendizajes a otros problemas.

Por su parte, Pérez y Beltrán (2011) otorgan los siguientes pasos:

1. Comprensión de la situación → Traducir el problema a un modelo matemático;
2. Aplicación de procedimientos → Usar operaciones, fórmulas o representaciones gráficas;

3. Verificación de la coherencia → Contrastar la solución con el contexto real;
4. Comunicación de la respuesta → Explicar el procedimiento y justificar la solución.

2.4.2.1 Habilidades cognitivas implicadas en el método de resolución de problemas de Pólya

Cuando se resuelve un problema matemático siguiendo el método de Polya (comprender el problema, diseñar un plan, ejecutar el plan y verificar la solución), se ponen en juego varias habilidades cognitivas (Neisser, 1967; Flavell, 1979; American Psychological Association, 2018; Norman et al., 2019; Quiñones Vásquez & Huiman Tarrillo, 2022; Chacón-Castro, Buele, López-Rueda, & Jadán-Guerrero, 2022; Rani, Martin, & Hidayat, 2021).

A continuación, se detallan:

1. Comprender el problema

Comprensión lectora: interpretar correctamente el enunciado, identificar datos relevantes y descartar información irrelevante.

Atención sostenida: mantener el foco en los detalles del problema sin distraerse.

Memoria de trabajo: retener temporalmente los datos y condiciones para analizarlos.

Razonamiento lógico: detectar relaciones entre las variables y condiciones planteadas.

2. Diseñar un plan

Pensamiento analítico: descomponer el problema en partes más manejables.

Flexibilidad cognitiva: considerar diferentes estrategias posibles (aritméticas, algebraicas, gráficas).

Planificación: seleccionar la estrategia más adecuada según los recursos y conocimientos disponibles.

Metacognición: reflexionar sobre qué métodos podrían funcionar mejor y anticipar dificultades.

3. Ejecutar el plan

Razonamiento procedimental: aplicar correctamente operaciones y algoritmos.

Control inhibitorio: evitar caer en respuestas impulsivas o en errores por intuición rápida.

Persistencia cognitiva: mantener el esfuerzo hasta completar la estrategia elegida.

Numeracia: manejar con precisión cálculos y representaciones matemáticas.

4. Verificar la solución

Evaluación crítica: revisar si el resultado obtenido es coherente con el enunciado.

Pensamiento reflexivo: cuestionar el procedimiento seguido y detectar posibles errores.

Generalización: considerar si la estrategia usada puede aplicarse a otros problemas similares.

Metacognición avanzada: valorar la eficacia del método y aprender de la experiencia.

En síntesis, al aplicar el método de Polya estás integrando procesos cognitivos básicos (atención, memoria, comprensión) con habilidades superiores (razonamiento lógico, metacognición, planificación y evaluación). Esa combinación es lo que convierte la resolución de problemas en una actividad formativa y no solo mecánica.

2.4.3 Problemas de sobra y falta

Los problemas de sobra y falta son problemas que implican encontrar dos variables desconocidas a partir de premisas dadas, se pueden resolver con sistemas de ecuaciones lineales 2×2 o bien con otros métodos aritméticos planteados por los estudiantes. Melchor (2020) menciona que:

Los problemas de falta y sobra se utilizan en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en la educación primaria y secundaria. Estos problemas son útiles para enseñar a los estudiantes conceptos como adición, sustracción, igualdad y desigualdad, y también son una buena manera de desarrollar habilidades de pensamiento lógico y resolución de problemas (p. 5).

Capítulo 3

Metodología

3.1 Tipo y enfoque

La investigación se realizó mediante una metodología cuantitativa con enfoque correlacional, donde se analizó la relación de las variables dependiente e independiente. Como variable independiente se tomó el nivel cognitivo de los estudiantes determinado por el puntaje promedio del Test de Razonamiento Lógico (TRL) y el Test de Reflexión Cognitiva (TRC). Y como variable independiente se tomó el puntaje obtenido en los dos problemas de sobra y falta.

3.2 Población y Muestra

Los participantes fueron seleccionados de dos instituciones del municipio de San Martín Texmelucan Puebla; una escuela secundaria técnica y un bachillerato tecnológico.

La muestra fueron 127 alumnos de la escuela secundaria y 186 alumnos del bachillerato, fueron tomados de algunos o todos los grupos de tercer grado de ambas escuelas.

Los sujetos tienen edad oscilante entre 13 y 19 años, de localidades urbanas con escolaridad terminada hasta nivel básico (primaria o secundaria), desconociendo el estatus social en el que se encuentra la mayoría. Las solicitudes para hacer el estudio en ambas escuelas fueron emitidas por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; dirección de Posgrado en Educación Matemática.

3.3 Instrumentos

3.3.1 Test de razonamiento Lógico

El Test de Razonamiento Lógico es una prueba internacional de alta fiabilidad (véase en el Anexo 1). El test evalúa cinco esquemas de razonamiento lógico formal: proporcionalidad (PP), control de variables (CV), probabilidad (PB), correlación (CR) y combinatoria (CB). El test consta de 10 cuestiones o problemas matemáticos, en cada uno de los cuales se pide elegir una opción entre cinco que señale por un lado el resultado y por otro la razón de tal elección. Tiene un tiempo de aplicación controlado. Los Análisis Factoriales Exploratorio (AFE) y Factorial Confirmatorio (AFC) sumado a los análisis de fiabilidad permitieron comprobar que el TRL o TOLT tiene un alto

índice de consistencia interna ($\alpha = 0.92$), y respecto de su validez, los análisis entregaron índices adecuados. (Cerdeira *et al.*, 2017, p. 12)

3.3.2 Test de Reflexión Cognitiva

El test de reflexión cognitiva ha sido utilizado en diversas investigaciones lo que indica su viabilidad, entre estos estudios están: “Evolución de la reflexión cognitiva en la universidad” (López 2012), “Soluciones estudiantiles de un problema de movimiento propuesto en un libro de texto de geometría analítica: influencias del razonamiento lógico y de reflexión cognitiva. en el estudio” (Castillo *et al.*, 2018) e “Influencia de la escolaridad en el desarrollo del razonamiento lógico y la reflexión cognitiva en estudiantes de bachillerato” (Etcheverry *et al.*, 2020)

El TRC consiste en 6 ítems que involucran una trampa mental por lo que el alumno podría pensar en respuestas rápidas en vez de las soluciones correctas, incluyendo acertijos que involucran la ilusión de linealidad, entre otros que parecieran resolverse con simples procesos matemáticos, sin embargo, son más complejos (Véase en el Anexo 2).

3.3.3 Problemas de sobra y falta

Los problemas de sobra y falta que se han elegido son dos problemas contextualizados donde el estudiante buscara el número de dulces y de bolsas que hay, a partir de premisas en las cuales si se reparten cierta cantidad de dulces (dada) en las bolsas *sobran* dulces, pero si se reparte una cantidad distinta (dada) en las bolsas ahora *faltan* dulces (Véase en el Anexo 3).

En investigaciones cuantitativas se manifiesta una problemática antes de la recolección de datos, y es que los instrumentos que se utilizan (cuestionarios cerrados, escalas de Likert o pruebas) deben cumplir con dos grandes aspectos, llamados la validez y confiabilidad del instrumento (Corral 2019). La confiabilidad de este último instrumento está dada por la prueba piloto realizada a 23 estudiantes de nivel secundaria y preparatoria en los meses de febrero-abril de 2024 en la localidad de San Martín Texmelucan Puebla.

La validez de la prueba que se pretende usar como uno de los instrumentos en la investigación se evaluará mediante el método de Kuder-Richardson 20, que es un método que evalúa la confiabilidad de pruebas dicotómicas y se evalúa con una sola aplicación del test (Corral 2019).

El cálculo del coeficiente K-R arrojó una confiabilidad de 0.5594 que se interpreta como un nivel bueno de confiabilidad

Cálculo del coeficiente de Kuder – Richardson:

$$kr_{20} = \frac{2}{(2 - 1)} \left[\frac{0.5406 - (0.5652 * 0.4347) + (0.1739 * 0.8260)}{0.5406} \right]$$

$$kr_{20} = 0.5594$$

3.4 Procedimiento de recolección y análisis de datos

Para la recolección de datos se hizo una aplicación presencial de los instrumentos, en tres días distintos para secundaria; una prueba por cada día. Para nivel bachillerato se aplicó en 7 días diferentes (en algunos salones se aplicaron dos o tres pruebas en un solo día). Los salones solicitados para nivel secundaria fueron 5 de 40 personas cada uno aproximadamente, y, para bachillerato fueron 7 salones solicitados de 30 personas cada uno aproximadamente. Sin embargo, no todos los alumnos aplicaron las tres pruebas, dado que faltaron en una o en más.

Las aplicaciones, tanto para secundaria como para preparatoria, fueron supervisadas y aplicadas por la autora de la investigación. Los instrumentos se entregaron en formato físico. El tiempo dado para las pruebas fue de 40 minutos para el Test de Reflexión Cognitiva, 50 minutos para el Test de Razonamiento Lógico y 40 minutos para la prueba de problemas de sobra y falta. Se les pidió a los estudiantes guardar sus útiles y evitar el uso de celulares, calculadoras y otros dispositivos inteligentes, además de resolver los instrumentos individualmente.

Para secundaria la aplicación fue en los meses de octubre y noviembre de 2024 y para bachillerato en los meses de marzo y abril de 2025.

La manera de recopilar los datos para su análisis fue, una vez recaudados los instrumentos en formato físico se capturaron los datos en hojas de cálculo en Excel para después hacer un análisis por prueba y finalmente una correlación.

El software estadístico que se usó para la correlación mediante el coeficiente de Spearman para pruebas no normales fue JASP-. Según Martínez Ortega y colaboradores (2009), el coeficiente de correlación de Spearman resulta adecuado para analizar relaciones monotónicas en variables ordinales o en situaciones donde no se cumple la normalidad.

Además, para tener un segundo acercamiento a la correlación, se hizo un análisis por grupos de acuerdo al desempeño en las pruebas cognitivas, clasificando a los alumnos en: grupo 1, grupo 2 y grupo 3, de manera que en el grupo 1 estuvieron los alumnos con puntajes más bajos y en el grupo 3 de puntajes más altos. Así se analizó cómo respondían a la prueba de problemas de sobra y falta según el grupo en el que estaban.

La manera de determinar la pregunta general de la investigación consistió en observar la significancia estadística en el coeficiente de Spearman y también observar los resultados de la correlación por grupos según el desempeño cognitivo con la prueba de problemas.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Resultados generales por prueba

Se aplicaron los instrumentos a 127 estudiantes de tercer año de secundaria y a 186 estudiantes de tercer año de bachiller, los resultados de estadística descriptiva nos dicen lo siguiente (Tabla 4.1.1):

Tabla 4.1 1

Resultados generales por prueba

Descriptive Statistics ▼

	TRC SEC	TRC BACH	TRL SEC	TRL BACH	SYF SEC	SYF BACH
Valid	127	186	127	186	127	186
Mode	0.000 ^a	1.000 ^a	2.000 ^a	1.000 ^a	0.000 ^a	2.000 ^a
Median	1.000	3.000	2.000	2.000	0.000	2.000
Mean	1.323	2.742	1.984	2.677	0.638	1.398
Std. Deviation	1.441	1.922	1.773	2.248	0.763	0.730
Variance	2.077	3.695	3.143	5.052	0.582	0.533
Shapiro-Wilk	0.825	0.913	0.881	0.913	0.739	0.736
P-value of Shapiro-Wilk	< .001	< .001	< .001	< .001	< .001	< .001
Minimum	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Maximum	6.000	6.000	9.000	10.000	2.000	2.000

Se abrevian los resultados del Test de Reflexión Cognitiva para secundaria y bachillerato como TRC SEC y TRC BACH respectivamente, se abrevian los resultados del Test de Razonamiento Lógico para secundaria y bachillerato como TRL SEC y TRL BACH respectivamente, y los puntajes de la prueba de problemas de sobra y de falta para secundaria y bachillerato como SYF SEC y SYF BACH respectivamente.

Como se puede observar las medidas centrales aumentan en nivel bachiller. Se realizó una prueba *t* de Student para muestras independientes. Los resultados indicaron que los alumnos de bachillerato ($M = 2.74$, $DE = 1.92$) obtuvieron un puntaje significativamente mayor que los alumnos de secundaria ($M = 1.32$, $DE = 1.44$), $t(308) = 7.47$, $p < .001$, IC95% [1.04, 1.80].

También mediante el *p* valor de Shapiro Wilk nos damos cuenta que ninguna de las muestras representa una distribución normal.

Lo cual también es observable en las gráficas de distribución que se muestran a continuación (véase Figuras 4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3):

Figura 4.1 1

Gráficas de los resultados del TRC en ambos niveles

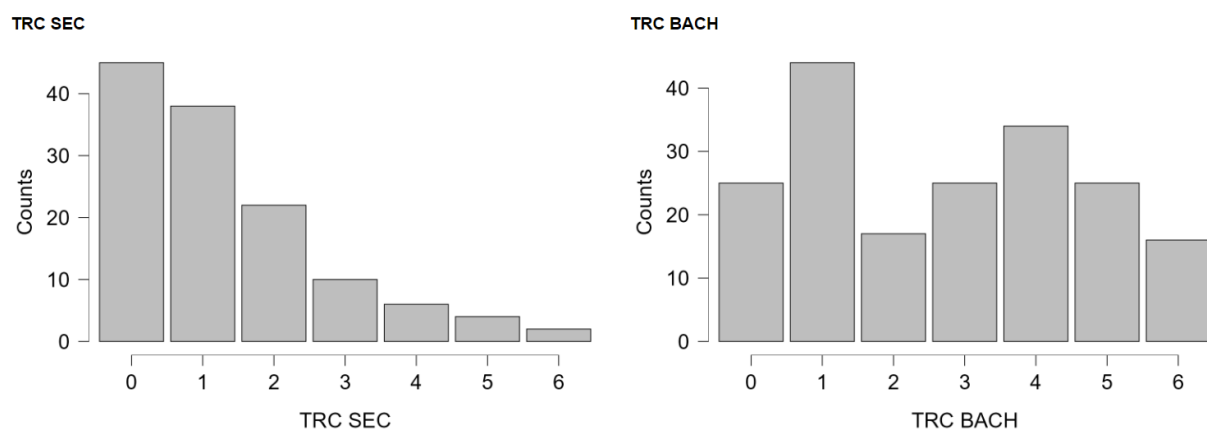


Figura 4.1 2

Gráficas de los resultados del TRL en ambos niveles

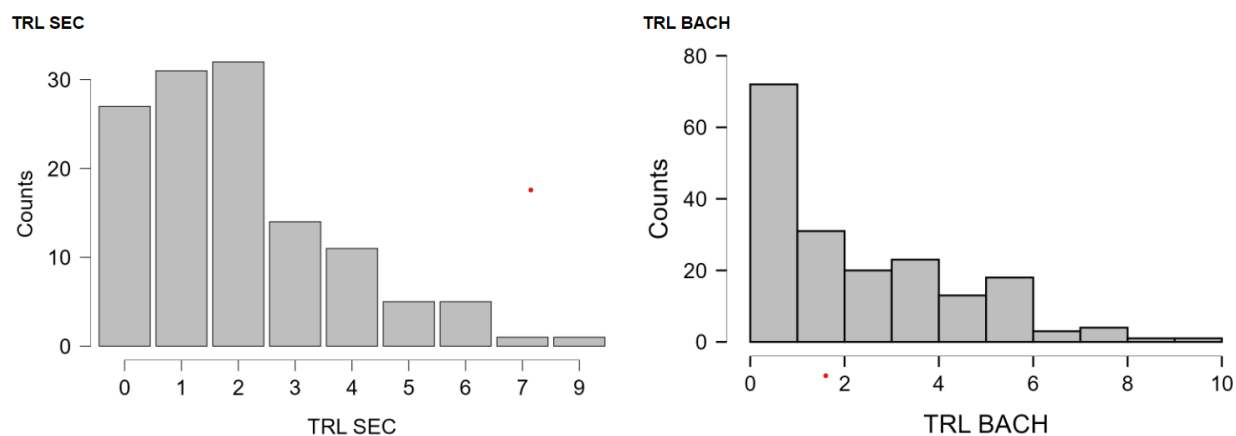
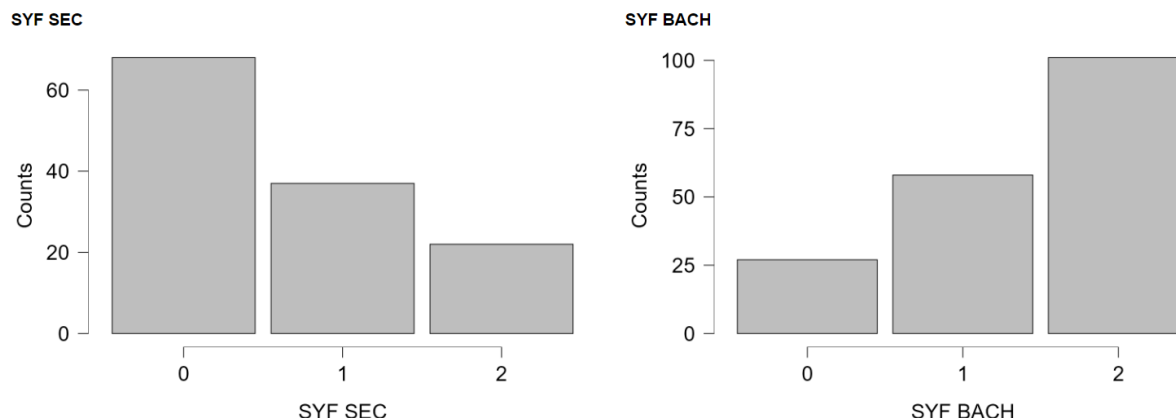


Figura 4.1 3

Gráficas de los resultados de la prueba de PSYF en ambos niveles



4.2 Comparación entre nivel secundaria y bachillerato

4.2.1 Test de Reflexión Cognitiva

A continuación, se exponen los resultados obtenidos en ambos niveles en el Test de Reflexión Cognitiva mostrando el análisis de cada uno de los 6 ítems del test.

4.2.1.1 Pregunta 1

Figura 4.2.1.1

Pregunta 1 del TRC

1. Una raqueta y una pelota cuestan 1.10 euros en total. La raqueta cuesta 1.00 euro más que la pelota. ¿Cuánto cuesta la pelota?

La pelota cuesta _____ euros.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

La pregunta 1 puede resolverse mediante sistema de ecuaciones o mediante un método de tanteo.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1.10 \\ x = y + 1 \end{array} \right.$$

Aunque el pensamiento rápido lleva a pensar a los estudiantes en sólo el cumplimiento de solo una ecuación del sistema de ecuaciones a saber:

$$x + y = 1.10$$

Suponiendo así que la raqueta cuesta 1 euro y la pelota 0.10 euros.

Las respuestas de los alumnos se separan en las siguientes clasificaciones:

Correctas: 0.05 euros

Rápidas: 0.10 euros

Otras: respuestas variadas, pero muchos escriben 0.5 euros

Nulas: no contestadas

Se muestra la frecuencia relativa de los estudiantes de ambos niveles en la Pregunta 1 (Tabla 4.2.1.1.1 y Figura 4.2.1.1.2):

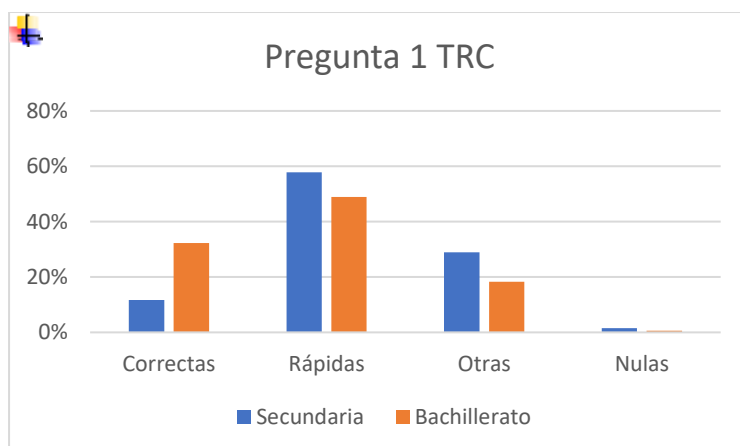
Tabla 4.2.1.1.1

Resultados de pregunta 1 del TRC

Pregunta 1	Secundaria	Bachillerato
Correctas	12%	32%
Rápidas	57%	49%
Otras	29%	18%
Nulas	2%	1%

Figura 4.2.1.1.1

Gráfica de los resultados de la pregunta 1 del TRC



Se realizó una prueba de dos proporciones para comparar las respuestas correctas entre secundaria (12%) y bachillerato (32%). Los resultados mostraron una diferencia significativa, $z = -3.90$, $p < .001$, indicando que los estudiantes de bachillerato respondieron correctamente con mayor frecuencia que los de secundaria.

4.2.1.2 Pregunta 2

Figura 4.2.1.2.1

Pregunta 2 del TRC

2. Si 5 máquinas tardan 5 minutos en fabricar 5 piezas, ¿cuánto tardarán 100 máquinas en fabricar 100 piezas?

La máquinas tardarán _____ minutos.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

La pregunta 2 que consiste en analizar el trabajo de una sola maquina a partir de los datos dados de varias máquinas, es difícil para los alumnos, ya que consideran un pensamiento proporcional directamente aplicado en cada uno de los datos, es decir 5-5-5 y 100-100-100.

Las respuestas de los alumnos se separan en las siguientes clasificaciones:

Correctas: 5 minutos

Rápidas: 100 minutos

Otras: varían, pero muchos escriben 25 minutos

Nulas: no contestadas

Se muestra la frecuencia relativa de los estudiantes de ambos niveles en la Pregunta 2 (Tabla 4.2.1.2 1 y Figura 4.2.1.2 2):

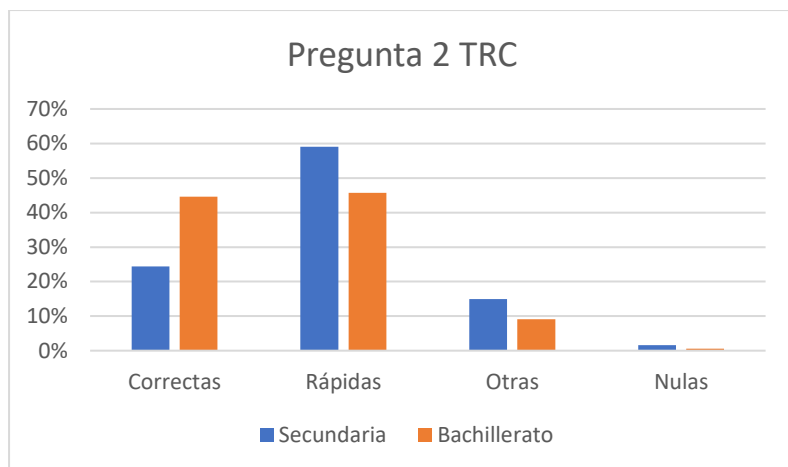
Tabla 4.2.1.2.1

Resultados de pregunta 2 del TRC

Pregunta 2	Secundaria	Bachillerato
Correctas	24%	45%
Rápidas	59%	46%
Otras	15%	9%
Nulas	2%	1%

Figura 4.2.1.2.2

Gráfica de los resultados de la pregunta 2 del TRC



Se realizó una prueba de dos proporciones para comparar las respuestas correctas entre secundaria (24%) y bachillerato (45%). Los resultados mostraron una diferencia significativa, $z = -3.89$, $p < .001$, indicando que los estudiantes de bachillerato respondieron correctamente con mayor frecuencia que los de secundaria.

4.2.1.3 Pregunta 3

Figura 4.2.1.3. 1

Pregunta 3 del TRC

3. En un lago hay una zona cubierta de lirios. El área de lirios se hace el doble de grande cada día. Si el área de lirios tarda 48 días en cubrir el lago entero, ¿cuántos días tardarán los lirios en cubrir la mitad del lago?

Los lirios tardarán _____ días.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

La pregunta 3 representa un crecimiento de área diario que es no proporcional, en este problema la mayoría de los estudiantes caen ante la ilusión de la linealidad afirmando que la mitad de área estará cubierta en la mitad de días.

Las respuestas de los alumnos se separan en las siguientes clasificaciones:

Correctas: 47 días

Rápidas: 24 días

Otras: respuestas varias

Nulas: no contestadas

Se muestra la frecuencia relativa de los estudiantes de ambos niveles en la Pregunta 3 (Tabla 4.2.1.3 1 y Figura 4.2.1.3 2):

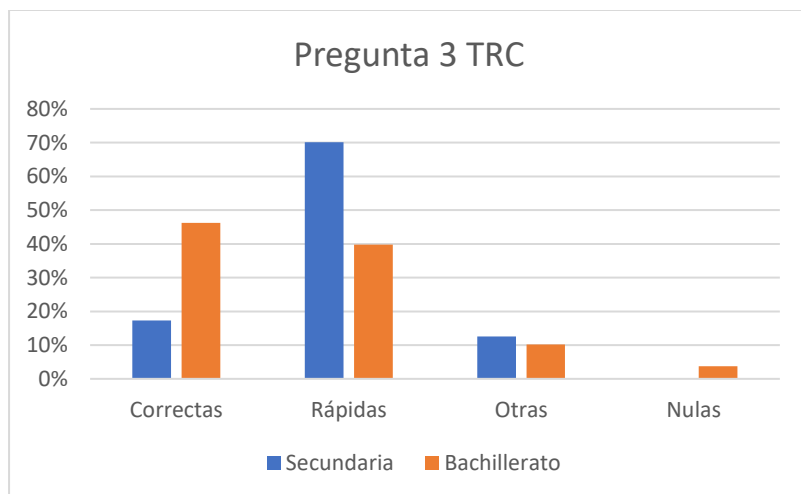
Tabla 4.2.1.3.1

Resultados de pregunta 3 del TRC

Pregunta 3	Secundaria	Bachillerato
Correctas	17%	46%
Rápidas	70%	40%
Otras	13%	10%
Nulas	0%	4%

Figura 4.2.1.3.2

Gráfica de los resultados de la pregunta 3 del TRC



Se realizó una prueba de dos proporciones para comparar las respuestas correctas entre secundaria (17%) y bachillerato (46%). Los resultados mostraron una diferencia significativa, $z = -5.6$, $p < .001$, indicando que los estudiantes de bachillerato respondieron correctamente con mayor frecuencia que los de secundaria.

4.2.1.4 Pregunta 4

Figura 4.2.1.4.1

Pregunta 4 del TRC

4. Iván puede beber un barril de agua en 6 días y María puede beber el mismo barril de agua en 12 días. ¿Cuántos días tardarán en beber tal barril de agua juntos?

Tardarán _____ días.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

La pregunta 4 consiste en razonamiento que incluye proporción indirecta, pues entre más personas sean, menos días tardaran en beber el barril de agua, este razonamiento lo omiten muchos estudiantes pensando que la respuesta se obtiene a partir de sacar el promedio de tiempo en que beben el barril Iván y María.

Las respuestas de los alumnos se separan en las siguientes clasificaciones:

Correctas: 4 días

Rápidas: 9 días

Otras: respuestas varias, muchos escriben “12 días”

Nulas: no contestadas

Se muestra la frecuencia relativa de los estudiantes de ambos niveles en la Pregunta 4 (Tabla 4.2.1.4.1 y Figura 4.2.1.4.2):

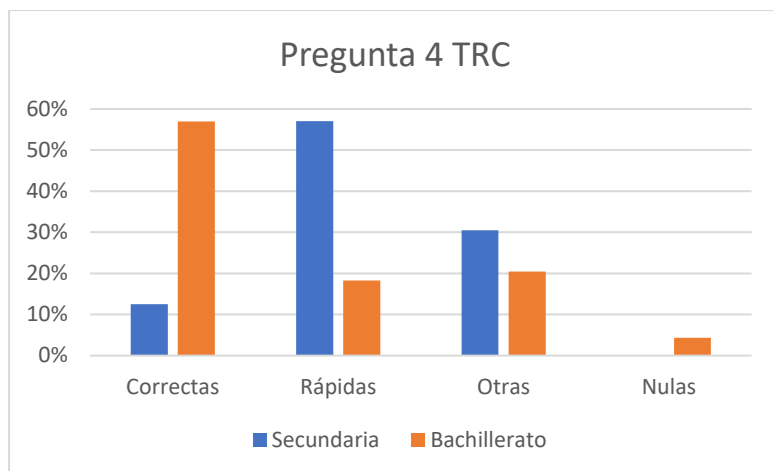
Tabla 4.2.1.4.1

Resultados de pregunta 4 del TRC

Pregunta 4	Secundaria	Bachillerato
Correctas	13%	57%
Rápidas	57%	18%
Otras	30%	20%
Nulas	0%	4%

Figura 4.2.1.4.2

Gráfica de los resultados de la pregunta 4 del TRC



Se realizó una prueba de dos proporciones para comparar las respuestas correctas entre secundaria (13%) y bachillerato (57%). Los resultados mostraron una diferencia significativa, $z = -8.6$, $p < .001$, indicando que los estudiantes de bachillerato respondieron correctamente con mucha mayor frecuencia que los de secundaria.

4.2.1.5 Pregunta 5

Figura 4.2.1.5.1

Pregunta 5 del TRC

5. Julio ha recibido tanto la decimoquinta calificación más alta como la decimoquinta calificación más baja en la clase. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

Hay _____ estudiantes en la clase.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

Para responder correctamente la pregunta 5 se debe analizar el cumplimiento de dos situaciones simultáneas, la clave está en observar que si Julio está en medio del conjunto de su clase hay 14 antes que él, y 14 después que él.

Las respuestas de los alumnos se separan en las siguientes clasificaciones:

Correctas: 29 estudiantes

Rápidas: 30 estudiantes

Otras: respuestas varias, muchos escriben “15 estudiantes”

Nulas: no contestadas

Se muestra la frecuencia relativa de los estudiantes de ambos niveles en la Pregunta 5 (Tabla 4.2.1.5.1 y Figura 4.2.1.5.2) :

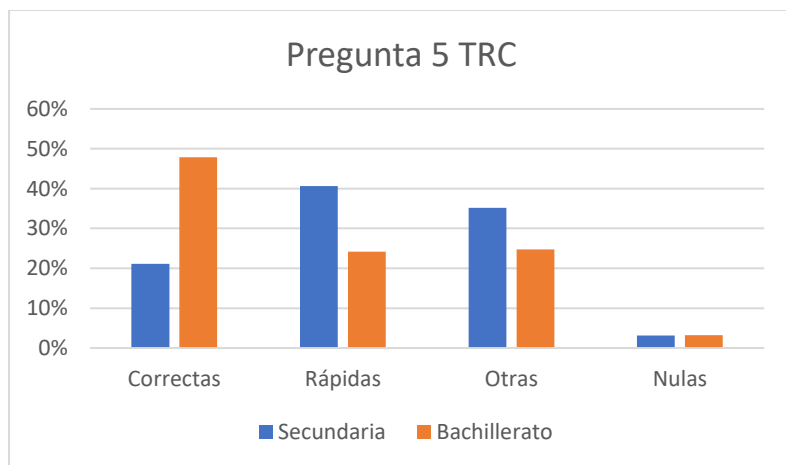
Tabla 4.2.1.5.1

Resultados de pregunta 2 del TRC

Pregunta 5	Secundaria	Bachillerato
Correctas	21%	48%
Rápidas	41%	24%
Otras	35%	25%
Nulas	3%	3%

Figura 4.2.1.5.1

Gráfica de los resultados de la pregunta 1 del TRC



Se realizó una prueba de dos proporciones para comparar las respuestas correctas entre secundaria (21%) y bachillerato (48%). Los resultados mostraron una diferencia significativa, $z = -5.2$, $p < .001$, indicando que los estudiantes de bachillerato respondieron correctamente con mayor frecuencia que los de secundaria.

4.2.1.6 Pregunta 6

Figura 4.2.1.6.1

Pregunta 6 del TRC

6. Un hombre compra una mercancía por 60 pesos, la vende por 70 pesos, la compra de nuevo por 80 pesos y, finalmente, la vende por 90 pesos. ¿Cuánta ganancia logro obtener?

Su ganancia fue de _____ pesos.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

La respuesta a la pregunta 6 puede obtenerse mediante una ecuación o métodos aritméticos, el proceso puede resultar sencillo para algunos. Sin embargo, si no se tiene el suficiente cuidado en los pasos de solución eso los llevara una respuesta incorrecta

Las respuestas de los alumnos se separan en las siguientes clasificaciones:

Correctas: 20 pesos

Rápidas: 10 pesos

Otras: respuestas varias, muchos escriben “0 pesos”

Nulas: no contestadas

Se muestra la frecuencia relativa de los estudiantes de ambos niveles en la Pregunta 5 (Tabla 4.2.1.6.1 y Figura 4.2.1.6.2) :

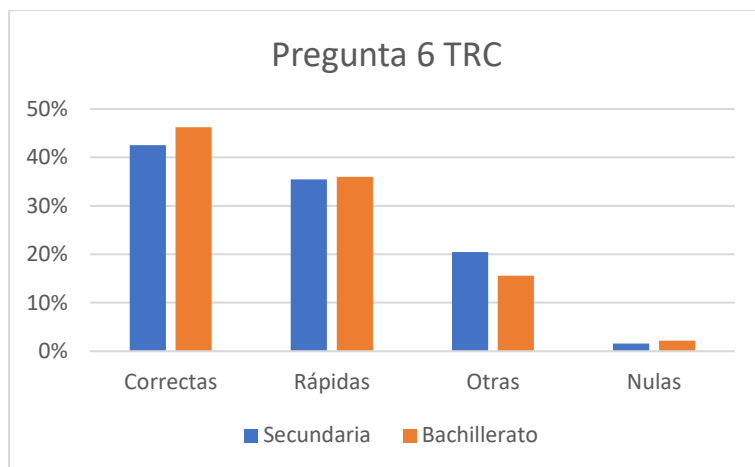
Tabla 4.2.1.6.1

Resultados de pregunta 6 del TRC

Pregunta 6	Secundaria	Bachillerato
Correctas	43%	46%
Rápidas	35%	36%
Otras	20%	16%
Nulas	2%	2%

Figura 4.2.1.6.2

Gráfica de los resultados de la pregunta 6 del TRC

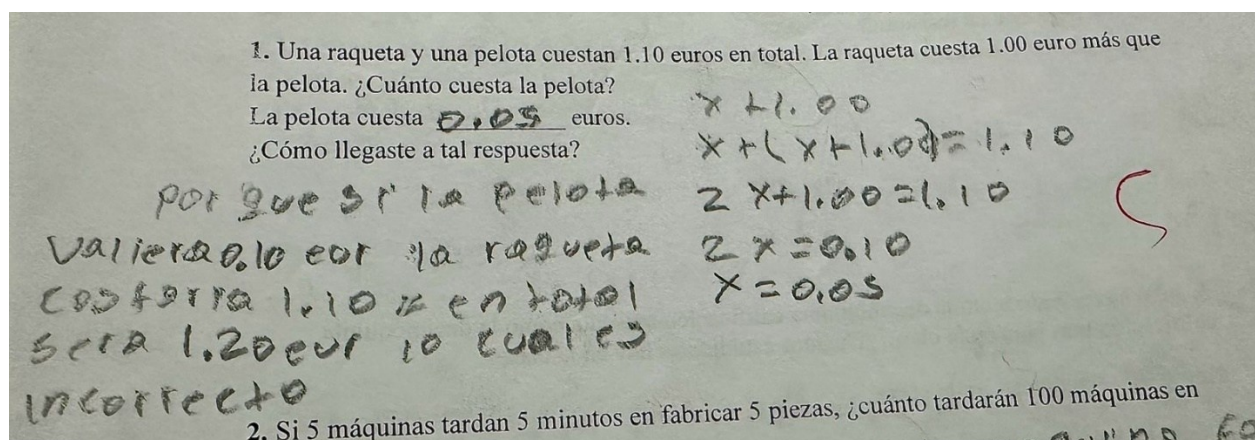


Se realizó una prueba de dos proporciones para comparar las respuestas correctas entre secundaria (43%) y bachillerato (46%). Los resultados no mostraron diferencias significativas, $z = -0.49$, $p = .62$, indicando que ambos grupos respondieron correctamente en proporciones similares.

4.2.1.7 Algunas respuestas del TRC de estudiantes de nivel secundaria y nivel bachillerato

Figura 4.2.1.7.1

Respuesta de pregunta 1 de TRC de un alumno de bachillerato. Categoría: CORRECTA



Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 0.05 euros

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: Porque si la pelota valiera 0.19 euros, la raqueta costaría 1.10 euros, en total sería 1.20 euros, lo cual es incorrecto

Operaciones realizadas:

$$x + 1.00$$

$$x + (x + 1.00) = 1.10$$

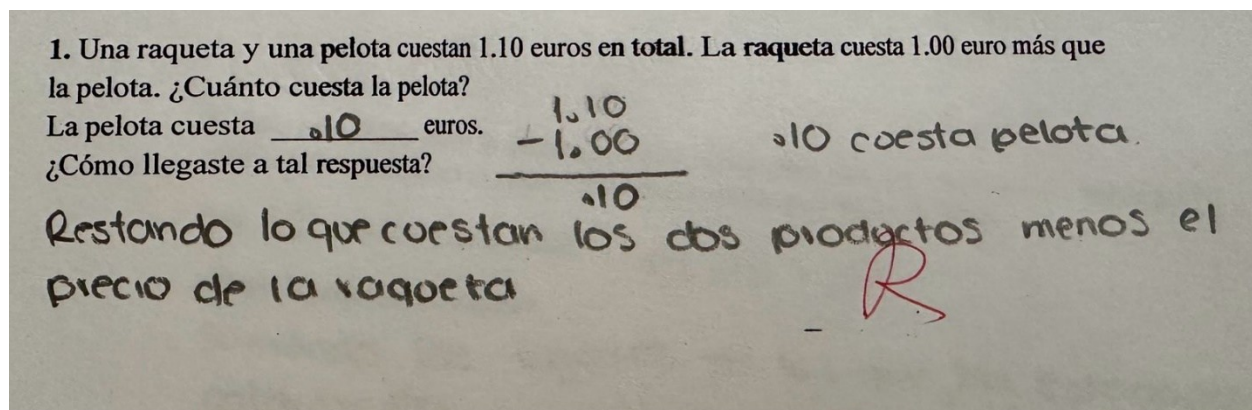
$$2x + 1.00 = 1.10$$

$$2x = 0.10$$

$$x = 0.05$$

Figura 4.2.1.7 2

Respuesta de pregunta 1 de TRC de un alumno de bachillerato. Categoría: RÁPIDA



Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 0.10 euros

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: Restando lo que cuestan los dos productos menos el precio de la raqueta

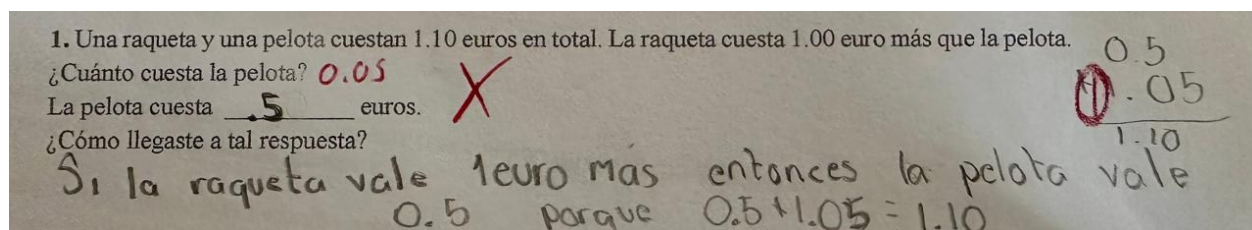
Operaciones realizadas:

$$1.10 - 1.00 = 0.10$$

0.10 cuesta la pelota

Figura 4.2.1.7 3

Respuesta de pregunta 1 de TRC de un alumno de secundaria. Categoría: OTRA



Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 0.5 euros

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: Si la raqueta vale 1 euro más, entonces la pelota vale 0.5 porque

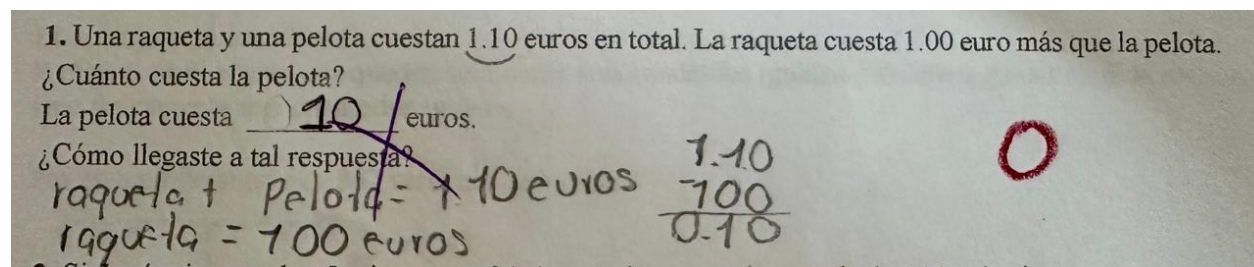
$$0.5 + 1.05 = 1.10$$

Operaciones realizadas:

$$0.5 + 0.05 = 1.10$$

Figura 4.2.1.7 4

Respuesta de pregunta 1 de TRC de un alumno de secundaria. Categoría: OTRA



Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 10 euros

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: raqueta + pelota = 110 euros

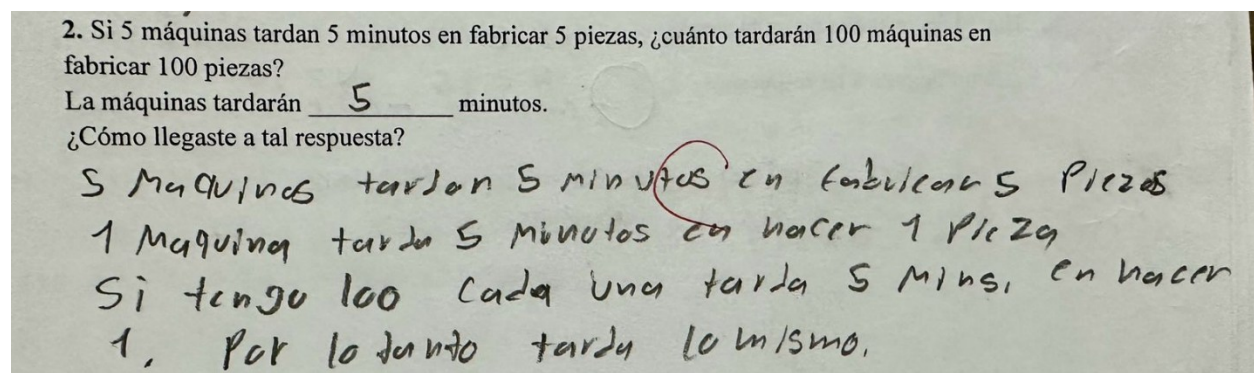
Raqueta = 100 euros

Operaciones realizadas:

$$1.10 - 1.00 = 0.10$$

Figura 4.2.1.7 5

Respuesta de pregunta 2 de TRC de un alumno de bachillerato. Categoría: CORRECTA



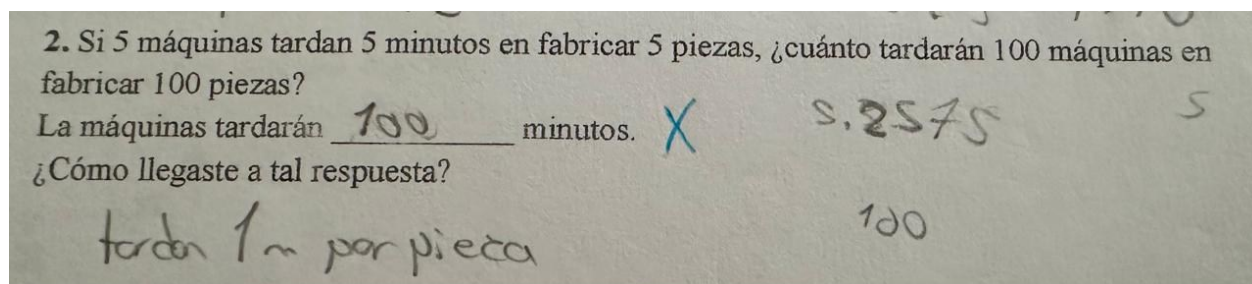
Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 5 minutos

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: 5 máquinas tardan 5 minutos en fabricar 5 piezas, 1 máquina tarda 5 minutos en hacer 1 pieza. Si tengo 100 cada una tarda 5 minutos en hacer 1, por lo tanto, tarda lo mismo.

Figura 4.2.1.7 6

Respuesta de pregunta 2 de TRC de un alumno de secundaria. Categoría: RÁPIDA



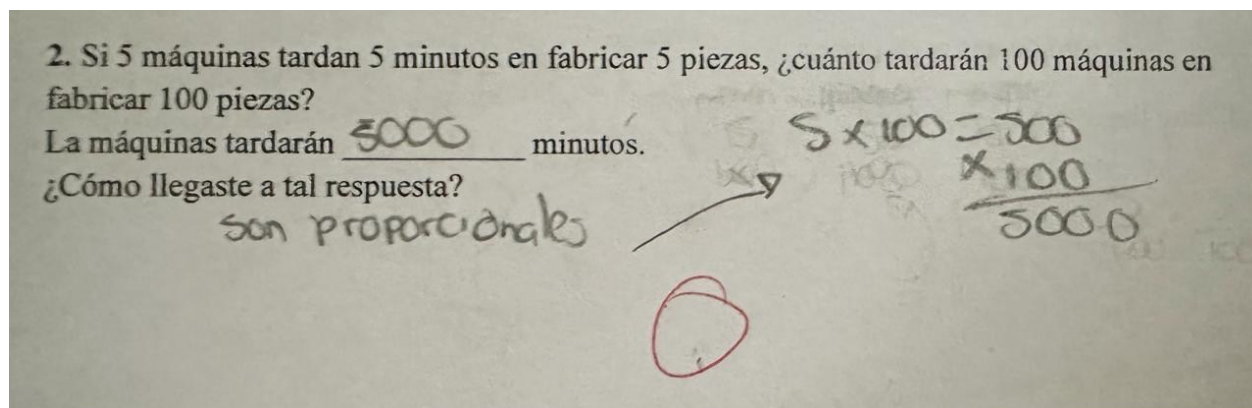
Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 100 minutos

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: tardan un minuto por pieza

Figura 4.2.1.7 7

Respuesta de pregunta 2 de TRC de un alumno de secundaria. Categoría: OTRA



Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 5000 minutos

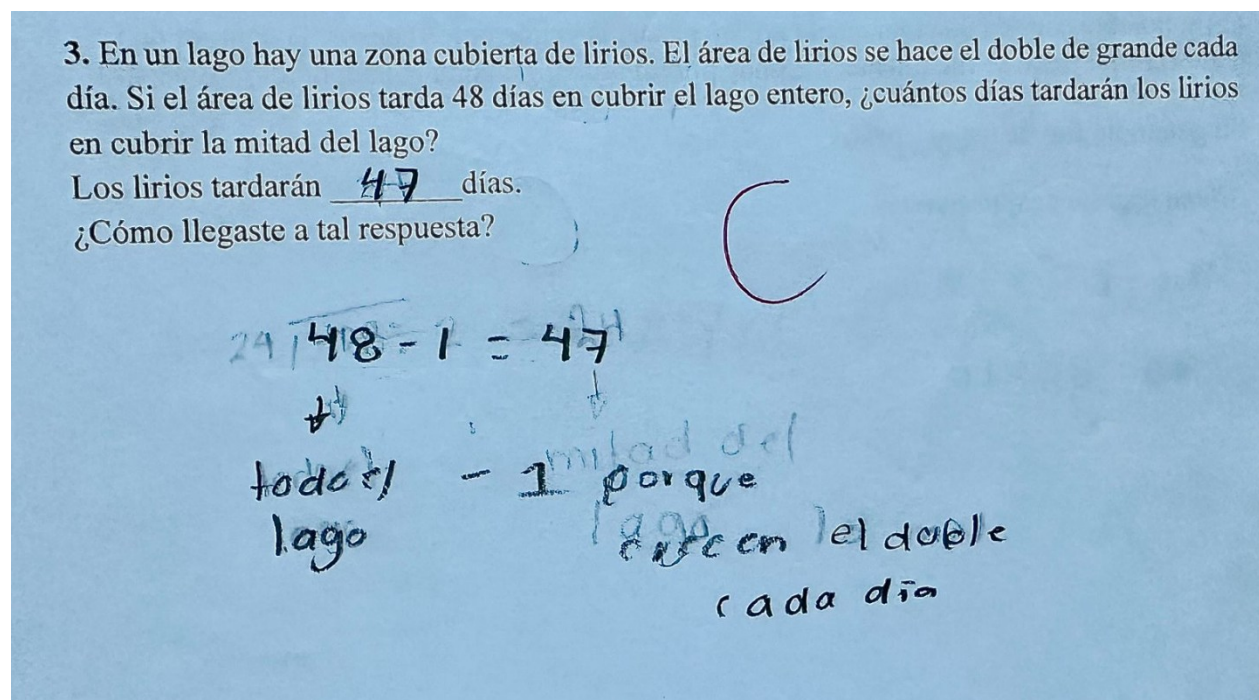
¿Cómo llegaste a tal respuesta?: son proporcionales

Operaciones realizadas:

$$5 \cdot 100 = 500 \cdot 100 = 5000$$

Figura 4.2.1.7 8

Respuesta de pregunta 3 de TRC de un alumno de bachillerato. Categoría: CORRECTA



Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 47 días

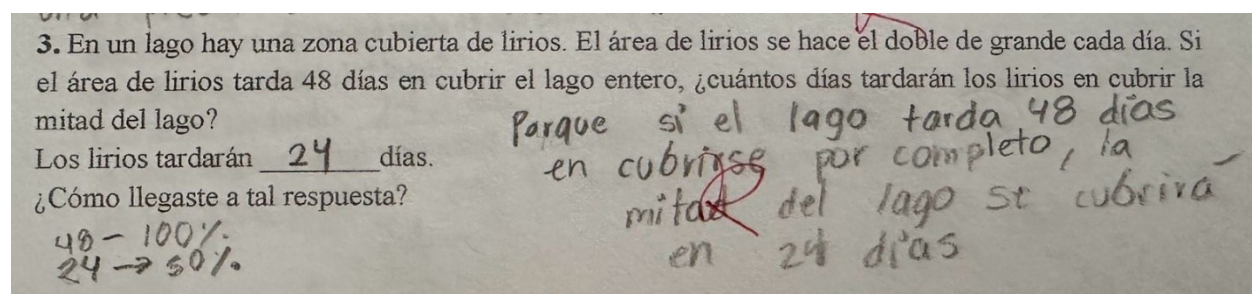
¿Cómo llegaste a tal respuesta?: 48 es todo el lago menos 1 porque crecen el doble cada día

Operaciones realizadas:

$$48 - 1 = 47$$

Figura 4.2.1.7 9

Respuesta de pregunta 3 de TRC de un alumno de bachillerato. Categoría: RÁPIDA



Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 24 días

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: Porque si el lago tarda 48 días en cubrirse por completo, la mitad del lago se cubrirá en 24 días

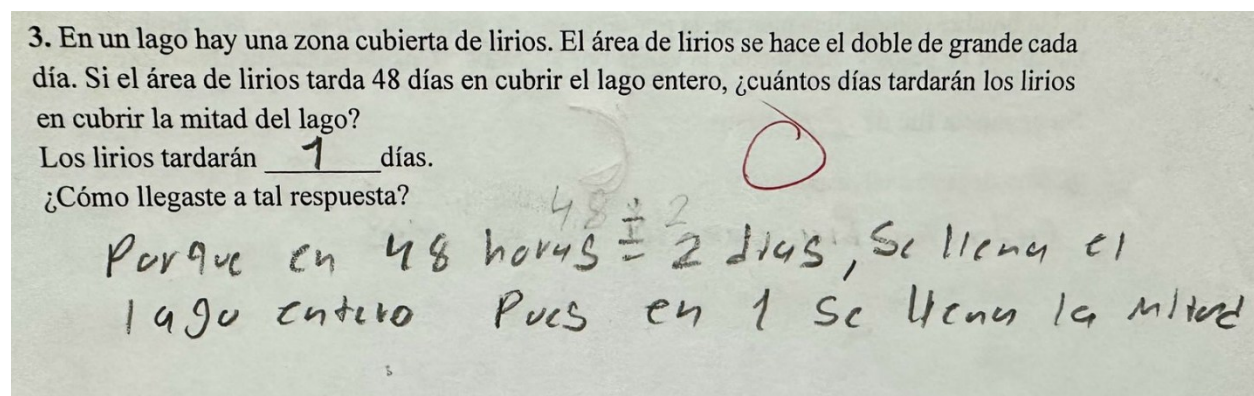
Operaciones realizadas:

$$48 - 100\%$$

$$24 - 50\%$$

Figura 4.2.1.7 10

Respuesta de pregunta 3 de TRC de un alumno de bachillerato. Categoría: OTRA



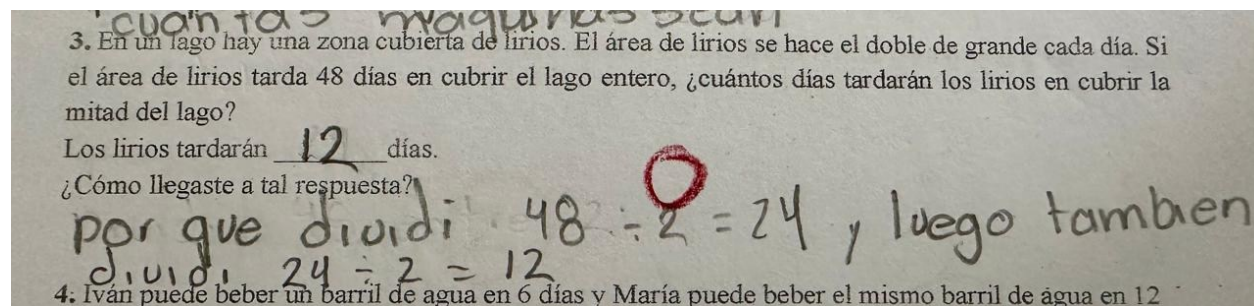
Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 1 días

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: Porque si 48 horas = 2 días, se llena el lago entero, pues en 1 día se llena la mitad

Figura 4.2.1.7 11

Respuesta de pregunta 3 de TRC de un alumno de secundaria. Categoría: OTRA



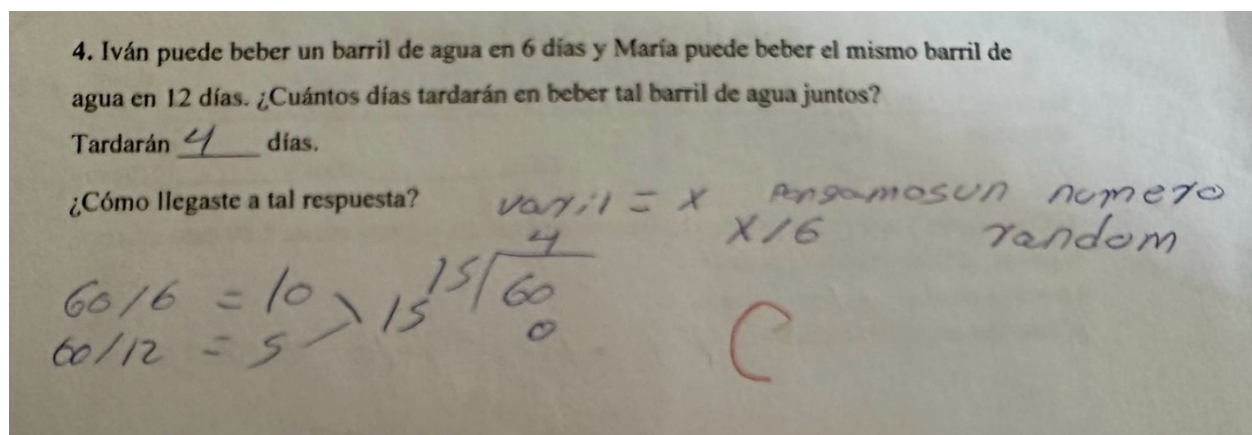
Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 12 días

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: Porque dividí $48 \div 2 = 24$ y luego también dividí $24 \div 2 = 12$

Figura 4.2.1.7 12

Respuesta de pregunta 4 de TRC de un alumno de bachillerato. Categoría: CORRECTA



Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 4 días

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: barril = x “pongamos un número random”

Operaciones realizadas:

$$60 \div 6 = 10$$

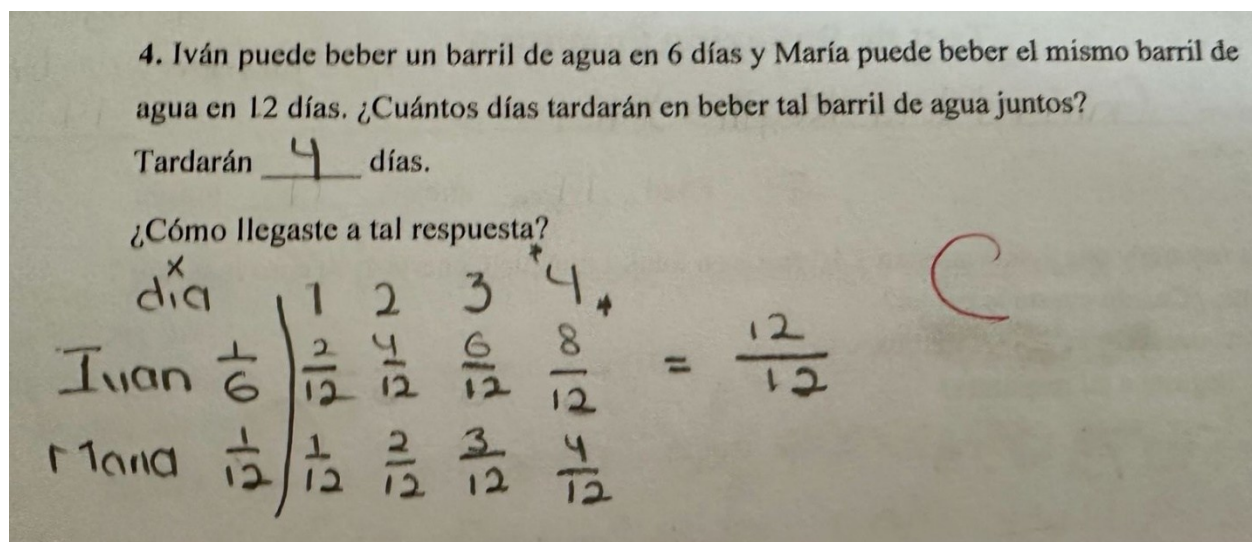
$$60 \div 12 = 5$$

$$10 + 5 = 15$$

$$60 \div 15 = 4$$

Figura 4.2.1.7 13

Respuesta de pregunta 4 de TRC de un alumno de bachillerato. Categoría: CORRECTA



Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 4 días

¿Cómo llegaste a tal respuesta?:

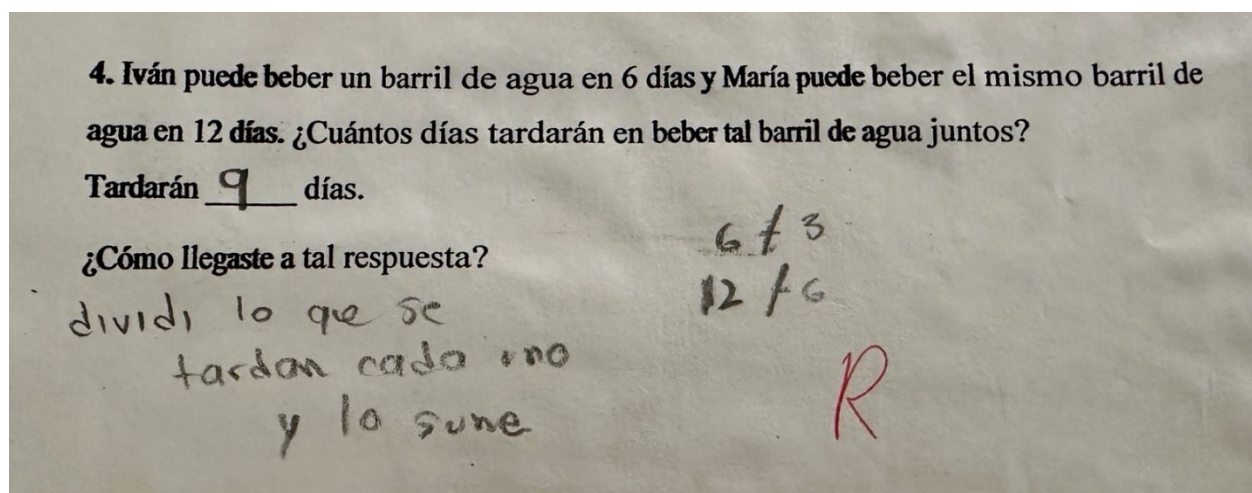
Día	1	2	3	4
Iván $\frac{1}{6}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{8}{12}$
María $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$

Operaciones realizadas:

$$\frac{8}{12} + \frac{4}{12} = \frac{12}{12}$$

Figura 4.2.1.7 14

Respuesta de pregunta 4 de TRC de un alumno de bachillerato. Categoría: RÁPIDA



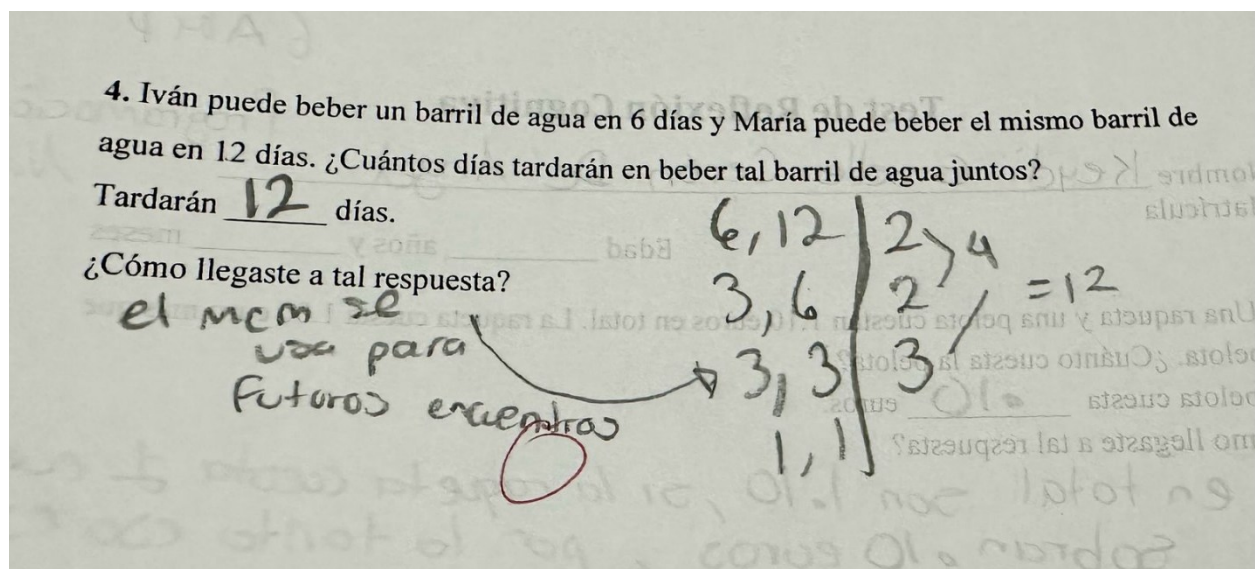
Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 9 días

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: dividí lo que se tardan cada uno y lo sume

Figura 4.2.1.7 15

Respuesta de pregunta 4 de TRC de un alumno de bachillerato. Categoría: OTRA



Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 12 días

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: el mcm se usa para futuros encuentros

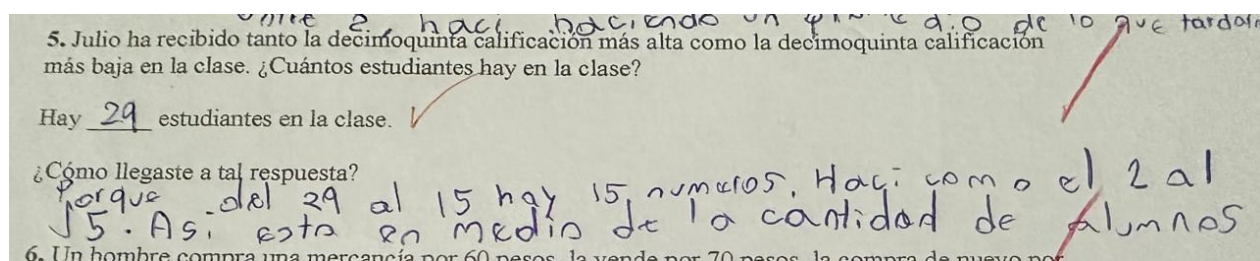
Operaciones realizadas:

$$\begin{array}{r}
 6 \quad 12 \quad 2 \\
 3 \quad 6 \quad 2 \\
 3 \quad 3 \quad 3 \\
 1 \quad 1
 \end{array}$$

$$4 \cdot 3 = 12$$

Figura 4.2.1.7 16

Respuesta de pregunta 5 de TRC de un alumno de secundaria. Categoría: CORRECTA



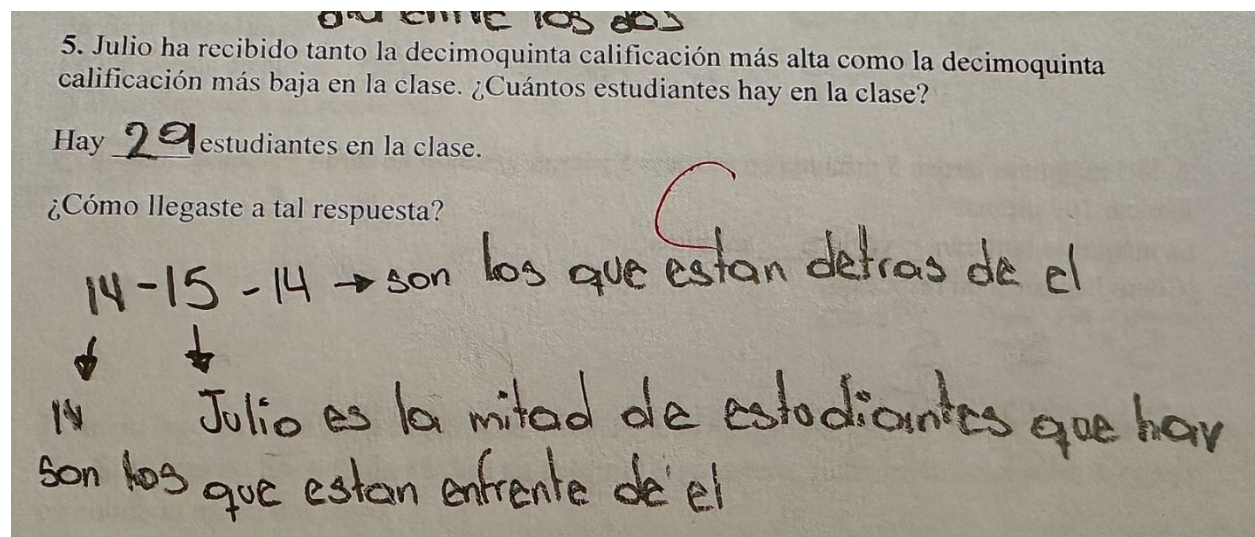
Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 29 estudiantes

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: porque del 29 al 15 hay 15 números. Así como del 1 al 15. Así está en medio de la cantidad de alumnos.

Figura 4.2.1.7 17

Respuesta de pregunta 5 de TRC de un alumno de bachillerato. Categoría: CORRECTA



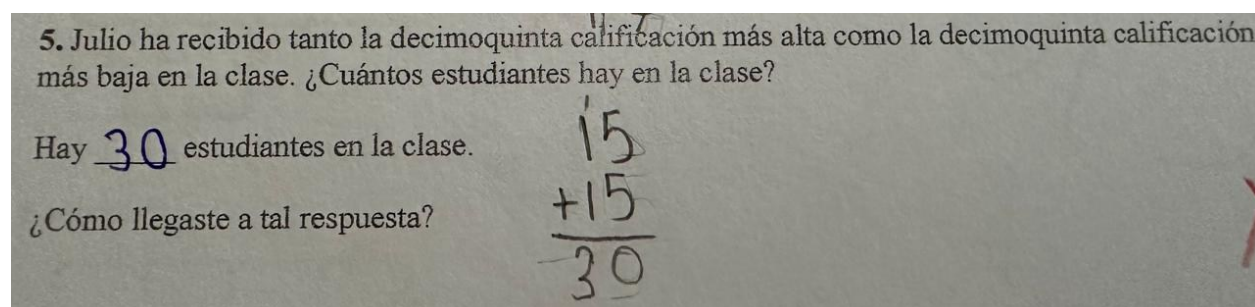
Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 29 estudiantes

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: 14 – 15 – 14. 14 son los que están enfrente de él. Julio es la mitad de estudiantes que hay. 14 son los que están detrás de él

Figura 4.2.1.7 18

Respuesta de pregunta 5 de TRC de un alumno de secundaria. Categoría: RÁPIDA



Transcripción de la respuesta:

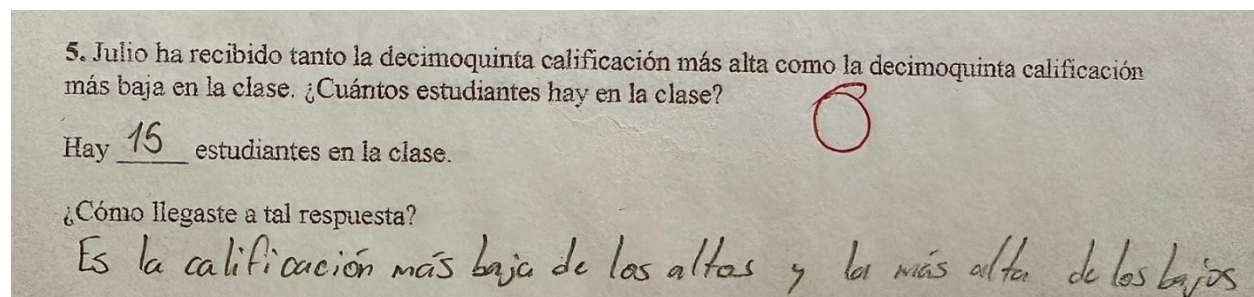
Respuesta: 30 estudiantes

Operaciones realizadas:

$$15 + 15 = 30$$

Figura 4.2.1.7 19

Respuesta de pregunta 5 de TRC de un alumno de bachillerato. Categoría: OTRA

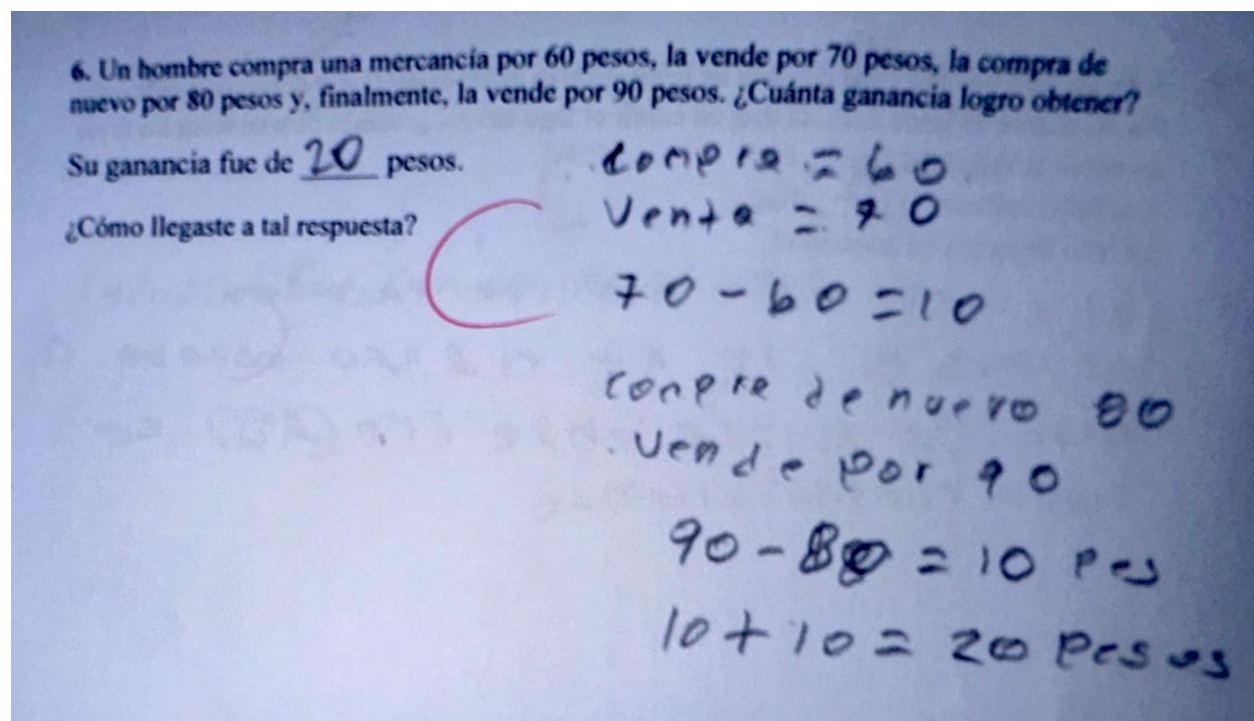
**Transcripción de la respuesta:**

Respuesta: 15 estudiantes

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: Es la calificación más baja de los altos y la más alta de los bajos

Figura 4.2.1.7 20

Respuesta de pregunta 6 de TRC de un alumno de bachillerato. Categoría: CORRECTA

**Transcripción de la respuesta:**

Respuesta: 20 pesos

Operaciones realizadas:

compra = 60

venta = 70

$70 - 60 = 10$

compra de nuevo 80

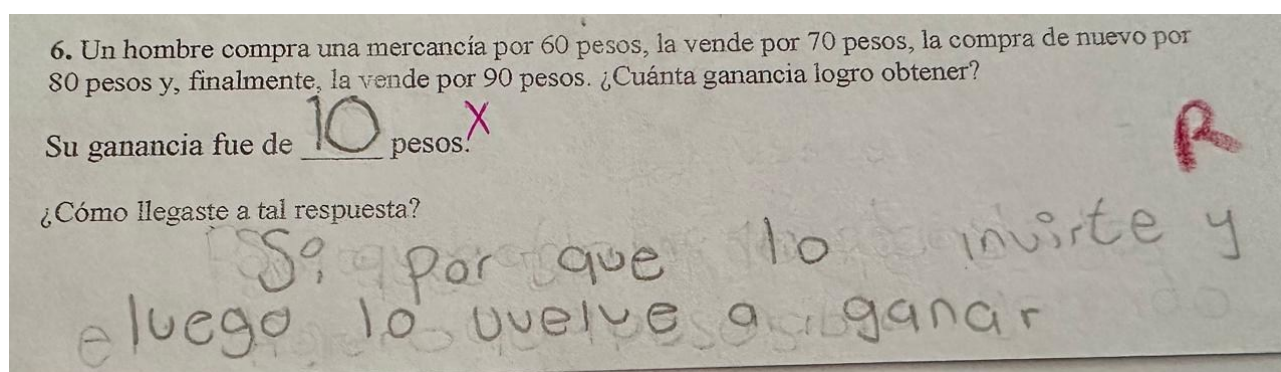
vende por 90

$90 - 80 = 10$ pesos

$10 + 10 = 20$ pesos

Figura 4.2.1.7 21

Respuesta de pregunta 6 de TRC de un alumno de secundaria. Categoría: RÁPIDA



Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 10 pesos

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: Si porque lo invierte y luego lo vuelve a ganar

Figura 4.2.1.7 22

Respuesta de pregunta 6 de TRC de un alumno de bachillerato. Categoría: OTRA

6. Un hombre compra una mercancía por 60 pesos, la vende por 70 pesos, la compra de nuevo por 80 pesos y, finalmente, la vende por 90 pesos. ¿Cuánta ganancia logro obtener?

Su ganancia fue de 0 pesos.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

porque al comprarla por 80 invirtió 10 pesos suyos los cuales recuperó al venderla por 90 entonces no ganó nada aparte.

Transcripción de la respuesta:

Respuesta: 0 pesos

¿Cómo llegaste a tal respuesta?: Porque al comprarla por 80 invirtió 10 pesos suyos, los cuales recuperó al venderla por 90, entonces no ganó nada aparte.

4.2.2 Test de Razonamiento Lógico

El TRL evalúa temas tales como proporcionalidad, control de variables, correlación, probabilidad y operaciones combinatorias en las 10 preguntas que presenta.

Como se mostró anteriormente en la estadística descriptiva, los resultados no fueron favorables para ninguno de los niveles, siendo la media aritmética de secundaria y bachillerato 1.98 y 2.67 respectivamente (en un puntaje de 0-10).

A continuación, se muestran los resultados de la frecuencia relativa de las respuestas correctas en cada una de las preguntas del TRL (Tabla 4.2.2 1 y Figura 4.2.2.1)

Tabla 4.2.2.1

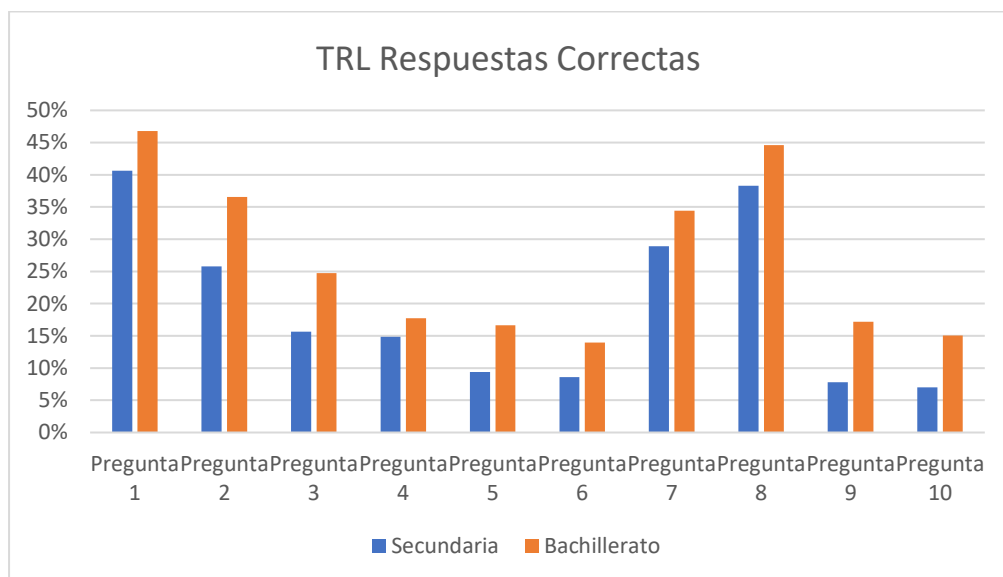
Tabla de los resultados del TRL

PREGUNTA	TEMA A EVALUAR	F. SECUNDARIA	R. F. R. BACHILLERATO	z	p-valor
Pregunta 1	Proporcionalidad	41%	47%	-0.96	0.34
Pregunta 2	Proporcionalidad	26%	37%	-1.87	0.06
Pregunta 3	Control de Variables	16%	25%	-1.64	0.10
Pregunta 4	Control de Variables	15%	18%	-0.64	0.52
Pregunta 5	Probabilidad	9%	17%	-0.28	0.78
Pregunta 6	Probabilidad	9%	14%	-1.35	0.18

Pregunta 7	Probabilidad	29%	34%	-0.93	0.35
Pregunta 8	Probabilidad	39%	45%	-1.05	0.29
Pregunta 9	Combinatoria	8%	17%	-2.31	0.021
Pregunta 10	Combinatoria	7%	15%	-2.16	0.031

Figura 4.2.2.1

Grafica de los resultados del TRL



Mediante la prueba de dos proporciones se ve que los estudiantes de nivel bachiller son mejores que los de secundaria, aunque estadísticamente esto no es significativo. Las preguntas en donde se nota una diferencia estadística significativa son las últimas dos, con $z=-2.31$ y p-valor de 0.021 para la pregunta 9, y con $z=-2.16$ y un p-valor de 0.031 para la pregunta 10.

4.2.2.1 Observaciones importantes en los resultados del TRL

En el análisis de los resultados del TRL mediante la prueba z de proporciones, se observa que únicamente las preguntas 9 y 10, correspondientes al tema de *combinatoria*, presentan diferencias estadísticamente significativas entre los estudiantes de secundaria y bachillerato ($p < 0.05$). Esto indica que en este ámbito específico los alumnos de bachillerato muestran un desempeño superior con una diferencia que no puede atribuirse al azar. En contraste, las demás preguntas, relacionadas con proporcionalidad, control de variables y probabilidad, exhiben diferencias en los porcentajes de aciertos, pero sus valores de p son mayores a 0.05, lo que implica que dichas variaciones no alcanzan significancia estadística. En consecuencia, se concluye que, salvo en el caso de la

combinatoria, el rendimiento entre ambos niveles educativos es comparable y las diferencias observadas podrían deberse a fluctuaciones muestrales más que a una verdadera disparidad en el aprendizaje.

En la comparación de los resultados obtenidos en las preguntas 1 y 2 se observa una diferencia considerable en el número de respuestas correctas, tanto en el nivel secundaria como en bachillerato. Esta disparidad puede atribuirse principalmente al orden y formulación de las preguntas: mientras la primera plantea una situación directa —“¿qué cantidad de jugo se puede obtener con seis naranjas?”—, la segunda exige un razonamiento inverso —“¿cuántas naranjas se necesitan para obtener 15 vasos de jugo?”—. El cambio de dirección en la proporcionalidad genera mayor dificultad cognitiva, lo que explica la caída en el porcentaje de aciertos en ambos niveles educativos.

Diversos estudios han demostrado que la formulación y el orden de las preguntas en matemáticas influyen significativamente en el rendimiento de los estudiantes. Velasco-Barragán (2025) y Camacho y Sarmiento (2025) señalan que el planteamiento de problemas condiciona la calidad de las respuestas, mientras que Cai (2023) enfatiza que la dirección del razonamiento —directo o inverso— modifica la dificultad cognitiva. En línea con estos hallazgos, los resultados de este estudio muestran que la variación en el éxito de las respuestas entre las preguntas 1 y 2 puede atribuirse al orden y formulación de las mismas.

4.2.3 Problemas de sobra y falta

4.2.3.1 Problema 1

El problema 1 del instrumento de problemas de sobra y falta consiste en encontrar la cantidad de dulces y de estudiantes que tiene la maestra. A partir de dos premisas conocidas, como se muestra a continuación: (Figura 4.2.3.1.1)

Figura 4.2.3.1.1

Problema de sobra y falta 1

1. Repartir los dulces a los estudiantes

Una maestra tiene una bolsa con dulces.

Si la maestra daría a cada estudiante 3 dulces, le sobrarían 16 dulces.

Si la maestra quisiera dar a cada estudiante 5 dulces, le faltarían 4 dulces más.

¿Cuántos estudiantes tiene la maestra?

¿Cuántos dulces tiene la maestra?

En este problema los estudiantes de bachillerato contestaron visiblemente mejor que los de secundaria, puesto que la frecuencia relativa de secundaria y de preparatoria que respondieron correctamente el problema fue de 46% y 83% respectivamente.

4.2.3.2 Problema 2

El problema 2 (Figura 4.2.3.2.1) del instrumento tiene el mismo contexto que el primer problema. Sin embargo, en vez de que sean alumnos a los que se reparten, ahora se ponen los dulces en bolsas. La posible complicación de este problema a comparación del primero es que en la segunda premisa no se menciona explícitamente el número de dulces que faltan, sino se menciona que quedan “2 bolsas sin dulces”. Entonces el alumno deberá realizar este paso extra al momento de proponer su solución.

Figura 4.2.3.2.1

Problema de sobra y falta 2

2. Colocar los dulces en las bolsas

Una maestra tiene unos dulces y unas bolsas.

Si la maestra quisiera colocar en cada bolsa 2 dulces, le sobrarían 9 dulces.

Si la maestra coloca en cada bolsa 3 dulces, le quedan 2 bolsas sin dulces.

¿Cuántas bolsas tiene la maestra?

¿Cuántos dulces tiene la maestra?

Análogamente, en este problema los alumnos de bachillerato son visiblemente mejores que los alumnos de secundaria, pues la frecuencia relativa de los que contestan bien esta pregunta es de 18% y 57% para secundaria y preparatoria respectivamente.

Ambas preguntas muestran diferencias estadísticamente significativas según la prueba z para dos proporciones.

4.2.3.3 Algunas respuestas de estudiantes de secundaria y bachillerato en la prueba de problemas de sobra y falta

Figura 4.2.3.3.1

Respuesta del problema 1 de la prueba de problemas de sobra y falta de un alumno (AS1) de secundaria con método alternativo

Nombre completo Santiago Hernández Méndez 3° A N.º 19
 Indica con x en paréntesis tu nivel escolar: (x) secundaria () bachillerato

En esta actividad debes resolver dos "problemas de sobra y falta".

1. Repartir los dulces a los estudiantes
 Una maestra tiene una bolsa con dulces.
 Si la maestra daría a cada estudiante 3 dulces, le sobrarían 16 dulces.
 Si la maestra quisiera dar a cada estudiante 5 dulces, le faltarían 4 dulces más.
 ¿Cuántos estudiantes tiene la maestra?
 ¿Cuántos dulces tiene la maestra?

1.1. Describe con palabras, sin usar ecuación alguna, tu plan de resolver el problema.
Compararía los dos datos, vería su diferencia y esa diferencia la dividiría entre 2.

1.2. Si un recurso visual (dibujo, gráfica o diagrama) haría más claro tu plan, realízalo en el espacio que sigue.

1.3. Realiza detalladamente de plan de resolver el problema. Ahora si puedes usar ecuaciones si son necesarias.

Primero, contar la diferencia para que se puedan repartir 5 por cada alumno, operación, suma, 16 más 4, resultado 20, operación, división, veinte entre dos, resultado: diez, Sumar a diez, tres veces, resultado 30, sumarle dieciséis, resultado 46, dividirlo entre 10, que es el número de alumnos, resultado 4.6, entonces si solo son 3 dulces por alumno, sobran 16 dulces y si son 5 dulces, faltan 4.

1.4. Tus respuestas son:
 La maestra tiene 10 estudiantes. La maestra tiene 46 dulces.

1.5. Demuestra que tus respuestas son correctas.

$$\begin{array}{r} +16 \\ +4 \\ \hline 20 \end{array}$$

↓
Diferencia de dulces.

10 - Alumnos

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 20} \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

↓
Cada alumno recibe 3.

$10 \times 3 = 30$

Y sobran 16

$30 + 16 = 46$

↓
Total de dulces.

Comprobación

↑

$10 \times 5 = 50$

↓
Faltan 4 dulces

Transcripción de la respuesta:

Respuesta 1.1: Compararía los dos datos, vería su diferencia y esa diferencia la dividiría entre 2.

Respuesta 1.3: Primero contar la diferencia para que se puedan repartir 5 por cada alumno, operación, suma 10 más 4, resultado 20, operación, división, veinte entre dos, resultado: diez, sumar a diez tres veces, resultado 30, sumarle dieciséis, resultado 46, dividirlo entre 10, que es el número de alumnos, resultado 4.6, entonces si sólo son 3 dulces por alumno, sobran 16 dulces y si son 5 dulces, faltan 4.

Respuesta 1.4: La maestra tiene 10 estudiantes. La maestra tiene 46 dulces.

Respuesta 1.5:

$$16 + 4 = 20$$

$$20 \div 2 = 10, \quad \text{donde 10 es el número de alumnos y 2 es la diferencia de dulces}$$

Cada alumno recibe 3

$$10 \cdot 3 = 30$$

y, sobran 16

$$30 + 16 = 46 \text{ donde 46 es el total de dulces}$$

$$10 \cdot 5 = 50 \text{ faltan 4 dulces (esta es la comprobación)}$$

Figura 4.2.3.3.2

Respuesta del problema 2 de la prueba de problemas de sobra y falta de un alumno (AS1) de secundaria con método alternativo

2. Colocar los dulces en las bolsas
 Una maestra tiene unos dulces y unas bolsas.
 Si la maestra quisiera colocar en cada bolsa 2 dulces, le sobrarían 9 dulces.
 Si la maestra coloca en cada bolsa 3 dulces, le quedan 2 bolsas sin dulces.
 ¿Cuántas bolsas tiene la maestra?
 ¿Cuántos dulces tiene la maestra?

2.1. Describe con palabras, sin usar ecuación alguna, tu plan de resolver el problema.
 Sumaria diferencia de dulces, las dividiría con la diferencia de bolsas y comprobaría que este correcto.

2.2. Si un recurso visual (dibujo, gráfica o diagrama) haría más claro tu plan, realizalo en el espacio que sigue.

2.3. Realiza detalladamente de plan de resolver el problema. Ahora si puedes usar ecuaciones si son necesarias.

Sumar diferencias, dos más nueve, dividir entre diferencia de dulces, once entre uno, resultado, once, multiplicarlo por dos, resultado 22, comprobar que si se multiplica por tres su diferencia sea de 11, por lo que si se le resta al 33, dos, al 22 le faltan 9.

2.4. Tus respuestas son:
 La maestra tiene 11 bolsas. La maestra tiene 31 dulces.

2.5. Demuestra que tus respuestas son correctas.

$$\begin{array}{r}
 9 \\
 2 \\
 \hline
 11
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 11 \\
 11 \\
 0 \\
 \hline
 11
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 11 \\
 2 \\
 \hline
 22
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 11 \\
 3 \\
 \hline
 33
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 -33 \\
 2 \\
 \hline
 31
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 22 \\
 9 \\
 \hline
 31
 \end{array}$$

Transcripción de la respuesta:

Respuesta 2.1: Sumaría diferencia de dulces, las dividiría con la diferencia de bolsas y comprobaría que esté correcto.

Respuesta 2.3: Sumar diferencias, dos más nueve, dividir entre diferencia de dulces, once entre uno, resultado, once, multiplicado por dos, resultado 22, comprobar que si se multiplica por tres su diferencia sea de 11, por lo que si se le resta al 33, dos, al 22 le faltan 9.

Respuesta 2.4:

La maestra tiene 11 bolsas. La maestra tiene 31 dulces.

Respuesta 2.5:

$$9 + 2 = 11$$

$$11 \div 1 = 11$$

$$11 \cdot 2 = 22$$

$$11 \cdot 3 = 33$$

$$33 - 2 = 31$$

$$22 + 9 = 31$$

Figura 4.2.3.3.3

Respuesta del problema 1 de la prueba de problemas de sobra y falta de un alumno (AB1) de bachillerato con método algebraico

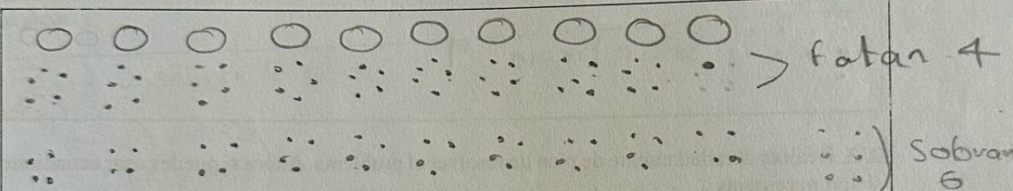
Nombre completo Flores López Joselyn 6 AML # 17
 Indica con x en paréntesis tu nivel escolar: () secundaria () bachillerato

En esta actividad debes resolver dos "problemas de sobra y falta".

1. Repartir los dulces a los estudiantes
 Una maestra tiene una bolsa con dulces.
 Si la maestra daría a cada estudiante 3 dulces, le sobrarían 16 dulces.
 Si la maestra quisiera dar a cada estudiante 5 dulces, le faltarían 4 dulces más.
 ¿Cuántos estudiantes tiene la maestra? 10
 ¿Cuántos dulces tiene la maestra? 46

1.1. Describe con palabras, sin usar ecuación alguna, tu plan de resolver el problema.
En total la maestra tiene 10 alumnos
y 46 dulces y no importa que sobren solo
que de equitativamente

1.2. Si un recurso visual (dibujo, gráfica o diagrama) haría más claro tu plan, realízalo en el espacio que sigue.



1.3. Realiza detalladamente de plan de resolver el problema. Ahora si puedes usar ecuaciones si son necesarias.

$$\begin{aligned}
 3x + 16 &= 5x - 4 & 5x - 6 & & Y &= 3x + 16 \\
 2x &= 20 & & & Y &= 3(10) + 16 \\
 x &= 10 & & & Y &= 30 + 16 \\
 & & & & Y &= 46
 \end{aligned}$$

1.4. Tus respuestas son:
 La maestra tiene 10 estudiantes. La maestra tiene 46 dulces.

1.5. Demuestra que tus respuestas son correctas.

$$\begin{aligned}
 Y &= 3 \times 10 + 16 \\
 Y &= 3(10) + 16 \\
 Y &= 30 + 16 \\
 Y &= 46
 \end{aligned}$$

Transcripción de la respuesta:

Respuesta 1.1: En total la maestra tiene 10 alumnos y 46 dulces y no importa que sobren, sólo que dé equitativamente

Respuesta 1.3:

$$3x + 16 = 5x - 4$$

$$2x = 20$$

$$x = 10$$

$$y = 3x + 16$$

$$y = 3(10) + 16$$

$$y = 30 + 10$$

$$y = 46$$

Respuesta 1.4:

La maestra tiene 10 estudiantes. La maestra tiene 46 dulces.

Respuesta 1.5:

$$y = 3x + 10$$

$$y = 3(10) + 16$$

$$y = 30 + 10$$

$$y = 46$$

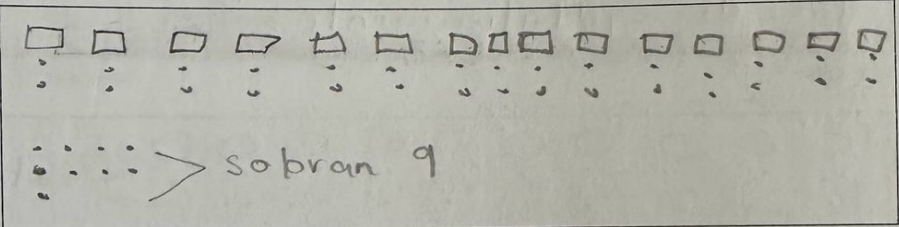
Figura 4.2.3.3.4

Respuesta del problema 2 de la prueba de problemas de sobra y falta de un alumno (AB1) de bachillerato con método algebraico

2. Colocar los dulces en las bolsas
 Una maestra tiene unos dulces y unas bolsas.
 Si la maestra quisiera colocar en cada bolsa 2 dulces, le sobrarían 9 dulces.
 Si la maestra coloca en cada bolsa 3 dulces, le quedan 2 bolsas sin dulces.
 ¿Cuántas bolsas tiene la maestra?
 ¿Cuántos dulces tiene la maestra?

2.1. Describe con palabras, sin usar ecuación alguna, tu plan de resolver el problema.
 Solo que reparta equitativamente
 aun que le sobren

2.2. Si un recurso visual (dibujo, gráfica o diagrama) haría más claro tu plan, realízalo en el espacio que sigue.



2.3. Realiza detalladamente de plan de resolver el problema. Ahora si puedes usar ecuaciones si son necesarias.

$$\begin{aligned}
 Y &= 2x + 9 \\
 Y &= 3(x - 2) \\
 2x + 9 &= 3(x - 2)
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 2x + 9 &= 3x - 6 \\
 Y &= 15 \\
 Y &= 2x + 9 \\
 Y &= 2(15) + 9
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 Y &= 30 + 9 \\
 Y &= 39
 \end{aligned}$$

2.4. Tus respuestas son:
 La maestra tiene 15 bolsas. La maestra tiene 39 dulces.

2.5. Demuestra que tus respuestas son correctas.

$$\begin{aligned}
 Y &= 2x + 9 \\
 Y &= 2(15) + 9 \\
 Y &= 30 + 9 \\
 Y &= 39
 \end{aligned}$$

Transcripción de la respuesta:

Respuesta 2.1: Sólo que reparta equitativamente, aunque le sobren

Respuesta 2.3:

$$y = 2x + 9$$

$$y = 3(x - 2)$$

$$2x + 9 = 3(x + 2)$$

$$2x + 9 = 3x - 6$$

$$x = 15$$

$$y = 2x + 9$$

$$y = 2(15) + 9$$

$$y = 30 + 9$$

$$y = 39$$

Respuesta 2.4:

La maestra tiene 15 bolsas. La maestra tiene 46 dulces.

Respuesta 2.5:

$$y = 2x + 9$$

$$y = 2(15) + 9$$

$$y = 30 + 9$$

$$y = 39$$

4. 2 Correlación entre el nivel cognitivo y problemas de sobra y de falta**4.2.1 Correlación mediante el coeficiente de Spearman**

Como ya hemos visto en la sección 4.1 ninguna de las muestras represento funciones de distribuciones normales, por lo que para relacionarlas mediante JASP se usó el coeficiente de Spearman para distribuciones no normales. La rho de Spearman esta entre 0 y 1, entre más cercano a 1 este el valor indica una correlación positiva fuerte, también se debe tener en cuenta que el p- valor debe ser menor a 0.005 para que sea estadísticamente significativa.

4.2.1.1 Nivel secundaria.

La correlación según el programa estadístico utilizado muestra los siguientes resultados (Tabla 4.2.1.1.1):

Tabla 4.2.1.1.1

Correlación entre las pruebas en nivel secundaria mediante el coeficiente de Spearman

Spearman's Correlations

Variable		TRC SEC	TRL SEC	TRC+TRL/10 SEC	SYF SEC
1. TRC SEC	Spearman's rho	—			
	p-value	—			
2. TRL SEC	Spearman's rho	0.242	—		
	p-value	0.006	—		
3. TRC+TRL/10 SEC	Spearman's rho	0.823	0.708	—	
	p-value	< .001	< .001	—	
4. SYF SEC	Spearman's rho	0.097	0.143	0.123	—
	p-value	0.279	0.110	0.168	—

Se usan las abreviaturas: TRC SEC para el Test de Reflexión Cognitiva, TRL SEC para el Test de Razonamiento Lógico, SYF SEC para la prueba de problemas de sobra y falta y TRC+TRL SEC indica la suma de los puntajes de ambas pruebas que miden el nivel cognitivo.

En el análisis de correlación entre el nivel cognitivo —medido a través del promedio de puntajes del Test de Reflexión Cognitiva (TRC) y el Test de Razonamiento Lógico (TRL)— y el desempeño en la resolución de problemas de sobra y falta, se obtuvo un coeficiente de Spearman rho = 0.123 con un valor p = 0.168.

Este resultado indica que la relación entre ambas variables **es positiva pero muy débil**, y, además, **no estadísticamente significativa** al nivel de confianza del 95%. En términos prácticos, no se encontró evidencia suficiente para afirmar que un mayor nivel cognitivo se asocie de manera consistente con un mejor desempeño en la resolución de problemas de sobra y falta dentro de la muestra analizada.

Aunque la correlación sugiere una ligera tendencia en la dirección esperada, el valor p superior a 0.05 señala que dicha asociación podría deberse al azar. Por lo tanto, se concluye que, en este

caso, el nivel cognitivo no constituye un predictor sólido del rendimiento en los problemas de sobra y falta, lo que abre la posibilidad de que otros factores —como las estrategias de resolución, la comprensión lectora o la experiencia previa— tengan un papel más determinante.

También bajo los resultados del Test de Reflexión Cognitiva y del Test de Razonamiento Lógico como predictores para problemas de sobra y falta por separado, se identifican correlaciones positivas débiles y como los p-valor están por arriba de 0.005 se determina que no son estadísticamente significativas.

4.2.1.2 Nivel Bachillerato.

Tabla 4.2.1.2 .1

Correlación entre las pruebas en nivel bachillerato mediante el coeficiente de Spearman

<i>Spearman's Correlations</i>					
Variable		TRC BACH	TRL BACH	TRC+TRL/10 BACH	SYF BACH
1. TRC BACH	Spearman's rho	—			
	p-value	—			
2. TRL BACH	Spearman's rho	0.082	—		
	p-value	0.266	—		
3. TRC+TRL/10 BACH	Spearman's rho	0.845	0.575	—	
	p-value	< .001	< .001	—	
4. SYF BACH	Spearman's rho	0.383	−0.092	0.245	—
	p-value	< .001	0.212	< .001	—

En la Tabla 4.2.1.2.2 usan las abreviaturas: TRC BACH para el Test de Reflexión Cognitiva, TRL BACH para el Test de Razonamiento Lógico, SYF BACH para la prueba de problemas de sobra y falta y TRC+TRL BACH indica la suma de los puntajes de ambas pruebas que miden el nivel cognitivo.

El análisis de correlación de Spearman entre el nivel cognitivo —medido mediante la suma de los puntajes obtenidos en el Test de Reflexión Cognitiva (CRT) y el Test de Razonamiento Lógico (TOLT)— y el desempeño en la resolución de problemas de sobra y falta arrojó un coeficiente $\rho = 0.245$ con un valor $p < 0.001$.

Este resultado indica una **correlación positiva de baja a moderada**, lo que significa que, en términos generales, los estudiantes que obtienen puntajes más altos en las pruebas cognitivas tienden, también, a desempeñarse mejor en la resolución de problemas de sobra y falta.

Aunque la magnitud de la correlación no es elevada, el hecho de que el valor p sea menor a 0.001 confirma que la relación es **estadísticamente significativa**, es decir, que la probabilidad de que esta asociación se deba al azar es extremadamente baja.

En consecuencia, se puede afirmar con confianza que existe una relación real entre el nivel cognitivo y la capacidad de resolver problemas de sobra y falta en la muestra analizada. Este hallazgo respalda la hipótesis de investigación, ya que muestra que las habilidades cognitivas — particularmente las medidas por el TRC y el TRL— influyen en el rendimiento matemático en este tipo de problemas.

También, bajo los resultados de la tabla, se muestra que la correlación del Test de Reflexión Cognitiva con problemas de sobra y de falta es positiva de magnitud moderada y estadísticamente significativa entre las dos variables. Es decir, cuando una variable aumenta, la otra tiende a aumentar también, y la probabilidad de que esta relación se deba al azar es extremadamente baja. Así existe una asociación positiva real y estadísticamente confiable entre las variables y, aunque la fuerza de la relación no es alta, sí es lo suficientemente clara como para considerarla relevante en nuestro contexto.

4.2.2 Correlación mediante un análisis por grupos

Se llevo a cabo el análisis de la correlación entre el *perfil cognitivo* que fue un puntaje asignado a la suma de la puntuación en el Test de Razonamiento Lógico (TRL) más la puntuación obtenida en el Test de Reflexión Cognitiva (TRC), con la puntuación de la prueba de Problemas de Sobra y Falta (PSF). La muestra fue de 313 estudiantes en total: 127 de nivel secundaria y 186 de nivel bachillerato.

Los puntajes de las dos pruebas del perfil cognitivo fueron tomados con valores de 0 a 10, el Test de Razonamiento Lógico de por sí cuenta con 10 preguntas, y, aunque en el Test de Reflexión Cognitiva hay sólo 6 preguntas, se asignó una calificación de 0 a 10. Siendo así, el puntaje máximo posible por obtener por parte de los alumnos 20 puntos (suma de ambas pruebas).

Después se repartió el total de la muestra en tres grupos lo más equivalentes posibles en número. En el grupo 1 estuvieron los alumnos que obtuvieron los puntajes más bajos. En el grupo 2 estuvieron los alumnos que obtuvieron puntajes regulares. Y el grupo 3 los alumnos con mejores puntajes.

Esta separación en tres grupos se hizo tanto para nivel secundaria como para nivel bachillerato. Se hizo con el fin de analizar cómo los estudiantes responden a los problemas de sobra y falta según en el grupo en el que estén. Los resultados se muestran a continuación.

4.2.2.1 Nivel Secundaria

En el nivel secundaria el menor puntaje en nivel cognitivo fue de 0, es decir alumnos que obtuvieron 0 en ambas pruebas (TRC y TRL), y el puntaje máximo fue de 19 puntos. Con un promedio de 4.19, mediana 3, y moda 1.

La separación en grupos se hizo de la siguiente manera:

Grupo 1: De 0 a 2.5 puntos

Grupo 2: De 2.5 a 5.2 puntos

Grupo 3: De 5.2 a 19 puntos

Los resultados de las puntuaciones de problemas de sobra y falta, según la clasificación descrita anteriormente, se ve en la Tabla 4.2.2.1.1 y en la Figura 4.2.2.1.1:

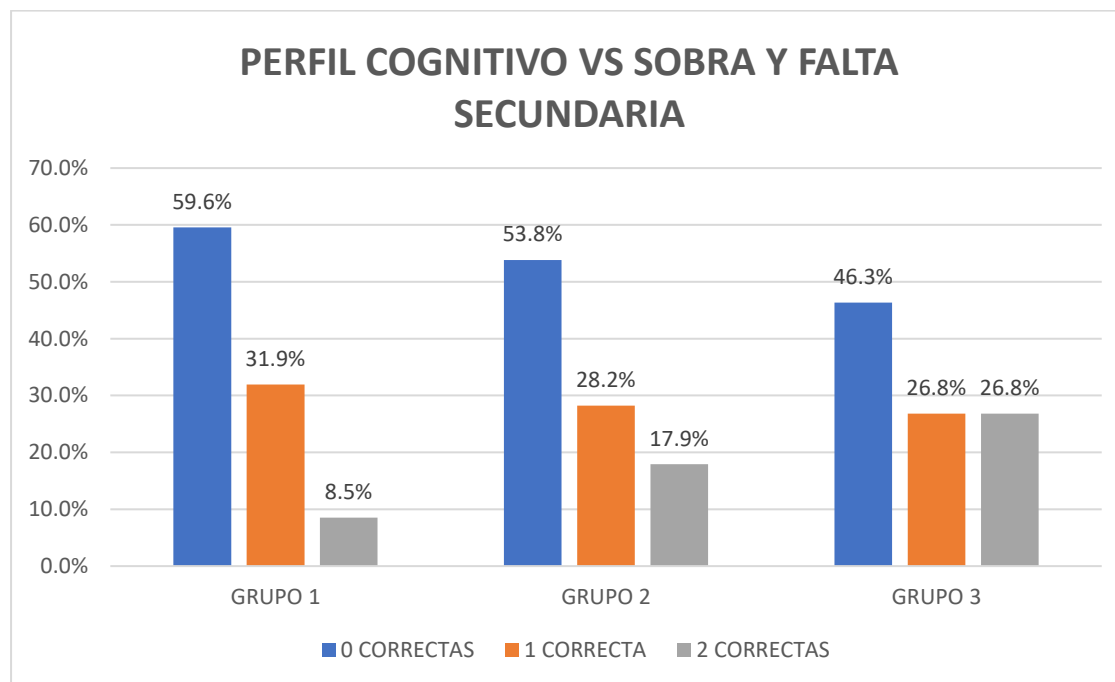
Tabla 4.2.2.1.1

Resultados de prueba de problemas de sobra y falta según el análisis por grupos en nivel secundaria

PRUEBA PROBLEMAS DE SOBRA Y FALTA	GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3
0 CORRECTAS	59.6%	53.8%	46.3%
1 CORRECTA	31.9%	28.2%	26.8%
2 CORRECTAS	8.5%	17.9%	26.8%

Figura 4.2.2.1.1

Resultados de prueba de problemas de sobra y falta según el análisis por grupos en nivel secundaria



4.2.2.2 Nivel bachillerato

En el nivel bachillerato el menor puntaje en nivel cognitivo fue de 0, es decir alumnos que obtuvieron 0 en ambas pruebas (TRC y TRL), y el puntaje máximo fue de 18.33 puntos, es decir, aun cuando son de bachiller, no alcanzaron el puntaje máximo de secundaria. Con un promedio de 7.25, mediana 7, y moda 2.67.

La separación en grupos se hizo de la siguiente manera:

Grupo 1: De 0 a 5.2 puntos

Grupo 2: De 5.2 a 9.2 puntos

Grupo 3: De 9.2 a 18.33 puntos

Los resultados de las puntuaciones de problemas de sobra y falta según la clasificación descrita anteriormente se observan en la Tabla 4.2.2.2 1 y en el Gráfico 4.2.2.2 2:

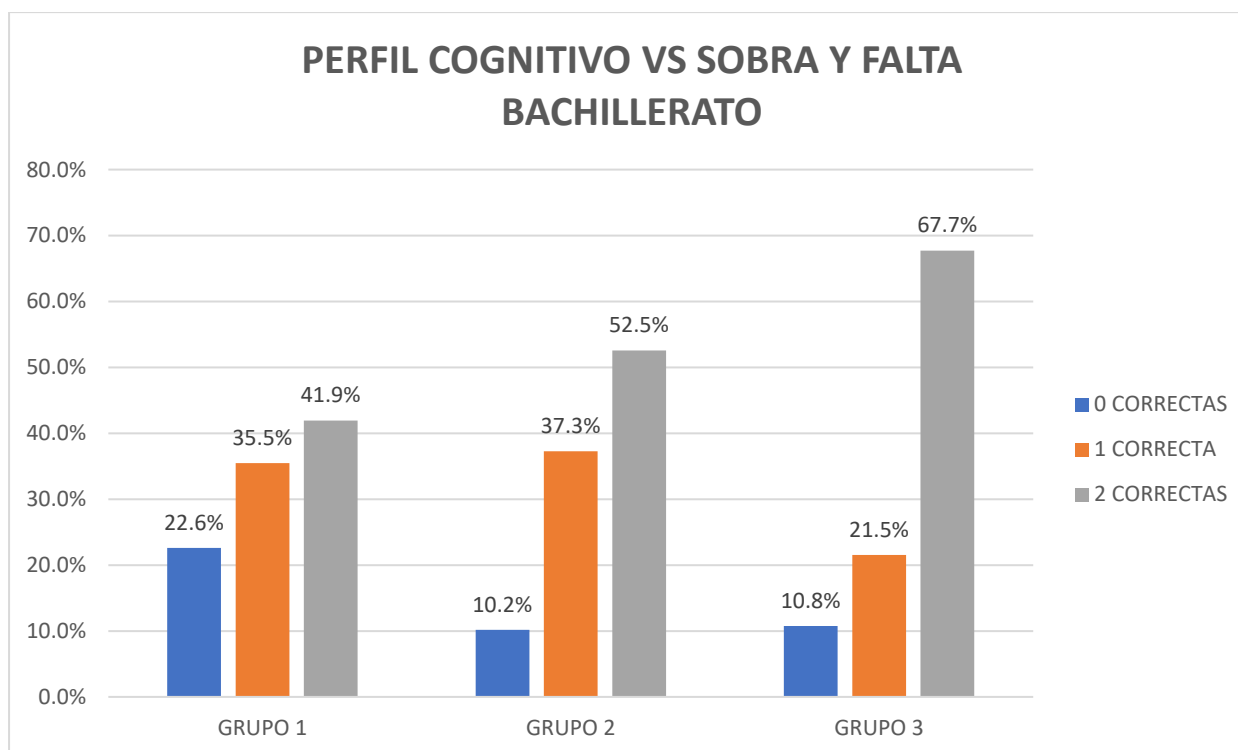
Tabla 4.2.2.2.1

Resultados de prueba de problemas de sobra y falta según el análisis por grupos en nivel bachillerato

PRUEBA PROBLEMAS DE SOBRA Y FALTA	GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3
0 CORRECTAS	22.6%	10.2%	10.8%
1 CORRECTA	35.5%	37.3%	21.5%
2 CORRECTAS	41.9%	52.5%	67.7%

Figura 4.2.2.2.1

Resultados de prueba de problemas de sobra y falta según el análisis por grupos en nivel bachillerato



En conclusión, los alumnos que obtienen mejores puntajes en las pruebas cognitivas suelen contestar bien las 2 preguntas en los problemas de sobra y falta, mientras que los alumnos que están el grupo de los puntajes bajos no contestan bien ambas preguntas, en su mayoría.

4.2.3 Comparación de los resultados con otras investigaciones

En la investigación hecha por Frank y Madden (2014) tampoco encontraron diferencia estadísticamente significativa entre los resultados del Test de Razonamiento Lógico y entre la edad de los participantes. La muestra que usaron era de participantes de 20 a 52 años. A diferencia de esta investigación, en los resultados de estos autores la población muestral mayores tuvo dificultades en razonamiento proporcional y control de variables. En nuestro estudio, los estudiantes de 13 a 19 años se desempeñaron mejor en estas áreas que en otras.

En la investigación realizada por Vázquez y Difabio de Anglat (2009), aplicada a 709 estudiantes de ingeniería, al igual que en nuestra investigación, se mostró que los estudiantes se desempeñan bien en las áreas de razonamiento proporcional y control de variables. A diferencia de nuestra investigación, ellos sí encontraron una significancia estadística entre los resultados del TOLT y entre las calificaciones de exámenes de materias de matemáticas.

En el estudio del Welsh y colaboradores (2013) se notó que los resultados del Test de Reflexión Cognitiva fueron diferentes con respecto al nivel de escolaridad de la muestra, al igual que en nuestra investigación. A diferencia, ellos si encontraron una correlación significativa entre el Test de Reflexión Cognitiva con problemas de habilidad numérica.

Capítulo 5

Conclusiones

Los resultados obtenidos en esta investigación permiten afirmar que el nivel cognitivo, medido mediante la combinación de los puntajes del Test de Reflexión Cognitiva (TRC) y del Test de Razonamiento Lógico (TRL), ejerce cierta influencia en la resolución de problemas de sobra y falta en estudiantes de secundaria y bachillerato. La correlación encontrada fue positiva y estadísticamente significativa, aunque de magnitud baja a moderada, lo que indica que los estudiantes con mayor nivel cognitivo tienden a obtener mejores desempeños en este tipo de problemas, pero no de manera uniforme ni determinante.

Asimismo, se identificó que el nivel de escolaridad sí influye en el desempeño: los estudiantes de bachillerato mostraron mejores resultados tanto en el CRT como en la resolución de problemas de sobra y falta, mientras que en el TOLT no se observaron diferencias significativas entre niveles. Esto sugiere que las habilidades de reflexión cognitiva se desarrollan con mayor fuerza en la educación media superior, mientras que el razonamiento lógico parece mantenerse estable entre ambos grupos.

Un hallazgo relevante es que el mejor predictor del desempeño en problemas de sobra y falta varía según el nivel educativo: en secundaria, el TRL resultó más influyente, mientras que en bachillerato el TRC fue el predictor más sólido. Esta diferencia confirma que las habilidades cognitivas no evolucionan de manera homogénea y que su impacto depende del grado escolar y del tipo de problema enfrentado.

Coincidencias con otras investigaciones

Los resultados coinciden con lo reportado por Melchor (2020), quien encontró que los estudiantes con mayor nivel cognitivo tienden a emplear estrategias algebraicas más sólidas, mientras que los de menor nivel se limitan a procedimientos aritméticos más frágiles. En nuestro estudio, los alumnos con mejores puntajes en TRC y TRL también lograron resolver con mayor éxito los problemas de sobra y falta.

Se confirma lo señalado por Cancimanse Rodríguez (2023) y Patiño y colaboradores (2021) respecto a que las habilidades cognitivas y metacognitivas —como la memoria de trabajo, la planificación y la autorregulación— influyen significativamente en el rendimiento matemático.

En línea con Orihuela De la Cruz (2025), nuestros resultados sugieren que la comprensión lectora y el pensamiento lógico aplicado al contexto son factores clave para interpretar y resolver problemas matemáticos, lo que explica por qué algunos estudiantes con alto nivel cognitivo no obtuvieron necesariamente un desempeño sobresaliente.

Contrastes con otras investigaciones

A diferencia de lo señalado por Vázquez y Difabio de Anglat (2009), quienes encontraron que el TOLT predice de manera consistente el éxito en matemáticas universitarias, en nuestro estudio el TOLT no mostró diferencias significativas entre secundaria y bachillerato, lo que sugiere que su poder predictivo puede variar según el nivel educativo.

Mientras que Gómez-Chacón y colaboradores (2011, 2014) destacaron que las creencias matemáticas y la memoria de trabajo explican más varianza que el TRC, en nuestro caso el TRC sí se mostró como un predictor relevante en bachillerato, lo que indica que su influencia puede ser mayor en contextos específicos.

En contraste con estudios como el de Rubio-Sánchez y colaboradores (2023), que reportaron correlaciones bajas entre TRC y rendimiento matemático, nuestros resultados muestran una correlación significativa, aunque moderada, lo que refuerza la idea de que el impacto del TRC depende del tipo de problema y del nivel escolar.

Conclusión final

En síntesis, esta investigación aporta evidencia de que el nivel cognitivo influye en la resolución de problemas de sobra y falta, aunque no de manera determinante ni uniforme. La relación encontrada es positiva y significativa, pero moderada, lo que sugiere que además de las habilidades cognitivas, intervienen otros factores como la comprensión lectora, las estrategias de resolución y la experiencia previa. Estos hallazgos enriquecen la discusión académica al mostrar coincidencias con estudios previos, pero también contrastes que invitan a seguir explorando cómo interactúan las variables cognitivas y contextuales en el aprendizaje matemático.

Limitaciones de la investigación

Entre las principales limitaciones de este estudio se encuentra el nivel de motivación de algunos participantes. Debido a que la aplicación de las pruebas no tuvo repercusión en sus calificaciones escolares, varios estudiantes mostraron poco interés en resolverlas con seriedad. En consecuencia, algunos no completaron todas las pruebas y otros respondieron sin atender plenamente al propósito del instrumento, lo que pudo afectar la calidad de los datos obtenidos.

Otra limitación importante es que la variable predictora del nivel cognitivo se definió únicamente a partir de dos pruebas estandarizadas: el Test de Reflexión Cognitiva (TRC) y el Test de Razonamiento Lógico (TRL o TOLT). Si bien ambos instrumentos son reconocidos internacionalmente y ofrecen información valiosa, su alcance es limitado. En futuras investigaciones sería recomendable ampliar el número y la diversidad de instrumentos utilizados, incorporando pruebas adicionales que evalúen otras dimensiones del pensamiento cognitivo y metacognitivo. Esto permitiría obtener una medición más integral y precisa del nivel cognitivo, así como fortalecer la validez de las conclusiones.

Bibliografía

- American Psychological Association. (2018). *Cognition*. In *APA dictionary of psychology*. American Psychological Association. <https://dictionary.apa.org/cognition>
- Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (Eds.). (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. Longman.
- Aristóteles. (2004). *Organon* (E. S. Forster, Trad.). Oxford University Press. (Obra original publicada ca. 350 a.C.)
- Autor no especificado. (2025, 5 de junio). *La enseñanza en América Latina: una práctica aún desconectada de la ciencia del aprendizaje*. El País. <https://elpais.com/america/2025-06-05/la-ensenanza-en-america-latina-una-practica-aun-desconectada-de-la-ciencia-del-aprendizaje.html>
- Bayne, T., Brainard, D., Byrne, R. W., Chittka, L., Clayton, N., Heyes, C., ... & Webb, B. (2019). What is cognition? *Current biology*, 29(13), R608-R615.
- Bechtel, W. (1994). Levels of Description and Explanation in Cognitive Science. *Minds and Machines*, 4, 1–25.
- Cai, J. (2023). Lo que dice la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas a través del planteamiento de problemas. *Educación Matemática*, 35(3), 225.
f<https://doi.org/10.24844/em3503.01>
- Camacho, E. P., & Sarmiento, N. M. (2025). Revisión sistemática del Aprendizaje Basado en Problemas en la enseñanza de la matemática: un análisis con la metodología PRISMA. *Revista ASCE Magazine*, 4(2), 401–425. '<https://doi.org/10.70577/ASCE/401.425/2025>' [(doi.org in Bing)](<https://www.bing.com/search?q=https%3A%2F%2Fdoi.org%2F10.70577%2FASCE%2F401.425%2F2025>)
- Cancimanse Rodríguez, O. (2023). Habilidades cognitivas y matemáticas en la resolución de problemas tipo Olimpiadas Matemáticas por estudiantes de grados octavo y noveno [Tesis de licenciatura, Universidad del Cauca].
- Cerda, G.; Romera, E. M; Casas. J. A.; Pérez, C. y Ortega-Ruiz, R. (2017). Influencia de variables cognitivas y motivacionales en el rendimiento académico en matemáticas en estudiantes chilenos. *Educación XXI*, 20(2), 365-385.
- Clavero, F. H. (2001). Habilidades cognitivas. *Notas del departamento de Psicología Evolutiva y de la educación*. (Universidad de Granada. España).

- Dávila Newman, G. (2006). El razonamiento inductivo y deductivo dentro del proceso investigativo en ciencias experimentales y sociales. *Laurus*, 12(Ext), 180–205.
- Desoete, A., & Roeyers, H. (2005). Cognitive skills in mathematical problem solving in Grade 3. *British Journal of Educational Psychology*, 75(1), 119–138. <https://doi.org/10.1348/000709904X22287>
- Díaz, J. A. A., & Oliva Martínez, J. M. (1995). Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico. *Revista de psicología general y aplicada: Revista de la Federación Española de Asociaciones de Psicología*, 48(3), 339-351.
- Doz, D., & Sliško, J. (2024). The cognitive reflection test and students' achievements in mathematics and physics. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 12(1), 85–96. <https://doi.org/10.30935/scimath/13832>
- Etcheverry, PT, Ignjatov, JS, & de Lourdes Juárez, E. (2020). Influencia de la escolaridad en el desarrollo del pensamiento lógico y la reflexión cognitiva en estudiantes de bachillerato. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(60), 212-232.
- Etzler, FM, & Madden, M. (2014). La prueba de pensamiento lógico como predictor del rendimiento de los estudiantes de primer año de farmacia en los cursos obligatorios de primer año. *American journal of pharmaceutical education*, 78(6), 121-122.
- Ferrándiz, C., Bermejo, R., Sainz, M., Ferrando, M., y Prieto, M. D. (2008). Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples. *Anales de Psicología/Annals of Psychology*, 24(2), 213-222.
- FLACSO. (s.f.). *Desarrollo cognitivo y educación: Libro I, Los inicios del conocimiento*. Fondo de Cultura Económica/FLACSO.
- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, 34, 906–911. doi:10.1037/0003-066X.34.10.906
- Frederick, S. (2005). Cognitive reflection and decision making. *Journal of Economic Perspectives*, 19(4), 25 – 42. <https://doi.org/10.1257/089533005775196732>
- Frías Guzmán, M., Haro Águila, Y., & Artiles Olivera, I. (2017). Las habilidades cognitivas en el profesional de la Información desde la perspectiva de proyectos y asociaciones internacionales. *Investigacion Bibliotecologica*, 31(71), 122-136.
- García, M., & Benítez, R. (2019). Niveles cognitivos en la enseñanza universitaria: Un análisis desde la taxonomía de Bloom revisada. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 21(2), 40–55. <https://doi.org/10.24320/redie.2019.21.e02.1883>

- Gómez-Chacón, I. M., García-Madruga, J. A., Rodríguez, R., Vila, J. Ó., & Elosúa, M. R. (2011). Mathematical beliefs and cognitive reflection: Do they predict academic achievement? In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the MAVI-17 Conference* (pp. 1–9). University of Bochum.
- Gómez-Chacón, I. M., García-Madruga, J. A., Vila, J. Ó., Elosúa, M. R., & Rodríguez, R. (2014). The dual processes hypothesis in mathematics performance: Beliefs, cognitive reflection, working memory and reasoning. *Learning and Individual Differences*, 29, 67–73.
<https://doi.org/10.1016/j.lindif.2013.10.001>
- Gómez-Veiga, I., Vila, J. Ó., Duque, G., & García-Madruga, J. A. (2018). A new look to a classic issue: Reasoning and academic achievement at secondary school. *Frontiers in Psychology*, 9, 400.
<https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.00400>
- González, F. E. (s.f.). *Acerca de la metacognición*. Universidad Pedagógica Experimental Libertador.
- Inca, I. (2018). Las habilidades cognitivas en la resolución de problemas matemáticos. En M. Parra & M. Parra (Eds.), *Actas del 4.º Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática (CIEM)* (pp. 1–6). Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa. Recuperado de
<https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/las-habilidades-cognitivas-en-la-resolucion-de-problemas-matematicos/>
- Irwin, L. (2017). Metacognition: A concept analysis. *Archives of Psychiatric Nursing*, 31(4), 454–456.
- Jáuregui Hernández, K. L., & Rodríguez Macías, J. C. (2025). Causas del desempeño académico en matemáticas desde la perspectiva de estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 37(3), 400-401. <https://doi.org/10.24844/em3703.05>
- Jiang, R., Liu, R. D., Star, J., Zhen, R., Wang, J., Hong, W., ... y Fu, X. (2021). Cómo la ansiedad matemática afecta la perseverancia inflexible de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos: Examinando el papel mediador de la reflexión cognitiva. *Revista Británica de Psicología Educativa*, 91(1), 237-260.
- Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. Farrar, Straus and Giroux.
- Kryjevskaja, M., Stetzer, M. R., & Heron, P. R. L. (2020). Answer first: Applying the cognitive reflection test principle to examine student intuitive thinking in physics. *Physical Review Physics Education Research*, 16(1), 010118. <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.010118>
- Lai, E. R. (2011). *Metacognition: A literature review* (Research Report). Pearson.

- Lawson (1985) A review of research on formal reasoning and science teaching. *Journal of Research in Science Teaching* 22(7) 569-617.
- Leibniz, G. W. (1989). *The Leibniz–Clarke Correspondence* (H. G. Alexander, Trad.). Manchester University Press. (Obra original publicada ca. 1704)
- Lovianova, I. V., Kaluhin, R. Y., Kovalenko, D. A., Rovenska, O. G., & Krasnoshchok, A. V. (2022). *Development of logical thinking of high school students through a problem-based approach to teaching mathematics. Journal of Physics: Conference Series*, 2288(1), 012021.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012021>
- Martinez, M. E. (2006). What is metacognition? *Phi Delta Kappan*, 87(9), 696–699.
- Martínez Ortega, R. M., Tuya Pendás, L. C., Martínez Ortega, M., Pérez Abreu, A., & Cánovas, A. M. (2009). El coeficiente de correlación de los rangos de Spearman: caracterización. *Revista Habanera de Ciencias Médicas*, 8(2), 1–12.
- Marzano, R. J., & Kendall, J. S. (2007). *The new taxonomy of educational objectives* (2nd ed.).
- Millrood, R., & Maksimova, I. (2018). Cognitive skills in education: Typology and development. *[La fuente no proporciona el nombre completo de la revista, pero sí los datos de paginación y el DOI]*, 137–149. (DOI: 10.17223/19996195/42/8)
- Mumford, M. D., Todd, E. M., Higgs, C., & McIntosh, T. (2017). Cognitive skills and leadership performance: The nine critical skills. *The Leadership Quarterly*, 28, 24–39.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. NCTM.
- Neisser, U. (1967). *Cognitive psychology*. Prentice-Hall.
- Norman, E., Pfuhl, G., Sæle, RG, Svartdal, F., Låg, T. y Dahl, TI (2019). Metacognición en psicología. *Revista de Psicología General*, 23 (4), 403-424.
- OCDE & Academia Nacional de Educación de EE.UU. (2025). *La ciencia cognitiva y su integración urgente en la formación docente y las prácticas educativas en América Latina*. Artículo en *El País* (5 de junio de 2025).
- Ockham, G. de. (1990). *Summa Logicae* (P. Boehner, Trad.). St. Bonaventure: Franciscan Institute. (Obra original publicada ca. 1323)
- Ossa-Cornejo, C. J., Palma-Luengo, M. R., Lagos-San Martín, N. G., Quintana-Abello, I. M., & Díaz-Larenas, C. H. (2017). Análisis de instrumentos de medición del pensamiento crítico. *Ciencias Psicológicas*, 11(1), 19–30. <https://doi.org/10.22235/cp.v11i2.1343>

- Patel, N. (2017). *The Cognitive Reflection Test: A measure of intuition/reflection, numeracy, and insight problem solving*. [Doctoral dissertation, University of Missouri].
- Patel, N., Baker, S. G., & Scherer, L. D. (2019). Evaluating the Cognitive Reflection Test as a measure of intuition/reflection, numeracy, and insight problem solving, and the implications for understanding real-world judgments and beliefs. *Journal of Experimental Psychology: General*, 148(12), 2129–2153. <https://doi.org/10.1037/xge0000592>
- Patiño Contreras, K. N., Prada Núñez, R., & Hernández Suárez, C. A. (2021). La resolución de problemas matemáticos y los factores que intervienen en su enseñanza y aprendizaje. *Revista Perspectivas*, 6(1), 1–15.
- Patiño Contreras, K. N., Prada Núñez, R., & Hernández Suárez, C. A. (2021). La resolución de problemas matemáticos y los factores que intervienen en su enseñanza y aprendizaje. *Revista Educación y Humanismo*, 23(41), 1–20.
- Pennycook, G., Cheyne, J. A., Seli, P., Koehler, D. J., & Fugelsang, J. A. (2012). Analytic cognitive style predicts religious and paranormal belief. *Cognition*, 123(3), 335–346. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2012.03.003>
- Pérez Gómez, Y., & Beltrán Pozo, C. (2011). ¿Qué es un problema en Matemática y cómo resolverlo? *EduSol*, 11(34), 74–89.
- Petty, R. E., & Cacioppo, J. T. (1986). *Communication and persuasion: Central and peripheral routes to attitude change*. Springer-Verlag.
- Pólya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton University Press. (Trabajo original publicado en 1945).
- Reed, S.K. (2007). *Cognition. Theory and Applications*. Wadsworth Publishing Company.
- Resnik L. B. (1983): Mathematis and Science Learning: Anew conception. *Science*, 120, 477-488.
- Rodríguez, J. A. (2007). Cognición y ciencia cognitiva. *Universidad de Gotemburgo*
- Rohaeti, E. E., Budiyanto, A. M., & Sumarmo, U. (2014). Enhancing students' mathematical logical thinking ability and self-regulated learning through problem-based learning. *International Journal of Education*, 8(1), 54–60.
- Rohaeti, E. E., Hindun, S., & Fitriani, N. (2019). *Correlation of self-efficacy and mathematical critical thinking skills based on student's cognitive stage*. *Journal of Physics: Conference Series*, 1315(1), 012034. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1315/1/012034>

- Rubio-Sánchez, A., Gómez-Chacón, I. M., & Gómez-Veiga, I. (2023). Relationships among mathematics beliefs, fluid intelligence, cognitive reflection and mathematics achievement in secondary school students. *Frontiers in Psychology, 14*, 1–12.
<https://doi.org/10.3389/fpsyg.2023.110476>
- Russell, B., & Whitehead, A. N. (1970). *Principia Mathematica* (2^a ed.). Cambridge University Press. (Obra original publicada 1910-1913)
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). Macmillan.
- Shtulman, A. y Young, A. G. (2023). El desarrollo de la reflexión cognitiva. *Perspectivas de desarrollo infantil, 17*(1), 59-66.
- Sirota, M., Dewberry, C., Juanchich, M., Valuš, L. y Marshall, A. C. (2021). Medición de la reflexión cognitiva sin matemáticas: Desarrollo y validación de la prueba de reflexión cognitiva verbal. *Revista de toma de decisiones conductuales, 34*(3), 322-343.
- Sloman, S. A. (1996). The empirical case for two systems of reasoning. *Psychological Bulletin, 119*(1), 3–22.
- Stanovich, K. E., & West, R. F. (2000). Individual differences in reasoning: Implications for the rationality debate? *Behavioral and Brain Sciences, 23*(5), 645–665.
- Tobin, K. G. (1988): Applications of the test of logical thinking. Unpublished paper. Florida State University.
- Tobin, K. G., & Capie, W. (1981). The development and validation of a group test of logical thinking. *Educational and Psychological Measurement, 41*(2), 413–423.
<https://doi.org/10.1177/001316448104100220>
- Tomás de Aquino. (2006). *Suma de teología* (V. García, Trad.). Editorial Porrúa. (Obra original publicada ca. 1274)
- Toplak, M. E., West, R. F., & Stanovich, K. E. (2014). Assessing miserly information processing: An expansion of the Cognitive Reflection Test. *Thinking & Reasoning, 20*(2), 147–168.
<https://doi.org/10.1080/13546783.2013.844729> University, U.S.A
- Toraman, Ç., Orakcı, Ş., & Aktan, O. (2020). Analysis of the relationships between mathematics achievement, reflective thinking of problem solving and metacognitive awareness. *International Journal of Progressive Education, 16*(2), 72–90. <https://doi.org/10.29329/ijpe.2020.241.6>

- Tornero, B. (2014). La experiencia de usar un programa de aceleración cognitiva con futuros profesores de tres universidades chilenas. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 51(2), 98–118.
- Tulving, E., & Madigan, S. A. (1969). [Título no especificado].
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, 185(4157), 1124–1131.
- Vázquez, S. M., & Difabio de Anglat, H. (2009). Academic achievement and formal thought in engineering students. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(2), 653–672.
- Velasco-Barragán, B. B. (2025). El aprendizaje basado en problemas como recurso en el mejoramiento académico de las matemáticas. *Episteme Koinonía*, 8(15), 141-142.
<https://doi.org/10.35381/e.k.v7i14.4358> [(doi.org in Bing)]([https://www.bing.com/search?q=\"https%3A%2F%2Fdoi.org%2F10.35381%2Fe.k.v7i14.4358\"](https://www.bing.com/search?q=\))
- Vernaes, B. (2021). Aprendizaje acelerado: qué es, tipos, técnicas y libros destacados. *Cinco Noticias*.
- Villarroel Chuca, R. (2014). Las habilidades cognitivas y su incidencia en el aprendizaje [Tesis de licenciatura, Universidad Privada Abierta Latinoamericana]. Repositorio Institucional UPAL.
<https://biblioteca.upal.edu.bo/htdocs/TextosCompleto/TE02543-UPAL.pdf>
- Welsh, M. B., Burns, N. R., & Delfabbro, P. H. (2013). The Cognitive Reflection Test: How much more than numerical ability? *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, 35(35), 1586–1591.
- Young, A. G., & Shtulman, A. (2020). Children’s cognitive reflection predicts conceptual understanding in science and mathematics. *Psychological Science*, 31(11), 1396–1408.
<https://doi.org/10.1177/0956797620954449>
- Young, A. G., & Shtulman, A. (2020). How children’s cognitive reflection shapes their science understanding. *Frontiers in Psychology*, 11, 1247. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.01247>

Anexos

Anexo 1

Test de Razonamiento Lógico (TRL o TOLT)

INSTRUCCIONES

El cuestionario tiene por finalidad poder comprender mejor la lógica que usas para pensar. El razonamiento que elijas para cada respuesta se considera tan importante como la respuesta misma.

Para responder cada pregunta marca la respuesta en la hoja que se te entrega. Por favor, no escribas nada sobre las preguntas del cuestionario.

Para responder cada una de las preguntas sigue los siguientes pasos.

1. Lee con cuidado el enunciado de cada pregunta.
2. Piensa detenidamente la respuesta haciendo los cálculos que estimes oportunos.
3. Escribe la respuesta en el recuadro correspondiente de la hoja de respuestas.

Ej. 12. Razón

4. Lee todos los razonamientos que se presentan como posibles explicaciones de la respuesta que has elegido.
5. Selecciona cuidadosamente la opción que consideres oportuna teniendo en cuenta el razonamiento que utilizaste en tu respuesta.
6. Señala en el recuadro correspondiente de la hoja de respuestas la letra que indique la opción que has elegido.

Ej. 12. Razón

7. Si en algún momento quieres modificar la respuesta ofrecida, táchala y señala la nueva de la forma que se te indica a continuación.

Ej. 12. Razón

No olvides escribir tu nombre en la hoja de respuestas.

PREGUNTA 1

Se necesita exprimir 4 naranjas para obtener seis vasos de jugo. ¿Qué cantidad de jugo se podría obtener con seis naranjas?

(Considera que todas las naranjas son del mismo tamaño)

- a. 7 vasos
- b. 8 vasos
- c. 9 vasos
- d. 10 vasos
- e. Otra respuesta

Razón

- 1. El número de vasos y el número de naranjas estarán siempre en la relación 3 a 2.
- 2. Con más naranjas, las diferencias serán menores.
- 3. La diferencia entre las cantidades será siempre de dos.
- 4. Con cuatro naranjas la diferencia era dos. Con seis naranjas la diferencia sería dos más.
- 5. No se podría predecir.

PREGUNTA 2

Usando las mismas naranjas de la pregunta 1. ¿Cuántas naranjas se necesitarían para hacer 15 vasos de jugo?

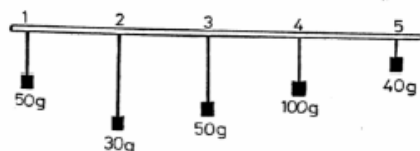
- a. 7 naranjas y media
- b. 9 naranjas
- c. 10 naranjas
- d. 13 naranjas
- e. Otra respuesta

Razón

- 1. El número de naranjas y el número de vasos de jugo estarán siempre en la relación 2 a 3.
- 2. El número de naranjas será siempre menor que el número de vasos de jugo.
- 3. La diferencia entre las cantidades será siempre de dos.
- 4. El número de naranjas necesarias será la mitad del número de vasos de jugo
- 5. No se podría predecir

PREGUNTA 3

Supongamos que queremos hacer un experimento para averiguar si al modificar la longitud de un péndulo cambia también la cantidad de tiempo que tarda en oscilar de un lado a otro. ¿Qué péndulos deberíamos usar para realizar dicho experimento?



- a. 1 y 4
- b. 2 y 4
- c. 1 y 3
- d. 2 y 5
- e. Todos

Razón

1. Compararíamos el péndulo más largo con el más corto.
2. Necesitaríamos comparar todos los péndulos entre sí.
3. Al aumentar la longitud tendríamos que disminuir el peso.
4. Los péndulos elegidos tendrían que tener todas las mismas longitudes y distinto peso.
5. Los péndulos elegidos tendrían que tener todos distinta longitud e igual peso.

PREGUNTA 4

Supongamos que queremos realizar un experimento para averiguar si al cambiar el peso del péndulo cambia también la cantidad de tiempo que tarda en oscilar de un lado a otro. ¿Qué péndulos tendríamos que usar para realizar dicha experiencia?



- a. 1 y 4
- b. 2 y 4
- c. 1 y 3
- d. 2 y 5
- e. Todos

Razón

1. Compararíamos el péndulo más pesado con el más ligero.
2. Necesitaríamos comparar todos los péndulos entre sí.
3. Al aumentar el peso tendríamos que disminuir la longitud.
4. Los péndulos elegidos tendrían que tener diferente peso y la misma longitud.
5. Compararíamos péndulos de igual peso y distinta longitud.

PREGUNTA 5

Un jardinero compró un paquete que contenía 3 semillas de calabaza y 3 semillas de frijol. Si se extrae una semilla del paquete, ¿Cuál es la probabilidad de que ésta sea de frijol?

- a. 1 de cada 2
- b. 1 de cada 3
- c. 1 de cada 4
- d. 1 de cada 6
- e. 4 de cada 6

Razón

1. Se necesitarían cuatro extracciones dado que las tres semillas de calabaza podría suceder que se extrajesen seguidas.
2. Hay seis semillas entre las cuales ha de extraerse una de frijol.
3. De las tres semillas de frijol que hay se necesita extraer una.
4. La mitad de las semillas son de frijol.
5. Del total de seis semillas, además de la de frijol se podrían extraer tres de calabaza.

PREGUNTA 6

Un jardinero compró un paquete que contenía 21 semillas de diversas clases. La composición era la siguiente:

3 de flores pequeñas rojas	4 de flores pequeñas amarillas
5 de flores pequeñas naranjas	4 de flores grandes rojas
2 de flores grandes amarillas	3 de flores grandes naranjas

Si sólo ha de plantar una semilla, ¿cuál es la probabilidad de que la planta resultante tenga flores rojas?

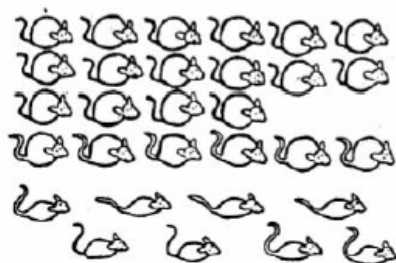
- a. 1 de cada 2
- b. 1 de cada 3
- c. 1 de cada 7
- d. 1 de cada 21
- e. Otra respuesta

Razón

1. Ha de elegir una semilla entre aquellas que dan flores rojas, amarillas o naranjas.
2. $\frac{1}{4}$ de las pequeñas y $\frac{4}{9}$ de las grandes son rojas.
3. No importa que sean pequeñas o grandes. De las siete semillas rojas que hay se ha de elegir una.
4. Ha de seleccionar una semilla roja de un total de 21 semillas.
5. Siete de las 21 semillas darán flores rojas.

PREGUNTA 7

La siguiente figura representa una muestra de los ratones que viven en un campo. A partir de la figura, indica si es más probable que tengan cola negra los ratones gordos que los delgados.



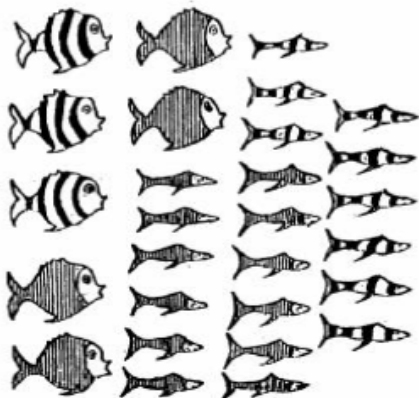
- a. Sí. Los ratones gordos tienen mayor probabilidad de tener cola negra que los delgados.
- b. No. Los ratones gordos no tienen más probabilidad de tener cola negra que los delgados.

Razón

1. $\frac{8}{11}$ de los ratones gordos tienen cola negra y $\frac{3}{4}$ de los ratones delgados tienen cola blanca.
2. Tanto alguno de los ratones gordos como alguno de los ratones delgados tienen cola blanca.
3. De los treinta ratones, 18 tienen cola negra y 12 cola blanca.
4. Ni todos los ratones gordos tienen cola negra, ni todos los delgados tienen cola blanca.
5. $\frac{6}{12}$ de los ratones con cola blanca son gordos.

PREGUNTA 8

¿Es más probable que tengan rayas anchas los peces gordos que los peces delgados?



- a. Sí
- b. No

Razón

1. Unos peces gordos tienen rayas anchas y otros estrechas.
2. $\frac{3}{7}$ de los peces gordos tienen rayas anchas.
3. $\frac{12}{28}$ tienen rayas anchas y $\frac{16}{28}$ las tienen estrechas.
4. $\frac{3}{7}$ de los peces gordos y $\frac{9}{21}$ de los peces delgados tienen rayas anchas.
5. Algunos de los peces con rayas anchas son delgados y otros son gordos.

PREGUNTA 9

Tres estudiantes de cada uno de los cursos de 1º, 2º y 3º de preparatoria son candidatos al consejo escolar. La representación estará constituida por un estudiante de cada curso. Cada votante debe considerar todas las combinaciones posibles antes de decidir su voto.

Dos posibles combinaciones serían Tomás, José y Pedro (TJP); e Isabel, Carmen y María (ICM).

Has una lista con todas las combinaciones posibles usando los espacios que se ofrecen en la hoja de respuestas. Hay más espacios de los necesarios.

CONSEJO ESCOLAR

1º DE PREPA	2º DE PREPA	3º DE PREPA
Tomás (T)	José (J)	Pedro (P)
Isabel (I)	Carmen (C)	María (M)
Antonio (A)	Beatriz (B)	Luís (L)

PREGUNTA 10

Se prevé abrir en breve 4 tiendas en un nuevo centro comercial.

Optan por comprar los locales una peluquería (P), una farmacia (F), un supermercado (S) y una cafetería (C).

Cada uno de los negocios mencionados ha de ocupar uno de los locales previstos.

Una posible forma de ocupación sería PFSC.

Has una lista con todas las formas posibles de ocupación de los locales.

Hay más espacios en la hoja de respuestas de los que son necesarios.

1	2	3	4
---	---	---	---

HOJA DE RESPUESTAS

Anexo 2**Test de Reflexión Cognitiva (TRC)****Test de Reflexión Cognitiva**

Nombre _____

Matrícula _____

Edad _____ años y _____ meses

1. Una raqueta y una pelota cuestan 1.10 euros en total. La raqueta cuesta 1.00 euro más que la pelota. ¿Cuánto cuesta la pelota?

La pelota cuesta _____ euros.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

2. Si 5 máquinas tardan 5 minutos en fabricar 5 piezas, ¿cuánto tardarán 100 máquinas en fabricar 100 piezas?

La máquinas tardarán _____ minutos.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

3. En un lago hay una zona cubierta de lirios. El área de lirios se hace el doble de grande cada día. Si el área de lirios tarda 48 días en cubrir el lago entero, ¿cuántos días tardarán los lirios en cubrir la mitad del lago?

Los lirios tardarán _____ días.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

4. Iván puede beber un barril de agua en 6 días y María puede beber el mismo barril de agua en 12 días. ¿Cuántos días tardarán en beber tal barril de agua juntos?

Tardarán _____ días.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

5. Julio ha recibido tanto la decimoquinta calificación más alta como la decimoquinta calificación más baja en la clase. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

Hay _____ estudiantes en la clase.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

6. Un hombre compra una mercancía por 60 pesos, la vende por 70 pesos, la compra de nuevo por 80 pesos y, finalmente, la vende por 90 pesos. ¿Cuánta ganancia logra obtener?

Su ganancia fue de _____ pesos.

¿Cómo llegaste a tal respuesta?

Anexo 3

Problemas de sobra y falta

Nombre completo _____

Indica con x en paréntesis tu nivel escolar: () secundaria () bachillerato

En esta actividad debes resolver dos “problemas de sobra y falta”.

1. *Repartir los dulces a los estudiantes*

Una maestra tiene una bolsa con dulces.

Si la maestra daría a cada estudiante 3 dulces, le sobrarían 16 dulces.

Si la maestra quisiera dar a cada estudiante 5 dulces, le faltarían 4 dulces más.

¿Cuántos estudiantes tiene la maestra?

¿Cuántos dulces tiene la maestra?

1.1. Describe con palabras, sin usar ecuación alguna, tu plan de resolver el problema.

1.2. Si un recurso visual (dibujo, gráfica o diagrama) haría más claro tu plan, realízalo en el espacio que sigue.



1.3. Realiza detalladamente de plan de resolver el problema. Ahora si puedes usar ecuaciones si son necesarias.

1.4. Tus respuestas son:

La maestra tiene ____ estudiantes. La maestra tiene ____ dulces.

1.5. Demuestra que tus respuestas son correctas.

2. Colocar los dulces en las bolsas

Una maestra tiene unos dulces y unas bolsas.

Si la maestra quisiera colocar en cada bolsa 2 dulces, le sobrarían 9 dulces.

Si la maestra coloca en cada bolsa 3 dulces, le quedan 2 bolsas sin dulces.

¿Cuántas bolsas tiene la maestra?

¿Cuántos dulces tiene la maestra?

2.1. Describe con palabras, sin usar ecuación alguna, tu plan de resolver el problema.

2.2. Si un recurso visual (dibujo, gráfica o diagrama) haría más claro tu plan, realízalo en el espacio que sigue.



2.3. Realiza detalladamente de plan de resolver el problema. Ahora si puedes usar ecuaciones si son necesarias.

2.4. Tus respuestas son:

La maestra tiene ____ bolsas. La maestra tiene ____ dulces.

2.5. Demuestra que tus respuestas son correctas.