



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

**MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA,
OPCIÓN EN AUTOMATIZACIÓN**

“Calibración de un rastrillo desarenador”

T E S I S

Presentada para obtener el título de:
Maestro en Ciencias de la Electrónica, Opción en Automatización

Presenta:

Lic. en Ing. Jorge Heredia Castillo

Directores:

Dra. Olga Guadalupe Félix Beltrán (FCE-BUAP)

Dr. Jesús Alberto Mendoza Quiñonez (FCE-BUAP)

Puebla, México

Junio 2022

* Becario CONACYT

BUAP[®]

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Introducción | xv |
| 1. Marco teórico | 1 |
| 1.1. Calibración | 1 |
| 1.2. Rastrillo desarenador | 3 |
| 1.2.1. Métodos de separación en minería (clasificación) | 3 |
| 1.2.2. Rastrillo clasificador | 4 |
| 1.3. Ciencia de máquinas y mecanismos | 5 |
| 1.3.1. Método de análisis cinemático para mecanismos planos basados en ecuaciones de restricción | 7 |
| 1.4. Análisis de sensibilidad | 8 |
| 1.4.1. La influencia de las tolerancias de fabricación en el comportamiento cinemático de mecanismos | 9 |
| 1.4.2. Ejemplo: Un sistema simple de un grado de libertad | 10 |
| 2. Análisis cinemático | 13 |
| 2.1. Restricciones cinemáticas | 14 |
| 2.1.1. Análisis del mecanismo | 16 |
| 2.1.2. Grafo del mecanismo | 17 |
| 2.1.3. Movilidad del mecanismo | 18 |
| 2.2. Ecuaciones de restricción | 18 |
| 2.2.1. Obtención del ángulo φ_{61} | 18 |
| 2.2.2. Obtención del ángulo φ_5 | 22 |
| 2.2.3. Obtención del ángulo φ_4 | 23 |
| 2.2.4. Obtención del ángulo φ_{31} | 26 |
| 2.2.5. Obtención del ángulo φ_8 | 28 |
| 2.2.6. Obtención del ángulo φ_7 | 33 |
| 2.3. Trayectoria del punto O | 34 |
| 2.3.1. Trayectorias del punto O con cambios extremos | 36 |
| 2.3.2. Trayectorias del punto O cuando todos los parámetros geométricos calibrables están en sus valores extremos | 39 |
| 2.4. Validación en software | 40 |
| 2.5. Validación experimental | 41 |
| 2.5.1. Desarrollo de la validación experimental | 42 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 2.5.2. | Materiales utilizados en la validación experimental | 43 |
| 2.5.3. | Obtención de la trayectoria del punto O con el prototipo | 45 |
| 2.5.4. | Resultados de la validación experimental | 45 |
| 2.6. | Diferenciales totales | 47 |
| 2.6.1. | Obtención de las diferenciales totales del primer circuito cinemático. . . | 48 |
| 2.6.2. | Obtención de las diferenciales totales del segundo circuito cinemático . . | 48 |
| 2.6.3. | Obtención de las diferenciales totales del tercer circuito cinemático . . . | 49 |
| 2.6.4. | Obtención de las diferenciales totales para el punto O deseado con respecto a los parámetros calibrables | 51 |
| 2.6.5. | Errores de las coordenadas generalizadas en función de los parámetros geométricos | 52 |
| 2.7. | Aproximación del diferencial | 57 |
| 2.7.1. | Grado de confiabilidad del método de interpretación de curvas diferenciales totales | 58 |
| 2.7.2. | Comparación de diferenciales en el punto de interés O con respecto a su trayectoria nominal mientras hay cambio en l_8 | 67 |
| 2.7.3. | Comparación de diferenciales en el punto de interés O con respecto a su trayectoria nominal mientras hay cambio en β_1 | 73 |
| 2.7.4. | Comparación de diferenciales en el punto de interés O con respecto a su trayectoria nominal mientras hay cambio en β_{81} | 78 |
| 2.7.5. | Comparación de diferenciales en el punto de interés O con respecto a su trayectoria nominal mientras hay cambio en β_{82} | 82 |
| 2.7.6. | Comparación de diferenciales en el punto de interés O con respecto a su trayectoria nominal para un cambio máximo y mínimo | 87 |
| 3. | Análisis de influencia | 92 |
| 3.1. | Sensibilidad de la trayectoria | 92 |
| 3.1.1. | Curvas diferenciales totales de la trayectoria del punto O | 92 |
| 3.1.2. | Comparación entre las curvas generadas por el método de las diferenciales totales cuando los parámetros geométricos calibrables se ajustan en sus valores extremos | 97 |
| 4. | Propuesta de calibración | 99 |
| 4.1. | Calibración del rastrillo | 99 |
| 5. | Resultados | 102 |
| | Conclusiones | 103 |
| | Anexo A | 104 |
| | Anexo B | 112 |
| | Anexo C | 124 |
| | Anexo D | 126 |

| | |
|---------------------|------------|
| Anexo E | 137 |
| Anexo F | 139 |
| Bibliografía | 141 |

Índice de figuras

| | | |
|-------|--|-------|
| 1. | Diagrama de bloques resumido del proceso de investigación en general. | XVIII |
| 2. | Diagrama representativo del proceso de trabajo de tesis. | XIX |
| 1.1. | Diagrama esquemático de clasificador de rastrillo Dorr-Oliver. | 5 |
| 2.1. | Nomenclatura de longitudes funcionales en eslabón 2. | 13 |
| 2.2. | Nomenclatura de ángulos constantes y variables. | 14 |
| 2.3. | Nomenclatura de las coordenadas horizontales y verticales de los puntos fijos. | 14 |
| 2.4. | Los ocho eslabones y las diez articulaciones efectivas del rastrillo desarenador. | 15 |
| 2.5. | Levantamiento cinemático del rastrillo | 17 |
| 2.6. | Grafo del mecanismo | 17 |
| 2.8. | Primer circuito cinemático. | 18 |
| 2.7. | Geometría del eslabón ternario de entrada mostrando la excentricidad l_{21} y la palanca de longitud l_{22} | 19 |
| 2.9. | Segundo circuito cinemático. | 24 |
| 2.10. | Tercer circuito cinemático. | 28 |
| 2.11. | Detalle de los eslabones del elemento rastrillo. | 29 |
| 2.12. | Ubicación del punto O del rastrillo en un diagrama esquemático. | 35 |
| 2.13. | Trayectoria descrita por el punto O del rastrillo cuando los parámetros geométricos calibrables se encuentran en sus valores nominales. | 36 |
| 2.14. | Trayectorias del punto O cuando varían los parámetros geométricos calibrables en sus puntos extremos | 37 |
| 2.15. | Máximo cambio del punto O del rastrillo. | 39 |
| 2.16. | Toma de datos del simulador de Autodesk Inventor de la cinemática del rastrillo | 40 |
| 2.17. | Comparativa de la trayectoria del punto O con los parámetros de ajuste nominales entre el modelo de Autodesk Inventor y el modelo cinemático obtenido y detalle de la gráfica. | 41 |
| 2.18. | Fotografía del prototipo construido para validar el modelo matemático. | 42 |
| 2.19. | Dibujo del prototipo realizado en el Software Autodesk Inventor. | 43 |
| 2.20. | Boceto obtenido a partir de un archivo de ensamblaje con las piezas del mecanismo a fabricar, en el software Autodesk Inventor. | 43 |
| 2.21. | Fotografías del proceso de obtención de coordenadas de los puntos sobre la trayectoria ampliada, para su posterior comparación con MATLAB. | 45 |
| 2.22. | Comparativa entre la trayectoria del punto O obtenida con el modelo cinemático del mecanismo contra la trayectoria obtenida con el prototipo físico. | 47 |

| | |
|---|----|
| 2.23. Ejemplo de la interpretación matemática del diferencial como aproximación a la resta de un punto sobre la trayectoria del punto O bajo dos condiciones del parámetro geométrico l_5 | 60 |
| 2.24. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_5 en sus valores máximo y mínimo con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_5 y detalles de las trayectorias. | 61 |
| 2.25. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_5 desplazado ± 10 mm con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_5 y detalles de las curvas diferenciales. | 62 |
| 2.26. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_5 desplazado $\pm 1mm$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_5 con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 63 |
| 2.27. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_5 desplazado $\pm 0.1mm$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_5 con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 64 |
| 2.28. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_8 en sus valores máximo y mínimo con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_8 con respecto a la trayectoria nominal y detalle de cada curva. | 68 |
| 2.29. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_8 en sus valores máximo y mínimo con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_8 con respecto a la trayectoria nominal y detalle de cada curva. | 69 |
| 2.30. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_8 con una diferencia de $\pm 1mm$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_8 con respecto a la trayectoria nominal y detalle de cada curva. | 70 |
| 2.31. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_8 con una diferencia de $\pm 0.1mm$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_8 con respecto a la trayectoria nominal y detalle de cada curva. | 71 |
| 2.32. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_1 con una diferencia de $\pm 30^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_1 con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 74 |
| 2.33. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_1 con una diferencia de $\pm 1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_1 con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 75 |

| | |
|--|----|
| 2.34. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_1 con una diferencia de $\pm 0.1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_1 con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 76 |
| 2.35. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{81} con un cambio máximo y mínimo con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{81} con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 78 |
| 2.36. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{81} con una diferencia de $\pm 1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{81} con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 79 |
| 2.37. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{81} con una diferencia de $\pm 0.1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{81} con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 80 |
| 2.38. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{82} con un cambio máximo y mínimo con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{82} con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 82 |
| 2.39. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{82} con un cambio de $\pm 10^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{82} con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 83 |
| 2.40. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{82} con un cambio de $\pm 1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{82} con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 84 |
| 2.41. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{82} con un cambio de $\pm 0.1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{82} con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 85 |
| 2.42. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar todas las variables calibrables a sus puntos máximos y mínimos con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. . | 87 |
| 2.43. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar todas las variables calibrables con ± 10 unidades con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 88 |
| 2.44. Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar todas las variables calibrables con ± 1 unidades con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 89 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 2.45. | Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar todas las variables calibrables con ± 0.1 unidades con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas. | 90 |
| 3.1. | Valores de los cambios δ_x, δ_y de la trayectoria del punto O cuando los cambios δl_5 toman valores en milímetros de: -120,-90,-60,-30,0,30,60,90,120 | 93 |
| 3.2. | Valores de los cambios δ_x, δ_y de la trayectoria del punto O cuando los cambios δl_8 toman valores en milímetros de: -50,-25,0,25,50. | 94 |
| 3.3. | Valores de los cambios δ_x, δ_y de la trayectoria del punto O cuando los cambios $\delta \beta_1$ toman valores en grados de: -30,-20,-10,0,10,20,30. | 95 |
| 3.4. | Valores de los cambios δ_x, δ_y de la trayectoria del punto O cuando los cambios $\delta \beta_{81}$ toman valores en grados de: -30,-20,-10,0,10,20,30. | 96 |
| 3.5. | Valores de los cambios δ_x, δ_y de la trayectoria del punto O cuando los cambios $\delta \beta_{82}$ toman valores en grados de: -30,-20,-10,0,10,20,30. | 97 |
| 3.6. | Comparación de los diferenciales totales | 98 |
| 4.1. | Ubicación de los sensores de proximidad inductivos sobre la cara del diente extremo en la zona de descarga. | 99 |
| 4.2. | Ubicación de los dos pares de sensores de proximidad inductiva sobre el elemento rastrillo. | 100 |
| 1. | Primeros pasos para la instalación del programa para calibrar el rastrillo. | 104 |
| 2. | Ubicación del programa para calibrar el rastrillo en el software MATLAB. | 105 |
| 3. | Instalador para PC de la aplicación desarrollada | 105 |
| 4. | Ventana emergente de programación que presenta el programa que se desea instalar. | 106 |
| 5. | Ventana emergente en el proceso de instalación que indica la ubicación de instalación donde se guardará la aplicación. | 106 |
| 6. | Ventana del asistente de instalación que solicita instalar MATLAB. | 107 |
| 7. | Ventana de confirmación en el proceso de instalar la aplicación. | 107 |
| 8. | Ventana en donde se muestra el proceso de instalación de la aplicación desarrollada. | 108 |
| 9. | Ventana de programación que muestra que el proceso de instalación ha sido concluido satisfactoriamente. | 108 |
| 10. | Interfaz inicial de la app para calibrar el rastrillo desarenador. | 109 |
| 11. | Salida del programa a la solicitud de trayectoria del punto O con los valores nominales de los parámetros geométricos calibrables. | 109 |
| 12. | Detalle de la gráfica de la figura con la opción acercar propia de MATLAB. | 110 |
| 13. | Gráfica desplazada con la opción propia de MATLAB. | 110 |
| 14. | Icono que permite guardar la imagen de la curva. | 111 |
| 15. | Pseudocódigo de la aplicación desarrollada para la calibración del mecanismo rastrillo clasificador. | 113 |
| 16. | Función declarada en la aplicación que se ejecuta al accionar el botón graficar. | 114 |
| 17. | Diagrama de flujo que se ejecuta cuando se ejecuta el botón limpiar. | 114 |

-
18. Pseudocódigo del programa desarrollado para realizar la prueba de bondad de ajuste de la comparación de las trayectorias generadas por los diferenciales totales y su correspondiente aproximación mediante resta de trayectorias. . . . 137

Índice de tablas

| | |
|--|----|
| 1.1. Sumario de simbolos generales usados en la nomenclatura del documento. . . . | 8 |
| 2.1. Dimensiones de los parámetros geométricos. | 16 |
| 2.2. Valores de la norma del error de la resta del método del análisis cinemático contra el método del análisis dinámico del modelo virtual en Inventor, cuando todos los parámetros geométricos calibrables se encuentran en sus valores nominales. . . | 41 |
| 2.3. Valores de la superficie y el perimetro de la trayectoria del punto O generada, tanto por el análisis cinemático en MATLAB, como por el obtenido en el prototipo físico. | 47 |
| 2.4. Valores de la norma del error de la resta del método de la resta contra el método del diferencial total, cuando el parámetro geométrico l_5 cambia desde su valor nominal con variaciones de $\delta l_5 = \pm 120$ mm, $\delta l_5 = \pm 10$ mm, $\delta l_5 = \pm 1$ mm y $\delta l_5 = \pm 0.1$ mm. | 65 |
| 2.5. Tabla comparativa de los resultados de la prueba de Pearson (5%) al ajuste de las curvas resultantes del método diferencial total con respecto a las curvas resultantes del método de la resta de las trayectorias trasladadas con respecto a la trayectoria nominal del punto O cuando hay variaciones máximas, mínimas sobre el parámetro geométrico l_5 , y además, cuando hay variaciones de ± 10 , ± 1 y ± 0.1 mm en l_5 | 67 |
| 2.6. Valores de la norma del error de la resta del método de la resta contra el método del diferencial total, cuando el parámetro geométrico l_8 cambia desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ mm hasta $l_8 = 5450.1$, $l_8 = 5451$, $l_8 = 5460$, $l_8 = 5500$ mm y $l_8 = 5449.9$, $l_8 = 5449$, $l_8 = 5440$, $l_8 = 5400$ mm produciendo cambios máximos y mínimos, respectivamente, en la trayectoria del punto O | 72 |
| 2.7. Tabla comparativa de los resultados de la prueba de Pearson (5%) al ajuste de las curvas resultantes del método diferencial total con respecto a las curvas resultantes del método de la resta de las trayectorias trasladadas con respecto a la trayectoria nominal del punto O cuando hay variaciones máximas, mínimas sobre el parámetro geométrico l_8 , y además, cuando hay variaciones de ± 10 , ± 1 y ± 0.1 mm en l_8 | 73 |

| | |
|---|----|
| 2.8. Valores de la norma del error de la resta del método de la resta contra el método del diferencial total, cuando el parámetro geométrico β_1 cambia desde su valor nominal de $\beta_1 = 0^\circ$ hasta $\beta_1 = 0.1^\circ$, $\beta_1 = 1^\circ$ y $\beta_1 = -0.1^\circ$, $\beta_1 = -1^\circ$ produciendo cambios máximos y mínimos, respectivamente, en la trayectoria del punto O | 77 |
| 2.9. Tabla comparativa de los resultados de la prueba de Pearson (5 %) al ajuste de las curvas resultantes del método diferencial total con respecto a las curvas resultantes del método de la resta de las trayectorias trasladadas con respecto a la trayectoria nominal del punto O cuando hay variaciones máximas, mínimas sobre el parámetro geométrico β_1 , y además, cuando hay variaciones de $\pm 1^\circ$ y $\pm 0.1^\circ$ en β_1 | 77 |
| 2.10. Valores de la norma del error de la resta del método de la resta contra el método del diferencial total, cuando el parámetro geométrico β_{81} cambia desde su valor nominal de $\beta_{81} = 90^\circ$ hasta $\beta_{81} = 89.9^\circ$, $\beta_{81} = 89^\circ$, $\beta_{81} = 80^\circ$, $\beta_{81} = 60^\circ$ y $\beta_{81} = 90.1^\circ$, $\beta_{81} = 91^\circ$, $\beta_{81} = 100^\circ$, $\beta_{81} = 120^\circ$ produciendo cambios mínimos en la trayectoria del punto O | 81 |
| 2.11. Tabla comparativa de los resultados de la prueba de Pearson (5 %) al ajuste de las curvas resultantes del método diferencial total con respecto a las curvas resultantes del método de la resta de las trayectorias trasladadas con respecto a la trayectoria nominal del punto O cuando hay variaciones máximas, mínimas sobre el parámetro geométrico β_{81} , y además, cuando hay variaciones de $\pm 1^\circ$ y $\pm 0.1^\circ$ en β_{81} | 81 |
| 2.12. Valores de la norma del error de la resta del método de la resta contra el método del diferencial total, cuando el parámetro geométrico β_{82} cambia desde su valor nominal de $\beta_{82} = 90^\circ$ hasta, $\beta_{82} = 120^\circ$ $\beta_{82} = 100^\circ$ $\beta_{82} = 91^\circ$, $\beta_{82} = 90.1^\circ$ y $\beta_{82} = 60^\circ$, $\beta_{82} = 80^\circ$ $\beta_{82} = 89^\circ$, $\beta_{82} = 89.9^\circ$ produciendo cambios mínimos en la trayectoria del punto O | 86 |
| 2.13. Tabla comparativa de los resultados de la prueba de Pearson (5 %) al ajuste de las curvas resultantes del método diferencial total con respecto a las curvas resultantes del método de la resta de las trayectorias trasladadas con respecto a la trayectoria nominal del punto O cuando hay variaciones máximas, mínimas sobre el parámetro geométrico β_{82} , y además, cuando hay variaciones de $\pm 1^\circ$ y $\pm 0.1^\circ$ en β_{81} | 86 |
| 2.14. Valores de la norma del error de la resta del método de la resta contra el método del diferencial total, cuando todos los parámetros geométricos calibrables incrementan 0.1, 1, 10 unidades; además de sus máximos valores posibles. También se muestran las normas cuando todos los parámetros geométricos calibrables reducen sus medidas en 0.1, 1, 10 unidades, así como de sus mínimos valores posibles, produciendo cambios máximos y mínimos en la trayectoria del punto O | 91 |
| 2.15. Tabla comparativa de los resultados de la prueba de Pearson (5 %) al ajuste de las curvas resultantes del método diferencial total con respecto a las curvas resultantes del método de la resta de las trayectorias trasladadas con respecto a la trayectoria nominal del punto O cuando hay variaciones máximas, mínimas sobre todos los parámetros geométricos, y además, cuando hay variaciones de $\pm 1^\circ$ y $\pm 0.1^\circ$ | 91 |

Dedicatoria

Dedico la presente obra a Dios y a los responsables de mantenimiento de los rastrillos desarenadores en las fábricas de Aluminio.

Agradecimientos

Primeramente agradezco a mi familia y a Dios por su apoyo incondicional en el desarrollo de este trabajo. Agradezco también a la Facultad en Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por el apoyo brindado durante mi estancia en el programa de posgrado estos dos años en la Maestría en Ciencias de la Electrónica, Opción en Automatización.

Agradezco de forma especial a la Dra. Olga Guadalupe Félix Beltrán por haber confiado en mí y haberme apoyado en mi ingreso al programa de posgrado, al Dr. Jesús Alberto Mendoza Quiñonez por haberme permitido trabajar como su tesista, por sus conocimientos, orientaciones y su incansable dedicación me ayudaron a culminar este trabajo.

A mi jurado el Dr. José Eligio Moisés Gutiérrez Arias, Dr. Alexandre Zemilak y la Dra. Gregoria Corona Morales los cuales ayudaron a enriquecer mi trabajo de investigación con sus acertados comentarios y observaciones.

Agradezco a CONACYT-México por el apoyo otorgado a través de la beca de Maestría en Ciencias, CVU:870621.

Resumen

En el presente trabajo se realiza un documento donde se investiga, de manera detallada, el comportamiento del mecanismo rastrillo desarenador, de la marca Dorr-Oliver, para poder calibrarlo. Esto último bajo la premisa de que el modelo cinemático desarrollado es capaz de reproducir el movimiento real del mecanismo. Para comprobar esta hipótesis, se estudia a los rastrillos desarenadores en general, se presentan los diferentes tipos que existen, su uso como separadores de partículas en la minería y sus aplicaciones en otras ramas como en la industria del papel. Se revisa la bibliografía para la calibración de rastrillos desarenadores y se referencia un manual encontrado de calibración por medio del análisis de coeficientes de influencia. Después, se presenta la metodología de la investigación, se dan a conocer los objetivos generales y específicos. Más tarde, se aborda el estudio del modelo cinemático del rastrillo desarenador a calibrar en este trabajo, así como la implementación de dicho modelo en el software de simulación MATLAB para obtener las curvas de la trayectoria del punto O en el extremo del rastrillo. Con ello, se realiza el desarrollo de las diferenciales totales de los tres circuitos cinemáticos constituyentes del mecanismo, la obtención de las trayectorias de un punto de interés y la validación del modelo en el software de simulación Autodesk Inventor. Una vez hecho esto, se comparan las curvas generadas a través del análisis cinemático con las curvas obtenidas por el programa y se hace ver que hay una coincidencia entre estos resultados, existiendo una variación de menos de 0.3 mm de error en las trayectorias previstas entre ambos métodos. Se presenta también, la construcción de un modelo físico a escala de 1:10 del mecanismo rastrillo, se compara la trayectoria del punto O del prototipo con la trayectoria del punto O del modelo cinemático y resulta que la diferencia de superficie de ambas áreas tiene un porcentaje del 6.672% y la diferencia de longitud en los perímetros tiene un porcentaje de 2.1375%. Por otro lado, se ahonda en el análisis de sensibilidad de los cambios en la trayectoria ante los ajustes de los parámetros geométricos calibrables, por medio de los diferenciales totales de la trayectoria del punto O . Por último, en la sección de anexos, se da a conocer la divulgación de los resultados de la obtención de las trayectorias del punto O del rastrillo en el XXVII Congreso Internacional anual de la SOMIM modalidad virtual. A la par de ello, se muestra el manual de la interfaz de usuario del programa para obtener las diferentes trayectorias de calibración del punto O del rastrillo desarenador. Dicho programa permite al usuario variar los valores de los parámetros geométricos calibrables y ver la trayectoria resultante. Además se presenta el detalle de los diferentes códigos desarrollados.

Introducción

Actualmente el ser humano es capaz de realizar proezas tecnológicas tales como la impresión de imágenes en miniatura, tal es el caso de las empresas ETZ ZURICH y Scrona que entraron al libro de los récord Guinness por imprimir una imagen de 0.0092 mm^2 a color [1]. Para lograr esto, el hombre construye máquinas cada vez más precisas y exactas. Los sistemas mecánicos de diversos tipos son usados en el mundo moderno en muchas aplicaciones prácticas, algunas de las cuales, como la del ejemplo anterior, requieren de un alto grado de exactitud, en cuanto al posicionamiento de sus componentes móviles de salida. Esto último obliga a una fabricación precisa de sus componentes o al ajuste del mecanismo después de ensamblado. Piezas con medidas exactas conllevan a costos de fabricación elevados. Por lo tanto, los fabricantes optan por la opción del ajuste y el calibrado, que permite la exactitud dimensional a un costo razonable.

Cuando se construye un mecanismo, cada uno de los elementos que lo conforman tienen asignados una tolerancia dimensional normada para sus longitudes y sus ángulos. En función de dichas tolerancias se da la calibración de las maquinarias. Tomando las tolerancias como patrones de referencia, se compara el estado real actual de la precisión de posicionamiento de los eslabones de la máquina y de sus trayectorias de salida y se modifica hasta hacer que la precisión de posicionamiento esté dentro del rango de error permitido para la máquina. La mayoría de esos mecanismos de precisión son fabricados por casas especializadas como Motorola, Asea, Acma, Fanuc, Hitachi, Honda, entre otras. Estas, son capaces de lograr precisiones posicionales angulares de sus elementos de salida de alrededor de los 0.0003 rad y precisiones traslacionales de $1 \mu\text{m}$. Sin embargo, la manera en que estas casas fabricantes consiguen los ajustes para lograr la exactitud posicional en los mecanismos que fabrican es mantenida en reserva por razones conocidas de propiedad intelectual y derechos de autor. Ante tal necesidad, este trabajo sirve para descifrar y divulgar el procedimiento de ajuste de estos mecanismos a modo de lograr que sus puntos describan una trayectoria deseada por debajo del máximo error programado para esta. Para desentrañar dicha metodología, se toma como ejemplo el caso particular de la calibración de un rastrillo desarenador con un modelo dinámico publicado [2]. Los mecanismos de rastrillos desarenadores estudiados en este trabajo, fueron construidos por la empresa francesa Dorr Oliver e instalados en diversas empresas, entre ellas CVG Bauxilum en el año 2003. Se estudia la metodología aplicada en dicho trabajo para lograr la exactitud deseada.

Un rastrillo desarenador es el elemento de una máquina que se encarga de separar el barro del líquido acuoso de algún proceso. Generalmente, los desarenadores tienen palas y van montados en una cuba que contiene el producto a separar, en el caso en particular del rastrillo estudiado en este trabajo de tesis, separar el barro del licor rojo en una fábrica minera de obtención

de bauxita para la fabricación de aluminio y sus derivados [3]. Cada mecanismo consiste en siete eslabones móviles más un bastidor y tiene veinticinco parámetros geométricos funcionales, cinco de los cuales son ajustables. El eslabón de entrada es una manivela de doble excéntrica y el elemento de salida es un rastrillo desarenador.

Para lograr calibrar el rastrillo se tiene que tomar en cuenta que al mover los parámetros ajustables de la máquina cambia la separación entre el rastrillo desarenador y la cuba donde se encuentra el producto a barrer. La tolerancia de separación está en el intervalo de 5 a 15 mm. Si la máquina tiene una separación menor de 5 mm, el rastrillo puede chocar con la cuba y la máquina puede romperse. Por el contrario, si la máquina tiene una separación mayor a 15 mm la máquina no alcanza a barrer el producto eficientemente. De los cinco elementos ajustables, existen elementos cuya variación produce un cambio en la salida comparativamente más pequeño que al variar otros parámetros. A estos se les puede llamar elementos de ajuste fino. Por otro lado, a los elementos que no son de ajuste fino se les puede llamar de ajuste grueso. El responsable de calibrar la máquina debe saber hacer distinción de estos elementos. Además, debe estimar la variación de la salida con respecto a la variación del ajuste antes de tocar la máquina. A pesar de que el mecanismo de tipo rastrillo desarenador instalado en la empresa CVG Bauxilum puede ajustarse para lograr las trayectorias de barrido deseadas, no está suficientemente divulgado el modo de calibrarlo cuando el mecanismo se desajusta. Este es un ejemplo claro de que cuando algunas empresas que desconocen el método de calibración, requieren la asesoría de expertos para hacerlo.

Existen algunos trabajos en la literatura que abordan la misma problemática para otras máquinas desarenadoras de rastrillo. A continuación se presenta una breve descripción de algunos de ellos. En el trabajo [4] se presenta un estudio de los errores de posicionamiento de un rastrillo clasificador de la Empresa Dorr Oliver con siete eslabones móviles y un bastidor. En el trabajo [5] se elabora un manual de calibración del mecanismo clasificador de doble rastrillo asimétrico fabricado por la empresa Dorr Oliver. El mecanismo estudiado en el trabajo antes mencionado, consiste en un sistema de palancas constituido por 14 elementos móviles más un bastidor y se trata de dos cadenas cinemáticas en paralelo. Se realiza un estudio de tipo analítico y descriptivo en el que se identifican las ecuaciones que rigen la influencia de los elementos de calibración sobre el error de posicionamiento del resto de los elementos del mecanismo. Así mismo, se describen los pasos a seguir para calibrar el mecanismo adecuadamente, de forma tal que no existan colisiones entre sus eslabones. Además propone un programa en Excel para encontrar los ajustes de calibración.

El problema de la calibración de máquinas desarenadoras no sólo es de empresas venezolanas como CVG Bauxilum, también se extiende a países con las mismas necesidades de clasificar minerales. Por ejemplo, México es un país que cuenta con una tradición minera de más de cinco siglos [6], sin embargo los libros de divulgación o introducción a este tema publicados en México son escasos. Además, existe una gran cantidad de empresas que proveen a la industria de rastrillos desarenadores. A continuación, se enumeran algunas de las principales marcas que proveen rastrillos en México [7]:

- MATEX
- LIFTOR
- Dorco de México

- Comercial Roca del Bajío
- TYRSA
- HELTEC
- Diamot Products México
- MC California
- Máquinas Diesel
- Distribuidora Claude
- Grupo Gr Internacional
- Codinamex

Dada la cantidad de rastrillos en el mercado, se necesita información para que las empresas consumidoras no necesiten recurrir al fabricante para poder calibrar sus propios rastrillos, ya que el costo de contratar un experto para calibrar sus máquinas es excesivo.

Con todo lo anterior se puede ver que la problemática principal encontrada es el desconocimiento del comportamiento profundo del mecanismo de rastrillo clasificador, con énfasis en los cambios de la salida del movimiento del rastrillo con respecto a las entradas de calibración. Esta problemática conduce a una incertidumbre del técnico encargado del mantenimiento de la máquina a la hora de calibrar el mecanismo. Una incertidumbre del funcionamiento a pie de máquina se ve reflejado en un incremento del costo de mantenimiento y un riesgo potencial de dañar la maquinaria o el proceso. Por ello, se plantean los siguientes objetivos, que dado el hecho de haberlos alcanzado permitirán al lector de este trabajo, primeramente, aportar un análisis detallado del funcionamiento del mecanismo. Al mismo tiempo, el logro de los objetivos prueba y defiende la hipótesis acerca de la validez del modelo cinemático bajo ecuaciones de restricción como una herramienta indispensable calibrar mecanismos. Los objetivos general y específicos de este trabajo de tesis se enuncian a continuación.

Objetivo general

Determinar cómo el ajuste de cada uno de los cinco parámetros geométricos calibrables de un mecanismo de rastrillo desarenador modifica la trayectoria descrita por los dientes barredores del mismo.

Objetivos particulares

1. Investigar el estado del arte referente a la aplicación de los estudios de sensibilidad en el área de la ingeniería.
2. Medir toda la geometría funcional del mecanismo de rastrillo desarenador.

3. Comprobar las ecuaciones que permiten obtener las trayectorias de barrido de los dientes de un rastrillo desarenador.
4. Elaborar un programa de computadora que muestre gráficamente cómo cambian las trayectorias de barrido de los dientes del rastrillo conforme se van ajustando los cinco eslabones calibrables del mecanismo.
5. Determinar la sensibilidad de las distintas trayectorias posibles a las tolerancias dimensionales admisibles de los parámetros geométricos calibrables del rastrillo desarenador.

Se muestra en la Figura 1 un diagrama de bloques del proceso que se llevó a cabo para cumplir los objetivos de este trabajo de tesis.

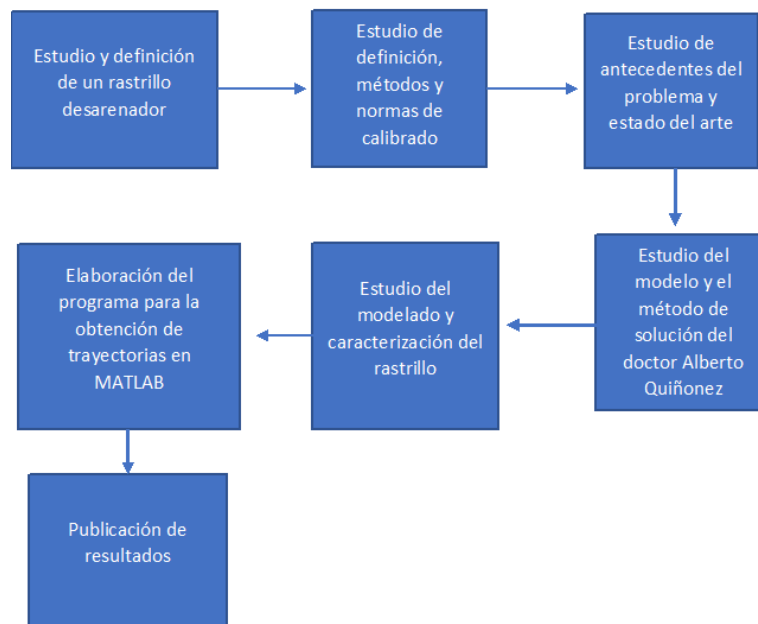


Figura 1: Diagrama de bloques resumido del proceso de investigación en general.

Se presenta en la Figura 2 un diagrama representativo donde se expande el diagrama de bloques del proceso que se realizó en este trabajo.

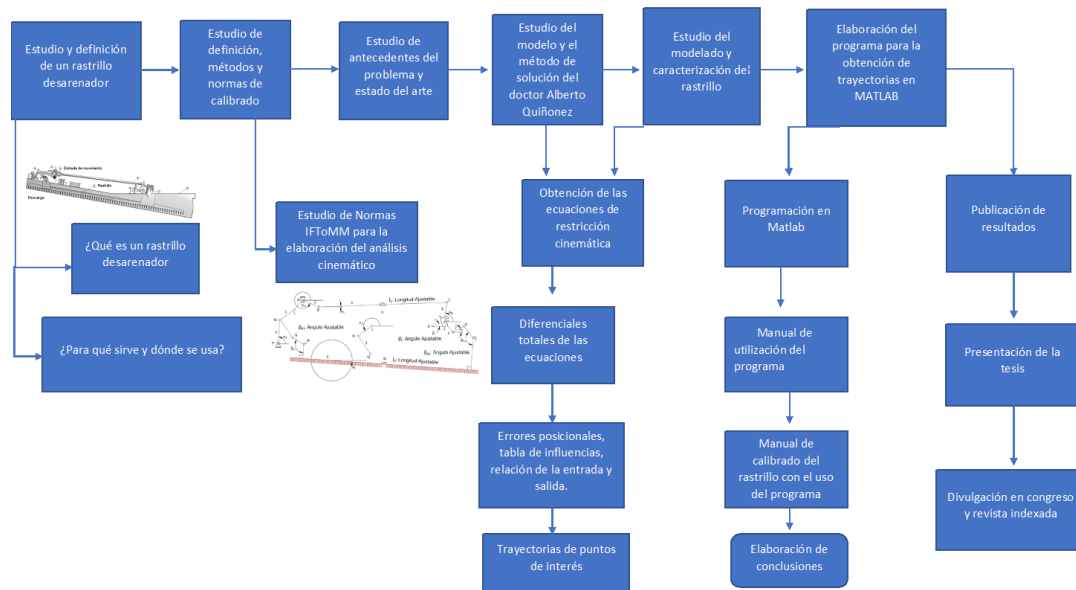


Figura 2: Diagrama representativo del proceso de trabajo de tesis.

Como se aprecia en la Figura 2, el proceso que se llevó a cabo para alcanzar los objetivos inicia con entender los conceptos básicos del problema a resolver, luego se aborda el análisis y síntesis del mecanismo hasta obtener la influencia de todos los parámetros calibrables con la trayectoria de movimiento del mecanismo. Después, se plasmó todo el análisis en un programa en MATLAB que le permitirá al responsable de mantenimiento tener el algoritmo necesario para calibrar la máquina. MATLAB se eligió como programa debido a que es un software de fácil implementación matemática con respecto a otros programas en lenguajes como C, C++, etc. Pues, estos programas carecen de una librería matemática extensa. Por último, se detalló un manual de utilización del programa y se publican los resultados obtenidos.

El presente trabajo es el resultado de todo el proceso de investigación de tesis. Este está organizado por capítulos, divididos por sus diferencias en cuanto a finalidad y contenido. Inmediatamente después de la introducción, en el capítulo 1, se describen los conceptos teóricos básicos para comprender el lenguaje técnico y las generalidades de la tesis.

En el capítulo 2, se describe el mecanismo, se da a conocer el esquema cinemático del mecanismo, se plantea las cantidades y nombres de los elementos cinemáticos, se define las entradas y las salidas del sistema mecánico, se encuentran las ecuaciones de restricción y se obtienen las trayectorias de salida para distintos ajustes de los parámetros geométricos calibrables, se presentan los diferenciales totales y se dan consideraciones previas al análisis de sensibilidad.

En el capítulo 3 se documenta la realización del análisis de sensibilidad de los parámetros geométricos calibrables con respecto a los cambios en la trayectoria del punto O .

En el capítulo 4 se propone un procedimiento de calibración que usa la información obtenida en la tesis para calibrar el mecanismo.

Por último, en la sección de anexos, se encuentra el manual de usuario del programa de calibración del rastrillo desarenador propuesto en este trabajo, la descripción de los códigos computacionales y los comprobantes de las diferentes publicaciones resultantes de la investigación.

Capítulo 1

Marco teórico

En este capítulo se enuncian las definiciones involucradas en el modelo del rastrillo desarenador y su calibración.

1.1. Calibración

Para empezar, se necesita definir el término: “Calibración”. Este se definirá como ajustar, con la mayor exactitud posible, las variables de entrada para que las variables de salida se correspondan con un patrón de referencia deseada.

En el campo de la robótica, por ejemplo, la calibración de robots [8] consiste en identificar los parámetros geométricos en orden de mejorar la precisión de la posición actual del robot con respecto a la posición deseada. Los pasos para alcanzar este objetivo pueden ser dividido en cinco etapas.

1. Determinación del modelo cinemático por medio de ecuaciones no lineales.
2. Adquisición de datos.
3. Optimización o identificación de parámetros geométricos.
4. Evaluación del modelo.
5. Identificación de las fuentes de error e implementación de modelos de corrección.

La primera fase es determinar el modelo cinemático. Ello, permite obtener ecuaciones que relacionan las variables de los pares cinemáticos del mecanismo con la posición final. No es tan sencillo obtener un modelo apropiado que garantice la precisión óptima del sistema. Por ejemplo, en un mecanismo paralelo, el efector final de posición está dada por expresiones matemáticas conocidas como ecuaciones de restricción, estas están en función de m parámetros geométricos de las mediciones obtenidas en la posición y n parámetros del proceso de obtención de datos de las posiciones articulares, con $n, m = 1, 2, \dots, N$. Por cada N poses de calibración existirán N ecuaciones de restricción. La solución de este sistema no lineal, es usualmente obtenido, en la práctica, por medio de métodos numéricos. Si N es muy grande, la complejidad del sistema se incrementa, lo que conlleva a demandar mayores recursos computacionales. Por otro lado, si el mecanismo a calibrar lo permite, es posible también, obtener el modelo

cinemático de forma algebraica. Por ejemplo, en el caso de esta tesis, se realiza un análisis algebraico por medio de análisis de mecanismos planos con articulaciones rotatorias para obtener el modelo cinemático de calibración. En cualquier caso, al generar el modelo cinemático pueden afectar ciertas consideraciones al comportamiento del mismo. Por ello, un modelo de alto grado de precisión debe considerar estos parámetros.

Una de estas consideraciones cinemáticas son los errores geométricos. Los errores geométricos pueden aparecer por causa de errores de manufactura en componentes, o bien, por bajas tolerancias de fabricación. Otra consideración importante son los errores no geométricos. Estos pueden aparecer por causa de juego, transmisión de engranes, fricción, gravedad, temperatura o deformaciones. Los modelos no geométricos tratan de predecir y compensar estos errores.

Una vez obtenido el modelo matemático, es necesario realizar la adquisición de datos, esta se puede dividir en dos tipos de metodologías generales que se diferencian de acuerdo con si las herramientas tienen contacto con el mecanismo a calibrar y los que no. Estos métodos pueden llamarse directos y externos respectivamente. La capacidad de medir el sistema de referencia global del mecanismo que va a ser calibrado, usualmente determina el método de adquisición de datos.

En métodos directos, los sensores más utilizados son los sensores lineales ópticos (para medir la elongación del actuador), los sensores ópticos rotativos (para medir motores de rotación angular), transformadores diferenciales variables lineales (LVDT), sensores de fuerza-torque (para la calibración dinámica). La precisión de un sensor óptico lineal comúnmente se encuentra $\pm 0.5 \mu\text{m}$ y el sensor rotativo se tiene ± 1 arco segundo de error en promedio. Los LVDTs presentan un rango de medición que está por debajo de los 0.5 m. Sin embargo, su resolución, aunque limitada por la instrumentación de su señal, esta en el orden de los nanómetros. En cuanto a los sensores de fuerza-torque son usados para medir las fuerzas en los eslabones de los mecanismos. Estos dispositivos presentan un intervalo de medición promedio cuyo mínimo valor es 6 mN para fuerza y 30 mN.mm para torque.

Los dispositivos externos típicamente usados en la calibración son: camaras, sensores en 3D [9], seguidores láser, máquinas de medición de coordenadas (CMM) o autocolimadores. Camaras y autocolimadores no se encuentran en contacto con el mecanismo a calibrar. Los CMMs ofrecen gran resolución y precisión (en el orden de los micrómetros). En cuanto a los seguidores de láser, su precisión es cerca de $10 \mu\text{m}$. Para los CMMs un típico rango de medición es 900 mm x 1200 mm x 700 mm y arriba de 40 metros de radio en un seguidor láser. En el caso de un autocolimador, la resolución es de 0.1 arco segundos y la precisión esta cerca de los 0.2 arco segundos. Cada metodología de adquisición tienen características que determinan su uso. Por ejemplo, las medidas hechas con un CMM toman mucho tiempo en comparación con medidas tomadas con los otros métodos presentados.

EL tercer paso de la optimización o identificación de parámetros geométricos tiene como objetivo buscar los valores óptimos de todos los parámetros geométricos incluidos en el modelo que minimizan el error de posición de salida del mecanismo. El problema de optimización puede ser formulado como un problema lineal de mínimos cuadrados. De esta forma, los parámetros geométricos medidos en la práctica se pueden utilizar para ingresarlos en el modelo cinemático.

El modelo cinemático obtenido, deberá ser evaluado con los parámetros geométricos identificados previamente optimizados.

Para terminar el proceso de calibración, un modelo de corrección debe ser obtenido para mejorar la precisión del mecanismo.

1.2. Rastrillo desarenador

1.2.1. Métodos de separación en minería (clasificación)

La clasificación separa las partículas minerales en varios productos en función de la velocidad con la que las partículas caen a través de un medio fluido [10]. Las técnicas de clasificación tienen en cuenta que las partículas de la misma densidad, pero de diferentes tamaños, se depositan en un fluido a diferentes velocidades. Estas diferencias en las tasas de sedimentación de las partículas pueden aprovecharse para efectuar una separación entre ellas. La clasificación se logra comúnmente, en el procesamiento de minerales, en partículas de tamaños que son demasiado finos para clasificar eficazmente mediante métodos de cribado.

Los dispositivos utilizados en los procesos de clasificación se denominan clasificadores. Ellos se utilizan, por ejemplo, durante la clasificación de los productos de la molienda o para separar el barro del líquido en procesos industriales.

La clasificación se puede separar en dos grupos:

- La clasificación seca.
- La clasificación húmeda.

En la clasificación seca, el fluido utilizado es el aire, mientras que en la clasificación húmeda, que es mucho más común, el fluido es acuoso. En las operaciones de procesamiento de minerales, la mayoría de las clasificaciones se llevan a cabo en entornos acuáticos debido a una mayor eficiencia. Sin embargo, dado que los minerales son heterogéneos por definición, la influencia de la densidad de partículas en las tasas de sedimentación es muy importante. Las partículas de mineral tienen una variedad de componentes con diferentes densidades.

Los clasificadores húmedos, a su vez, se pueden agrupar en dos categorías:

- Clasificadores tipo gravitacional.
- Clasificadores centrífugos.

Se pueden definir dos tipos gravitacionales según la forma en que las partículas se asientan a diferentes velocidades:

- Clasificadores hidráulicos.
- Clasificadores de sedimentación.

Los clasificadores hidráulicos se caracterizan por la utilización de agua adicional a la del barro de alimentación ingresada, de manera que su dirección de flujo se oponga a la de las partículas sedimentadas. En estos dispositivos, las partículas en suspensión se introducen en una cámara de separación que tiene una base que consta de varios bolsillos. Las partículas se separan por contraste entre la velocidad de las partículas y la velocidad del agua. Por lo tanto, cada bolsa recoge partículas que tienen tasas de sedimentación mayores que las tasas de aumento del agua inyectada. La disposición y diseño del bolsillo y los bolsillos posteriores son tales que se recuperan progresivamente partículas más pequeñas porque las corrientes ascendentes se clasifican desde una velocidad relativamente alta, en el primer bolsillo, a una velocidad

relativamente baja en el último bolsillo. Las partículas más finas fluyen sobre el vertedero de descarga.

Los clasificadores hidráulicos pueden ser del tipo de asentamiento libre o de asentamiento impedido. Los métodos de asentamiento libre, sin embargo, rara vez se utilizan; son fáciles y tienen una gran capacidad, pero son claramente ineficientes en el dimensionamiento y la clasificación. Los clasificadores de sedimentación incluyen dos grupos:

- clasificadores no mecánicos.
- clasificadores mecánicos.

En los clasificadores de sedimentación no mecánicos, el objetivo principal es solo separar los sólidos de los líquidos. En consecuencia, a veces se utilizan como dispositivos de deshidratación en plantas de procesamiento a pequeña escala. Los clasificadores no mecánicos no son adecuados para una clasificación fina o si se requiere una alta eficiencia de separación. Por otro lado, los clasificadores mecánicos se utilizan principalmente en tratamientos de trituración en circuito cerrado y en la clasificación de materiales de plantas de lavado de minerales. Su diseño incluye un tanque de sedimentación y un mecanismo para eliminar los sólidos sedimentados del fondo del tanque. Los diferentes diseños de clasificadores se basan principalmente en el modo de extracción de los lodos de flujo inferior y de flujo vertical.

1.2.2. Rastrillo clasificador

Un rastrillo de desarenado, o clasificador de rastrillo (rake classifier) como se conoce más comúnmente en la literatura es uno de los primeros productos de Dorr-Oliver, originalmente inventado por el Dr. J.V.N. Dorr en 1900 [11].

Los equipos de clasificación que comprenden hidroseparadores o hidrociclones y clasificadores de rastrillo / tornillo se han utilizado para el lijado y lavado de arena en la industria de la alúmina durante más de 80 años.

En el proceso Bayer, la bauxita molida mezclada con una solución de sosa cáustica, se alimenta a autoclaves donde se realiza la digestión a alta temperatura y presión. La mayor parte de la alúmina se disuelve formando aluminato de sodio. El residuo insoluble, el llamado “lodo rojo” debe separarse de la solución y se lava para una máxima recuperación de la soda soluble. Esto se hace por decantación en contracorriente en espesadores y lavadoras de rastrillo, seguido frecuentemente por deshidratación final en filtros de tambor de descarga de rodillos. Después de la separación de la primera etapa, en hidroseparadores o hidrociclones, el subdesbordamiento de estas unidades tiene que ser licuado y lavado para máxima recuperación de soda soluble. Esto se logra en clasificadores de rastrillo o de tornillo o en hidrociclones.

En esencia, un clasificador de rastrillo, como se puede apreciar en la Figura 1.1, consta de una artesa rectangular inclinada, abierto en el extremo superior para la descarga de arena, con un rebosadero en el lado opuesto para la descarga del licor sólido. El accionamiento del mecanismo de rastrillo se coloca cerca del extremo superior del canal.

En funcionamiento, el clasificador de rastrillo siempre se llena con el material a clasificar hasta el nivel de desbordamiento, mientras que el tercio superior del fondo del tanque inclinado permanece por encima del nivel del líquido. El flujo de alimentación a la unidad es continuo. Las partículas más finas del licor, se drenan a través del vertedero de flujo vertical. Las partículas

más gruesas se depositan en el fondo de la cubeta y son transportadas por los rastrillos alternativos a lo largo del fondo, subiendo por las pendientes, hasta el extremo superior. Después de haber sido rastrillada por encima del nivel del líquido, la arena licuada está entrando en la plataforma seca. Con boquillas de lavado adicionales, la arena se puede lavar aquí para una recuperación óptima de soda soluble y se deshidratará aún más por la acción del rastrillo y la gravedad.

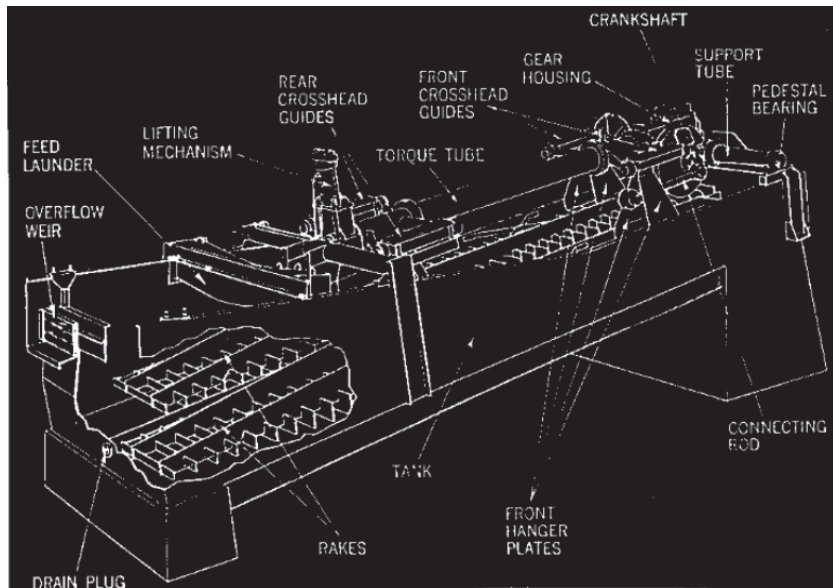


Figura 1.1: Diagrama esquemático de clasificador de rastrillo Dorr-Oliver.

Existen más tipos de clasificadores mecánicos en la industria, como el clasificador de tornillo. El clasificador de tornillo tiene una construcción de tanque inclinado similar al clasificador de rastrillo. Contiene un tornillo que se monta paralelo al fondo del tanque inclinado. El tornillo agita el licor en la piscina y transporta la arena sedimentada por el fondo del canal hasta el borde de descarga. El material a separar se introduce al nivel de la piscina, mientras que el licor se descarga desde un vertedero de desbordamiento. Dado que la parte inferior del tornillo está sumergida, se requiere un cojinete inferior sumergido o un sello del eje. Esta es una complicación de mantenimiento adicional en relación con el clasificador de rastrillo donde todos los cojinetes están por encima del nivel del líquido. Además, el cambio de hojas de rastrillo es más económico y sencillo que el reemplazo de las superficies duras del tornillo. Generalmente, se considera que los clasificadores de rastrillo son los clasificadores más eficientes, ya que tienen una agitación más efectiva en el área donde se realiza el lavado de arena. La acción recíproca (empuje intermitente) del mecanismo de rastrillo, combinada con la pendiente adecuada de la plataforma, proporciona las condiciones ideales para producir una arena bien lavada y sin agua.

1.3. Ciencia de máquinas y mecanismos

La ciencia de los mecanismos y las máquinas (MMS) ha sido el núcleo de la ingeniería mecánica, y de hecho de la ingeniería industrial, desde el comienzo de la práctica de la ingeniería

y particularmente en los tiempos moderno

Recientemente la teoría de Maquinas y mecanismos (TMM) se ha sustituido por la ciencia de los mecanismos y las máquinas (MMS). El término, ciencia de máquinas y mecanismos (MMS), se adoptó en la comunidad del IFToMM en el año 2000 tras un largo debate, con el objetivo de identificar mejor el contenido técnico moderno y una visión más amplia del conocimiento y la práctica con mecanismos. La definición de MMS se ha dado como: Ciencia del Mecanismo y de la Máquina: Rama de la ciencia que se ocupa de la teoría y la práctica de la geometría, el movimiento, la dinámica y el control de las máquinas, mecanismos y elementos y sistemas de los mismos, junto con su aplicación en la industria y otros contextos, por ejemplo, en la biomecánica y el medio ambiente [12].

Los avances en la Teoría de máquinas y mecanismos (TMM), o como se designaría después ciencia de los mecanismos y las máquina, han estimulado la cooperación en todo el mundo a varios niveles. Uno de los resultados más relevantes ha sido la fundación del IFToMM en 1969 El IFToMM se fundó como una Federación de organizaciones territoriales basada en la actividad de individuos dentro de un marco familiar, con el objetivo de facilitar la cooperación y el intercambio de opiniones y resultados de investigación en todos los campos del TMM. El IFToMM se fundó como Federación Internacional para la Teoría de los Mecanismos y Máquinas en Zakopane, Polonia, el 29 de septiembre de 1969 durante el Segundo Congreso Mundial de TMM (Teoría de los Mecanismos y las Máquinas).

La primera reunión oficial de la Comisión de "Normalización de la Terminología" se celebró el 18 de septiembre de 1971 durante el tercer Congreso Mundial sobre Teoría de Máquinas y Mecanismos en Kupari, Yugoslavia. De acuerdo con los Estatutos y Reglamentos del IFToMM, el objetivo de la Comisión objetivo era, desde el principio, establecer una terminología específica y unitaria para la MMS [13].

Recientemente, la IFToMM cambio su nombre para llamarse actualmente: Federación internacional para la promoción de la ciencia de mecanismos y máquinas. Dicha organización, provee información referente a la terminología de la MMS en su página de internet [14]. Por ello, se enuncian a continuación los términos principales en el área de máquinas y mecanismos. Dicha terminología es relevante para la comprensión de este trabajo de tesis.

- Mecanismo: Sistema restringido de cuerpos diseñado para convertir los movimientos y fuerzas de uno o varios cuerpos en movimientos y fuerzas de los cuerpos restantes.
- Análisis del mecanismo: Estudio de las propiedades topológicas, cinemáticas o dinámicas de un mecanismo determinado.
- Cinemática: Rama de la mecánica teórica que se ocupa de la geometría del movimiento, independientemente de las causas que lo producen.
- Eslabón: Cuerpo sólido como elemento de mecanismo, que tiene uno o más pares cinemáticos con otros cuerpos.
- Par cinemático: Conexión entre dos eslabones que restringe su movimiento relativo.
- Coordenada generalizada: Una de un conjunto de variables independientes que determinan de forma única la configuración de un sistema.

- **Parámetro:** Valor especial de una cantidad de un sistema que describe o determina la propiedad física, la característica o el comportamiento del sistema o de su parte, por lo que el valor puede ser una constante o puede variar de forma discreta o continua.

1.3.1. Método de análisis cinemático para mecanismos planos basados en ecuaciones de restricción

Todos los mecanismos están contruidos por elementos de máquina que, como una aproximación, pueden ser vistos como cuerpos rígidos ejecutando movimientos sujetos a condiciones de restricción cinemática. Esto, puede ser expresado como una serie de ecuaciones de restricción bajo dos tipos de variables; las coordenadas generalizadas q_i y los parámetros geométricos p_j . Estas ecuaciones pueden ser escritas de la forma siguiente: $\phi_i(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_m) = 0$, donde n es el número de coordenadas generalizadas y m es el número de parámetros geométricos.

En el caso de la robótica, por ejemplo, el análisis cinemático se puede dividir en dos tipos: directo e inverso. El análisis primero permite estudiar el posicionamiento del extremo final de los eslabones de un mecanismo conociendo la evolución de las coordenadas articulares o generalizadas y los parámetros geométricos. Para resolver este problema, existen metodologías como Denavit-Hartenberg para obtener la cinemática directa de un mecanismo complejo, como en el caso de los exoesqueletos [15]. También, cuando el mecanismo se basa en eslabones con grados de libertad que permitan rotaciones, se utilizan métodos de solución por matrices de rotación con ángulos de Euler. Esto se aplica al modelar una mano robótica [16]. Por otro lado, encontrar la cinemática inversa es lo opuesto de la directa, puesto que esta determina las coordenadas generalizadas con base en los parámetros geométricos y la trayectoria del eslabón final. Para ello, se usan métodos el método de Raghavan y Roth para obtener simbólicamente una matriz cuadrada. El determinante de esta matriz arroja el polinomio característico del manipulador en una de las variables cinemáticas [17].

En el caso de mecanismos planos, como el de este trabajo de tesis, para encontrar las coordenadas generalizadas con base en los parámetros geométricos y la coordenada generalizada de entrada, se debe dividir el mecanismo en secuencia de sub-problemas que implican diferentes bucles cerrados. Cada sub-problema consiste en encontrar todas las configuraciones de un mecanismo plano cerrado de cuatro barras.

En general, los métodos de análisis cinemático que se encuentran en la literatura adoptan, ocasionalmente, diferentes notaciones, lo que trae problemas de interpretación. Por lo anterior, se recomienda unificar criterios para normalizar el proceso de análisis [18]. Por ello, en cuanto a la nomenclatura en general ocupada en el presente trabajo, se describe en la Tabla 1.1 la designación de algunos símbolos generales que se encuentran dentro del presente escrito, y su correspondiente significado. Además, se designa la tipografía en negrita como vector.

| Simbología | Descripción |
|---------------------|---|
| A, B, ... | Pares Cinemáticos. |
| a_i | Coordenada x de un par cinemático en el bastidor medida con respecto a A. |
| b_i | Coordenada y de un par cinemático en el bastidor medida con respecto a A. |
| l_i | Longitud del eslabón i -ésimo. |
| l_{ij} | Longitud j -ésima del eslabón i -ésimo. |
| p_i | Parámetro geométrico i -ésimo. |
| q_i | i -ésima oordenada generalizada. |
| β_i | Ángulo constante o calibrable i -ésimo. |
| β_{ij} | ángulo j -ésimo constante o calibrable del eslabón i -ésimo. |
| φ_i | Orientaión angular o coordenada generalizada del eslabón i -ésimo. |
| $l_{o)Ax}$ | Elemento del vector de coordenada x del punto O con respecto a A. |
| $l_{o)Ay}$ | Elemento del vector de coordenada y del punto O con respecto a A. |
| $\mathbf{l}_{o)Ai}$ | Vector horizontal del punto O con respecto a A. |
| $\mathbf{l}_{o)Aj}$ | Vector vertical del punto O con respecto a A. |

Cuadro 1.1: Sumario de simbolos generales usados en la nomenclatura del documento.

Es oportuno mencionar que el conjunto de ecuaciones de restricción forman un tensor de rango uno. En el caso de un sistema de un grado de libertad donde n coordenadas son usadas, $n - 1$ ecuaciones de restricción deben de ser encontradas. Si lo anterior ocurre, se encuentra una coordenada de entrada y el determinante del jacobino es construido a base de las derivadas parciales formadas con respecto a las $n - 1$ coordenadas, la condición necesaria y suficiente para la independencia de las ecuaciones de restricción es: $J = \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{q}_k} \neq 0, i, k = 1, 2, \dots, n - 1$ en cada mecanismo dado. En el caso general del análisis cinemático, el problema es encontrar valores de coordenadas y sus derivadas temporales para solucionar estas ecuaciones. Alternativamente, en el caso del análisis cinemático, existe una necesidad de encontrar un mecanismo que satisfaga las características predeterminadas de movimiento y los parámetros geométricos son mostrados como variables en las mismas ecuaciones. Igualmente la sensibilidad de un mecanismo dado para las tolerancias de manufactura puede ser investigado por el cálculo de las derivadas parciales de las ecuaciones de restricción.

1.4. Análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad puede ayudar considerablemente en el uso de modelos, proporcionando criterios objetivos de juicio para las diferentes fases del proceso de construcción de modelos: identificación y discriminación; calibración; validación. El análisis de sensibilidad se puede utilizar en la fase de construcción del modelo para identificar entradas irrelevantes: si las decisiones que repercuten en el proyecto son insensibles a los cambios en algún aspecto del modelo, entonces no es necesario modelar con detalle ese aspecto en particular [19]. En resumen, por todas las aplicaciones que se pueden llegar a utilizar, este es una herramienta multidisciplinaria que permite hacer análisis.

Existen muchas metodologías en el análisis de sensibilidad, por ejemplo, los métodos que

entran en la categoría de independientes y libres de modelo como el análisis de sensibilidad de tolerancias de Wendel publicado en 1984. Este método responde a la región de variación de las entradas del modelo para la cual la solución es estable, considerando incertidumbre en las entradas. Otros métodos de sensibilidad como las derivadas parciales (que puede ser uno de los primeros métodos de análisis de sensibilidad desarrollado) se pueden aplicar a cualquier mapeo de entrada-salida diferenciable. Es de hecho esta última metodología, la que se empleará en este trabajo, ya que el modelo resultante, al ser propio de la cinemática de mecanismos, produce una función no lineal continua y diferenciable propia de este tipo de análisis.

La herramienta matemática usada para el análisis de la influencia de los parámetros geométricos de entrada con respecto a la salida es el análisis de sensibilidad. Ya que, el análisis de sensibilidad proporciona información sobre la dependencia del sistema de los parámetros de diseño [20].

Las aplicaciones del análisis de sensibilidad de mecanismos abarca una gran área de oportunidad de desarrollo. Por ejemplo, en robótica, el análisis de sensibilidad permite estudiar la influencia de sus eslabones con respecto a los cambios del posicionamiento final. De esta manera, su estudio permite comparar dos diferentes diseños de un mismo tipo de robot. En este contexto se pueden comparar, en cuanto a rendimiento al posicionamiento, mecanismos paralelos redundantes como los robots de movimiento tipo Schönflies [21]. Otra de las aplicaciones del análisis de sensibilidad es el estudio de las tolerancias dimensionales de fabricación con respecto al posicionamiento de los mecanismos. Entre otras cosas, este estudio permite encontrar el intervalo de tolerancia de fabricación permitida para el eslabón de cierre, así se podrá asegurar que el mecanismo ensambla adecuadamente.

1.4.1. La influencia de las tolerancias de fabricación en el comportamiento cinemático de mecanismos

En el diseño, el problema que generalmente se hace presente es tener que predecir la influencia de las tolerancias de manufactura en la cinemática de mecanismos. El interés más frecuente es la variación de desplazamientos de las uniones que puede ser significativa, particularmente en el caso de cadenas cinemáticas grandes y manufactura de tolerancias económica, en orden de determinar las tolerancias apropiadas para las dimensiones funcionales de los mecanismos. Esto es necesario para encontrar la influencia que las tolerancias individuales tienen sobre las características generales de rendimiento. Tolerancias más liberales pueden ser asignadas a componentes que tienen relativamente poca influencia. A veces es económicamente viable o técnicamente imposible obtener la precisión requerida en la manufactura de los componentes del mecanismo. En tal caso, se deben agregar elementos ajustables a la cadena del mecanismo. Una detallada investigación de las tolerancias provee una buena guía para la selección de los miembros ajustables en su apropiada locación en la cadena cinemática del mecanismo [22].

En general, existen dos enfoques principales para estudiar el efecto de las tolerancias de fabricación sobre los errores de posición cinemática, estos son los métodos determinista y probabilista. El método determinista involucra valores fijos o restricciones que se utilizan para encontrar una solución exacta. Este tipo se utiliza cuando las tolerancias son conocidas y se va a determinar el error de posición más desfavorable. Por el contrario, los métodos probabilistas tratan con valores aleatorios que dan como resultado una respuesta probabilista. Los enfoques

probabilistas se usan cuando las dimensiones tienen algún tipo de distribución aleatoria y la probabilidad de estar en una banda de tolerancias es evaluado.

1.4.2. Ejemplo: Un sistema simple de un grado de libertad

Para mostrar un ejemplo, se considera un mecanismo de un solo grado de libertad. Aunque, estos conceptos aquí introducidos se pueden extender a mecanismos de varios grados de libertad. Este está sometido a restricciones holonómicas, es decir, que pueden expresarse como una relación finita entre coordenadas. Para una detallada descripción matemática del sistema suponga que M parámetros geométricos: p_1, p_2, \dots, p_M que representan longitudes, ángulos fijos, diámetros, etc., del mecanismo y N coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_N definen la posición instantánea de los eslabones y las uniones. En términos de lo siguiente, $N-1$ ecuaciones de restricción pueden ser planteadas, ya que el mecanismo en cuestión tiene 1 grado de libertad. En general, las ecuaciones de restricción tienen la siguiente forma:

$$\phi_k = \phi_k(p_1, p_2, \dots, p_M; q_1, q_2, \dots, q_N) = 0, \quad (1.1)$$

$$k = (1, 2, \dots, N-1).$$

Ahora, se elige un conjunto de parámetros p_i y coordenadas q_j a manera de hacer que la ecuación (1.1) represente las restricciones cinemáticas de manera simple. Es decir, que pueda ser fácilmente deducida del diagrama cinemático de la cadena cinemática del mecanismo. Al mismo tiempo, el número de los parámetros geométricos y las coordenadas generalizadas usadas, debe ser tal que permita reproducir con detalle la cinemática del mismo.

Cuando el problema es para determinar las características del movimiento, el primer conjunto de parámetros geométricos p_i , de la ecuación (1.1) son constantes y el segundo conjunto, las coordenadas q_i y sus derivadas temporales son desconocidas.

Es obvio decir que el conjunto de ecuaciones de restricción debe ser linealmente independiente, es decir, el determinante de la matriz jacobiana de la ecuación (1.1) debe ser diferente de cero.

La variación de las ecuaciones de restricción se muestra en la ecuación (1.2).

$$\delta\phi_k = \delta\phi_k(p_1, p_2, \dots, p_M; q_1, q_2, \dots, q_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial\phi_k}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{j=1}^M \frac{\partial\phi_k}{\partial p_j} \delta p_j = 0, \quad (1.2)$$

donde todas las coordenadas q_i y los parámetros p_j son considerados como variables. Ahora en la ecuación (1.2) la variación p_j representa la tolerancia de manufactura de los componentes y las variaciones de las coordenadas q_i denota el correspondiente cambio en la posición (desplazamiento) de los eslabones y de las uniones, relativa a la posición de entrada especificada q_N . Dado que la coordenada de entrada es la referencia, el valor de $\delta q_N = 0$. En vista de lo anterior, la ecuación (1.2) se convierte en la ecuación (1.3).

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial\phi_k}{\partial q_i} \delta q_i = - \sum_{j=1}^M \frac{\partial\phi_k}{\partial p_j} \delta p_j \quad (k = 1, 2, \dots, N-1). \quad (1.3)$$

Esto produce un conjunto de $N-1$ ecuaciones que pueden ser expresados en forma de matriz como se ve en la ecuación (1.4).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_k}{\partial q_i} \end{bmatrix} [\delta q_i] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_k}{\partial p_j} \end{bmatrix} [\delta p_j] \quad (i, k = 1, 2, \dots, N-1)$$

$$(j = 1, 2, \dots, M), \quad (1.4)$$

desde donde se deben obtener los errores cinemáticos en la posición de los componentes mecánicos individuales debido a las tolerancias de manufactura δp_j sobre las dimensiones funcionales de los componentes. La solución de (1.4) es (1.5).

$$\delta q_i = - \left[\frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \phi_k}{\partial p_j} \right] [\delta p_j] = -[\mathbf{E}_{i,j}] [\delta p_j] \quad (1.5)$$

($i, k = 1, 2, \dots, N - 1$)
($j = 1, 2, \dots, M$).

Si únicamente interesa el error cinemático de salida, las ecuaciones de restricción deben ser resueltas para obtener la salida de la coordenada q_1 explícitamente como una función de los parámetros geométricos p_i y la coordenada de entrada q_N , donde:

$$q_1 = F(p_1, p_2, \dots, p_M; q_N). \quad (1.6)$$

La diferencial total de la ecuación (1.6) es (1.7).

$$\begin{aligned} \delta q_1 &= \sum_{i=1}^M \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial F}{\partial q_N} \delta q_N \\ &= \frac{\partial F}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2} \delta p_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_M} \delta p_M. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Esta última expresión queda de esa forma debido a que $\delta q_N = 0$. En la ecuación (1.7) los términos $\frac{\partial F}{\partial q_i} = \epsilon_i$ y representan cuantitativamente el efecto de la variación de los parámetros geométricos individuales sobre la precisión cinemática del movimiento de la salida. Por esta razón, estos términos variables son llamados coeficientes de influencia.

Más comúnmente, sin embargo, se usa una solución numérica. En este caso, se usa la definición de la derivada parcial para evaluar la influencia de los coeficientes:

$$\epsilon_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(p_1, p_2, \dots, p_i + h, \dots, p_M; q_N) - F(p_1, p_2, \dots, p_M; q_N)}{h}, \quad (1.8)$$

o bien,

$$\epsilon_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \approx \frac{F(p_1, p_2, \dots, p_i + h, \dots, p_M; q_N) - F(p_1, p_2, \dots, p_M; q_N)}{h}. \quad (1.9)$$

En la fórmulas (1.8) y (1.9), $F(p_1, p_2, \dots, p_M; q_N)$ representa el valor nominal de la salida de la coordenada q_1 correspondiente a un valor fijo de la coordenada de entrada q_N . Por otro lado, $F(p_1, p_2, \dots, p_i + h, \dots, p_M; q_N)$ produce el valor cambiado de q_1 dado por un cambio en el i -ésimo parámetro geométrico de p_i a $p_i + h$. El valor de h puede ser dado arbitrariamente siempre y cuando: $h \ll p_i$. Normalmente h es elegido para ser de la misma magnitud de la tolerancia en p_i .

Para la manufactura de tolerancias de las dimensiones funcionales del mecanismo, las tolerancias bilaterales están especificadas en la norma británica BS EN 20286 [23] y se nombran como: js o JS.

La variación de los parámetros geométricos δp_j pueden ser consideradas como:

$$\delta p_j = \pm \frac{1}{2} T_j, \quad (1.10)$$

donde T_j denota la zona de manufactura total de la dimensión p_j . Los grados de tolerancia IT, están usualmente en el rango js7 a js13 y se ha llegado a ellos gracias al resultado de la investigación de tolerancias y se encuentran tabulados en diferentes normas. Las normas de

índices de calidad:UNE 4-040-81 (ISO 286:1988), ANSI B4.2-1978 (Americana), EN 20286:1993 (europea), describen las tolerancias dimensionales comprendidas entre 0 y 500 mm. Las normas ISO (International Organization for standarditation) son documentos que especifican requerimientos que pueden ser empleados en organizaciones para garantizar que los productos y/o servicios ofrecidos cumplan su objetivo. Las norma ISO 286-1:2010 y ISO 286-2:2010 son las normas internacionales actuales sobre tolerancias lineales. En dichas normas, se describen bases de tolerancias, desviaciones y ajustes. También, muestran la tabla de clases de tolerancia estándar y desviaciones límite para agujeros y ejes.

Capítulo 2

Análisis cinemático

En este capítulo se bosqueja el análisis cinemático del mecanismo mediante el uso del método general de análisis cinemático de mecanismos planos basados en ecuaciones de restricción [18].

Para el análisis cinemático y el desarrollo del modelo del rastrillo se utilizó una nomenclatura apegada a las reglas de la IFToMM [24] para la designación de las coordenadas generalizadas que dan cuenta la posición angular de los eslabones en cada instante. Por ello, se especifica que para las longitudes se sigue la lógica mostrada en la Figura 2.1.

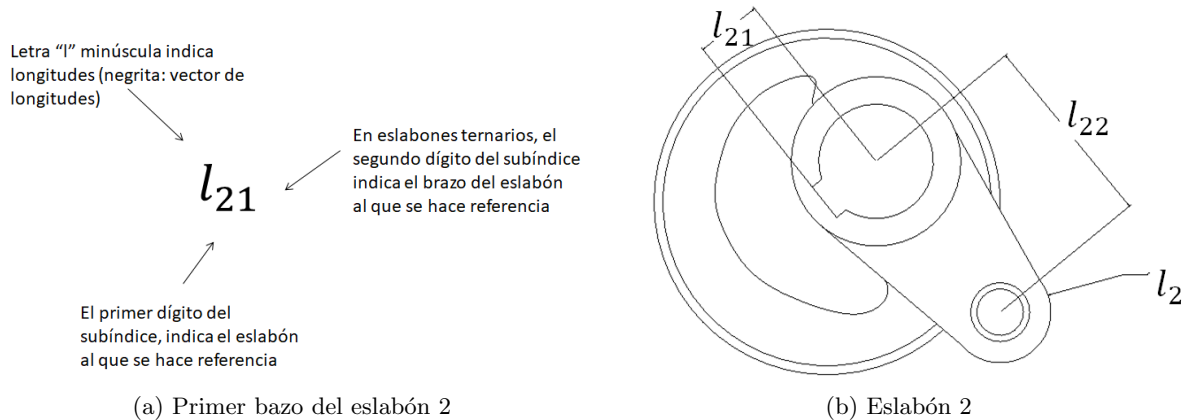


Figura 2.1: Nomenclatura de longitudes funcionales en eslabón 2.

Para el caso de los ángulos, se hace la distinción entre variables y constantes y dicha representación se muestra en la Figura 2.2.

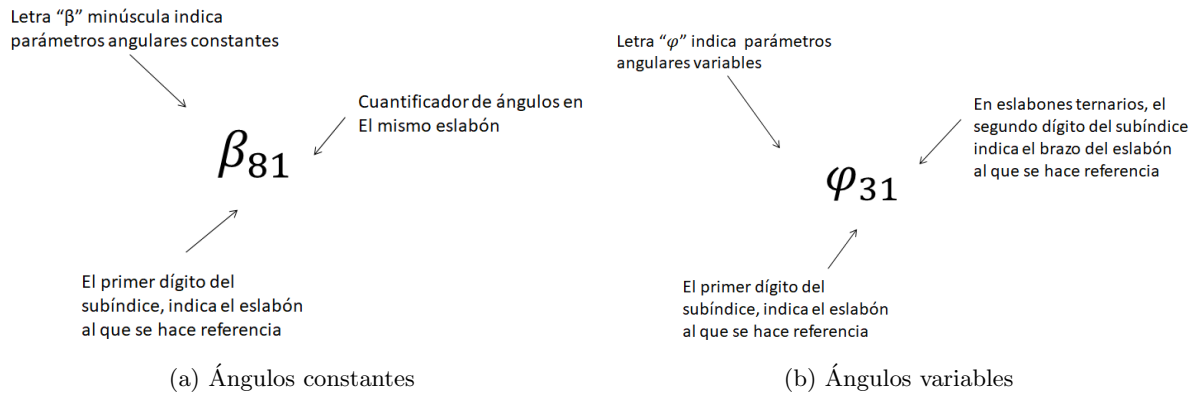


Figura 2.2: Nomenclatura de ángulos constantes y variables.

Para puntos específicos se hace una distinción y se referencia desde donde se mide la ubicación de dicho punto. Dicha regla se ve en la Figura 2.3.

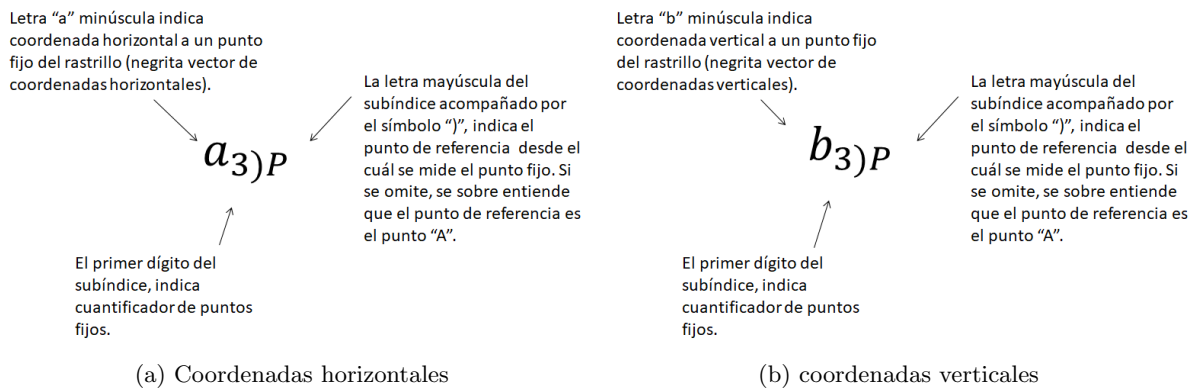


Figura 2.3: Nomenclatura de las coordenadas horizontales y verticales de los puntos fijos.

Los vectores se especifican en negrita. Además, la letra griega δ indica la operación diferenciación total.

2.1. Restricciones cinemáticas

Este mecanismo está formado por siete eslabones móviles más un bastidor y veinticinco parámetros geométricos funcionales, cinco de los cuales son ajustables. Los ajustes permiten controlar la luz entre el rastrillo y el fondo de la cuba inclinada por donde corre el licor rojo de la etapa de desarenado del proceso Bayer para la obtención de alúmina. La separación ha de estar dentro del rango de 5 a 15 mm. Si la distancia es más pequeña, los rastrillos pueden chocar con el fondo de la cuba, y si es más grande el desarenado es ineficiente. Además, si la calibración está bien ejecutada, ningún eslabón chocará con otro durante la operación.

Como ya se dijo, El rastrillo clasificador estudiado en este trabajo, consiste de siete eslabones móviles más un bastidor. De esta forma, se tienen 7 coordenadas generalizadas, que se muestran en la expresión (2.1)

$$\mathbf{q} = [\varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4 \ \varphi_5 \ \varphi_6 \ \varphi_7 \ \varphi_8]^T, \quad (2.1)$$

y 5 parámetros de calibración, que se indican en el vector (2.2).

$$\mathbf{p}_c = [l_5 \ \beta_1 \ l_8 \ \beta_{81} \ \beta_{82}]^T, \quad (2.2)$$

donde \mathbf{p}_c representa el vector de parámetros geométricos calibrables.

Un esquema a escala del eslabonamiento y de la cuba fija visto desde el lado motor, se representa en la Figura 2.4. El elemento de salida del mecanismo es propiamente el rastrillo desarenador, numerado como 8. El rastrillo, de 7 m de largo, dispone de sesenta y nueve dientes de barrido a lo largo de toda su longitud. Todas las articulaciones A, B, C, D, G, F, L, N, P y Q son rotatorias. En particular, las tres articulaciones A, P y D son los pivotes fijos del mecanismo durante el funcionamiento.

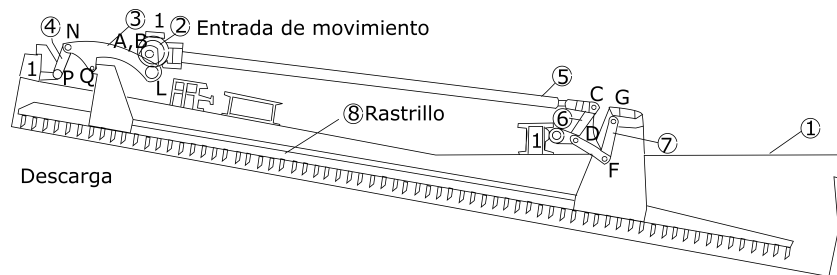


Figura 2.4: Los ocho eslabones y las diez articulaciones efectivas del rastrillo desarenador.

Para tener una idea general de las dimensiones de los parámetros geométricos con los cuales se trabaja en este documento, se presenta una tabla que condensa las medidas en milímetros. En dicha tabla se puede observar que las medidas máximas superan los 5 metros de longitud.

| Símbolo | Dimensión | Unidad |
|--------------|-----------|--------|
| a_3 | 4300 | mm |
| b_3 | -890 | mm |
| l_1 | 182.5 | mm |
| β_1 | 0 | grados |
| l_5 | 4600 | mm |
| l_{61} | 397 | mm |
| l_{21} | 31 | mm |
| l_4 | 300 | mm |
| l_{31} | 910 | mm |
| l_{32} | 332 | mm |
| l_{81} | 120 | mm |
| l_{82} | 700 | mm |
| β_2 | 90 | grados |
| β_3 | 25 | grados |
| β_6 | 90 | grados |
| l_8 | 5450 | mm |
| l_{83} | 1050 | mm |
| l_{84} | 185 | mm |
| β_{81} | 90 | grados |
| β_{82} | 90 | grados |
| l_7 | 400 | mm |
| l_{62} | 397 | mm |
| l_{22} | 191 | mm |
| a_2 | -910 | mm |
| b_2 | -240 | mm |

Cuadro 2.1: Dimensiones de los parámetros geométricos.

En la carrera de avance, los dientes del rastrillo se sumergen en el líquido lleno de barro que corre hacia abajo por el plano inclinado de la cuba, mientras que el rastrillo represa y arrastra hacia arriba en dirección de la boca de descarga, el barro que desciende. Una vez barrido el barro, el rastrillo retrocede sin trabajar para volver a posicionarse al inicio de la carrera de avance y volver a repetirse el proceso con una frecuencia de 15 ciclos por minuto.

2.1.1. Análisis del mecanismo

En la Figura 2.5 se muestra el esquema cinemático del mecanismo.

Se han enumerado con números los ocho elementos constituyentes del eslabonamiento y con letras mayúsculas los pares cinemáticos. La numeración empieza por el eslabón bastidor, numerado como 1 y sigue con el eslabón ternario de entrada, numerado como 2. El eslabón 3 es una biela ternaria, el 4 es un eslabón binario pivotado al bastidor en P. El 5 es un largo eslabón binario acoplador de 5 metros de longitud. El eslabón 6, es un eslabón ternario pivotado fijo al bastidor mediante un par especial rotatorio D que puede posicionarse, si se desea, a una nueva

posición fija a lo largo de un camino semicircular con centro en E, y el eslabón 7 es una biela corta. El último eslabón es el rastrillo 8 que avanza y retrocede prácticamente en traslación curvilínea pura recíprocante para ejecutar el trabajo de barrido de sedimentos.

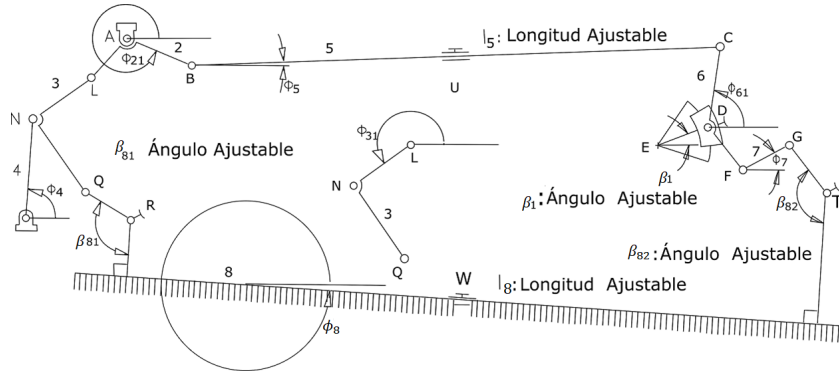


Figura 2.5: Levantamiento cinemático del rastrillo

2.1.2. Grafo del mecanismo

A partir del esquema de levantamiento cinemático se puede obtener el grafo del mecanismo.

En la Figura 2.6, se observan los circuitos cinemáticos en los que se dividió el mecanismo para su análisis.

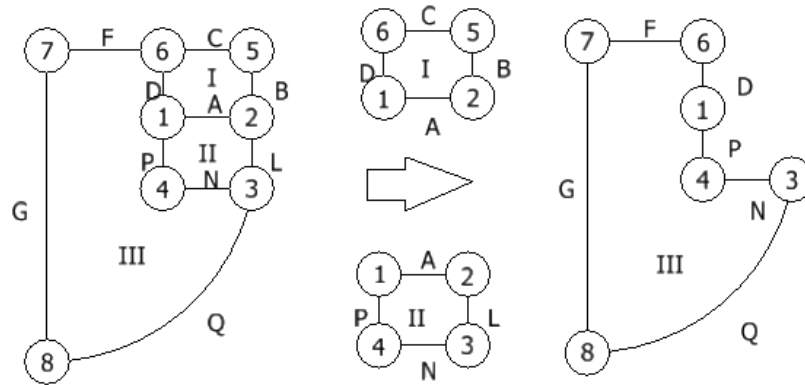


Figura 2.6: Grafo del mecanismo

De acuerdo con el grafo, el eslabón 2 se conecta al bastidor mediante el par A, a 3 mediante el par L y a 5 mediante B. El eslabón 3, además de estar vinculado a 2 por el par rotatorio A, se vincula a 4 por medio del par rotatorio P, y al rastrillo 8 por el par rotatorio Q. El eslabón 5, además de estar conectado con 2 por B, se conecta a 6 por el par rotatorio C. Por otra parte, además de estar conectado a 5 por C, el eslabón 6 está pivotado al bastidor mediante la articulación reposicionable D y al eslabón 7 mediante el par F. Finalmente, el rastrillo desarenador 8, está vinculado al eslabón 3 por Q y al eslabón 7 por G. En este esquema, E, R, T, U y W no son articulaciones durante el funcionamiento. E sirve para ajustar el ángulo β_1

en el bastidor. R y T sirven para ajustar los ángulos β_{81} y β_{82} en el eslabón 8 y U y W para ajustar las longitudes de los eslabones 5 y 8.

2.1.3. Movilidad del mecanismo

Como no hay pares superiores, la movilidad del mecanismo [4] está dada por la ecuación (2.3).

$$m = 3(n - 1) - 2f_1, \quad (2.3)$$

donde m es la movilidad del mecanismo, n es el número de los eslabones representados por números encerrados en el grafo y f_1 son la cantidad de pares cinemáticos representados por letras en este mismo grafo.

Si n y f_1 se sustituyen en la expresión (2.3), entonces $m = 1$. Lo que implica que el mecanismo tenga movilidad 1 es que, si se conoce un sólo dato cinemático de posición de cualquiera de los eslabones, se puede determinar otra posición de cualquier otro eslabón en función del primero. En este caso, se considera como único dato conocido, el ángulo antihorario que forma el elemento de entrada con el eje horizontal positivo.

2.2. Ecuaciones de restricción

Cada circuito cinemático produce ecuaciones de restricción, cuya solución es una función de trayectoria correspondiente a el vector de coordenadas generalizadas.

El ángulo φ_2 es la entrada del mecanismo, por lo que se debe modelar el motor de entrada. Para este trabajo se plantea representar la dinámica de esta por un vector de puntos dentro de un intervalo de cero a 2π con un paso de 0.01 grados.

Como el elemento 2 tiene un par de eslabones, para identificarlos, el primero de ellos con respecto a la horizontal, será el eslabón 21 y el que esta a 90 grados después, será el 22. De la misma manera, el ángulo medido desde la horizontal hasta el eslabón 21 será φ_{21} y el siguiente será φ_{22} . Este mismo concepto se aplica para identificar otros eslabones binarios o ternarios.

El elemento de entrada 2, representado en la Figura 2.7, es una manivela doble, constituida por una excéntrica y una palanca.

2.2.1. Obtención del ángulo φ_{61}

Como se observa en la Figura 2.6, el primer circuito cinemático tiene los eslabones 1, 2, 5 y 6 y los pares cinemáticos A, B, C, D.

El eslabón 2 y los ángulos φ_{21} y φ_{22} , son las coordenadas generalizadas de entrada. Por lo que, las coordenadas generalizadas de salida son φ_{61} y φ_5 .

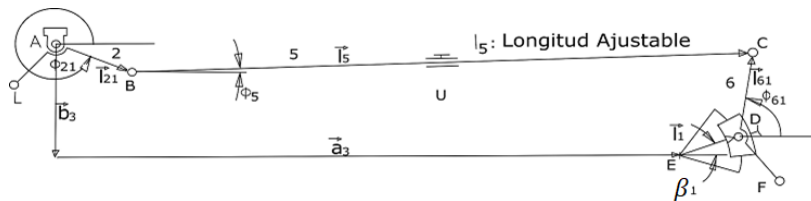


Figura 2.8: Primer circuito cinemático.

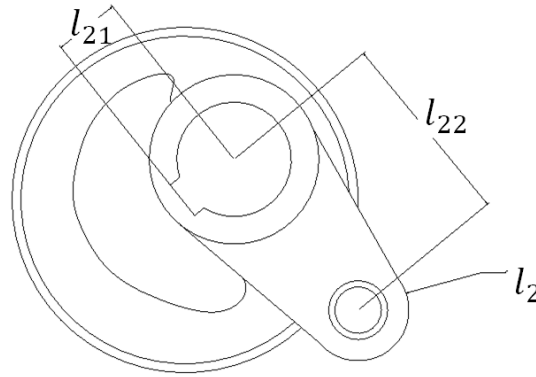


Figura 2.7: Geometría del eslabón ternario de entrada mostrando la excentricidad l_{21} y la palanca de longitud l_{22}

En la Figura 2.8, se presenta el diagrama esquemático del primer circuito cinemático. A partir de él, se pueden deducir las ecuaciones de lazo vectorial cerrado en el campo de las posiciones. La suma de todos los vectores posición medidos como se indica en la Figura 2.8 partiendo de A y regresando a A, es igual al vector nulo, por lo tanto, se puede escribir la expresión (2.4)

$$\mathbf{l}_{21} + \mathbf{l}_5 - \mathbf{l}_{61} - \mathbf{l}_1 - \mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

donde \mathbf{l}_{21} , \mathbf{l}_5 , \mathbf{l}_{61} , \mathbf{l}_1 , \mathbf{a}_3 , \mathbf{b}_3 representan los vectores de posición de los eslabones del circuito cinemático 1.

Debido a que el mecanismo trabaja en un plano, cada vector se puede descomponer en su componente horizontal y vertical. De esta forma se genera el sistema de ecuaciones indicado en (2.5) y (2.6)

$$l_{21} \cos \varphi_{21} + l_5 \cos \varphi_5 - l_{61} \cos \varphi_{61} - l_1 \cos \beta_1 - a_3 = 0, \quad (2.5)$$

$$l_{21} \sin \varphi_{21} + l_5 \sin \varphi_5 - l_{61} \sin \varphi_{61} - l_1 \sin \beta_1 - b_3 = 0. \quad (2.6)$$

Como se puede ver en la Figura 2.8 el vector \mathbf{l}_1 es constante en magnitud y dirección, ya que los puntos D y E están anclados al bastidor. El ángulo β_1 es de ajuste, es decir, una vez colocado en su lugar, no vuelve a cambiar de valor. El punto D corresponde a un elemento collarín que se mueve en una trayectoria circular y puede calibrar el origen del vector \mathbf{l}_{61} a partir del ángulo β_1 . Por lo anterior, los términos \mathbf{l}_1 , a_3 y b_3 se pueden considerar constantes y la suma de ambos se pueden renombrar como a_1 para el componente horizontal y b_1 para el componente vertical. Con esto, las expresiones (2.5) y (2.6) se puede sustituir por las ecuaciones (2.7) y (2.8)

$$l_{21} \cos \varphi_{21} + l_5 \cos \varphi_5 - l_{61} \cos \varphi_{61} - a_1 = 0, \quad (2.7)$$

$$l_{21} \sin \varphi_{21} + l_5 \sin \varphi_5 - l_{61} \sin \varphi_{61} - b_1 = 0. \quad (2.8)$$

Para resolver el sistema, se despeja el componente opuesto al que se desea encontrar. Como se desea obtener la coordenada generalizada φ_{61} , se despeja la coordenada generalizada φ_5 , como se señala en las expresiones (2.9) y (2.10)

$$l_5 \cos \varphi_5 = -l_{21} \cos \varphi_{21} + l_{61} \cos \varphi_{61} + a_1, \quad (2.9)$$

$$l_5 \text{sen} \varphi_5 = -l_{21} \text{sen} \varphi_{21} + l_{61} \text{sen} \varphi_{61} + b_1. \quad (2.10)$$

Se elevan (2.9) y (2.10) al cuadrado, obteniéndose (2.11) y (2.12)

$$(l_5 \cos \varphi_5)^2 = (-l_{21} \cos \varphi_{21} + l_{61} \cos \varphi_{61} + a_1)^2, \quad (2.11)$$

$$(l_5 \text{sen} \varphi_5)^2 = (-l_{21} \text{sen} \varphi_{21} + l_{61} \text{sen} \varphi_{61} + b_1)^2. \quad (2.12)$$

Se expanden ambos trinomios cuadrados del sistema (2.11) y (2.12) para obtener el sistema expresado en (2.13) y (2.14). Debido a la extensión de las expresiones, a partir de este momento se inicia un cambio de notación. En dicho cambio la función trigonométrica $\text{sen}(\varphi_i)$ se convierte en s_i y $\cos(\varphi_j)$ se transforma en c_j .

$$(l_5 c_5)^2 = (l_{21} c_{21})^2 + (l_{61} c_{61})^2 + a_1^2 - 2l_{21} l_{61} c_{21} c_{61} - 2a_1 l_{21} c_{21} + 2a_1 l_{61} c_{61}, \quad (2.13)$$

$$(l_5 s_5)^2 = (l_{21} s_{21})^2 + (l_{61} s_{61})^2 + b_1^2 - 2l_{21} l_{61} s_{21} s_{61} - 2a_1 l_{21} s_{21} + 2a_1 l_{61} s_{61}. \quad (2.14)$$

Se suman (2.13) y (2.14), lo cual conduce a (2.15)

$$(l_5 c_5)^2 + (l_5 s_5)^2 = (l_{21} c_{21})^2 + (l_{61} c_{61})^2 + a_1^2 - 2l_{21} l_{61} c_{21} c_{61} - 2a_1 l_{21} c_{21} + 2a_1 l_{61} c_{61} + (l_{21} s_{21})^2 + (l_{61} s_{61})^2 + b_1^2 - 2l_{21} l_{61} s_{21} s_{61} - 2a_1 l_{21} s_{21} + 2a_1 l_{61} s_{61}. \quad (2.15)$$

Aprovechando la identidad trigonométrica $(s)^2 + (c)^2 = 1$, se simplifica la expresión obtenida en (2.15), para llegar a (2.16)

$$(l_5)^2 = (l_{21})^2 + (l_{61})^2 + a_1^2 - 2l_{21} l_{61} c_{21} c_{61} - 2a_1 l_{21} c_{21} + 2a_1 l_{61} c_{61} + b_1^2 - 2l_{21} l_{61} s_{21} s_{61} - 2a_1 l_{21} s_{21} + 2a_1 l_{61} s_{61}. \quad (2.16)$$

Se divide cada término de (2.16) entre $2l_{21} l_{61}$ como se muestra en (2.17)

$$\frac{(l_5)^2}{2l_{21} l_{61}} = \frac{(l_{21})^2 + (l_{61})^2 + a_1^2 + b_1^2}{2l_{21} l_{61}} - c_{21} c_{61} - \frac{a_1}{l_{61}} c_{21} + \frac{a_1}{l_{21}} c_{61} - s_{21} s_{61} - \frac{b_1}{l_{61}} s_{21} + \frac{b_1}{l_{21}} s_{61}. \quad (2.17)$$

Operando algebraicamente la ecuación (2.17) se puede escribir (2.18)

$$\frac{(l_{21})^2 + (l_{61})^2 + a_1^2 + b_1^2 - (l_5)^2}{2l_{21} l_{61}} - c_{21} c_{61} - \frac{a_1}{l_{61}} c_{21} + \frac{a_1}{l_{21}} c_{61} - s_{21} s_{61} - \frac{b_1}{l_{61}} s_{21} + \frac{b_1}{l_{21}} s_{61} = 0. \quad (2.18)$$

Los términos constantes se sustituyen para acortar la expresión (2.18). Estos términos son k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , k_5 como se indica en las expresión (2.19)

$$k_1 = \frac{a_1}{l_{21}}, k_2 = \frac{a_1}{l_{61}}, k_3 = \frac{(l_{21})^2 + (l_{61})^2 + a_1^2 + b_1^2 - (l_5)^2}{2l_{21} l_{61}}, k_4 = \frac{b_1}{l_{21}}, k_5 = \frac{b_1}{l_{61}}. \quad (2.19)$$

De esta forma la ecuación (2.18) se sustituye por la ecuación (2.20)

$$k_3 - c_{21} c_{61} - k_2 c_{21} + k_1 c_{61} - s_{21} s_{61} - k_5 s_{21} + k_4 s_{61} = 0. \quad (2.20)$$

Se usan las identidades trigonométricas de la tangente mostradas en (2.21) y (2.22), con las cuales se puede llegar a la expresión (2.23)

$$c_{61} = \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2})}, \quad (2.21)$$

$$s_{61} = \frac{2 \tan(\frac{\varphi_{61}}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2})}. \quad (2.22)$$

Con la identidad trigonométrica, la ecuación (2.20) se sustituye por la ecuación (2.23)

$$k_3 - c_{21} \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2})} - k_2 c_{21} + k_1 \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2})} - s_{21} \frac{2 \tan(\frac{\varphi_{61}}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2})} - k_5 s_{21} + k_4 \frac{2 \tan(\frac{\varphi_{61}}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2})} = 0. \quad (2.23)$$

Se multiplica la expresión (2.23) por $(1 + \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2}))$ para obtener (2.24)

$$k_3(1 + \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2})) - c_{21}(1 - \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2})) - k_2 c_{21}(1 + \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2})) + k_1(1 - \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2})) - s_{21}(2 \tan(\frac{\varphi_{61}}{2})) - k_5 s_{21}(1 + \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2})) + k_4(2 \tan(\frac{\varphi_{61}}{2})) = 0. \quad (2.24)$$

Se expanden los términos de la expresión (2.24) de manera que se llega a la expresión (2.25)

$$k_3 + k_3 \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2}) - c_{21} + c_{21} \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2}) - k_2 c_{21} - k_2 c_{21} \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2}) + k_1 - k_1 \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2}) - s_{21}(2 \tan(\frac{\varphi_{61}}{2})) - k_5 s_{21} - k_5 s_{21} \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2}) + k_4(2 \tan(\frac{\varphi_{61}}{2})) = 0. \quad (2.25)$$

Se reagrupan los términos de la expresión (2.25) para obtener (2.26)

$$[k_3 - k_1 - k_2 c_{21} - k_5 s_{21} + c_{21}] \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2}) + [2k_4 - 2s_{21}] \tan(\frac{\varphi_{61}}{2}) k_3 + k_1 - k_2 c_{21} - k_5 s_{21} - c_{21} = 0. \quad (2.26)$$

Los términos de la ecuación (2.26) se renombran como se indica en la expresión (2.27).

$$\begin{aligned} k_a &= [k_3 - k_1 - k_2 c_{21} - k_5 s_{21} + c_{21}], \\ k_b &= [2k_4 - 2s_{21}], \\ k_c &= [k_3 + k_1 - k_2 c_{21} - k_5 s_{21} - c_{21}]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

La ecuación (2.26) con los cambios indicados en (2.27) se muestra en (2.28)

$$k_a \tan^2(\frac{\varphi_{61}}{2}) + k_b \tan(\frac{\varphi_{61}}{2}) + k_c = 0. \quad (2.28)$$

La solución cuadrática de la ecuación (2.28) se indica en (2.29)

$$\tan(\frac{\varphi_{61}}{2}) = \frac{-k_b \pm \sqrt{k_b^2 - 4k_a k_c}}{2k_a}. \quad (2.29)$$

Al despejar la coordenada generalizada φ_{61} de la expresión (2.29) se obtiene la expresión (2.30)

$$\varphi_{61} = 2 \arctan\left(\frac{-k_b \pm \sqrt{k_b^2 - 4k_a k_c}}{2k_a}\right). \quad (2.30)$$

Existen 2 posibilidades de colocación del mecanismo, se toma el resultado con signo negativo, debido a que el mecanismo real está armado en una configuración abierta. Se escribe en la ecuación (2.31) la expresión describe la coordenada generalizada φ_{61}

$$\varphi_{61} = 2 \arctan\left(\frac{-k_b - \sqrt{k_b^2 - 4k_a k_c}}{2k_a}\right). \quad (2.31)$$

2.2.2. Obtención del ángulo φ_5

A partir de la ecuación (2.4), se puede hacer el análisis para obtener la función correspondiente a el ángulo φ_5 .

Se despeja el término que contiene la coordenada generalizada φ_{61} , del sistema de ecuaciones (2.9) y (2.10) para obtener las expresiones (2.32) y (2.33)

$$l_{61}c_{61} = l_{21}c_{21} + l_5c_5 - a_1, \quad (2.32)$$

$$l_{61}s_{61} = l_{21}s_{21} + l_5s_5 - b_1. \quad (2.33)$$

Se eleva al cuadrado ambos miembros del par de ecuaciones de las expresiones (2.32) y (2.33) para obtener (2.34) y (2.35)

$$(l_{61}c_{61})^2 = (l_{21}c_{21} + l_5c_5 - a_1)^2, \quad (2.34)$$

$$(l_{61}s_{61})^2 = (l_{21}s_{21} + l_5s_5 - b_1)^2. \quad (2.35)$$

Se desarrolla ambos trinomios cuadrados del sistema (2.34) y (2.35) para llegar a las expresiones (2.36) y (2.37)

$$(l_{61}c_{61})^2 = (l_{21}c_{21})^2 + (l_5c_5)^2 + a_1^2 + 2l_{21}l_5c_{21}c_5 - 2a_1l_{21}c_{21} - 2a_1l_5c_5, \quad (2.36)$$

$$(l_{61}s_{61})^2 = (l_{21}s_{21})^2 + (l_5s_5)^2 + b_1^2 + 2l_{21}l_5s_{21}s_5 - 2b_1l_{21}s_{21} - 2b_1l_5s_5. \quad (2.37)$$

Se hacen operaciones algebraicas en las expresiones (2.36) y (2.37) para obtener (2.38)

$$l_{61}^2 = l_{21}^2 + l_5^2 + a_1^2 + b_1^2 + 2l_{21}l_5c_{21}c_5 - 2a_1l_{21}c_{21} - 2a_1l_5c_5 + 2l_{21}l_5s_{21}s_5 - 2b_1l_{21}s_{21} - 2b_1l_5s_5. \quad (2.38)$$

Se resta $(l_{61})^2$ a ambos lados de la ecuación (2.38) para obtener la expresión (2.39)

$$l_{21}^2 + l_5^2 + a_1^2 + b_1^2 - l_{61}^2 + 2l_{21}l_5c_{21}c_5 - 2a_1l_{21}c_{21} - 2a_1l_5c_5 + 2l_{21}l_5s_{21}s_5 - 2b_1l_{21}s_{21} - 2b_1l_5s_5 = 0. \quad (2.39)$$

Se divide toda la ecuación (2.39) entre $2l_{21}l_5$ para escribir la expresión (2.40)

$$\frac{l_{21}^2 + l_5^2 + a_1^2 + b_1^2 - l_{61}^2}{2l_{21}l_5} + c_{21}c_5 - \frac{a_1}{l_5}c_{21} - \frac{a_1}{l_{21}}c_5 + s_{21}s_5 - \frac{b_1}{l_5}s_{21} - \frac{b_1}{l_{21}}s_5 = 0. \quad (2.40)$$

Se simplifica la expresión (2.40) reescribiendo los nombres de las constantes como se indica en (2.41)

$$k_6 = \frac{a_1}{l_{21}}, k_7 = \frac{a_1}{l_5}, k_8 = \frac{l_{21}^2 + l_5^2 + a_1^2 + b_1^2 - l_{61}^2}{2l_{21}l_5}, k_9 = \frac{b_1}{l_{21}}, k_{10} = \frac{b_1}{l_5}. \quad (2.41)$$

De esta manera la ecuación (2.40) se reescribe como la (2.42)

$$k_8 + c_{21}c_5 - k_7c_{21} - k_6c_5 + s_{21}s_5 - k_{10}s_{21} - k_9s_5 = 0. \quad (2.42)$$

Se usan identidades trigonométricas de tangente, mostradas en la expresión (2.43), para simplificar la expresión (2.42)

$$c_5 = \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})}, \quad (2.43)$$

$$s_5 = \frac{2 \tan(\frac{\varphi_5}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})}. \quad (2.44)$$

con los cambios la ecuación (2.42) se transforma en la (2.45)

$$k_8 + c_{21} \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})} - k_7 c_{21} - k_6 \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})} + s_{21} \frac{2 \tan(\frac{\varphi_5}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})} - k_{10} s_{21} - k_9 \frac{2 \tan(\frac{\varphi_5}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})} = 0. \quad (2.45)$$

Se multiplica ambos lados de la ecuación (2.45) por $1 + \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})$ para obtener la ecuación (2.46)

$$k_8(1 + \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})) + c_{21}(1 - \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})) - k_7 c_{21}(1 + \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})) - k_6(1 - \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})) + s_{21}(2 \tan(\frac{\varphi_5}{2})) - k_{10} s_{21}(1 + \tan^2(\frac{\varphi_5}{2})) - k_9(2 \tan(\frac{\varphi_5}{2})) = 0. \quad (2.46)$$

Se agrupan por términos semejantes en la expresión (2.46) para obtener la expresión (2.47);

$$[k_8 + k_6 - k_7 c_{21} - k_{10} s_{21} - c_{21}] \tan^2(\frac{\varphi_5}{2}) + [-2k_9 + 2s_{21}] \tan(\frac{\varphi_5}{2}) + k_8 - k_6 - k_7 c_{21} - k_{10} s_{21} + c_{21} = 0. \quad (2.47)$$

Se hace un cambio de nombre de los términos constantes en la expresión (2.47) con los nuevos nombres indicados en la expresión (2.48)

$$\begin{aligned} k_d &= [k_8 + k_6 - k_7 c_{21} - k_{10} s_{21} - c_{21}] \\ k_e &= [-2k_9 + 2s_{21}], \\ k_f &= [k_8 - k_6 - k_7 c_{21} - k_{10} s_{21} + c_{21}]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

De esta manera, la ecuación (2.47) se convierte en la (2.49)

$$k_d \tan^2(\frac{\varphi_5}{2}) + k_e \tan(\frac{\varphi_5}{2}) + k_f = 0. \quad (2.49)$$

La ecuación (2.49) se puede resolver con la fórmula general. De esta forma, la solución de (2.49) se muestra en (2.50)

$$\tan(\frac{\varphi_5}{2}) = \frac{-k_e \pm \sqrt{k_e^2 - 4k_d k_f}}{2k_d}. \quad (2.50)$$

Se despeja la coordenada generalizada φ_5 de la expresión (2.50) y se observa en la expresión (2.51)

$$\varphi_5 = 2 \arctan\left(\frac{-k_e \pm \sqrt{k_e^2 - 4k_d k_f}}{2k_d}\right). \quad (2.51)$$

De acuerdo con el armado real del mecanismo se elige la raíz con el discriminante con signo positivo. La expresión para la coordenada generalizada φ_5 se indica en (2.52)

$$\varphi_5 = 2 \arctan\left(\frac{-k_e + \sqrt{k_e^2 - 4k_d k_f}}{2k_d}\right). \quad (2.52)$$

2.2.3. Obtención del ángulo φ_4

El ángulo φ_4 es parte del segundo circuito cinemático. En la Figura 2.9 se muestra en detalle el conjunto de eslabones que componen este segundo circuito cinemático.

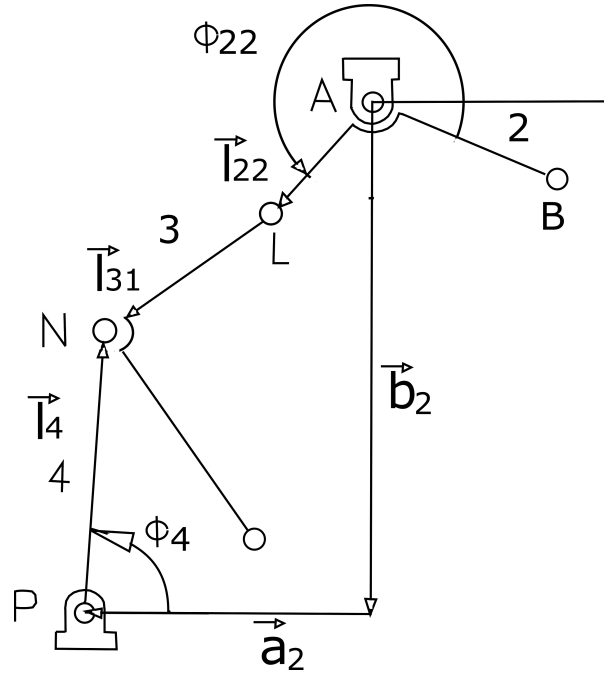


Figura 2.9: Segundo circuito cinemático.

A partir del diagrama de la Figura 2.9 se obtiene la ecuación de restricción (2.53)

$$\mathbf{l}_{22} + \mathbf{l}_{31} - \mathbf{l}_4 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2 = \mathbf{0}, \quad (2.53)$$

donde \mathbf{l}_{22} , \mathbf{l}_{31} , \mathbf{l}_4 , \mathbf{a}_2 y \mathbf{b}_2 son vectores, tal que $\varphi_{22} = \varphi_{21} - 90^\circ$, debido a que el eslabón l_{22} es perpendicular al l_{21} .

La ecuación (2.53) se puede analizar en sus componentes rectangulares para obtener las expresiones (2.54) y (2.55)

$$l_{22}c_{22} + l_{31}c_{31} - l_4c_4 - a_2 = 0, \quad (2.54)$$

$$l_{22}s_{22} + l_{31}s_{31} - l_4s_4 - b_2 = 0. \quad (2.55)$$

Para obtener la expresión correspondiente al ángulo φ_4 , se debe de despejar el término que contiene a φ_{31} de (2.54) y (2.55). De esta manera se escribe las expresiones (2.56) y (2.57)

$$l_{31}c_{31} = -l_{22}c_{22} + l_4c_4 + a_2, \quad (2.56)$$

$$l_{31}s_{31} = -l_{22}s_{22} + l_4s_4 + b_2. \quad (2.57)$$

Se eleva las expresiones (2.56) y (2.57) al cuadrado para resultar las ecuaciones (2.58) y (2.59)

$$(l_{31}c_{31})^2 = (-l_{22}c_{22} + l_4c_4 + a_2)^2, \quad (2.58)$$

$$(l_{31}s_{31})^2 = (-l_{22}s_{22} + l_4s_4 + b_2)^2. \quad (2.59)$$

Se desarrollan los trinomios cuadrados de las expresiones (2.58) y (2.59) para obtener las expresiones (2.60) y (2.61)

$$(l_{31}c_{31})^2 = (l_{22}c_{22})^2 + (l_4c_4)^2 + a_2^2 - 2l_{22}l_4c_{22}c_4 - 2a_2l_{22}c_{22} + 2a_2l_4c_4, \quad (2.60)$$

$$(l_{31}s_{31})^2 = (l_{22}s_{22})^2 + (l_4s_4)^2 + b_2^2 - 2l_{22}l_4s_{22}s_4 - 2b_2l_{22}s_{22} + 2b_2l_4s_4. \quad (2.61)$$

Se suman ambas expresiones en (2.60) y (2.61) para llegar a la expresión (2.62)

$$l_{31}^2 = l_{22}^2 + l_4^2 + a_2^2 + b_2^2 - 2l_{22}l_4c_{22}c_4 - 2a_2l_{22}c_{22} + 2a_2l_4c_4 - 2l_{22}l_4s_{22}s_4 - 2b_2l_{22}s_{22} + 2b_2l_4s_4. \quad (2.62)$$

Se resta $(l_{31})^2$ a ambos lados de la ecuación (2.62) para resultar la expresión (2.63)

$$a_2^2 + b_2^2 + l_{22}^2 + l_4^2 - l_{31}^2 - 2l_{22}l_4c_{22}c_4 - 2a_2l_{22}c_{22} + 2a_2l_4c_4 - 2l_{22}l_4s_{22}s_4 - 2b_2l_{22}s_{22} + 2b_2l_4s_4 = 0. \quad (2.63)$$

Se divide toda la ecuación (2.63) entre $2l_{22}l_4$ y de esta forma se llega a (2.64)

$$\frac{a_2^2 + b_2^2 + l_{22}^2 + l_4^2 - l_{31}^2}{2l_{22}l_4} - c_{22}c_4 - \frac{a_2}{l_4}c_{22} + \frac{a_2}{l_{22}}c_4 - s_{22}s_4 - \frac{b_2}{l_4}s_{22} + \frac{b_2}{l_{22}}s_4 = 0. \quad (2.64)$$

Se le cambia el nombre a los términos constantes de (2.64) con los nuevos nombres mostrados en (2.65)

$$k_{11} = \frac{a_2}{l_{22}}, k_{12} = \frac{a_2}{l_4}, k_{13} = \frac{a_2^2 + b_2^2 + l_{22}^2 + l_4^2 - l_{31}^2}{2l_{22}l_4}, k_{14} = \frac{b_2}{l_{22}}, k_{15} = \frac{b_2}{l_4}. \quad (2.65)$$

Con los nuevos nombres de los coeficientes la ecuación (2.64), se convierte en la expresión (2.66)

$$k_{13} - c_{22}c_4 - k_{12}c_{22} + k_{11}c_4 - s_{22}s_4 - k_{15}s_{22} + k_{14}s_4 = 0. \quad (2.66)$$

Se usa la identidad trigonométrica de tangente expresada en (2.67) y (2.68) para reducir la expresión (2.66)

$$c_4 = \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})}, \quad (2.67)$$

$$s_4 = \frac{2 \tan(\frac{\varphi_4}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})}. \quad (2.68)$$

Se sustituyen las identidades en la expresión (2.66) para obtener la ecuación (2.69)

$$k_{13} - c_{22} \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})} - k_{12}c_{22} + k_{11} \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})} - s_{22} \frac{2 \tan(\frac{\varphi_4}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})} - k_{15}s_{22} + k_{14} \frac{2 \tan(\frac{\varphi_4}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})} = 0. \quad (2.69)$$

Se multiplica toda la ecuación (2.69) por $1 + \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})$ para llegar a la expresión (2.70)

$$k_{13}(1 + \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})) - c_{22}(1 - \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})) - k_{12}c_{22}(1 + \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})) + k_{11}(1 - \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})) - s_{22}(2 \tan(\frac{\varphi_4}{2})) - k_{15}s_{22}(1 + \tan^2(\frac{\varphi_4}{2})) + k_{14}(2 \tan(\frac{\varphi_4}{2})) = 0. \quad (2.70)$$

Se agrupan términos semejantes en (2.70) como se ve en (2.71)

$$[k_{13} - k_{11} - k_{15}s_{22} - k_{12}c_{22} + c_{22}] \tan^2(\frac{\varphi_4}{2}) + [2k_{14} - 2s_{22}] \tan(\frac{\varphi_4}{2}) + [k_{13} + k_{11} - k_{15}s_{22} - k_{12}c_{22} - c_{22}] = 0. \quad (2.71)$$

Se le dan nombres indicados en (2.72) a los coeficientes constantes en (2.71)

$$\begin{aligned} k_g &= [k_{13} - k_{11} - k_{15}s_{22} - k_{12}c_{22} + c_{22}], \\ k_h &= [2k_{14} - 2s_{22}], \\ k_i &= [k_{13} + k_{11} - k_{15}s_{22} - k_{12}c_{22} - c_{22}]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Con los nombres de los coeficientes, la ecuación (2.71) se transforma en la expresión (2.73)

$$k_g \tan^2\left(\frac{\varphi_4}{2}\right) + k_h \tan\left(\frac{\varphi_4}{2}\right) + k_i = 0. \quad (2.73)$$

La expresión (2.73) se puede solucionar con la fórmula general de segundo orden. La solución de (2.73) se mira en la expresión (2.74)

$$\tan\left(\frac{\varphi_4}{2}\right) = \frac{-k_h \pm \sqrt{k_h^2 - 4k_g k_i}}{2k_g}. \quad (2.74)$$

Se despeja la coordenada generalizada φ_4 de la expresión (2.74) para llegar a la expresión (2.75)

$$\varphi_4 = 2 \arctan\left(\frac{-k_h \pm \sqrt{k_h^2 - 4k_g k_i}}{2k_g}\right). \quad (2.75)$$

Se elige la raíz con el discriminante con signo positivo, para que adopte el movimiento del mecanismo real. Por tanto, la expresión para la coordenada generalizada φ_4 se presenta en (2.76)

$$\varphi_4 = 2 \arctan\left(\frac{-k_h + \sqrt{k_h^2 - 4k_g k_i}}{2k_g}\right). \quad (2.76)$$

2.2.4. Obtención del ángulo φ_{31}

De la ecuación (2.54) y (2.55), se puede despejar el término correspondiente a l_4 como se indica en la expresión (2.77) y (2.78)

$$l_4 c_4 = l_{22} c_{22} + l_{31} c_{31} - a_2, \quad (2.77)$$

$$l_4 s_4 = l_{22} s_{22} + l_{31} s_{31} - b_2. \quad (2.78)$$

Las expresiones (2.77) y (2.78) se elevan al cuadrado para obtener (2.79) y (2.80)

$$(l_4 c_4)^2 = (l_{22} c_{22} + l_{31} c_{31} - a_2)^2, \quad (2.79)$$

$$(l_4 s_4)^2 = (l_{22} s_{22} + l_{31} s_{31} - b_2)^2. \quad (2.80)$$

Se expanden los términos de las expresiones (2.79) y (2.80) para obtener el sistema de las ecuaciones (2.81) y (2.82)

$$(l_4 c_4)^2 = (l_{22} c_{22})^2 + 2l_{22} l_{31} c_{22} c_{31} - 2a_2 l_{22} c_{22} + (l_{31} c_{31})^2 - 2a_2 l_{31} c_{31} + a_2^2, \quad (2.81)$$

$$(l_4 s_4)^2 = (l_{22} s_{22})^2 + 2l_{22} l_{31} s_{22} s_{31} - 2b_2 l_{22} s_{22} + (l_{31} s_{31})^2 - 2b_2 l_{31} s_{31} + b_2^2. \quad (2.82)$$

Se suman ambas expresiones en (2.81) y (2.82) para llegar a (2.83)

$$\begin{aligned} (l_4)^2 &= (l_{22})^2 + 2l_{22} l_{31} c_{22} c_{31} - 2a_2 l_{22} c_{22} + l_{31}^2 - 2a_2 l_{31} c_{31} + a_2^2 + 2l_{22} l_{31} s_{22} s_{31} - 2b_2 l_{22} s_{22} \\ &\quad - 2b_2 l_{31} s_{31} + b_2^2. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Se resta toda la expresión (2.83) por l_4^2 como se muestra en (2.84)

$$a_2^2 + b_2^2 + (l_{22})^2 + (l_{31})^2 - (l_4)^2 + 2l_{22}l_{31}c_{22}c_{31} - 2a_2l_{22}c_{22} - 2a_2l_{31}c_{31} + 2l_{22}l_{31}s_{22}s_{31} - 2b_2l_{22}s_{22} - 2b_2l_{31}s_{31} = 0. \quad (2.84)$$

Se divide toda la expresión (2.84) entre $2l_{22}l_{31}$ para obtener la ecuación (2.85)

$$\frac{a_2^2 + b_2^2 + (l_{22})^2 + (l_{31})^2 - (l_4)^2}{2l_{22}l_{31}} + c_{22}c_{31} - \frac{a_2}{l_{31}}c_{22} - \frac{a_2}{l_{22}}c_{31} + s_{22}s_{31} - \frac{b_2}{l_{31}}s_{22} - \frac{b_2}{l_{22}}s_{31} = 0. \quad (2.85)$$

Se les pone un nuevo nombre a los términos constantes de la expresión (2.85) siguiendo la designación plasmada en (2.86)

$$k_{16} = \frac{a_2}{l_{22}}, k_{17} = \frac{a_2}{l_{31}}, k_{18} = \frac{a_2^2 + b_2^2 + l_{22}^2 + l_{31}^2 - l_4^2}{2l_{22}l_{31}}, k_{19} = \frac{b_2}{l_{22}}, k_{20} = \frac{b_2}{l_{31}}. \quad (2.86)$$

Por tanto, la ecuación (2.85) pasa a ser la expresión (2.87)

$$k_{18} + c_{22}c_{31} - k_{17}c_{22} - k_{16}c_{31} + s_{22}s_{31} - k_{20}s_{22} - k_{19}s_{31} = 0. \quad (2.87)$$

Se usa la identidad trigonométrica tangente mostrada en las expresiones (2.88) y (2.89)

$$c_{31} = \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2})}, \quad (2.88)$$

$$s_{31} = \frac{2 \tan(\frac{\varphi_{31}}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2})}. \quad (2.89)$$

Con las identidades, la ecuación (2.87) pasa a ser la expresión (2.90)

$$k_{18} + c_{22} \left(\frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2})} \right) - k_{17}c_{22} - k_{16} \left(\frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2})} \right) + s_{22} \left(\frac{2 \tan(\frac{\varphi_{31}}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2})} \right) - k_{20}s_{22} - k_{19} \left(\frac{2 \tan(\frac{\varphi_{31}}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2})} \right) = 0. \quad (2.90)$$

Se multiplica toda la expresión (2.90) por $(1 + \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2}))$ como se plasma en (2.91)

$$k_{18}(1 + \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2})) + c_{22}(1 - \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2})) - k_{17}c_{22}(1 + \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2})) - k_{16}(1 - \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2})) + s_{22}(2 \tan(\frac{\varphi_{31}}{2})) - k_{20}s_{22}(1 + \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2})) - k_{19}(2 \tan(\frac{\varphi_{31}}{2})) = 0. \quad (2.91)$$

Se agrupan términos semejantes en la expresión (2.91) para llegar a (2.92)

$$[k_{18} + k_{16} - k_{20}s_{22} - k_{17}c_{22} - c_{22}] \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2}) + [-2k_{19} + 2s_{22}] \tan(\frac{\varphi_{31}}{2}) + k_{18} - k_{16} - k_{17}c_{22} - k_{20}s_{22} + c_{22} = 0. \quad (2.92)$$

Se le dan un nuevo nombre a los términos de la expresión (2.92) para obtener (2.93)

$$\begin{aligned} k_j &= [k_{18} + k_{16} - k_{20}s_{22} - k_{17}c_{22} - c_{22}], \\ k_n &= [-2k_{19} + 2s_{22}], \\ k_q &= [k_{18} - k_{16} - k_{17}c_{22} - k_{20}s_{22} + c_{22}]. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Con los coeficientes se reconstruye (2.92) como se indica en la expresión (2.94)

$$k_j \tan^2(\frac{\varphi_{31}}{2}) + k_n \tan(\frac{\varphi_{31}}{2}) + k_q = 0 \quad (2.94)$$

y se resuelve con la fórmula general, como se ve en la expresión (2.95).

$$\tan\left(\frac{\varphi_{31}}{2}\right) = \frac{-k_n \pm \sqrt{k_n^2 - 4k_j k_q}}{2k_j}. \quad (2.95)$$

Se despeja el ángulo φ_{31} como se ve en (2.96)

$$\varphi_{31} = 2 \arctan\left(\frac{-k_n \pm \sqrt{k_n^2 - 4k_j k_q}}{2k_j}\right). \quad (2.96)$$

En la expresión (2.96) se elige la raíz con el discriminante de signo negativo, para coincidir con el movimiento real del mecanismo. Por tanto, la expresión para la coordenada generalizada φ_{31} se visualiza en la expresión (2.97)

$$\varphi_{31} = 2 \arctan\left(\frac{-k_n - \sqrt{k_n^2 - 4k_j k_q}}{2k_j}\right). \quad (2.97)$$

2.2.5. Obtención del ángulo φ_8

El ángulo φ_8 es parte del tercer circuito cinemático.

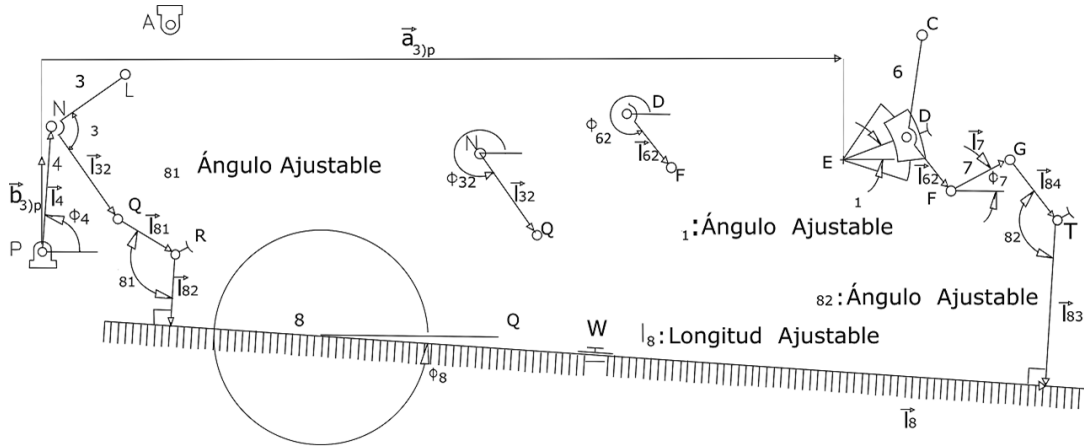


Figura 2.10: Tercer circuito cinemático.

A partir de la Figura 2.10 se puede deducir la ecuación de restricción asociada, partiendo del punto P y llegando nuevamente al mismo punto en un recorrido horario, de lo cual se deduce la ecuación (2.98)

$$l_4 + l_{32} + l_{81} + l_{82} + l_8 - l_{83} - l_{84} - l_7 - l_{62} - l_1 - a_{3p} - b_{3p} = 0, \quad (2.98)$$

donde el origen del tercer circuito es el punto P , a diferencia de los otros circuitos, donde estos se estudiaban con respecto al punto A .

Descomponiendo la ecuación (2.98) en sus componentes cartesianos se llega a las expresiones (2.99) y (2.100)

$$l_4 c_4 + l_{32} c_{32} + l_{81} c_{81} + l_{82} c_{82} + l_8 c_8 - l_{83} c_{83} - l_{84} c_{84} - l_7 c_7 - l_{62} c_{62} - l_1 \cos(\beta_1) - a_{3p} = 0, \quad (2.99)$$

$$l_4 s_4 + l_{32} s_{32} + l_{81} s_{81} + l_{82} s_{82} + l_8 s_8 - l_{83} s_{83} - l_{84} s_{84} - l_7 s_7 - l_{62} s_{62} - l_1 \text{sen}(\beta_1) - b_{3p} = 0, \quad (2.100)$$

donde φ_{81} , φ_{82} , φ_{83} , φ_{84} están relacionados con el ángulo φ_8 . En la Figura 2.11, se muestra la geometría para saber las relaciones entre ellos.

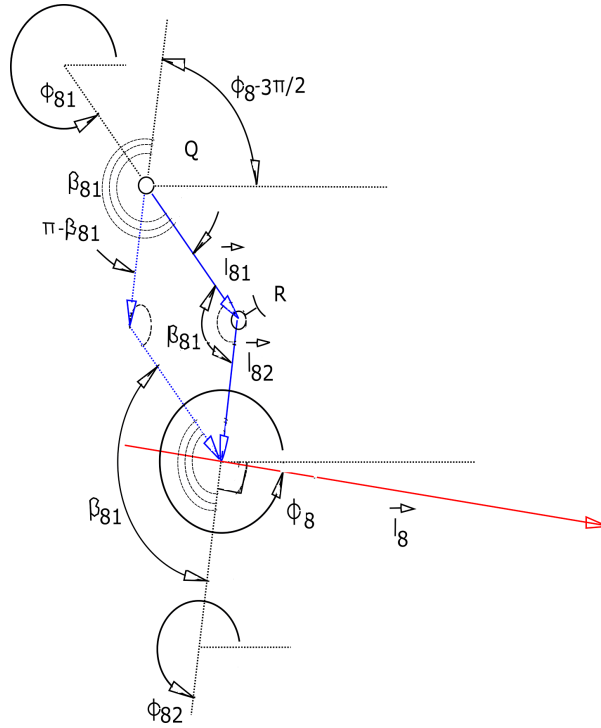


Figura 2.11: Detalle de los eslabones del elemento rastrillo.

A partir de la Figura 2.11, se deducen las igualdades de la expresión (2.101)

$$\begin{aligned} \varphi_{81} &= \varphi_8 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta_{81}\right), \\ \varphi_{82} &= \varphi_8 - \frac{\pi}{2}, \\ \varphi_{83} &= \varphi_{82}, \\ \varphi_{84} &= \varphi_8 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta_{82}\right). \end{aligned} \quad (2.101)$$

En cuanto a los ángulos φ_{32} y φ_{62} por geometría, se determinan con las expresiones (2.102) y (2.103)

$$\varphi_{32} = \varphi_{31} + (\pi - \beta_3), \quad (2.102)$$

$$\varphi_{62} = \varphi_{61} + (2\pi - \beta_6). \quad (2.103)$$

Sustituyendo las expresiones (2.101) en el sistema de ecuaciones (2.99) y (2.100), queda el de (2.104) y (2.105)

$$\begin{aligned} l_4 c_4 + l_{32} c_{32} + l_{81} \cos\left(\varphi_8 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta_{81}\right)\right) + l_{82} \cos\left(\varphi_8 - \frac{\pi}{2}\right) + l_8 c_8 - l_{83} \cos\left(\varphi_8 - \frac{\pi}{2}\right) \\ - l_{84} \cos\left(\varphi_8 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta_{82}\right)\right) - l_7 \cos(\varphi_7) - l_{62} \cos(\varphi_{62}) - l_1 \cos(\beta_1) - a_{3p} = 0, \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned}
& l_4 s_4 + l_{32} s_{32} + l_{81} \text{sen}(\varphi_8 + (\frac{\pi}{2} - \beta_{81})) + l_{82} \text{sen}(\varphi_8 - \frac{\pi}{2}) + l_8 s_8 - l_{83} \text{sen}(\varphi_8 - \frac{\pi}{2}) \\
& - l_{84} \text{sen}(\varphi_8 + (\frac{\pi}{2} - \beta_{82})) - l_7 \text{sen}(\varphi_7) - l_{62} \text{sen}(\varphi_{62}) - l_1 \text{sen}(\beta_1) - b_{3p} = 0.
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Las identidades trigonométricas de suma de ángulos para la función seno y coseno se muestran en las expresiones (2.106), (2.107), (2.108) y (2.109)

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \text{sen}(a) \text{sen}(b), \tag{2.106}$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \text{sen}(a) \text{sen}(b), \tag{2.107}$$

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a) \cos(b) + \cos(a) \text{sen}(b), \tag{2.108}$$

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a) \cos(b) - \cos(a) \text{sen}(b). \tag{2.109}$$

Con las identidades, se puede simplificar el sistema de (2.104) y (2.105). De esta manera se llega a (2.110) y (2.111)

$$\begin{aligned}
& -a_{3p} + l_4 c_4 + l_{32} c_{32} + l_{81} c_8 \cos(\frac{\pi}{2} - \beta_{81}) - l_{81} s_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2} - \beta_{81}) + l_{82} c_8 \cos(\frac{\pi}{2}) + l_{82} s_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) + \\
& + l_8 c_8 - l_{83} c_8 \cos(\frac{\pi}{2}) - l_{83} s_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) - l_{84} c_8 \cos(\frac{\pi}{2} - \beta_{82}) + l_{84} s_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2} - \beta_{82}) - l_7 c_7 - l_{62} c_{62} \\
& - l_1 \cos(\beta_1) = 0,
\end{aligned} \tag{2.110}$$

$$\begin{aligned}
& -b_{3p} + l_4 s_4 + l_{32} s_{32} + l_{81} s_8 \cos(\frac{\pi}{2} - \beta_{81}) + l_{81} c_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2} - \beta_{81}) + l_{82} s_8 \cos(\frac{\pi}{2}) - l_{82} c_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) + \\
& + l_8 s_8 - l_{83} s_8 \cos(\frac{\pi}{2}) + l_{83} c_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) - l_{84} s_8 \cos(\frac{\pi}{2} - \beta_{82}) - l_{84} c_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2} - \beta_{82}) - l_7 s_7 - l_{62} s_{62} \\
& - l_1 \text{sen}(\beta_1) = 0.
\end{aligned} \tag{2.111}$$

Se reduce hasta su mínima expresión el sistema de (2.110) y (2.111) para obtener (2.112) y (2.113)

$$\begin{aligned}
& l_4 c_4 + l_{32} c_{32} + l_{81} c_8 \cos(\frac{\pi}{2}) \cos(\beta_{81}) + l_{81} c_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) \text{sen}(\beta_{81}) - l_{81} s_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) \cos(\beta_{81}) + \\
& + l_{81} s_8 \cos(\frac{\pi}{2}) \text{sen}(\beta_{81}) + l_{82} c_8 \cos(\frac{\pi}{2}) + l_{82} s_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) + l_8 c_8 - l_{83} c_8 \cos(\frac{\pi}{2}) - l_{83} s_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) \\
& - l_{84} c_8 \cos(\frac{\pi}{2}) \cos(\beta_{82}) - l_{84} c_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) \text{sen}(\beta_{82}) + l_{84} s_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) \cos(\beta_{82}) - l_{84} s_8 \cos(\frac{\pi}{2}) \text{sen}(\beta_{82}) \\
& - l_7 c_7 - l_{62} c_{62} - l_1 \cos(\beta_1) - a_{3p} = 0,
\end{aligned} \tag{2.112}$$

$$\begin{aligned}
& l_4 s_4 + l_{32} s_{32} + l_{81} s_8 \cos(\frac{\pi}{2}) \cos(\beta_{81}) + l_{81} s_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) \text{sen}(\beta_{81}) + l_{81} c_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) \cos(\beta_{81}) \\
& - l_{81} c_8 \cos(\frac{\pi}{2}) \text{sen}(\beta_{81}) + l_{82} s_8 \cos(\frac{\pi}{2}) - l_{82} c_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) + l_8 s_8 - l_{83} s_8 \cos(\frac{\pi}{2}) + l_{83} c_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) \\
& - l_{84} s_8 \cos(\frac{\pi}{2}) \cos(\beta_{82}) - l_{84} s_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) \text{sen}(\beta_{82}) - l_{84} c_8 \text{sen}(\frac{\pi}{2}) \cos(\beta_{82}) + l_{84} c_8 \cos(\frac{\pi}{2}) \text{sen}(\beta_{82}) \\
& - l_7 s_7 - l_{62} s_{62} - l_1 \text{sen}(\beta_1) - b_{3p} = 0.
\end{aligned} \tag{2.113}$$

Considerando $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ y $\text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$, las expresiones (2.112) y (2.113) se convierte en el sistema (2.114) y 2.115

$$\begin{aligned}
& l_4 c_4 + l_{32} c_{32} + l_{81} c_8 \text{sen}(\beta_{81}) - l_{81} s_8 \cos(\beta_{81}) + l_{82} s_8 + l_8 c_8 - l_{83} s_8 - l_{84} c_8 \text{sen}(\beta_{82}) + \\
& + l_{84} s_8 \cos(\beta_{82}) - l_7 c_7 - l_{62} c_{62} - l_1 \cos(\beta_1) - a_{3p} = 0,
\end{aligned} \tag{2.114}$$

$$\begin{aligned}
& l_4 s_4 + l_{32} s_{32} + l_{81} s_8 \text{sen}(\beta_{81}) + l_{81} c_8 \cos(\beta_{81}) - l_{82} c_8 + l_8 s_8 + l_{83} c_8 - l_{84} s_8 \text{sen}(\beta_{82}) \\
& - l_{84} c_8 \cos(\beta_{82}) - l_7 s_7 - l_{62} s_{62} - l_1 \text{sen}(\beta_1) - b_{3p} = 0.
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Agrupando términos semejantes en las expresiones (2.114) y (2.115) se llega al sistema (2.116) y (2.117)

$$\begin{aligned} -l_7c_7 + [l_8 + l_{81}\text{sen}(\beta_{81}) - l_{84}\text{sen}(\beta_{82})]c_8 + [l_{82} - l_{83} - l_{81}\cos(\beta_{81}) + l_{84}\cos(\beta_{82})]s_8 + \\ + l_4c_4 + l_{32}c_{32} - l_{62}c_{62} - l_1\cos(\beta_1) - a_{3p} = 0, \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} -l_7s_7 + [l_8 + l_{81}\text{sen}(\beta_{81}) - l_{84}\text{sen}(\beta_{82})]s_8 + [-l_{82} + l_{83} + l_{81}\cos(\beta_{81}) - l_{84}\cos(\beta_{82})]c_8 + \\ + l_4s_4 + l_{32}s_{32} - l_{62}s_{62} - l_1\text{sen}(\beta_1) - b_{3p} = 0. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Los términos agrupados de la expresión (2.116) y (2.117) se renombran con la regla mostrada en (2.118)

$$\begin{aligned} k_{21} &= [l_4c_4 + l_{32}c_{32} - l_{62}c_{62} - l_1\cos(\beta_1) - a_{3p}], \\ k_{22} &= [l_4s_4 + l_{32}s_{32} - l_{62}s_{62} - l_1\text{sen}(\beta_1) - b_{3p}], \\ k_{23} &= [l_{82} - l_{83} - l_{81}\cos(\beta_{81}) + l_{84}\cos(\beta_{82})], \\ k_{24} &= [l_8 + l_{81}\text{sen}(\beta_{81}) - l_{84}\text{sen}(\beta_{82})]. \end{aligned} \quad (2.118)$$

En (2.119) y (2.120) se muestra el sistema de ecuaciones con los coeficientes y términos renombrados

$$-l_7c_7 + k_{24}c_8 + k_{23}s_8 + k_{21} = 0, \quad (2.119)$$

$$-l_7s_7 + k_{24}s_8 - k_{23}c_8 + k_{22} = 0. \quad (2.120)$$

Como el ángulo que se desea conocer de las expresiones (2.119) y (2.120) es φ_8 , entonces, se debe despejar el término desconocido contrario, en este caso, el que contiene el ángulo φ_7 . El sistema resultante, se muestra en (2.121) y (2.122)

$$l_7c_7 = k_{24}c_8 + k_{23}s_8 + k_{21}, \quad (2.121)$$

$$l_7s_7 = k_{24}s_8 - k_{23}c_8 + k_{22}. \quad (2.122)$$

Se elevan ambas ecuaciones al cuadrado de la expresión (2.121) y (2.122) para obtener (2.123) y (2.124)

$$(l_7c_7)^2 = (k_{24}c_8 + k_{23}s_8 + k_{21})^2, \quad (2.123)$$

$$(l_7s_7)^2 = (k_{24}s_8 - k_{23}c_8 + k_{22})^2. \quad (2.124)$$

Se expande las expresiones (2.123) y (2.124) como se indica en la ecuación (2.125) y (2.126)

$$\begin{aligned} (l_7c_7)^2 &= (k_{24}c_8)^2 + k_{24}k_{23}c_8s_8 + k_{21}k_{24}c_8 + k_{23}k_{24}s_8c_8 + (k_{23}s_8)^2 + k_{23}k_{21}s_8 + k_{21}k_{24}c_8 + \\ &+ k_{21}k_{23}s_8 + (k_{21})^2, \end{aligned} \quad (2.125)$$

$$\begin{aligned} (l_7s_7)^2 &= (k_{24}s_8)^2 - k_{24}k_{23}s_8c_8 + k_{24}k_{22}s_8 - k_{23}k_{24}s_8c_8 + (k_{23}c_8)^2 - k_{23}k_{22}c_8 + k_{22}k_{24}s_8 \\ &- k_{23}k_{22}c_8 + (k_{22})^2. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Reduciendo las expresiones (2.125) y (2.126), se llega a (2.127) y (2.128)

$$(l_7c_7)^2 = (k_{24}c_8)^2 + (k_{23}s_8)^2 + (k_{21})^2 + 2k_{24}k_{23}c_8s_8 + 2k_{21}k_{24}c_8 + 2k_{23}k_{21}s_8 \quad (2.127)$$

$$(l_7s_7)^2 = (k_{24}s_8)^2 + (k_{23}c_8)^2 + (k_{22})^2 - 2k_{24}k_{23}s_8c_8 + 2k_{24}k_{22}s_8 - 2k_{23}k_{22}c_8. \quad (2.128)$$

Sumando ambas ecuaciones en (2.127) y (2.128), se llega a la ecuación (2.129)

$$(l_7)^2 = (k_{24})^2 + (k_{23})^2 + (k_{21})^2 + (k_{22})^2 + 2k_{21}k_{24}c_8 + 2k_{23}k_{21}s_8 + 2k_{24}k_{22}s_8 - 2k_{23}k_{22}c_8. \quad (2.129)$$

Agrupando términos semejantes en la expresión (2.129) se obtiene la expresión (2.130)

$$(l_7)^2 = (k_{24})^2 + (k_{23})^2 + (k_{21})^2 + (k_{22})^2 + 2[k_{23}k_{21} + k_{24}k_{22}]s_8 + 2[k_{21}k_{24} - k_{23}k_{22}]c_8. \quad (2.130)$$

Restando toda la ecuación (2.130) con el término $(l_7)^2$ se logra la ecuación (2.131)

$$(k_{24})^2 + (k_{23})^2 + (k_{21})^2 + (k_{22})^2 - (l_7)^2 + 2[k_{23}k_{21} + k_{24}k_{22}]s_8 + 2[k_{21}k_{24} - k_{23}k_{22}]c_8 = 0. \quad (2.131)$$

Si los distintos número en paréntesis de (2.131) se agrupan en las variables k_{25} , k_{26} y k_{27} definidos en (2.132) se llega a la ecuación (2.133)

$$\begin{aligned} k_{25} &= 2[k_{23}k_{21} + k_{24}k_{22}], \\ k_{26} &= 2[k_{21}k_{24} - k_{23}k_{22}], \\ k_{27} &= [(k_{24})^2 + (k_{23})^2 + (k_{21})^2 + (k_{22})^2 - (l_7)^2]. \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$k_{25}s_8 + k_{26}c_8 + k_{27} = 0. \quad (2.133)$$

Se usa la identidad trigonométrica tangente expresada en (2.134) y (2.135)

$$c_8 = \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_8}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_8}{2})}, \quad (2.134)$$

$$s_8 = \frac{2 \tan(\frac{\varphi_8}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_8}{2})}. \quad (2.135)$$

Sustituyendo (2.134) y (2.135) en (2.133), se llega a la ecuación (2.136)

$$k_{25} \frac{2 \tan(\frac{\varphi_8}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_8}{2})} + k_{26} \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_8}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_8}{2})} + k_{27} = 0. \quad (2.136)$$

Multiplicando la ecuación (2.136) por $1 + \tan^2(\frac{\varphi_8}{2})$, se obtiene (2.137)

$$2k_{25} \tan(\frac{\varphi_8}{2}) + k_{26} - k_{26} \tan^2(\frac{\varphi_8}{2}) + k_{27} + k_{27} \tan^2(\frac{\varphi_8}{2}) = 0. \quad (2.137)$$

Agrupando términos semejantes de (2.137), queda (2.138)

$$[k_{27} - k_{26}] \tan^2(\frac{\varphi_8}{2}) + [2k_{25}] \tan(\frac{\varphi_8}{2}) + [k_{26} + k_{27}] = 0. \quad (2.138)$$

Si se definen las variables k_w , k_x y k_z como se muestra en la definición (2.139), entonces la ecuación (2.138) se convierte en (2.140)

$$\begin{aligned} k_w &= [k_{27} - k_{26}], \\ k_x &= [2k_{25}], \\ k_z &= [k_{26} + k_{27}]. \end{aligned} \quad (2.139)$$

$$k_w \tan^2(\frac{\varphi_8}{2}) + k_x \tan(\frac{\varphi_8}{2}) + k_z = 0. \quad (2.140)$$

La solución de la ecuación (2.140) es (2.141)

$$\tan\left(\frac{\varphi_8}{2}\right) = \frac{-k_x \pm \sqrt{(k_x)^2 - 4k_w k_z}}{2k_w} \quad (2.141)$$

y el ángulo φ_8 estará dado por la ecuación (2.142)

$$\varphi_8 = 2 \arctan\left(\frac{-k_x \pm \sqrt{(k_x)^2 - 4k_w k_z}}{2k_w}\right). \quad (2.142)$$

Como se espera que el eslabón esté armado realmente en una configuración cruzada, el signo en (2.142) se elige positivo. Por lo que (2.142) se convierte en (2.143)

$$\varphi_8 = 2 \arctan\left(\frac{-k_x + \sqrt{(k_x)^2 - 4k_w k_z}}{2k_w}\right). \quad (2.143)$$

2.2.6. Obtención del ángulo φ_7

Se puede determinar a partir del sistema (2.121) y (2.122). Se acomoda como el sistema (2.144) y (2.145)

$$k_{24}c_8 = l_7c_7 - k_{23}s_8 - k_{21}, \quad (2.144)$$

$$k_{24}s_8 = l_7s_7 + k_{23}c_8 - k_{22}. \quad (2.145)$$

se elevan la expresiones (2.144) y (2.145) al cuadrado para obtener (2.146) y (2.147)

$$(k_{24}c_8)^2 = (l_7c_7 - k_{23}s_8 - k_{21})^2, \quad (2.146)$$

$$(k_{24}s_8)^2 = (l_7s_7 + k_{23}c_8 - k_{22})^2. \quad (2.147)$$

Se expande el cuadrado de la expresión (2.146) y (2.147) para obtener (2.148) y (2.149)

$$k_{24}^2c_8^2 = l_7^2c_7^2 - 2l_7k_{23}c_7s_8 - 2k_{21}l_7c_7 + k_{23}^2s_8^2 + 2k_{23}k_{21}s_8 + k_{21}^2, \quad (2.148)$$

$$k_{24}^2s_8^2 = l_7^2s_7^2 + 2l_7k_{23}s_7c_8 - 2l_7k_{22}s_7 + k_{23}^2c_8^2 - 2k_{23}k_{22}c_8 + k_{22}^2. \quad (2.149)$$

Se suman las expresiones en (2.148) y (2.149) para obtener la expresión (2.150)

$$k_{24}^2 = l_7^2 - 2l_7k_{23}c_7s_8 - 2k_{21}l_7c_7 + k_{23}^2 + 2k_{23}k_{21}s_8 + k_{21}^2 + 2l_7k_{23}s_7c_8 - 2l_7k_{22}s_7 - 2k_{23}k_{22}c_8 + k_{22}^2. \quad (2.150)$$

Se resta la expresión (2.150) menos el término k_{24}^2 para obtener (2.151)

$$-k_{24}^2 + k_{23}^2 + k_{22}^2 + k_{21}^2 + l_7^2 - 2l_7k_{23}c_7s_8 - 2k_{21}l_7c_7 + 2k_{23}k_{21}s_8 + 2l_7k_{23}s_7c_8 - 2l_7k_{22}s_7 - 2k_{23}k_{22}c_8 = 0. \quad (2.151)$$

Se usa las identidades trigonométricas de tangente mostradas en las expresiones (2.152) y (2.153). Para pasar de la ecuación (2.151) a (2.154)

$$c_7 = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\varphi_7}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\varphi_7}{2}\right)}, \quad (2.152)$$

$$s_7 = \frac{2 \tan\left(\frac{\varphi_7}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\varphi_7}{2}\right)}. \quad (2.153)$$

$$\begin{aligned}
& -k_{24}^2 + k_{23}^2 + k_{22}^2 + k_{21}^2 + l_7^2 - 2l_7k_{23} \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_7}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_7}{2})} s_8 - 2k_{21}l_7 \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_7}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_7}{2})} + 2k_{23}k_{21}s_8 \\
& + 2l_7k_{23} \frac{2 \tan(\frac{\varphi_7}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_7}{2})} c_8 - 2l_7k_{22} \frac{2 \tan(\frac{\varphi_7}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_7}{2})} - 2k_{23}k_{22} \frac{1 - \tan^2(\frac{\varphi_7}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\varphi_7}{2})} = 0.
\end{aligned} \tag{2.154}$$

La expresión (2.154) se multiplica por $1 + \tan^2(\frac{\varphi_7}{2})$ para llegar a la forma indicada en (2.155)

$$\begin{aligned}
& (1 + \tan^2(\frac{\varphi_7}{2}))(-k_{24}^2 + k_{23}^2 + k_{22}^2 + k_{21}^2 + l_7^2) - 2l_7k_{23}(1 - \tan^2(\frac{\varphi_7}{2}))s_8 - 2k_{21}l_7(1 - \tan^2(\frac{\varphi_7}{2})) + \\
& + (1 + \tan^2(\frac{\varphi_7}{2}))2k_{23}k_{21}s_8 + 2l_7k_{23}(2 \tan(\frac{\varphi_7}{2}))c_8 - 2l_7k_{22}(2 \tan(\frac{\varphi_7}{2})) - 2k_{23}k_{22}(1 - \tan^2(\frac{\varphi_7}{2})) \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{2.155}$$

Se expanden los términos de la expresión (2.155) para obtener la expresión (2.156)

$$\begin{aligned}
& (-k_{24}^2 + k_{23}^2 + k_{22}^2 + k_{21}^2 + l_7^2) + (\tan^2(\frac{\varphi_7}{2}))(-k_{24}^2 + k_{23}^2 + k_{22}^2 + k_{21}^2 + l_7^2) - 2l_7k_{23}s_8 \\
& + 2l_7k_{23}(\tan^2(\frac{\varphi_7}{2}))s_8 - 2k_{21}l_7 + 2k_{21}l_7(\tan^2(\frac{\varphi_7}{2})) + 2k_{23}k_{21}s_8 + 2k_{23}k_{21}s_8(\tan^2(\frac{\varphi_7}{2})) \\
& + 2l_7k_{23}(2 \tan(\frac{\varphi_7}{2}))c_8 - 2l_7k_{22}(2 \tan(\frac{\varphi_7}{2})) - 2k_{23}k_{22} + 2k_{23}k_{22}(\tan^2(\frac{\varphi_7}{2})) = 0.
\end{aligned} \tag{2.156}$$

Se agrupan términos semejantes en (2.156) para obtener la ecuación (2.157)

$$\begin{aligned}
& (-k_{24}^2 + k_{23}^2 + k_{22}^2 + k_{21}^2 + l_7^2) - 2l_7k_{23}s_8 - 2k_{21}l_7 - 2k_{23}k_{22} + 2k_{23}k_{21}s_8 + \\
& + [2l_7k_{23}c_8 - 2l_7k_{22}](2 \tan(\frac{\varphi_7}{2})) + \\
& + [-k_{24}^2 + k_{23}^2 + k_{22}^2 + k_{21}^2 + l_7^2 + 2l_7k_{23}s_8 + 2k_{21}l_7 + 2k_{23}k_{21}s_8 + 2k_{23}k_{22}](\tan^2(\frac{\varphi_7}{2})) \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{2.157}$$

Se puede nombrar los coeficientes de la ecuación cuadrática como se muestra en la expresión (2.158)

$$\begin{aligned}
k_1' &= -k_{24}^2 + k_{23}^2 + k_{22}^2 + k_{21}^2 + l_7^2 - 2l_7k_{23}s_8 - 2k_{21}l_7 + 2k_{23}k_{21}s_8 - 2k_{23}k_{22}, \\
k_2' &= 2[2l_7k_{23}c_8 - 2l_7k_{22}], \\
k_3' &= [-k_{24}^2 + k_{23}^2 + k_{22}^2 + k_{21}^2 + l_7^2 + 2l_7k_{23}s_8 + 2k_{21}l_7 + 2k_{23}k_{21}s_8 + 2k_{23}k_{22}].
\end{aligned} \tag{2.158}$$

Con ello, de manera similar a los anteriores parámetros, el ángulo φ_7 está dado por la ecuación (2.159)

$$\varphi_7 = 2 \arctan\left(\frac{-k_2' - \sqrt{k_2'^2 - 4k_3'k_1'}}{2k_3'}\right). \tag{2.159}$$

El signo se elige negativo ya que el mecanismo tiene una configuración abierta.

2.3. Trayectoria del punto O

Una vez conocido como cambia cada ángulo con respecto a la entrada, es posible obtener la trayectoria de cualquier punto en el mecanismo; a través de dichos ángulos.

Por ejemplo, para obtener la trayectoria del punto O de la Figura 2.12, se pueden plantear las ecuaciones y encontrar la trayectoria.

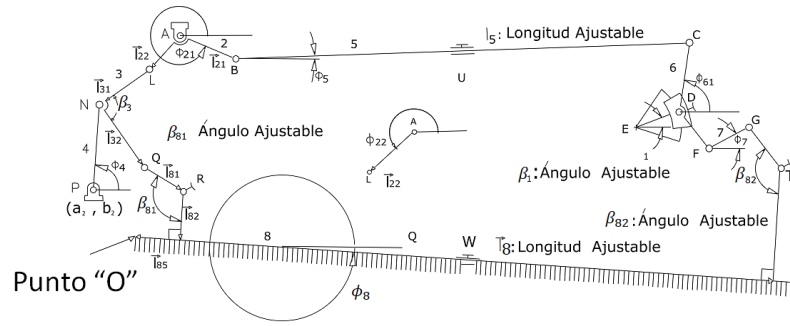


Figura 2.12: Ubicación del punto O del rastrillo en un diagrama esquemático.

El punto O es de importancia ya que se ubica en el extremo de descarga del rastrillo.

El vector que representa la trayectoria O desde el punto de referencia A , se puede encontrar por medio de la ecuación (2.160), que se deduce de la Figura 2.12

$$\mathbf{l}_{O}A = \mathbf{l}_{22} + \mathbf{l}_{31} + \mathbf{l}_{32} + \mathbf{l}_{81} + \mathbf{l}_{82} + \mathbf{l}_{85}, \quad (2.160)$$

que a su vez, la expresión (2.160) se puede mostrar como se indica en (2.161)

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{O}A = & l_{22}c_{22}\hat{\mathbf{i}} + l_{22}s_{22}\hat{\mathbf{j}} + l_{31}c_{31}\hat{\mathbf{i}} + l_{31}s_{31}\hat{\mathbf{j}} + l_{32}c_{32}\hat{\mathbf{i}} + l_{32}s_{32}\hat{\mathbf{j}} + l_{81}c_{81}\hat{\mathbf{i}} + l_{81}s_{81}\hat{\mathbf{j}} + l_{82}c_{82}\hat{\mathbf{i}} + \\ & + l_{82}s_{82}\hat{\mathbf{j}} + l_{85}c_{85}\hat{\mathbf{i}} + l_{85}s_{85}\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (2.161)$$

Además, la expresión (2.162) se puede dividir en sus componentes horizontales y verticales como se muestra en (2.162) y (2.163)

$$\mathbf{l}_{O}A\hat{\mathbf{i}} = l_{22}c_{22}\hat{\mathbf{i}} + l_{31}c_{31}\hat{\mathbf{i}} + l_{32}c_{32}\hat{\mathbf{i}} + l_{81}c_{81}\hat{\mathbf{i}} + l_{82}c_{82}\hat{\mathbf{i}} + l_{85}\cos(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{i}}, \quad (2.162)$$

$$\mathbf{l}_{O}A\hat{\mathbf{j}} = l_{22}s_{22}\hat{\mathbf{j}} + l_{31}s_{31}\hat{\mathbf{j}} + l_{32}s_{32}\hat{\mathbf{j}} + l_{81}s_{81}\hat{\mathbf{j}} + l_{82}s_{82}\hat{\mathbf{j}} + l_{85}\sin(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{j}}. \quad (2.163)$$

A partir de las expresiones (2.162) y (2.163), se puede generar una trayectoria en el plano xy . En la Figura 2.13, se aprecia la trayectoria que describe el punto O cuando los parámetros geométricos calibrables se encuentran en sus valores nominales. Es necesario aclarar que la trayectoria del punto O se obtiene al mirar de frente al motor y que cuando los eslabones de calibración están en sus valores nominales el rastrillo se encuentra a 20 mm por encima del fondo de la cuba.

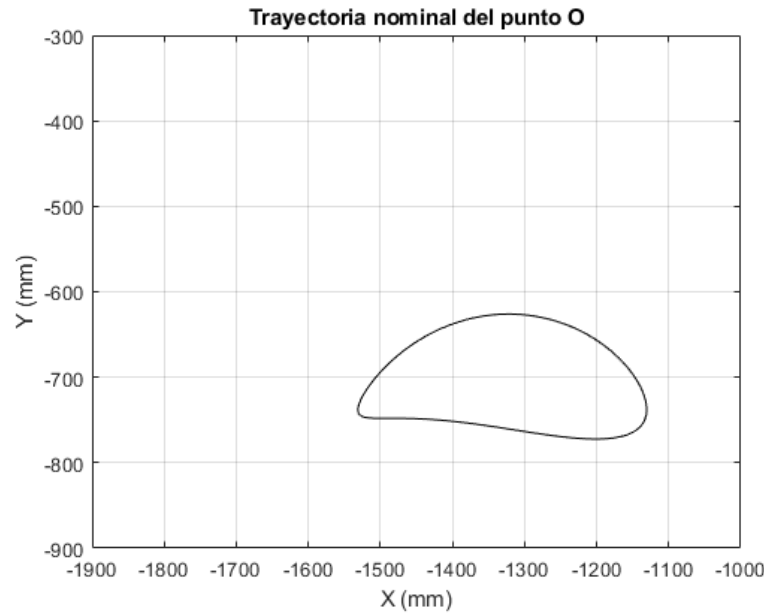


Figura 2.13: Trayectoria descrita por el punto O del rastrillo cuando los parámetros geométricos calibrables se encuentran en sus valores nominales.

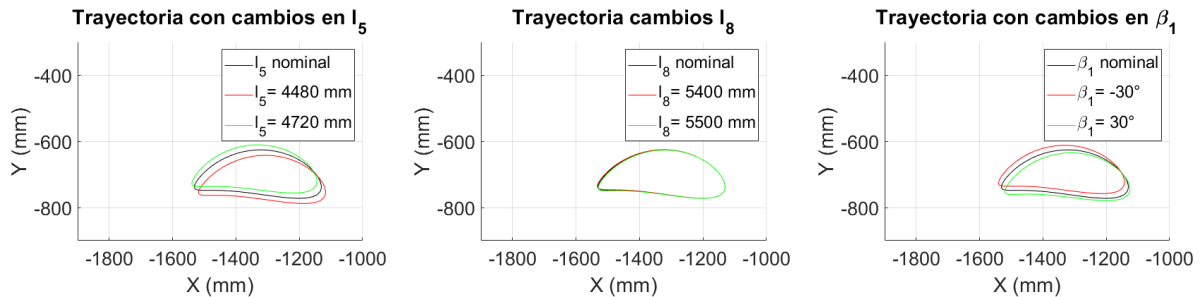
2.3.1. Trayectorias del punto O con cambios extremos

La trayectoria de O depende directamente de los valores de calibración. Por lo que se podrá obtener una familia de trayectorias dependiendo de los valores actuales de los parámetros de calibración [25].

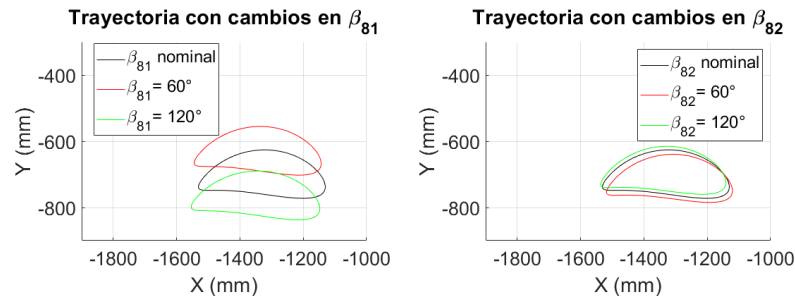
Se presentan, en la Figura 2.14a, las trayectorias del rastrillo en el punto O , al variar la longitud del parámetro l_5 , considerando las restricciones propias del elemento. La línea negra es la trayectoria nominal, la línea verde es la máxima altura a la que puede llegar el rastrillo variando la longitud de l_5 , la roja es la mínima altura para la trayectoria, al modificar la longitud de l_5 .

Las trayectoria del punto O , cuando el parámetro geométrico l_5 se ajusta a una medida de 4480 mm, es la dimensión mínima a la que puede ajustarse ese parámetro geométrico, debido a que el tornillo de ajuste no permite disminuir la dimensión l_5 más allá de esta medida. 4480 mm es una restricción física de longitud mínima para l_5 . Por ello, en este trabajo a $l_5 = 4480$ mm se le llamará el cambio mínimo del parámetro geométrico l_5 . Dicho ajuste produce una trayectoria de movimiento del punto O sobre el plano. Cuando los parámetros geométricos ajustables restantes se encuentran en: $l_8 = 5450$ mm, $\beta_{81} = 90^\circ$, $\beta_1 = 0^\circ$, $\beta_{82} = 90^\circ$, entonces, la trayectoria del punto O toma una forma particular. Dicha nueva forma se puede ver en la Figura 2.14a como una curva de color rojo graficada en el plano xy . La trayectoria roja de la Figura 2.14a esta por debajo de la curva negra correspondiente a el valor de $l_5 = 4600$ mm. Con ello, se puede ver que la trayectoria del punto O se acerca a la cuba al disminuir la longitud l_5 . Aunque se sabe que al reducir l_5 el rastrillo se acerca a la cuba, no es fácil ponderar la magnitud de este cambio. Por la gráfica, se tiene una noción de que la trayectoria del punto O ajustada con un cambio mínimo en l_5 se desplaza menos de 100 mm con respecto a la nominal

y se acerca a la cuba. Sin embargo, para poder definir esta información de manera más puntual, se realizará en secciones siguientes el análisis de cambios con ayuda de las diferenciales totales. Definir esta información de manera puntual, permitirá conocer el intervalo de variación de cada parámetro geométrico y dará información valiosa acerca de los límites de movimiento del rastrillo para evitar interferencias con la cuba. De la misma forma, cuando el parámetro geométrico calibrable l_5 se ajusta a una medida longitudinal de $l_5 = 4720$ mm, significa que es la dimensión máxima a la que puede ajustarse este parámetro geométrico. Esto es debido a que el tornillo de ajuste de l_5 no permite aumentar su longitud por encima de los 4720 mm. Por esta razón, para este trabajo a $l_5 = 4720$ mm se le conoce como el máximo cambio de l_5 . De esta forma cuando $l_5 = 4720$ mm y los parámetros geométricos ajustables restantes se ajustan a sus valores nominales de: $l_8 = 5450$ mm, $\beta_{81} = 90^\circ$, $\beta_1 = 0^\circ$, $\beta_{82} = 90^\circ$, la trayectoria del punto O toma la forma de la curva verde que se encuentra en la Figura 2.14a. En esta se puede observar que la trayectoria del punto O se aleja de la cuba. Para definir correctamente cuánto se aleja de la cuba, se realiza en secciones posteriores un análisis más detallado de los cambios vía diferenciales totales.



(a) Trayectoria del punto O del rastrillo al variar la longitud de eslabón l_5 . (b) Trayectoria del punto O del rastrillo al variar la longitud de l_8 . (c) Trayectoria del punto O del rastrillo al variar el ángulo β_1 .



(d) Trayectoria del punto O del rastrillo al variar el ángulo β_{81} . (e) Trayectoria del punto O del rastrillo al variar el ángulo β_{82} .

Figura 2.14: Trayectorias del punto O cuando varían los parámetros geométricos calibrables en sus puntos extremos

Se muestran en las Figuras 2.14b, 2.14c, 2.14d y 2.14e la representación gráfica de la trayectoria del punto O para los valores extremos de todos los otros parámetros geométricos ajustables.

De la misma manera, que para el parámetro geométrico l_5 , se muestra en la Figura 2.14b las trayectorias del punto O cuando la longitud de l_8 se modifica.

La trayectoria del punto O cuando el parámetro geométrico calibrable l_8 se ajusta a una medida longitudinal de $l_8 = 5400$ mm y los demás parámetros geométricos se encuentran en sus valores nominales de: $l_5 = 4600$ mm, $\beta_{81} = 90^\circ$, $\beta_1 = 0^\circ$, $\beta_{82} = 90^\circ$, se muestra graficada en el plano xy como una curva cerrada en color rojo. Este valor de $l_8 = 5400$ mm es el mínima longitud que el tornillo de ajuste le permite tomar a l_8 . Como se muestra en la Figura 2.14b la trayectoria roja es muy parecida a la curva nominal negra, salvo una ligera rotación hacia arriba de la mitad izquierda de la trayectoria. Debido a que el cambio es muy pequeño, la información de la sensibilidad de este parámetro geométrico necesita del análisis por medio de los diferenciales totales. Por otro lado, cuando el parámetro geométrico calibrable l_8 toma un valor longitudinal de $l_8 = 5500$ mm, y los demás parámetros geométricos se encuentran en sus valores nominales de $l_5 = 4600$ mm, $\beta_{81} = 90^\circ$, $\beta_1 = 0^\circ$, $\beta_{82} = 90^\circ$, la trayectoria del punto O se visualiza en la Figura 2.14b como una curva de color verde. Este valor de $l_8 = 5500$ mm es la máxima longitud que el tornillo de ajuste le permite tomar al parámetro geométrico ajustable l_8 . La trayectoria resultante, es muy similar a la trayectoria nominal salvo una ligera rotación hacia abajo con respecto a la curva negra. La magnitud del cambio se dimensiona con ayuda del análisis de la diferencial total de la trayectoria del punto O en las siguientes secciones.

Se muestra en la Figura 2.14c las trayectorias del punto O cuando la longitud de β_1 se modifica.

Cuando se ajusta el parámetro geométrico calibrable β_1 a un valor angular de $\beta_1 = -30^\circ$ y los demás parámetros geométricos se ajustan en sus valores nominales de: $l_8 = 5450$ mm, $l_5 = 4600$ mm $\beta_{81} = 90^\circ$, $\beta_{82} = 90^\circ$, la trayectoria del punto O resultante se representa en la Figura 2.14c como una curva cerrada de color rojo. El ajuste de $\beta_1 = -30^\circ$ es el mínimo ángulo posible que puede tomar el parámetro geométrico calibrable β_1 en el mecanismo. Como se observa en la Figura 2.14c, con este último ajuste, la curva roja se aleja de la cuba. Por otro lado, cuando el parámetro geométrico calibrable β_1 toma un valor angular de $\beta_1 = 30^\circ$ y los demás parámetros geométricos se ajustan a sus valores nominales de: $l_5 = 4600$ mm, $l_8 = 5450$ mm, $\beta_{81} = 90^\circ$, $\beta_1 = 0^\circ$, $\beta_{82} = 90^\circ$, la trayectoria del punto O se visualiza en la Figura 2.14c como una curva cerrada de color verde. El valor angular de $\beta_1 = 30^\circ$ es el máximo valor angular que puede tomar el parámetro geométrico β_1 . Como se aprecia en la Figura 2.14c, la curva verde se acerca al fondo de la cuba. La magnitud de los cambios de la trayectoria con respecto a la trayectoria nominal son visualmente parecidos a los cambio producidos por las variaciones extremas del parámetro geométrico l_5 . De la misma forma que el análisis de los anteriores parámetros geométricos. La magnitud del cambio se puede apreciar de mejor manera mediante el uso de la herramienta diferencial en la siguiente sección.

Se representa en la Figura 2.14d, las trayectorias del punto O cuando la longitud de β_{81} se modifica.

Como se observa en la Figura 2.14d, los cambios de las trayectorias roja y verde superan los cambios de todos los ajustes de los otros parámetros analizados hasta el momento. Esto es importante ya que debido a que el cambio es muy grande, la trayectoria del punto O se acerca y aleja demasiado a la cuba lo que puede provocar una interferencia si es que no se ajusta adecuadamente este parámetro geométrico calibrable.

Cuando el parámetro geométrico calibrable β_{81} se ajusta con un valor angular de $\beta_{81} = 60^\circ$, y todos los demás parámetros geométricos calibrables toman valores nominales de $l_5 = 4600$

mm, $l_8 = 5450$ mm, $\beta_1 = 0^\circ$, $\beta_{82} = 90^\circ$, la trayectoria del punto O se representa en la Figura 2.14d como una curva cerrada de color rojo. El valor de $\beta_{81} = 60^\circ$ es el mínimo ángulo al que puede ser ajustado el parámetro geométrico β_{81} . Por otro lado, cuando el parámetro geométrico calibrable β_{81} se calibra con un valor angular de $\beta_{81} = 120^\circ$, y todos los demás parámetros geométricos calibrables toman sus valores nominales de $l_5 = 4600$ mm, $l_8 = 5450$ mm, $\beta_1 = 0^\circ$, $\beta_{82} = 90^\circ$, la trayectoria del punto O se visualiza en la Figura 2.14d como una trayectoria cerrada de color verde.

De la misma forma, se grafica en la Figura 2.14e las trayectorias del punto O cuando la longitud de β_{82} se modifica.

Cuando β_{82} toma un valor angular de $\beta_{82} = 60^\circ$ y los valores de los demás parámetros geométricos calibrables se encuentran en sus valores nominales de $l_5 = 4600$ mm, $l_8 = 5450$ mm, $\beta_1 = 0^\circ$, $\beta_{81} = 90^\circ$, se produce una trayectoria del punto O que se puede ver en la Figura 2.14e como una curva cerrada de color rojo. El valor de $\beta_{82} = 60^\circ$ es el mínimo valor angular al que se puede ajustar el parámetro geométrico β_{82} . Por otro lado, cuando β_{82} se ajusta a un valor angular de $\beta_{82} = 120^\circ$ corresponde al máximo valor angular al que se puede ajustar β_{82} . Cuando β_{82} se encuentra en su máximo valor angular y los demás parámetros geométricos calibrables se encuentran en sus valores nominales de $l_5 = 4600$ mm, $l_8 = 5450$ mm, $\beta_1 = 0^\circ$, $\beta_{81} = 90^\circ$, entonces se produce una trayectoria del punto O que se puede visualizar como una curva cerrada en la Figura 2.14e.

2.3.2. Trayectorias del punto O cuando todos los parámetros geométricos calibrables están en sus valores extremos

Cuando todos los parámetros se mueven a sus valores extremos, se da el mayor cambio en la trayectoria del rastrillo, en la Figura 2.15 se puede ver estos cambios.

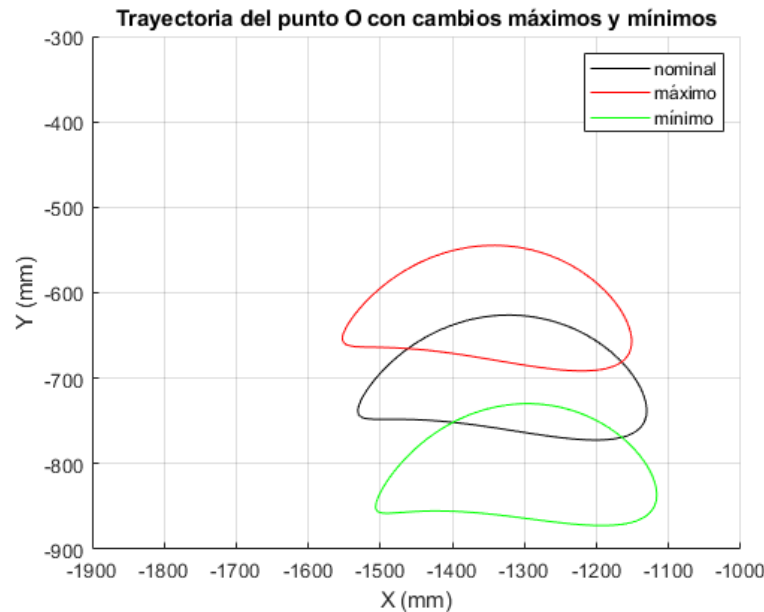


Figura 2.15: Máximo cambio del punto O del rastrillo.

Si los parámetros geométricos calibrables se ajustan en las longitudes y posiciones angulares: $l_5 = 4480$ mm, $l_8 = 5500$ mm, $\beta_1 = 30^\circ$, $\beta_{81} = 120^\circ$, $\beta_{82} = 60^\circ$, la trayectoria del punto O se representa en la Figura 2.15 como una curva cerrada de color verde. Por otro lado, cuando los parámetros geométricos calibrables se ajustan en las posiciones y longitudes: $l_5 = 4720$ mm, $l_8 = 5400$ mm, $\beta_1 = -30^\circ$, $\beta_{81} = 60^\circ$, $\beta_{82} = 120^\circ$, la trayectoria del punto O se observa en la Figura 2.15 como una trayectoria de color rojo.

Los parámetros geométricos calibrables pueden tomar cualquier valor en el rango de ajuste que le permite sus tornillos de calibración. El parámetro geométrico calibrable l_5 puede ser ajustado desde una medida de 4480 hasta 4720 mm, el parámetro geométrico calibrable l_8 puede ajustar su longitud desde 5400 hasta 5500 mm, el parámetro geométrico ajustable β_1 puede ser ajustado en el intervalo angular de -30° hasta 30° , por último los parámetros geométricos β_{81} y β_{82} pueden ajustar su valor angular en el intervalo de 60° hasta 120° . Estos parámetros geométricos pueden ajustarse en valores diferentes hasta que la trayectoria del punto O refleje un correcto funcionamiento del mecanismo.

2.4. Validación en software

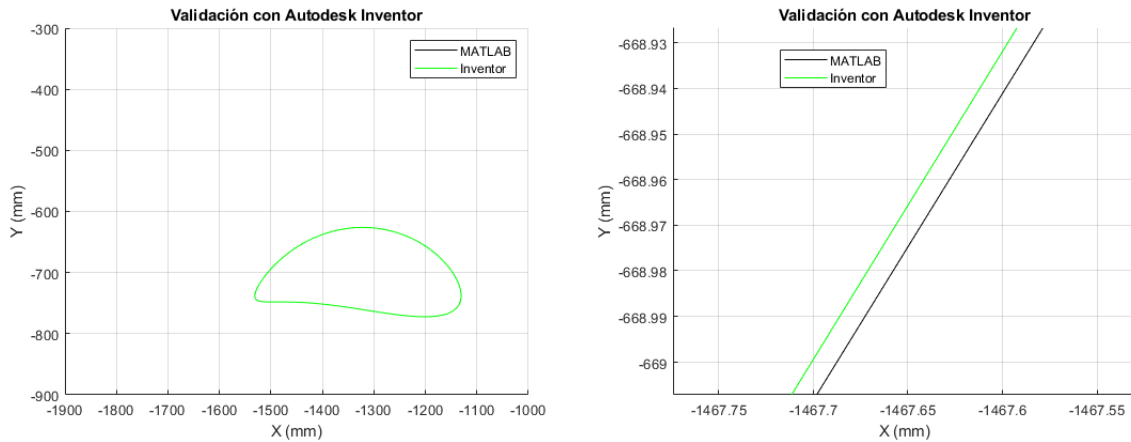
Una vez que se obtuvieron las trayectorias del punto O a partir de las ecuaciones de restricción cinemática, se necesita validar el modelo cinemático obtenido. Para ello, se utilizó el software de simulación Autodesk Inventor. En el programa se creó un ensamble con todos los parámetros geométricos en archivos tipo pieza. Para ensamblar se usó la opción unión y dependiendo del caso, se empleó la herramienta unión tipo rotación y rígida. El ensamble se analizó en el entorno de simulación dinámica. Se programó el eslabón de entrada para tener una velocidad angular de 1 rev/seg, con ayuda del graficador de trayectoria se obtuvo la posición del punto deseado O como se aprecia en la Figura 2.16.



Figura 2.16: Toma de datos del simulador de Autodesk Inventor de la cinemática del rastrillo

Los datos se exportaron a un archivo de Microsoft Excel y de ahí se abrieron en el software MATLAB. En MATLAB, se hizo una gráfica comparativa entre la trayectoria del punto O con los parámetros nominales, con uso del modelo cinemático, y la misma gráfica con los datos obtenidos en el simulador de inventor. Para ello, el paso de muestreo se cambió a manera de hacer coincidir el tamaño de los datos de ambos métodos (vector de 100 datos). Se muestra en la Figura 2.17a dicha comparativa, la línea negra corresponde a la salida del modelo cinemático y la línea verde a los datos de Inventor.

Para apreciar de mejor manera ambas trayectorias, se hizo un acercamiento a la gráfica de la Figura 2.17a y se presenta en la Figura 2.17b.



(a) Comparativa de la trayectoria del punto O con los parámetros de ajuste nominales entre el modelo de Autodesk Inventor y el modelo cinemático obtenido.

(b) Acercamiento de la gráfica 2.17a

Figura 2.17: Comparativa de la trayectoria del punto O con los parámetros de ajuste nominales entre el modelo de Autodesk Inventor y el modelo cinemático obtenido y detalle de la gráfica.

Como se puede apreciar, ambas trayectorias coinciden. Para evaluar la comparativa de ambas, se propone usar la norma \mathcal{L}_2 con el comando propio de MATLAB $norm()$. La norma L_2 , es usada para comparar vectores y se define como la raíz cuadrada de la suma (a veces infinitesimal), de los elementos del vector al cuadrado, entre el número de elementos del vector [26]. El vector a medir es la resta de ambas trayectorias. El tamaño del vector usado tiene 100 valores, por lo que se dividió la norma entre $\sqrt{100} = 10$ para estimar la media. La ventana de salida arrojó las normas de los errores en la coordenada horizontal y vertical.

| Símbolo | Valor entregado |
|----------------------|-----------------|
| Norma del error en x | 0.367 mm |
| Norma del error en y | 0.150 mm |

Cuadro 2.2: Valores de la norma del error de la resta del método del análisis cinemático contra el método del análisis dinámico del modelo virtual en Inventor, cuando todos los parámetros geométricos calibrables se encuentran en sus valores nominales.

2.5. Validación experimental

El error en la trayectoria del punto O entre ambos modelos, es decir entre el modelo generado en MATLAB y el modelo generado en Inventor es de ± 0.037 mm en x y de ± 0.0150 mm en y . En este apartado se realiza la validación experimental del modelo cinemático. Para ello, se hizo un prototipo del mecanismo de rastrillo desarenador, a una escala 1:10, de todas las medidas de longitud. El mecanismo a escala se realizó en madera MDF¹ de 3 mm. Además, este

¹Medium-density fibreboard (Tablero de fibra de densidad media).

se recubrió en acrílico de 5 mm. Las dimensiones del mecanismo se dibujaron en el software Autodesk Inventor. Las piezas se cortaron con láser y se ensamblaron con ejes redondos de acrílico de 5 mm. Se usó también, un servomecanismo para la entrada de movimiento. Para ensamblar el mecanismo, se usaron bornes ajustados para sujetar los eslabones y los ejes entre ellos. De esta manera, los bornes impiden que los eslabones se desconecten y permiten rearmar el mecanismo en diferentes configuraciones. Para emular los parámetros geométricos ajustables, se diseñaron 3 posibles cambios en la geometría. Gracias a las 3 posibles configuraciones, el mecanismo permite simular la trayectoria del punto O cuando alguno, algunos o todos sus parámetros geométricos está en sus valores extremos y en su valor nominal.

Una vez realizado el prototipo de prueba, se marcó la trayectoria del punto O sobre una hoja de papel milimétrico de 100 x 90 mm de longitud. Para ello, en el eslabón l_{85} del mecanismo, se le adaptó un lápiz porta minas de 0.3 mm. Una vez marcado, se sacó una fotocopia de la trayectoria dibujada ampliándola a una escala de 10:1, de esta manera, se permitió tomar 100 puntos, igualmente distribuidos, sobre el contorno de la trayectoria fotocopiada. Se midieron las coordenadas de cada uno de los puntos con ayuda de un calibrador electrónico y se registraron en el software MATLAB. Una vez obtenidos los vectores posición, se obtuvo la trayectoria del prototipo y se comparó con la teórica desarrollada en MATLAB.

Una imagen del prototipo realizado se muestra en la Figura 2.18. En la misma, se pueden apreciar el recubrimiento de acrílico que cubre el mecanismo.



Figura 2.18: Fotografía del prototipo construido para validar el modelo matemático.

2.5.1. Desarrollo de la validación experimental

Primero, se realizó el diseño del prototipo. La idea principal del diseño fue que este fuera todo integrado. Es decir, que se pensara en el diseño de un sistema mecatrónico. Para ello, se realizó un dibujo en el software Autodesk Inventor versión 2021. Este se puede ver en la Figura 2.19.

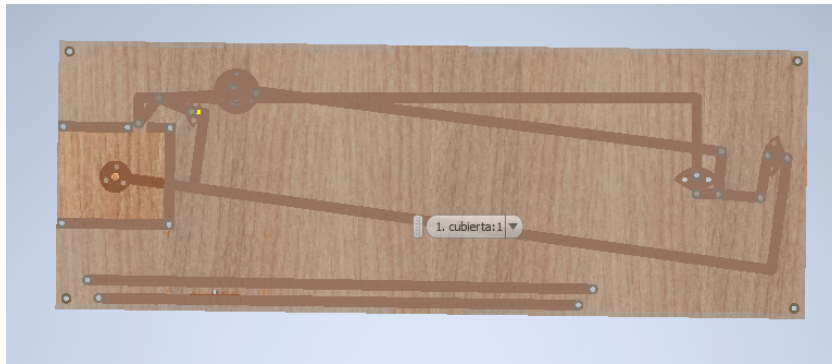


Figura 2.19: Dibujo del prototipo realizado en el Software Autodesk Inventor.

Se realizó el despiece del mecanismo. Para ello, se dibujó un boceto del primer plano de este mediante la herramienta proyectar geometría. El proceso de generar el boceto se puede ver en la Figura 2.20.

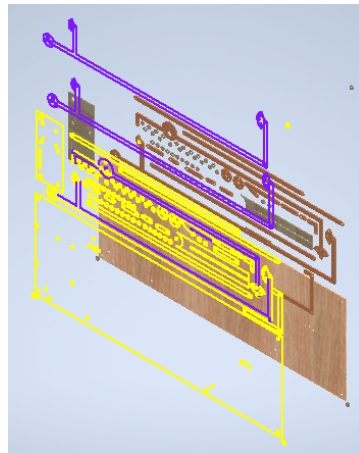


Figura 2.20: Boceto obtenido a partir de un archivo de ensamble con las piezas del mecanismo a fabricar, en el software Autodesk Inventor.

El boceto proyectado se exportó como un archivo de dibujo con extensión DXF². Luego, el archivo se convirtió a PDF³ con un convertor de DXF a PDF en línea. El archivo en PDF se imprimió en papel para asegurar que las dimensiones del archivo correspondieran con las de la impresión en papel. De esta manera, se asegura que las piezas finales corresponderán a las medidas diseñadas.

2.5.2. Materiales utilizados en la validación experimental

Se describen a continuación los dispositivos y componentes utilizados en el desarrollo del prototipo. Debido a la cantidad de características que poseen los diferentes dispositivos usados, solo se enlistan las características relevantes para la implementación del prototipo.

²Drawing exchange format (Dibujo de intercambio de formato).

³Portable Document Format (formato de documento portátil).

El servomecanismo utilizado tiene las siguientes características: [27]

- Número de referencia único del producto: FIT0185.
- Modelo: No. GB37Y3530-12V-83R.
- Marca: DFROBOT.
- Alimentación nominal 12 V⁴.
- Velocidad angular sin carga 83 RPM⁵±10%.
- Tensión mínima 1 V.
- Corriente de consumo sin carga 350 mA⁶.
- Máxima intensidad 7 A⁷.
- Torque máximo 45 kg · cm.
- Resolución del encoder antes del reductor: 16 CPR⁸.
- Reducción 131:1.

Para la medición de longitudes se utilizó un Calibrador pie de Rey electrónico. El instrumento de medida posee las siguientes características principales [28].

- Tolerancia: 0.05 mm.
- Capacidad máxima: 150 mm.
- Mínima medida: 0.01 mm.
- Tipo: digital.

Para la alimentación de todo el sistema se utilizó un eliminador de corriente como fuente de alimentación, marca Huawei con las siguientes características.

- Modelo: HW-120200U8W.
- Entrada: 100-150V - 50/60 Hz⁹800mA.
- Salida: 12V corriente continua/pulsante con 2 A.
- Consumo de energía en operación: 28.770 Wh¹⁰.
- Consumo de energía en modo espera: 0.171 Wh.

⁴Volts, unidad de diferencia de potencial.

⁵Revoluciones por minuto.

⁶Miliamperes, milésima parte de un ampere.

⁷Amperes, unidad de intensidad de corriente.

⁸Counts per revolution (Cambios por revolución).

⁹Hertz (ciclos por segundo).

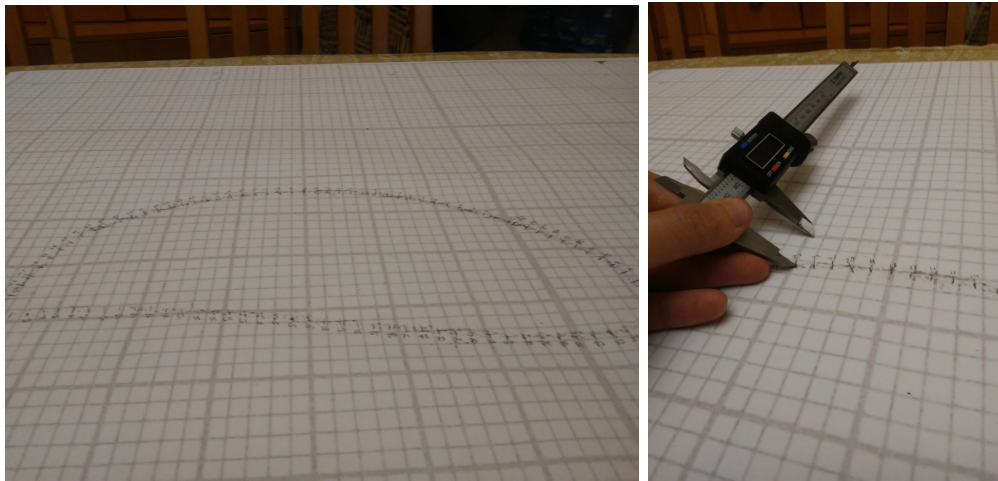
¹⁰Watts por hora.

2.5.3. Obtención de la trayectoria del punto O con el prototipo

Se realizó el trazado de la curva de la trayectoria del punto O con el prototipo de manera horizontal. Esto para que las fuerzas dinámicas gravitatorias no afectaran la dinámica del mecanismo. Se energizó el servomecanismo con una fuente regulable de switching a 1.37 v. El valor del voltaje se ajustó a este valor de manera heurística para poder asegurar el detalle de la curva. De esta manera la velocidad angular del motor era la adecuada para el proceso.

Se obtuvo la trayectoria en el papel milimétrico y se sacó una fotocopia 10 veces más grande que la original. Se midió la circunferencia de la trayectoria fotocopiada con un hilo y se dividió en segmentos de igual longitud hasta completar 100 secciones. El hilo extendido midió 910 mm y se realizaron marcas sobre la trayectoria fotocopiada cada 9.1 mm. Se registraron las coordenadas posicionales de cada punto en MATLAB. La Figura 2.21 muestra una fotografía del proceso de obtención de datos. En la Figura 2.21a, se ve una toma de la trayectoria segmentada en 100 puntos. Por otro lado, en la Figura 2.21b se muestra que cada coordenada de los puntos sobre la trayectoria ampliada, se fue adquiriendo con ayuda de un calibrador electrónico. El extremo de medida del calibrador se apoya en el punto a medir y usa los cuadros milimétricos ampliados de la fotocopia como referencia para facilitar la toma de la distancia del punto P a cada posición de la coordenada del punto.

Con los vectores de datos se realizó una gráfica de la trayectoria.



(a) Curva ampliada de la trayectoria del punto O , dividida en 100 puntos equitativamente distribuidos.

(b) Medición de la coordenada vertical de un punto sobre la trayectoria ampliada con ayuda de un calibrador.

Figura 2.21: Fotografías del proceso de obtención de coordenadas de los puntos sobre la trayectoria ampliada, para su posterior comparación con MATLAB.

2.5.4. Resultados de la validación experimental

A partir de la trayectoria obtenida por el prototipo se obtuvo la gráfica que se muestra en la Figura 2.22. Como se observa, la curva en color azul corresponde a la trayectoria obtenida

por medio del modelo cinemático del mecanismo y la curva en rojo representa la trayectoria del punto O obtenida por medio del prototipo fabricado en madera.

Se enumeran a continuación algunos de los factores a considerar a la hora de analizar los resultados y que pueden incidir en las pequeñas diferencias que se presentan entre las dos curvas.

1. La tolerancia de fabricación de las piezas de madera con láser es alta, y ronda el valor de ± 1.5 mm.
2. El juego en las articulaciones, por diseño, se escogió de ± 0.1 mm.
3. El diámetro de todos los pasadores midió 4.97 mm (en lugar de 5.00 mm) en un cuarto a 18° C de temperatura.
4. El error de medición del calibrador electrónico es de 0.05 mm usado para la medición de las coordenadas de los puntos sobre la curva.
5. La ampliación, realizada no asegura que la fotocopia sea una representación 10 veces mayor a la obtenida por el prototipo. Esto debido a una pequeña rotación en la hoja milimétrica al ser fotocopiada. Dicha rotación se puede apreciar en el margen superior de la Figura 2.21a. Como se puede apreciar, en la parte superior izquierda, no se ve la línea horizontal del margen superior de la hoja. Sin embargo, en la misma fotografía pero en la parte superior derecha se aprecia el borde del margen de la hoja, lo que habla de una ligera rotación que introduce errores de medición en las coordenadas de los puntos.
6. El grosor de la mina del lápiz para hacer la marca sobre la hoja de papel milimétrico es de 0.3 mm, por lo que, el grosor de las líneas ampliadas de la fotocopia es 3 mm. Por esta razón, las medidas de las coordenadas se tomaron en el centro de la línea.
7. La cuadrícula de la fotocopia de la trayectoria del punto O está constituida por líneas con diferente medida de grosor. Estas medidas oscilan en el intervalo de 1 a 5 mm.

Todas estas consideraciones explican el desfase de las trayectorias obtenidas. Sin embargo, la curva inferior de la trayectoria coincide en la gráfica desde -1500 mm hasta -1350 mm. Esta es la curva de trabajo cuando el clasificador realiza su valor útil. La coincidencia del área de trabajo habla de una fiabilidad del modelo matemático obtenido en el capítulo 3 de la presente tesis. Este resultado implica que es posible utilizar un modelo cinemático teórico modelado en MATLAB, como el trabajado en esta tesis, para poder representar el mecanismo real.

| Método de obtención de la trayectoria del punto O | Perímetro | Área |
|---|------------|------------------|
| Análisis Matemático | 915.176 mm | 41967.431 mm^2 |
| Prototipo Físico | 934.738 mm | 44767.665 mm^2 |

Cuadro 2.3: Valores de la superficie y el perímetro de la trayectoria del punto O generada, tanto por el análisis cinemático en MATLAB, como por el obtenido en el prototipo físico.

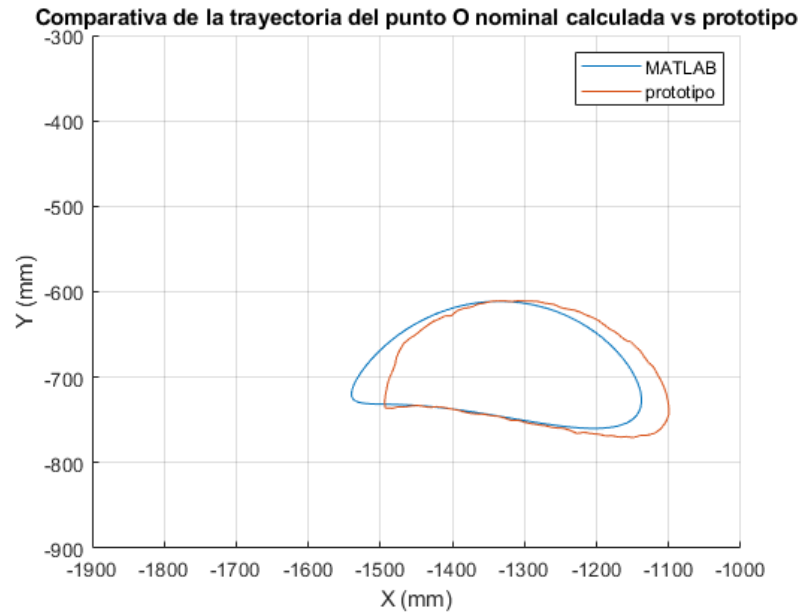


Figura 2.22: Comparativa entre la trayectoria del punto O obtenida con el modelo cinemático del mecanismo contra la trayectoria obtenida con el prototipo físico.

Ambas curvas de la Figura 2.22 se exportaron a Microsoft Excel, y de ahí, se exportaron a Autodesk Inventor. Una vez en inventor, se midieron sus respectivos perímetros y sus áreas. La Tabla 2.3 recoge los datos obtenidos del análisis de los resultados. A partir de la tabla 2.3 se pueden obtener las diferencias de área y perímetro de ambas curvas.

La diferencia de áreas es de 2800.234 mm^2 , lo cual es 6.672 % de error con respecto a el análisis matemático.

La diferencia de perímetros es de 19.562 mm, que corresponde a 2.1375 % de diferencia con respecto a la curva generada desde el análisis matemático.

2.6. Diferenciales totales

Las diferenciales totales conducen a expresiones que permiten obtener la influencia que tiene cada unidad de variación longitudinal y angular sobre el error de cada coordenada generalizada. De manera general estos tipos de ecuaciones permiten resolver colisiones entre eslabones del mecanismo, detectar atascos, ubicar, o en algunos casos re-ubicar los mejores eslabones de calibración, hacer análisis de tolerancias, etc.

Para conocer los errores de posicionamiento se debe obtener las diferenciales de las ecuaciones de restricción. De esta manera, se puede obtener la influencia que tiene cada unidad de variación longitudinal y angular de los elementos de calibración sobre el error angular de cualquier coordenada generalizada de salida.

2.6.1. Obtención de las diferenciales totales del primer circuito cinemático.

Para obtener las diferenciales totales del primer circuito cinemático, se tomará la ecuación (2.7) y (2.8) para obtener la correspondiente expresión diferencial en (2.164) y (2.165)

$$\delta l_{21}c_{21} + \delta l_5c_5 - \delta l_{61}c_{61} - \delta a_1 - l_{21}s_{21}\delta\varphi_{21} - l_5s_5\delta\varphi_5 + l_{61}s_{61}\delta\varphi_{61} = 0, \quad (2.164)$$

$$\delta l_{21}s_{21} + \delta l_5s_5 - \delta l_{61}s_{61} - \delta b_1 + l_{21}c_{21}\delta\varphi_{21} + l_5c_5\delta\varphi_5 - l_{61}c_{61}\delta\varphi_{61} = 0. \quad (2.165)$$

Se organizan de forma matricial hasta llegar a la expresión (2.166)

$$\begin{bmatrix} c_{21} & c_5 & -c_{61} & -1 & 0 & -l_{21}s_{21} \\ s_{21} & s_5 & -s_{61} & 0 & -1 & l_{21}c_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_{21} \\ \delta l_5 \\ \delta l_{61} \\ \delta a_1 \\ \delta b_1 \\ \delta\varphi_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_5s_5 & l_{61}s_{61} \\ l_5c_5 & -l_{61}c_{61} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\varphi_5 \\ \delta\varphi_{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.166)$$

Se despeja el vector de errores de posicionamiento ubicado en la ecuación (2.166), como se muestra en (2.167)

$$\begin{bmatrix} -l_5s_5 & l_{61}s_{61} \\ l_5c_5 & -l_{61}c_{61} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\varphi_5 \\ \delta\varphi_{61} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{21} & c_5 & -c_{61} & -1 & 0 & -l_{21}s_{21} \\ s_{21} & s_5 & -s_{61} & 0 & -1 & l_{21}c_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_{21} \\ \delta l_5 \\ \delta l_{61} \\ \delta a_1 \\ \delta b_1 \\ \delta\varphi_{21} \end{bmatrix}, \quad (2.167)$$

$$\begin{bmatrix} \delta\varphi_5 \\ \delta\varphi_{61} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -l_5s_5 & l_{61}s_{61} \\ l_5c_5 & -l_{61}c_{61} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_{21} & c_5 & -c_{61} & -1 & 0 & -l_{21}s_{21} \\ s_{21} & s_5 & -s_{61} & 0 & -1 & l_{21}c_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_{21} \\ \delta l_5 \\ \delta l_{61} \\ \delta a_1 \\ \delta b_1 \\ \delta\varphi_{21} \end{bmatrix}. \quad (2.168)$$

2.6.2. Obtención de las diferenciales totales del segundo circuito cinemático

Para obtener las diferenciales totales del segundo circuito cinemático, se tomará el sistema (2.54) y (2.55), se diferencia para conseguir el sistema (2.169) y (2.170)

$$\delta l_{22}c_{22} + \delta l_{31}c_{31} - \delta l_4c_4 - \delta a_2 - l_{22}s_{22}\delta\varphi_{22} - l_{31}s_{31}\delta\varphi_{31} + l_4s_4\delta\varphi_4 = 0, \quad (2.169)$$

$$\delta l_{22}s_{22} + \delta l_{31}s_{31} - \delta l_4s_4 - \delta b_2 + l_{22}c_{22}\delta\varphi_{22} + l_{31}c_{31}\delta\varphi_{31} - l_4c_4\delta\varphi_4 = 0. \quad (2.170)$$

Agrupando en forma matricial las expresiones (2.169) y (2.170) se llega a (2.171)

$$\begin{bmatrix} c_{22} & c_{31} & -c_4 & -1 & 0 & -l_{22}s_{22} \\ s_{22} & s_{31} & -s_4 & 0 & -1 & l_{22}c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_{22} \\ \delta l_{31} \\ \delta l_4 \\ \delta a_2 \\ \delta b_2 \\ \delta \varphi_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_{31}s_{31} & l_4s_4 \\ l_{31}c_{31} & -l_4c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varphi_{31} \\ \delta \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.171)$$

Se despeja el vector de errores de posición de la expresión (2.171) para llegar a la expresión (2.173)

$$\begin{bmatrix} -l_{31}s_{31} & l_4s_4 \\ l_{31}c_{31} & -l_4c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varphi_{31} \\ \delta \varphi_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{22} & c_{31} & -c_4 & -1 & 0 & -l_{22}s_{22} \\ s_{22} & s_{31} & -s_4 & 0 & -1 & l_{22}c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_{22} \\ \delta l_{31} \\ \delta l_4 \\ \delta a_2 \\ \delta b_2 \\ \delta \varphi_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.172)$$

$$\begin{bmatrix} \delta \varphi_{31} \\ \delta \varphi_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -l_{31}s_{31} & l_4s_4 \\ l_{31}c_{31} & -l_4c_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_{22} & c_{31} & -c_4 & -1 & 0 & -l_{22}s_{22} \\ s_{22} & s_{31} & -s_4 & 0 & -1 & l_{22}c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_{22} \\ \delta l_{31} \\ \delta l_4 \\ \delta a_2 \\ \delta b_2 \\ \delta \varphi_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.173)$$

2.6.3. Obtención de las diferenciales totales del tercer circuito cinemático

Para obtener las diferenciales totales del tercer circuito cinemático se toma el sistema (2.114) y (2.115), se escribe su ecuación diferencial total para obtener las expresiones (2.174) y (2.175)

$$\begin{aligned} & \delta l_4c_4 + \delta l_{32}c_{32} + \delta l_{81}c_8\text{sen}(\beta_{81}) - \delta l_{81}s_8\text{cos}(\beta_{81}) + \delta l_{82}s_8 + \delta l_8c_8 - \delta l_{83}s_8 - \delta l_{84}c_8\text{sen}(\beta_{82}) + \\ & \quad + \delta l_{84}s_8\text{cos}(\beta_{82}) - \delta l_7c_7 - \delta l_{62}c_{62} - \delta l_1\text{cos}(\beta_1) - \delta a_{3p} - l_4s_4\delta\varphi_4 - l_{32}s_{32}\delta\varphi_{32} \\ & - l_{81}s_8\delta\varphi_8\text{sen}(\beta_{81}) + l_{81}c_8\text{cos}(\beta_{81})\delta\varphi_{81} - l_{81}c_8\delta\varphi_8\text{cos}(\beta_{81}) + l_{81}s_8\text{sen}(\beta_{81})\delta\beta_{81} + l_{82}c_8\delta\varphi_8 \\ & \quad - l_8s_8\delta\varphi_8 - l_{83}c_8\delta\varphi_8 + l_{84}s_8\delta\varphi_8\text{sen}(\beta_{82}) - l_{84}c_8\text{cos}(\beta_{82})\delta\beta_{82} + l_{84}c_8\delta\varphi_8\text{cos}(\beta_{82}) \\ & \quad - l_{84}s_8\text{sen}(\beta_{82})\delta\beta_{82} + l_7s_7\delta\varphi_7 + l_{62}s_{62}\delta\varphi_{62} + l_1\text{sen}(\beta_1)\delta\beta_1 = 0, \end{aligned} \quad (2.174)$$

$$\begin{aligned} & \delta l_4s_4 + \delta l_{32}s_{32} + \delta l_{81}s_8\text{sen}(\beta_{81}) + \delta l_{81}c_8\text{cos}(\beta_{81}) - \delta l_{82}c_8 + \delta l_8s_8 + \delta l_{83}c_8 - \delta l_{84}s_8\text{sen}(\beta_{82}) \\ & \quad - \delta l_{84}c_8\text{cos}(\beta_{82}) - \delta l_7s_7 - \delta l_{62}s_{62} - \delta l_1\text{sen}(\beta_1) - \delta b_{3p} + l_4c_4\delta\varphi_4 + l_{32}c_{32}\delta\varphi_{32} + \\ & + l_{81}c_8\delta\varphi_8\text{sen}(\beta_{81}) + l_{81}s_8\text{cos}(\beta_{81})\delta\beta_{81} - l_{81}s_8\delta\varphi_8\text{cos}(\beta_{81}) - l_{81}c_8\text{sen}(\beta_{81})\delta\beta_{81} + l_{82}s_8\delta\varphi_8 + \\ & \quad + l_8c_8\delta\varphi_8 - l_{83}s_8\delta\varphi_8 - l_{84}c_8\delta\varphi_8\text{sen}(\beta_{82}) - l_{84}s_8\text{cos}(\beta_{82})\delta\beta_{82} + l_{84}s_8\delta\varphi_8\text{cos}(\beta_{82}) + \\ & \quad + l_{84}c_8\text{sen}(\beta_{82})\delta\beta_{82} - l_7c_7\delta\varphi_7 - l_{62}c_{62}\delta\varphi_{62} - l_1\text{cos}(\beta_1)\delta\beta_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.175)$$

Se agrupan términos semejantes en (2.174) y (2.175) para obtener (2.176) y (2.177)

$$\begin{aligned}
& -l_{81}s_8\delta\varphi_8\text{sen}(\beta_{81}) - l_{81}c_8\delta\varphi_8\cos(\beta_{81}) + l_{82}c_8\delta\varphi_8 - l_8s_8\delta\varphi_8 - l_{83}c_8\delta\varphi_8 + l_{84}s_8\delta\varphi_8\text{sen}(\beta_{82}) + \\
& + l_{84}c_8\delta\varphi_8\cos(\beta_{82}) + l_7s_7\delta\varphi_7 + \delta l_4c_4 + \delta l_{32}c_{32} + \delta l_{81}c_8\text{sen}(\beta_{81}) - \delta l_{81}s_8\cos(\beta_{81}) + \delta l_{82}s_8 + \\
& + \delta l_8c_8 - \delta l_{83}s_8 - \delta l_{84}c_8\text{sen}(\beta_{82}) + \delta l_{84}s_8\cos(\beta_{82}) - \delta l_7c_7 - \delta l_{62}c_{62} - \delta l_1\cos(\beta_1) - \delta a_{3p} \\
& - l_4s_4\delta\varphi_4 - l_{32}s_{32}\delta\varphi_{32} + l_{81}c_8\cos(\beta_{81})\delta\varphi_{81} + l_{81}s_8\text{sen}(\beta_{81})\delta\beta_{81} - l_{84}c_8\cos(\beta_{82})\delta\beta_{82} \\
& - l_{84}s_8\text{sen}(\beta_{82})\delta\beta_{82} + l_{62}s_{62}\delta\varphi_{62} + l_1\text{sen}(\beta_1)\delta\beta_1 = 0,
\end{aligned} \tag{2.176}$$

$$\begin{aligned}
& l_{81}c_8\delta\varphi_8\text{sen}(\beta_{81}) - l_{81}s_8\delta\varphi_8\cos(\beta_{81}) + l_{82}s_8\delta\varphi_8 + l_8c_8\delta\varphi_8 - l_{83}s_8\delta\varphi_8 + l_{84}s_8\delta\varphi_8\cos(\beta_{82}) \\
& - l_7c_7\delta\varphi_7 + \delta l_4s_4 + \delta l_{32}s_{32} + \delta l_{81}s_8\text{sen}(\beta_{81}) + \delta l_{81}c_8\cos(\beta_{81}) - \delta l_{82}c_8 + \delta l_8s_8 + \delta l_{83}c_8 \\
& - \delta l_{84}s_8\text{sen}(\beta_{82}) - \delta l_{84}c_8\cos(\beta_{82}) - \delta l_7s_7 - \delta l_{62}s_{62} - \delta l_1\text{sen}(\beta_1) - \delta b_{3p} + l_4c_4\delta\varphi_4 + \\
& + l_{32}c_{32}\delta\varphi_{32} + l_{81}s_8\cos(\beta_{81})\delta\beta_{81} - l_{81}c_8\text{sen}(\beta_{81})\delta\beta_{81} - l_{84}c_8\delta\varphi_8\text{sen}(\beta_{82}) \\
& - l_{84}s_8\cos(\beta_{82})\delta\beta_{82} + l_{84}c_8\text{sen}(\beta_{82})\delta\beta_{82} - l_{62}c_{62}\delta\varphi_{62} - l_1\cos(\beta_1)\delta\beta_1 = 0.
\end{aligned} \tag{2.177}$$

En su forma matricial las expresiones (2.176) y (2.177) se muestra a la expresión (2.178)

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\varphi_8 \\ \delta\varphi_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{118} \\ a_{21} & \dots & a_{218} \end{bmatrix} \times \\
& \times \left[\delta l_4 \ \delta l_{32} \ \delta l_{81} \ \delta l_{82} \ \delta l_8 \ \delta l_{83} \ \delta l_{84} \ \delta l_7 \ \delta l_{62} \ \delta l_1 \ \delta a_{3p} \ \delta b_{3p} \ \delta\varphi_4 \ \delta\varphi_{32} \ \delta\beta_{81} \ \delta\beta_{82} \ \delta\varphi_{62} \ \delta\beta_1 \right]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{2.178}$$

donde

$$\begin{aligned}
b_{11} &= -l_{81}s_8\text{sen}(\beta_{81}) - l_{81}c_8\cos(\beta_{81}) + l_{82}c_8 - l_8s_8 - l_{83}c_8 + l_{84}s_8\text{sen}(\beta_{82}) + l_{84}c_8\cos(\beta_{82}), \\
b_{12} &= l_7s_7, \\
b_{21} &= l_{81}c_8\text{sen}(\beta_{81}) - l_{81}s_8\cos(\beta_{81}) + l_{82}s_8 + l_8c_8 - l_{83}s_8 + l_{84}s_8\cos(\beta_{82}) - l_{84}c_8\text{sen}(\beta_{82}), \\
b_{22} &= -l_7c_7,
\end{aligned} \tag{2.179}$$

y además,

$$\begin{aligned}
& a_{11} = c_4, & a_{12} = c_{32}, & a_{13} = c_8\text{sen}(\beta_{81}) - s_8\cos(\beta_{81}), \\
& a_{14} = s_8, & a_{15} = c_8, & a_{16} = -s_8, \\
& a_{17} = -c_8\text{sen}(\beta_{82}) + s_8\cos(\beta_{82}), & a_{18} = -c_7, & a_{19} = -c_{62} \\
& a_{110} = -\cos(\beta_1), & a_{111} = -1, & a_{112} = 0, \\
& a_{113} = -l_4s_4, & a_{114} = -l_{32}s_{32}, & a_{115} = l_{81}c_8\cos(\beta_{81}) + l_{81}s_8\text{sen}(\beta_{81}), \\
& a_{116} = -l_{84}c_8\cos(\beta_{82}) - l_{84}s_8\text{sen}(\beta_{82}), & a_{117} = l_{62}s_{62} & a_{118} = l_1\text{sen}(\beta_1), \\
& a_{21} = s_4, & a_{22} = s_{32}, & a_{23} = s_8\text{sen}(\beta_{81}) + c_8\cos(\beta_{81}) \\
& a_{24} = -c_8, & b_{25} = s_8, & a_{26} = c_8, \\
& a_{27} = -s_8\text{sen}(\beta_{82}) - c_8\cos(\beta_{82}) & a_{28} = -s_7, & a_{29} = -s_{62}, \\
& a_{210} = -\text{sen}(\beta_1), & a_{211} = 0 & a_{212} = -1, \\
& a_{213} = l_4c_4, & a_{214} = l_{32}c_{32}, & a_{215} = l_{81}s_8\cos(\beta_{81}) - l_{81}c_8\text{sen}(\beta_{81}) \\
& a_{216} = -l_{84}s_8\cos(\beta_{82}) + l_{84}c_8\text{sen}(\beta_{82}), & a_{217} = -l_{62}c_{62}, & a_{218} = -l_1\cos(\beta_1).
\end{aligned} \tag{2.180}$$

En la expresión (2.178), la matriz con elementos b_{ij} , se puede renombrar como B. Por otro lado la matriz con los elementos a_{ijn} se puede renombrar A, donde $i = 1, 2, \dots, N - 1$ y

$j = 1, 2, \dots, M$. La expresión resultante se muestra en (2.181)

$$[B] \begin{bmatrix} \delta\varphi_8 \\ \delta\varphi_7 \end{bmatrix} = -[A] [\delta l_4 \delta l_{32} \delta l_{81} \delta l_{82} \delta l_8 \delta l_{83} \delta l_{84} \delta l_7 \delta l_{62} \delta l_1 \delta a_{3p} \delta b_{3p} \delta\varphi_4 \delta\varphi_{32} \delta\beta_{81} \delta\beta_{82} \delta\varphi_{62} \delta\beta_1]^T. \quad (2.181)$$

Se despeja la expresión (2.181) para obtener (2.182)

$$\begin{bmatrix} \delta\varphi_8 \\ \delta\varphi_7 \end{bmatrix} = -[B]^{-1} [A] \times \\ \times [\delta l_4 \delta l_{32} \delta l_{81} \delta l_{82} \delta l_8 \delta l_{83} \delta l_{84} \delta l_7 \delta l_{62} \delta l_1 \delta a_{3p} \delta b_{3p} \delta\varphi_4 \delta\varphi_{32} \delta\beta_{81} \delta\beta_{82} \delta\varphi_{62} \delta\beta_1]^T. \quad (2.182)$$

2.6.4. Obtención de las diferenciales totales para el punto O deseado con respecto a los parámetros calibrables

Se toma la ecuación (2.162) y (2.163). A partir de ellas se escribe la diferencial total del sistema. se llega al sistema (2.183) y (2.184)

$$\delta\mathbf{l}_{o)A}\hat{\mathbf{i}} = \delta l_{22}c_{22}\hat{\mathbf{i}} - l_{22}s_{22}\delta\varphi_{22}\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{31}c_{31}\hat{\mathbf{i}} - l_{31}s_{31}\delta\varphi_{31}\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{32}c_{32}\hat{\mathbf{i}} - l_{32}s_{32}\delta\varphi_{32}\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{81}c_{81}\hat{\mathbf{i}} \\ - l_{81}s_{81}\delta\varphi_{81}\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{82}c_{82}\hat{\mathbf{i}} - l_{82}s_{82}\delta\varphi_{82}\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{85} \cos(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{i}} - l_{85}\sin(\varphi_8 - \pi)\delta\varphi_8\hat{\mathbf{i}}, \quad (2.183)$$

$$\delta\mathbf{l}_{o)A}\hat{\mathbf{j}} = \delta l_{22}s_{22}\hat{\mathbf{j}} + l_{22}c_{22}\delta\varphi_{22}\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{31}s_{31}\hat{\mathbf{j}} + l_{31}c_{31}\delta\varphi_{31}\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{32}s_{32}\hat{\mathbf{j}} + l_{32}c_{32}\delta\varphi_{32}\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{81}s_{81}\hat{\mathbf{j}} + \\ + l_{81}c_{81}\delta\varphi_{81}\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{82}s_{82}\hat{\mathbf{j}} + l_{82}c_{82}\delta\varphi_{82}\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{85}\sin(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{j}} + l_{85} \cos(\varphi_8 - \pi)\delta\varphi_8\hat{\mathbf{j}}. \quad (2.184)$$

Operando algebraicamente la expresión (2.183) y (2.184) queda el sistema mostrado en (2.185) y (2.186)

$$-\delta\mathbf{l}_{o)A}\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{22}c_{22}\hat{\mathbf{i}} - l_{22}s_{22}\delta\varphi_{22}\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{31}c_{31}\hat{\mathbf{i}} - l_{31}s_{31}\delta\varphi_{31}\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{32}c_{32}\hat{\mathbf{i}} - l_{32}s_{32}\delta\varphi_{32}\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{81}c_{81}\hat{\mathbf{i}} \\ - l_{81}s_{81}\delta\varphi_{81}\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{82}c_{82}\hat{\mathbf{i}} - l_{82}s_{82}\delta\varphi_{82}\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{85} \cos(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{i}} - l_{85}\sin(\varphi_8 - \pi)\delta\varphi_8\hat{\mathbf{i}} = 0, \quad (2.185)$$

$$-\delta\mathbf{l}_{o)A}\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{22}s_{22}\hat{\mathbf{j}} + l_{22}c_{22}\delta\varphi_{22}\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{31}s_{31}\hat{\mathbf{j}} + l_{31}c_{31}\delta\varphi_{31}\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{32}s_{32}\hat{\mathbf{j}} + l_{32}c_{32}\delta\varphi_{32}\hat{\mathbf{j}} + \\ \delta l_{81}s_{81}\hat{\mathbf{j}} + l_{81}c_{81}\delta\varphi_{81}\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{82}s_{82}\hat{\mathbf{j}} + l_{82}c_{82}\delta\varphi_{82}\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{85}\sin(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{j}} + l_{85} \cos(\varphi_8 - \pi)\delta\varphi_8\hat{\mathbf{j}} = 0. \quad (2.186)$$

Organizando en su forma matricial queda (2.187)

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & e_{17} & e_{18} & \dots & e_{112} \\ e_{21} & a_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & e_{27} & e_{28} & \dots & e_{212} \end{bmatrix} \times \\ \times [\delta l_{22} \delta l_{31} \delta l_{32} \delta l_{81} \delta l_{82} \delta l_{85} \delta\varphi_{22} \delta\varphi_{31} \delta\varphi_{32} \delta\varphi_{81} \delta\varphi_{82} \delta\varphi_{85}]^T + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_{o)Ax} \\ \delta l_{o)Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.187)$$

donde

$$\begin{aligned}
e_{11} &= c_{22}, & e_{12} &= c_{31}, & e_{13} &= c_{32}, \\
e_{14} &= c_{81}, & e_{15} &= c_{82}, & e_{16} &= \cos(\varphi_8 - \pi), \\
e_{17} &= -l_{22}s_{22} & e_{18} &= -l_{31}s_{31} & e_{19} &= -l_{32}s_{32} \\
e_{110} &= -l_{81}s_{81} & e_{111} &= -l_{82}s_{82} & e_{112} &= -l_{85}\text{sen}(\varphi_8 - \pi) \\
e_{21} &= s_{22} & e_{22} &= s_{31} & e_{23} &= s_{32} \\
e_{24} &= s_{81} & e_{25} &= s_{82} & e_{26} &= \text{sen}(\varphi_8 - \pi) \\
e_{27} &= l_{22}c_{22} & e_{28} &= l_{31}c_{31} & e_{29} &= l_{32}c_{32} \\
e_{210} &= l_{81}c_{81} & e_{211} &= l_{82}c_{82} & e_{212} &= l_{85}\cos(\varphi_8 - \pi).
\end{aligned} \tag{2.188}$$

Se puede nombrar la matriz cuyos elementos son e_i como la matriz E .

Despejando queda la ecuación (2.189)

$$\begin{bmatrix} \delta l_{O} Ax \\ \delta l_{O} Ay \end{bmatrix} = -[E] [\delta l_{22} \delta l_{31} \delta l_{32} \delta l_{81} \delta l_{82} \delta l_{85} \delta \varphi_{22} \delta \varphi_{31} \delta \varphi_{32} \delta \varphi_{81} \delta \varphi_{82} \delta \varphi_8]^T. \tag{2.189}$$

Se puede notar que, en este caso, E coincide con la matriz de coeficientes de influencia.

La ecuación (2.189) relaciona los cambios de la trayectoria en el punto O con los cambios en las longitudes y ángulos por errores de construcción. Para este caso particular, los coeficientes e_{ij} son los coeficientes de influencia sobre el cambio de la trayectoria del punto O , para esa configuración, y se pueden calcular los valores numéricos para cada fracción de ángulo, y de esta manera, hacer un análisis.

El error de la coordenada generalizada φ_{81} es igual al error de la coordenada generalizada φ_8 , menos el error del parámetro geométrico calibrable β_{81} , como se indica en la ecuación 2.190

$$\begin{aligned}
\delta \varphi_{81} &= \delta \varphi_8 - \delta \beta_{81}, \\
\delta \varphi_{82} &= \delta \varphi_8.
\end{aligned} \tag{2.190}$$

De esta manera, la expresión 2.189 representa una relación explícita entre el cambio en la longitud o el ángulo de uno de los elementos de calibración, con la variación de la trayectoria del punto O . Se puede demostrar que efectivamente los elementos calibrables están implícitos y tienen influencia sobre el cambio de la trayectoria. Para ello, se propone, en el siguiente apartado, expandir las matrices obtenidas y encontrar los errores que relacionan los parámetros geométricos calibrables con las coordenada de salida del punto O .

2.6.5. Errores de las coordenadas generalizadas en función de los parámetros geométricos

A partir de las expresiones de los diferenciales totales de las ecuaciones asociadas a los circuitos cinemáticos que se encuentran en las expresiones (2.168), (2.173), (2.182). Se pueden expandir las matrices para obtener las expresiones correspondientes a los errores de las coordenadas generalizadas en función de los parámetros geométricos. De esta manera, el error de la coordenada generalizada φ_5 se muestra como ejemplo en (2.191). Se puede notar que los errores de coordenadas generalizadas de entrada $\delta \varphi_{21}$ y $\delta \varphi_{22}$ no se consideraron en los errores, ya que, su valor es cero debido a que los eslabones l_{21} y l_{22} dan vueltas completas y sus ángulos correspondientes adquieren todos los valores en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$$\delta \varphi_5 = \frac{\cos(\varphi_{61} - \varphi_{21})}{l_5 \text{sen}(\varphi_5 - \varphi_{61})} \delta l_{21} + \frac{\cos(\varphi_{61} - \varphi_5)}{l_5 \text{sen}(\varphi_5 - \varphi_{61})} \delta l_5 - \frac{1}{l_5 \text{sen}(\varphi_5 - \varphi_{61})} \delta l_{61} - \frac{c_{61}}{l_5 \text{sen}(\varphi_5 - \varphi_{61})} \delta a_1 - \frac{s_{61}}{l_5 \text{sen}(\varphi_5 - \varphi_{61})} \delta b_1. \tag{2.191}$$

Del mismo modo, el error de φ_{61} se indica en (2.192)

$$\delta\varphi_{61} = \frac{\cos(\varphi_5 - \varphi_{21})}{l_{61}\text{sen}(\varphi_5 - \varphi_{61})}\delta l_{21} + \frac{1}{l_{61}\text{sen}(\varphi_5 - \varphi_{61})}\delta l_5 + \frac{\cos(\varphi_5 + \varphi_{61})}{l_{61}\text{sen}(\varphi_5 - \varphi_{61})}\delta l_{61} - \frac{c_5}{l_{61}\text{sen}(\varphi_5 - \varphi_{61})}\delta a_1 - \frac{s_5}{l_{61}\text{sen}(\varphi_5 - \varphi_{61})}\delta b_1. \quad (2.192)$$

El error de φ_{31} se señala en (2.193)

$$\delta\varphi_{31} = \frac{\cos(\varphi_4 - \varphi_{22})}{l_{31}\text{sen}(\varphi_{31} - \varphi_4)}\delta l_{22} + \frac{\cos(\varphi_4 - \varphi_{31})}{l_{31}\text{sen}(\varphi_{31} - \varphi_4)}\delta l_{31} - \frac{1}{l_{31}\text{sen}(\varphi_{31} - \varphi_4)}\delta l_4 - \frac{c_4}{l_{31}\text{sen}(\varphi_{31} - \varphi_4)}\delta a_2 - \frac{s_4}{l_{31}\text{sen}(\varphi_{31} - \varphi_4)}\delta b_2. \quad (2.193)$$

El error de φ_4 se muestra en (2.194)

$$\varphi_4 = \frac{\cos(\varphi_{31} - \varphi_{22})}{l_4\text{sen}(\varphi_{31} - \varphi_4)}\delta l_{22} + \frac{1}{l_4\text{sen}(\varphi_{31} - \varphi_4)}\delta l_{31} - \frac{\cos(\varphi_{31} - \varphi_4)}{l_4\text{sen}(\varphi_{31} - \varphi_4)}\delta l_4 - \frac{c_{31}}{l_4\text{sen}(\varphi_{31} - \varphi_4)}\delta a_2 - \frac{s_{31}}{l_4\text{sen}(\varphi_{31} - \varphi_4)}\delta b_2. \quad (2.194)$$

En las expresión (2.101) se muestra el valor de las coordenadas generalizadas de salida φ_{81} , φ_{82} , φ_{83} y φ_{84} en términos de las coordenadas generalizadas de entrada y los parámetros geométricos. Se derivan las expresiones (2.101), (2.102) y (2.103). Se obtienen los valores de los errores $\delta\varphi_{81}$, $\delta\varphi_{82}$, $\delta\varphi_{83}$, $\delta\varphi_{84}$. Estos se indica en la expresión (2.195)

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{81} &= \delta\varphi_8 - \delta\beta_{81}, \\ \delta\varphi_{82} &= \delta\varphi_8, \\ \delta\varphi_{83} &= \delta\varphi_{82}, \\ \delta\varphi_{84} &= \delta\varphi_8 - \delta\beta_{82}. \end{aligned} \quad (2.195)$$

En cuanto a los errores para las coordenadas generalizadas φ_{32} y φ_{62} , se determinan derivando totalmente las expresiones (2.102) y (2.103). Los errores $\delta\varphi_{32}$ y $\delta\varphi_{62}$ se visualizan en las expresiones (2.196) y (2.197)

$$\delta\varphi_{32} = \delta\varphi_{31} - \delta\beta_3, \quad (2.196)$$

$$\delta\varphi_{62} = \delta\varphi_{61} - \delta\beta_6. \quad (2.197)$$

El error de φ_8 se ve en (2.198)

$$\begin{aligned} \delta\varphi_8 &= \frac{\cos(\varphi_7 - \varphi_4)}{den}\delta l_4 + \frac{\cos(\varphi_7 - \varphi_{32})}{den}\delta l_{32} + \frac{\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_8 + \beta_{81})}{den}\delta l_{81} - \frac{\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_8)}{den}\delta l_{82} + \frac{\cos(\varphi_7 - \varphi_8)}{den}\delta l_8 + \\ &+ \frac{\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_8)}{den}\delta l_{83} - \frac{\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_8 + \beta_{82})}{den}\delta l_{84} - \frac{1}{den}\delta l_7 - \frac{\cos(\varphi_7 - \varphi_{62})}{den}l_{62} - \frac{\cos(\varphi_7 - \beta_1)}{den}\delta l_1 \\ &- \frac{c_7}{den}\delta a_3 - \frac{s_7}{den}\delta b_3 + \frac{l_4\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_4)}{den}\delta\varphi_4 + \frac{l_{32}\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_{32})}{den}\delta\varphi_{32} + \\ &+ \frac{l_{81}\cos(\varphi_7 - \varphi_8 + \beta_{81})}{den}\delta\beta_{81} - \frac{l_{84}\cos(\varphi_7 - \varphi_8 + \beta_{82})}{den}\delta\beta_{82} - \frac{l_{62}\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_{62})}{den}\delta\varphi_{62} - \frac{l_1\text{sen}(\varphi_7 - \beta_1)}{den}\delta\beta_1, \end{aligned} \quad (2.198)$$

donde

$$\begin{aligned} den &= l_{81}\cos(\varphi_8 - \beta_{81} - \varphi_7) - l_{82}\cos(\varphi_8 - \varphi_7) + l_8\text{sen}(\varphi_8 - \varphi_7) + l_{83}\cos(\varphi_8 - \varphi_7) \\ &- l_{84}\cos(\varphi_8 - \beta_{82} - \varphi_7). \end{aligned} \quad (2.199)$$

Se sustituye las ecuaciones (2.194) y (2.196) en la (2.199) para obtener la expresión (2.200)

$$\begin{aligned}
\delta\varphi_8 = & \frac{\cos(\varphi_7-\varphi_4)-\text{sen}(\varphi_7-\varphi_4)\cot(\varphi_{31}-\varphi_4)}{\text{den}}\delta l_4 + \frac{\cos(\varphi_7-\varphi_{32})}{\text{den}}\delta l_{32} + \frac{\text{sen}(\varphi_7-\varphi_8+\beta_{81})}{\text{den}}\delta l_{81} \\
& - \frac{\text{sen}(\varphi_7-\varphi_8)}{\text{den}}\delta l_{82} + \frac{\cos(\varphi_7-\varphi_8)}{\text{den}}\delta l_8 + \frac{\text{sen}(\varphi_7-\varphi_8)}{\text{den}}\delta l_{83} - \frac{\text{sen}(\varphi_7-\varphi_8+\beta_{82})}{\text{den}}\delta l_{84} - \frac{1}{\text{den}}\delta l_7 \\
& - \frac{\cos(\varphi_7-\varphi_{62})}{\text{den}}l_{62} - \frac{\cos(\varphi_7-\beta_1)}{\text{den}}\delta l_1 - \frac{c_7}{\text{den}}\delta a_3)_p - \frac{s_7}{\text{den}}\delta b_3)_p + \frac{\text{sen}(\varphi_7-\varphi_4)}{\text{den}}\frac{\cos(\varphi_{31}-\varphi_{22})}{\text{sen}(\varphi_{31}-\varphi_4)}\delta l_{22} \\
& + \frac{\text{sen}(\varphi_7-\varphi_4)}{\text{den}}\frac{1}{\text{sen}(\varphi_{31}-\varphi_4)}\delta l_{31} - \frac{\text{sen}(\varphi_7-\varphi_4)}{\text{den}}\frac{c_{31}}{\text{sen}(\varphi_{31}-\varphi_4)}\delta a_2 - \frac{\text{sen}(\varphi_7-\varphi_4)}{\text{den}}\frac{s_{31}}{\text{sen}(\varphi_{31}-\varphi_4)}\delta b_2 \\
& + \frac{l_{32}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{32})}{\text{den}}\delta\varphi_{31} - \frac{l_{32}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{32})}{\text{den}}\delta\beta_3 + \frac{l_{81}\cos(\varphi_7-\varphi_8+\beta_{81})}{\text{den}}\delta\beta_{81} \\
& - \frac{l_{84}\cos(\varphi_7-\varphi_8+\beta_{82})}{\text{den}}\delta\beta_{82} - \frac{l_{62}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{62})}{\text{den}}\delta\varphi_{61} + \frac{l_{62}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{62})}{\text{den}}\delta\beta_6 - \frac{l_1\text{sen}(\varphi_7-\beta_1)}{\text{den}}\delta\beta_1,
\end{aligned} \tag{2.200}$$

donde el denominador de la expresión (2.200) se designa como den en la expresión (2.201)

$$\begin{aligned}
den = & l_{81}\cos(\varphi_8 - \beta_{81} - \varphi_7) - l_{82}\cos(\varphi_8 - \varphi_7) + l_8\text{sen}(\varphi_8 - \varphi_7) + l_{83}\cos(\varphi_8 - \varphi_7) \\
& - l_{84}\cos(\varphi_8 - \beta_{82} - \varphi_7).
\end{aligned} \tag{2.201}$$

Se sustituyen las expresiones (2.193) y (2.192) en (2.200) para obtener (2.202)

$$\begin{aligned}
\delta\varphi_8 = & \frac{l_{31}\text{sen}(\varphi_{31}-\varphi_4)\cos(\varphi_7-\varphi_4)-l_{31}\text{sen}(\varphi_{31}-\varphi_4)\text{sen}(\varphi_7-\varphi_4)\cot(\varphi_{31}-\varphi_4)-l_{32}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{32})}{l_{31}\text{sen}(\varphi_{31}-\varphi_4)[den]}\delta l_4 + \\
& + \frac{\cos(\varphi_7-\varphi_{32})}{\text{den}}\delta l_{32} + \frac{\text{sen}(\varphi_7-\varphi_8+\beta_{81})}{\text{den}}\delta l_{81} - \frac{\text{sen}(\varphi_7-\varphi_8)}{\text{den}}\delta l_{82} + \frac{\cos(\varphi_7-\varphi_8)}{\text{den}}\delta l_8 + \\
& + \frac{\text{sen}(\varphi_7-\varphi_8)}{\text{den}}\delta l_{83} - \frac{\text{sen}(\varphi_7-\varphi_8+\beta_{82})}{\text{den}}\delta l_{84} - \frac{1}{\text{den}}\delta l_7 - \frac{\cos(\varphi_7-\varphi_{62})}{\text{den}}l_{62} - \frac{\cos(\varphi_7-\beta_1)}{\text{den}}\delta l_1 \\
& - \frac{c_7}{\text{den}}\delta a_3)_p - \frac{s_7}{\text{den}}\delta b_3)_p + \frac{l_{31}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_4)\cos(\varphi_{31}-\varphi_{22})+l_{32}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{32})\cos(\varphi_4-\varphi_{22})}{l_{31}\text{sen}(\varphi_{31}-\varphi_4)[den]}\delta l_{22} \\
& - \frac{l_{31}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_4)\cos(\varphi_{31})-l_{32}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{32})\cos(\varphi_4)}{l_{31}\text{sen}(\varphi_{31}-\varphi_4)[den]}\delta a_2 - \frac{l_{32}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{32})}{\text{den}}\delta\beta_3 + \\
& + \frac{l_{31}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_4)+l_{32}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{32})\cos(\varphi_4-\varphi_{31})}{l_{31}\text{sen}(\varphi_{31}-\varphi_4)[den]}\delta l_{31} + \frac{l_{81}\cos(\varphi_7-\varphi_8+\beta_{81})}{\text{den}}\delta\beta_{81} \\
& - \frac{l_{31}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_4)\text{sen}(\varphi_{31})-l_{32}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{32})\text{sen}(\varphi_4)}{l_{31}\text{sen}(\varphi_{31}-\varphi_4)[den]}\delta b_2 - \frac{l_{84}\cos(\varphi_7-\varphi_8+\beta_{82})}{\text{den}}\delta\beta_{82} \\
& - \frac{l_{62}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{62})\cos(\varphi_5-\varphi_{21})}{l_{61}\text{sen}(\varphi_5-\varphi_{61})[den]}\delta l_{21} - \frac{l_{62}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{62})}{l_{61}\text{sen}(\varphi_5-\varphi_{61})[den]}\delta l_5 \\
& - \frac{l_{62}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{62})\cos(\varphi_5+\varphi_{61})}{l_{61}\text{sen}(\varphi_5-\varphi_{61})[den]}\delta l_{61} + \frac{l_{62}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{62})\cos(\varphi_5)}{l_{61}\text{sen}(\varphi_5-\varphi_{61})[den]}\delta a_1 + \\
& + \frac{l_{62}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{62})\text{sen}(\varphi_5)}{l_{61}\text{sen}(\varphi_5-\varphi_{61})[den]}\delta b_1 + \frac{l_{62}\text{sen}(\varphi_7-\varphi_{62})}{\text{den}}\delta\beta_6 - \frac{l_1\text{sen}(\varphi_7-\beta_1)}{\text{den}}\delta\beta_1,
\end{aligned} \tag{2.202}$$

donde el dominador de la expresión (2.202) es igual a la indicada en (2.199).

Conociendo los errores de las coordenadas generalizadas, es posible escribir la expresión de la diferencial de trayectoria del punto O en términos de los diferenciales de los parámetros geométricos

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{l}_{O)A}\hat{\mathbf{i}} = & \delta l_{22}c_{22}\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{32}c_{32}\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{31}c_{31}\hat{\mathbf{i}} + \left[-l_{31}s_{31}\hat{\mathbf{i}} - l_{32}s_{32}\hat{\mathbf{i}}\right]\delta\varphi_{31} + l_{32}s_{32}\delta\beta_3\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{81}c_{81}\hat{\mathbf{i}} + \\
& + l_{81}s_{81}\delta\beta_{81}\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{85}\cos(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{i}} + \delta l_{82}c_{82}\hat{\mathbf{i}} + \left[-l_{82}s_{82}\hat{\mathbf{i}} - l_{85}\text{sen}(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{i}} - l_{81}s_{81}\hat{\mathbf{i}}\right]\delta\varphi_8,
\end{aligned} \tag{2.203}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{l}_{O)A}\hat{\mathbf{j}} = & \delta l_{22}s_{22}\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{31}s_{31}\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{32}s_{32}\hat{\mathbf{j}} + \left[l_{31}c_{31}\hat{\mathbf{j}} + l_{32}c_{32}\hat{\mathbf{j}}\right]\delta\varphi_{31} - l_{32}c_{32}\delta\beta_3\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{81}s_{81}\hat{\mathbf{j}} \\
& - l_{81}c_{81}\delta\beta_{81}\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{85}\text{sen}(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{j}} + \delta l_{82}s_{82}\hat{\mathbf{j}} + \left[l_{82}c_{82}\hat{\mathbf{j}} + l_{85}\cos(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{j}} + l_{81}c_{81}\hat{\mathbf{j}}\right]\delta\varphi_8.
\end{aligned} \tag{2.204}$$

donde el denominador en las expresiones (2.205) y (2.206) es el mismo que el mostrado en la expresión (2.199).

La expresión (2.205) y (2.206) demuestran que todos los parámetros geométricos tienen influencia sobre el cambio en la trayectoria del punto O , incluyendo a los parámetros geométricos calibrables.

A partir de las ecuaciones (2.205) y (2.206) se pueden escribir únicamente los términos correspondientes a los diferenciales de los parámetros geométricos calibrables con respecto a los cambios de la trayectoria del punto O . Por ello, se muestra en las expresiones (2.207) y (2.208) los términos para δl_5 , en (2.209) y (2.210) los términos para δl_8 , en (2.211) y (2.212) los términos para $\delta\beta_{81}$, en (2.213) y (2.214) los términos para $\delta\beta_{82}$, en 2.215 y (2.216) los términos para $\delta\beta_1$

$$- \left[-l_{82}s_{82}\hat{\mathbf{i}} - l_{85}\text{sen}(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{i}} - l_{81}s_{81}\hat{\mathbf{i}} \right] \frac{l_{62}\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_{62})}{l_{61}\text{sen}(\varphi_5 - \varphi_{61})[den]} \delta l_5 \quad (2.207)$$

$$- \left[l_{82}c_{82}\hat{\mathbf{j}} + l_{85}\cos(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{j}} + l_{81}c_{81}\hat{\mathbf{j}} \right] \frac{l_{62}\text{sen}(\varphi_7 - \varphi_{62})}{l_{61}\text{sen}(\varphi_5 - \varphi_{61})[den]} \delta l_5, \quad (2.208)$$

$$+ \left[-l_{82}s_{82}\hat{\mathbf{i}} - l_{85}\text{sen}(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{i}} - l_{81}s_{81}\hat{\mathbf{i}} \right] \frac{\cos(\varphi_7 - \varphi_8)}{[den]} \delta l_8, \quad (2.209)$$

$$+ \left[l_{82}c_{82}\hat{\mathbf{j}} + l_{85}\cos(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{j}} + l_{81}c_{81}\hat{\mathbf{j}} \right] \frac{\cos(\varphi_7 - \varphi_8)}{[den]} \delta l_8, \quad (2.210)$$

$$l_{81}s_{81}\delta\beta_{81}\hat{\mathbf{i}} + \left[-l_{82}s_{82}\hat{\mathbf{i}} - l_{85}\text{sen}(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{i}} - l_{81}s_{81}\hat{\mathbf{i}} \right] \frac{l_{81}\cos(\varphi_7 - \varphi_8 + \beta_{81})}{[den]} \delta\beta_{81}, \quad (2.211)$$

$$-l_{81}c_{81}\delta\beta_{81}\hat{\mathbf{j}} + \left[l_{82}c_{82}\hat{\mathbf{j}} + l_{85}\cos(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{j}} + l_{81}c_{81}\hat{\mathbf{j}} \right] \frac{l_{81}\cos(\varphi_7 - \varphi_8 + \beta_{81})}{[den]} \delta\beta_{81}, \quad (2.212)$$

$$- \left[-l_{82}s_{82}\hat{\mathbf{i}} - l_{85}\text{sen}(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{i}} - l_{81}s_{81}\hat{\mathbf{i}} \right] \frac{l_{84}\cos(\varphi_7 - \varphi_8 + \beta_{82})}{[den]} \delta\beta_{82}, \quad (2.213)$$

$$- \left[l_{82}c_{82}\hat{\mathbf{j}} + l_{85}\cos(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{j}} + l_{81}c_{81}\hat{\mathbf{j}} \right] \frac{l_{84}\cos(\varphi_7 - \varphi_8 + \beta_{82})}{[den]} \delta\beta_{82}, \quad (2.214)$$

$$- \left[-l_{82}s_{82}\hat{\mathbf{i}} - l_{85}\text{sen}(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{i}} - l_{81}s_{81}\hat{\mathbf{i}} \right] \frac{l_1\text{sen}(\varphi_7 - \beta_1)}{[den]} \delta\beta_1, \quad (2.215)$$

$$- \left[l_{82}c_{82}\hat{\mathbf{j}} + l_{85}\cos(\varphi_8 - \pi)\hat{\mathbf{j}} + l_{81}c_{81}\hat{\mathbf{j}} \right] \frac{l_1\text{sen}(\varphi_7 - \beta_1)}{[den]} \delta\beta_1, \quad (2.216)$$

donde el término den para las expresiones (2.207), (2.208), (2.209), (2.210), (2.211), (2.212), (2.213), (2.214), (2.215) y (2.216) es el mismo que la expresión presentada en (2.201).

Una vez obtenido el modelo cinemático y cinemático diferencial total, se puede realizar el análisis de sensibilidad de los parámetros geométricos calibrables sobre la trayectoria del rastrillo. Este es de principal interés para esta tesis.

2.7. Aproximación del diferencial

En general, para realizar el análisis de la sensibilidad de los parámetros geométricos de un mecanismo plano se utilizan coeficientes de influencia. Un coeficiente de influencia es el término numérico que acompaña a los diferenciales de los parámetros geométricos en una expresión diferencial total para cada valor angular de entrada.

En el caso de esta tesis, el conjunto generador de los coeficientes de influencia de los parámetros geométricos calibrables son los términos que acompañan a δl_5 , δl_8 , $\delta\beta_{81}$, $\delta\beta_{82}$, $\delta\beta_1$,

en su respectiva expresión general, (2.207), (2.208), (2.209), (2.210), (2.211), (2.212), (2.213), (2.214), (2.215) y (2.216). Una vez evaluada las expresiones, y haciendo $\delta p_i = 1$, los coeficientes de influencia resultantes son valores numéricos, de tipo horizontal y vertical para un cierto valor de ángulo de entrada. Estos valores numéricos se pueden usar para conocer la sensibilidad mediante una comparación de su magnitud. Si el coeficiente de influencia es mayor a otro, la sensibilidad asociada al parámetro geométrico correspondiente será mayor. Por otro lado, si el valor numérico del coeficiente es menor a otro, la sensibilidad del parámetro geométrico asociado será menor.

En algunas ocasiones, se pueden tomar todos los valores numéricos que toma el conjunto de cierta expresión generadora de coeficientes con respecto a la coordenada generalizada de entrada y obtener como resultado una gráfica. El tipo de gráfica dependerá de la información que se quiera extraer de los coeficientes de influencia. Así pues, se pueden visualizar el conjunto de valores de los coeficientes de influencia horizontales y graficarse contra los valores angulares de entrada. También, se pueden tomar el conjunto de los coeficientes de influencia verticales y visualizarse contra los valores angulares de entrada. Estas gráficas permiten visualizar la sensibilidad de los parámetros geométricos con respecto a la entrada del mecanismo. Alternativamente, se pueden tomar todos los valores de los coeficientes de influencia horizontales y verticales para visualizarlos juntos. De esta manera, en una sola gráfica se puede visualizar el conjunto de todos los coeficientes de influencia.

Para generar esta última gráfica se puede emplear la expresión (2.189) en lugar de emplear los términos de las expresiones (2.207), (2.208), (2.209), (2.210), (2.211), (2.212), (2.213), (2.214), (2.215) y (2.216). Esto debido a que la expresión (2.189) contiene todos los términos, de cada parámetro geométrico, organizados en forma matricial. Por ello, es evidente que emplear (2.189) permite organizar mejor los términos en el programa generador de la gráfica. La expresión (2.189) se puede representar gráficamente en el plano tomando los elementos del vector horizontal y vertical de la trayectoria del punto O como puntos sobre una gráfica. Dicha representación gráfica se puede observar como una trayectoria cerrada y depende de los valores de la coordenada generalizada de entrada y de los diferenciales de los parámetros geométricos.

En cualquier caso, los diferenciales de los parámetros geométricos δp_i representan las tolerancias dimensionales de fabricación. En esta tesis se propone usar las tolerancias dimensionales, δp_i , de los parámetros geométricos calibrables como el intervalo de variación que puede tener dichos parámetros geométricos. Esto con la finalidad de generar un método de análisis al estudio del comportamiento de los cambios de los parámetros geométricos calibrables sobre el comportamiento del mecanismo. Para realizar el estudio, únicamente del efecto de los parámetros geométricos calibrables sobre cambios en la trayectoria del punto O , se presupone que todos los demás diferenciales de los parámetros geométricos no calibrables no tienen efecto sobre la salida. Esto último se logra variando un solo diferencial de parámetro geométrico; el que se desea estudiar, e igualando a cero todos los demás.

2.7.1. Grado de confiabilidad del método de interpretación de curvas diferenciales totales

La curva resultante al graficar la expresión (2.189), bajo el efecto de los cambios de uno de los parámetros geométricos, no tiene un significado físico como tal, sin embargo es posible pensar en ella como los cambios de la trayectoria del punto O . Por ello, se puede saber si la

gráfica obtenida por el método de los diferenciales totales es correcta comparándola con la curva generada a partir de la resta de la trayectoria nominal del punto O con la trayectoria del punto O desplazada debido a un cambio en los parámetros geométricos calibrables.

En otras palabras, se resta la curva trasladada menos la curva nominal en sus componentes horizontales y verticales para obtener una aproximación del diferencial. De manera matemática:

$$\delta l_{o)A_x} \approx l_{o)A_x} \text{ trasladada} - l_{o)A_x} \text{ nominal} \quad (2.217)$$

$$\delta l_{o)A_y} \approx l_{o)A_y} \text{ trasladada} - l_{o)A_y} \text{ nominal}. \quad (2.218)$$

De la expresión (2.217), $\delta l_{o)A}$ son los elementos del vector de la diferencial de la trayectoria del punto de interés. Por otra parte, $l_{o)A} \text{ nominal}$ es el conjunto de elementos del vector de la trayectoria del punto de interés con sus valores nominales. A su vez, $l_{o)A} \text{ trasladada}$ son los elementos del vector de trayectoria del punto de interés O , desplazada respecto a la nominal, por el cambio en sus parámetros geométricos calibrables.

La relación (2.217), se puede demostrar con el uso de la definición formal de la diferencial total. Esta se define formalmente de la siguiente forma:

$$\delta l_{o)A_{x,y}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(l_{o)A_{x,y}+h} - (l_{o)A_{x,y}})}{(\varphi_i+h, l_i+h) - (\varphi_i, l_i)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\varphi_i+h, l_i+h) - (\varphi_i, l_i)}{(t+h) - t} \lim_{h \rightarrow 0} (t+h) - t, \quad (2.219)$$

donde:

$$l_{o)A_{x,y}} + h = l_{o)A_{x,y}} \text{ trasladada} \quad (2.220)$$

$$l_{o)A_{x,y}} = l_{o)A_{x,y}} \text{ nominal}. \quad (2.221)$$

Después de usar la regla de la cadena la expresión queda como se muestra a continuación:

$$\delta l_{o)A_{x,y}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l_{o)A_{x,y}} \text{ trasladada} - l_{o)A_{x,y}} \text{ nominal}}{(\varphi_i+h, l_i+h) - (\varphi_i, l_i)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\varphi_i+h, l_i+h) - (\varphi_i, l_i)}{t+h-t} \lim_{h \rightarrow 0} (t+h) - t. \quad (2.222)$$

Por la propiedad distributiva de los límites:

$$\delta l_{o)A_{x,y}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{l_{o)A_{x,y}} \text{ trasladada} - l_{o)A_{x,y}} \text{ nominal}}{(\varphi_i+h, l_i+h) - (\varphi_i, l_i)} \frac{(\varphi_i+h, l_i+h) - (\varphi_i, l_i)}{t+h-t} (t+h) - t \right], \quad (2.223)$$

se puede llegar a que:

$$\delta l_{o)A_{x,y}} = \lim_{h \rightarrow 0} l_{o)A_{x,y}} \text{ trasladada} - (l_{o)A_{x,y}} \text{ nominal}). \quad (2.224)$$

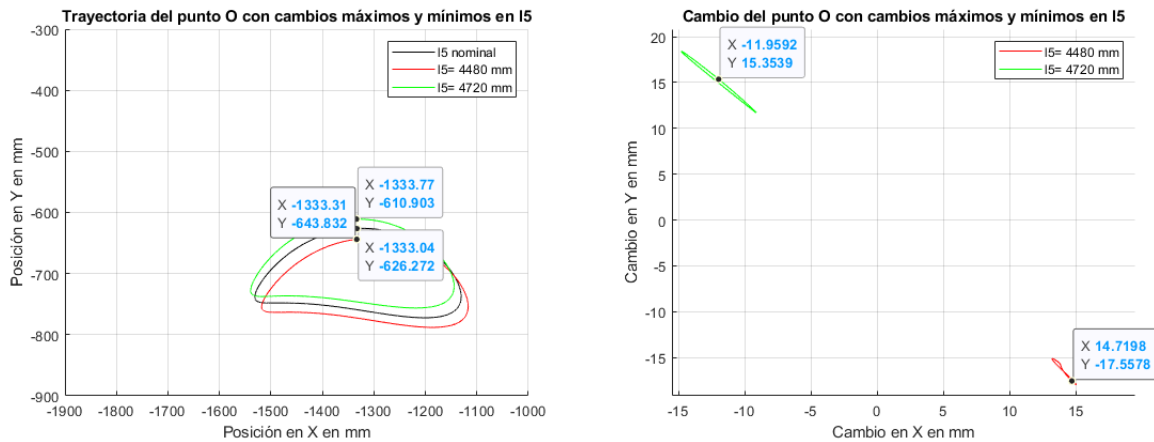
De esta última expresión, también es evidente que si se quita el límite, el resultado es una aproximación:

$$\delta l_{o)A_{x,y}} \approx l_{o)A_{x,y}} \text{ trasladada} - l_{o)A_{x,y}} \text{ nominal}, \quad (2.225)$$

que se traduce en la expresión (2.217). Para comprobar que la aproximación (2.217) se cumple para la trayectoria del punto O , se toma la gráfica de la trayectoria del punto O cuando varía el parámetro geométrico l_5 . Dicha gráfica se puede ver en la Figura 2.23a. A continuación, se toma una coordenada sobre la gráfica para cada una de las curvas generadas y se resta la coordenada correspondiente a la curva trasladada menos la coordenada correspondiente a la curva nominal como se muestra en la Figura 2.23a.

El cambio $\delta O_{Ay} = O_{Ay} \text{ trasladado} - O_{Ay} \text{ nominal}$. Por lo tanto, para el punto donde el cambio en l_5 es máximo (según la gráfica 2.23a) $\delta O_{Ay} = -610.903 \text{ mm} - (-626.272 \text{ mm}) =$

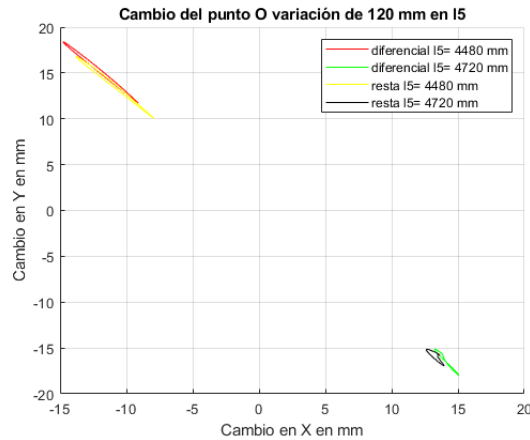
15.365 mm. En la gráfica 2.23b se puede ver que el valor que arroja la gráfica diferencial total, para un punto similar, es $\delta O_{Ay} = 15.35$ mm. Para el punto mínimo, $\delta O_{Ay} = -643.832$ mm $- (-626.272$ mm) $= -17.55$ mm, en la gráfica 2.23b se puede ver que el valor que arroja esta gráfica para un punto similar es $\delta O_{Ay} = -16.25$ mm. Como se obtienen puntos cercanos a los calculados dentro de la trayectoria de la gráfica en ángulos, se puede decir que los cálculos son correctos.



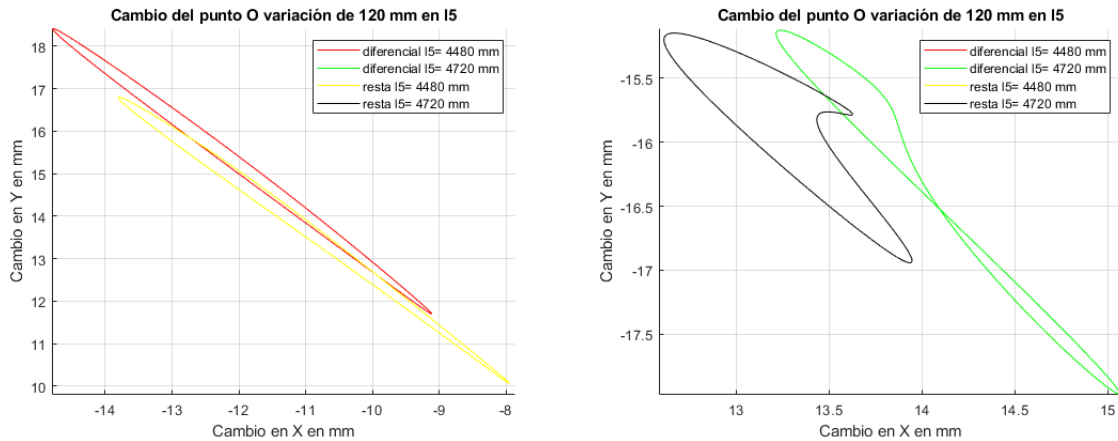
(a) Comparación de trayectorias en un mismo punto para cambios en l_5 . (b) Cambio en la trayectoria del punto O al variar l_5 en sus valores extremos con valor numérico explícito.

Figura 2.23: Ejemplo de la interpretación matemática del diferencial como aproximación a la resta de un punto sobre la trayectoria del punto O bajo dos condiciones del parámetro geométrico l_5 .

En el ejemplo anterior se compararon los dos métodos de análisis de cambios para un punto específico. Sin embargo, la misma metodología se puede aplicar para todos los puntos de la trayectoria del punto O . Al hacer esto, se obtendrán dos trayectorias, una debida a la resta de todos los puntos sobre la trayectoria del punto O y otra correspondiente a la diferencial total del punto O . Para l_5 con un cambio de ± 120 mm las curvas diferenciales y las de resta se ven muy cercanas entre sí. En la Figura 2.24a se muestra dicha comparación, únicamente para los valores extremos de l_5 . Como se puede notar las trayectorias son muy cercanas. Si se hace una ampliación de la Figura 2.24a, se puede apreciar el detalle de estas diferencias. En las Figuras 2.24b y 2.24c se presenta dicha comparación.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_5 en sus valores máximo y mínimo con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_5 .

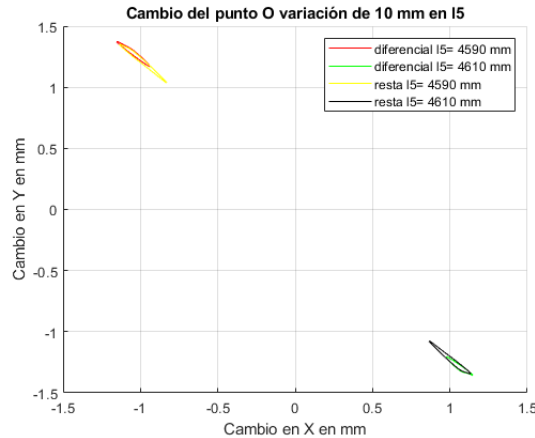


(b) Detalle de la Figura 2.24a en su trayectoria máxima. (c) Detalle de la Figura 2.24a en su trayectoria mínima.

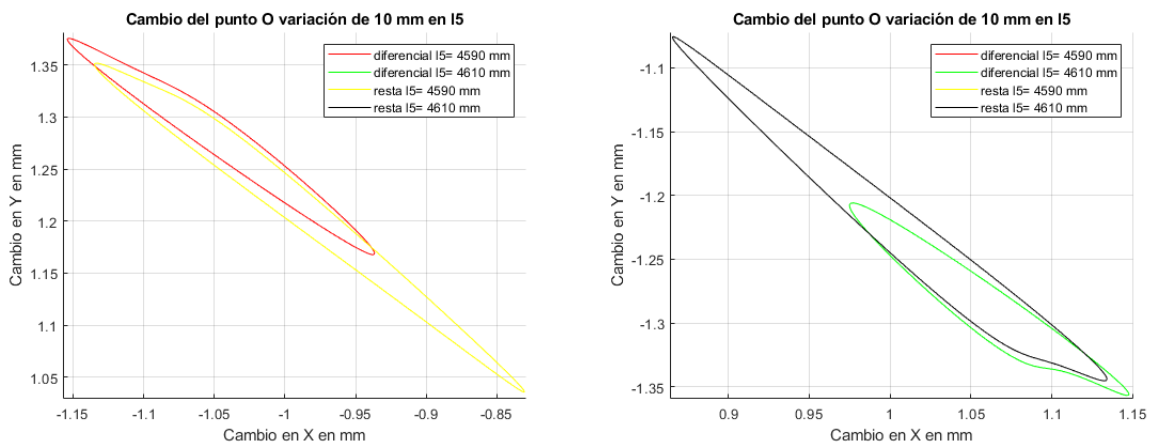
Figura 2.24: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_5 en sus valores máximo y mínimo con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_5 y detalles de las trayectorias.

De acuerdo con la expresión (2.224), el límite cuando el cambio del parámetro geométrico calibrable se hace cada vez más pequeño, entonces la resta entre el método de la resta de trayectorias y el del diferencial total se igualan. Por lo tanto, aunque las trayectorias de ambos métodos mostradas en la Figura 2.24 son cercanas, al ser uno de los métodos del tipo diferenciales, si el cambio de los parámetros geométricos calibrables se hace más pequeño, el error entre la diferencia de métodos se reduce, es decir, al reducir el cambio en las entradas, estas curvas deben parecerse más entre sí. Para comprobar esto se realiza la misma comparación, solo que esta vez, el cambio en l_5 no es de ± 120 mm, sino de ± 10 mm. La Figura 2.25a muestra dichas curvas. Como se puede notar en la Figura 2.25 las trayectorias, correspondientes a ambos métodos, son más cercanas. En las Figura 2.25b se puede observar el detalle de la curva del

cambio máximo de la trayectoria al variar el parámetro geométrico 10 mm desde su trayectoria nominal y en la Figura 2.25c se puede observar el detalle de la curva del cambio máximo de la trayectoria al variar el parámetro geométrico l_5 10 mm desde su trayectoria nominal.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_5 desplazado ± 10 mm con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_5 .

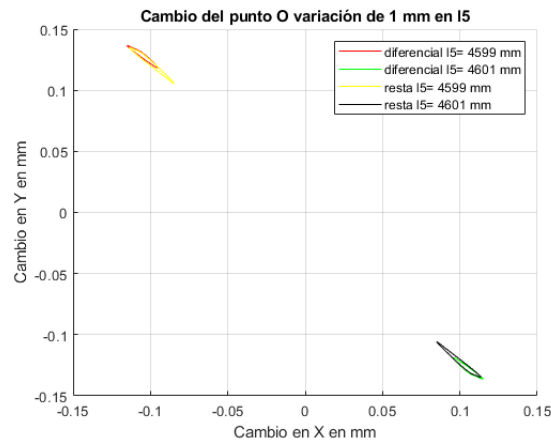


(b) Detalle de la Figura 2.25a en sus trayectorias máximas. (c) Detalle de la Figura 2.25a en sus trayectorias mínimas.

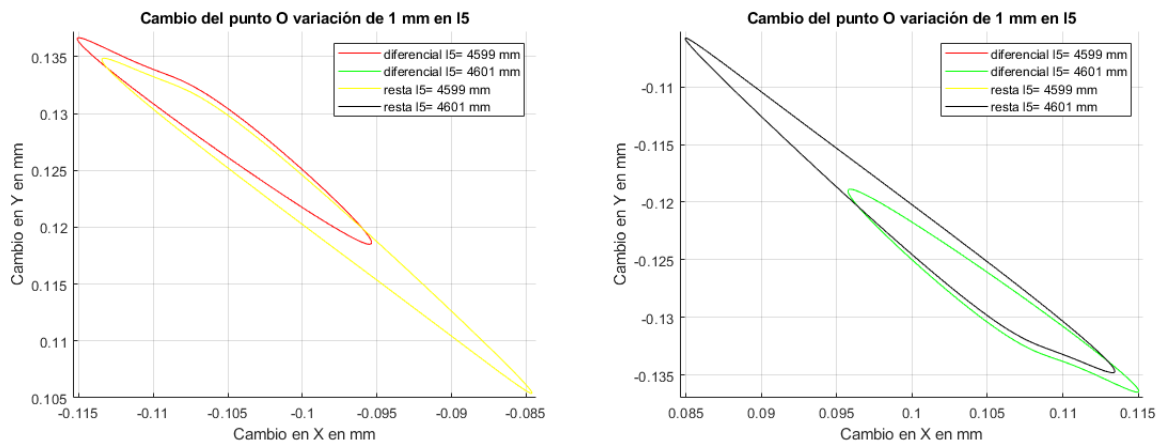
Figura 2.25: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_5 desplazado ± 10 mm con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_5 y detalles de las curvas diferenciales.

Siguiendo la misma lógica de ir reduciendo los cambios en el parámetro geométrico l_5 para hacer que las curvas correspondientes al método de restas de trayectorias del punto O con respecto al método de las diferenciales totales coincidan, si el cambio en l_5 se hace todavía más pequeño, la diferencia entre las curvas resultantes se reduce aún más. Para un cambio de ± 1 mm en l_5 , las gráficas se acercan. En la Figura 2.26a se muestra dicho resultado. Por otro lado, en la Figura 2.26b se muestra el detalle superior de la Figura 2.26a y en la Figura 2.26c se

muestra el detalle inferior de la Figura 2.26a.



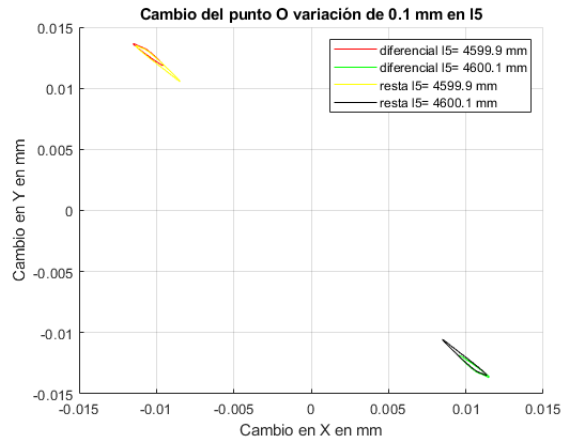
(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_5 desplazado $\pm 1\text{mm}$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_5 con respecto a la trayectoria nominal.



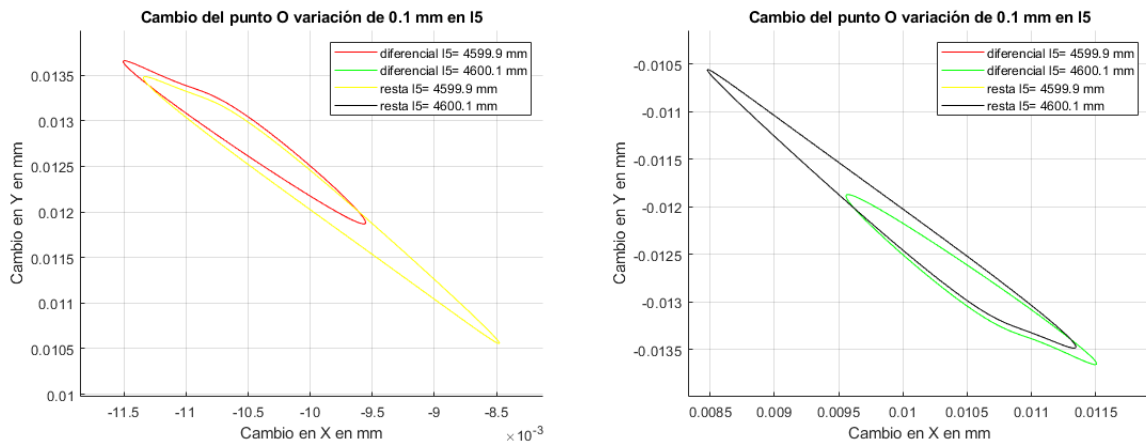
(b) Detalle de la Figura 2.26a en sus trayectorias máximas. (c) Detalle de la Figura 2.26a en sus trayectorias mínimas.

Figura 2.26: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_5 desplazado $\pm 1\text{mm}$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_5 con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

Si se hace el análisis en un cambio más pequeño con respecto al último, por ejemplo de $\pm 0.1\text{ mm}$, entonces las dos curvas, correspondientes a los dos métodos, serán más parecidas entre sí. La Figura 2.27a muestra dicha comparación, y el detalle de dichas curvas se presenta en la Figuras 2.27b y 2.27c.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_5 desplazado $\pm 0.1\text{mm}$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_5 con respecto a la trayectoria nominal.



(b) Detalle de la Figura 2.27a en sus trayectorias máximas. (c) Detalle de la Figura 2.27a en sus trayectorias mínimas.

Figura 2.27: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_5 desplazado $\pm 0.1\text{mm}$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_5 con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

Después de que el cambio en l_5 se reduce con respecto al valor de $\delta l_5 = \pm 1\text{mm}$, la tarea de analizar el resultado se hace complicada. Por ello, se propone utilizar herramientas numéricas para detallar la diferencia de los métodos de análisis.

Es posible restar ambos métodos, es decir el obtenido por la resta de la trayectoria trasladada menos la trayectoria nominal, por un lado, menos la obtenida por diferenciación. El resultado es un error que mide la diferencia entre ambos métodos. Como dicho error es un vector, es posible obtener su norma. matemáticamente hablando:

$$\epsilon_x = \delta l_{(o)A_x} - (l_{(o)A_x} \text{ trasladada} - l_{(o)A_x} \text{ nominal}), \quad (2.226)$$

$$\epsilon_y = \delta l_{(o)A_y} - (l_{(o)A_y} \text{ trasladada} - l_{(o)A_y} \text{ nominal}), \quad (2.227)$$

donde ϵ_x es el elemento del vector del error horizontal de medición entre ambos métodos y ϵ_y es el mismo, pero vertical.

Al tomar cada valor de ángulo del elemento de entrada, la diferencia es un vector de valores. Al ser un elemento en \mathbb{R}^n , se puede medir su norma \mathcal{L}_2 con la función de **MATLAB** `norma(, 2)`. La norma puede usarse para saber el error entre ambos métodos. Además, conociendo que el vector de error tiene 100 elementos, se debe dividir la norma obtenida en MATLAB entre $\sqrt{100} = 10$. La norma del error entre ambos métodos, cuando hay cambios en l_5 de ± 120 , ± 10 mm, ± 1 mm y ± 0.1 mm, se muestra en la Tabla 2.4.

| Descripción | Valor entregado |
|--|-----------------|
| Norma del error de métodos en x, cuando l_5 va de 4600 hasta 4480 mm | 0.756 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_5 va de 4600 hasta 4480 mm | 1.225 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando l_5 va de 4600 hasta 4720 mm | 0.947 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_5 va de 4600 hasta 4720 mm | 0.911 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando l_5 va de 4600 hasta 4590 mm | 0.049 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_5 va de 4600 hasta 4590 mm | 0.063 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando l_5 va de 4600 hasta 4610 mm | 0.051 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_5 va de 4600 hasta 4610 mm | 0.062 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando l_5 va de 4600 hasta 4599 mm | 0.0050 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_5 va de 4600 hasta 4599 mm | 0.0062 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando l_5 va de 4600 hasta 4601 mm | 0.0050 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_5 va de 4600 hasta 4601 mm | 0.0062 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando l_5 va de 4600 hasta 4599.9 mm | 0.0005 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_5 va de 4600 hasta 4599.9 mm | 0.0006 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando l_5 va de 4600 hasta 4600.1 mm | 0.0005 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_5 va de 4600 hasta 4600.1 mm | 0.0006 mm |

Cuadro 2.4: Valores de la norma del error de la resta del método de la resta contra el método del diferencial total, cuando el parámetro geométrico l_5 cambia desde su valor nominal con variaciones de $\delta l_5 = \pm 120$ mm, $\delta l_5 = \pm 10$ mm, $\delta l_5 = \pm 1$ mm y $\delta l_5 = \pm 0.1$ mm.

Como se aprecia en la tabla 2.4, a medida que se reduce el incremento en los parámetros geométricos de entrada, la norma del error de ambos métodos se reduce. Cuando el parámetro geométrico calibrable l_5 cambia 10 mm en x, es decir cuando el parámetro geométrico calibrable va de su valor nominal de $l_5 = 4600$ mm hasta $l_5 = 4610$ mm, el valor de la norma del error de métodos es de 0.051 mm. Cuando el parámetro geométrico calibrable l_5 cambia 10 veces menos que 10 mm en x, es decir 1 mm, el valor de la norma del error de métodos es de 0.0050 mm; 10 veces menor que el valor de la norma del error de 10 mm. Siguiendo la misma lógica, cuando el parámetro geométrico calibrable l_5 cambia 10 veces menos que 1 mm, es decir cuando cambia 0.1 mm, el valor de la norma del error de métodos es de 0.0005 mm; 10 veces menor que el valor de la norma del error de 1 mm. Este resultado refleja que en el término (2.207) la diferencial δl_5 está multiplicando al coeficiente de influencia. Por lo que, al variar δl_5 , lo único que se está haciendo es escalar la variación de la trayectoria del punto O . Lo que resta

probar es que mientras la escala del punto O se reduce los dos métodos coinciden más entre sí. Esta última afirmación corresponde a probar la validez de la expresión (2.217). Para ello, es necesario medir el grado de ajuste entre las curvas comparadas, de tal manera que si el ajuste es total significa que los métodos se igualan, es decir, representan el mismo fenómeno. Para ello, se propone realizar una prueba de bondad de ajuste. Esto con la finalidad de determinar el grado de discrepancia, o coincidencia, entre ambos métodos. Entre las diferentes pruebas de ajuste, se propone usar la prueba χ^2 de Pearson [29].

Para realizar la prueba, la hipótesis nula H_0 , indica la igualdad entre ambas curvas; $H_0 : F = F_0$, donde F representa el método de la diferencial total y F_0 significa el método de la resta de trayectorias del punto O . El nivel de significación α será de 5% y el grado de libertad es de $\nu = k - 1 = 99$, donde $k = 100$ es el número de valores en el vector de puntos que conforma cada curva. Así el valor tabulado de la chi cuadrada $\chi_{\nu,\alpha}^2$ para el particular nivel de significación α es $\chi_{\nu,\alpha}^2 = 123.22$.

Para realizar la prueba se usa la expresión (2.228) para la coordenada horizontal.

$$\chi^2 = \sum_k^{i=1} \frac{(\delta l_{(o)A_x} - (l_{(o)A_x} \text{ trasladada} - l_{(o)A_x}))^2}{(l_{(o)A_x} \text{ trasladada} - l_{(o)A_x})} \quad (2.228)$$

, donde $\delta l_{(o)A_x}$ representa los elementos horizontales del vector de la curva del diferencial total de la trayectoria del punto O y $(l_{(o)A_x} \text{ trasladada} - l_{(o)A_x})$ significa los elementos individuales del vector horizontal de resta de trayectoria, de la trayectoria del punto O , entre la nominal y la trasladada. La prueba se realizará con el siguiente criterio: se rechaza la hipótesis nula H_0 si $\chi^2 > \chi_{\nu,\alpha}^2$.

Además, se realiza la misma prueba para la coordenada vertical.

$$\chi^2 = \sum_k^{i=1} \frac{(\delta l_{(o)A_y} - (l_{(o)A_y} \text{ trasladada} - l_{(o)A_y}))^2}{(l_{(o)A_y} \text{ trasladada} - l_{(o)A_y})} \quad (2.229)$$

, donde $\delta l_{(o)A_y}$ representa los elementos verticales del vector de la curva del diferencial total de la trayectoria del punto O y $(l_{(o)A_y} \text{ trasladada} - l_{(o)A_y})$ significa los elementos individuales del vector vertical de resta de trayectoria, de la trayectoria del punto O , entre la nominal y la trasladada. La prueba se realizará con el siguiente criterio: se rechaza la hipótesis nula H_0 si $\chi^2 > \chi_{\nu,\alpha}^2$. Se toma el valor absoluto del resultado de χ^2 debido a que la escala de evaluación inicia en cero, tal que, $\chi^2 = 0$ indica que las dos curvas ajustan exactamente. Por lo tanto, no se necesita tomar en cuenta resultados negativos.

En la Tabla 2.5 se muestran los resultados de la prueba para algunas variaciones en el parámetro geométrico l_5 . Los cambios que se consideraron en la prueba fueron: máximo, es decir desde el valor nominal de $l_5 = 4600$ hasta $l_5 = 4720$ mm, mínimo, es decir desde el valor nominal de $l_5 = 4600$ hasta $l_5 = 4480$ mm y $\pm 10, 1, 0.1$ mm es decir desde el valor nominal de $l_5 = 4600$ hasta $l_5 = 4610$, $l_5 = 4590$, $l_5 = 4601$, $l_5 = 4599$, $l_5 = 4600.1$, $l_5 = 4599.9$ mm. Como se observa en la Tabla 2.5, a medida que los incrementos se hacen más pequeños, el valor de χ^2 se reduce. Por lo que, entre menores son los incrementos ambas curvas aumentan su ajuste. También, a partir de la Tabla 2.5, se puede saber que para que el análisis de las curvas provenientes de la diferencial total se vuelva confiable, es decir que tenga un ajuste de métodos que apruebe una prueba de bondad de ajuste de χ^2 al 5%, los incrementos en el parámetro geométrico calibrable l_5 deben ser menores a 10 mm. Los programas en lenguaje MATLAB para los cálculos hechos se pueden consultar en la sección de apéndices.

| Parámetro | x o y | Cambio | valor de $\chi^2_{\nu,\alpha}$ | valor de $ \chi^2 $ | Pasa |
|-----------|-------|---------|--------------------------------|---------------------|------|
| l_5 | x | máximo | 123.22 | 4899 | no |
| l_5 | y | máximo | 123.22 | 6195 | no |
| l_5 | x | mínimo | 123.22 | 5683 | no |
| l_5 | y | mínimo | 123.22 | 6610.0 | no |
| l_5 | x | 10 mm | 123.22 | 105.0474 | si |
| l_5 | y | 10 mm | 123.22 | 127.8472 | no |
| l_5 | x | -10 mm | 123.22 | 106.4946 | si |
| l_5 | y | -10 mm | 123.22 | 127.8472 | no |
| l_5 | x | 1 mm | 123.22 | 43.0213 | si |
| l_5 | y | 1 mm | 123.22 | 52.3122 | si |
| l_5 | x | -1 mm | 123.22 | 43.0826 | si |
| l_5 | y | -1 mm | 123.22 | 52.3509 | si |
| l_5 | x | 0.1 mm | 123.22 | 4.3049 | si |
| l_5 | y | 0.1 mm | 123.22 | 5.2330 | si |
| l_5 | x | -0.1 mm | 123.22 | 4.3055 | si |
| l_5 | y | -0.1 mm | 123.22 | 5.2333 | si |

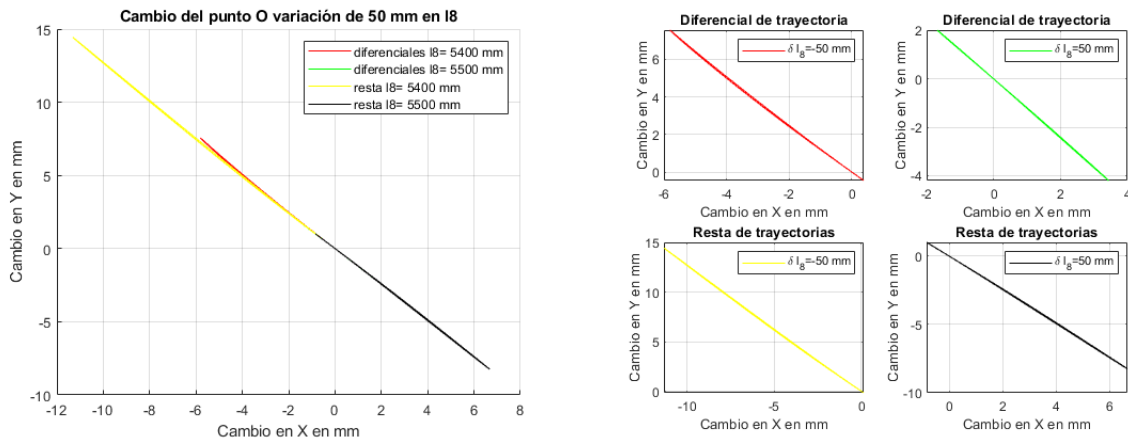
Cuadro 2.5: Tabla comparativa de los resultados de la prueba de Pearson (5%) al ajuste de las curvas resultantes del método diferencial total con respecto a las curvas resultantes del método de la resta de las trayectorias trasladadas con respecto a la trayectoria nominal del punto O cuando hay variaciones máximas, mínimas sobre el parámetro geométrico l_5 , y además, cuando hay variaciones de ± 10 , ± 1 y ± 0.1 mm en l_5 .

2.7.2. Comparación de diferenciales en el punto de interés O con respecto a su trayectoria nominal mientras hay cambio en l_8

Una vez probado que las curvas diferenciales calculadas en este trabajo de tesis se comportan como una resta de trayectorias, al modificar el parámetro l_5 , con una buena confiabilidad si los incrementos en l_5 son menores a 10 mm, y se puede hacer un análisis como el realizado en el apartado 3.1. Resta saber si las curvas diferenciales se comportan así de bien con los otros parámetros geométricos calibrables. Por ello, se presenta el análisis realizado en l_5 para l_8 .

En la Figura 2.28 se muestra la comparación entre las curvas diferenciales totales cuando el parámetro geométrico l_8 cambia desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ mm hasta sus valores extremos de $l_8 = 5500$ mm y $l_8 = 5400$ mm, contra la resta de trayectorias sometidas a las mismas condiciones de las curvas diferenciales. Como se puede ver en la gráfica de la Figura 2.28a las curvas resultantes se empalman y es difícil diferenciar una de otra. Por ello, en la Figura 2.28b se muestra en detalle cada curva graficada en 2.28a por separado. En la Figura 2.28a se identifican las curvas con colores. En la etiqueta se especifica si se trata de una curva realizada por el método diferencial total o si es realizada por el método de la resta. Además en la etiqueta de la Figura 2.28a se indica el valor extremo al que se ha ajustado el elemento l_8 desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ mm. Por ejemplo, cuando la etiqueta indica:(línea roja) diferenciales $l_8 = 5400$ mm esta indicando que la curva de color rojo representa la curva diferencial total de la trayectoria del punto O cuando el parámetro geométrico l_8 se ha ajustado

desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ mm hasta su valor de $l_8 = 5400$ mm. Por otro lado, la Figura 2.28b muestra una figura con 4 gráficas en donde cada gráfica tiene una etiqueta en la esquina superior derecha. Esta indica el cambio que esta representando la curva graficada. Así por ejemplo cuando la etiqueta dice: (línea roja) $\delta l_8 = -50$ mm, esta indicando que la curva roja representa los cambios en la trayectoria del punto O cuando el parámetro geométrico l_8 va desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ mm hasta un valor de $l_8 = 5400$ mm. En el caso de la Figura 2.28b, se necesita leer el título de la gráfica para saber que método se está usando. Si el título indica: Diferencial de trayectoria, el método usado para producir la curva correspondiente al título leído fue del diferencial total.



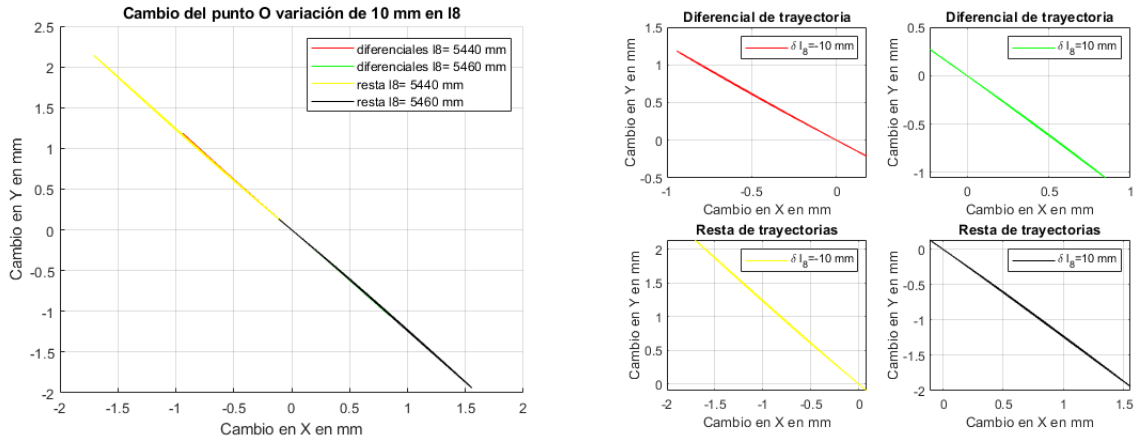
(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_8 en sus valores máximo y mínimo con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_8 con respecto a la trayectoria nominal.

(b) Detalle de la Figura 2.28a.

Figura 2.28: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_8 en sus valores máximo y mínimo con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_8 con respecto a la trayectoria nominal y detalle de cada curva.

En la Figura 2.29 se muestra la comparación entre las curvas diferenciales totales cuando el parámetro geométrico l_8 cambia desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ hasta $l_8 = 5460$ mm y $l_8 = 5440$ mm, contra la resta de trayectorias sometidas a las mismas condiciones de las curvas diferenciales. Como se puede ver en la gráfica de la Figura 2.29a las curvas resultantes, al igual que en la Figura 2.28a, se empalman y es difícil diferenciar una de otra. Por ello, en la Figura 2.29b se muestra en detalle cada curva graficada en 2.29a por separado. En la Figura 2.29a se identifican las curvas con colores. En la etiqueta se especifica si se trata de una curva realizada por el método diferencial total o si es realizada por el método de la resta. La simbología en las etiquetas de las gráficas de la Figura 2.29 es similar a la de la Figura 2.28 y responde a la misma lógica de etiquetado con sus correspondientes cambios. Por ejemplo, cuando la etiqueta indica: (línea roja) diferenciales $l_8 = 5440$ mm esta indicando que la curva de color rojo representa la curva diferencial total de la trayectoria del punto O cuando el parámetro geométrico l_8 se ha ajustado desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ mm hasta su

valor de $l_8 = 5440$ mm. Por otro lado, cuando la etiqueta dice: (línea roja) $\delta l_8 = -10$ mm, esta indicando que la curva roja representa los cambios en la trayectoria del punto O cuando el parámetro geométrico l_8 va desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ mm hasta un valor de $l_8 = 5440$ mm.

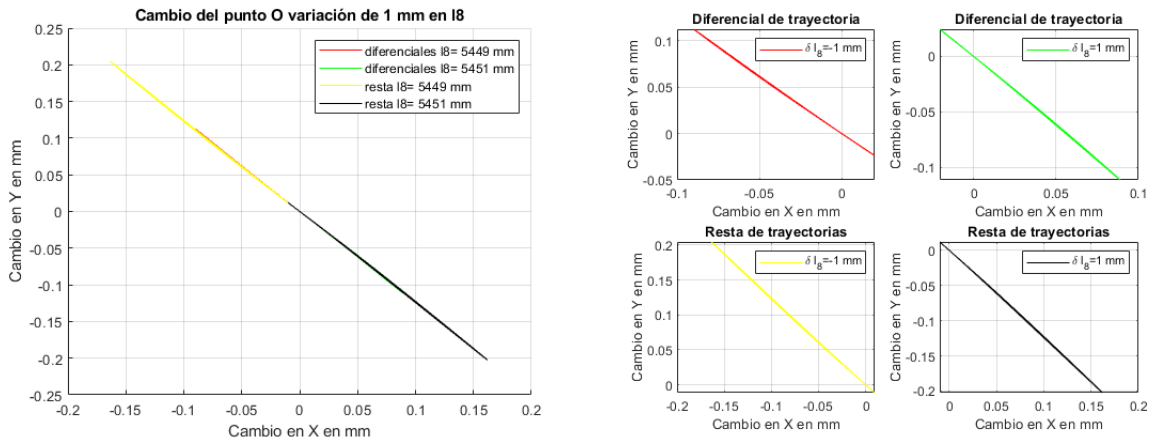


(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_8 con una diferencia de ± 10 mm con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_8 con respecto a la trayectoria nominal.

(b) Detalle de la Figura 2.29a.

Figura 2.29: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_8 en sus valores máximo y mínimo con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_8 con respecto a la trayectoria nominal y detalle de cada curva.

En la Figura 2.30 se muestra la comparación entre las curvas diferenciales totales cuando el parámetro geométrico l_8 cambia desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ hasta $l_8 = 5451$ mm y $l_8 = 5449$ mm, contra la resta de trayectorias sometidas a las mismas condiciones de las curvas diferenciales. Como se puede ver en la gráfica de la Figura 2.30a las curvas resultantes, al igual que en la Figura 2.28a, se empalman y es difícil diferenciar una de otra. Por ello, en la Figura 2.30b se muestra en detalle cada curva graficada en 2.30a por separado. En la Figura 2.30a se identifican las curvas con colores. En la etiqueta se especifica si se trata de una curva realizada por el método diferencial total o si es realizada por el método de la resta. La simbología en las etiquetas de las gráficas de la Figura 2.30 es similar a la de la Figura 2.28 y responde a la misma lógica de etiquetado con sus correspondientes cambios. Por ejemplo, cuando la etiqueta indica: (línea roja) diferenciales $l_8 = 5449$ mm esta indicando que la curva de color rojo representa la curva diferencial total de la trayectoria del punto O cuando el parámetro geométrico l_8 se ha ajustado desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ mm hasta su valor de $l_8 = 5449$ mm. Por otro lado, cuando la etiqueta dice: (línea roja) $\delta l_8 = -1$ mm, esta indicando que la curva roja representa los cambios en la trayectoria del punto O cuando el parámetro geométrico l_8 va desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ mm hasta un valor de $l_8 = 5449$ mm.

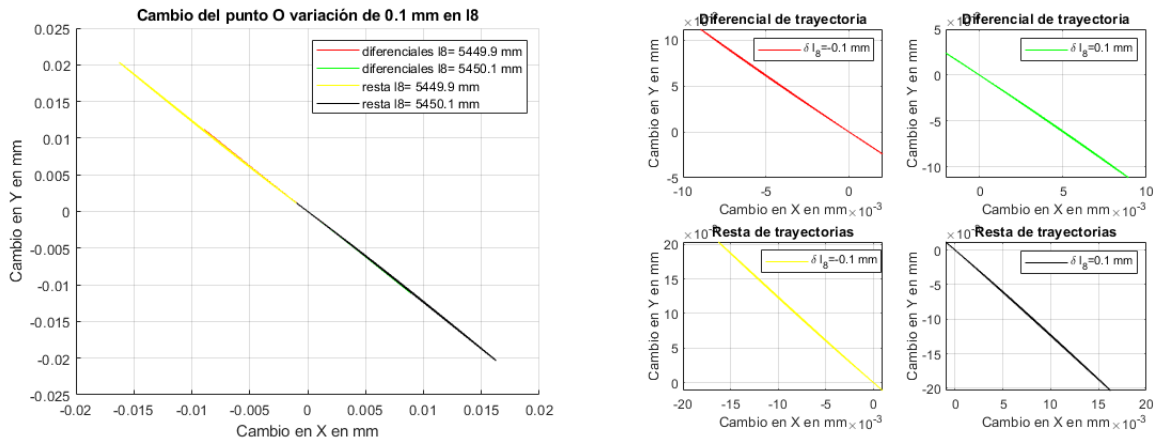


(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_8 con una diferencia de $\pm 1\text{mm}$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_8 con respecto a la trayectoria nominal.

(b) Detalle de la Figura 2.30a.

Figura 2.30: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_8 con una diferencia de $\pm 1\text{mm}$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_8 con respecto a la trayectoria nominal y detalle de cada curva.

En la Figura 2.31 se muestra la comparación entre las curvas diferenciales totales cuando el parámetro geométrico l_8 cambia desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ hasta $l_8 = 5450.1$ mm y $l_8 = 5449.9$ mm, contra la resta de trayectorias sometidas a las mismas condiciones de las curvas diferenciales. Como se puede ver en la gráfica de la Figura 2.31a las curvas resultantes, al igual que en la Figura 2.28a, se empalman y es difícil diferenciar una de otra. Por ello, en la Figura 2.31b se muestra en detalle cada curva graficada en 2.31a por separado. En la Figura 2.31a se identifican las curvas con colores. En la etiqueta se especifica si se trata de una curva realizada por el método diferencial total o si es realizada por el método de la resta. La simbología en las etiquetas de las gráficas de la Figura 2.31 es similar a la de la Figura 2.28 y responde a la misma lógica de etiquetado con sus correspondientes cambios. Por ejemplo, cuando la etiqueta indica: (línea roja) diferenciales $l_8 = 5449.9$ mm esta indicando que la curva de color rojo representa la curva diferencial total de la trayectoria del punto O cuando el parámetro geométrico l_8 se ha ajustado desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ mm hasta su valor de $l_8 = 5449.9$ mm. Por otro lado, cuando la etiqueta dice: (línea roja) $\delta l_8 = -0.11$ mm, esta indicando que la curva roja representa los cambios en la trayectoria del punto O cuando el parámetro geométrico l_8 va desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ mm hasta un valor de $l_8 = 5449.9$ mm.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_8 con una diferencia de $\pm 0.1\text{mm}$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_8 con respecto a la trayectoria nominal.

(b) Detalle de la Figura 2.31a.

Figura 2.31: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar l_8 con una diferencia de $\pm 0.1\text{mm}$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en l_8 con respecto a la trayectoria nominal y detalle de cada curva.

Al igual que en caso de l_5 , analizar los cambios en las gráficas es una tarea difícil. Por tal razón, se presenta en la Tabla 2.6 la norma de la resta del error entre el método de las diferenciales totales y el de la resta de la trayectoria del punto O . Las normas del error de los métodos se presentan cuando el parámetro geométrico l_8 va desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ mm hasta la longitud de: $l_8 = 5400$, $l_8 = 5440$, $l_8 = 5449$, $l_8 = 5449.9$, $l_8 = 5500$, $l_8 = 5460$, $l_8 = 5451$ y $l_8 = 5450.1$ mm. De la misma forma que en el caso del parámetro geométrico l_5 , la norma del error de métodos se reduce en tanto el incremento de la longitud de l_8 disminuye. Cuando el parámetro geométrico calibrable l_8 cambia 10 mm en x, es decir cuando el parámetro geométrico calibrable va de su valor nominal de $l_8 = 5450$ mm hasta $l_8 = 5460$ mm, el valor de la norma del error de métodos es de 0.347 mm. Cuando el parámetro geométrico calibrable l_8 cambia 10 veces menos que 10 mm en x, es decir 1 mm, el valor de la norma del error de métodos es de 0.035 mm; 10 veces menor que el valor de la norma del error de 10 mm. Siguiendo la misma lógica, cuando el parámetro geométrico calibrable l_8 cambia 10 veces menos que 1 mm, es decir cuando cambia 0.1 mm, el valor de la norma del error de métodos es de 0.0035 mm; 10 veces menor que el valor de la norma del error de 1 mm. Este resultado refleja que en el término 2.209 la diferencial δl_8 está multiplicando al coeficiente de influencia. Por lo que, al variar δl_8 , lo único que se está haciendo es escalar la variación de la trayectoria del punto O . El mismo fenómeno de escalabilidad verificado, hasta el momento, para el parámetro geométrico l_5 y l_8 se espera para los demás parámetros geométricos calibrables y puede ser verificado en sus respectivas tablas de normas de errores.

| Descripción | Valor entregado |
|--|-----------------|
| Norma del error de métodos en x, cuando l_8 va de 5450 hasta 5400 mm | 2.19 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_8 va de 5450 hasta 5400 mm | 2.723 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando l_8 va de 5450 hasta 5500 mm | 1.746 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_8 va de 5450 hasta 5500 mm | 2.161 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando l_8 va de 5450 hasta 5440 mm | 0.357 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_8 va de 5450 hasta 5440 mm | 0.443 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando l_8 va de 5450 hasta 5460 mm | 0.347 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_8 va de 5450 hasta 5460 mm | 0.431 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando l_8 va de 5450 hasta 5449 mm | 0.035 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_8 va de 5450 hasta 5449 mm | 0.043 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando l_8 va de 5450 hasta 5451 mm | 0.035 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_8 va de 5450 hasta 5451 mm | 0.043 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando l_8 va de 5450 hasta 5449.9 mm | 0.0035 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_8 va de 5450 hasta 5449.9 mm | 0.0043 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando l_8 va de 5450 hasta 5450.1 mm | 0.0035 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando l_8 va de 5450 hasta 5450.1 mm | 0.0043 mm |

Cuadro 2.6: Valores de la norma del error de la resta del método de la resta contra el método del diferencial total, cuando el parámetro geométrico l_8 cambia desde su valor nominal de $l_8 = 5450$ mm hasta $l_8 = 5450.1$, $l_8 = 5451$, $l_8 = 5460$, $l_8 = 5500$ mm y $l_8 = 5449.9$, $l_8 = 5449$, $l_8 = 5440$, $l_8 = 5400$ mm produciendo cambios máximos y mínimos, respectivamente, en la trayectoria del punto O .

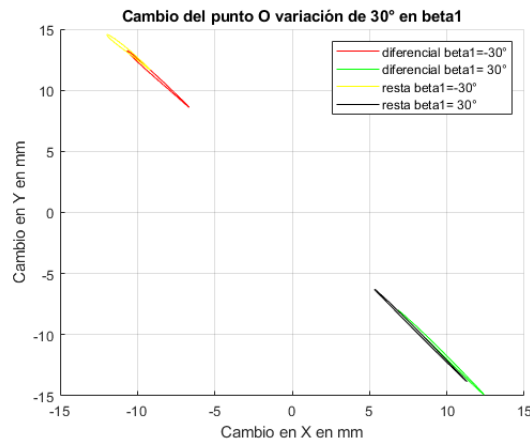
En la Tabla 2.6 refleja, para l_8 , el mismo fenómeno registrado para el parámetro geométrico l_5 . En la Tabla 2.7 se muestra el resultado de la prueba de bondad de ajuste de Pearson con un nivel de significación del 5%. Esto con el fin de evaluar el ajuste de las curvas resultantes de los cambios de la trayectoria del punto O mediante el método de las diferenciales totales y el de la resta de trayectorias. Si se comparan los resultados de las pruebas de ajuste cuando varía el parámetro geométrico calibrable l_5 con respecto a los resultados en l_8 , se puede ver que las curvas diferenciales ajustan mejor con el resultado esperado, si varía el parámetro geométrico ajustable l_8 que si cambia l_5 . Esto último debido a que los resultados de la Tabla 2.7 muestran número más pequeños en comparación con los resultados de la tabla 2.5. También, la Tabla 2.7 muestra que a medida que se reduce el valor del parámetro geométrico calibrable l_8 , la prueba se supera, siendo la variación $\delta l_8 \leq \pm 10$ mm el intervalo limítrofe al cual se debe ajustar la longitud l_8 para aprobar la prueba de bondad de ajuste y hacer confiable el análisis de las curvas diferenciales totales de la trayectoria del punto O al variar el parámetro geométrico l_8 . El mismo fenómeno de bondad de ajuste mientras los incrementos son pequeños, verificado hasta el momento para los parámetros geométricos calibrables l_5 y l_8 se espera para los demás y puede ser verificado en sus respectivas tablas de resultados a la prueba de Pearson. Por ello, se puede generalizar y concluir que entre más pequeño sea el diferencial del parámetro geométrico calibrable, más va a representar el cambio de la trayectoria del punto O .

| Parámetro | x o y | Cambio | valor de $\chi^2_{\nu,\alpha}$ | valor de $ \chi^2 $ | Pasa |
|-----------|-------|---------------|--------------------------------|---------------------|------|
| l_8 | x | máximo | 123.22 | 430.3636 | no |
| l_8 | y | máximo | 123.22 | 528.855 | no |
| l_8 | x | mínimo | 123.22 | 1000.8 | no |
| l_8 | y | mínimo | 123.22 | 1264.4 | no |
| l_8 | x | 10 unidades | 123.22 | 57.5359 | si |
| l_8 | y | 10 unidades | 123.22 | 71.0407 | si |
| l_8 | x | -10 unidades | 123.22 | 63.1673 | si |
| l_8 | y | -10 unidades | 123.22 | 78.2607 | si |
| l_8 | x | 1 unidad | 123.22 | 13.7593 | si |
| l_8 | y | 1 unidad | 123.22 | 17.0662 | si |
| l_8 | x | -1 unidad | 123.22 | 13.4262 | si |
| l_8 | y | -1 unidad | 123.22 | 16.6849 | si |
| l_8 | x | 0.1 unidades | 123.22 | 1.3538 | si |
| l_8 | y | 0.1 unidades | 123.22 | 1.6808 | si |
| l_8 | x | -0.1 unidades | 123.22 | 1.3512 | si |
| l_8 | y | -0.1 unidades | 123.22 | 1.6779 | si |

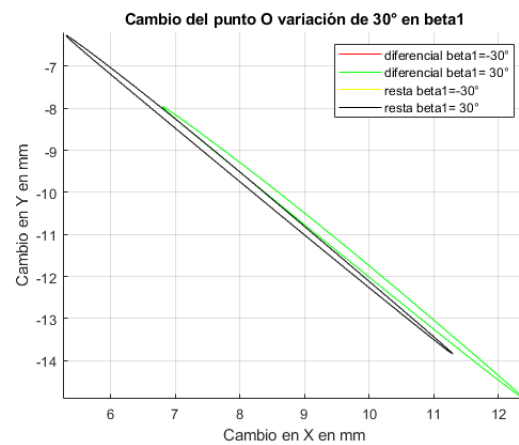
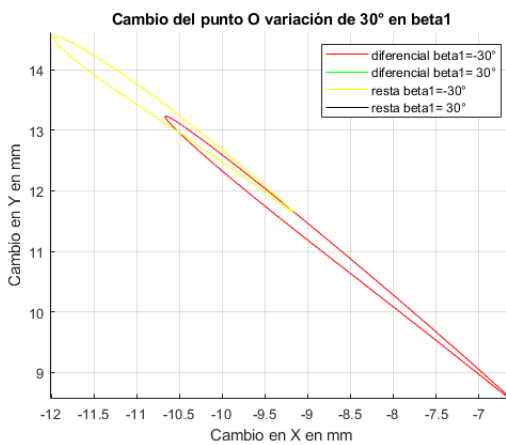
Cuadro 2.7: Tabla comparativa de los resultados de la prueba de Pearson (5%) al ajuste de las curvas resultantes del método diferencial total con respecto a las curvas resultantes del método de la resta de las trayectorias trasladadas con respecto a la trayectoria nominal del punto O cuando hay variaciones máximas, mínimas sobre el parámetro geométrico l_8 , y además, cuando hay variaciones de ± 10 , ± 1 y ± 0.1 mm en l_8 .

2.7.3. Comparación de diferenciales en el punto de interés O con respecto a su trayectoria nominal mientras hay cambio en β_1

En la Figura 2.32 se muestra la comparación entre las curvas diferenciales totales cuando el parámetro geométrico β_1 cambia desde su valor nominal de $\beta_1 = 0^\circ$ hasta sus valores extremos de $\beta_1 = 120^\circ$ y $\beta_1 = 60^\circ$, contra la resta de trayectorias sometidas a las mismas condiciones de las curvas diferenciales. En las Figuras 2.32b y 2.32c se muestra en detalle cada curva graficada en 2.32a por separado. En la Figura 2.32a se identifican las curvas con colores. En la etiqueta se especifica si se trata de una curva realizada por el método diferencial total o si es realizada por el método de la resta. Además en la etiqueta de la Figura 2.32a se indica el valor extremo al que se ha ajustado el elemento β_1 desde su valor nominal de $\beta_1 = 0^\circ$. Por ejemplo, cuando la etiqueta indica: (línea roja) diferenciales $beta1 = -30^\circ$, esta indicando que la curva de color rojo representa la curva diferencial total de la trayectoria del punto O cuando el parámetro geométrico β_1 se ha ajustado desde su valor nominal de $\beta_1 = 0^\circ$ hasta su valor de $\beta_1 = -30^\circ$; medido desde la horizontal.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_1 con una diferencia de $\pm 30^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_1 con respecto a la trayectoria nominal.

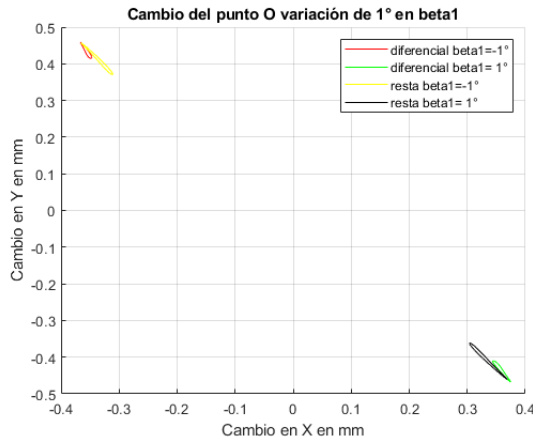


(b) Detalle de la Figura 2.32a en sus trayectorias máximas. (c) Detalle de la Figura 2.27a en sus trayectorias mínimas.

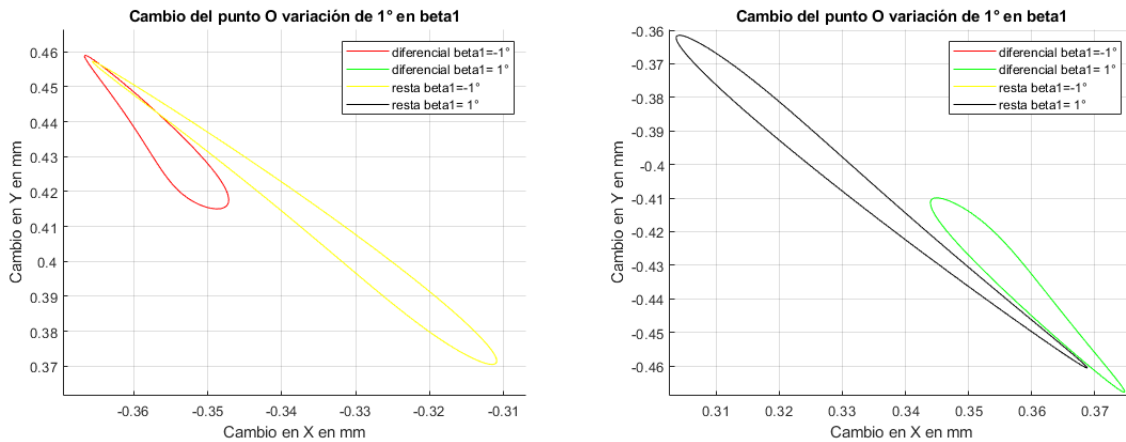
Figura 2.32: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_1 con una diferencia de $\pm 30^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_1 con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

En la Figura 2.33 se muestra la comparación entre las curvas diferenciales totales cuando el parámetro geométrico β_1 cambia desde su valor nominal de $\beta_1 = 0^\circ$ hasta $\beta_1 = 1^\circ$ y $\beta_1 = -1^\circ$, contra la resta de trayectorias sometidas a las mismas condiciones de las curvas diferenciales. En las Figuras 2.33b y 2.33c se visualiza el detalle de la Figura 2.33a. En la etiqueta se especifica si se trata de una curva realizada por el método diferencial total o si es realizada por el método de la resta. La simbología en las etiquetas de las gráficas de la Figura 2.33 es similar a la de la Figura 2.32 y responde a la misma lógica de etiquetado con sus correspondientes cambios. Por ejemplo, cuando la etiqueta indica: (línea roja) diferenciales beta1= -1° , esta indicando que la curva de color rojo representa la curva diferencial total de la trayectoria del punto O cuando

el parámetro geométrico β_1 se ha ajustado desde su valor nominal de $\beta_1 = 0^\circ$ hasta el valor de $\beta_1 = -1^\circ$.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_1 con una diferencia de $\pm 1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_1 con respecto a la trayectoria nominal.

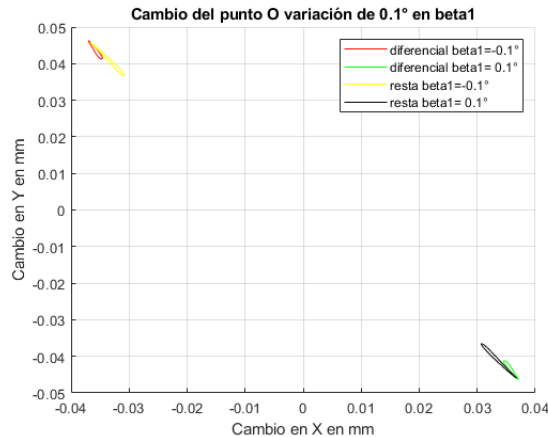


(b) Detalle de la Figura 2.33a en sus valores máximos. (c) Detalle de la Figura 2.33a en sus valores mínimos.

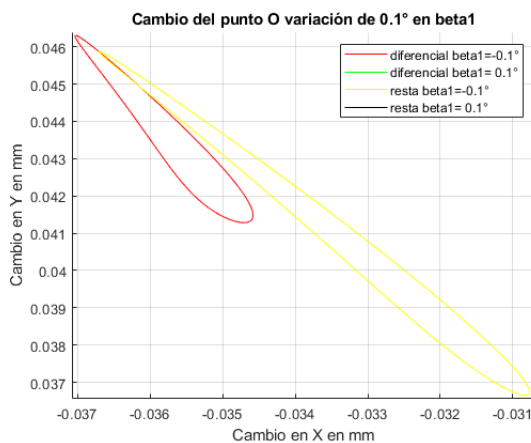
Figura 2.33: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_1 con una diferencia de $\pm 1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_1 con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

De la misma manera que en la Figura 2.33, en la Figura 2.34 se muestra la comparación entre las curvas diferenciales totales cuando el parámetro geométrico β_1 cambia desde su valor nominal de $\beta_1 = 0^\circ$ hasta $\beta_1 = 0.1^\circ$ y $\beta_1 = -0.1^\circ$, contra la resta de trayectorias sometidas a las mismas condiciones de las curvas diferenciales. En las Figuras 2.34b y 2.34c se muestra los detalles de la Figura 2.34a. En la etiqueta se especifica si se trata de una curva realizada por el método diferencial total o si es realizada por el método de la resta. La simbología en las etiquetas de las gráficas de la Figura 2.34 son similares a las de la Figura 2.32 y responde

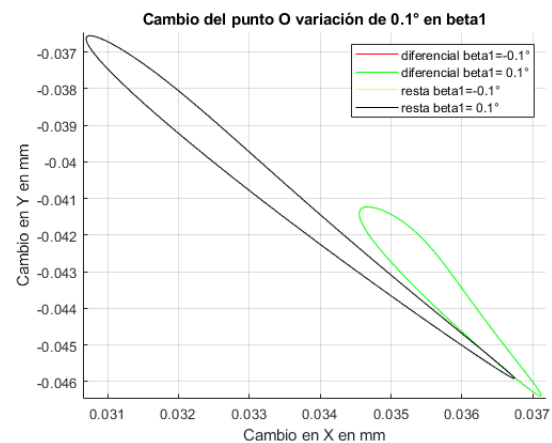
a la misma lógica de etiquetado con sus correspondientes cambios. Por ejemplo, cuando la etiqueta indica:(línea roja) diferenciales $\beta_1 = -0.1^\circ$, esta indicando que la curva de color rojo representa la curva diferencial total de la trayectoria del punto O cuando el parámetro geométrico β_1 se ha ajustado desde su valor nominal de $\beta_1 = 0^\circ$ hasta el valor de $\beta_1 = -0.1^\circ$.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_1 con una diferencia de $\pm 0.1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_1 con respecto a la trayectoria nominal.



(b) Detalle máximo de la Figura 2.34a.



(c) Detalle mínimo de la Figura 2.34a.

Figura 2.34: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_1 con una diferencia de $\pm 0.1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_1 con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

En la Tabla 2.8 se muestra las normas de los errores de los vectores correspondientes al método de las curvas generadas por diferenciales totales y al los correspondientes a las curvas generadas por la resta de trayectorias. Los resultados de las normas del error de métodos se muestran cuando el parámetro geométrico β_1 cambia desde su valor nominal de $\beta_1 = 0^\circ$ hasta $\beta_1 = \pm 30^\circ$, $\beta_1 = \pm 1^\circ$ y $\beta_1 = \pm 0.1^\circ$. Al igual que en los demás tablas de normas de errores, al

acercar el valor del parámetro geométrico calibrable β_1 a su valor nominal, la norma del error se reduce.

| Descripción | Valor entregado |
|--|-----------------|
| Norma del error de métodos en x, cuando β_1 va de 0 hasta -30° | 2.122 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_1 va de 0 hasta -30° | 2.457 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_1 va de 0 hasta 30° | 1.705 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_1 va de 0 hasta 30° | 1.894 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_1 va de 0 hasta -1° | 0.027 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_1 va de 0 hasta -1° | 0.032 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_1 va de 0 hasta 1° | 0.031 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_1 va de 0 hasta 1° | 0.037 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_1 va de 0 hasta -0.1° | 0.002 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_1 va de 0 hasta -0.1° | 0.0035 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_1 va de 0 hasta 0.1° | 0.0029 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_1 va de 0 hasta 0.1° | 0.0035 mm |

Cuadro 2.8: Valores de la norma del error de la resta del método de la resta contra el método del diferencial total, cuando el parámetro geométrico β_1 cambia desde su valor nominal de $\beta_1 = 0^\circ$ hasta $\beta_1 = 0.1^\circ$, $\beta_1 = 1^\circ$ y $\beta_1 = -0.1^\circ$, $\beta_1 = -1^\circ$ produciendo cambios máximos y mínimos, respectivamente, en la trayectoria del punto O.

| Parámetro | x o y | Cambio | valor de $\chi^2_{\nu,\alpha}$ | valor de $ \chi^2 $ | Pasa |
|-----------|-------|---------------|--------------------------------|---------------------|------|
| β_1 | x | máximo | 123.22 | 3866 | no |
| β_1 | y | máximo | 123.22 | 4583.1 | no |
| β_1 | x | mínimo | 123.22 | 3576.7 | no |
| β_1 | y | mínimo | 123.22 | 4500.1 | no |
| β_1 | x | 1 unidad | 123.22 | 144.8449 | no |
| β_1 | y | 1 unidad | 123.22 | 176.0959 | no |
| β_1 | x | -1 unidad | 123.22 | 144.0253 | no |
| β_1 | y | -1 unidad | 123.22 | 175.4735 | no |
| β_1 | x | 0.1 unidades | 123.22 | 14.4499 | si |
| β_1 | y | 0.1 unidades | 123.22 | 17.5843 | si |
| β_1 | x | -0.1 unidades | 123.22 | 14.4417 | si |
| β_1 | y | -0.1 unidades | 123.22 | 17.5781 | si |

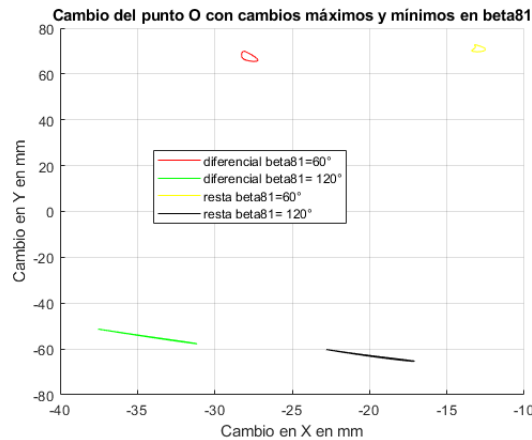
Cuadro 2.9: Tabla comparativa de los resultados de la prueba de Pearson (5%) al ajuste de las curvas resultantes del método diferencial total con respecto a las curvas resultantes del método de la resta de las trayectorias trasladadas con respecto a la trayectoria nominal del punto O cuando hay variaciones máximas, mínimas sobre el parámetro geométrico β_1 , y además, cuando hay variaciones de $\pm 1^\circ$ y $\pm 0.1^\circ$ en β_1 .

En la Tabla 2.9 se muestra los resultados de la prueba de bondad de ajuste con un grado de significación del 5% para la comparación de curvar al variar el parámetro geométrico calibrable

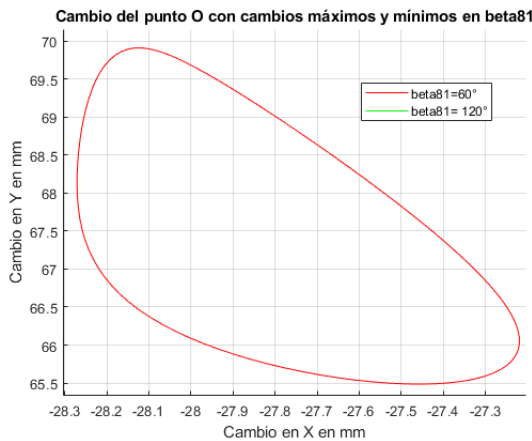
β_1 . Se ve que a diferencia de los otros dos parámetros geométricos, para que las variaciones en β_1 produzcan curvas diferenciales que ajusten a las deseadas, β_1 necesita calibrarse en el intervalo $\pm 0.1^\circ$. De lo contrario, el análisis de las curvas diferenciales totales no aseguran confiabilidad.

2.7.4. Comparación de diferenciales en el punto de interés O con respecto a su trayectoria nominal mientras hay cambio en β_{81}

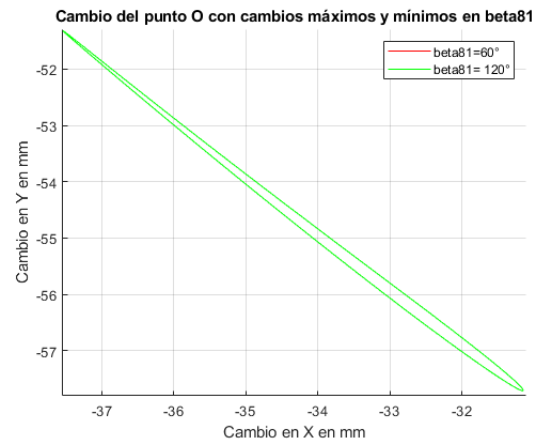
En la Figura 2.35 se ve la comparativa de los diferenciales y la resta de las trayectorias cuando el parámetro geométrico β_{81} se ajusta desde su valor nominal hasta sus valores extremos.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{81} con un cambio máximo y mínimo con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{81} con respecto a la trayectoria nominal.



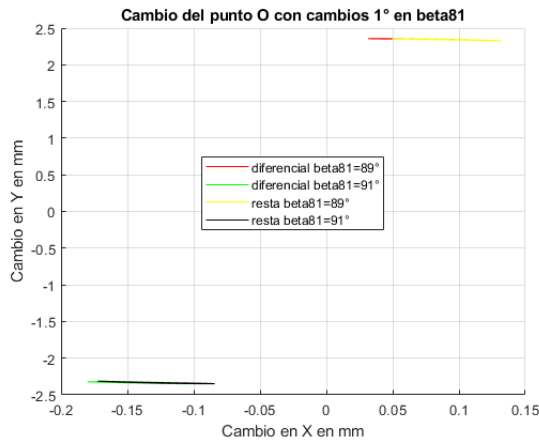
(b) Detalle máximo de la Figura 2.36a; en la curva



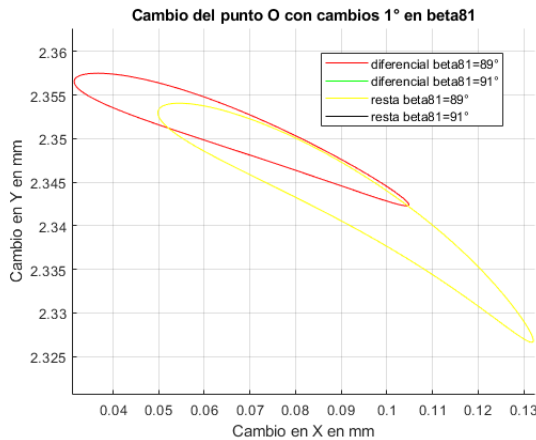
la curva proveniente del diferencial total.

Figura 2.35: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{81} con un cambio máximo y mínimo con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{81} con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

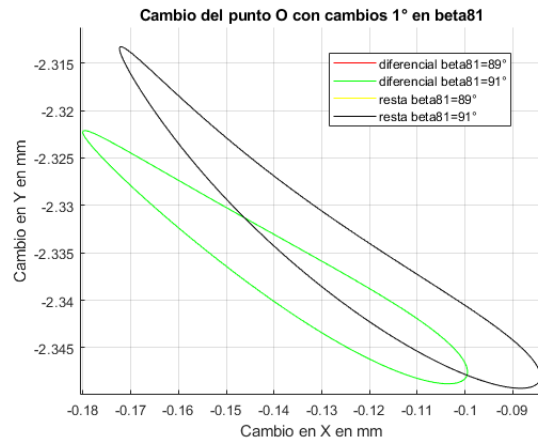
Se puede notar que, en caso de la Figura 2.35, existe una notable separación entre las curvas provenientes de las diferenciales totales y de la resta de trayectorias. Por ello en los detalles de las curvas, únicamente se hace acercamiento a las curvas provenientes del diferencial total de la trayectoria del punto O , al haber variaciones desde el valor nominal hasta los cambios extremos en β_{81} . Sin embargo, si el cambio es menor, por ejemplo de $\delta\beta_{81} = \pm 1^\circ$, la norma del error disminuye y las curvas se empalman. En la Figura 2.36 se puede notar este fenómeno.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{81} con una diferencia de $\pm 1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{81} con respecto a la trayectoria nominal.



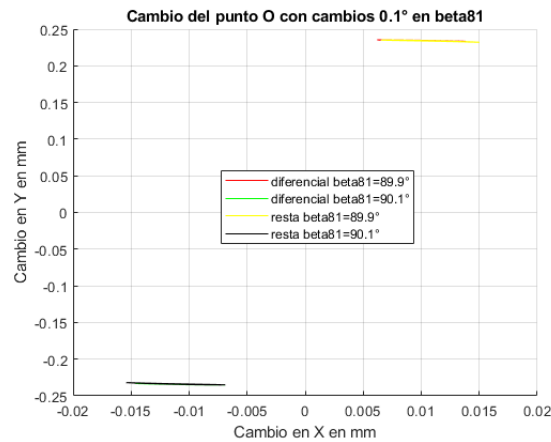
(b) Detalle máximo de la Figura 2.36a.



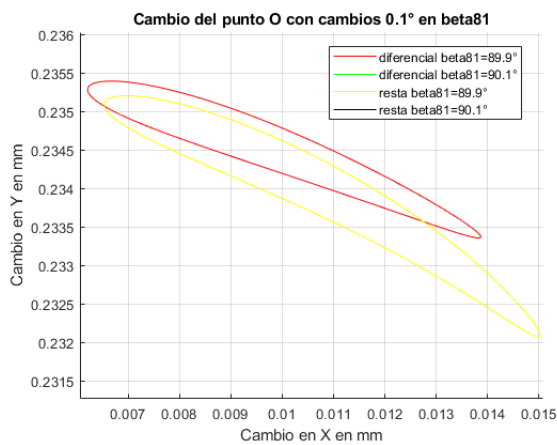
(c) Detalle de la Figura 2.36a en sus valores mínimos.

Figura 2.36: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{81} con una diferencia de $\pm 1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{81} con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

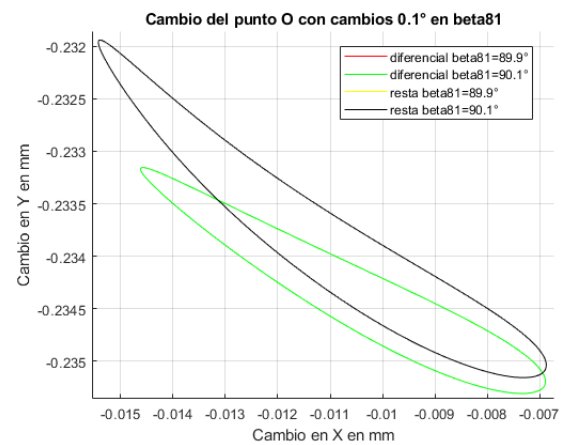
Si el cambio es aún más pequeño, de por ejemplo $\pm 0.1^\circ$ la norma del error se reduce aún más. En la Figura 2.37 se muestra el caso descrito anteriormente.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{81} con una diferencia de $\pm 0.1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{81} con respecto a la trayectoria nominal.



(b) Detalle máximo de la Figura 2.37a.



(c) Detalle mínimo de la Figura 2.37a.

Figura 2.37: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{81} con una diferencia de $\pm 0.1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{81} con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

Para el análisis detallado de las gráficas comparativas 2.37, 2.36 y 2.35. Se presentan las Tablas 2.10 y 2.11. La primera ilustra las normas de los errores obtenidos entre ambos métodos al cambiar el parámetro geométrico β_{81} desde su valor nominal de $\beta_{81} = 90^\circ$ hasta $\beta_{81} = 60^\circ$, $\beta_{81} = 80^\circ$, $\beta_{81} = 89^\circ$, $\beta_{81} = 89.9^\circ$, $\beta_{81} = 91^\circ$, $\beta_{81} = 100^\circ$ y $\beta_{81} = 120^\circ$. Por otro lado, la segunda muestra el resultado de la prueba de bondad de ajuste, con un grado de significación del 5 %, a la comparativa de las curvas obtenidas por el diferencial total de la trayectoria del punto O y las curvas deseadas, mientras el parámetro geométrico β_{81} desde su valor nominal de $\beta_{81} = 90^\circ$ hasta $\beta_{81} = 60^\circ$, $\beta_{81} = 89^\circ$, $\beta_{81} = 89.9^\circ$, $\beta_{81} = 91^\circ$ y $\beta_{81} = 120^\circ$.

| Descripción | Valor entregado |
|--|-----------------|
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{81} va de 90 hasta 60 ° | 14.885 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_{81} va de 90 hasta 60 ° | 3.445 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{81} va de 90 hasta 120 ° | 14.653 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_{81} va de 90 hasta 120 ° | 8.546 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{81} va de 90 hasta 80 ° | 1.763 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_{81} va de 90 hasta 80 ° | 0.135 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{81} va de 90 hasta 100 ° | 1.685 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_{81} va de 90 hasta 100 ° | 0.470 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{81} va de 90 hasta 91 ° | 0.0136 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{81} va de 90 hasta 91 ° | 0.0034 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{81} va de 90 hasta 89 ° | 0.02146 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_{81} va de 90 hasta 89 ° | 0.0084 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{81} va de 90 hasta 90.1 ° | 0.00035 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_{81} va de 90 hasta 90.1 ° | 0.00057 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{81} va de 90 hasta 89.9 ° | 0.00063 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_{81} va de 90 hasta 89.9 ° | 0.00062 mm |

Cuadro 2.10: Valores de la norma del error de la resta del método de la resta contra el método del diferencial total, cuando el parámetro geométrico β_{81} cambia desde su valor nominal de $\beta_{81} = 90^\circ$ hasta $\beta_{81} = 89.9^\circ$, $\beta_{81} = 89^\circ$, $\beta_{81} = 80^\circ$, $\beta_{81} = 60^\circ$ y $\beta_{81} = 90.1^\circ$, $\beta_{81} = 91^\circ$, $\beta_{81} = 100^\circ$, $\beta_{81} = 120^\circ$ produciendo cambios mínimos en la trayectoria del punto O.

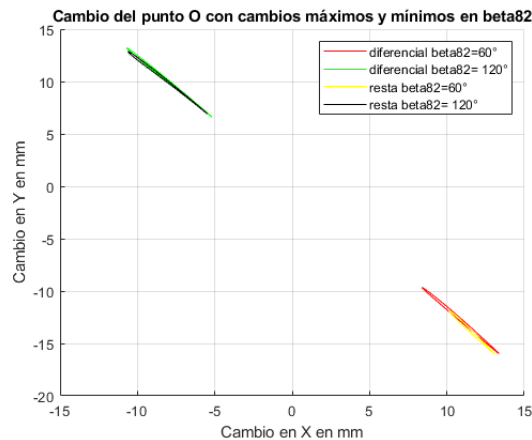
| Parámetro | x o y | Cambio | valor de $\chi^2_{\nu, \alpha}$ | valor de $ \chi^2 $ | Pasa |
|--------------|-------|---------------|---------------------------------|---------------------|------|
| β_{81} | x | máximo | 123.22 | 14842 | no |
| β_{81} | y | máximo | 123.22 | 22306 | no |
| β_{81} | x | mínimo | 123.22 | 12939 | no |
| β_{81} | y | mínimo | 123.22 | 27286 | no |
| β_{81} | x | 1 unidad | 123.22 | 55.9055 | si |
| β_{81} | y | 1 unidad | 123.22 | 944.0389 | no |
| β_{81} | x | -1 unidad | 123.22 | 27.5619 | si |
| β_{81} | y | -1 unidad | 123.22 | 949.6629 | no |
| β_{81} | x | 0.1 unidades | 123.22 | 4.2824 | si |
| β_{81} | y | 0.1 unidades | 123.22 | 94.6707 | si |
| β_{81} | x | -0.1 unidades | 123.22 | 3.997 | si |
| β_{81} | y | -0.1 unidades | 123.22 | 94.7269 | si |

Cuadro 2.11: Tabla comparativa de los resultados de la prueba de Pearson (5 %) al ajuste de las curvas resultantes del método diferencial total con respecto a las curvas resultantes del método de la resta de las trayectorias trasladadas con respecto a la trayectoria nominal del punto O cuando hay variaciones máximas, mínimas sobre el parámetro geométrico β_{81} , y además, cuando hay variaciones de $\pm 1^\circ$ y $\pm 0.1^\circ$ en β_{81} .

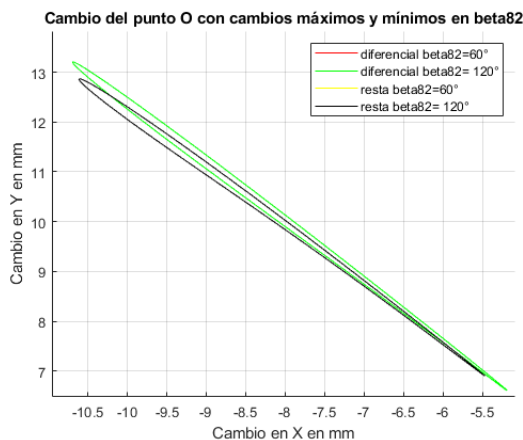
De las Tablas 2.10 y 2.11 se puede concluir que, a medida que el cambio en β_{81} se acerca a su valor nominal, entonces las curvas diferenciales y las curvas deseadas se asemejan más entre sí. Además, la prueba de bondad de ajuste se hace favorable cuando el parámetro geométrico calibrable β_{81} se calibra en el intervalo $\delta\beta_{81} = \pm 0.1^\circ$.

2.7.5. Comparación de diferenciales en el punto de interés O con respecto a su trayectoria nominal mientras hay cambio en β_{82}

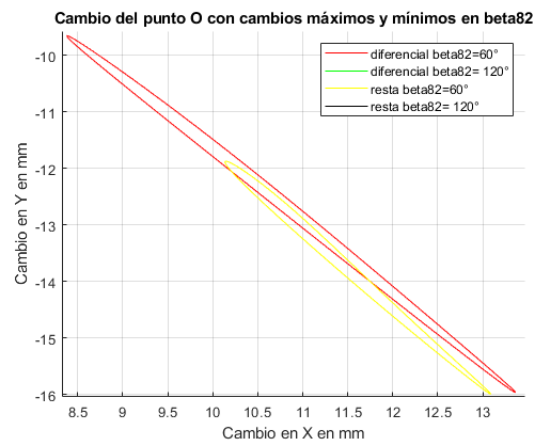
Se compararon las diferenciales contra la curva de respuesta de β_{82} . En sus cambios máximos y mínimos se observa la gráfica de la Figura 2.38a.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{82} con un cambio máximo y mínimo con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{82} con respecto a la trayectoria nominal.



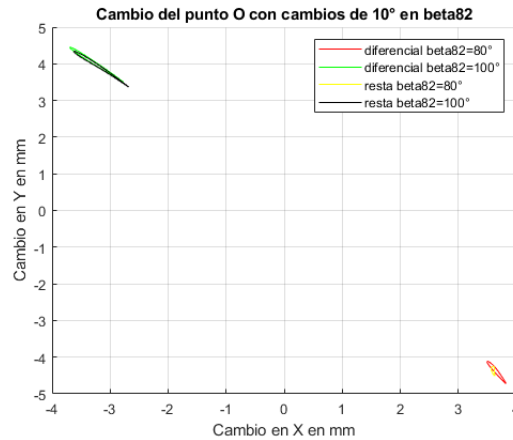
(b) Detalle máximo de la Figura 2.38a.



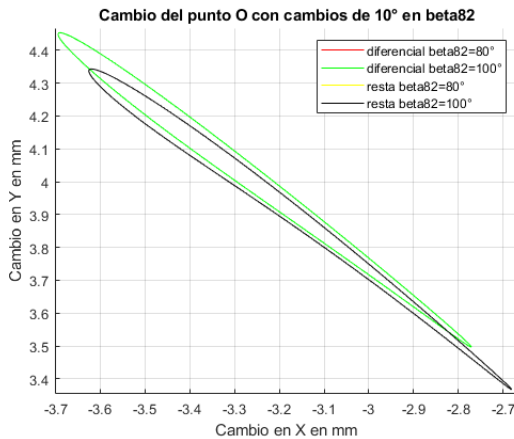
(c) Detalle mínimo de la Figura 2.38a.

Figura 2.38: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{82} con un cambio máximo y mínimo con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{82} con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

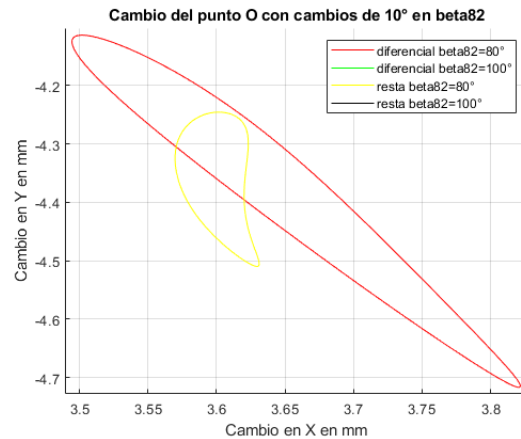
De la misma manera que en casos anteriores al realizar una disminución en el intervalo de cambio de β_{82} , se reduce la norma del error de ambos métodos y las curvas resultantes se parecen más entre sí. Para un cambio de $\pm 10^\circ$ en β_{82} la gráfica se muestra a en la Figura 2.39a



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{82} con un cambio de $\pm 10^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{82} con respecto a la trayectoria nominal.



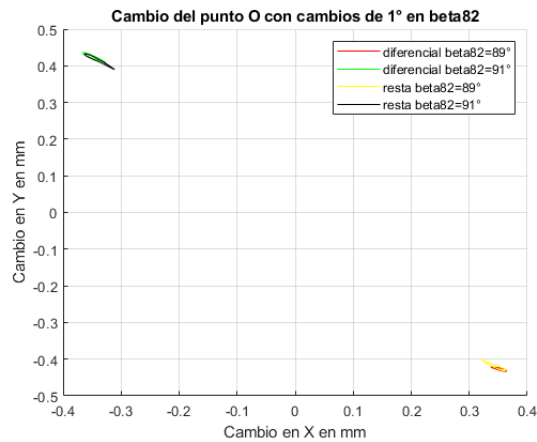
(b) Detalle máximo de la Figura 2.39a.



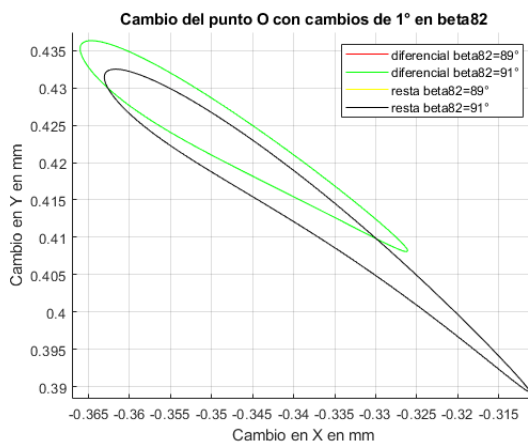
(c) Detalle mínimo de la Figura 2.39a.

Figura 2.39: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{82} con un cambio de $\pm 10^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{82} con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

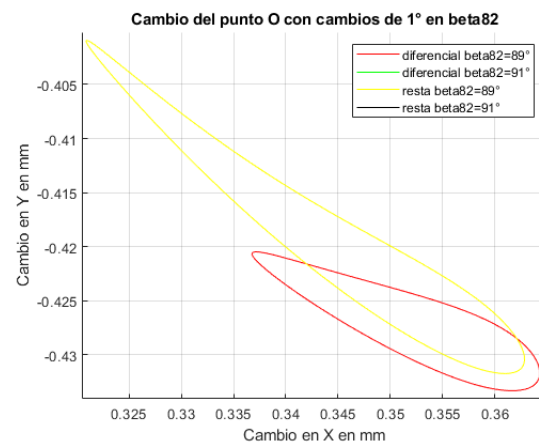
Si se reduce aún más las diferencias y β_{82} tiene un cambio de $\pm 1^\circ$, entonces la norma del error disminuye y las curvas se acercan entre sí. La gráfica de este fenómeno se presenta en la Figura 2.40a



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{82} con un cambio de $\pm 1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{82} con respecto a la trayectoria nominal.



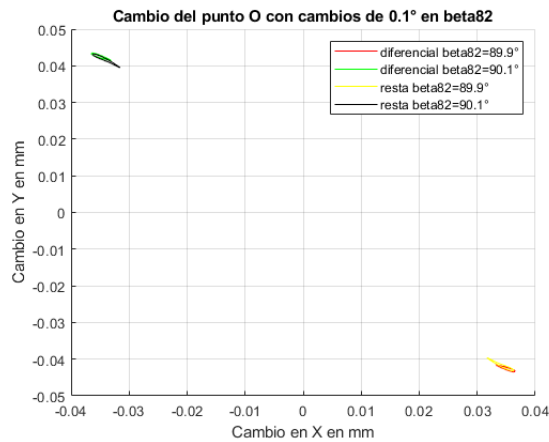
(b) Detalle máximo de la Figura 2.40a.



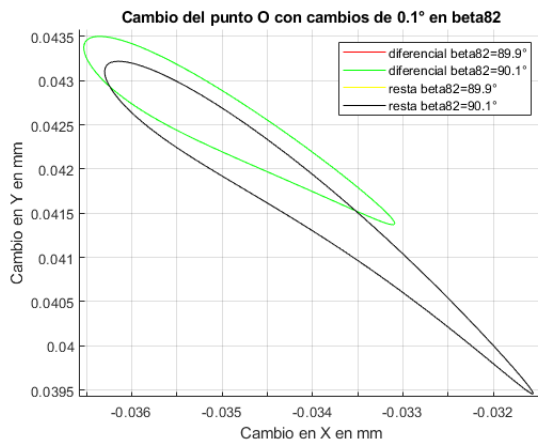
(c) Detalle mínimo de la Figura 2.40a.

Figura 2.40: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{82} con un cambio de $\pm 1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{82} con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

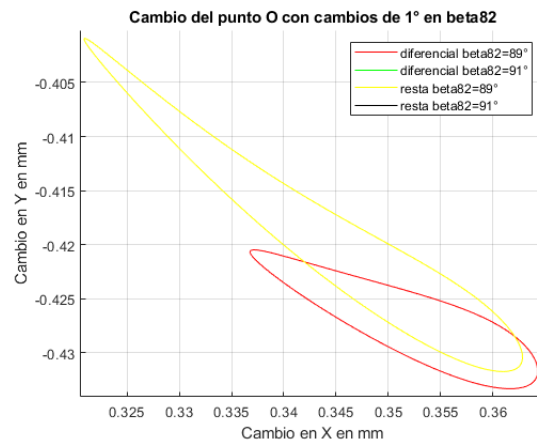
Si el intervalo de cambio en β_{82} se reduce aún más, por ejemplo a $\pm 0.1^\circ$ entonces la norma del error entre ambos disminuye. Este fenómeno, se aprecia en la Figura 2.41a.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{82} con un cambio de $\pm 0.1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{82} con respecto a la trayectoria nominal.



(b) Detalle máximo de la Figura 2.41a.



(c) Detalle mínimo de la Figura 2.40a.

Figura 2.41: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar β_{82} con un cambio de $\pm 0.1^\circ$ con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios en β_{82} con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

| Descripción | Valor entregado |
|---|-----------------|
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{82} va de 90 hasta 120 ° | 0.524 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_{82} va de 90 hasta 120 ° | 0.561 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{82} va de 90 hasta 60 ° | 0.989 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{82} va de 90 hasta 60 ° | 1.30005 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{82} va de 90 hasta 100 | 0.043 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_{82} va de 90 hasta 100 | 0.068 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{82} va de 90 hasta 80 | 0.1095 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_{82} va de 90 hasta 80 | 0.123 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{82} va de 90 hasta 91 | 0.007 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_{82} va de 90 hasta 91 | 0.008 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{82} va de 90 hasta 89 | 0.0077 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{82} va de 90 hasta 89 | 0.0094 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{82} va de 90 hasta 90.1 | 0.0007 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_{82} va de 90 hasta 90.1 | 0.0009 mm |
| Norma del error de métodos en x, cuando β_{82} va de 90 hasta 89.9 | 0.0007 mm |
| Norma del error de métodos en y, cuando β_{82} va de 90 hasta 89.9 | 0.00092 mm |

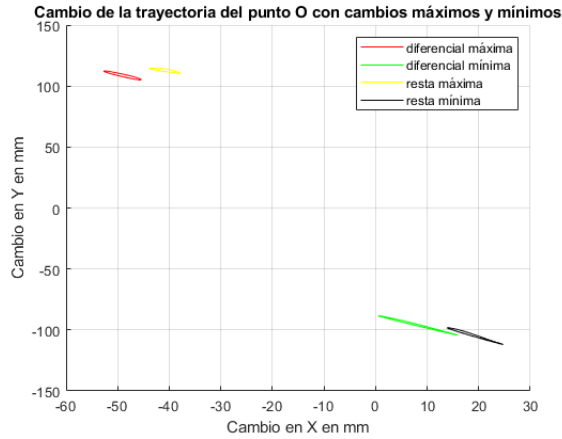
Cuadro 2.12: Valores de la norma del error de la resta del método de la resta contra el método del diferencial total, cuando el parámetro geométrico β_{82} cambia desde su valor nominal de $\beta_{82} = 90^\circ$ hasta, $\beta_{82} = 120^\circ$ $\beta_{82} = 100^\circ$ $\beta_{82} = 91^\circ$, $\beta_{82} = 90.1^\circ$ y $\beta_{82} = 60^\circ$, $\beta_{82} = 80^\circ$ $\beta_{82} = 89^\circ$, $\beta_{82} = 89.9^\circ$ produciendo cambios mínimos en la trayectoria del punto O.

| Parámetro | x o y | Cambio | valor de $\chi^2_{\nu,\alpha}$ | valor de $ \chi^2 $ | Pasa |
|--------------|-------|---------------|--------------------------------|---------------------|------|
| β_{82} | x | máximo | 123.22 | 3248.4 | no |
| β_{82} | y | máximo | 123.22 | 4057.2 | no |
| β_{82} | x | mínimo | 123.22 | 4326.4 | no |
| β_{82} | y | mínimo | 123.22 | 5078.4 | no |
| β_{82} | x | 1 unidad | 123.22 | 140.4537 | no |
| β_{82} | y | 1 unidad | 123.22 | 170.9631 | no |
| β_{82} | x | -1 unidad | 123.22 | 142.0604 | no |
| β_{82} | y | -1 unidad | 123.22 | 172.5478 | no |
| β_{82} | x | 0.1 unidades | 123.22 | 114.1193 | si |
| β_{82} | y | 0.1 unidades | 123.22 | 17.1697 | si |
| β_{82} | x | -0.1 unidades | 123.22 | 14.1353 | si |
| β_{82} | y | -0.1 unidades | 123.22 | 17.1856 | si |

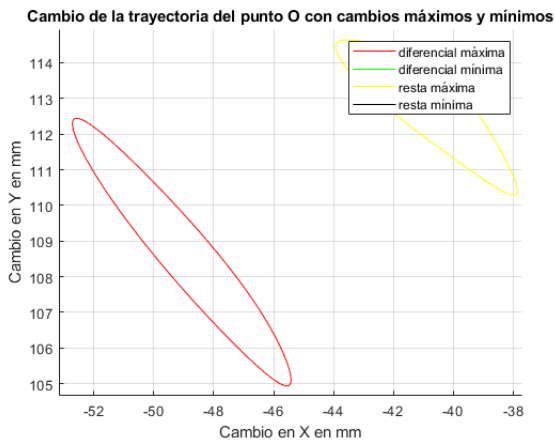
Cuadro 2.13: Tabla comparativa de los resultados de la prueba de Pearson (5%) al ajuste de las curvas resultantes del método diferencial total con respecto a las curvas resultantes del método de la resta de las trayectorias trasladadas con respecto a la trayectoria nominal del punto O cuando hay variaciones máximas, mínimas sobre el parámetro geométrico β_{82} , y además, cuando hay variaciones de $\pm 1^\circ$ y $\pm 0.1^\circ$ en β_{81} .

2.7.6. Comparación de diferenciales en el punto de interés O con respecto a su trayectoria nominal para un cambio máximo y mínimo

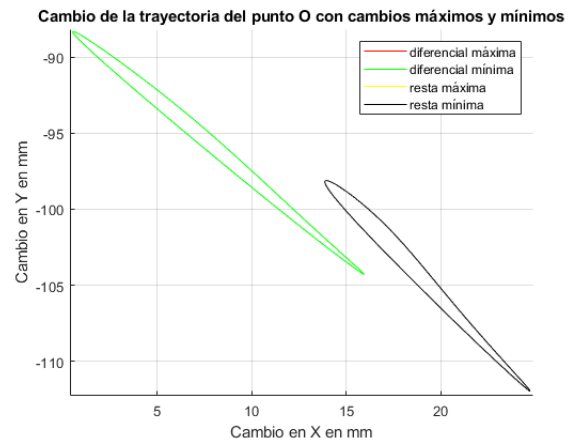
Los diferenciales de los puntos máximos y mínimos con respecto a la trayectoria nominal, se comparan en este apartado (Figura 2.42a y siguientes) con la resta de las trayectoria nominal y la trayectoria desplazada en su punto máximo y mínimo.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar todas las variables calibrables a sus puntos máximos y mínimos con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios con respecto a la trayectoria nominal.



(b) Detalle máximo de la Figura 2.42a.

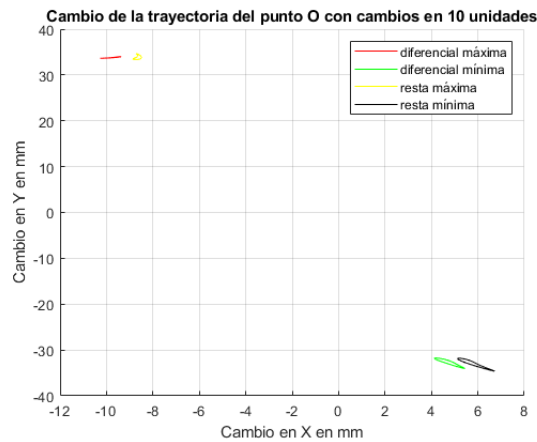


(c) Detalle mínimo de la Figura 2.42a.

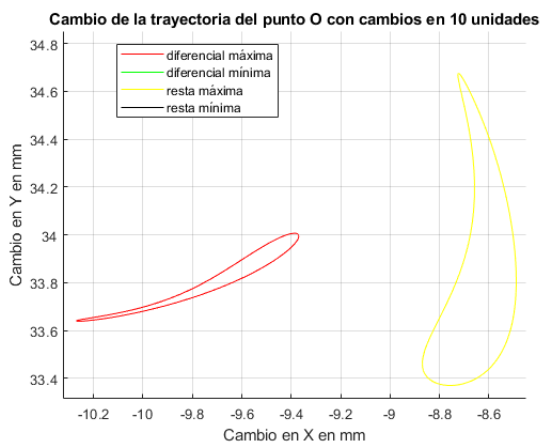
Figura 2.42: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar todas las variables calibrables a sus puntos máximos y mínimos con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

De la misma manera que en las curvas anteriores si se reduce el intervalo de cambio, entonces

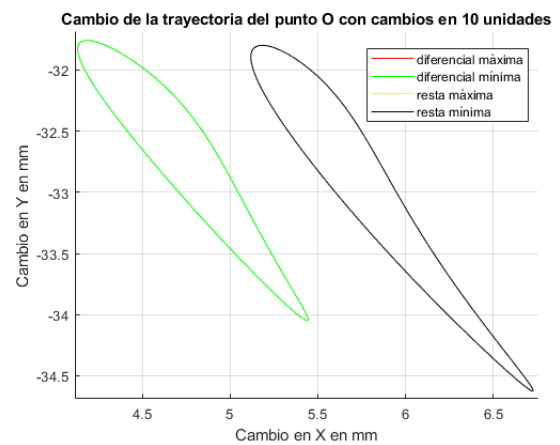
la norma del error se reduce. Este fenómeno se presenta en la Figura 2.43a.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar todas las variables calibrables con ± 10 unidades con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios con respecto a la trayectoria nominal.



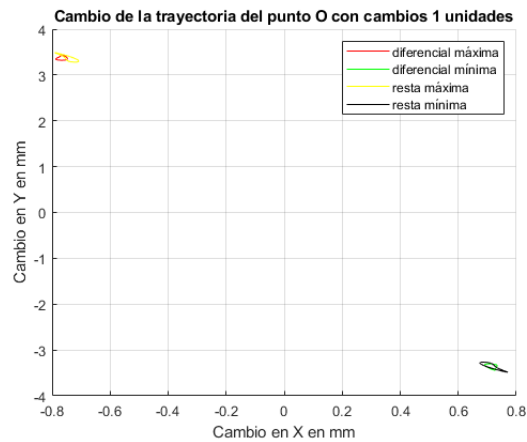
(b) Detalle de la Figura 2.43a.



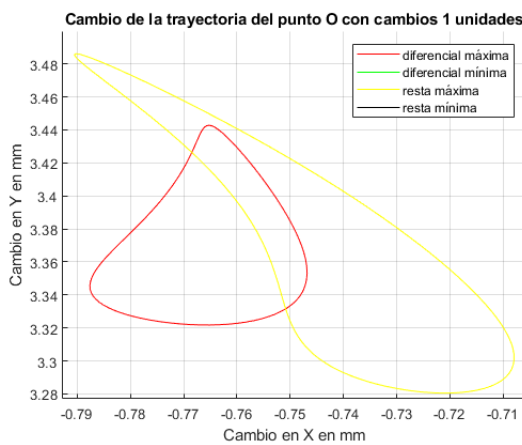
(c) Detalle de la Figura 2.43a.

Figura 2.43: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar todas las variables calibrables con ± 10 unidades con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

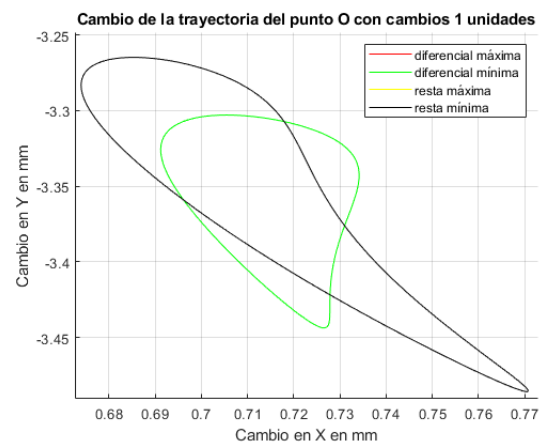
De la misma manera si se reduce el cambio, por ejemplo a 1 unidad, se muestra en la Figura.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar todas las variables calibrables con ± 1 unidades con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios con respecto a la trayectoria nominal.



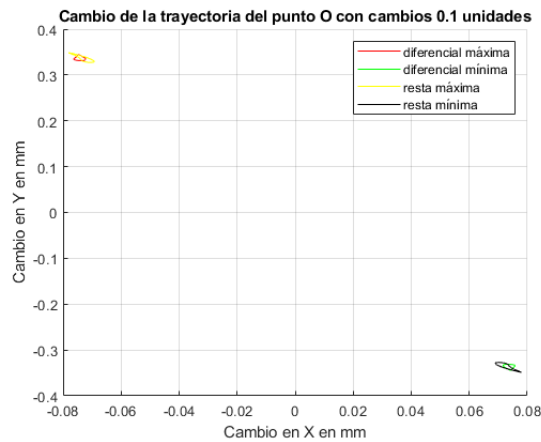
(b) Detalle máximo de la Figura 2.44a.



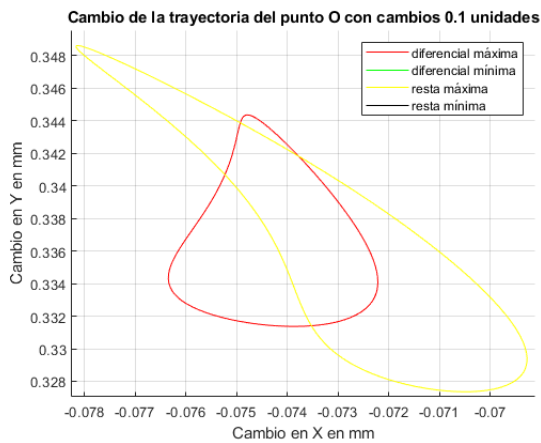
(c) Detalle mínimo de la Figura 2.44a.

Figura 2.44: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar todas las variables calibrables con ± 1 unidades con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

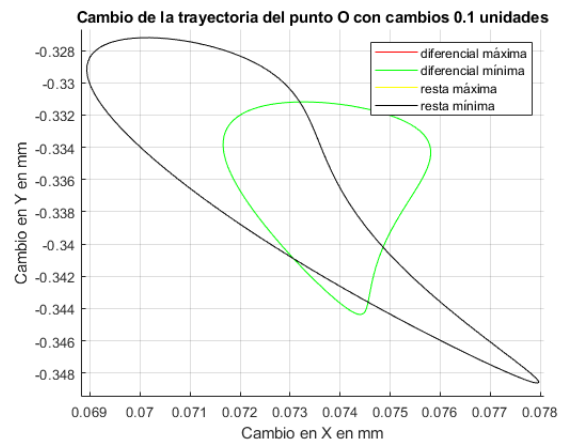
Si se reduce aún más los intervalos de el cambio de los parámetros calibrables la norma del error de ambos métodos se reduce aún más. Por ejemplo, para un cambio de ± 0.1 unidades en todos los parámetros calibrables la gráfica muestra un acercamiento de las curvas obtenidas.



(a) Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar todas las variables calibrables con ± 0.1 unidades con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios con respecto a la trayectoria nominal.



(b) Detalle máximo de la figura 2.45a.



(c) Detalle mínimo de la Figura 2.45a.

Figura 2.45: Comparación entre el diferencial de trayectoria del punto O al variar todas las variables calibrables con ± 0.1 unidades con respecto a la trayectoria nominal, contra la resta de las trayectorias del punto O con los mismos cambios con respecto a la trayectoria nominal y detalles de las curvas.

el detalle de la Figura 2.45a se muestra en las Figuras 2.45b y 2.45c.

| Descripción | Valor entregado |
|---|-----------------|
| Norma del error en x máximo | 10.725 mm |
| Norma del error en y máximo | 8.1062 mm |
| Norma del error en x mínimo | 7.883 mm |
| Norma del error en y mínimo | 4.5107 mm |
| Norma del error en x, con incremento de 10 unidades | 1.013 mm |
| Norma del error en y, con incremento de 10 unidades | 0.227 mm |
| Norma del error en x con decremento de 10 unidades | 1.177 mm |
| Norma del error en y con decremento de 10 unidades | 0.3301 mm |
| Norma del error en x con incremento de 1 unidad | 0.021 mm |
| Norma del error en y con incremento de 1 unidad | 0.029 mm |
| Norma del error en x con decremento de 1 unidad | 0.0323 mm |
| Norma del error en y con decremento de 1 unidad | 0.03102 mm |
| Norma del error en x con incremento de 0.1 unidades | 0.0024 mm |
| Norma del error en y con incremento de 0.1 unidades | 0.003 mm |
| Norma del error en x con decremento de 0.1 unidades | 0.0025 mm |
| Norma del error en y con decremento de 0.1 unidades | 0.003 mm |

Cuadro 2.14: Valores de la norma del error de la resta del método de la resta contra el método del diferencial total, cuando todos los parámetros geométricos calibrables incrementan 0.1, 1, 10 unidades; además de sus máximos valores posibles. También se muestran las normas cuando todos los parámetros geométricos calibrables reducen sus medidas en 0.1, 1, 10 unidades, así como de sus mínimos valores posibles, produciendo cambios máximos y mínimos en la trayectoria del punto O.

| Parámetro | x o y | Cambio | valor de $\chi^2_{\nu,\alpha}$ | valor de $ \chi^2 $ | Pasa |
|-----------|-------|---------------|--------------------------------|---------------------|------|
| todos | x | máximo | 123.22 | 3969.7 | no |
| todos | y | máximo | 123.22 | 38897 | no |
| todos | x | mínimo | 123.22 | 19992 | no |
| todos | y | mínimo | 123.22 | 43997 | no |
| todos | x | 1 unidad | 123.22 | 289.2921 | no |
| todos | y | 1 unidad | 123.22 | 1359.7 | no |
| todos | x | -1 unidad | 123.22 | 309.6422 | no |
| todos | y | -1 unidad | 123.22 | 1363.78 | no |
| todos | x | 0.1 unidades | 123.22 | 29.8482 | si |
| todos | y | 0.1 unidades | 123.22 | 136.16 | no |
| todos | x | -0.1 unidades | 123.22 | 30.0517 | si |
| todos | y | -0.1 unidades | 123.22 | 136.2059 | no |

Cuadro 2.15: Tabla comparativa de los resultados de la prueba de Pearson (5%) al ajuste de las curvas resultantes del método diferencial total con respecto a las curvas resultantes del método de la resta de las trayectorias trasladadas con respecto a la trayectoria nominal del punto O cuando hay variaciones máximas, mínimas sobre todos los parámetros geométricos, y además, cuando hay variaciones de $\pm 1^\circ$ y $\pm 0.1^\circ$.

Capítulo 3

Análisis de influencia

3.1. Sensibilidad de la trayectoria

A partir de la ecuación (2.189) se obtuvieron los cambios en la trayectoria del punto O para todo el giro del elemento de entrada.

El interés principal de este trabajo es conocer la influencia de los parámetros geométricos de calibración sobre el cambio de la trayectoria de barrido, por lo tanto, es importante determinar y visualizar la influencia de dichos parámetros.

Por causa de que la variación de los parámetros geométricos sirve para ajustar los errores en la trayectoria debido a las tolerancias dimensionales de los demás parámetros geométricos del mecanismo, no se requiere incluir (en este apartado) las tolerancias dimensionales de fabricación, como en el caso de otros trabajos similares [22,30] Así, los valores de los diferentes diferenciales de los parámetros geométricos $\delta l_i, i \in \mathbb{N}$, son iguales a cero, con excepción de los parámetros geométricos calibrables: $\delta l_8, \delta l_5, \delta \beta_{81}, \delta \beta_1, \delta \beta_{82}$. Además, se presupone un valor nulo para el diferencial de la entrada, $\delta \varphi_{21} = 0, \delta \varphi_{22} = 0$, ya que el elemento de entrada da vueltas completas y pasa por todas las posiciones prescritas.

3.1.1. Curvas diferenciales totales de la trayectoria del punto O

En la Figura 3.1, se da a conocer los cambios δ_x, δ_y obtenidos de la diferencial total de la trayectoria del punto O , cuando se incrementa el parámetro geométrico l_5 , desde su valor nominal de 4600 mm de longitud, hasta su valor extremo de 4720 mm. En la misma Figura 3.1, se muestra los cambios δ_x, δ_y obtenidos de la diferencial total de la trayectoria del punto O cuando hay un decremento en l_5 , desde su valor nominal de 4600 mm de longitud, hasta 4480 mm de longitud final. El incremento o el decremento es de ± 30 mm en cada curva generada. Estas trayectorias se grafican juntas en la Figura 3.1y se marca con un código de colores los valores de los cambios δ_x, δ_y según la magnitud del cambio del parámetro geométrico l_5 . En la Figura, solo se está midiendo el efecto de la variación de l_5 en los cambios δ_x, δ_y de la trayectoria del punto O respecto a la trayectoria nominal. Los demás parámetros geométricos calibrables están en sus valores nominales, es decir: $l_8=5450$ mm, $\beta_1=0^\circ$, $\beta_{81}=90^\circ$ y $\beta_{82}=90^\circ$.

Los cambios δ_x, δ_y definen una curva cerrada debido a que la ecuación diferencial total de la trayectoria está en función del ángulo de entrada φ_{21} que varía entre 0 y 360 °. Los cambios δ_x, δ_y más altos posibles se muestran en la curva de color naranja. Estos tienen un

valor máximo de 18 mm en el eje y , cuando el cambio de δl_5 es +120 mm. De este modo, se puede saber ahora que el incremento de $\delta l_5 = +120$ mm permite aumentar la altura de la trayectoria del punto O , en +18 mm con respecto a la altura que tenía cuando el parámetro geométrico calibrable l_5 estaba en su valor nominal. Ese mismo cambio le permite al punto O desplazarse horizontalmente hasta -15 mm respecto a las posiciones x del punto O cuando l_5 está en su valor nominal.

A partir de la Figura 3.1 se puede saber que cuando se disminuye la longitud de l_5 se reduce en 15 mm la distancia relativa entre el rastrillo y la cuba. Por otro lado, cuando aumenta la longitud l_5 , se incrementa la distancia relativa entre la cuba y el rastrillo en 18 mm.

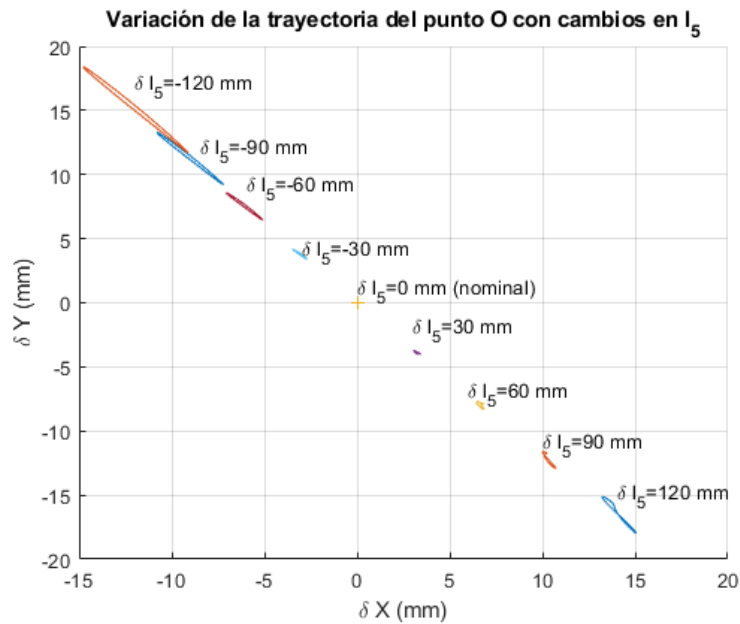


Figura 3.1: Valores de los cambios δ_x , δ_y de la trayectoria del punto O cuando los cambios δl_5 toman valores en milímetros de: -120,-90,-60,-30,0,30,60,90,120

En la Figura 3.2, se da a conocer la sensibilidad δ_x , δ_y de los cambios de la trayectoria del punto O ante los cambios del parámetro geométrico calibrable l_8 , cuando este varía desde su valor nominal de 5450 mm, hasta su valor extremo de 5500 mm, es decir, ante un cambio δl_8 de +50 mm respecto a su valor nominal. En la Figura 3.2, también se muestra la sensibilidad de la trayectoria del punto O ante los cambios milimétricos $\delta l_8 = -50, -25, 0, 25, 50$, respecto a su valor nominal de 5450 mm de longitud. El incremento o el decremento es de ± 25 mm en cada curva generada. Las longitudes y ángulos de los demás parámetros geométricos calibrables δl_5 , $\delta \beta_1$, $\delta \beta_{82}$ y $\delta \beta_{81}$ son constantes y tienen el valor numérico correspondiente a su valor nominal. En la gráfica 3.2 se puede apreciar que el cambio máximo δ_x , δ_y de la trayectoria del punto O , al aumentar la longitud de l_8 , desde su valor nominal hasta 5500 mm, es de -4 mm en y y 3.5 mm en x . Por otro lado, al disminuir la longitud del parámetro geométrico calibrable l_8 , desde su valor nominal hasta 5500 mm, el cambio δ_x , δ_y de la trayectoria es de 7.5 mm en y y -5.5 mm en x . A partir de la Figura 3.2 se puede saber que cuando se disminuye la longitud de l_8 aumenta la distancia relativa entre el rastrillo y la cuba en 7.5 mm. Por otro lado, cuando se

aumenta la longitud l_8 , se reduce la distancia relativa entre la cuba y el rastrillo en 4 mm.

Al comparar los resultados de la Figura 3.1 con los de la Figura 3.2, se puede observar que los cambios δ_x , δ_y de la trayectoria con respecto a la nominal, son más sensibles ante los cambios en l_5 que ante los cambios en l_8 .

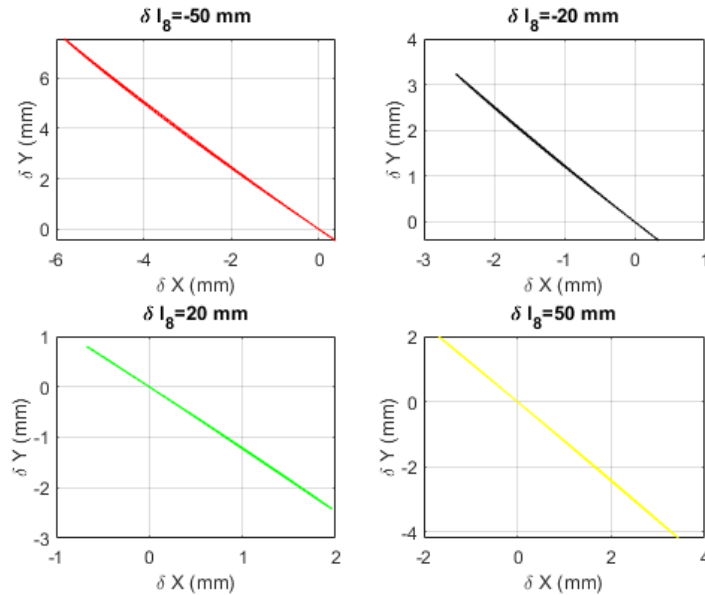


Figura 3.2: Valores de los cambios δ_x , δ_y de la trayectoria del punto O cuando los cambios δl_8 toman valores en milímetros de: -50,-25,0,25,50.

En la Figura 3.3, se da a conocer la sensibilidad δ_x , δ_y de los cambios de la trayectoria del punto O ante los cambios del parámetro geométrico calibrable β_1 , cuando este varía desde su valor nominal de 0° , hasta su valor extremo de 30° , es decir, ante un cambio $\delta\beta_1$ de 30° respecto a su valor nominal. En la Figura 3.3, también se muestra la sensibilidad δ_x , δ_y de la trayectoria del punto O ante los cambios en grados $\delta\beta_1 = -30, -10, -20, 0, 10, 20, 30$, respecto a su valor nominal de 0° , siendo el incremento o el decremento es de $\pm 10^\circ$ en cada curva generada. Las longitudes y ángulos de los demás parámetros geométricos calibrables δl_5 , δl_8 , $\delta\beta_{82}$ y $\delta\beta_{82}$ son constantes y tienen el valor numérico correspondiente a su valor nominal. En la gráfica 3.3 se puede apreciar que el cambio máximo δ_x , δ_y de la trayectoria del punto O , al aumentar el ángulo de β_1 , desde su valor nominal 0° hasta 30° , es de -15 mm en y y 12 mm en x . Por otro lado, al disminuir el ángulo del parámetro geométrico calibrable β_1 , desde su valor nominal hasta -30° , el cambio δ_x , δ_y de la trayectoria es de 13 mm en y y -11 mm en x . A partir de la Figura 3.3 se puede saber que cuando se disminuye el ángulo β_1 aumenta la distancia relativa entre el rastrillo y la cuba en 13 mm. Por otro lado, cuando se aumenta el ángulo β_1 , se reduce la distancia relativa entre la cuba y el rastrillo en 15 mm.

Al comparar los resultados de las Figuras 3.1 y 3.2 con los de la Figura 3.3, se puede observar que los cambios δ_x , δ_y de la trayectoria con respecto a la nominal, siguen siendo más sensibles ante los cambios en l_5 que ante los cambios en l_8 y β_1 .

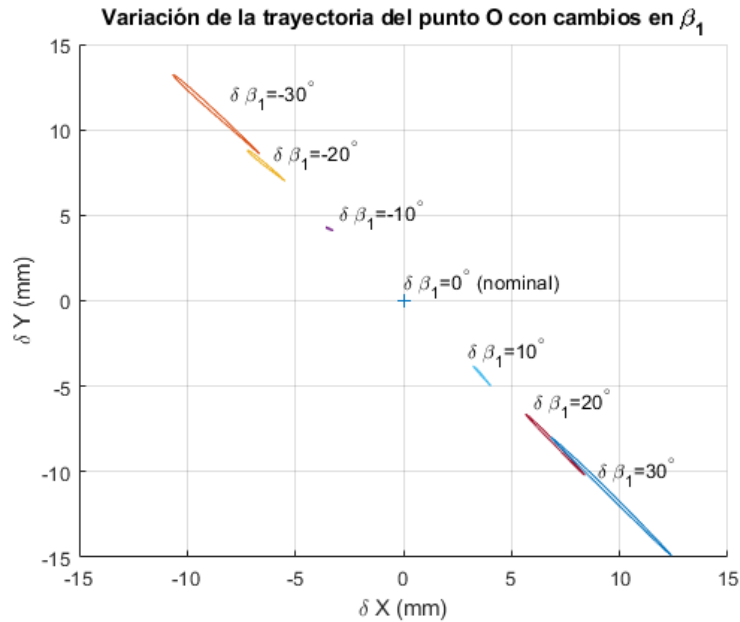


Figura 3.3: Valores de los cambios δ_x , δ_y de la trayectoria del punto O cuando los cambios $\delta\beta_1$ toman valores en grados de: -30,-20,-10,0,10,20,30.

En la Figura 3.4, se da a conocer la sensibilidad δ_x , δ_y de los cambios de la trayectoria del punto O ante los cambios del parámetro geométrico calibrable β_{81} , cuando este varía desde su valor nominal de 90° , hasta su valor extremo de 120° , es decir, ante un cambio $\delta\beta_{81}$ de 30° respecto a su valor nominal. En la Figura 3.4, también se muestra la sensibilidad δ_x , δ_y de la trayectoria del punto O ante los cambios en grados $\beta_{81} = -30, -10, -20, 0, 10, 20, 30$, respecto a su valor nominal de 90° , siendo el incremento o el decremento de $\pm 10^\circ$ en cada curva generada. Las longitudes y ángulos de los demás parámetros geométricos calibrables δl_5 , δl_8 , $\delta \beta_2$ y $\delta \beta_1$ son constantes y tienen el valor numérico correspondiente a su valor nominal. En la gráfica 3.4 se puede apreciar que el cambio máximo δ_x , δ_y de la trayectoria del punto O, al aumentar el ángulo de β_{81} , desde su valor nominal 90° hasta 120° , es de -50 mm en y y -37 mm en x. Por otro lado, al disminuir el ángulo del parámetro geométrico calibrable β_{81} , desde su valor nominal hasta 60° , el cambio δ_x , δ_y de la trayectoria es de 70 mm en y y -28 mm en x. A partir de la Figura 3.4 se puede saber que cuando se disminuye el ángulo β_{81} aumenta la distancia relativa entre el rastrillo y la cuba en 70 mm. Por otro lado, cuando se aumenta el ángulo β_{81} , se reduce la distancia relativa entre la cuba y el rastrillo en 50 mm respecto a la trayectoria nominal del punto O.

Al comparar los resultados de las Figuras 3.1, 3.2, 3.3 con los de la Figura 3.4, se puede observar que los cambios δ_x , δ_y de la trayectoria con respecto a la nominal, son más sensibles ante los cambios en β_{81} que ante los cambios en l_5 , l_8 y β_1 .

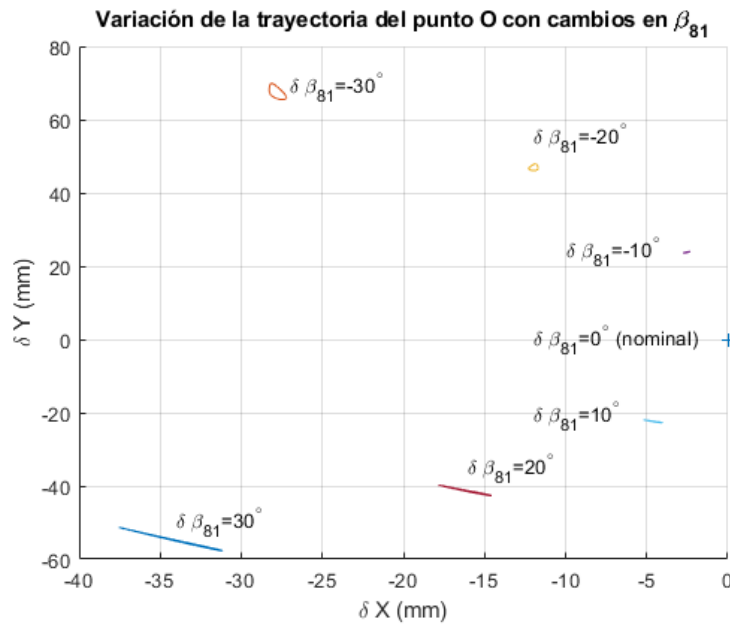


Figura 3.4: Valores de los cambios δ_x , δ_y de la trayectoria del punto O cuando los cambios $\delta\beta_{81}$ toman valores en grados de: -30,-20,-10,0,10,20,30.

En la Figura 3.5, se da a conocer la sensibilidad δ_x , δ_y de los cambios de la trayectoria del punto O ante los cambios del parámetro geométrico calibrable β_{82} , cuando este varía desde su valor nominal de 90° , hasta su valor extremo de 120° , es decir, ante un cambio $\delta\beta_{82}$ de 30° respecto a su valor nominal. En la Figura 3.5, también se muestra la sensibilidad δ_x , δ_y de la trayectoria del punto O ante los cambios en grados $\delta\beta_{82} = -30, -10, -20, 0, 10, 20, 30$, respecto a su valor nominal de 90° , siendo el incremento o el decremento de $\pm 10^\circ$ en cada curva generada. Las longitudes y ángulos de los demás parámetros geométricos calibrables δl_5 , δl_8 , $\delta\beta_{81}$ y $\delta\beta_1$ son constantes y tienen el valor numérico correspondiente a su valor nominal. En la gráfica 3.5 se puede apreciar que el cambio máximo δ_x , δ_y de la trayectoria del punto O, al aumentar el ángulo de β_{82} , desde su valor nominal 90° hasta 120° , es de 11 mm en y y -11 mm en x. Por otro lado, al disminuir el ángulo del parámetro geométrico calibrable β_{82} , desde su valor nominal hasta 60° , el cambio δ_x , δ_y de la trayectoria es de -16 mm en y y 14 mm en x. A partir de la Figura 12 se puede saber que cuando se incrementa el ángulo β_{82} aumenta la distancia relativa entre el rastrillo y la cuba en 11 mm. Por otro lado, cuando disminuye el ángulo β_{82} , se reduce la distancia relativa entre la cuba y el rastrillo en 16 mm respecto a la trayectoria nominal del punto O.

Al comparar los resultados de las Figuras 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 con los de la Figura 3.5, se puede observar que los cambios δ_x , δ_y de la trayectoria con respecto a la nominal, siguen siendo más sensibles ante los cambios en β_{81} que ante los cambios en l_5 , l_8 , β_1 y β_{82} .

Con la información obtenida de la sensibilidad de la trayectoria del punto O ante los cambios individuales de los parámetros geométricos de ajuste, es posible realizar una combinación de ellos para obtener el máximo y el mínimo cambio de la trayectoria del punto O.

En la Figura 3.5 se muestra el máximo cambio posible con todos los parámetros geométricos desplazados, desde sus valores nominales, hasta sus valores extremos. Se puede notar que el

máximo cambio positivo de la trayectoria en el eje y es de 110 mm y el máximo cambio negativo es de -105 mm. Por otra parte, en el eje x , el máximo cambio negativo es -55 mm y el máximo cambio positivo es de 15 mm. Es decir, a partir de sus valores nominales, el rastrillo tiene la capacidad física de moverse 100 mm hacia arriba o hacia abajo de su posición original y de 55 mm a la izquierda o 15 mm a la derecha.

Los elementos de ajuste en conjunto producen un gran cambio en la trayectoria del punto O del rastrillo. Sin embargo, existen mecanismos cuyos eslabones de ajuste individuales tienen una mayor sensibilidad que la que produce todos los elementos de ajuste del mecanismo de rastrillo actuando en su conjunto.

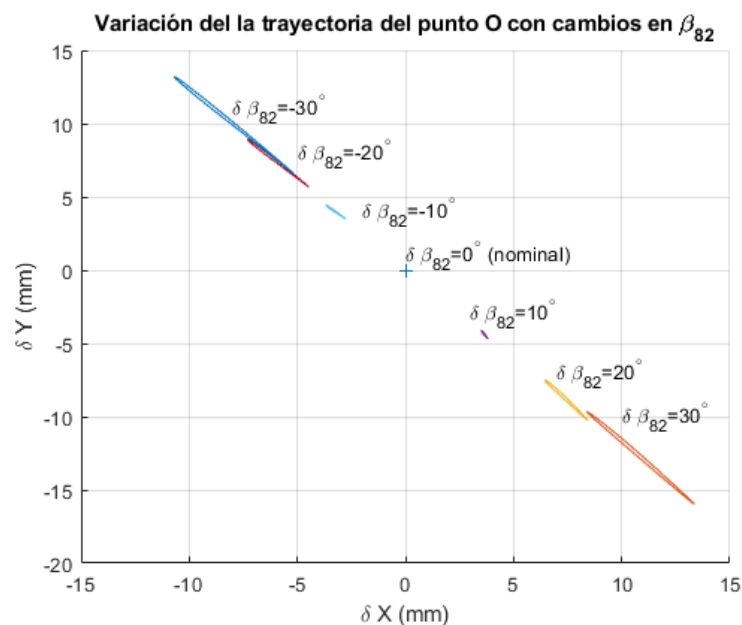


Figura 3.5: Valores de los cambios δ_x , δ_y de la trayectoria del punto O cuando los cambios $\delta\beta_{82}$ toman valores en grados de: -30,-20,-10,0,10,20,30.

3.1.2. Comparación entre las curvas generadas por el método de las diferenciales totales cuando los parámetros geométricos calibrables se ajustan en sus valores extremos

Se pueden visualizar los diferenciales totales en una sola imagen para extraer la información pertinente.

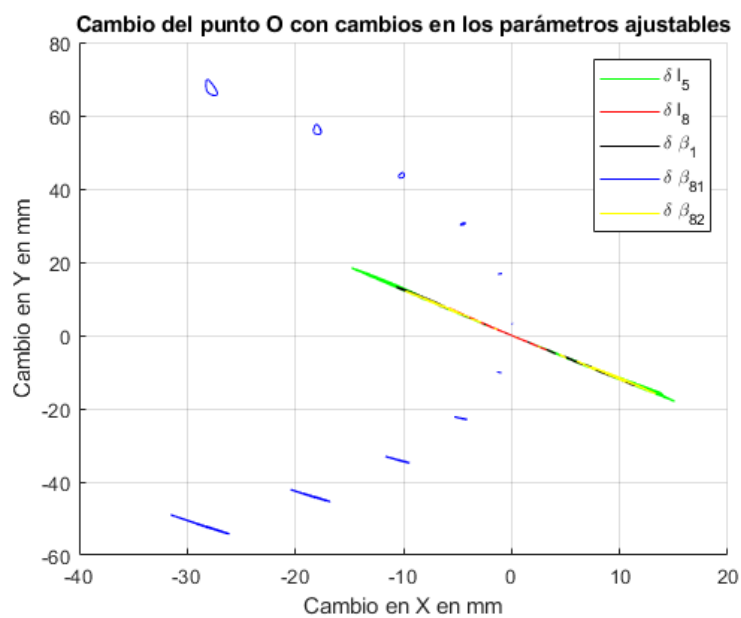


Figura 3.6: Comparación de los diferenciales totales

A partir de la Figura 3.6 se puede extraer la información que se necesita saber. Por ejemplo, se puede ver que el cambio máximo corresponde al parámetro geométrico ajustable β_{81} . Esto último debido a que sus curvas correspondientes están más alejadas del origen que cualquier otra. Por otro lado, la diferencial de trayectoria generada por el cambio en l_8 es el cambio que induce la menor influencia, ya que es la más cercana al cero.

Capítulo 4

Propuesta de calibración

4.1. Calibración del rastrillo

Después de haber realizado el estudio de la sensibilidad del mecanismo se ha obtenido la información suficiente para conocer el posicionamiento de los eslabones cuando cambian los parámetros geométricos calibrables. Gracias a esto, se puede proponer un método de calibración que use esta información para ajustar el mecanismo. Para ello, se debe retomar el problema de calibración, el cual dice que los dientes del rastrillo deben de posicionarse en un intervalo de 5 a 15 mm con respecto a la cuba. Para lograr esto, se propone utilizar dos sensores de proximidad inductiva con un alcance de 4 y 8 mm respectivamente por diente. Sensores de este tipo debido a que si la cuba es de metal, al entrar en su rango de detección, el sensor detectará la presencia de la cuba. Para el sensor de 8 mm se sugiere usar el modelo LJ18A3-8-Z/BX [31] y para el de 4 mm se propone usar el modelo LJ12A3-4-Z/BX [32]. Estos deben colocarse sobre la superficie de la cara y en los extremos laterales de los dientes del rastrillo, de manera que su superficie de detección quede paralelo a la cuba y que estén separados uno del otro. Un esquema del posicionamiento se muestra en la Figura 4.1. Si es que en algún mecanismo, la cuba no fuese de un material ferromagnético, se deberá buscar otro modo de delimitar esos mismos límites.

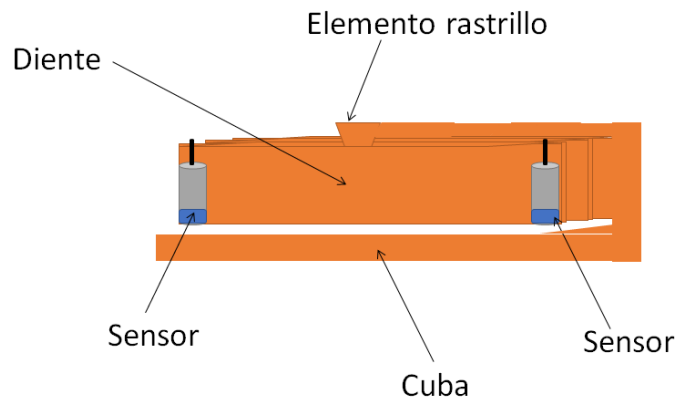


Figura 4.1: Ubicación de los sensores de proximidad inductivos sobre la cara del diente extremo en la zona de descarga.

La configuración de la Figura 4.1 se dispuso en esa posición debido a que si se acciona el sensor de 4 mm, implica que el diente está muy cerca de la cuba. Por otro lado, si se acciona el de 8 mm, el diente está posicionada muy lejos de la cuba. Por ello, el rastrillo deberá estar calibrado si en cada diente del mecanismo el sensor de 8 mm está accionado y el de 4 mm no se ha activado. Con esta idea se puede pensar que como el rastrillo, de 7 m de longitud, posee 69 dientes entonces se necesitarían 138 sensores para calibrar el mecanismo. Sin embargo, se propone que el mínimo número de sensores para calibrar el rastrillo sea de 4. Esto debido a que se pueden colocar 2 sensores en el diente extremo del parámetro geométrico l_{85} , donde es posible interactuar con el rastrillo ya que es el lugar de descarga y está abierto, y otros 2 sensores en un diente de la parte media del rastrillo donde también se puede acceder a los dientes desde la parte de arriba. La ubicación propuesta de los sensores en el rastrillo se puede observar en la Figura 4.2. Al tener 4 sensores en esta configuración, sobre dos puntos del rastrillo, es posible estimar una recta, paralela a la cuba, que pase por estos puntos y permita estimar la distancia de todos los demás dientes del rastrillo con respecto a la cuba.

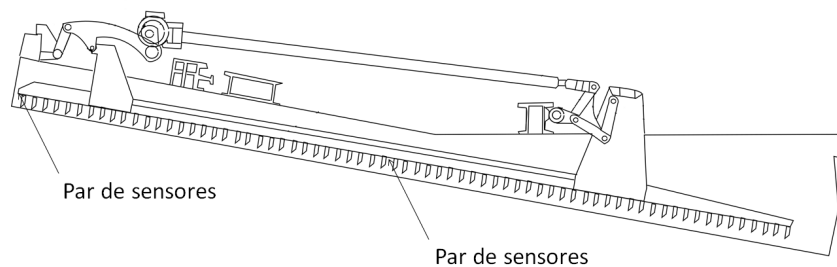


Figura 4.2: Ubicación de los dos pares de sensores de proximidad inductiva sobre el elemento rastrillo.

Ahora bien, para la manipulación de los eslabones de calibración el motor de la máquina deberá estar, de preferencia, apagado. Por lo tanto, para realizar el ajuste es necesario que la máquina se apague cuando la posición de los dientes del rastrillo de la Figura 4.2 este más cerca de la cuba. Al apagarse la máquina es necesario manipular los eslabones de ajuste con la información que se ha obtenido en esta tesis y se condensa en la aplicación de calibración desarrollada. En ese momento es necesario cuidar evitar las interferencias entre eslabones y el bastidor y entre ellos mismos. Por ello, se necesita revisar en el análisis realizado los desplazamientos máximos y cuidar mediante mediciones a pie de máquina que todos los elementos se encuentren dentro de las especificaciones.

El barro rojo que se separa es una mezcla de minerales ya que proviene de la bauxita. La bauxita es el mineral del aluminio. El óxido de aluminio es su mayor componente; el resto son impurezas como la sílice, el óxido de hierro y el dióxido de titanio y, por supuesto, la humedad libre [33]. Al contener componentes de hierro en la solución, los sensores inductivos se ven afectados por la presencia de estos minerales. De hecho en ciertas ocasiones el lodo rojo se recicla y se usa como pantalla electromagnética [34]. Por lo tanto, los sensores no se deben usar cuando la cuba esté cargada con el barro rojo. Por otro lado, es sabido que el PH de esta solución se encuentra entre 10.5 a 12.5 [35]. Por esto, la manipulación del rastrillo llena de barro puede ser peligrosa para cualquier operario que desee acercarse al producto de la máquina clasificadora sin equipo de protección. Por todo ello se recomienda, de manera ideal, vaciar el

contenido de la cuba antes de realizar el proceso de calibración. También, se recomienda limpiar las paredes y los dientes de cualquier residuo para que no afecte a la calibración del mecanismo. En caso de que el proceso de vaciar la cuba sea económicamente, o técnicamente inviable, se podrá tolerar calibrar el mecanismo con la cuba llena y sustituir los sensores inductivos por algún otro método equivalente, por ejemplo, el uso de galga de espesores [36].

Ya que se ha ajustado el mecanismo, se recomienda quitar los sensores, llenar la maquinaria con el producto a separar, verificar que el mecanismo está libre de interferencias; preferentemente en toda la carrera de avance. Una vez que se ha verificado que no hay problema alguno, se deberá encender la máquina.

Algunas consideraciones que se debe tener en cuenta a la hora de calibrar el mecanismo es la deformación de los elementos. Para ello, se recomienda calibrar el mecanismo en un horario donde la temperatura sea máxima, por ejemplo a medio día en verano. También, se debe de cuidar que no exista deformación por pandeo debido a un excesivo peso del líquido a desarenar, esto debido a que, si se calibra el mecanismo sin el lodo rojo, puede existir un cambio en el ajuste por la presión que ejerce el lodo sobre la cuba. Para evitar esto, se recomienda calibrar el rastrillo con una carga que simule la presencia del lodo rojo sobre el rastrillo. Por ejemplo, si es que existe diferencia por pandeo, se propone llenar el contenido de la cuba con agua después de retirar el lodo rojo. Una vez hecho esto, se deberá calibrar la máquina. Después del ajuste con la cuba llena de agua se podrá vaciar y volver a llenar la cuba con el producto a clasificar. La cantidad de agua que se debe colocar debe simular la presión del lodo rojo en la cuba con condiciones normales. En este sentido se necesita saber que tanto más de agua hay que agregar para obtener la misma presión sobre la cuba. Por eso, se puede analizar el peso específico del barro y compararlo con el del agua. El lodo rojo de la empresa australiana ALCOA, en el 2015 arrojó un valor de gravedad específica de 2.88 [37]. Esta información permite estimar que la cantidad del volumen de agua que se debe de suministrar para simular la presión del barro es 2.88 veces el volumen del barro retirado.

Por último, se recomienda usar herramientas que permitan la repetitividad de los ajustes, por ejemplo usar llaves de par para el afloje y apriete de los tornillos de ajuste.

Capítulo 5

Resultados

El cambio máximo que se puede obtener en la trayectoria de un punto sobre el rastrillo, cuando se modifica el parámetro geométrico l_5 es de 18 mm en y y de 15 mm en x , con respecto a la trayectoria nominal.

El cambio máximo de la trayectoria del punto O , al aumentar la longitud de l_8 , desde su valor nominal hasta 5500 mm, es de -4 mm en y y 3.5 mm en x . Por otro lado, al disminuir la longitud del parámetro geométrico calibrable l_8 , desde su valor nominal hasta 5500 mm, el cambio de la trayectoria es de 7.5 mm en y y -5.5 mm en x .

El cambio máximo de la trayectoria del punto O , al aumentar β_1 , desde su valor nominal hasta 30° , es de -15 mm en y y 12 mm en x . Por otro lado, al disminuir β_1 , desde su valor nominal hasta -30° , el cambio de la trayectoria es de 13 mm en y y -11 mm en x .

Cuando el parámetro geométrico calibrable β_{81} aumenta desde su valor nominal hasta su valor extremo, el máximo cambio de la trayectoria es de -50 mm en y y -37 mm en x . Por otro lado, cuando β_{81} disminuye desde su valor nominal hasta su mínimo valor angular, el máximo cambio de la trayectoria del punto O es de 70 mm en y y -28 mm en x . Los cambios del parámetro geométrico calibrable β_{81} producen un cambio grueso en la trayectoria del punto O . Al variar cualquiera de los parámetros geométricos l_5 , β_1 y β_{82} , se genera un cambio intermedio en la trayectoria del punto O y la variación de l_8 trae consigo un ajuste fino al cambio de la trayectoria del punto O .

Cuando β_{82} va de 90° a 120° , el cambio δ_y tiene un valor máximo de 11 mm en el eje y y δ_x de -11 mm en el eje x . De la misma manera, cuando β_{82} disminuye desde 90° hasta 60° , el cambio δ_y indica un valor máximo de -16 mm en el eje y y δ_x de 14 mm en x .

Existe una buena correspondencia entre el modelo teórico y el prototipo realizado para corroborarlo. Esta se acrecienta en la zona de trabajo del clasificador, desde -1500 mm en x hasta -1350 mm en x de la trayectoria del punto O . La diferencia entre la trayectoria del punto O generada por el análisis matemático en Matlab y la trayectoria del punto O obtenida por el prototipo físico tiene un error de área de 6.672 % y de 2.138 % de perímetro. Dichos porcentajes se obtienen si se compara las diferencias obtenidas con el valor del área y del perímetro de la trayectoria del punto O generado por el análisis cinemático teórico en Matlab.

Para que la diferencial total pueda representar un cambio confiable en la trayectoria del punto O , dentro de un porcentaje del 5 % de significación de ajuste, el parámetro geométrico l_5 y l_8 deben ajustarse con incrementos menores a 10 mm, mientras que β_1 , β_{81} y β_{82} con incrementos menores a 0.1° .

Conclusiones

En este trabajo se realizó el estudio detallado del posicionamiento de un mecanismo de rastrillo desarenador para conocer el ajuste de sus eslabones de calibración, y de esta manera, facilitar los futuros procedimientos de manipulación para mantener el eslabón rastrillo en el intervalo de posicionamiento deseado. Las trayectorias de un punto cualquiera del eslabón de salida del mecanismo del rastrillo, se encontraron a través de MATLAB descomponiendo el mecanismo en tres ciclos cinemáticos constituyentes. A partir de estos se pueden obtener las coordenadas generalizadas de salida de los eslabones del mecanismo, en función de una coordenada de entrada, φ_{21} o φ_{22} . Así mismo se puede obtener la magnitud de los parámetros geométricos del mismo, tomando en cuenta los distintos ajustes que se pueden hacer sobre las longitudes y ángulos ajustables.

El análisis de sensibilidad de mecanismos planos articulados es un estudio que provee información acerca de la influencia que tienen los parámetros geométricos del mecanismo sobre el posicionamiento de sus eslabones y sobre las trayectorias de algún punto en particular de estos. En particular, el análisis de sensibilidad del cambio de la trayectoria de un punto ante los ajustes de los parámetros geométricos calibrables de los mecanismos planos articulados, se puede realizar mediante el estudio de la diferencial total de la trayectoria de dicho punto, comparando las curvas diferenciales causadas por variaciones en los diferentes parámetros geométricos.

A partir del análisis realizado se observó que, de los cinco parámetros geométricos calibrables propios de este mecanismo, el parámetro geométrico β_{81} tiene una influencia gruesa en el cambio de la trayectoria del punto O , respecto a la trayectoria nominal, mayor a 20 mm. Por otro lado, los parámetros geométricos l_5 , β_1 y β_{82} tienen una influencia media en el cambio de la trayectoria del punto O respecto a la trayectoria nominal que se encuentra en un intervalo de 5 a 20 mm. Por último, el parámetro geométrico l_8 tiene una influencia fina menor que 5 mm sobre el cambio de la trayectoria del punto O respecto a la trayectoria nominal.

Anexo A

Manual de usuario del programa de calibración

A continuación se describirá el correcto uso e instalación del software desarrollado para calibrar el mecanismo rastrillo desarenador.

Requerimientos del sistema para instalar la app en MATLAB

Los requerimientos de la máquina para instalar el programa son los siguientes:

- Tener instalado el programa MATLAB versión 2021b o mayor.
- Contar con una licencia activa de MATLAB.
- Contar con el paquete de instalación del programa.

Instalación en el IDE de MATLAB

Primero se tiene que descomprimir el archivo de instalación [38]. Una vez descomprimido, se debe de abrir dando click izquierdo sobre el archivo llamado: *Calibra_rastrillo_desarenador* como se muestra en la Figura 1.

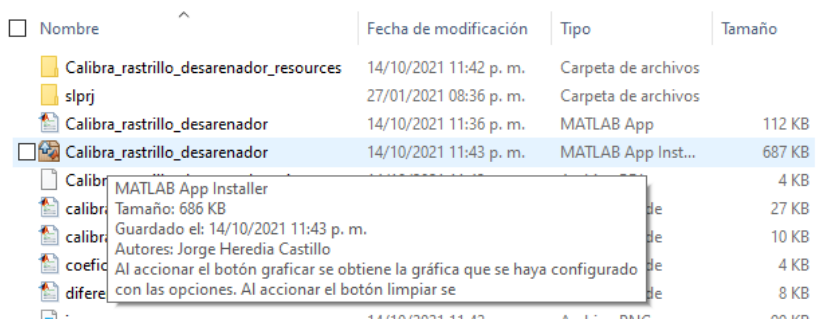


Figura 1: Primeros pasos para la instalación del programa para calibrar el rastrillo.

Una vez abierto el archivo se instalará automáticamente en el programa MATLAB. Se debe verificar que se haya instalado correctamente. Para ello, abra el programa MATLAB. Una vez abierto MATLAB, el programa se debe de encontrar en la pestaña de apps, en la opción de apps, como se muestra en la Figura 2

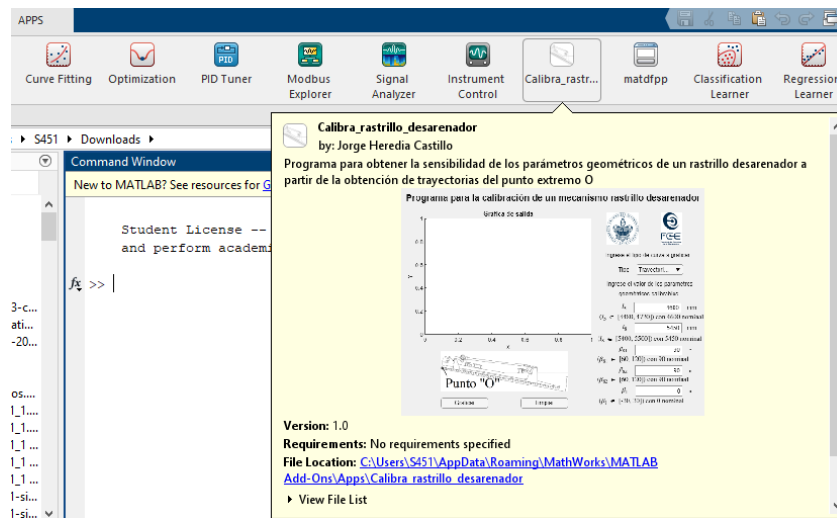


Figura 2: Ubicación del programa para calibrar el rastrillo en el software MATLAB.

Requerimientos del sistema para instalar la app en Computadora con Windows 10

Los requerimientos de la máquina para instalar el programa son los siguientes:

- Tener el ejecutable de instalación.
- Tener Windows 10.

Instalación en Microsoft Windows 10

Si es que no se cuenta con el programa de MATLAB, es posible instalar la aplicación desarrollada en esta tesis con el ejecutable de instalación del programa en una computadora. Para ello, se describirá a continuación los pasos para llevarlo a cabo.

Primeramente, se deberá obtener el ejecutable del instalador de la aplicación [39]. Este se puede ver en la Figura 3.

| Nombre | Fecha de modificación | Tipo | Tamaño |
|--------------------|------------------------|------------|----------|
| MyAppInstaller_web | 15/06/2022 11:11 a. m. | Aplicación | 3,187 KB |

Fecha de creación: 15/06/2022 11:11 a. m.
Tamaño: 3.11 MB

Figura 3: Instalador para PC de la aplicación desarrollada

Se le deben de dar permisos de administrador y después de ello desplegará un cuadro de diálogo como se muestra en la Figura 4

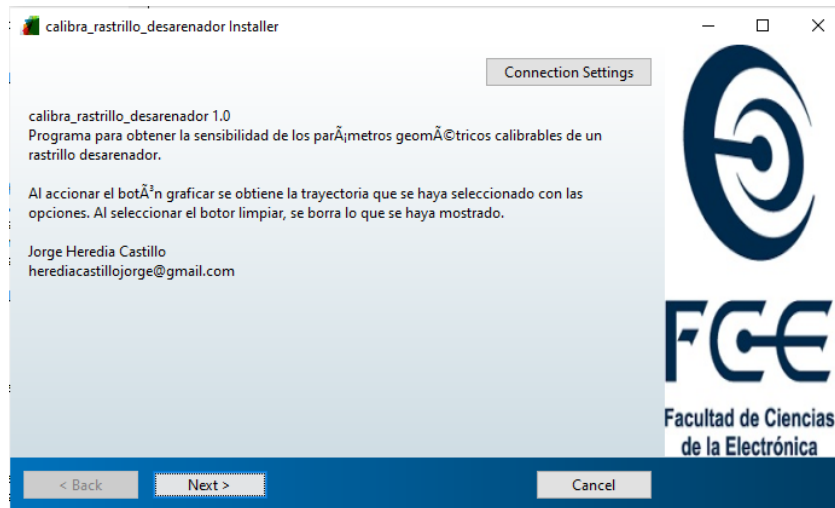


Figura 4: Ventana emergente de programación que presenta el programa que se desea instalar.

Se debe de dar click en el botón siguiente y aparecerá una ventana donde se seleccionará la ubicación donde quedará guardado el programa. Esta ventana se muestra en la Figura 5. Una vez seleccionada la ubicación, se debe seleccionar el cuadro con la opción de crear un atajo al escritorio para que genere un icono al finalizar la instalación. Una vez hecho esto, se recomienda seleccionar el botón siguiente.

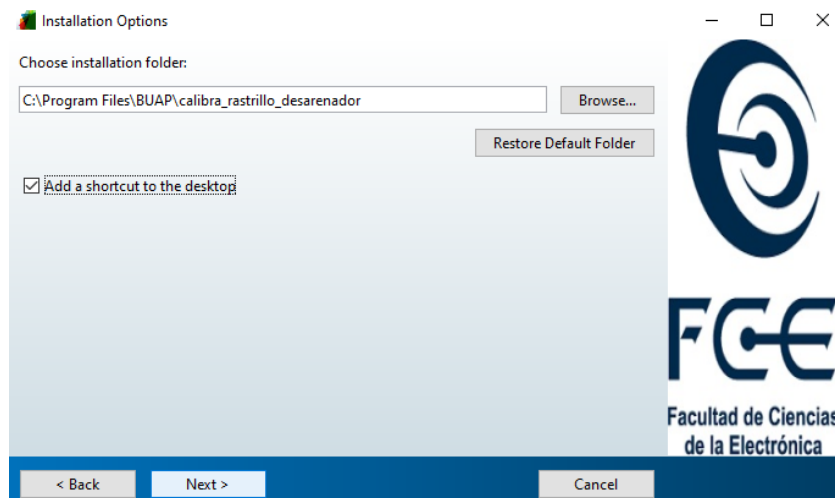


Figura 5: Ventana emergente en el proceso de instalación que indica la ubicación de instalación donde se guardará la aplicación.

En la siguiente ventana el asistente pedirá que exista MATLAB como se indica en la Figura 6. Se recomienda dar click en siguiente.

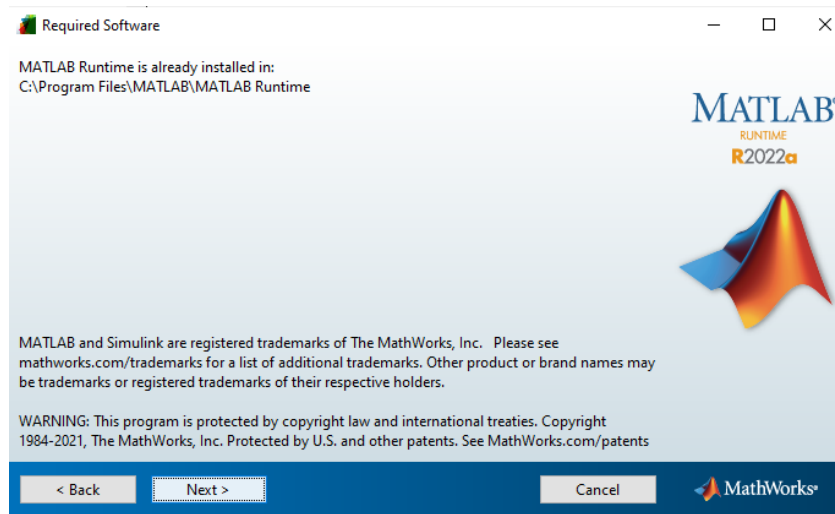


Figura 6: Ventana del asistente de instalación que solicita instalar MATLAB.

Se mostrará una ventana de confirmación como se ve en la Figura 7.

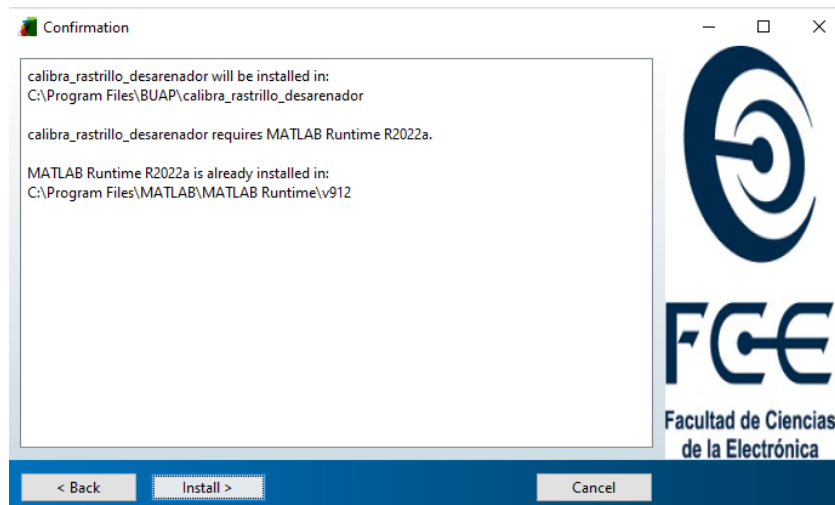


Figura 7: Ventana de confirmación en el proceso de instalar la aplicación.

Al dar en el botón siguiente, se desplegará una ventana de instalación como se muestra en la Figura 8.

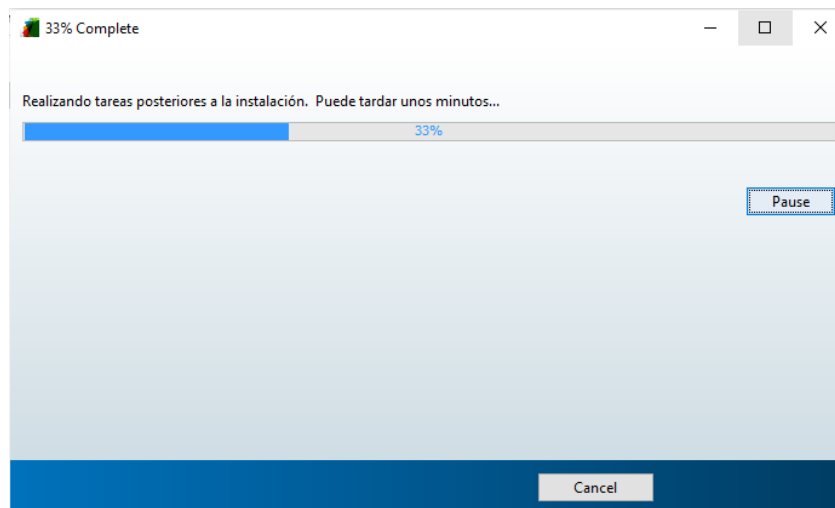


Figura 8: Ventana en donde se muestra el proceso de instalación de la aplicación desarrollada.

Al finalizar, se mostrará que ya ha terminado como se muestra en la Figura 9.

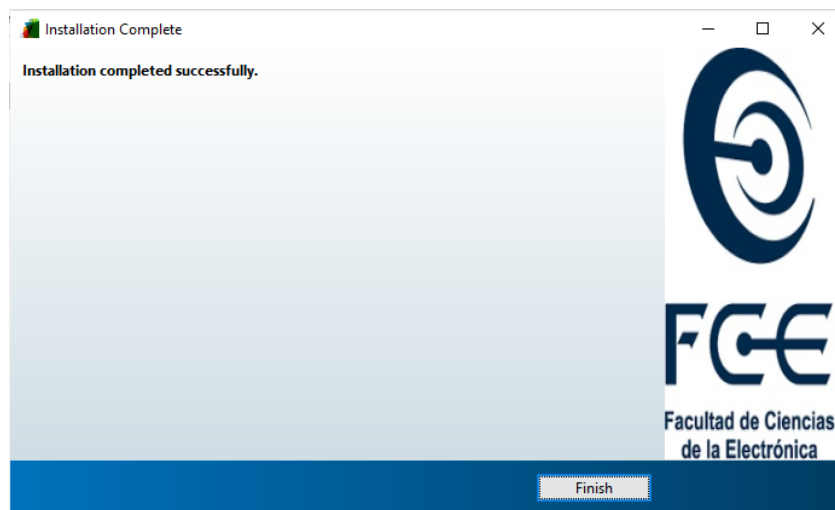


Figura 9: Ventana de programación que muestra que el proceso de instalación ha sido concluido satisfactoriamente.

Funcionalidades del programa

Abra el app desarrollado para calibrar dando click izquierdo sobre el icono, como se observa en la Figura 2.

En la figura se puede observar la consola inicial al abrir el app. En ella se mostrará las opciones de: Graficar, limpiar y agregar valores de los parámetros geométricos calibrables, así como, seleccionar el tipo de gráfica que se quiere visualizar.

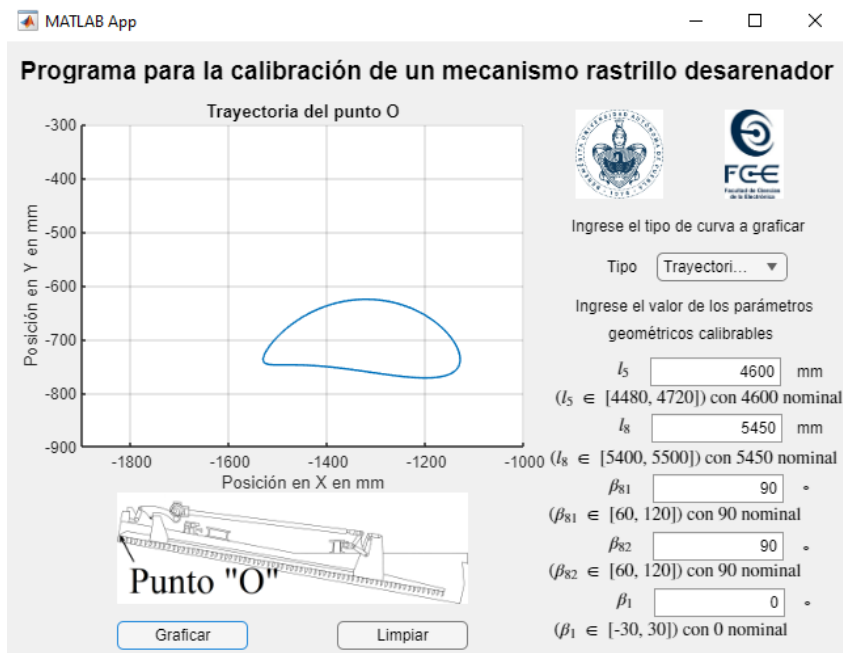


Figura 10: Interfaz inicial de la app para calibrar el rastrillo desarenador.

Seleccione la curva que desea visualizar, por ejemplo: Trayectoria del punto O. Luego, agregue los valores de los parámetros ajustables que tiene en mente analizar y una vez que haya hecho eso, oprima el botón graficar. En la gráfica se mostrará la imagen solicitada al programa.

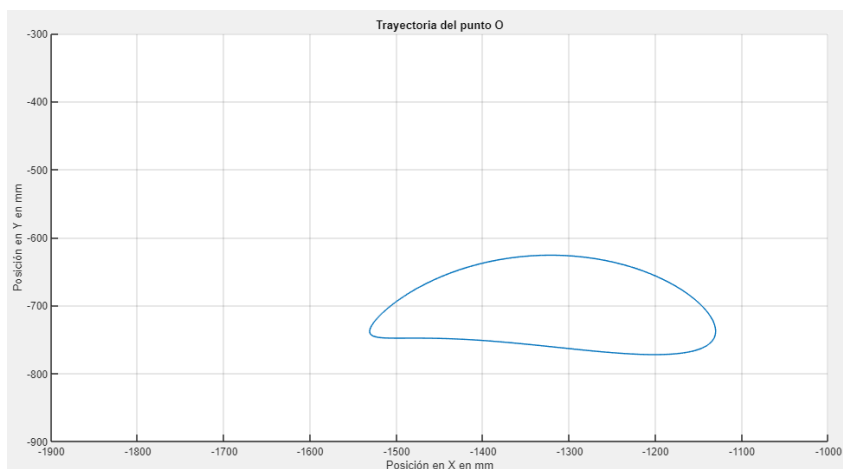


Figura 11: Salida del programa a la solicitud de trayectoria del punto O con los valores nominales de los parámetros geométricos calibrables.

Por default, los valores de los parámetros geométricos calibrables son sus valores nominales. Sólo es posible modificar dichos valores en su intervalo real de variación. El intervalo está

indicado debajo de la casilla de ingreso de dato.

Es posible detallar dentro de la curva graficada. Esto se logra con la opción propias de zoom de las gráficas de MATLAB. Estas opciones se pueden visualizar en la Figura 12 .

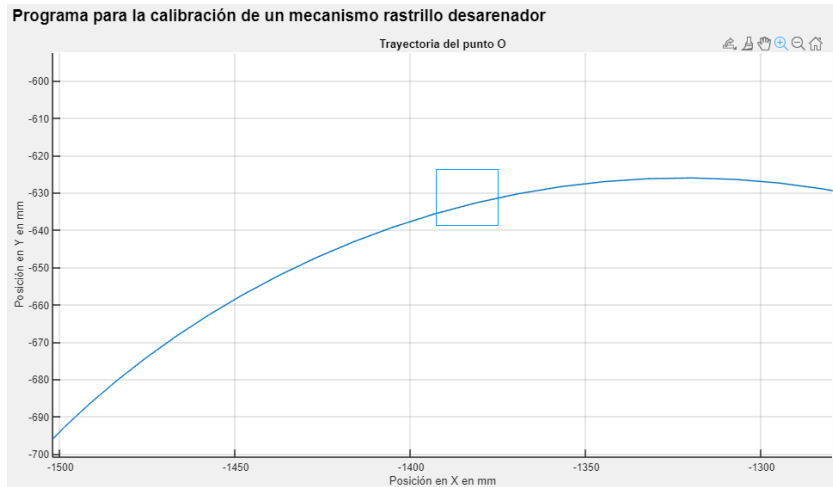


Figura 12: Detalle de la gráfica de la figura con la opción acercar propia de MATLAB.

Es posible desplazarse dentro de la gráfica con la opción pan propia de MATLAB, como se observa en la Figura 13 .

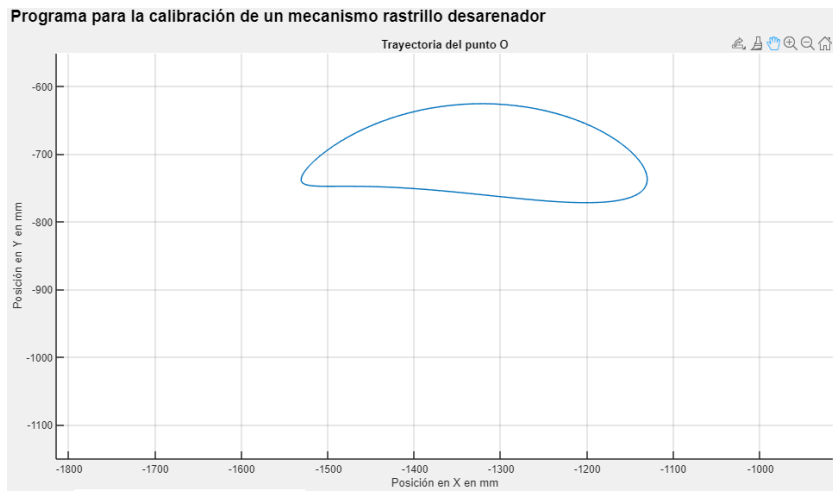


Figura 13: Gráfica desplazada con la opción propia de MATLAB.

Cuando se haya terminado, es posible guardar la gráfica mediante el botón guardar propio de MATLAB. El ícono de guardar se visualiza en la Figura 14.

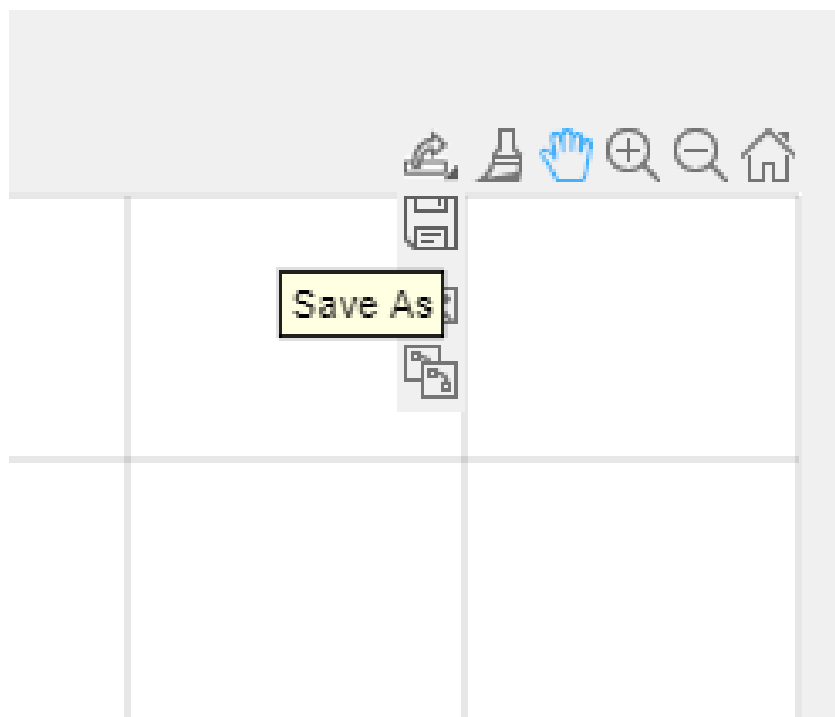


Figura 14: Icono que permite guardar la imagen de la curva.

Por último, el botón limpiar permite borrar la curva previamente solicitada.

Anexo B

Descripción del código del programa

Se presenta a continuación, en la Figura 15 un pseudocódigo del programa principal para obtener las gráficas de trayectoria del mecanismo rastrillo clasificador.

Dentro del código, existen funciones que se generaron para realizar las tareas que se mandan a hacer, por ejemplo graficar o limpiar la pantalla. Por tal motivo, se presentan en las Figuras 16 y 17 el diagrama de flujo de su código. Cuando se aprieta el botón graficar se desarrolla el programa cuyo diagrama de flujo se indica en la Figura 16. Por otro lado, cuando se aprieta el botón limpiar se ejecuta el programa cuyo diagrama de flujo se muestra en la Figura 17.

La función de apoyo para obtener las trayectorias de un punto, *rastrillo.m*, se muestra toda ella pues es una pieza clave en el funcionamiento del programa. La función *rastrillo.m* se programo en lenguaje propio de MATLAB.

La función de apoyo para obtener las curvas de los diferenciales totales de la trayectoria del punto O. *diferencial.m*. De la misma forma que para la función *rastrillo.m*, la función *diferencial.m* también se desarrollo en lenguaje propio de MATLAB y se detalla al final de este mismo apartado.

En cuanto a las funciones para ingresar los valores de los parámetros geométricos al ejecutarse se guardan en una variable temporal que se usa en toda la aplicación.

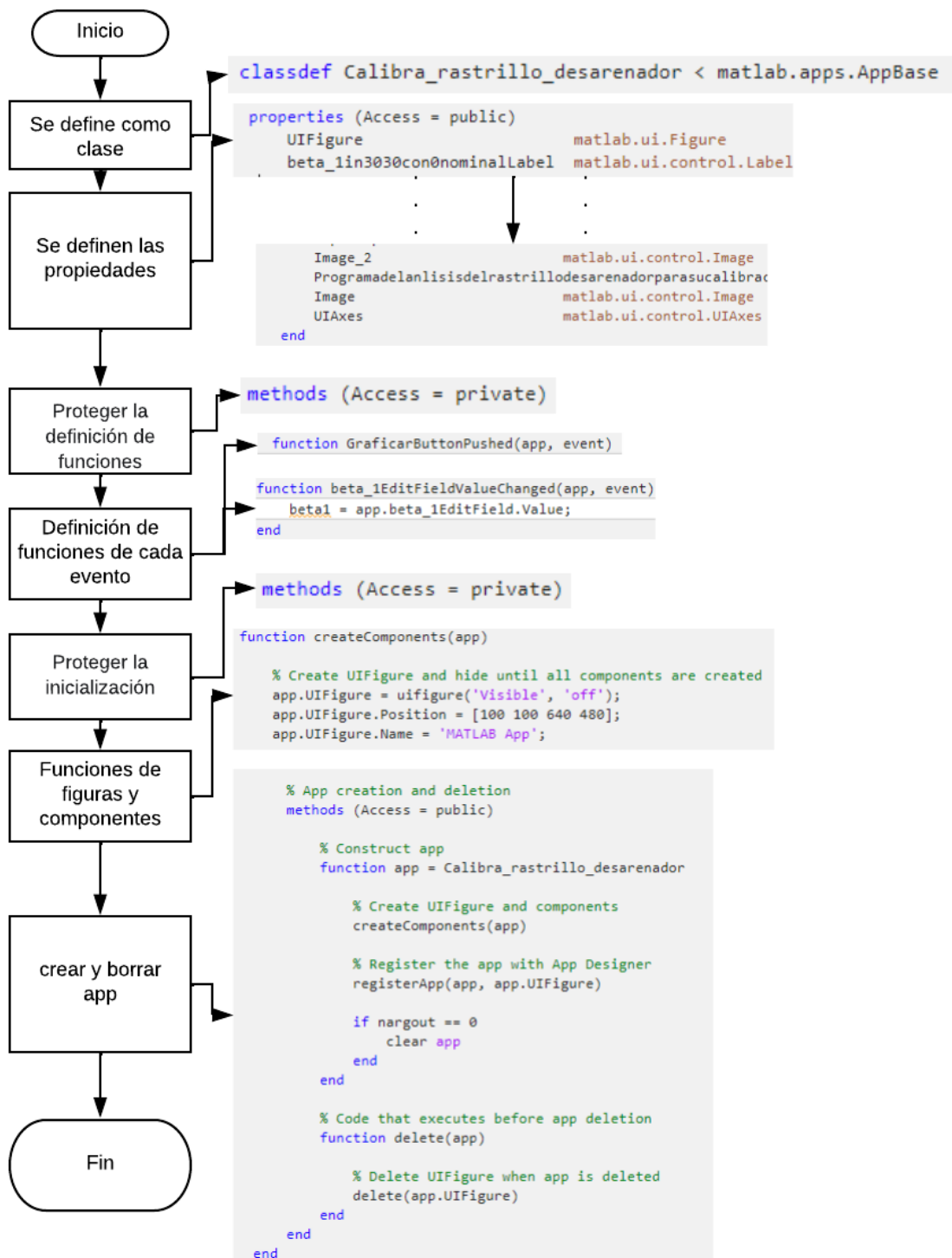


Figura 15: Pseudocódigo de la aplicación desarrollada para la calibración del mecanismo rastrillo clasificador.

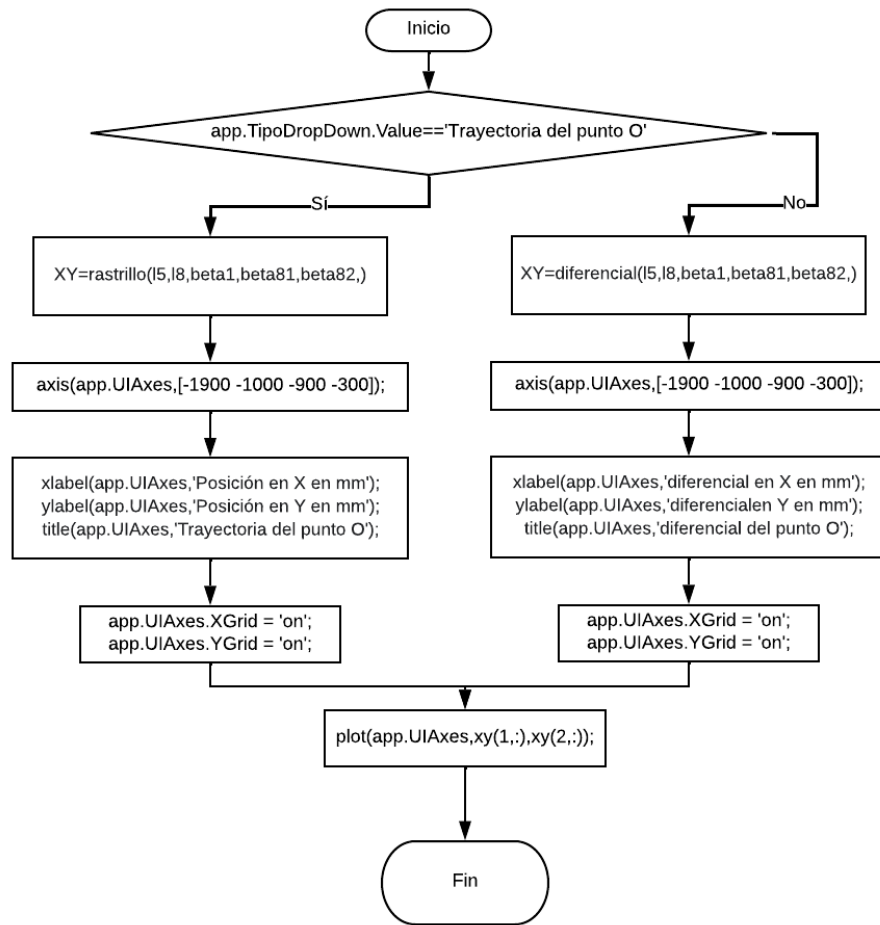


Figura 16: Función declarada en la aplicación que se ejecuta al accionar el botón graficar.

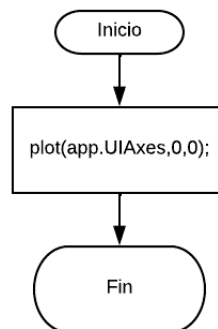


Figura 17: Diagrama de flujo que se ejecuta cuando se ejecuta el botón limpiar.

```

1 function xy=rastrillo (15 , beta1 , l8 , beta81 , beta82)
2 a3=4300;%mm
3 b3=-890;%mm
4 l1 =182.5;%mm
5 %beta1=0*(pi/180);%de -30 a 30
6 %l5=4600;%mm de 4480 a 4720 mm
7 l61 =397;%mm
8 l21 =31;%mm
9 l4 =300;%mm
10 l31 =910;%mm
11 l32 =332;%mm
12 l81 =120;%mm
13 l82 =700;%mm
14 beta2=90*(pi/180);%
15 beta3=25*(pi/180);%
16 beta6=90*(pi/180);%
17 %l8=5450;%mm de 5400 a 5500
18 l83 =1050;%mm
19 l84 =185;%mm
20 l85 =740;%mm
21 %beta81=90*(pi/180);%de 60 a 120
22 %beta82=90*(pi/180);%de 60 a 120
23 l7 =400;%mm
24 l62 =397;%mm
25 l22 =191;%mm
26 a2=-910;%mm
27 b2=-240;%mm
28 a3p=5210;%mm
29 b3p=-650;%mm
30 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
31 %//////////ENTRADA//////////
32 inicial=0;
33 final=2*pi;
34 h=(2*pi)/100;%100 valores
35 phi21=inicial:h:final; %phi21 variar de 0 a 2pi
36 %//////////
37 %-----PHI61-----
38 a1=a3+(l1*cos(beta1));
39 b1=b3+(l1*sin(beta1));
40 k1=a1/l21;
41 k2=a1/l61;
42 k3=((a1^2)+(b1^2)+(l21^2)+(l61^2)-(l5^2))/(2*l21*l61);
43 k4=b1/l21;
44 k5=b1/l61;

```

```

45 ka=k3-k1-(k2*cos(phi21))-(k5*sin(phi21))+cos(phi21);
46 kb=(2*k4)-(2*sin(phi21));
47 kc=k3+k1-(k2*cos(phi21))-(k5*sin(phi21))-cos(phi21);
48 phi61=2*atan((( -kb)-sqrt((kb.^2)-4*ka.*kc))./(2.*ka));
49 %-----
50 %-----PHI5-----
51 %k6=a1/l21;
52 %k7=a1/l5;
53 %k8=((a1^2)+(b1^2)+(l21^2)+(l5^2)-(l61^2))/(2*l21*l5);
54 %k9=b1/l21;
55 %k10=b1/l5;
56 %kd=k8+k6-(k7*cos(phi21))-(k10*sin(phi21))-cos(phi21);
57 %ke=-(2*k9)+(2*sin(phi21));
58 %kf=k8-k6-(k7*cos(phi21))-(k10*sin(phi21))+cos(phi21);
59 %phi5=((2*atan((( -ke)+sqrt((ke.^2)-(4*kd.*kf)))./(2.*kd))))+(2*pi);
60
61 %-----PHI4---PHI31-----
62
63 phi22=phi21-beta2;
64 k11=a2/l22;
65 k12=a2/l4;
66 k13=((a2^2)+(b2^2)+(l22^2)+(l4^2)-(l31^2))/(2*l22*l4);
67 k14=b2/l22;
68 k15=b2/l4;
69 k16=a2/l22;
70 k17=a2/l31;
71 k18=((a2^2)+(b2^2)+(l22^2)+(l31^2)-(l4^2))/(2*l22*l31);
72 k19=b2/l22;
73 k20=b2/l31;
74 kg=k13-k11-(k12*cos(phi22))-(k15*sin(phi22))+cos(phi22);
75 kh=(2*k14)-(2*sin(phi22));
76 ki=k13+k11-(k12*cos(phi22))-(k15*sin(phi22))-cos(phi22);
77 kj=k18+k16-(k17*cos(phi22))-(k20*sin(phi22))-cos(phi22);
78 kn=-(2*k19)+(2*sin(phi22));
79 kq=k18-k16-(k17*cos(phi22))-(k20*sin(phi22))+cos(phi22);
80 phi4=(2*atan((( -kh)+sqrt((kh.^2)-(4*kg.*ki)))./(2.*kg)));
81 phi31=((2*atan((( -kn)-sqrt((kn.^2)-(4*kj.*kq)))./(2.*kj))));%ojo
82 %-----
83 %-----PHI8-----
84
85 phi32=(phi31+(pi-beta3));
86 phi62=(phi61+(2*pi-beta6));
87 k21=l4*cos(phi4)+l32*cos(phi32)-l62*cos(phi62)-l1*cos(beta1)-a3p;
88 k22=l4*sin(phi4)+l32*sin(phi32)-l62*sin(phi62)-l1*sin(beta1)-b3p;
89 k23=l82-l83-l81*cos(beta81)+l84*cos(beta82);

```

```

90 k24=l8+l81*sin(beta81)-l84*sin(beta82);
91 k25=2*((k21*k23)+(k22*k24));
92 k26=2*((k21*k24)-(k22*k23));
93 k27=((k21.^2)+(k22.^2)+(k23.^2)+(k24.^2)-(17^2));
94
95 kw=k27-k26;
96 kx=2*k25;
97 kz=k26+k27;
98
99 phi8=((2*atan((-kx)+(sqrt((kx.^2)-(4*kw.*kz))))./(2.*kw)))+(2*pi);
100
101 %-----
102 %-----PHI7-----
103 %constante1=(-k24.^2+k23.^2+k22.^2+k21.^2+17^2)-2*17*k23.*sin(phi8)
      -2*k21*17-2*k23.*k22+2*k23.*k21.*sin(phi8);
104 %constante2=2*(2*17*k23.*cos(phi8)-2*17*k22);
105 %constante3=(-k24.^2+k23.^2+k22.^2+k21.^2+17^2)+2*17*k23.*sin(phi8)
      +2*k21*17+2*k23.*k21.*sin(phi8)+2*k23.*k22;
106 %      phi7=2*atan((-constante2-sqrt(constante2.^2-4*constante3.*
      constante1))./(2*constante3));
107 %-----GRAFICA-O-----
108
109 phi81=phi8+((pi/2)-beta81);
110 phi82=phi8-(pi/2);
111 loai=l22*cos(phi22)+l31*cos(phi31)+l32*cos(phi32)+l81*cos(phi81)+l82
      *cos(phi82)+l85*cos(phi8-pi);
112 loaj=l22*sin(phi22)+l31*sin(phi31)+l32*sin(phi32)+l81*sin(phi81)+l82
      *sin(phi82)+l85*sin(phi8-pi);
113 xy=[loai;loaj];
114 end

```

Programa desarrollado para la función de apoyo donde se genera las trayectorias del punto O en función de los parámetros geométricos calibrables ingresados.

```

1      function dxy=diferencial(l5,beta1,l8,beta81,beta82)
2      a3=4300;%mm
3      b3=-890;%mm
4      l1=182.5;%mm
5      %beta1=0*(pi/180);%de -30 a 30
6      %l5=4600;%mm de 4480 a 4720 mm
7      l61=397;%mm
8      l21=31;%mm
9      l4=300;%mm
10     l31=910;%mm
11     l32=332;%mm
12     l81=120;%mm

```

```

13      182=700;%mm
14      beta2=90*(pi/180);%
15      beta3=25*(pi/180);%
16      beta6=90*(pi/180);%
17      %l8=5450;%mm de 5400 a 5500
18      183=1050;%mm
19      184=185;%mm
20      185=740;%mm
21      %beta81=90*(pi/180);%de 60 a 120
22      %beta82=90*(pi/180);%de 60 a 120
23      17=400;%mm
24      162=397;%mm
25      122=191;%mm
26      a2=-910;%mm
27      b2=-240;%mm
28      a3p=5210;%mm
29      b3p=-650;%mm
30      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
31      %//////////ENTRADA//////////
32      inicial=0;
33      final=2*pi;
34      h=(2*pi)/100;%100 valores
35      phi21=inicial:h:final; %phi21 variar de 0 a 2pi
36      [n,m]=size(phi21);
37      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
38      %-----PHI61-----
39      a1=a3+(11*cos(beta1));
40      b1=b3+(11*sin(beta1));
41      k1=a1/121;
42      k2=a1/161;
43      k3=((a1^2)+(b1^2)+(121^2)+(161^2)-(15^2))/(2*121*161);
44      k4=b1/121;
45      k5=b1/161;
46      ka=k3-k1-(k2*cos(phi21))-(k5*sin(phi21))+cos(phi21);
47      kb=(2*k4)-(2*sin(phi21));
48      kc=k3+k1-(k2*cos(phi21))-(k5*sin(phi21))-cos(phi21);
49      phi61=2*atan((( -kb)-sqrt((kb.^2)-4*ka.*kc))./(2.*ka));
50      %-----
51      %-----PHI5-----
52      k6=a1/121;
53      k7=a1/15;
54      k8=((a1^2)+(b1^2)+(121^2)+(15^2)-(161^2))/(2*121*15);
55      k9=b1/121;
56      k10=b1/15;
57      kd=k8+k6-(k7*cos(phi21))-(k10*sin(phi21))-cos(phi21);

```

```

58     ke=-(2*k9)+(2*sin(phi21));
59     kf=k8-k6-(k7*cos(phi21)-(k10*sin(phi21))+cos(phi21));
60     phi5=((2*atan((-ke)+sqrt((ke.^2)-(4*kd.*kf)))/(2.*kd)))+
        +(2*pi);
61
62
63     %-----PHI4---PHI31-----
64
65     phi22=phi21-beta2;
66     k11=a2/l22;
67     k12=a2/l4;
68     k13=((a2^2)+(b2^2)+(l22^2)+(l4^2)-(l31^2))/(2*l22*l4);
69     k14=b2/l22;
70     k15=b2/l4;
71     k16=a2/l22;
72     k17=a2/l31;
73     k18=((a2^2)+(b2^2)+(l22^2)+(l31^2)-(l4^2))/(2*l22*l31);
74     k19=b2/l22;
75     k20=b2/l31;
76     kg=k13-k11-(k12*cos(phi22)-(k15*sin(phi22))+cos(phi22));
77     kh=(2*k14)-(2*sin(phi22));
78     ki=k13+k11-(k12*cos(phi22)-(k15*sin(phi22))-cos(phi22));
79     kj=k18+k16-(k17*cos(phi22)-(k20*sin(phi22))-cos(phi22));
80     kn=-(2*k19)+(2*sin(phi22));
81     kq=k18-k16-(k17*cos(phi22)-(k20*sin(phi22))+cos(phi22));
82     phi4=(2*atan((-kh)+sqrt((kh.^2)-(4*kg.*ki)))/(2.*kg));
83     phi31=((2*atan((-kn)-sqrt((kn.^2)-(4*kj.*kq)))/(2.*kj)));
84     %ojo
85     %-----PHI8-----
86
87     phi32=(phi31+(pi-beta3));
88     phi62=(phi61+(2*pi-beta6));
89     k21=l4*cos(phi4)+l32*cos(phi32)-l62*cos(phi62)-l1*cos(beta1)
        -a3p;
90     k22=l4*sin(phi4)+l32*sin(phi32)-l62*sin(phi62)-l1*sin(beta1)
        -b3p;
91     k23=l82-l83-l81*cos(beta81)+l84*cos(beta82);
92     k24=l8+l81*sin(beta81)-l84*sin(beta82);
93     k25=2*((k21*k23)+(k22*k24));
94     k26=2*((k21*k24)-(k22*k23));
95     k27=((k21.^2)+(k22.^2)+(k23.^2)+(k24.^2)-(l7^2));
96
97     kw=k27-k26;
98     kx=2*k25;
99     kz=k26+k27;

```

```

99
100     phi8=((2*atan((( -kx)+(sqrt((kx.^2)-(4*kw.*kz)))))/(2.*kw))))
        +(2*pi);
101
102     %------
103
104     phi81=phi8+((pi/2)-beta81);
105     phi82=phi8-(pi/2);
106     %phi83=phi82;
107     %phi84=phi8+((pi/2)-beta82);
108     %------ PHI7 -----
109     constante1=-k24.^2+k23.^2+k22.^2+k21.^2+l7^2-(2*l7*k23.*sin(
        phi8))-(2*k21*l7)-(2*k23.*k22)+(2*k23.*k21.*sin(phi8));
110     constante2=2*((2*l7*k23.*cos(phi8))-2*l7*k22);
111     constante3=-k24.^2+k23.^2+k22.^2+k21.^2+l7^2+(2*l7*k23.*sin(
        phi8))+(2*k21*l7)+(2*k23.*k21.*sin(phi8))+2*k23.*k22;
112     phi7=2*atan((-constante2-sqrt(constante2.^2-4*constante3.*
        constante1))/(2*constante3));
113     %-----Diferenciales totales
114     u=ones(n,m);%vectores unitarios
115     vu=ones(n,m);
116     %%%%%%%%%%Entradas nominales%%%%%%%%%
117     beta1_0=0*(pi/180);%de -30 a 30
118     l5_0=4600;%mm de 4480 a 4720 mm
119     l8_0=5450;%mm de 5400 a 5500
120     beta81_0=90*(pi/180);%de 60 a 120
121     beta82_0=90*(pi/180);%de 60 a 120
122     %%%%%%%%%%Entradas
123     %%%%%%%%%%Entradas
124     deltabeta1=(beta1-beta1_0)*u;
125     delta15=(l5-l5_0)*u;
126     delta18=(l8-l8_0)*u;
127     deltabeta81=(beta81-beta81_0)*u;
128     deltabeta82=(beta82-beta82_0)*u;
129     %constantes
130     delta121=0*u;% tolerancia dimensional
131     delta122=0*u;
132     delta132=0*u;
133     delta131=0*u;
134     delta181=0*u;
135     delta182=0*u;
136     delta183=0*u;
137     delta184=0*u;
138     delta17=0*u;
139     delta162=0*u;

```

```

140     delta11=0*u;
141     deltaa3p=0*u;
142     deltab3p=0*u;
143     delta14=0*u;
144     delta161=0*u;
145     deltaa1=0*u;
146     deltab1=0*u;
147     deltaphi21=0*u;%suponemos que no hay error en la entrada
148     deltaphi22=deltaphi21;
149     delta185=0*u;
150     %inicializa variables
151     dc1=zeros(2,m);
152     dc2=zeros(2,m);
153     dc3=zeros(2,m);
154     dxy=zeros(2,m);
155     %deltaphi81=zeros(1,m);
156     %deltaphi82=zeros(1,m);
157     %ciclo diferencial
158     for k=1:m
159         %——Diferencial del primer circuito cinematico
160         dc1(:,k)=-([-15*sin(phi5(k)),l61*sin(phi61(k));
161         15*cos(phi5(k)),-l61*cos(phi61(k))]^( -1)) * [cos(phi21(k)),cos
            (phi5(k)),-cos(phi61(k)),-1*vu(k),0*vu(k),-l21*sin(phi21(
            k))];
162         sin(phi21(k)),sin(phi5(k)),-sin(phi61(k)),0*vu(k),-1*vu(k),
            l21*cos(phi21(k))] * [delta121(k);delta15(k);delta161(k);
            deltaa1(k);deltab1(k);deltaphi21(k)];
163         %deltaphi5=dc1(1,k);
164         %deltaphi61=dc1(2,k);
165     end
166
167     for k=1:m
168         %——Diferencial del segundo circuito cinematico
169         dc2(:,k)=-([-131*sin(phi31(k)),l4*sin(phi4(k));
170         131*cos(phi31(k)),-l4*cos(phi4(k))]^( -1)) * [cos(phi22(k)),cos
            (phi31(k)),-cos(phi4(k)),-1*vu(k),0*vu(k),-l22*sin(phi22(
            k))];
171         sin(phi22(k)),sin(phi31(k)),-sin(phi4(k)),0*vu(k),-1*vu(k),
            l22*cos(phi22(k))] * [delta122(k);delta131(k);delta14(k);
            deltaa1(k);deltab1(k);deltaphi22(k)];
172         %deltaphi31=dc2(1,k);
173         %deltaphi4=dc2(2,k);
174         %deltaphi32=deltaphi31;
175         %deltaphi62=deltaphi61;
176     end

```

```

177
178   for k=1:m
179   %——Diferencial del tercer circuito cinematico
180   dc3(:,k)=-([-181*sin(phi8(k))*sin(beta81)-181*cos(phi8(k))*
               cos(beta81)+182*cos(phi8(k))-18*sin(phi8(k))-183*cos(phi8
               (k))+184*sin(phi8(k))*sin(beta82)+184*cos(phi8(k))*cos(
               beta82),17*sin(phi7(k));
181   181*cos(phi8(k))*sin(beta81)-181*sin(phi8(k))*cos(beta81)+
               182*sin(phi8(k))+18*cos(phi8(k))-183*sin(phi8(k))+184*sin
               (phi8(k))*cos(beta82)-184*cos(phi8(k))*sin(beta82),-17*
               cos(phi7(k))]^(-1))*[cos(phi4(k)),cos(phi32(k)),(cos(phi8
               (k))*sin(beta81)-sin(phi8(k))*cos(beta81)),sin(phi8(k)),
               cos(phi8(k)),-sin(phi8(k)),(-cos(phi8(k))*sin(beta82)+sin
               (phi8(k))*cos(beta82)),-cos(phi7(k)),-cos(phi62(k)),-cos(
               beta1)*vu(k),-1*vu(k),0*vu(k),-14*sin(phi4(k)),-132*sin(
               phi32(k)),(181*cos(phi8(k))*cos(beta81)+181*sin(phi8(k))*
               sin(beta81)),(-184*cos(phi8(k))*cos(beta82)-184*sin(phi8(
               k))*sin(beta82)),162*sin(phi62(k)),11*sin(beta1)*vu(k);
182   sin(phi4(k)),sin(phi32(k)),cos(phi8(k)-beta81),-cos(phi8(k))
               ,sin(phi8(k)),cos(phi8(k)),(-sin(phi8(k))*sin(beta82)-cos
               (phi8(k))*cos(beta82)),-sin(phi7(k)),-sin(phi62(k)),-sin(
               beta1)*vu(k),0*vu(k),-vu(k),14*cos(phi4(k)),132*cos(phi32
               (k)),(181*sin(phi8(k))*cos(beta81)-181*cos(phi8(k))*sin(
               beta81)),(-184*sin(phi8(k))*cos(beta82)+184*cos(phi8(k))*
               sin(beta82)),-162*cos(phi62(k)),-11*cos(beta1)*vu(k)]*[
               delta14(k);
183   delta132(k);
184   delta181(k);
185   delta182(k);
186   delta18(k);
187   delta183(k);
188   delta184(k);
189   delta17(k);
190   delta162(k);
191   delta11(k);
192   deltaa3p(k);
193   deltab3p(k);
194   dc2(2,k);%deltaphi4
195   dc2(1,k);%deltaphi32(k);
196   deltabeta81(k);
197   deltabeta82(k);
198   dc1(2,k);%deltaphi62(k);
199   deltabeta1(k)];
200   %deltaphi8=dc3(1,k);
201   %——Diferencial de la trayectoria

```

```

202     %deltaphi81(k)=dc3(1,k)-deltabeta81(k);
203     %deltaphi82(k)=dc3(1,k);
204     end
205
206     for k=1:m
207         dxy(:,k)=[cos(phi22(k)),cos(phi31(k)),cos(phi32(k)),cos(
                phi81(k)),cos(phi82(k)),cos((phi8(k))-pi),-122*sin(phi22(
                k)),-131*sin(phi31(k))-132*sin(phi32(k)),-181*sin(phi81(k)
                ),-182*sin(phi82(k))-185*sin((phi8(k))-pi);
208         sin(phi22(k)),sin(phi31(k)),sin(phi32(k)),sin(phi81(k)),sin(
                phi82(k)),sin((phi8(k))-pi),122*cos(phi22(k)),131*cos(
                phi31(k))+132*cos(phi32(k)),181*cos(phi81(k)),182*cos(
                phi82(k))+185*cos((phi8(k))-pi)]*[deltal22(k);
209         delta131(k);
210         delta132(k);
211         delta181(k);
212         delta182(k);
213         delta185(k);
214         deltaphi22(k);
215         dc2(1,k);%deltaphi32(k);
216         dc3(1,k)-deltabeta81(k);%deltaphi81(k);
217         dc3(1,k)];%deltaphi8(k)];
218     end
219     end

```

Programa desarrollado para la función de apoyo donde se genera las diferenciales de las trayectorias del punto O en función de los parámetros geométricos calibrables ingresados.

Anexo C

Reconocimiento de publicación de resultados

En este apéndice se encuentra el reconocimientos obtenidos en el XXVII congreso internacional anual de la SOMIM (Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica) llevado a cabo la semana del 22 al 24 de septiembre del 2021 en la ciudad de Pachuca en el estado de Hidalgo en México. El congreso se celebró en modalidad de ponencia. Dicho congreso se establecio en modalidad virtual.

LA SOCIEDAD MEXICANA DE INGENIERÍA MECÁNICA, A.C.

OTORGA EL PRESENTE RECONOCIMIENTO


Por su valiosa participación como **PONENTE** a:

Jorge Heredia Castillo

Al presentar el artículo

A3_84 "Influencia de la calibración de los cinco parámetros geométricos ajustables de un rastrillo clasificador en sus trayectorias de barrido"

durante el XXVII Congreso Internacional Anual de la SOMIM celebrado del 22 al 24 de septiembre de 2021 en el Instituto Tecnológico de Pachuca.



Dr. Simón Martínez Martínez

Presidente de la SOMIM

Anexo D

Memoria del congreso XXVII congreso internacional anual de la SOMIM

En este apéndice se encuentra el artículo titulado: “Influencia de la calibración de los cinco parámetros geométricos ajustables de un rastrillo clasificador en sus trayectorias de barrido”. Dicho escrito se encuentra publicado en la memoria del XXVII congreso internacional anual de la SOMIM (Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica).

Tema A3b. Mecanismos y Robótica: (Análisis y síntesis de mecanismos)

“Influencia de la calibración de los cinco parámetros geométricos ajustables de un rastrillo clasificador en sus trayectorias de barrido”

Jorge Heredia Castillo ^{a*}, Jesús Alberto Mendoza Quiñonez ^a, Olga Guadalupe Félix Beltrán ^a, Javier Flores Méndez ^a, Manuel Aparicio Razo ^a

^a Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Av. San Claudio s/n, Ciudad Universitaria, Puebla 72592, México.

*Autor de contacto: jorge.herediacastillo@viep.com.mx.

RESUMEN

El ajuste de un mecanismo de precisión permite que éste se mueva con exactitud para que sus eslabones ocupen las posiciones deseadas y sus puntos de interés describan las trayectorias de diseño. En el caso del rastrillo desarenador, estas trayectorias son importantes porque si el ajuste no es adecuado, el rastrillo podría chocar con el fondo de la cuba, o en su defecto, pasar muy alto, con lo cual el barrido sería ineficiente. Por esta razón, en este trabajo se presentan las trayectorias del punto extremo del rastrillo cuando se ajustan los cinco parámetros geométricos calibrables del mecanismo. Mediante el análisis cinemático se obtienen las ecuaciones de restricción y se consiguen las expresiones para los ángulos de los eslabones en función de la entrada y de las longitudes conocidas. Posteriormente, se determina una expresión vectorial para las trayectorias del punto extremo y se grafican las trayectorias cuando se ajustan sus cinco parámetros geométricos.

Palabras Clave: Trayectorias de un punto, Rastrillo clasificador, Calibración de mecanismos, Análisis de sensibilidad, Eslabones ajustables.

ABSTRACT

The adjustment of a precision mechanism allows it to move exactly so that its links occupy the desired positions and its points of interest describe the design trajectories. In the case of the classifier rake, these trajectories are important because if the adjustment is not adequate, the rake could collide with the bottom of the tank, or go too high, making the sweep inefficient. For this reason, in this work the trajectories of the extreme point of the rake are presented when the five calibrating geometric parameters of the mechanism are adjusted. By means of kinematic analysis, the restriction equations are obtained and the expressions for the angles of the links as a function of the input and the known lengths are obtained. Subsequently, a vectorial expression is determined for the extreme point trajectories and these are graphed when their five geometric parameters are fitted.

Keywords: Points trajectories, Rake classifier, Mechanism calibration, Sensitivity Analysis, Adjustable links.

1. Introducción

Un rastrillo desarenador, o rastrillo clasificador, es el elemento de una máquina que se encarga de separar el barro del líquido acuoso de algún proceso. Generalmente, los desarenadores tienen dientes o palas que pasan cerca del fondo de una cuba que contiene el producto a separar. En este caso en particular, el rastrillo permite separar el barro del licor rojo en una fábrica minera de obtención de bauxita para la fabricación de aluminio y sus derivados [1].

Cada mecanismo de rastrillo desarenador tiene diferentes números de elementos. Sin embargo, el rastrillo a estudiar [2] fue fabricado por la empresa francesa Dorr Oliver y consiste en siete eslabones móviles más un bastidor y veinticinco parámetros geométricos funcionales, cinco de los cuales son ajustables. El eslabón de entrada es una manivela de doble excéntrica y el elemento de salida es el rastrillo de trabajo.

Para lograr calibrar el rastrillo se tiene que tomar en cuenta que, al mover los parámetros ajustables de la máquina, cambia la separación entre el rastrillo

desarenador y la cuba donde se encuentra el producto a barrer. La tolerancia de separación está en el intervalo de 5 a 15 mm. Si la máquina tiene una separación menor a 5 mm, el rastrillo puede chocar con la cuba y la máquina puede romperse. Por el contrario, si la máquina tiene una separación mayor a 15 mm la misma no alcanza a barrer el producto eficientemente.

Existen en la literatura manuales de calibración en donde se hace un análisis de sensibilidad por el método diferencial [3]. En este caso, se presentan tablas de influencias y se proponen procedimientos para calibrar el mecanismo dependiendo de la sensibilidad de las trayectorias de barrido a la magnitud de los ajustes de los elementos calibrables.

Se recurre al análisis de sensibilidad debido a que, de los cinco elementos ajustables, existen eslabones cuya variación longitudinal o angular produce un cambio en la salida, comparativamente más pequeño, que al variar otros parámetros. A estos se les puede llamar elementos de ajuste fino. Por otro lado, a los elementos que no son de ajuste fino se les puede llamar de ajuste grueso. Por lo tanto, el responsable de calibrar la máquina debe saber hacer distinción de estos elementos, es decir, de la sensibilidad, antes de proceder al ajuste.

La sensibilidad es la ciencia que estudia cómo la incertidumbre en la salida se puede distribuir entre las entradas [4]. Esta se puede dividir en dos categorías: sensibilidad local y sensibilidad global. La sensibilidad local se refiere principalmente a las derivadas de las características de salida a los parámetros de entrada, y estudios de sensibilidad global juega un papel importante en identificar y representar incertidumbres.

El análisis de sensibilidad global se usa cuando el mecanismo a estudiar es complejo y no es trivial la deducción de su cinemática. Por ejemplo, en el caso del mecanismo encargado de mover los slats de un avión, se puede echar mano de programas de simulación computacional como ADAMS [5] para adquirir información con respecto a la influencia del desgaste de los eslabones en el movimiento de los alerones.

Por otro lado, y cuando sea posible, se podrá realizar únicamente un estudio puramente cinemático. Por ejemplo, en el caso de los mecanismos de manipuladores robóticos paralelos, se necesita una calibración de precisión. Por ello, los parámetros geométricos de dichos mecanismos deben ser identificados por el proceso llamado calibración cinemática [6]. En este caso en particular, el objetivo de la calibración cinemática es calcular de manera precisa los valores de los parámetros cinemáticos con el fin de mejorar su precisión.

El uso del análisis de sensibilidad local, también involucra la cinemática diferencial. Por ejemplo, la cinemática diferencial sirve para determinar la influencia de las tolerancias dimensionales de fabricación en el movimiento del mecanismo [7]. Además de los métodos de análisis de sensibilidad, se tienen métodos “gráficos”.

Es así como, el propósito de este trabajo es encontrar las trayectorias seguidas por el punto extremo del rastrillo

desarenador cuando se ajustan los cinco parámetros geométricos calibrables del mecanismo. En este caso, se presentan las trayectorias de barrido del mecanismo y con base en estas figuras se deduce la sensibilidad de las trayectorias al cambio de cada uno de los cinco parámetros geométricos de calibración. Además, se desea comprobar la validez de los resultados de la referencia [8]. El uso de técnicas gráficas y geométricas para el estudio de los mecanismos no es algo nuevo. Se puede resaltar la generación de curvas planas en mecanismos de transmisión de potencia [9].

La nomenclatura usada en este trabajo está apegada a las reglas de la IFToMM [10] para la designación de los parámetros geométricos y las coordenadas generalizadas.

2. Análisis cinemático

2.1. Dimensiones de los parámetros geométricos

En la tabla 1 se presentan los valores nominales de las longitudes y los ángulos constantes y/o variables de sus 25 parámetros geométricos funcionales.

Tabla 1 – Dimensiones de los parámetros geométricos en el sistema milimétrico.

| Símbolo | Dimensión | Unidades |
|--------------|--------------------|----------|
| a_3 | 4300 | Mm |
| b_3 | -890 | mm |
| l_1 | 182.5 | mm |
| β_1 | 0 (-30 a 30) | ° |
| l_5 | 4600(4480 a 4720) | mm |
| l_{61} | 397 | mm |
| l_{21} | 31 | mm |
| l_4 | 300 | mm |
| l_{31} | 910 | mm |
| l_{32} | 332 | mm |
| l_{81} | 120 | mm |
| l_{82} | 700 | mm |
| β_2 | 90 | ° |
| β_3 | 25 | ° |
| β_6 | 90 | ° |
| l_8 | 5450 (5400 a 5500) | mm |
| l_{83} | 1050 | mm |
| l_{84} | 185 | mm |
| β_{81} | 90 (60 a 120) | ° |
| β_{82} | 90 (60 a 120) | ° |
| l_7 | 400 | mm |
| l_{62} | 397 | mm |
| l_{22} | 191 | mm |
| a_2 | -910 | mm |
| b_2 | -240 | mm |

Para realizar el análisis cinemático, se presenta un esquema del rastrillo en la figura 1. En dicho esquema se muestra una representación gráfica acompañada con números y letras. Los números encerrados en un círculo corresponden a los siete eslabones móviles del rastrillo, además del bastidor. Este último, se representa por el número 1 encerrado en un círculo. Por otro lado, las letras mayúsculas muestran las articulaciones entre los eslabones. Además, se indica con letreros explícitos la ubicación de las zonas importantes. En la figura 1 se muestra el eslabón de entrada, la ubicación del rastrillo de trabajo y la zona de descarga del material contenido en la cuba.

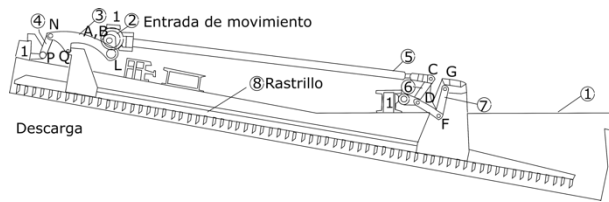


Figura 1 – Esquema del rastrillo desarenador.

El elemento de entrada es una manivela doble que gira en el sentido horario a una velocidad angular de 15 ciclos por minuto. En la figura 2, se muestra el eslabón de entrada y sus dos parámetros geométricos funcionales l_{22} y l_{21} .

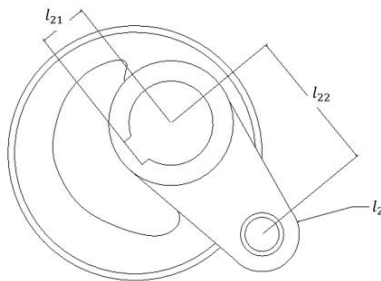


Figura 2 – Elemento de entrada del mecanismo de rastrillo desarenador.

A partir de la figura 1 se puede extraer el diagrama cinemático del mecanismo. En figura 3 se muestran las longitudes y los ángulos funcionales de los eslabones de la máquina desarenadora. También se marcan en el diagrama, mediante letreros, los elementos de ajuste del rastrillo.

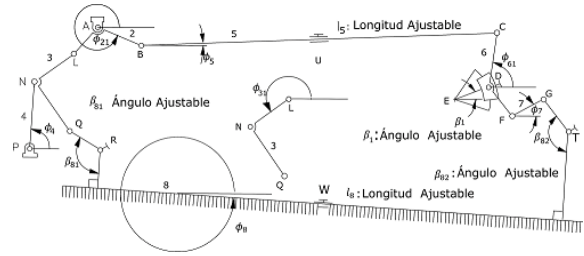


Figura 3 – Esquema cinemático del mecanismo de rastrillo desarenador.

A partir de la figura 3, se extrae el grafo del mecanismo como se muestra en la figura 4. En esta figura, los números representan los elementos y las letras representan las articulaciones. Se puede ver que es posible subdividir el grafo en tres subcircuitos cinemáticos.

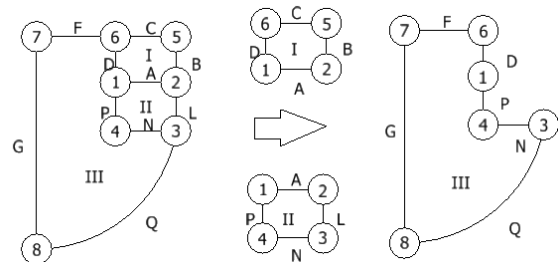


Figura 4 – Grafo del rastrillo desarenador.

2.2 Primer circuito cinemático

El primer circuito cinemático se muestra en el grafo de la figura 4. El esquema cinemático resultante del primer subcircuito cinemático se puede apreciar en la figura 5. Este es un ciclo de cuatro barras.

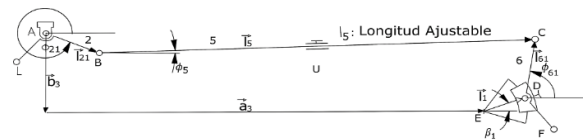


Figura 5 – Esquema cinemático del primer circuito.

En la figura 5, respetando la dirección elegida de los vectores posición y haciendo un recorrido horario, empezando en A y terminando en A, se tiene la ec. (1) de restricción cinemática del primer subcircuito.

$$l_{21} + l_5 - l_{61} - l_1 - a_3 - b_3 = 0 \quad (1)$$

2.3 Segundo circuito cinemático

El segundo circuito cinemático, de cuatro barras, está indicado en el grafo de la figura 4. El subcircuito cinemático, asociado a este ciclo se ve en la figura 6.

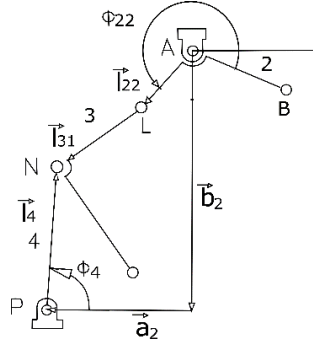


Figura 6 – Esquema cinemático del segundo circuito.

Una vez más se usó una descripción vectorial para obtener la correspondiente ecuación de restricción cinemática. Empezando en A y haciendo un recorrido antihorario cerrado, se escribe la ec. (2).

$$l_{22} + l_{31} - l_4 - a_2 - b_2 = 0 \quad (2)$$

2.4 Tercer circuito cinemático

El grafo correspondiente al último circuito cinemático también se presenta en la figura 4. El esquema de los eslabones del grafo de este ciclo se ve en la figura 7.

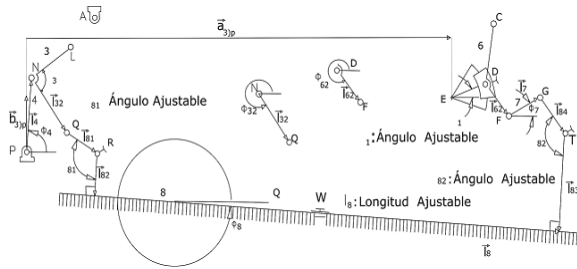


Figura 7 – Esquema del tercer circuito cinemático.

La ecuación de restricción se muestra en la ec. (3).

$$l_4 + l_{32} + l_{81} + l_{82} + l_8 - l_{83} - l_{84} - l_7 - l_{62} - l_1 - a_{3)p} - b_{3)p} = 0 \quad (3)$$

Como se puede observar la referencia del sistema de coordenadas se ubica ahora, para el tercer circuito cinemático, en el par cinemático P. Esto es relevante debido a que, en el caso de los dos circuitos cinemáticos

anteriores, la referencia se establecía en el punto A. Sin embargo, esto último no afecta la obtención de los ángulos de salida de movimiento.

3. Obtención de los ángulos de movimiento de los eslabones del rastrillo

Una vez obtenidas todas las ecuaciones de restricción de los diferentes circuitos cinemáticos, se deben obtener los ángulos de los diferentes eslabones móviles de salida. Esto, con la finalidad de poder determinar la posición de cualquier punto sobre el rastrillo.

3.1 Obtención del ángulo ϕ_{61}

Como el ángulo ϕ_{61} pertenece al primer circuito cinemático, entonces, se debe hacer uso de la ec. (1) y descomponerla en sus componentes horizontales y verticales. La expresión resultante se puede apreciar en la ec. (4).

$$\begin{aligned} l_{21} \cos \phi_{21} + l_5 \cos \phi_5 - l_{61} \cos \phi_{61} - l_1 \cos \beta_1 - a_3 &= 0 \\ l_{21} \sin \phi_{21} + l_5 \sin \phi_5 - l_{61} \sin \phi_{61} - l_1 \sin \beta_1 - b_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

En la ec. (4) existen 2 ángulos desconocidos que son: ϕ_{61} y ϕ_5 . En (4) intervienen, entre otros, los parámetros ajustables β_1 y l_5 . Estos ángulos se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones dado en (4). El ángulo ϕ_{61} [11] se calcula según la ecuación (5).

$$\phi_{61} = 2 \arctan\left(\frac{-k_b - \sqrt{k_b^2 - 4k_a k_c}}{2k_a}\right) \quad (5)$$

donde,

$$\begin{aligned} k_a &= [k_3 - k_1 - k_2 \cos \phi_{21} - k_5 \sin \phi_{21} + \cos \phi_{21}] \\ k_b &= [2k_4 - 2 \sin \phi_{21}] \\ k_c &= [k_3 + k_1 - k_2 \cos \phi_{21} - k_5 \sin \phi_{21} - \cos \phi_{21}] \end{aligned} \quad (6)$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{a_1}{l_{21}}, \\
 k_2 &= \frac{a_1}{l_{61}}, \\
 k_3 &= \frac{(l_{21})^2 + (l_{61})^2 + a_1^2 + b_1^2 - (l_5)^2}{2l_{21}l_{61}}, \\
 k_4 &= \frac{b_1}{l_{21}}, \\
 k_5 &= \frac{b_1}{l_{61}}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Existen dos posibilidades para el ángulo ϕ_{61} , esto depende de la configuración con la que fue armado. Si la configuración es abierta, se elige el signo negativo del radical [12]. Si la configuración es cruzada el signo que se elige es positivo. Por lo tanto, del análisis del primer ciclo cinemático, la expresión final del mecanismo debe contener signo negativo en el radical. Así, la expresión que relaciona el ángulo en función de la entrada y las longitudes de los eslabones es la ec. (5).

3.2 Obtención del ángulo ϕ_5

El ángulo ϕ_5 viene expresado como se indica en (8):

$$\phi_5 = 2 \arctan\left(\frac{-k_e + \sqrt{k_e^2 - 4k_d k_f}}{2k_d}\right) \tag{8}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 k_d &= [k_8 + k_6 - k_7 \cos(\phi_{21}) - k_{10} \sin(\phi_{21}) - \cos(\phi_{21})] \\
 k_e &= [-2k_9 + 2 \sin(\phi_{21})] \\
 k_f &= [k_8 - k_6 - k_7 \cos(\phi_{21}) - k_{10} \sin(\phi_{21}) + \cos(\phi_{21})]
 \end{aligned} \tag{9}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
 k_6 &= \frac{a_1}{l_{21}}, \\
 k_7 &= \frac{a_1}{l_5}, \\
 k_8 &= \frac{(l_{21})^2 + (l_5)^2 + a_1^2 + b_1^2 - (l_{61})^2}{2l_{21}l_5}, \\
 k_9 &= \frac{b_1}{l_{21}}, \\
 k_{10} &= \frac{b_1}{l_5}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Tomando en cuenta que el mecanismo, en el primer subcircuito cinemático, está armado por medio de una configuración cruzada, se elige el signo positivo del radical para llegar a la ec. (8).

3.3 Obtención del ángulo ϕ_4

El ángulo ϕ_4 es parte del segundo circuito cinemático, por lo que se toma la ec. (2) y se divide en sus componentes horizontales y verticales, dando como resultado la expresión resultante:

$$\phi_4 = 2 \arctan\left(\frac{-k_h + \sqrt{k_h^2 - 4k_g k_i}}{2k_g}\right) \tag{11}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 k_g &= [k_{13} - k_{11} - k_{15} \sin(\phi_{22}) - k_{12} \cos(\phi_{22}) + \cos(\phi_{22})] \\
 k_h &= [2k_{14} - 2 \sin(\phi_{22})] \\
 k_i &= [k_{13} + k_{11} - k_{15} \sin(\phi_{22}) - k_{12} \cos(\phi_{22}) - \cos(\phi_{22})]
 \end{aligned} \tag{12}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= \frac{a_2}{l_{22}}, \\
 k_{12} &= \frac{a_2}{l_4}, \\
 k_{13} &= \frac{a_2^2 + b_2^2 + (l_{22})^2 + (l_4)^2 - (l_{31})^2}{2l_{22}l_4}, \\
 k_{14} &= \frac{b_2}{l_{22}}, \\
 k_{15} &= \frac{b_2}{l_4}
 \end{aligned} \quad (13)$$

Debido a la configuración cruzada de los eslabones del rastrillo en el circuito 2, se elige el signo positivo en el radical de la ec. (11).

3.4 Obtención del ángulo ϕ_{31}

Debido a que el ángulo buscado pertenece al segundo circuito cinemático, se toma la ec. (2) y se reduce hasta obtener la expresión que se muestra en la ec. (14).

$$\phi_{31} = 2 \arctan\left(\frac{-k_n - \sqrt{k_n^2 - 4k_j k_q}}{2k_j}\right) \quad (14)$$

donde,

$$\begin{aligned}
 k_j &= [k_{18} + k_{16} - k_{20} \sin(\phi_{22}) - k_{17} \cos(\phi_{22}) - \cos(\phi_{22})] \\
 k_n &= [-2k_{19} + 2 \sin(\phi_{22})] \\
 k_q &= [k_{18} - k_{16} - k_{17} \cos(\phi_{22}) - k_{20} \sin(\phi_{22}) + \cos(\phi_{22})]
 \end{aligned} \quad (15)$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
 k_{16} &= \frac{a_2}{l_{22}}, \\
 k_{17} &= \frac{a_2}{l_{31}}, \\
 k_{18} &= \frac{a_2^2 + b_2^2 + l_{22}^2 + l_{31}^2 - l_4^2}{2l_{22}l_{31}}, \\
 k_{19} &= \frac{b_2}{l_{22}}, \\
 k_{20} &= \frac{b_2}{l_{31}}
 \end{aligned} \quad (16)$$

Debido a que, en este caso, el circuito está armado en configuración abierta, se elige el signo negativo en el radical de la ec. (14).

3.5 Obtención del ángulo ϕ_8

El ángulo ϕ_8 se encuentra en el tercer circuito cinemático y se calcula con un procedimiento diferente al seguido para los ángulos anteriores, ya que éste no es un ciclo de cuatro barras. Por esta razón, se detalla a continuación los pasos para obtenerlo. Se usa la ec. (3) y se divide en sus componentes cartesianas, como se muestra en (17).

$$\begin{aligned}
 &l_4 \cos(\phi_4) + l_{32} \cos(\phi_{32}) + l_{81} \cos(\phi_{81}) + l_{82} \cos(\phi_{82}) + l_8 \cos(\phi_8) \\
 &- l_{83} \cos(\phi_{83}) - l_{84} \cos(\phi_{84}) - l_7 \cos(\phi_7) - l_{62} \cos(\phi_{62}) - l_1 \cos(\beta_1) - a_{3p} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &l_4 \sin(\phi_4) + l_{32} \sin(\phi_{32}) + l_{81} \sin(\phi_{81}) + l_{82} \sin(\phi_{82}) + l_8 \sin(\phi_8) \\
 &- l_{83} \sin(\phi_{83}) - l_{84} \sin(\phi_{84}) - l_7 \sin(\phi_7) - l_{62} \sin(\phi_{62}) - l_1 \sin(\beta_1) - b_{3p} = 0
 \end{aligned}$$

(17)

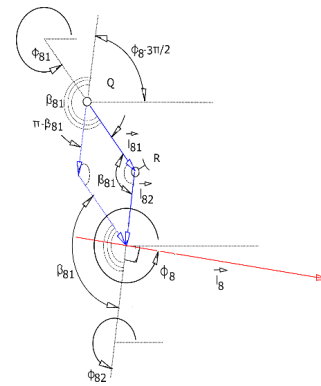


Figura 8 – Geometría para obtener las relaciones asociadas a los ángulos: ϕ_{81} , ϕ_{82} , ϕ_{83} , ϕ_{84} .

Los ángulos ϕ_{81} , ϕ_{82} , ϕ_{83} , ϕ_{84} están relacionados con el ángulo ϕ_8 mediante la geometría de la figura 8.

A partir de la figura 8, se llega a la ec. (18).

$$\begin{aligned}
 \phi_{81} &= \phi_8 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta_{81}\right), \\
 \phi_{82} &= \phi_8 - \frac{\pi}{2}, \\
 \phi_{83} &= \phi_{82}, \\
 \phi_{84} &= \phi_8 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta_{82}\right)
 \end{aligned} \quad (18)$$

En cuanto a los ángulos ϕ_{32} y ϕ_{62} , se obtienen las expresiones de la ec. (19), mediante la figura 7.

$$\begin{aligned}\phi_{32} &= \phi_{31} + (\pi - \beta_3), \\ \phi_{62} &= \phi_{61} + (2\pi - \beta_6)\end{aligned}\quad (19)$$

Sustituyendo la ec. (19) y ec. (18) en la ec. (17) y simplificado, se llega a la ec. (20).

$$\begin{aligned}-l_7 \cos(\phi_7) + k_{24} \cos(\phi_8) + k_{23} \sin(\phi_8) + k_{21} &= 0 \\ -l_7 \sin(\phi_7) + k_{24} \sin(\phi_8) - k_{23} \cos(\phi_8) + k_{22} &= 0\end{aligned}\quad (20)$$

donde,

$$\begin{aligned}k_{21} &= [l_4 \cos(\phi_4) + l_{32} \cos(\phi_{32}) - l_{62} \cos(\phi_{62}) - l_1 \cos(\beta_1) - a_{3p}], \\ k_{22} &= [l_4 \sin(\phi_4) + l_{32} \sin(\phi_{32}) - l_{62} \sin(\phi_{62}) - l_1 \sin(\beta_1) - b_{3p}], \\ k_{23} &= [l_{82} - l_{83} - l_{81} \cos(\beta_{81}) + l_{84} \cos(\beta_{82})], \\ k_{24} &= [l_8 + l_{81} \sin(\beta_{81}) - l_{84} \sin(\beta_{82})]\end{aligned}\quad (21)$$

Se despeja el término que contiene a ϕ_7 , se eleva al cuadrado y se suman las dos ecuaciones para obtener la ec. (22).

$$k_{25} \sin(\phi_8) k_{26} \cos(\phi_8) + k_{27} = 0 \quad (22)$$

siendo,

$$\begin{aligned}k_{25} &= 2[k_{23} k_{21} + k_{24} k_{22}], \\ k_{26} &= 2[k_{21} k_{24} - k_{23} k_{22}], \\ k_{27} &= [(k_{24})^2 + (k_{23})^2 + (k_{21})^2 + (k_{22})^2 - (l_7)^2]\end{aligned}\quad (23)$$

Se usa la identidad trigonométrica de la tangente del ángulo medio para obtener la ec. (24).

$$k_w \tan^2\left(\frac{\phi_8}{2}\right) + k_x \tan\left(\frac{\phi_8}{2}\right) + k_z = 0 \quad (24)$$

donde,

$$\begin{aligned}k_w &= [k_{27} - k_{26}], \\ k_x &= [2k_{25}], \\ k_z &= [k_{26} + k_{27}]\end{aligned}\quad (25)$$

La solución de la ec. (24), tomando en cuenta el signo del radical, se muestra en la ec. (26)

$$\phi_8 = 2 \arctan\left(\frac{-k_x + \sqrt{(k_x)^2 - 4k_w k_z}}{2k_w}\right) \quad (26)$$

4. Resultados: Obtención de las trayectorias de un punto de interés

Una vez que se conocen las expresiones para el ángulo de salida de cualquiera de los siete eslabones móviles del mecanismo, se pueden obtener las trayectorias de cualquier punto sobre el rastrillo. Estas trayectorias son importantes porque nos permiten saber, a los fines de la calibración del mecanismo durante su mantenimiento, si el ajuste del mecanismo es adecuado o no. Si el ajuste no es adecuado, el rastrillo podría chocar con el fondo de la cuba, o en su defecto, pasar muy alto, con lo cual el barrido sería ineficiente. A continuación, se presentan las trayectorias del punto extremo O del rastrillo cuando se ajustan los cinco parámetros geométricos calibrables del mecanismo. La ubicación de este punto se puede observar en la figura 9.

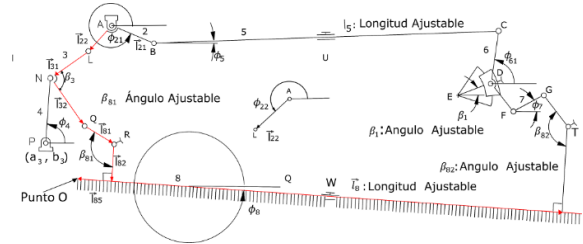


Figura 9 – Ubicación del punto O en el diagrama cinemático del rastrillo.

En la figura 9, es de resaltar que l_{85} forma parte del rastrillo y tiene una longitud de 740 mm. La longitud l_{85} permite ubicar el punto extremo del rastrillo.

La ecuación vectorial que describe la trayectoria del punto O, tomando como referencia el punto A en el bastidor, se puede extraer de la figura 9. Esta expresión se da en la ec. (27).

$$\mathbf{l}_{O,A} = \mathbf{l}_{22} + \mathbf{l}_{31} + \mathbf{l}_{32} + \mathbf{l}_{81} + \mathbf{l}_{82} + \mathbf{l}_{85} \quad (27)$$

La trayectoria del punto O depende de las longitudes y los ángulos de los cinco parámetros de calibración. Se obtuvieron las trayectorias del punto O variando, las longitudes y ángulos de los parámetros geométricos ajustables, entre sus valores mínimos y máximos. Las trayectorias se implementaron en el software de simulación matemática, Matlab versión 2021a. Se simuló

una revolución del eslabón de entrada mediante un vector de 100 datos. Los resultados de las trayectorias se muestran en las figuras 10 a 14.

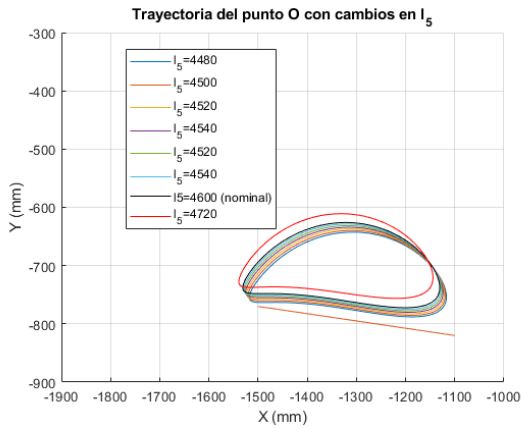


Figura 10 – Trayectorias del punto O cuando cambia l_5 . La línea recta inclinada representa el fondo de la cuba.

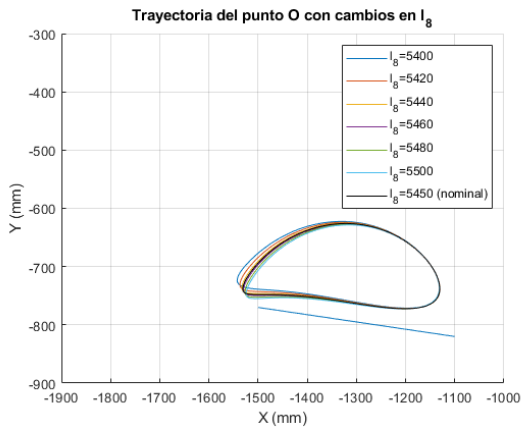


Figura 11 – Trayectorias del punto O cuando cambia l_8 .

Las figuras 10 y 11 muestran la influencia del alargamiento o el acortamiento de las longitudes de los eslabones 5 y 8 en la trayectoria de barrido del punto O. Estas figuras también muestran, en color negro, las trayectorias del punto O cuando cada parámetro geométrico ajustable está en sus valores nominales. Estos valores nominales son: $l_5 = 4600$ mm, $l_8 = 5450$ mm, $\beta_{81} = 90^\circ$, $\beta_{82} = 90^\circ$, $\beta_1 = 0^\circ$.

Se puede observar en la figura 10 que al alargar la longitud del eslabón 5, desde su valor mínimo igual a 4480 mm hasta su valor máximo de 4720 mm, la trayectoria de barrido sube respecto al fondo de la cuba aproximadamente 20 mm. Al mismo tiempo, se obtiene de la figura 11, que al alargar la longitud del eslabón 8 desde su valor mínimo igual a 5400 mm hasta su valor máximo de 5500 mm, la trayectoria de barrido también sube respecto al fondo de la cuba, pero en este caso, solo sube unos 5 mm. De este modo, el eslabón 8 permite conseguir un ajuste fino (cambio en la trayectoria ≤ 5 mm) de la trayectoria, mientras que el eslabón 5 sirve para un ajuste grueso ($5\text{mm} \leq$ magnitud del cambio en la trayectoria ≤ 20 mm), ya que, este último, modifica la trayectoria de barrido con un valor cuatro veces mayor en comparación con el ajuste que permite el eslabón 8. Como la eficiencia de barrido del mecanismo depende de cuán lejos o cuán cerca pasa la trayectoria del punto O, del fondo de la cuba, estos ajustes permiten calibrar el mecanismo cada vez que se realizan labores de mantenimiento mayor.

Adicionalmente, se observa de las figuras 10 y 11, que las trayectorias del punto O son prácticamente paralelas al fondo de la cuba cuando la longitud del eslabón 5 está entre 5480 mm y 5540 mm y cuando la longitud del eslabón 8 está entre 5400 mm y 5500 mm.

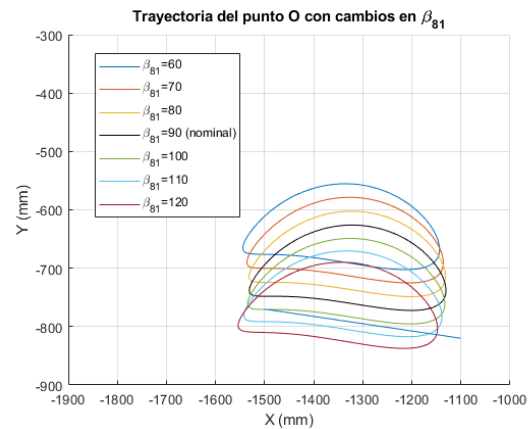


Figura 12 – Trayectorias del punto O cuando cambia β_{81} .

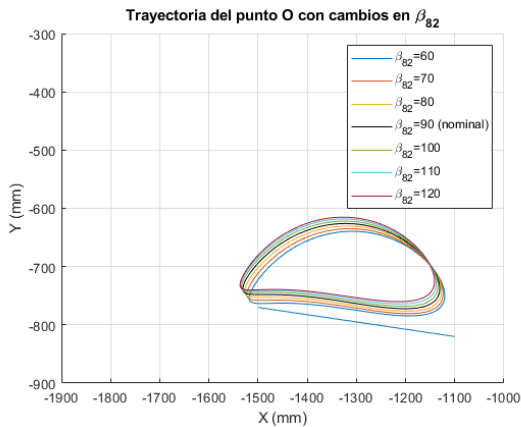


Figura 13 – Trayectorias del punto O cuando cambia β_{82} .

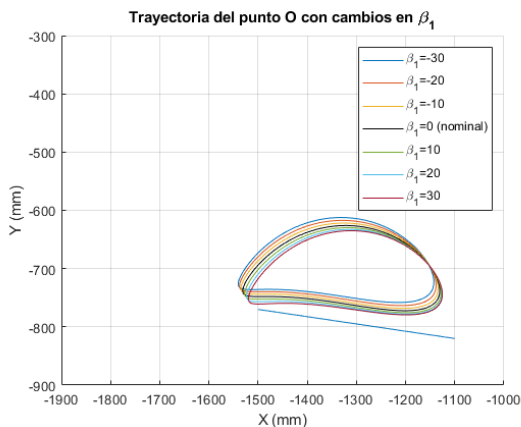


Figura 14 – Trayectorias del punto O cuando cambia β_1 .

Las figuras 12, 13 y 14 muestran la influencia del cambio de los ángulos de ajuste β_{82} , β_{81} y β_1 en la trayectoria del punto O.

Se puede observar en la figura 12 que al cambiar el ángulo β_{81} en el eslabón 8, entre 60 y 90 grados, la trayectoria de barrido se acerca al fondo de la cuba, aproximadamente 100 mm. Para el ángulo nominal β_{81} igual a 90 grados el punto O pasa a unos 20 mm del fondo de la cuba. Los ángulos de ajuste entre $\beta_{81} = 100^\circ$ y $\beta_{81} = 120^\circ$ no se deben usar cuando el resto de los parámetros ajustables (l_5 , l_8 , β_{81} , β_{82} y β_1) están en sus valores nominales, porque para β_{81} entre 100° y 120° el punto O choca con el fondo de la cuba.

Cuando β_{81} se encuentra en el intervalo $60^\circ \leq \beta_{81} \leq 90^\circ$ la trayectoria cambia de manera significativa, unos 100 mm. De esta manera, la calibración del ángulo β_{81} proporciona un ajuste muy grueso en la trayectoria del punto O del rastrillo.

Por otra parte, es de hacer notar en la figura 13 que, al cambiar el ángulo β_{82} en el eslabón 8, entre 60 y 120 grados, la trayectoria de barrido se acerca al fondo de la cuba, aproximadamente 20 mm, por lo que la calibración del ángulo β_{82} proporciona un ajuste grueso al momento de calibrar la trayectoria del punto O del rastrillo.

Finalmente, en la figura 14, se observa que al cambiar el ángulo β_1 en el eslabón bastidor 1, entre -30 y 30 grados, la trayectoria de barrido también se acerca al fondo de la cuba, aproximadamente 20 mm, como también ocurre en la figura 16 cuando se ajusta el ángulo β_{82} entre 60 y 90 grados. De esta manera, al variar el ángulo β_1 , también se proporciona un ajuste grueso en la trayectoria del punto O del rastrillo.

Se comprueba que los resultados coinciden con los obtenidos en [8], con lo cual podemos contar con una referencia propia acerca del modo en el que las trayectorias del punto O de este tipo de rastrillo cambia con el ajuste de sus parámetros geométricos calibrables.

5. Conclusión

Las trayectorias de un punto cualquiera del eslabón de salida del mecanismo del rastrillo desarenador, se pueden obtener a través de Matlab descomponiendo el mecanismo en sus subciclos cinemáticos constituyentes. En este caso, se tienen tres subciclos, de los cuales se puede obtener las coordenadas generalizadas de salida de los eslabones del mecanismo, en función de la coordenada de entrada ϕ_2 , así como de la magnitud de los parámetros geométricos del mecanismo, tomando en cuenta los distintos ajustes que se pueden hacer en l_5 , l_8 , β_{81} , β_{82} y β_1 . Al ajustar el ángulo β_1 se puede dar un ajuste grueso a la trayectoria del punto O. En este caso, la trayectoria del punto O varía 20 mm, acercándose al fondo de la cuba cuando el ángulo β_1 va de su valor mínimo a su valor máximo, y cuando se asume que el resto de los parámetros geométricos calibrables está en sus valores nominales. Al variar la longitud l_5 se puede dar a la trayectoria del punto O, un ajuste grueso de 20 mm. En este caso, la trayectoria se acerca al fondo de la cuba cuando l_5 va de su valor máximo a su valor mínimo, asumiendo que el resto de los parámetros geométricos calibrables está en sus valores nominales. Al variar la longitud l_8 se puede dar a la trayectoria del punto O, un ajuste fino de 5 mm. En este caso, la trayectoria se acerca al fondo de la cuba cuando l_8 va de su valor mínimo a su valor máximo, asumiendo que el resto de los parámetros geométricos calibrables están en sus valores nominales. Al cambiar el ángulo β_{81} se puede dar un ajuste muy grueso a la trayectoria del punto O, acercándose la trayectoria a la cuba, con una variación de hasta 100 mm, cuando el ángulo β_{81} cambia de su valor mínimo a su valor máximo. El ángulo β_{81} no debe ajustarse por encima de los 90° . El ajuste del ángulo β_{82} produce casi

los mismos efectos sobre la trayectoria del punto O, que el ajuste del ángulo β_1 cuando el resto de los parámetros geométricos están en sus valores nominales. En este caso, la trayectoria del punto O se acerca al fondo de la cuba cuando el ángulo β_{82} va de su valor máximo a su valor mínimo.

Agradecimientos

Se agradece al Consejo Nacional Ciencia y Tecnología por su apoyo económico.

REFERENCIAS

-
- [1] F. Habashi, *A hundred years of the Bayer Process for alumina production*, (pp. 85-93), Essential Readings in Light Metals: Volume 1 Alumina and Bauxite, Springer International Publishing. (2016).
- [2] J. Mendoza, A. Mata, P. Blanco, S. Caraballo, *Errores de posicionamiento de un mecanismo de rastrillo desarenador*, (pp. 1-11). 12° Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Guayaquil, (2015).
- [3] A. Mata, *Calibración de un mecanismo de doble rastrillo de desarenado (Errores de posicionamiento y obtención de manual de calibración)*. (1era ed.). Moldavia: Editorial Académica Española, (2018).
- [4] C. Zhou, C. Tang, F. Liu, W. Wang, Z. Yue, *Regional moment-independent sensitivity analysis with its applications in engineering*, (pp. 1031-1042). Chinese Journal of Aeronautics, Volume 30, Issue 3, (2017).
- [5] C. Zhou, H. Zhao, Q. Chang, M. Ji, C. Li, *Reliability and global sensitivity analysis for an airplane slat mechanism considering wear degradation*, Chinese Journal of Aeronautics, Volume 34, Issue 1, Pages 163-170, (2021).
- [6] V. Parenti-Castelli, R. Di Gregorio y J. Lenarcic, *Sensitivity to Geometric Parameter Variation of a 3-DOF Fully Parallel Manipulator*, Proceedings of 3rd International Conference on Advanced Mechatronics (JSME), Okayama, Japan, pp.364-369, (1998).
- [7] A. Fogarasy, M. Smith. *The influence of manufacturing tolerances on the kinematic performance of mechanisms*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 212(1):35-47, (1998).
- [8] J. Quiñonez, R. Pinto, J Olenka, *Barrido de un mecanismo de rastrillo desarenador en función del ajuste individual de sus cinco parámetros geométricos calibrables*, Universidad, Ciencia y Tecnología, **20** (2016) 81.
- [9] M. Cera, E. Pennestri, *The Mechanical Generation of Planar Curves by Means of Point Trajectories, Line and Circle Envelopes: A Unified Treatment of the Classic and Generalized Burmester Problem*, Mechanism and Machine Theory, (2019).
- [10] IFToMM Commission A, *for Standards and Terminology. Abbreviations/ Symbols for Terms in TMM*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 32, N 6, pp 641-666, (1997).
- [11] R. Norton, "Diseño de Maquinaria: Síntesis y análisis de máquinas y mecanismos, vol. 1." México: McGraw Hill (1992): 7.
- [12] J. Uicker et al. *Theory of machines and mechanisms*. Vol. 3. New York: Oxford University Press, (2003).

Anexo E

Programa para prueba de bondad de ajuste

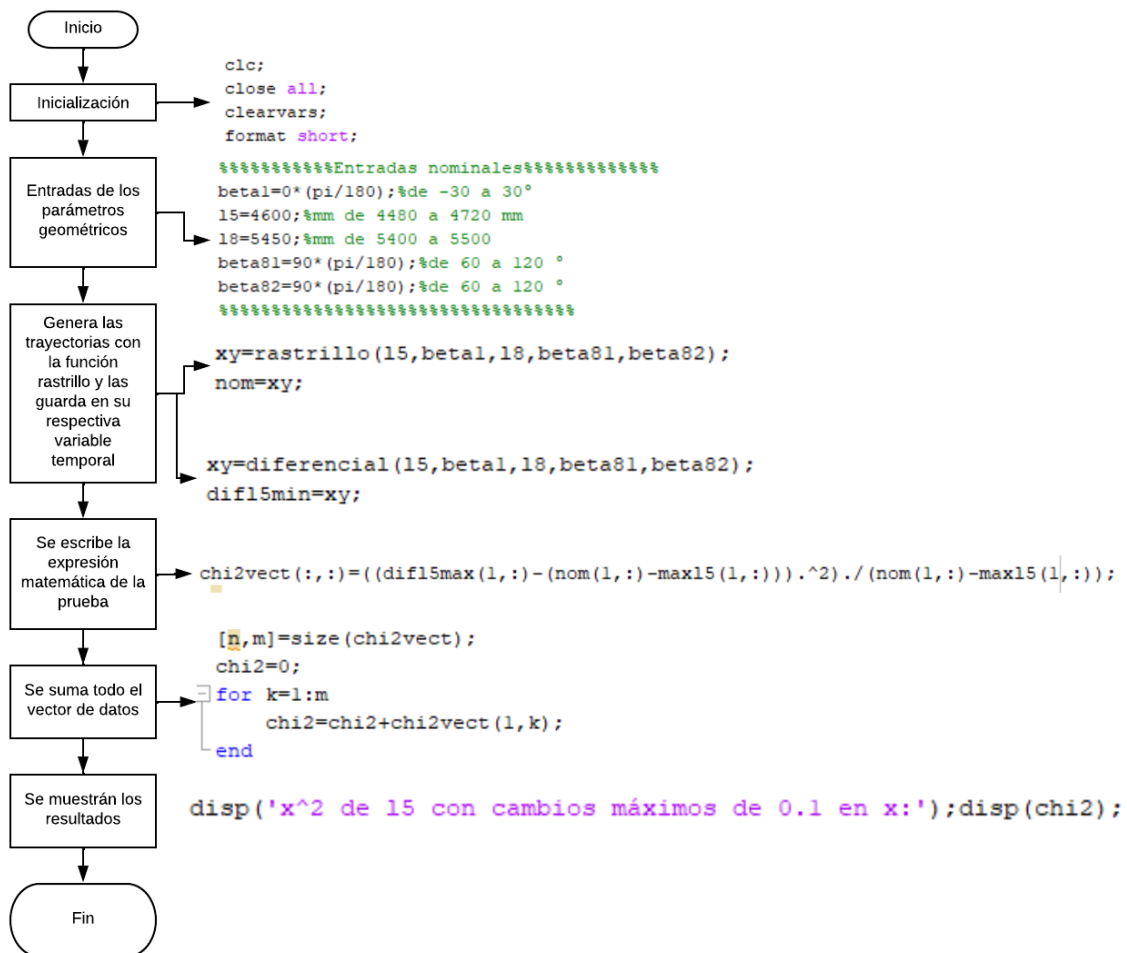


Figura 18: Pseudocódigo del programa desarrollado para realizar la prueba de bondad de ajuste de la comparación de las trayectorias generadas por los diferenciales totales y su correspondiente aproximación mediante resta de trayectorias.

El programa principal, llamado: *chic cuadrado.m*, para la prueba de bondad de ajuste realizada para calcular el grado de confiabilidad de la interpretación de las curvas diferenciales totales se realizó en MATLAB. Se presenta, en la Figura 18, un pseudocódigo donde se muestra el funcionamiento general del programa. Es necesario aclarar que este usa la función de apoyo *rastrillo.m* y la función *diferencial.m* que se detallan en el Anexo A.

En el código se generan todas las trayectorias que se desean comparar en la prueba de bondad de ajuste y se guardan en variables temporales. Después se ejecuta la prueba y se van obteniendo los resultados en la ventana de comandos de MATLAB.

Anexo F

Comprobante del examen de ingles

En este apéndice se encuentra el certificado de ingles.

TOEFL ITP Score Report

Name of Institution: UPAEP PUEBLA

Name: HEREDIA JORGE

Student Number:

DOB: 08/20/1995

Sex: M Degree:

Times Taken TOEFL: 1

Native Country: Mexico

Native Language: Spanish

Scaled Scores:

| | |
|---------------------------------|-----|
| Listening Comprehension: | 56 |
| Structure & Written Expression: | 46 |
| Reading Comprehension: | 54 |
| Total Score: | 520 |

Test Date: 03/23/2022

Form: TOEFL ITP



The face of this document has a security background. The back contains a watermark. Hold at an angle to view.

The TOEFL ITP Assessment Series is designed to be used for placement, progress monitoring, and exit purposes. TOEFL ITP scores can also be used for admissions to programs and institutions where English is not the dominant language of instruction for content courses. Learn more at www.ets.org/toefl_itp/use.

145817-16573 • FB521R100 • Printed in U.S.A.

I.N. 770462

**Student's File Copy
Do Not Copy**

Copyright © 2012 by Educational Testing Service.

Bibliografía

- [1] Esta foto es del grosor de un pelo humano. url:<https://www.elobservador.com.uy/nota/esta-foto-es-del-grosor-de-un-pelo-humano-20151217500>. Accedido: 26-10-2020.
- [2] Jesús Mendoza, Rafael Pinto, and Julio Olenka. Barrido de un mecanismo de rastrillo clasificador en función del ajuste individual de sus cinco parámetros geométricos calibrables. *Universidad, Ciencia y Tecnología*, 20:148 – 165, 12 2016.
- [3] Fathi Habashi. *A Hundred Years of the Bayer Process for Alumina Production*, pages 85–93. Springer International Publishing, Cham, 2016.
- [4] Jesús Mendoza, Rafael Pinto, and Julio Olenka. Errores de posicionamiento de un mecanismo de rastrillo desarenador. *12^o Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica Guayaquil*, pages 1 – 10, 11 2015.
- [5] Alberto Mata. *Calibración de un mecanismo de doble rastrillo de desarenado (Errores de posicionamiento y obtención del manual de calibración)*. editorial académica española, 1 edition, 2018.
- [6] Enrique Gonzalez Torres. Yacimientos minerales: Los tesoros de la tierra de carles canet miquel y antoni camprubí cano. *Boletín de la Sociedad Geológica Mexicana*, 59:221 – 222, 00 2007.
- [7] Proveedores de clasificadores de rastrillos. url: <https://www.quiminet.com/productos/ clasificadores-de-rastrillos-7668316472/proveedores.htm>. Accedido: 9-11-2020.
- [8] A. C. Majarena, J. Santolaria, D. Samper, and J. J. Aguilar. An overview of kinematic and calibration models using internal/external sensors or constraints to improve the behavior of spatial parallel mechanisms. *Sensors*, 2010.
- [9] Docchio F. Sansoni G, Trebeschi M. State-of-the-art and applications of 3d imaging sensors in industry, cultural heritage, medicine, and criminal investigation. *Sensors*, 2009.
- [10] Manuel Bustillo Revuelta. *Mineral Processing*, pages 423–530. Springer International Publishing, Cham, 2018.
- [11] F. Krause, N. C. Beaton, and K. D. Grüner. *Hydroseparators, Hydrocyclones and Classifiers as Applied in the Bayer Process for Degritting (Desanding) of Digested Bauxite, and for Sand Washing to Recover Soda*, pages 454–460. Springer International Publishing, Cham, 2016.

- [12] Marco Ceccarelli. *Activity and Trends in MMS from IFToMM Community*, pages 3–24. Springer Netherlands, Dordrecht, 2011.
- [13] A. J. Klein Breteler. *On the Development of Terminology and an Electronic Dictionary for Mechanism and Machine Science*, pages 95–105. Springer Netherlands, Dordrecht, 2011.
- [14] Iftomm dictionary on-line. url: [http : / /www.iftomm-terminology.antonkb.nl / 2057 / frames.html](http://www.iftomm-terminology.antonkb.nl/2057/frames.html) . Acedido: 16-06-2022.
- [15] Maoyu Zhang, Yueri Cai, and Shusheng Bi. Kinematics analysis and simulation of a robot with lower extremity exoskeleton. In Xianmin Zhang, Nianfeng Wang, and Yanjiang Huang, editors, *Mechanism and Machine Science*, pages 195–207, Singapore, 2017. Springer Singapore.
- [16] Edison Tamilmani and Sandipan Bandyopadhyay. Kinematic analysis of a novel hybrid hand. In Xianmin Zhang, Nianfeng Wang, and Yanjiang Huang, editors, *Mechanism and Machine Science*, pages 75–88, Singapore, 2017. Springer Singapore.
- [17] Constantinos Mavroidis, Fethi Ben Oueddou, and Philippe Bidaud. Inverse kinematics of six-degree of freedom "general" and "special" manipulators using symbolic computation. *Robotica*, 12:421–430, 1994.
- [18] AA Fogarasy and MR Smith. The case for a general method of kinematic analysis of plane mechanisms based on equations of constraint. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 209(5):337–343, 1995.
- [19] Emanuele Borgonovo. *Setup of Sensitivity Analysis*, pages 9–13. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [20] Tomasz Lekszycki and Fabio Di Cosmo. *Sensitivity Analysis in Structural and Multidisciplinary Problems*, pages 2219–2230. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2020.
- [21] Guanglei Wu and Shaoping Bai. Sensitivity analysis and comparison of parallel schönflies-motion robots with a single platform. In Xianmin Zhang, Nianfeng Wang, and Yanjiang Huang, editors, *Mechanism and Machine Science*, pages 155–167, Singapore, 2017. Springer Singapore.
- [22] AA Fogarasy and MR Smith. The influence of manufacturing tolerances on the kinematic performance of mechanisms. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 212(1):35–47, 1998.
- [23] British Standard. *BS EN 20286-1*, 1 edition.
- [24] IFToMM Commission A For Standards and Terminology. Terminology for the theory of machines and mechanisms. mech. mach. theory, 1991.
- [25] Jorge Heredia, Jesús Quiñonez, Olga Félix, Javier Flores, and Manuel Aparicio. Influencia de la calibración de los cinco parámetros geométricos ajustables de un rastrillo clasificador en sus trayectorias de barrido. *XXVII Congreso Internacional Anual de la SOMIM*, pages 17 – 26, 2021.

- [26] J Domingo Pájaro-Adrián, Rodolfo Reyes-Báez, Jaime J Cid-Monjaraz, and Fernando Reyes-Cortés. Evaluación experimental del desempeño de un controlador basado en pasividad de un robot manipulador. *AMCA*, 2019.
- [27] DFROBOT. *Metal DC Geared Motor*. DFROBOT, <https://media.digikey.com/pdf/DataDFRobot>
- [28] Truper. *Calibrador digital de 6", milimétrico y standard*. Truper, https://www.truper.com/ficha_tecnica/views/ficha-print.php?id=688, 2022.
- [29] Yadolah Dodge. *Chi-Square Test*, pages 77–79. Springer New York, New York, NY, 2008.
- [30] Ke Zhang, Hui Zhang, Baoan Zhang, and Jianbin Qiu. Analysis on influence of manufacturing error for output accuracy of hybrid five-bar mechanism. In *2008 10th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, pages 1971–1975, 2008.
- [31] Proximity switch (lj18a3-8-z/bx). url: <https://geeksville.com/wp-content/uploads/2021/06/Proximity-Switch-LJ18A3-8-Z-BX.pdf>. Acedido: 15-06-2022.
- [32] Inductive proximity switch npn. url: <https://www.electrokit.com/uploads/productfile/41014/LJ12A3-4.pdf>. Acedido: 15-06-2022.
- [33] Jijnasa Panigrahi and Sharad C. Sharma. Chapter 12 - simulation, control, and optimization of water systems in industrial plants. In Vivek V. Ranade and Vinay M. Bhandari, editors, *Industrial Wastewater Treatment, Recycling and Reuse*, pages 463–487. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2014.
- [34] George Wypych. 7 - functional fillers – renewable and recycling. In George Wypych, editor, *Functional Fillers*, pages 181–195. ChemTec Publishing, 2018.
- [35] Waiching Tang, Mehrnoush Khavarian, and Ali Yousefi. 14 - red mud. In Rafat Siddique and Rafik Belarbi, editors, *Sustainable Concrete Made with Ashes and Dust from Different Sources*, Woodhead Publishing Series in Civil and Structural Engineering, pages 577–606. Woodhead Publishing, 2022.
- [36] Marnie M. Saunders. *Accuracy and Measurement Tools*, pages 19–39. Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [37] S. Kumar. 14 - the properties and performance of red mud-based geopolymeric masonry blocks. In F. Pacheco-Torgal, P.B. Lourenço, J.A. Labrincha, S. Kumar, and P. Chindapasirt, editors, *Eco-Efficient Masonry Bricks and Blocks*, pages 311–328. Woodhead Publishing, Oxford, 2015.
- [38] Liga a descarga de aplicación para matlab. url: <https://drive.google.com/file/d/1bOB0u8WkB7RI-GYSkLgFZ7QPQGUJa6Sc/view?usp=sharing>. Acedido: 16-06-2022.
- [39] Liga a descarga de aplicación para windows 10. url: <https://drive.google.com/file/d/1V20gqfx190ENVRSNVPn4SSKELJ2tp0tp/view?usp=sharing>. Acedido: 16-06-2022.