

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias de la Electrónica



**Modelado y Control del Péndulo Invertido con Rueda Inercial:
Análisis y Simulación**

TESIS

que para obtener el grado de

Ingeniero en Mecatrónica

presenta

Juan de Dios Hernández Ortega

Asesor

Dr. Pablo Sánchez Sánchez – Facultad de Ciencias de la Electrónica

CU, Puebla. Pue., junio 2025

Hoja de firmas

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
Facultad de Ciencias de la Electrónica

El presente documento certifica que se ha leído el trabajo de Tesis que tiene por nombre **Modelado y Control del Péndulo Invertido con Rueda Inercial: Análisis y Simulación** realizado por el alumno **Juan de Dios Hernández Ortega** recomendando a la Facultad de Ciencias de la Electrónica (FCE) sea aceptada para cumplir con uno de los requisitos para obtener el grado de **Ingeniero Mecatrónico**.

31 de octubre de 2025

Presidente: _____
Dr. Manuel Aparicio Razo

Secretario: _____
M. C. Luis Eduardo Espinosa Maya

Vocal: _____
M. C. Berenice Fernández Carreón

Lugar donde se realizó la tesis:

Laboratorio de Robótica del Edificio de Posgrado de la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

Agradecimientos

En el momento en que pienses en rendirte, piensa en la razón por la que aguantaste tanto tiempo

Agradezco a la vida misma, que constantemente nos enseña que es un desastre bien pensado. Nos recuerda que jamás tendremos el control total de lo que deseamos y que el cambio de perspectiva es una constante inevitable. Nos enseña a sufrir, amar, disfrutar y odiar en momentos inesperados; y con ello aprendemos a fluir a través de ella, aceptando sus contradicciones y aprendiendo a vivir.

Un enorme agradecimiento a todos los amigos y maestros de vida que me han enseñado a cambiar mi punto de vista, y que a veces, una charla con alguien que no considerabas cercano puede marcar una diferencia profunda. Muchos de ellos se han vuelto parte de mí a través de las lecciones que me han compartido día a día.

Así como también agradezco a todos los personajes reales y de ficción que han sido fuente de inspiración: Cristiano Ronaldo, el Ciclista Sin Licencia, All Might, Spiderman, Maestro Oogway, Meruem, Yondu, Lemillion, Kafka, Simone, Farid, Newton, Tesla, el Gigante de Hierro, Nietzsche, Einstein, Camus, entre otros. A través de sus historias y enseñanzas, me han recordado que no debemos rendirnos, que siempre hay esperanza, y que la vida misma no tiene sentido, nosotros lo hacemos.

Agradezco de manera especial a mi asesor de tesis, el Dr. Pablo Sánchez Sánchez, por su colaboración, paciencia y dedicación durante todo el desarrollo de este trabajo. Su guía y firmeza fueron esenciales para mi proceso de investigación y entendimiento de los temas involucrados.

De igual forma, agradezco profundamente a mis sinodales: el Dr. Aparicio Razo Manuel, el M. C. Espinosa Maya Luis Eduardo y la M. C. Fernández Carreón Berenice, por sus valiosas sugerencias, comentarios y por formar parte de esta etapa tan importante en mi vida académica.

Juan de Dios Hernández Ortega

Dedicatoria

*A mis padres, hermanos, amigos, profesores,
guías,. . . en pocas palabras a todos*

Índice general

Hoja de firmas	III
Agradecimientos	V
Dedicatoria	VII
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento general del problema	1
1.1.1. Contexto y relevancia del estudio	1
1.1.2. Motivación	2
1.1.3. Objetivo general y específicos	2
1.1.3.1. Objetivo general	2
1.1.3.2. Objetivos particulares	3
1.1.4. Hipótesis	3
1.1.5. Alcances	3
1.2. Fundamentos teóricos	4
1.2.1. Descripción física del sistema	4
1.2.2. Modelado dinámico mediante Euler–Lagrange	4
1.2.3. Características dinámicas del sistema	5
1.2.4. Diseño conceptual del sistema	5
1.2.5. Simulación y control	5
1.3. Formulación del problema	6
1.3.1. Limitaciones actuales en el modelado del sistema	6
1.3.2. Justificación del uso de simulación en Matlab®	7
1.4. Estructura de la tesis	8
2. Fundamentos Matemáticos	9
2.1. Notaciones y definiciones	9
2.1.1. Vectores	10
2.1.2. Producto de vectores	10
2.1.3. Norma euclidiana	11
2.1.4. Valores propios	14
2.1.5. Norma espectral	15
2.1.6. Espacios de funciones	16
2.1.6.1. Norma $\mathcal{L}_2$	17

2.2.	Estabilidad en el sentido de Lyapunov	18
2.2.1.	Equilibrio	19
2.2.2.	Estabilidad	20
2.2.3.	Estabilidad asintótica	20
2.2.4.	Estabilidad asintótica global	21
2.2.5.	Estabilidad exponencial global	21
2.2.6.	Inestabilidad	21
2.2.7.	Función candidata de Lyapunov	22
2.2.8.	Derivada de una función candidata de Lyapunov	22
2.2.9.	Método directo de Lyapunov	23
2.2.9.1.	Estabilidad	23
2.2.9.2.	Estabilidad y acotamiento de las soluciones	23
2.2.9.3.	Estabilidad asintótica global	24
2.2.10.	Principio de invarianza de LaSalle	24
3.	Modelado Dinámico	25
3.1.	Modelado Dinámico del Sistema Experimental	26
3.1.1.	Metodología de Euler–Lagrange	26
3.1.2.	Modelado del momento de inercia del sistema péndulo–rueda inercial . . .	33
3.1.2.1.	Momento de inercia del péndulo	34
3.1.2.2.	Momento de inercia de la rueda inercial:	35
3.1.3.	Modelo dinámico con actuador	36
3.1.4.	Modelo dinámico completo	38
3.2.	Diseño del Control y Análisis de Estabilidad	39
3.2.1.	Análisis de estabilidad	40
3.3.	Observador	44
4.	Resultados de Simulación	45
4.1.	Configuración del sistema	45
4.2.	Bloque del sistema	48
4.3.	Validación de Controladores Clásicos	50
4.3.1.	Control PD	50
4.3.2.	Control PID	54
4.3.3.	Índice de desempeño	57
	Conclusiones	59
A.	Dibujo técnico	57
A.1.	Péndulo invertido con rueda inercial (ensamble)	58
A.2.	Rueda inercial	59
A.3.	Base de rodamiento	60
A.4.	Eje del péndulo	61

Índice de figuras

3.1. Esquema del sistema péndulo con rueda inercial.	26
3.2. Relaciones geométricas para calcular las alturas.	29
3.3. Momento inercial de una varilla sobre un extremo.	34
3.4. Momento inercial de la rueda inercial.	35
4.1. Esquema del sistema péndulo invertido con rueda inercial.	46
4.2. Diagrama a bloques del sistema	47
4.3. Diagrama de bloques del sistema en Simulink	48
4.4. Representación del sistema en Simulink	49
4.5. Simulador del sistema en Simulink	49
4.6. Diagrama a bloques de la función Control PD en Simulink	51
4.7. Posición en radianes descrita por el péndulo	51
4.8. Velocidad estimada por el Observador	52
4.9. Par proporcionado por el control	53
4.10. Error de posición	53
4.11. Diagrama a bloques de la función Control PID en Simulink	54
4.12. Posición descrita por el péndulo usando el control PID	55
4.13. Velocidad estimada por el Observador	55
4.14. Par proporcionado por el control	56
4.15. Error de posición	56
4.16. Posiciones usando el control PD (—) y el PID (- - -)	57
4.17. Índice de desempeño	58
A.1. Péndulo Invertido con Rueda Inercial	57

Índice de tablas

4.1. Parámetros físicos del sistema péndulo invertido con rueda inercial.	45
4.2. Posiciones del sistema.	47
4.3. Ganancias del controlador PD con compensación gravitacional.	50
4.4. Ganancias del observador de Nicosia.	52
4.5. Ganancia integral para el controlador PID con compensación gravitacional.	54

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo establece el marco conceptual y metodológico que fundamenta el desarrollo de la presente investigación. Se describe el contexto científico y tecnológico de los sistemas de control aplicados a péndulos invertidos, con énfasis en el péndulo invertido con rueda inercial. Asimismo, se plantea el problema de estudio, se definen los objetivos, la hipótesis y los alcances del trabajo, y se exponen los principios teóricos que respaldan la propuesta. Esta base inicial permite entender la motivación del estudio, su pertinencia técnica y su contribución potencial en el campo del modelado y control de sistemas dinámicos no lineales.

1.1. Planteamiento general del problema

A continuación, se presenta el planteamiento general del problema que da origen a esta tesis. Para ello, se analiza el estado actual del estudio y control de sistemas tipo péndulo invertido con rueda inercial. Se discute su relevancia en la investigación de sistemas dinámicos no lineales y en aplicaciones educativas y de robótica, así como las principales limitaciones que enfrenta su modelado y control. Esta sección proporciona el punto de partida necesario para comprender la motivación, los objetivos y el enfoque metodológico adoptado en este trabajo.

1.1.1. Contexto y relevancia del estudio

El estudio de sistemas dinámicos no lineales como el **péndulo invertido** ha cobrado una gran relevancia en el ámbito del control automático, tanto por su valor pedagógico como por su aplicabilidad en problemas reales de ingeniería. En particular, las configuraciones que incorporan una **rueda inercial** como mecanismo de actuación representan un desafío interesante desde el punto de vista del modelado, análisis y diseño de leyes de control, debido a la complejidad introducida por el acoplamiento dinámico entre la rueda y el brazo del péndulo [1].

Este tipo de sistemas es ampliamente utilizado como plataforma experimental para validar estrategias de control, probar algoritmos de identificación y explorar fenómenos inherentes a sistemas inestables y subactuados. Además, su estudio permite desarrollar habilidades analíticas y prácticas en el diseño de controladores para sistemas no lineales, lo cual es fundamental en aplicaciones como la robótica, la estabilización de vehículos autónomos y el desarrollo de mecanismos de balanceo dinámico [2].

En este contexto, la presente tesis se centra en el **diseño del control y el modelado dinámico** para un péndulo invertido con rueda inercial. Se plantea la obtención de un modelo matemático que describa con fidelidad el comportamiento del sistema, así como la implementación de técnicas de control que garanticen su estabilización y respuesta deseada. La validación de las propuestas se realiza a través de simulaciones que permiten analizar el desempeño del sistema bajo diferentes condiciones de operación, lo cual refuerza la pertinencia y aplicabilidad de este estudio dentro del campo del control de sistemas dinámicos.

1.1.2. Motivación

El **péndulo invertido con rueda inercial** constituye un sistema representativo dentro del estudio del control de sistemas dinámicos no lineales, especialmente por su carácter subactuado y su inherente inestabilidad en la posición de equilibrio superior. Este tipo de sistema resulta ideal para poner en práctica técnicas avanzadas de modelado y diseño de controladores, debido a la complejidad de su dinámica y a los retos que impone su estabilización [3].

La motivación principal de este trabajo radica en la posibilidad de emplear este sistema como plataforma de análisis para probar métodos de control que garanticen estabilidad y buen desempeño ante perturbaciones y condiciones iniciales adversas. Su análisis no sólo permite comprender fenómenos físicos fundamentales en sistemas mecánicos, sino también desarrollar habilidades en la formulación matemática de modelos dinámicos, en la sintonización de controladores y en la interpretación de respuestas transitorias y en régimen permanente.

Además, el estudio del péndulo invertido con rueda inercial tiene aplicaciones relevantes en robótica, vehículos autónomos, sistemas de balanceo dinámico y mecanismos de estabilización, lo que refuerza la utilidad práctica de la investigación.

Abordar su control desde una perspectiva sistemática, mediante el diseño y simulación de modelos matemáticos precisos, representa un paso importante en la formación de soluciones robustas para sistemas complejos y no lineales.

Esta tesis busca contribuir al análisis riguroso de este tipo de sistemas, mediante la formulación del modelo dinámico y la implementación del control basado en simulaciones, evaluando su eficacia a través del análisis del comportamiento del sistema ante diferentes escenarios de operación.

1.1.3. Objetivo general y específicos

Esta sección presenta el propósito central de la investigación, así como los objetivos específicos que estructuran y delimitan las acciones necesarias para alcanzarlo. El objetivo general define la meta principal del estudio, mientras que los objetivos particulares detallan las etapas fundamentales que guían el desarrollo del trabajo de manera sistemática y coherente.

1.1.3.1. Objetivo general

Desarrollar un modelo matemático del sistema **péndulo invertido con rueda inercial** mediante el formalismo de Euler-Lagrange, y la implementación del control que permita su estabilización,

evaluando el desempeño del sistema mediante simulaciones numéricas en **Matlab**[®] y diseño mecánico en **SolidWorks**[®].

1.1.3.2. Objetivos particulares

- Formular el modelo dinámico completo del péndulo invertido con rueda inercial utilizando el enfoque de Euler–Lagrange.
- Realizar la comprobación de estabilidad usando la teoría de Lyapunov.
- Diseñar e implementar el sistema mecánico en un entorno de modelado tridimensional utilizando el software de diseño asistido por computadora **SolidWorks**[®].
- Desarrollar un entorno de simulación en **Matlab**[®] que permita evaluar el comportamiento dinámico del sistema bajo distintas condiciones de operación, integrando su funcionamiento con el entorno **SimMechanics**[®] para la representación física del modelo.
- Diseñar y validar el control que permita la estabilización del sistema en su posición de equilibrio inestable.
- Analizar el desempeño del sistema mediante el uso del índice de desempeño basado en la norma $\mathcal{L}_2$.

1.1.4. Hipótesis

La formulación del modelo dinámico del **péndulo invertido con rueda inercial** mediante el formalismo de Euler–Lagrange, combinada con el diseño e implementación de estrategias de control adecuadas, permite lograr la estabilización eficiente del sistema en su posición de equilibrio inestable.

Esta hipótesis se valida mediante simulaciones numéricas en **Matlab**[®], en las que se espera observar un comportamiento dinámico estable, con buen desempeño transitorio y en régimen permanente, bajo diferentes condiciones iniciales y parámetros físicos.

1.1.5. Alcances

Esta subsección delimita el alcance del trabajo de investigación, enmarcado en el modelado y control del **péndulo invertido con rueda inercial**, considerando únicamente su análisis y validación mediante simulación computacional. Se describen las acciones clave que estructuran el desarrollo del modelo matemático y el control, sin contemplar la implementación física del sistema.

- **Modelado dinámico:** Formulación del modelo matemático completo del sistema mediante el formalismo de Euler–Lagrange, considerando una aproximación inicial para el cálculo del momento de inercia de la rueda, sin un análisis detallado del diseño estructural.
- **Diseño CAD:** Representación tridimensional del sistema en SolidWorks, con fines ilustrativos y de soporte para la interpretación geométrica del modelo, sin fines de manufactura ni verificación experimental.
- **Simulación y control:** Implementación del modelo en un entorno de simulación en **Matlab®**, donde se diseñan y validan estrategias de control para estabilizar el sistema en su posición de equilibrio inestable.
- **Evaluación del desempeño:** Análisis del comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones iniciales, verificando estabilidad, respuesta transitoria y error en régimen permanente, todo dentro del entorno de simulación computacional.

1.2. Fundamentos teóricos

En esta sección se presentan los fundamentos teóricos que sustentan el desarrollo del modelo dinámico y el diseño del sistema de control para el **péndulo invertido con rueda inercial**. Se describen los principios físicos del sistema, las ecuaciones que rigen su comportamiento dinámico y las metodologías empleadas para su estabilización. Este marco conceptual constituye la base sobre la cual se formula la propuesta metodológica desarrollada en los capítulos posteriores.

1.2.1. Descripción física del sistema

El sistema en estudio consiste en un péndulo invertido acoplado a una rueda inercial montada en su extremo superior. La rueda es capaz de girar en un plano perpendicular al plano de oscilación del péndulo, y actúa como elemento de control a través de la aplicación de un par motor. Este tipo de sistema se considera subactuado, ya que presenta más grados de libertad que actuadores disponibles [4].

La relevancia de este sistema radica en su capacidad para representar dinámicas inestables propias de múltiples aplicaciones reales, como vehículos autónomos, robots bípedos y mecanismos de balanceo dinámico. Su análisis permite explorar técnicas avanzadas de control para sistemas no lineales, con énfasis en estrategias de estabilización alrededor del punto de equilibrio inestable.

1.2.2. Modelado dinámico mediante Euler–Lagrange

Para describir el comportamiento del sistema, se emplea el formalismo de Euler–Lagrange, ampliamente utilizado en el análisis de sistemas mecánicos. El modelo dinámico se deriva a partir de la definición de las energías cinética y potencial del sistema, considerando como variables generalizadas el ángulo del péndulo q_1 y el ángulo de la rueda q_2 .

La energía cinética total se compone de dos términos: la energía del brazo del péndulo y la energía rotacional de la rueda. La energía potencial depende únicamente de la posición del centro de masa del péndulo respecto al campo gravitacional. Aplicando la ecuación general de Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = \tau, \quad (1.1)$$

donde $q \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ representa las coordenadas generalizadas, $\tau \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ representa las fuerzas generalizadas, $\mathcal{D}(\dot{q})$ es la energía disipativa del sistema, $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ es el lagrangiano del sistema, definido como la diferencia entre la energía cinética $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ y la energía potencial $\mathcal{U}(q)$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q). \quad (1.2)$$

1.2.3. Características dinámicas del sistema

El sistema presenta un punto de equilibrio inestable cuando el péndulo se encuentra en posición vertical hacia arriba. En ausencia de control, cualquier perturbación induce oscilaciones que eventualmente llevan al sistema fuera del equilibrio. Esta sensibilidad justifica la necesidad de implementar mecanismos de control que garanticen estabilidad, incluso ante condiciones iniciales adversas o perturbaciones externas. Además, el acoplamiento dinámico entre el brazo del péndulo y la rueda introduce términos cruzados en las ecuaciones del movimiento, lo que incrementa la complejidad del análisis y del diseño del controlador.

1.2.4. Diseño conceptual del sistema

Con el propósito de representar el sistema mecánico de forma precisa, se propone el diseño tridimensional del péndulo invertido con rueda inercial mediante el software de diseño asistido por computadora **SolidWorks**[®]. Este diseño no tiene fines de construcción física, sino que sirve como soporte visual y como referencia geométrica para la validación del modelo dinámico.

Los parámetros geométricos y físicos del modelo se estiman a partir del diseño CAD, lo cual permite realizar una aproximación razonable del momento de inercia de la rueda y del centro de masa del sistema, facilitando la implementación del modelo en el entorno de simulación.

1.2.5. Simulación y control

El modelo dinámico obtenido se implementa en el entorno **Matlab**[®] para llevar a cabo simulaciones del comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones iniciales y estrategias de control. El objetivo principal es estabilizar el péndulo en su posición de equilibrio vertical mediante la aplicación de un par motor en la rueda inercial.

Se evalúan diferentes esquemas de control clásico, como el control **proporcional–derivativo (PD)** y **proporcional–integral–derivativo (PID)**, con el propósito de analizar su capacidad para suprimir oscilaciones, reducir el tiempo de establecimiento y minimizar el error en régimen permanente.

La simulación numérica permite observar de forma segura y controlada el comportamiento del sistema ante variaciones de parámetros y perturbaciones externas, lo cual constituye una herramienta fundamental para validar la efectividad de las estrategias propuestas sin recurrir a una implementación física.

1.3. Formulación del problema

El péndulo invertido con rueda inercial constituye un sistema dinámico representativo en el estudio de controladores aplicados a sistemas inestables y subactuados. Su análisis es de particular interés por su capacidad para modelar comportamientos complejos que se presentan en aplicaciones de robótica, mecanismos de balanceo, vehículos autónomos y plataformas educativas. No obstante, la naturaleza no lineal del sistema, sumada a su inestabilidad inherente, complica tanto su modelado dinámico como el diseño de estrategias de control eficaces.

A lo largo de la literatura se han propuesto múltiples enfoques para estabilizar este tipo de sistemas, que van desde técnicas de control lineal clásico hasta esquemas más avanzados como el control óptimo, adaptativo o no lineal. Sin embargo, la mayoría de estas metodologías requieren modelos matemáticos bien definidos, y su desempeño se ve afectado por las incertidumbres en los parámetros físicos del sistema, tales como el momento de inercia de la rueda, que a menudo se estima mediante aproximaciones simplificadas.

El uso del formalismo de Euler–Lagrange permite obtener un modelo dinámico detallado del sistema a partir de consideraciones energéticas, sin necesidad de linealizaciones previas. Este enfoque, junto con simulaciones numéricas en **Matlab**[®], facilita la implementación y evaluación de estrategias de control como los esquemas **PD** y **PID**, que ofrecen un balance adecuado entre simplicidad, robustez y desempeño computacional.

A pesar de los avances en el análisis de sistemas no lineales, persisten retos importantes relacionados con la sintonización de parámetros de control, la sensibilidad ante perturbaciones externas y la validación del desempeño del sistema en un entorno exclusivamente simulado. Estas limitaciones son especialmente relevantes cuando el modelo se utiliza como base para el desarrollo conceptual de un prototipo físico, sin llegar a su construcción experimental.

En este contexto, el presente estudio se orienta al desarrollo de un modelo dinámico del sistema **péndulo invertido con rueda inercial**, formulado mediante técnicas analíticas basadas en energía mecánica, y a la implementación de estrategias de control dentro de un entorno de simulación computacional. El objetivo es lograr una estabilización confiable del sistema en su posición de equilibrio inestable, considerando aproximaciones realistas para los parámetros físicos y sin recurrir a validación experimental directa.

1.3.1. Limitaciones actuales en el modelado del sistema

El péndulo invertido con rueda inercial representa un sistema prototípico en el estudio de controladores aplicados a dinámicas no lineales e inestables. Su análisis y modelado son fundamentales para validar estrategias de control en sistemas subactuados, con aplicaciones relevantes en

el campo de la robótica, mecanismos de balanceo dinámico y plataformas educativas. No obstante, la complejidad en su comportamiento dinámico y la sensibilidad a las condiciones iniciales dificultan su modelado preciso, lo que representa un reto relevante para la comunidad académica.

A lo largo del tiempo se han propuesto diversos enfoques para modelar este tipo de sistemas, desde técnicas basadas en linealización hasta modelos exactos formulados mediante métodos lagrangianos o newtonianos. Sin embargo, muchos de estos modelos suponen parámetros ideales o requieren una caracterización precisa de magnitudes como el momento de inercia, lo cual no siempre es viable en etapas tempranas del diseño o en desarrollos puramente simulados.

Las técnicas analíticas como el formalismo de Euler–Lagrange han demostrado ser herramientas eficaces para derivar modelos dinámicos estructurados, al partir de las energías cinética y potencial del sistema. Este enfoque permite representar con mayor fidelidad la interacción entre el péndulo y la rueda inercial, aunque conlleva ecuaciones no lineales acopladas que requieren soluciones numéricas para su evaluación.

A pesar de los avances en herramientas de simulación y diseño de controladores, subsisten limitaciones en la implementación eficiente de modelos precisos que contemplen la totalidad de las no linealidades del sistema. Factores como la estimación aproximada del momento de inercia, la falta de validación experimental y las simplificaciones geométricas afectan directamente la precisión y estabilidad del análisis dinámico.

En este contexto, el presente trabajo se orienta al desarrollo de un modelo dinámico robusto del sistema, formulado mediante técnicas energéticas, y a la implementación del control en un entorno de simulación. Se busca establecer un marco metodológico confiable y computacionalmente eficiente que permita evaluar el comportamiento del sistema bajo distintos escenarios de operación sin necesidad de realizar una construcción física del prototipo.

1.3.2. Justificación del uso de simulación en Matlab®

La implementación del modelo dinámico del péndulo invertido con rueda inercial en un entorno de simulación como **Matlab**® permite evaluar con precisión el desempeño del sistema bajo diferentes estrategias de control, sin depender de una implementación física.

Esta decisión metodológica se justifica por la flexibilidad, capacidad analítica y potencia computacional que ofrece **Matlab**® para resolver ecuaciones diferenciales no lineales y realizar análisis en tiempo continuo y discreto.

A diferencia de otras herramientas orientadas a la simulación genérica o al modelado gráfico, **Matlab**® permite estructurar directamente las ecuaciones derivadas mediante el formalismo de Euler–Lagrange, integrarlas numéricamente con condiciones específicas y analizar los resultados de forma controlada y reproducible.

Además, el uso de **Matlab**® facilita la implementación y comparación de diferentes esquemas de control, como los controladores **proporcional-derivativos (PD)** o **proporcionales-integrales-derivativos (PID)**, así como la evaluación de métricas como el tiempo de establecimiento, el sobreimpulso o el error en régimen permanente.

En síntesis, el uso de **Matlab**[®] como entorno de simulación permite abordar de manera eficaz los desafíos asociados al modelado y control del péndulo invertido con rueda inercial, proporcionando una plataforma robusta, adaptable y precisa, adecuada tanto para la validación numérica como para el análisis comparativo de estrategias de control.

1.4. Estructura de la tesis

La presente tesis se estructura en cinco capítulos, cada uno de los cuales aborda un aspecto fundamental relacionado con el modelado, análisis y control del sistema **péndulo invertido con rueda inercial**, empleando formulaciones dinámicas y herramientas de simulación.

- El **Capítulo 1** presenta el planteamiento general del problema, la motivación del estudio, los objetivos, la hipótesis, así como los fundamentos teóricos que sustentan el análisis dinámico del sistema.
- El **Capítulo 2** aborda los fundamentos matemáticos necesarios para la formulación del modelo, incluyendo el formalismo de Euler-Lagrange, sistemas de ecuaciones no lineales, y técnicas de linealización local.
- El **Capítulo 3** se enfoca en el desarrollo del modelo dinámico del péndulo invertido con rueda inercial, así como en el análisis de sus condiciones de equilibrio, estabilidad y comportamiento sin control.
- El **Capítulo 4** presenta y analiza las estrategias de control aplicadas al sistema, enfocándose exclusivamente en los controladores **PD** y **PID**. Se detalla el proceso de diseño, implementación y ajuste de dichos controladores en un entorno de simulación desarrollado en **Matlab**[®]. Asimismo, se exponen los resultados obtenidos y se realiza un análisis comparativo del desempeño dinámico del sistema bajo distintos escenarios de operación, condiciones iniciales y parámetros de control, complementado con la evaluación mediante el correspondiente **índice de desempeño**.

Capítulo 2

Fundamentos Matemáticos

Para llevar a cabo el análisis y diseño de estrategias de control aplicadas al **péndulo invertido con rueda inercial**, resulta indispensable establecer un marco teórico sólido, sustentado en herramientas matemáticas rigurosas. En este capítulo se exponen los conceptos fundamentales que servirán como base para la formulación del modelo dinámico del sistema, el desarrollo de controladores adecuados y la evaluación formal de su estabilidad.

Se presenta una revisión detallada del formalismo de Euler–Lagrange para sistemas mecánicos, los principios de estabilidad de Lyapunov, así como otros elementos clave de la teoría de control no lineal que serán utilizados a lo largo del trabajo. Estos fundamentos matemáticos constituyen el soporte analítico necesario para abordar con precisión los retos que plantea el comportamiento subactuado e inestable del sistema bajo estudio.

2.1. Notaciones y definiciones

A lo largo de este trabajo se utilizarán diversas notaciones matemáticas que permiten una formulación rigurosa del modelo dinámico y del diseño de controladores. Se adoptan convenciones consistentes con las empleadas en la literatura especializada en sistemas mecánicos y teoría de control, como se presenta en [5].

El conjunto de los números reales se denota por $\mathbb{R}$. De forma particular, se hace uso del subconjunto de los reales no negativos, representado por $\mathbb{R}_+$, definido formalmente como:

$$\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}. \quad (2.1)$$

Para representar el valor absoluto de un número real $x \in \mathbb{R}$, se emplea la notación $|x|$, que se define como:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Asimismo, se emplearán notaciones adicionales relacionadas con espacios vectoriales, normas, transpuestas y derivadas, las cuales serán introducidas conforme se requieran en los desarrollos subsecuentes. Todas estas definiciones están en concordancia con las utilizadas en el análisis y control de sistemas mecánicos multivariables, como los tratados en [5].

2.1.1. Vectores

En matemáticas, un **vector** es un elemento de un espacio vectorial, formalmente definido como una clase de equivalencia de segmentos dirigidos que comparten la misma magnitud y dirección. Un **vector fijo** puede visualizarse como un segmento de recta orientado en el espacio euclidiano, caracterizado por dos propiedades fundamentales: su **magnitud** y su **dirección**. La magnitud, también denominada **norma** o **módulo**, representa la longitud del segmento dirigido y es siempre un número real no negativo. La dirección está determinada por la orientación del vector en el espacio, definida por la relación entre sus componentes en un sistema de coordenadas cartesiano.

En el ámbito de la física, los vectores se utilizan para representar **magnitudes vectoriales**, es decir, cantidades que requieren no solo un valor numérico (**módulo**), sino también una **dirección** y un **sentido** para su completa especificación. Un ejemplo representativo es la **fuerza**, cuya acción depende tanto de la intensidad como de la dirección y el sentido en los que se aplica, lo cual justifica su modelado mediante vectores.

Para formalizar el espacio en el que los vectores operan de forma análoga a los escalares del conjunto $\mathbb{R}$, se introduce el **espacio euclidiano real de dimensión n** , denotado como $\mathbb{R}^n$. En este contexto, un vector $x \in \mathbb{R}^n$ se representa como una **n -tupla de números reales** organizada en forma de columna:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

donde $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ son las **componentes** del vector x .

La **transposición** de un vector corresponde a la operación mediante la cual un vector columna se transforma en un vector fila, o viceversa. Dada la notación x^T , se define como:

$$x^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]. \quad (2.4)$$

2.1.2. Producto de vectores

El producto entre vectores es una operación fundamental en el álgebra lineal, cuya forma específica depende del contexto en que se aplique. Entre las variantes más relevantes se encuentran el **producto interno** y el **producto cruzado**. En el presente trabajo se emplea únicamente el **producto interno**, por su utilidad en el análisis de estabilidad y formulación energética del modelo dinámico.

Dados dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, el producto interno se define como:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Esta operación corresponde a una combinación lineal de las componentes de ambos vectores, donde uno de ellos se expresa en su forma transpuesta para garantizar la compatibilidad en la multiplicación matricial, resultando en un escalar real.

El producto interno cumple con propiedades algebraicas esenciales, entre las cuales destacan:

- **Conmutatividad:** $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- **Distributividad:** $\mathbf{x}^T (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y} + \mathbf{x}^T \mathbf{z}$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Estas propiedades se derivan directamente de la definición algebraica del producto interno, y su validez está ampliamente documentada en la literatura de álgebra lineal aplicada al análisis de sistemas dinámicos, como se expone en [5].

2.1.3. Norma euclidiana

La **norma euclidiana** es una medida escalar que cuantifica la magnitud de un vector en un espacio euclidiano, y se fundamenta en el teorema de Pitágoras. Para un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, su norma euclidiana, denotada por $\|\mathbf{x}\|$, se define como:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}. \quad (2.6)$$

Dado que la raíz cuadrada se define sobre los reales como la función que devuelve el valor no negativo, se garantiza que la norma de cualquier vector es siempre un número real mayor o igual que cero.

La norma euclidiana posee propiedades fundamentales que la caracterizan como una función de norma en $\mathbb{R}^n$:

- **Positividad:** $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, y $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

- **Homogeneidad:** Para todo escalar $a \in \mathbb{R}$ y todo vector $x \in \mathbb{R}^n$:

$$||ax|| = |a| \cdot ||x||. \quad (2.7)$$

- **Desigualdad triangular:** Para todos los vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||. \quad (2.8)$$

- **Desigualdad de Cauchy–Schwarz:** Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|x^T y| \leq ||x|| \cdot ||y||. \quad (2.9)$$

Estas propiedades pueden demostrarse a partir de la definición del producto interno y del desarrollo algebraico correspondiente. Su cumplimiento garantiza que la norma euclidiana satisface los axiomas que definen una función de norma, y su utilidad es fundamental en el análisis de estabilidad y desempeño de sistemas dinámicos, como los que se abordan en esta tesis.

La transposición es una operación fundamental en álgebra matricial, ya que permite definir conceptos como la simetría de una matriz, así como establecer propiedades esenciales en el análisis de sistemas lineales y no lineales.

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se dice **simétrica** si cumple que $A^T = A$, lo cual solo es posible cuando $n = m$, es decir, cuando A es cuadrada. Por otro lado, si $A^T = -A$, se dice que A es **antisimétrica**.

Entre las propiedades más importantes de la transposición se encuentran las siguientes:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Estas propiedades son ampliamente utilizadas en la manipulación de expresiones matriciales, especialmente en derivaciones de modelos dinámicos mediante el formalismo de Euler–Lagrange, donde las transpuestas de matrices y vectores desempeñan un papel clave en la formulación del lagrangiano y en la linealización del sistema.

Adicionalmente, se empleará la notación $\text{transpose}(\cdot)$ como función que devuelve la transpuesta del argumento, en concordancia con las convenciones del entorno de simulación **MATLAB**[®], donde esta operación es esencial para la correcta implementación de algoritmos de control y simulación de modelos dinámicos.

Estas propiedades del producto matricial son esenciales en la formulación y análisis de sistemas dinámicos, ya que permiten estructurar las ecuaciones de estado, representar cambios de coordenadas y definir operadores lineales de forma compacta y algebraicamente manipulable.

En el contexto del modelado de sistemas físicos, como el **péndulo invertido con rueda inercial**, la multiplicación de matrices resulta indispensable para expresar relaciones cinemáticas y dinámicas, así como para implementar algoritmos de simulación y control en entornos computacionales como **MATLAB**[®]. En particular, la correcta interpretación del orden y la dimensión de las matrices garantiza la consistencia de los modelos matemáticos y la estabilidad numérica de los procedimientos empleados.

A lo largo de esta tesis, se utilizará de forma intensiva la multiplicación de matrices tanto en la obtención del modelo mediante el formalismo de Euler–Lagrange como en la construcción de las leyes de control, donde se requerirá operar entre vectores de estado, matrices de inercia, matrices de entrada y matrices de ganancia.

Esta forma de producto mixto $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ es ampliamente utilizada en formulaciones de energía, expresiones cuadráticas y evaluación de índices de desempeño, especialmente en el análisis de sistemas dinámicos y teoría de control. En particular, permite representar de manera compacta una combinación bilineal entre dos vectores y una matriz intermedia, dando lugar a una expresión escalar.

Su interpretación puede entenderse como una operación en tres etapas: primero, se aplica la matriz $\mathbf{A}$ al vector $\mathbf{y}$, obteniendo un nuevo vector en $\mathbb{R}^n$; luego, se calcula el producto interno entre este resultado y el vector $\mathbf{x}$, dando lugar a un valor escalar:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \left(\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{A} \mathbf{y}) \right) \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Esta notación es común en la formulación de funciones cuadráticas asociadas a la energía cinética, en la evaluación de funciones de Lyapunov, y en el cálculo de señales de control donde se requiere una expresión escalar dependiente de múltiples variables. Su correcto uso es esencial para garantizar la compatibilidad dimensional y la validez algebraica de las expresiones derivadas en el modelado y control de sistemas físicos como el péndulo invertido con rueda inercial.

Estas clasificaciones de matrices resultan esenciales en el análisis y diseño de sistemas dinámicos, particularmente en la teoría de estabilidad de Lyapunov y en el diseño de leyes de control basadas en funciones cuadráticas. Las matrices definidas positivas garantizan propiedades deseables como la coercividad de funciones y la estabilidad asintótica, mientras que las matrices singulares y semidefinidas permiten identificar restricciones estructurales o degeneraciones del sistema.

En el caso específico del **péndulo invertido con rueda inercial**, varias de estas matrices, como la matriz de inercia, la matriz de ganancia y las matrices jacobianas, exhiben propiedades estructurales que pueden aprovecharse para simplificar el análisis y garantizar condiciones de estabilidad bajo esquemas de control adecuados.

Por esta razón, el conocimiento profundo de las propiedades algebraicas y geométricas de matrices particulares constituye una herramienta clave para abordar de manera rigurosa la modelación matemática y el diseño de controladores que serán desarrollados en los capítulos siguientes.

2.1.4. Valores propios

Los **valores propios** de una matriz cuadrada constituyen una herramienta fundamental en el análisis de sistemas lineales, ya que permiten caracterizar cómo una transformación lineal afecta a ciertos vectores especiales, denominados **vectores propios**, que mantienen su dirección tras la aplicación de dicha transformación.

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, los valores propios $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A)$ se definen como las soluciones de la ecuación característica:

$$\det(\lambda I - A) = 0, \quad (2.11)$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa la matriz identidad.

En general, los valores propios pueden ser reales o complejos, y su naturaleza depende de las propiedades estructurales de la matriz A . Si A es **simétrica**, es decir, si cumple $A = A^T$, entonces todos sus valores propios son reales. Además, se verifica la siguiente desigualdad fundamental conocida como el **teorema de Rayleigh–Ritz**:

$$\lambda_{\max}(A) \|x\|^2 \geq x^T A x \geq \lambda_{\min}(A) \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.12)$$

donde $\lambda_{\max}(A)$ y $\lambda_{\min}(A)$ representan, respectivamente, el mayor y el menor valor propio de la matriz A .

El conocimiento de los valores propios es esencial para determinar propiedades dinámicas como la estabilidad, la respuesta transitoria y la resonancia de un sistema. En el caso de sistemas dinámicos representados por ecuaciones diferenciales lineales, los valores propios de la matriz del sistema determinan el comportamiento de las soluciones en el tiempo, razón por la cual son ampliamente utilizados en la teoría moderna de control y análisis de estabilidad de Lyapunov.

2.1.5. Norma espectral

La **norma espectral** de una matriz es una extensión natural del concepto de norma vectorial al espacio matricial, y proporciona una medida del "tamaño" de la matriz en función de sus valores propios. Esta norma resulta especialmente útil en el análisis de estabilidad, acondicionamiento y sensibilidad de sistemas dinámicos ante perturbaciones.

Para una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la norma espectral se define como:

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sigma_{\max}(A), \quad (2.13)$$

donde $\lambda_{\max}(A^T A)$ representa el valor propio máximo de la matriz simétrica $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. En el caso de que A sea invertible, se cumple que:

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\min_i |\lambda_i(A)|}. \quad (2.14)$$

Aunque la notación empleada para la norma espectral es la misma que para la norma euclidiana de un vector, la interpretación varía dependiendo del argumento: en el caso vectorial, se basa en la suma de los cuadrados de los componentes; mientras que en el caso matricial, depende del módulo de los valores propios.

Cuando $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz **simétrica y definida positiva**, es decir, si $A = A^T > 0$, la norma espectral cumple con las siguientes propiedades fundamentales:

- $\|A\| = 0$ si y solo si $A = 0$.
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, para toda $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- $\|aA\| = |a| \cdot \|A\|$, para todo escalar $a \in \mathbb{R}$.
- $\|A^T B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, para toda $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Adicionalmente, se cumplen las siguientes desigualdades relacionadas con la acción de una matriz sobre vectores:

- $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- $|y^T Ax| \leq \|A\| \cdot \|y\| \cdot \|x\|$, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Estas propiedades hacen de la norma espectral una herramienta esencial para acotar errores en simulaciones numéricas, evaluar el comportamiento de operadores lineales, y analizar la estabilidad y sensibilidad de modelos dinámicos, como los que se derivan del **péndulo invertido con rueda inercial** en esta tesis.

2.1.6. Espacios de funciones

Un **espacio de funciones** es un conjunto estructurado de funciones que satisfacen propiedades específicas sobre un dominio dado. Este concepto extiende la noción de espacio vectorial al ámbito funcional, permitiendo aplicar técnicas del álgebra lineal y del análisis funcional al estudio de operadores, trayectorias de sistemas y señales de entrada-salida.

Sea una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se dice que f es **continua** si y sólo si cumple:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (2.15)$$

La continuidad implica que pequeñas variaciones en la entrada generan pequeñas variaciones en la salida. No obstante, ser continua no garantiza que la función sea derivable. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en todo $\mathbb{R}$, pero no es derivable en $x = 0$.

En el análisis de sistemas dinámicos, especialmente bajo el enfoque entrada-salida, adquieren especial relevancia los espacios $\mathcal{L}_2^n$ y $\mathcal{L}_\infty^n$, los cuales permiten caracterizar propiedades como la energía, la estabilidad y el desempeño de las señales que interactúan con el sistema.

El espacio $\mathcal{L}_2^n$ está conformado por todas las funciones continuas $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuya energía es finita, es decir, aquellas que cumplen:

$$\int_0^\infty f(t)^T f(t) dt = \int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt < \infty. \quad (2.16)$$

Este conjunto incluye señales cuadráticamente integrables, y se utiliza comúnmente para evaluar el desempeño energético del sistema.

Por otro lado, el espacio $\mathcal{L}_\infty^n$ incluye las funciones acotadas, es decir, aquellas cuya norma permanece limitada en todo instante de tiempo:

$$\sup_{t \geq 0} \|f(t)\| < \infty. \quad (2.17)$$

Estas funciones son esenciales para garantizar la existencia de soluciones acotadas en sistemas con entradas limitadas.

A lo largo de esta tesis, los espacios $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_\infty$ se emplearán para formular condiciones de estabilidad entrada-salida y para definir índices de desempeño que permitan evaluar cuantitativamente la respuesta del **péndulo invertido con rueda inercial** bajo distintas condiciones de control.

2.1.6.1. Norma $\mathcal{L}_2$

La norma $\mathcal{L}_2$ se define sobre el espacio de funciones $\mathcal{L}_2^n$, el cual está conformado por todas las funciones continuas $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuya energía total es finita, es decir:

$$\int_0^\infty f^T(t)f(t) dt = \int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt < \infty. \quad (2.18)$$

De esta forma, la norma $\mathcal{L}_2$ de una función $f(t)$ se expresa como:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt}. \quad (2.19)$$

La norma $\mathcal{L}_2$ cuantifica la **energía total** asociada a la señal $f(t)$ en el tiempo. Si $\|f\|_2$ es pequeña, significa que la señal posee baja energía o un error acumulado reducido.

En un sistema dinámico controlado, la norma $\mathcal{L}_2$ se aplica comúnmente al **error de seguimiento** definido como:

$$\tilde{q}(t) = q_d(t) - q(t), \quad (2.20)$$

donde $q_d(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ representa la trayectoria deseada y $q(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ la posición real del sistema. La norma $\mathcal{L}_2$ del error se obtiene entonces como:

$$\|\tilde{q}(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \tilde{q}^T(t)\tilde{q}(t) dt}. \quad (2.21)$$

Este valor cuantifica la **energía total del error** en el tiempo, es decir, cuánto se desvía el sistema de la referencia durante su respuesta transitoria. Cuanto menor sea $\|\tilde{q}(t)\|_2$, **mejor desempeño presenta el controlador**, ya que el error se atenúa con mayor rapidez y menor intensidad.

El **índice de desempeño**, basado en la norma $\mathcal{L}_2$, se emplea como herramienta para comparar distintos esquemas de control aplicados a un sistema. Dicho índice se define como:

$$J = \|\tilde{q}(t)\|_2^2 = \int_0^{t_f} \tilde{q}^T(t)\tilde{q}(t) dt, \quad (2.22)$$

donde t_f representa el **horizonte temporal de simulación**, es decir, el instante final del tiempo de simulación o el límite superior del intervalo temporal sobre el cual se evalúa el comportamiento del sistema o se calcula la integral de desempeño.

El índice J mide la energía acumulada del error de posición y permite evaluar la rapidez de convergencia al equilibrio, determinar la suavidad de la respuesta (sin oscilaciones excesivas) y comparar la eficiencia energética entre distintos controladores. Así, un valor bajo de J indica un **mejor desempeño dinámico** del controlador.

En el análisis de estabilidad del sistema controlado se propone una función candidata de Lyapunov de la forma:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) \geq 0, \quad (2.23)$$

cuya derivada temporal de V resulta:

$$\dot{V} \leq 0. \quad (2.24)$$

Esta condición implica que $\dot{q}(t) \in \mathcal{L}_2$, es decir, que la energía disipada por las velocidades es finita y, por lo tanto, el sistema es **asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov**.

La norma $\mathcal{L}_2$ constituye una métrica integral que cuantifica la energía del error de seguimiento en un sistema controlado. Permite evaluar cuantitativamente la calidad de la respuesta, comparar distintos controladores bajo un mismo criterio energético y relacionar la estabilidad teórica (Lyapunov) con la eficiencia práctica del control.

En consecuencia, el índice de desempeño basado en la norma $\mathcal{L}_2$ actúa como una **herramienta objetiva de evaluación y comparación** entre estrategias de control aplicadas a sistemas dinámicos, garantizando un análisis cuantitativo y consistente del desempeño.

2.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

En esta sección se presentan los conceptos fundamentales y resultados teóricos de la estabilidad en sistemas dinámicos, bajo el marco formal de la teoría de Lyapunov. Esta herramienta constituye uno de los pilares del análisis moderno de estabilidad, especialmente útil en sistemas no lineales donde la solución explícita de las ecuaciones diferenciales resulta impracticable.

Considérese un sistema dinámico de la forma:

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.25)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua. Se dice que el punto de equilibrio x_0 es **estable** si, para toda perturbación inicial suficientemente pequeña, la trayectoria del sistema permanece en un entorno de x_0 para todo tiempo futuro. Si además la solución tiende asintóticamente al equilibrio, se dice que x_0 es **estable asintóticamente**.

El estudio de estabilidad se puede extender al caso general de sistemas no autónomos descritos por:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (2.26)$$

donde $x(t)$ es la trayectoria del sistema, y f puede depender explícitamente del tiempo. Si f no depende de t , el sistema se denomina **autónomo**. Un caso particular se presenta cuando la dinámica se expresa como:

$$f(t, x(t)) = A(t)x(t) + u(t), \quad (2.27)$$

donde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz continua en t , y $u(t)$ es una entrada o perturbación externa. Si la función f es lineal respecto a x , el sistema se clasifica como **lineal**; de lo contrario, es **no lineal**.

La estabilidad en el sentido de Lyapunov se aborda principalmente mediante el llamado **segundo método de Lyapunov**, o **método directo**, el cual permite estudiar la estabilidad sin resolver la ecuación diferencial. Este enfoque consiste en construir una función escalar $V(x)$, denominada **función de Lyapunov**, que actúe como análogo a una *energía del sistema*. Si dicha función satisface ciertas condiciones, es posible concluir la estabilidad o inestabilidad del punto de equilibrio.

Este método será de gran utilidad en el análisis de estabilidad del **péndulo invertido con rueda inercial**, en tanto que el sistema posee comportamiento no lineal y condiciones de equilibrio inestables que deben ser estabilizadas mediante el diseño adecuado de leyes de control.

2.2.1. Equilibrio

Un sistema dinámico se encuentra en **equilibrio** cuando las fuerzas, influencias o entradas que actúan sobre él se compensan de forma que no inducen cambios en el estado del sistema a lo largo del tiempo. Formalmente, un punto $x_e \in \mathbb{R}^n$ se denomina **punto de equilibrio** del sistema descrito por la ecuación diferencial:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (2.28)$$

si satisface la condición:

$$f(t, x_e) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.29)$$

Es decir, si el sistema se inicia exactamente en el estado $x(0) = x_e$, entonces permanece en dicho estado para todo tiempo futuro, lo cual se expresa como:

$$x(t) = x_e, \quad \dot{x}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.30)$$

Esta condición implica que no hay evolución dinámica desde el punto de equilibrio. En general, un sistema puede poseer uno, varios o incluso infinitos puntos de equilibrio, dependiendo de la estructura de la función $f(t, x)$. También existen sistemas que no admiten ningún punto de equilibrio, como ocurre en ciertos sistemas no autónomos o en aquellos con entradas externas persistentes.

En el contexto del **péndulo invertido con rueda inercial**, el equilibrio corresponde a configuraciones en las que tanto el ángulo del péndulo como la velocidad angular de la rueda permanecen constantes, y las condiciones mecánicas del sistema se mantienen invariantes en el tiempo. En particular, el equilibrio superior (vertical invertido) es de tipo inestable y será el principal objeto de estabilización mediante técnicas de control.

2.2.2. Estabilidad

Un punto de equilibrio se considera **estable** en el sentido de Lyapunov si, para toda trayectoria que se inicie suficientemente cerca de dicho punto, el sistema permanece en su vecindad a lo largo del tiempo. Formalmente, el origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio estable si, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.31)$$

Esta definición implica que, ante perturbaciones iniciales suficientemente pequeñas, la trayectoria del sistema no se alejará del equilibrio. No obstante, esta condición no garantiza que la solución tienda al punto de equilibrio conforme $t \rightarrow \infty$.

2.2.3. Estabilidad asintótica

Se dice que el equilibrio es **asintóticamente estable** si, además de ser estable, las trayectorias que parten de su vecindad convergen hacia él con el paso del tiempo. Es decir, el origen $x = 0$ es un equilibrio asintóticamente estable si:

- Es estable en el sentido de Lyapunov.
- Existe $\delta' > 0$ tal que, si $\|x(0)\| < \delta'$, entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0. \quad (2.32)$$

Esta propiedad asegura que el sistema no solo permanece cerca del equilibrio, sino que eventualmente converge hacia él.

2.2.4. Estabilidad asintótica global

El equilibrio es **asintóticamente estable en forma global** si cualquier condición inicial, sin importar su magnitud, conduce a una trayectoria que converge al equilibrio. Formalmente, el origen $x = 0$ es asintóticamente estable globalmente si:

- Es estable.
- Satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n. \quad (2.33)$$

Esta propiedad implica que el conjunto de atracción del equilibrio abarca todo el espacio de estados $\mathbb{R}^n$.

2.2.5. Estabilidad exponencial global

La **estabilidad exponencial global** implica una convergencia rápida hacia el equilibrio, con una tasa controlada por una función exponencial decreciente. Se dice que el origen $x = 0$ es exponencialmente estable en forma global si existen constantes positivas $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que:

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n. \quad (2.34)$$

Esta forma de estabilidad es más fuerte que la estabilidad asintótica global, ya que proporciona una cota explícita para la rapidez de convergencia.

2.2.6. Inestabilidad

Un punto de equilibrio se considera **inestable** si no satisface la condición de estabilidad. Formalmente, el origen $x = 0$ es un equilibrio inestable si existe un $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, no se cumple que:

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.35)$$

Es decir, existen perturbaciones arbitrariamente pequeñas en la condición inicial que provocan que la trayectoria del sistema se aleje del equilibrio. La inestabilidad no necesariamente implica crecimiento ilimitado de la solución, pero sí la imposibilidad de garantizar su permanencia en la vecindad del equilibrio.

2.2.7. Función candidata de Lyapunov

Una **función candidata de Lyapunov** es una función escalar que permite analizar la estabilidad de un punto de equilibrio sin necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones diferenciales del sistema. Se utiliza ampliamente en el estudio de sistemas no lineales como una herramienta fundamental para establecer condiciones suficientes de estabilidad.

Sea el sistema dinámico:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (2.36)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial continua que describe la dinámica del sistema. Una función $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ se considera una función candidata de Lyapunov si cumple las siguientes condiciones:

- $V(t, x)$ es una función escalar, continua y continuamente diferenciable en t y x .
- $V(t, x)$ es **definida positiva**, es decir:

$$V(t, x) > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad V(t, 0) = 0. \quad (2.37)$$

- La derivada total de V a lo largo de las trayectorias del sistema es continua y puede evaluarse explícitamente.

En términos prácticos, la función candidata de Lyapunov proporciona una medida del **nivel de energía** del sistema, la cual debe ser positiva y decrecer a lo largo del tiempo para asegurar estabilidad.

2.2.8. Derivada de una función candidata de Lyapunov

La derivada total de la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo permite evaluar cómo varía esta función a lo largo de las trayectorias del sistema. Se define como:

$$\dot{V}(t, x) = \frac{d}{dt} V(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}^T f(t, x). \quad (2.38)$$

En el caso particular de un sistema autónomo, es decir, cuando la función f no depende explícitamente del tiempo y la función de Lyapunov V es también independiente de t , se tiene:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}^T f(x). \quad (2.39)$$

Esta derivada representa la tasa de variación de V a lo largo de las soluciones del sistema. Si $\dot{V}(x)$ es negativa definida, se concluye estabilidad asintótica del punto de equilibrio; si es negativa semidefinida, se establece estabilidad en el sentido de Lyapunov.

2.2.9. Método directo de Lyapunov

Con los conceptos previamente establecidos, es posible enunciar los teoremas fundamentales del análisis de estabilidad mediante el **método directo de Lyapunov**, el cual permite determinar la estabilidad de un sistema dinámico sin necesidad de resolver explícitamente sus ecuaciones diferenciales.

Este método se basa en la elección de una función candidata de Lyapunov $V(x)$ definida positiva y el análisis del signo de su derivada total $\dot{V}(x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema:

- Si $\dot{V}(x) \leq 0$ en un entorno del equilibrio, entonces el sistema es estable.
- Si $\dot{V}(x) < 0$ en un entorno del equilibrio, entonces el sistema es asintóticamente estable.
- Si existe una región en la cual $\dot{V}(x) > 0$, el sistema es inestable.

2.2.9.1. Estabilidad

El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio estable si existe una función de Lyapunov $V(t, x)$ tal que:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{al menos para } \|x\| \text{ suficientemente pequeño.} \quad (2.40)$$

Si $V(t, x)$ es definida positiva **globalmente**, entonces la estabilidad del equilibrio se extiende a todo el espacio de estados.

2.2.9.2. Estabilidad y acotamiento de las soluciones

El origen es un equilibrio estable y todas las trayectorias $x(t)$ del sistema están acotadas para cualquier condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$, si existe una función de Lyapunov $V(t, x)$ que cumple:

- $V(t, x)$ es definida positiva **globalmente**.
- $V(t, x)$ es radialmente no acotada.
- Su derivada temporal satisface:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.41)$$

Cabe aclarar que esta propiedad no debe confundirse con la estabilidad asintótica global, y el uso del término **estabilidad global** sin especificar convergencia puede resultar ambiguo o incorrecto.

2.2.9.3. Estabilidad asintótica global

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global si existe una función de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ tal que:

- Es definida positiva **globalmente**.
- Es radialmente no acotada.
- Su derivada temporal satisface:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) < 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \quad (2.42)$$

Estas condiciones garantizan no solo estabilidad asintótica global, sino también estabilidad uniforme en el sentido de Lyapunov.

2.2.10. Principio de invarianza de LaSalle

El **principio de invarianza de LaSalle** proporciona un criterio generalizado para demostrar estabilidad asintótica en sistemas autónomos, particularmente útil cuando la derivada de Lyapunov es solo semidefinida negativa. Considérese el sistema autónomo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.43)$$

donde $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio. Sea $V(\mathbf{x})$ una función candidata de Lyapunov que satisface:

- $V(\mathbf{x})$ es definida positiva **globalmente**.
- $V(\mathbf{x})$ es radialmente no acotada.
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Defínase el conjunto de invarianza:

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (2.44)$$

Si la única solución completa contenida en Ω es $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$, entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable en forma global.

Capítulo 3

Modelado Dinámico del Péndulo Invertido con Rueda Inercial

En el presente capítulo se desarrolla de manera rigurosa el modelo dinámico del sistema experimental compuesto por un péndulo invertido acoplado a una rueda inercial, utilizando como fundamento la formulación de Euler–Lagrange. Se detallan las hipótesis asumidas, así como las simplificaciones justificadas desde un punto de vista físico y práctico, con el propósito de obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales que describan con fidelidad el comportamiento dinámico del sistema.

El análisis se estructura de forma sistemática, identificando las coordenadas generalizadas, las energías cinética y potencial, y aplicando el principio de mínima acción para deducir las ecuaciones del movimiento.

Esta representación matemática será posteriormente empleada en el diseño y evaluación de estrategias de control.

Además, se presentan los resultados iniciales obtenidos mediante simulaciones en **Simulink**[®] de **Matlab**[®], con el modelo operando en lazo abierto y después en lazo cerrado con la estructura de control.

Estas simulaciones tienen como finalidad verificar la coherencia de las expresiones dinámicas deducidas, así como explorar la respuesta del sistema ante distintas condiciones iniciales y configuraciones de parámetros.

El desarrollo del modelo constituye una etapa esencial en el ciclo de diseño de sistemas de control, ya que proporciona la base para formular criterios de estabilidad, sintonizar parámetros y evaluar el desempeño en escenarios simulados. El rigor en esta etapa asegura que las estrategias de control propuestas, como la ley de control PD analizada en capítulos posteriores, puedan implementarse de manera robusta y eficiente.

En resumen, este capítulo combina herramientas de la mecánica analítica con conceptos fundamentales de teoría de control y simulación numérica, a fin de establecer un marco sólido para el análisis y diseño de sistemas subactuados como el péndulo invertido con rueda inercial.

3.1. Modelado Dinámico del Sistema Experimental

El análisis del péndulo invertido con rueda inercial requiere un tratamiento riguroso y detallado que garantice la incorporación precisa de todos los aspectos físicos relevantes. Con este propósito, se recurre a la **Metodología de Euler-Lagrange para Sistemas Conservativos**.

3.1.1. Metodología de Euler-Lagrange

Esta metodología es ampliamente utilizada en el modelado de sistemas dinámicos lineales y no lineales, debido a su solidez teórica y capacidad para incorporar restricciones holónomas de manera sistemática. La **Metodología de Euler-Lagrange** tiene los siguientes pasos:

Paso 1. Determinar la Cinemática Directa (Posición).

Este paso consiste en obtener las posiciones de los elementos fundamentales del sistema: el péndulo y la rueda inercial. Este análisis requiere una comprensión detallada de la configuración física y de las relaciones geométricas entre los elementos, información mostrada en la Figura 3.1.

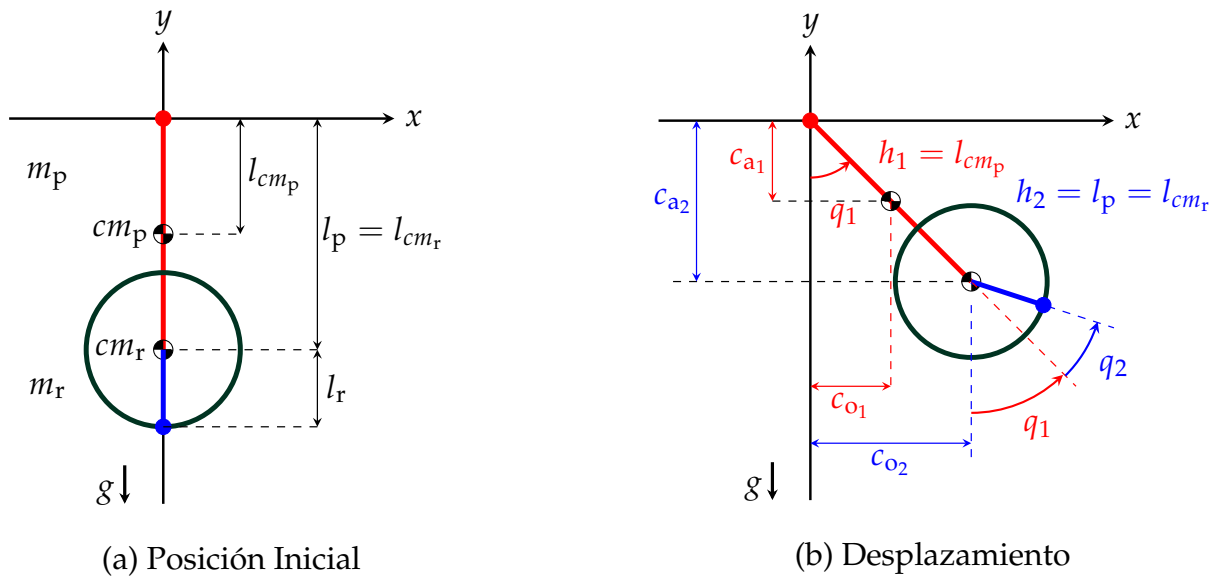


Figura 3.1: Esquema del sistema péndulo con rueda inercial.

El sistema está formado por un eslabón rígido de masa m_p y longitud l_p , el cual oscila en el plano $\{x, y\}$ y está unido en su extremo superior a un eje que funciona como **pivote**. En el extremo inferior de la barra se encuentra acoplado un disco de masa m_r y radio l_r , sobre el cual se acopla un motor de DC que proporciona el par τ_r que constituye la entrada del sistema, tal y como se observa en la Figura 3.1.

Los centros de masa del péndulo y del disco se denotan por cm_p y cm_r , respectivamente. Como se muestra en la Figura 3.1(a), el centro de masa del disco, denotado por cm_r , coincide con el extremo inferior del péndulo. Esta consideración es válida debido a la simetría geométrica del disco y a su ubicación al realizar el montaje físico. Cabe destacar que dicha consideración permite simplificar el análisis dinámico del sistema sin comprometer su precisión.

El sistema posee dos grados de libertad, definidos por los ángulos generalizados q_1 y q_2 . El ángulo q_1 describe la orientación del péndulo y se mide desde la dirección vertical (eje $-y$) tomando como origen el pivote ubicado en su extremo superior. Por su parte, el ángulo q_2 representa la rotación relativa de la rueda inercial con respecto al péndulo. En ambos casos, se adopta la convención de signos en la cual los desplazamientos angulares positivos corresponden a rotaciones en sentido antihorario.

El vector de coordenadas generalizadas, o vector de posiciones articulares, se define como:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}. \quad (3.1)$$

Las coordenadas desde el origen al centro de masa del péndulo en el plano $\{xy\}$ son:

$$x_1 = c_{o1} = l_{cm_p} \sin(q_1) \quad (3.2)$$

$$y_1 = c_{a1} = -l_{cm_p} \cos(q_1) \quad (3.3)$$

$$z_1 = 0. \quad (3.4)$$

Mientras que las coordenadas desde el origen al centro de masa del disco (extremo final del péndulo) se definen como:

$$x_2 = c_{o2} = l_p \sin(q_1) \quad (3.5)$$

$$y_2 = c_{a2} = -l_p \cos(q_1) \quad (3.6)$$

$$z_2 = 0 \quad (3.7)$$

donde $l_p = l_{cm_r}$, tal y como se observa en la Figura 3.1(a).

Paso 2. Cálculo de la Cinemática Diferencial (velocidades del sistema).

Una vez obtenidas las posiciones de los centros de masa del péndulo y de la rueda inercial, el siguiente paso es calcular las **velocidades** de dichos centros de masa. El vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ de cada elemento (péndulo y disco) se obtiene derivando con respecto al tiempo las expresiones de posición obtenidas en el **Paso 1**. En este caso:

$$\mathbf{v}_{cm_p} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{cm_p} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{cm_p} \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

correspondiente al centro de masa del péndulo, y

$$\mathbf{v}_{cm_r} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_p \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_p \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

correspondiente al centro de masa de la rueda inercial.

Paso 3. Obtención de la Rapidez al cuadrado

El conocimiento explícito de las velocidades de los centros de masa resulta fundamental para el desarrollo del modelo dinámico, ya que permite calcular la **rapidez al cuadrado**. En particular, la rapidez al cuadrado del centro de masa del péndulo se obtiene como:

$$\begin{aligned}
 \|v_{cm_p}\|^2 &= v_{cm_p}^T v_{cm_p} = [l_{cm_p} \cos(q_1) \dot{q}_1 \quad l_{cm_p} \sin(q_1) \dot{q}_1 \quad 0] \begin{bmatrix} l_{cm_p} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{cm_p} \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= l_{cm_p}^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1^2 + l_{cm_p}^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1^2 \\
 &= l_{cm_p}^2 \left(\cos^2(q_1) + \sin^2(q_1) \right) \dot{q}_1^2 \\
 &= l_{cm_p}^2 \dot{q}_1^2
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

lo que refleja un movimiento puramente rotacional con respecto al pivote.

La rapidez al cuadrado del centro de masa del disco se expresa como:

$$\begin{aligned}
 \|v_{cm_r}\|^2 &= v_{cm_r}^T v_{cm_r} = [l_p \cos(q_1) \dot{q}_1 \quad l_p \sin(q_1) \dot{q}_1 \quad 0] \begin{bmatrix} l_p \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_p \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= l_p^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1^2 + l_p^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1^2 \\
 &= l_p^2 \left(\cos^2(q_1) + \sin^2(q_1) \right) \dot{q}_1^2 \\
 &= l_p^2 \dot{q}_1^2
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

lo que refleja un movimiento puramente rotacional con respecto a la parte final del péndulo.

Paso 4. Formulación de la energía cinética $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ y potencial $\mathcal{U}(q)$ del sistema.

Considerando al péndulo como un sólido rígido, su energía cinética se obtiene como la suma de dos componentes: la energía traslacional asociada al movimiento de su centro de masa y la energía rotacional correspondiente a su giro alrededor del pivote. Esta se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_p(q_1, \dot{q}_1) &= \frac{1}{2} m_p \|v_{cm_p}\|^2 + \frac{1}{2} I_p \omega_1^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_p v_{cm_p}^T v_{cm_p} + \frac{1}{2} I_p \dot{q}_1^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_p l_{cm_p}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} \left(m_p l_{cm_p}^2 + I_p \right) \dot{q}_1^2
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde I_p es el momento de inercia del péndulo con respecto al pivote y $\omega_1 = \dot{q}_1$ es la velocidad angular del péndulo.

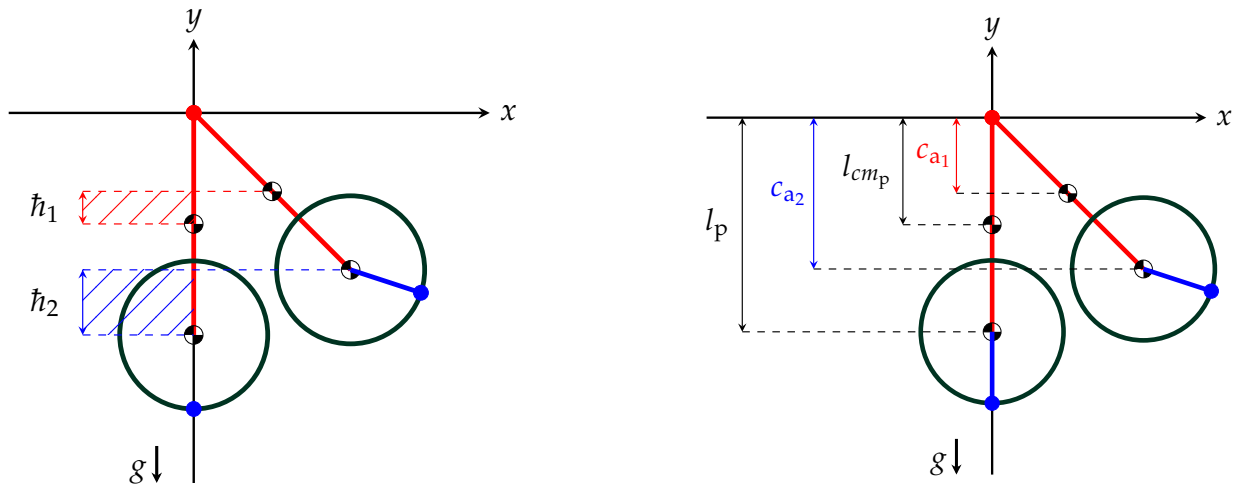
Dado que el disco presenta una rotación con velocidad angular absoluta $\omega_2 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$, como se ilustra en la Figura 3.1(b), su energía cinética se expresa como:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_r(q_2, \dot{q}_2) &= \frac{1}{2} m_r \|v_{cm_r}\|^2 + \frac{1}{2} I_r \omega_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_r v_{cm_r}^T v_{cm_r} + \frac{1}{2} I_r (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_r l_p^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_r (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2.\end{aligned}\quad (3.13)$$

La energía cinética total $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ se define como:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(q, \dot{q}) &= \mathcal{K}_p(q_1, \dot{q}_1) + \mathcal{K}_r(q_2, \dot{q}_2) \\ &= \frac{1}{2} (m_p l_{cm_p}^2 + I_p) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_r l_p^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_r (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_p l_{cm_p}^2 + I_p + m_r l_p^2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_r (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2).\end{aligned}\quad (3.14)$$

El cálculo de la energía potencial requiere determinar las alturas h_1 y h_2 , correspondientes a la elevación vertical del centro de masa del péndulo y del disco, respectivamente. Estas alturas se obtienen a partir de las relaciones geométricas descritas en la Figura 3.2(a), las cuales permiten identificar la posición relativa de cada componente con respecto al sistema de referencia.



(a) Desplazamiento de los centros de masa

(b) Valores simbólicos

Figura 3.2: Relaciones geométricas para calcular las alturas.

Las alturas $\hbar_1$ y $\hbar_2$, correspondientes al centro de masa del péndulo y del disco, respectivamente, se obtienen como la diferencia vertical entre su posición inicial (en la configuración vertical) y su desplazamiento proyectado sobre el eje $-y$ tras la rotación angular q_1 . Estas se definen como:

$$\hbar_1 = \left(-l_{cm_p} \right) - \left(c_{a_1} \right) = \left(-l_{cm_p} \right) - \left(-l_{cm_p} \cos(q_1) \right) = -l_{cm_p} + l_{cm_p} \cos(q_1) \quad (3.15)$$

$$\hbar_2 = \left(-l_p \right) - \left(c_{a_2} \right) = \left(-l_p \right) - \left(-l_p \cos(q_1) \right) = -l_p + l_p \cos(q_1) \quad (3.16)$$

La energía potencial del péndulo es

$$\mathcal{U}_p(q_1) = m_p g \hbar_1 = m_p g \left(-l_{cm_p} + l_{cm_p} \cos(q_1) \right) = -m_p g l_{cm_p} \left(1 - \cos(q_1) \right) \quad (3.17)$$

mientras que la energía potencial del disco se define como:

$$\mathcal{U}_r(q_1) = m_r g \hbar_2 = m_r g \left(-l_p + l_p \cos(q_1) \right) = -m_r g l_p \left(1 - \cos(q_1) \right) \quad (3.18)$$

La energía potencial total $\mathcal{U}(q)$ se define como:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(q) &= \mathcal{U}_p(q_1) + \mathcal{U}_r(q_1) \\ &= -m_p g l_{cm_p} \left(1 - \cos(q_1) \right) - m_r g l_p \left(1 - \cos(q_1) \right) \\ &= -\left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \left(1 - \cos(q_1) \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Paso 5. Construcción del Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q})$.

El Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ se determina a partir de la expresión general dada en (1.2), resultando en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q) \\ &= \frac{1}{2} \left(m_p l_{cm_p}^2 + I_p + m_r l_p^2 \right) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_r \left(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 \right) - \left(-\left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \left(1 - \cos(q_1) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(m_p l_{cm_p}^2 + I_p + m_r l_p^2 \right) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_r \left(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 \right) + \left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \left(1 - \cos(q_1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r \right) \dot{q}_1^2 + I_r \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2} I_r \dot{q}_2^2 + \left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \left(1 - \cos(q_1) \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Paso 6. Evaluación de la ecuación de Euler–Lagrange.

El siguiente paso es evaluar la ecuación de Euler–Lagrange, definida en (1.1), para lo cual se realiza el siguiente procedimiento:

- Se resuelve el término $\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1}$ tal que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left[\left(m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r \right) \dot{q}_1^2 + 2I_r \dot{q}_1 \dot{q}_2 + I_r \dot{q}_2^2 + 2 \left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \left(1 - \cos(q_1) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left[\left(m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r \right) \dot{q}_1^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left[2I_r \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left[I_r \dot{q}_2^2 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left[2 \left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \left(1 - \cos(q_1) \right) \right] \\
 &= \left(m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r \right) \dot{q}_1 + I_r \dot{q}_2
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \left[\left(m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r \right) \dot{q}_1^2 + 2I_r \dot{q}_1 \dot{q}_2 + I_r \dot{q}_2^2 + 2 \left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \left(1 - \cos(q_1) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \left[\left(m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r \right) \dot{q}_1^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \left[2I_r \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \left[I_r \dot{q}_2^2 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \left[2 \left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \left(1 - \cos(q_1) \right) \right] \\
 &= I_r \dot{q}_1 + I_r \dot{q}_2
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

- Después se resuelve $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right)$ tal que:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right] = \frac{d}{dt} \left[\left(m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r \right) \dot{q}_1 + I_r \dot{q}_2 \right] = \left(m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r \right) \ddot{q}_1 + I_r \ddot{q}_2 \tag{3.23}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right] = \frac{d}{dt} \left[I_r \dot{q}_1 + I_r \dot{q}_2 \right] = I_r \ddot{q}_1 + I_r \ddot{q}_2 \tag{3.24}$$

- Se resuelve el término $\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_1}$ tal que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\left(m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r \right) \dot{q}_1^2 + 2I_r \dot{q}_1 \dot{q}_2 + I_r \dot{q}_2^2 + 2 \left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \left(1 - \cos(q_1) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\left(m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r \right) \dot{q}_1^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[2I_r \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[I_r \dot{q}_2^2 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[2 \left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \left(1 - \cos(q_1) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[2m_p l_{cm_p} g - 2m_p l_{cm_p} g \cos(q_1) + 2m_r l_p g - 2m_r l_p g \cos(q_1) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[2m_p l_{cm_p} g \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[2m_p l_{cm_p} g \cos(q_1) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[2m_r l_p g \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[2m_r l_p g \cos(q_1) \right] \\
 &= m_p l_{cm_p} g \sin(q_1) + m_r l_p g \sin(q_1) \\
 &= \left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \sin(q_1) \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\left(m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r \right) \dot{q}_1^2 + 2I_r \dot{q}_1 \dot{q}_2 + I_r \dot{q}_2^2 + 2 \left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \left(1 - \cos(q_1) \right) \right] \\
 &= 0 \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

- Se define $\mathcal{D}(\dot{q})$ y se resuelve el término $\frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$.

Se define $\mathcal{D}(\dot{q})$ como:

$$\mathcal{D}(\dot{q}_1) = \frac{1}{2} \left(b_1 \dot{q}_1^2 \right) \tag{3.27}$$

$$\mathcal{D}(\dot{q}_2) = \frac{1}{2} \left(b_2 \dot{q}_2^2 \right) \tag{3.28}$$

donde b_1 es la fricción viscosa entre el pivote y el péndulo y b_2 es la fricción viscosa entre el péndulo y el disco.

y se resuelve $\frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$ tal que:

$$\frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left[\frac{1}{2} \left(b_1 \dot{q}_1^2 \right) \right] = b_1 \dot{q}_1 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q}_2)}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \left[\frac{1}{2} \left(b_2 \dot{q}_2^2 \right) \right] = b_2 \dot{q}_2. \quad (3.30)$$

Finalmente se ha obtenido el modelo dinámico:

$$\left(m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r \right) \ddot{q}_1 + I_r \ddot{q}_2 + \left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \sin(q_1) + b_1 \dot{q}_1 = 0 \quad (3.31)$$

$$I_r \ddot{q}_1 + I_r \ddot{q}_2 + b_2 \dot{q}_2 = \tau_r \quad (3.32)$$

cuya representación matricial es:

$$\begin{bmatrix} m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r & I_r \\ I_r & I_r \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} (m_p l_{cm_p} + m_r l_p) g \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_r \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

La ejecución ordenada de estas etapas proporciona una formulación estructurada del modelo dinámico del sistema, garantizando consistencia matemática y claridad conceptual. Esta representación dinámica no solo describe con precisión el comportamiento del péndulo invertido con rueda inercial, sino que también establece una base sólida para el análisis posterior de estabilidad y diseño de estrategias de control que se desarrollarán en capítulos posteriores.

3.1.2. Modelado del momento de inercia del sistema péndulo–rueda inercial

El sistema analizado está compuesto por un péndulo rígido al que se le acopla una rueda inercial en su extremo inferior. Para modelar correctamente la dinámica del sistema, es necesario considerar los momentos de inercia de ambos cuerpos rígidos, ya que estos parámetros definen la resistencia al cambio en su movimiento angular.

El momento de inercia de un cuerpo rígido se define como:

$$I = \int_V \rho(\mathbf{r}) \|\mathbf{r}_\perp\|^2 dV, \quad (3.34)$$

donde $\rho(\mathbf{r})$ es la densidad volumétrica del cuerpo, V representa su volumen, y $\mathbf{r}_\perp$ es la distancia perpendicular desde un punto del cuerpo hasta el eje de rotación [6]. En esta sección se modelan dos momentos de inercia principales: el del péndulo respecto al pivote, relación que se denota por I_p , y el de la rueda inercial respecto a su eje de giro, definido como I_r .

3.1.2.1. Momento de inercia del péndulo

Se considera que el péndulo es un cuerpo rígido homogéneo de masa m_p y longitud total l_p , cuyo eje de rotación está ubicado en su extremo superior (pivote).

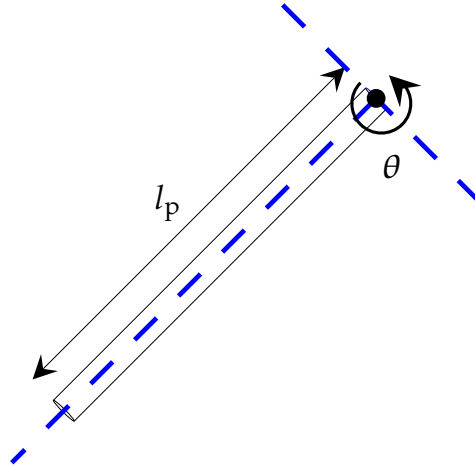


Figura 3.3: Momento inercial de una varilla sobre un extremo.

La masa está distribuida uniformemente a lo largo de su longitud, por lo que la densidad lineal λ se define como:

$$\lambda = \frac{m_p}{l_p}. \quad (3.35)$$

Para calcular el momento de inercia del péndulo respecto al eje de rotación, se considera una partícula diferencial de masa dm ubicada a una distancia ξ del pivote. Aquí, la variable $\xi \in [0, l_p]$ representa la posición escalar a lo largo del eje longitudinal del péndulo, medida desde el pivote hacia abajo. Es importante señalar que ξ es una **variable auxiliar de integración**, con el propósito de parametrizar la distribución de masa a lo largo del cuerpo del péndulo.

Dado que el péndulo gira alrededor del pivote, la distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta dm es justamente ξ , el momento de inercia del péndulo respecto al pivote se calcula como:

$$I_p = \int_0^{l_p} \xi^2 dm. \quad (3.36)$$

Sustituyendo $dm = \lambda d\xi$ con la densidad lineal definida en (3.35):

$$I_p = \int_0^{l_p} \xi^2 \lambda d\xi = \lambda \int_0^{l_p} \xi^2 d\xi \quad (3.37)$$

Evalutando la integral:

$$I_p = \frac{m_p}{l_p} \left[\frac{\xi^3}{3} \right]_0^{l_p} = \frac{m_p}{l_p} \frac{l_p^3}{3} = \frac{1}{3} m_p l_p^2 \quad (3.38)$$

Por tanto, el momento de inercia del péndulo respecto al pivote queda determinado por:

$$I_p = \frac{1}{3} m_p l_p^2 \quad (3.39)$$

Este resultado asume que el péndulo se comporta como una barra homogénea delgada que gira alrededor de un extremo fijo. Si la distribución de masa del péndulo no es uniforme o si el eje de rotación no coincide con el extremo, este valor debe ajustarse utilizando el teorema del eje paralelo (teorema de Steiner).

3.1.2.2. Momento de inercia de la rueda inercial:

La rueda inercial se modela como un disco homogéneo de masa m_r y radio R_r , montado de forma concéntrica en el extremo del péndulo.

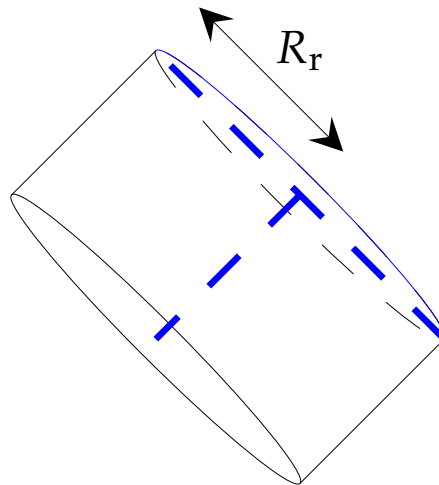


Figura 3.4: Momento inercial de la rueda inercial.

Dado que gira alrededor de su propio eje central, su momento de inercia se expresa como:

$$I_r = \frac{1}{2} m_r R_r^2. \quad (3.40)$$

Este valor corresponde al caso clásico de un disco macizo girando alrededor de su eje de simetría. Si el eje de rotación no pasa por el centro de masa, o si la geometría no es exactamente circular, también debe aplicarse el teorema del eje paralelo para ajustar el valor.

Ambos momentos de inercia aparecen directamente en la formulación lagrangiana y en la matriz de inercia $M(q)$ del sistema. Específicamente I_p contribuye a la inercia total del movimiento del péndulo con respecto al pivote, mientras que I_r participa tanto en la dinámica rotacional de la rueda como en el acoplamiento entre los grados de libertad q_1 y q_2 . Una correcta estimación de estos parámetros es fundamental para la precisión del modelo, la simulación numérica y el diseño de controladores dinámicos.

3.1.3. Modelo dinámico con actuador

En un sistema físico real, el par τ_r que actúa sobre la rueda inercial no se genera de forma ideal, sino que es proporcionado por un actuador, usualmente de tipo electromecánico. Este dispositivo convierte una señal de entrada, típicamente un voltaje o una corriente eléctrica, en un par mecánico que actúa directamente sobre el eje de la rueda.

En el caso particular del sistema péndulo–rueda inercial, se asume que el actuador está acoplado directamente al eje del disco mediante un sistema de transmisión rígido, es decir, un acoplamiento mecánico sin juego apreciable. Esta condición permite suponer que no existen pérdidas de energía ni retardos significativos entre la señal de control generada por el actuador y la aplicación efectiva del par τ_r sobre el sistema.

En este contexto, el par de entrada τ_r es generado por un motor de corriente directa (CD) acoplado directamente al eje del disco, lo cual justifica el uso de un modelo con acoplamiento directo sin reducción mecánica ($r = 1$). El motor de corriente directa se modela considerando tanto su dinámica eléctrica como mecánica, lo que permite capturar el comportamiento transitorio y en estado estacionario del sistema de accionamiento.

La dinámica eléctrica del motor está dada por la ecuación de la armadura:

$$v_r = R_a i + L_a \frac{d}{dt} \left(i \right) + k_e (\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \quad (3.41)$$

donde v_r es el voltaje aplicado a la armadura del motor [V], R_a es la resistencia de la armadura [Ω], L_a es la inductancia de la armadura [H], i es la corriente de la armadura [A], k_e es la constante de fuerza contraelectromotriz [V s/rad], y $\dot{q}_1 + \dot{q}_2$ es la velocidad angular absoluta del disco [rad/s], con q_1 como el ángulo del péndulo respecto a la vertical y q_2 como la rotación relativa del disco respecto al péndulo.

La dinámica mecánica del motor relaciona el par generado con la corriente de la armadura:

$$\tau_r = k_t i, \quad (3.42)$$

donde k_t es la constante de par del motor [N m/A] y τ_r es el par transmitido al disco [N m].

Este par τ_r se incorpora directamente en la ecuación dinámica del disco obtenida mediante el formalismo de Euler-Lagrange descrito en la ecuación (3.32) donde I_r es el momento de inercia del disco [kg m²], b_2 es el coeficiente de fricción viscosa en el eje del disco [N m s/rad], y $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2$ son las aceleraciones angulares del péndulo y del disco, respectivamente.

Sustituyendo (3.42) en (3.32), se obtiene:

$$I_r (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + b_2 \dot{q}_2 = k_t i. \quad (3.43)$$

El modelo dinámico completo del sistema péndulo–rueda inercial con actuador se forma combinando las ecuaciones dinámicas del péndulo, la ecuación del disco (3.43), y la ecuación eléctrica del motor (3.41):

$$\left(m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + I_p + I_r\right) \ddot{q}_1 + I_r \ddot{q}_2 + \left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p\right) g \sin(q_1) + b_1 \dot{q}_1 = 0 \quad (3.44)$$

$$I_r \ddot{q}_1 + I_r \ddot{q}_2 + b_2 \dot{q}_2 = k_t i \quad (3.45)$$

$$v_r - R_a i - k_e(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) = L_a \frac{d}{dt} \left(i \right) \quad (3.46)$$

donde m_p y m_r son las masas del péndulo y del disco [kg], l_{cm_p} y l_p son las distancias al centro de masa del péndulo y del disco [m], I_p es el momento de inercia del péndulo [kg m²], b_1 es el coeficiente de fricción viscosa del péndulo [N m s/rad], y g es la aceleración gravitacional [m/s²].

Este sistema de ecuaciones representa la dinámica completa del subsistema mecánico y del subsistema de accionamiento electromecánico, permitiendo modelar el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones de operación y señales de control.

Para ciertos motores de corriente directa con inductancia despreciable ($L_a \approx 0$), la ecuación (3.41) puede simplificarse, asumiendo un comportamiento cuasi-estacionario para la corriente descrita en (3.46):

$$v_r = R_a i + k_e(\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \quad (3.47)$$

de donde se obtiene:

$$i = \frac{v_r - k_e(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)}{R_a}. \quad (3.48)$$

Sustituyendo (3.48) en (3.42), el par es:

$$\tau_r = \frac{k_t}{R_a} \left(v_r - k_e(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right). \quad (3.49)$$

De igual forma sustituyendo (3.48) en (3.45), se obtiene una ecuación simplificada para la dinámica del disco:

$$I_r(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + b_2 \dot{q}_2 = \frac{k_t}{R_a} \left(v_r - k_e(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right). \quad (3.50)$$

Esta formulación simplificada es válida para motores con baja inductancia o en aplicaciones donde los transitorios eléctricos son insignificantes, y puede emplearse para sustituir el par τ_r dentro del modelo dinámico total del sistema, proporcionando una representación más simple pero menos general del subsistema de accionamiento.

3.1.4. Modelo dinámico completo

Para obtener el modelo dinámico completo se sustituyen las ecuaciones (3.39) y (3.40) en las ecuaciones (3.31) y (3.50):

$$\left(m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + \frac{1}{3} m_p l_p^2 + \frac{1}{2} m_r R_r^2 \right) \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} m_r R_r^2 \ddot{q}_2 + \left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \sin(q_1) + b_1 \dot{q}_1 = 0 \quad (3.51)$$

$$\frac{1}{2} \frac{R_a}{k_t} m_r R_r^2 \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} \frac{R_a}{k_t} m_r R_r^2 \ddot{q}_2 + k_e \dot{q}_1 + \left(\frac{R_a}{k_t} b_2 + k_e \right) \dot{q}_2 = v_r \quad (3.52)$$

cuya representación matricial es:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} g_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_r \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

donde

$$m_{11} = m_p l_{cm_p}^2 + m_r l_p^2 + \frac{1}{3} m_p l_p^2 + \frac{1}{2} m_r R_r^2 \quad (3.54)$$

$$m_{12} = \frac{1}{2} m_r R_r^2 \quad (3.55)$$

$$m_{21} = \frac{1}{2} \frac{R_a}{k_t} m_r R_r^2 \quad (3.56)$$

$$m_{22} = \frac{1}{2} \frac{R_a}{k_t} m_r R_r^2 \quad (3.57)$$

$$d_{11} = b_1 \quad (3.58)$$

$$d_{21} = k_e \quad (3.59)$$

$$d_{22} = k_e + \frac{R_a}{k_t} b_2 \quad (3.60)$$

$$g_1 = \left(m_p l_{cm_p} + m_r l_p \right) g \sin(q_1) \quad (3.61)$$

Desde una perspectiva física, el sistema no involucra traslación o rotación espacial compleja con acoplamientos no lineales. Los movimientos son esencialmente rotacionales independientes: uno alrededor del pivote del péndulo (descrito por q_1), y otro relativo dentro del mismo marco (definido por q_2). Al no existir componentes que se acoplen no linealmente mediante productos de velocidades generalizadas, los efectos de Coriolis desaparecen naturalmente.

3.2. Diseño del Control y Análisis de Estabilidad

Considerando el modelo dinámico descrito en (3.53), se definen las siguientes variables de estado:

$$x_1 = \tilde{q} = q_d - q \quad (3.62)$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\tilde{q}} = \dot{q}_d - \dot{q} = -\dot{q} = -x_2 \quad (3.63)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\tilde{q}} = \ddot{q} = -M^{-1}(q) \left[\tau - D(q, \dot{q}) - g(q) \right] \quad (3.64)$$

donde $\tilde{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ representa el error de posición, definido como la diferencia entre la posición deseada constante $q_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y la posición real $q \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

A partir de las variables de estado y utilizando una formulación general de la acción de control, se propone la siguiente estructura:

$$\tau = \pm f_1(K_1, x_1) \pm f_2(K_2, x_2) \pm \dots \pm f_n(K_n, x_n) + \vartheta \quad (3.65)$$

donde $\vartheta \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ representa los efectos no modelados; las funciones $f_1, f_2, \dots, f_n$ dependen de las ganancias $K_1, K_2, \dots, K_n$ y de las variables de estado $x_1, x_2, \dots, x_n$. A partir de esta formulación, se propone la siguiente ley de control:

$$\begin{aligned} \tau &= \pm f_1(K_1, x_1) \pm f_2(K_2, x_2) + \vartheta \\ &= \pm K_1 x_1 \pm K_2 x_2 + g(q) \\ &= \pm K_1 \tilde{q} \pm K_2 \dot{q} + g(q) \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde $K_1 = K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $K_2 = K_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ corresponden a las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente. Con una selección adecuada de signos, se obtiene la ley de control tipo PD con compensación gravitacional:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} + g(q) \quad (3.67)$$

Sustituyendo la ley de control definida en la ecuación (3.67) dentro del modelo dinámico dado por la ecuación (3.53), se obtiene:

$$\begin{aligned} M(q) \ddot{q} + D(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) &= \tau \\ M(q) \ddot{q} + D(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) &= K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} + g(q) \\ M(q) \ddot{q} + D(q, \dot{q}) \dot{q} &= K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} \end{aligned} \quad (3.68)$$

A partir de la ecuación (3.68), se redefinen las variables de estado como:

$$x_1 = \tilde{q} = q_d - q \quad (3.69)$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\tilde{q}} = \dot{q}_d - \dot{q} = -\dot{q} = -x_2 \quad (3.70)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\tilde{q}} = \ddot{q} = M^{-1}(q) \left[K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} - D(q, \dot{q}) \dot{q} \right] \quad (3.71)$$

lo que conduce al siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ M^{-1}(q) [K_p x_1 - K_d x_2 - D(q, \dot{q}) x_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}(q) [K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} - D(q, \dot{q}) \dot{q}] \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Considerando el caso estacionario $\dot{x} = 0$, el análisis del sistema en lazo cerrado se desarrolla de la siguiente manera:

■ Para x_2 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ 0 &= x_2 \end{aligned} \quad (3.73)$$

■ Para x_1 :

$$\begin{aligned} 0 &= M^{-1}(q) [K_p x_1 - K_d x_2 - D(q, \dot{q}) x_2] \\ 0 &= M^{-1}(q) K_p x_1 + M^{-1}(q) K_d x_2 + M^{-1}(q) D(q, \dot{q}) x_2 \\ 0 &= M^{-1}(q) K_p x_1 \\ 0 &= x_1 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Como se observa, el sistema converge al origen del espacio de estados, es decir, $x_1 = x_2 = 0$, lo cual garantiza la existencia y unicidad del punto de equilibrio.

3.2.1. Análisis de estabilidad

Para analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado definido en (3.72), se propone la siguiente función de Lyapunov candidata:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}, \quad (3.75)$$

donde $K_p = K_p^T > 0$ es definida positiva, y $M(q) > 0$ representa la matriz de inercia del sistema.

La derivada de (3.75) con respecto al tiempo es:

$$\dot{V} = \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}, \ddot{q}, \dot{\tilde{q}}) = \tilde{q}^T K_p \ddot{q} + \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}. \quad (3.76)$$

Despejando $M(q)\ddot{q}$ de la ecuación de lazo cerrado definida en (3.68):

$$M(q)\ddot{q} = K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} - D(q, \dot{q}) \dot{q}, \quad (3.77)$$

y sustituyendo (3.77) en (3.76), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{q}^T K_p \ddot{q} + \dot{q}^T \left[K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} - D(q, \dot{q}) \dot{q} \right] + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} \\ &= \tilde{q}^T K_p \ddot{q} + \dot{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T K_d \dot{q} - \dot{q}^T D(q, \dot{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Considerando las variables de estado, se observa en (3.70) que $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$, así se tiene:

$$\dot{V} = -\tilde{q}^T K_p \dot{q} + \dot{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T K_d \dot{q} - \dot{q}^T D(q, \dot{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} \quad (3.79)$$

Aplicando la propiedad conmutativa de la transpuesta al primer elemento de (3.79):

$$\tilde{q}^T K_p \dot{q} = \dot{q}^T K_p \tilde{q}, \quad (3.80)$$

se puede modificar (3.79) de la siguiente forma:

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_p \tilde{q} + \dot{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T K_d \dot{q} - \dot{q}^T D(q, \dot{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}. \quad (3.81)$$

Se observa que el primer y segundo término son iguales y se pueden cancelar, tal que:

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_d \dot{q} - \dot{q}^T D(q, \dot{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}. \quad (3.82)$$

Para garantizar que la derivada de Lyapunov sea definida negativa, se requiere tratar adecuadamente el término:

$$-\dot{q}^T D(q, \dot{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}. \quad (3.83)$$

presente en la ecuación (3.82).

Para ello, se definen las siguiente cotas superiores e inferiores sobre las matrices involucradas:

$$K_d \geq k_d I, \quad \text{con } k_d > 0 \quad (3.84)$$

$$D(q, \dot{q}) \geq 0 \quad (3.85)$$

$$\dot{q}^T D(q, \dot{q}) \dot{q} \geq 0 \quad (3.86)$$

$$\left| \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} \right| \leq \mu \|\dot{q}\|^2, \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}^+ \quad (3.87)$$

Estas cotas tienen la siguiente interpretación:

- La desigualdad (3.84) asegura que la matriz de ganancias derivativas K_d es simétrica definida positiva y está acotada inferiormente por un escalar positivo k_d , lo cual garantiza disipación de energía suficiente en el sistema.
- La condición (3.85) establece que la matriz de fricción $D(q, \dot{q})$ es semidefinida positiva, propiedad típica en sistemas mecánicos pasivos, donde la fricción nunca inyecta energía al sistema.
- La desigualdad (3.86) se deriva directamente de (3.85) y confirma que el término de fricción siempre contribuye con una disipación no negativa en la derivada de Lyapunov.
- La desigualdad (3.87) acota superiormente el término generado por la derivada temporal de la matriz de inercia. Este término es inevitable en sistemas con inercia dependiente de la posición, pero puede controlarse si se establece una cota $\mu > 0$ tal que su efecto sea limitado por la norma cuadrada de la velocidad generalizada $\dot{q}$.

Aplicando la cota (3.86) en (3.82), se elimina el segundo término negativo (que ya sabemos es no positivo):

$$\dot{V} \leq -\dot{q}^T K_d \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}. \quad (3.88)$$

La cota (3.86) indica que el término $\dot{q}^T D(q, \dot{q}) \dot{q}$ es siempre no negativo, lo cual implica que su aportación a $\dot{V}$ es no positiva. Por tanto, este término puede eliminarse de la estimación superior de $\dot{V}$ sin comprometer la validez del análisis de estabilidad, ya que su efecto es disipativo (reduce o no incrementa la energía del sistema).

Luego, aplicando la desigualdad (3.87) para el último término:

$$\frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} \leq \frac{1}{2} \mu \|\dot{q}\|^2, \quad (3.89)$$

y sustituyendo en (3.88) se obtiene:

$$\dot{V} \leq -\dot{q}^T K_d \dot{q} + \frac{1}{2} \mu \|\dot{q}\|^2. \quad (3.90)$$

Finalmente, usando la cota inferior sobre K_d establecida en (3.84), se concluye:

$$\dot{q}^T K_d \dot{q} \geq k_d \|\dot{q}\|^2, \quad (3.91)$$

y al sustituir en (3.90), se obtiene:

$$\dot{V} \leq -k_d \|\dot{q}\|^2 + \frac{1}{2} \mu \|\dot{q}\|^2 = -\left(k_d - \frac{\mu}{2}\right) \|\dot{q}\|^2. \quad (3.92)$$

Por lo tanto, si se cumple:

$$k_d > \frac{\mu}{2}, \quad (3.93)$$

entonces se garantiza que:

$$\dot{V} < 0, \quad \forall \dot{q} \neq 0, \quad (3.94)$$

es decir, la derivada de la función de Lyapunov es estrictamente negativa fuera del origen, lo que prueba estabilidad asintótica global en el sentido de Lyapunov.

En consecuencia, el punto de equilibrio $(\tilde{q}, \dot{q}) = (0, 0)$ es globalmente asintóticamente estable bajo la acción del controlador PD con compensación de gravedad, siempre que la matriz de ganancias derivativas cumpla la condición de disipación dominante impuesta por (3.93).

3.3. Observador

Las estructuras de control propuestas requieren conocer tanto las posiciones como las velocidades del sistema. Para ello, se utiliza un sensor de posición y un codificador en la rueda inercial, lo que permite medir directamente algunas de las variables del sistema. No obstante, la medición directa de las velocidades no resulta viable debido al elevado costo de los sensores requeridos.

Para superar esta limitación, se adopta una estrategia robusta basada en teoría de control: el uso de observadores, que permiten estimar los estados no medidos a partir de las salidas disponibles. Entre los métodos existentes, se selecciona el observador propuesto por Nicosia, ya que está diseñado para sistemas no lineales y presenta ventajas como simplicidad, rapidez y efectividad, [7].

El observador de Nicosia es un esquema de alta ganancia asintótica, lo cual garantiza una rápida convergencia del error de estimación hacia cero. Además, permite estimar únicamente los estados de interés, por ejemplo, la velocidad, sin necesidad de reconstruir el vector de estados completo, lo que simplifica su implementación práctica.

Este observador considera un vector de estados estructurado con las coordenadas generalizadas y sus respectivas velocidades. A diferencia del modelo completo del sistema, sólo se emplean como variables de salida aquellas que son accesibles mediante sensores, como la posición articular del péndulo q , mientras que las velocidades se estiman dinámicamente.

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \frac{1}{\epsilon} H_p \left(y - \hat{x}_1 \right) \quad (3.95)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \frac{1}{\epsilon^2} H_v \left(y - \hat{x}_1 \right) \quad (3.96)$$

donde $\hat{x}_1 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ representa la estimación de las posiciones generalizadas; $\hat{x}_2 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ representa la estimación de las velocidades generalizadas; $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de salidas medidas del sistema; $H_p, H_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices de ganancia del observador; $\epsilon > 0$ es un parámetro escalar pequeño que amplifica la ganancia y acelera la dinámica del observador, [7].

Como en todo observador, existe una diferencia entre el valor estimado y el valor real del estado, denominada *error de observación*. Para el caso de la posición articular q , este error se expresa como:

$$\tilde{q} = q - \hat{q} \quad (3.97)$$

Bajo la hipótesis de alta ganancia, el error $\tilde{q}$ tiende a cero exponencialmente, es decir, $\hat{q} \approx q$ en régimen permanente. Esto garantiza que las velocidades estimadas sean confiables y adecuadas para su uso en la ley de control, incluso cuando no se dispone de sensores de velocidad.

Capítulo 4

Resultados de Simulación

En este capítulo se presentan y analizan los resultados obtenidos a partir de la implementación del modelo dinámico y de la estrategia de control aplicada al sistema péndulo invertido con rueda inercial. Las simulaciones se realizaron en **Simulink** de **MATLAB**, estructurando la planta (modelo matemático previamente desarrollado) junto con los bloques de control y observación en un diagrama a bloques convencional. El controlador genera la señal de control que se aplica a la planta conforme a la referencia establecida, mientras que el observador permite estimar la velocidad no disponibles mediante medición directa.

4.1. Configuración del sistema

El sistema analizado corresponde a un péndulo invertido compuesto por un eslabón rígido articulado en su extremo superior mediante un pivote, lo que le permite oscilar libremente. En el extremo inferior se acopla un motor de corriente directa que acciona un disco inercial, encargado de generar el par de control necesario para la estabilización del conjunto. La descripción de las constantes empleadas en el modelo, junto con sus valores numéricos, se presenta en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Parámetros físicos del sistema péndulo invertido con rueda inercial.

Parámetro	Símbolo	Valor
Masa del péndulo	m_p	0.540 kg
Masa de la rueda inercial	m_r	0.110 kg
Radio de la rueda	R_r	0.050 m
Longitud del eslabón del péndulo	l_p	0.240 m
Longitud del eslabón al centro de masa del péndulo	l_{cm_p}	0.120 m
Resistencia de armadura	R_a	1.000 Ω
Constante de torque del motor	K_t	0.05 Nm/A
Constante de fuerza contraelectromotriz	K_e	0.02 Vs/rad
Coefficiente de fricción en la base del péndulo	b_1	1×10^{-4} N m s/rad
Coefficiente de fricción en la base de la rueda	b_2	1×10^{-5} N m s/rad
Aceleración gravitacional	g	9.81 m/s ²
Voltaje máximo del actuador	$V_{m\acute{a}x}$	12 V

El sistema se muestra en la Figura 4.1

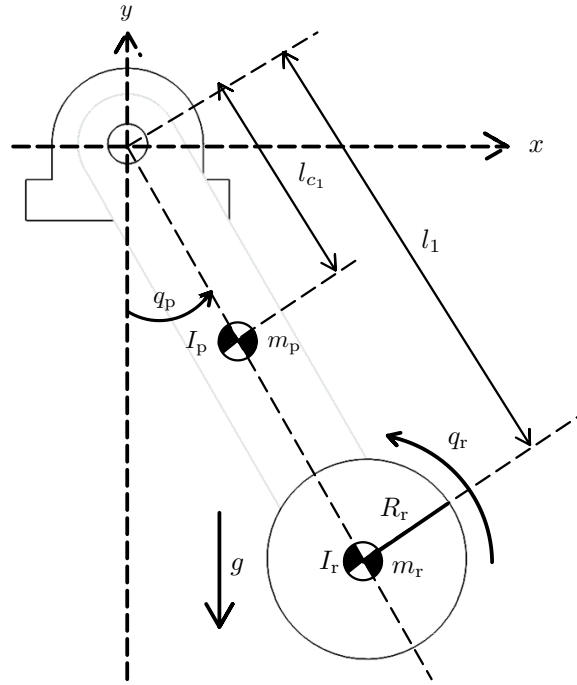


Figura 4.1: Esquema del sistema péndulo invertido con rueda inercial.

Las variables de estado adecuadas para describir el modelo dinámico del robot son las posiciones q_p y q_r y las velocidades $\dot{q}_p$ y $\dot{q}_r$. En función de estas variables de estado, se obtiene la siguiente ecuación del sistema en lazo cerrado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_p \\ q_r \\ \dot{q}_p \\ \dot{q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_p \\ \dot{q}_r \\ M(q)^{-1} [\tau - D \dot{q} - g(q)] \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

donde el par aplicado τ , de forma general, se expresa como:

$$\tau = \pm f_1(K_1, x_1) \pm f_2(K_2, x_2) \pm \dots \pm f_n(K_n, x_n) + \vartheta \quad (4.2)$$

En esta expresión, cada $f_i(\cdot)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ representa una función que depende de las ganancias K_i y de las variables de estado x_i , mientras que ϑ agrupa los términos no modelados o perturbaciones externas.

En la Figura 4.2 se presenta el **diagrama a bloques implementado en Simulink**, el cual describe la interacción entre los componentes del sistema de control del péndulo invertido con rueda inercial (PIRI).

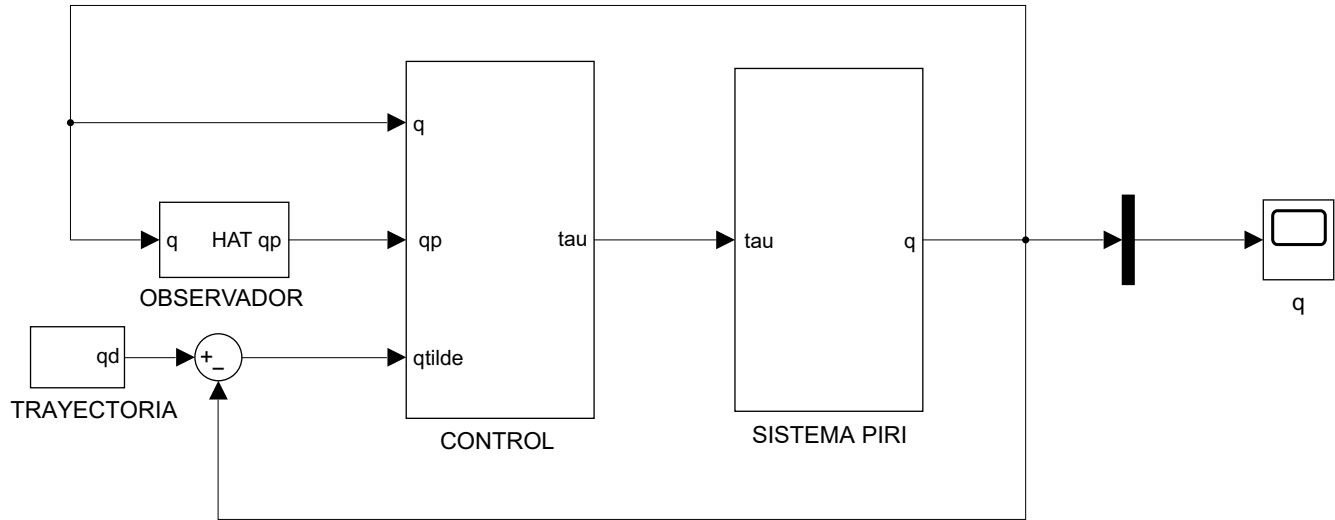


Figura 4.2: Diagrama a bloques del sistema

El esquema incluye un **bloque de trayectoria**, encargado de definir la posición deseada $q_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$; el **punto de resta**, que calcula el error de posición $\tilde{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, el cual se define como la diferencia entre la posición deseada $q_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y la posición real $q \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, este error es enviado al **bloque de control**, donde se implementa la ley PD con compensación gravitacional que, a partir del error, genera el par de control $\tau \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ aplicado al sistema; el **bloque del sistema**, correspondiente al modelo dinámico del péndulo invertido con rueda inercial, el cual recibe $\tau \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y entrega como salida la posición $q \in \mathbb{R}^{n \times 1}$; y finalmente el **bloque de observador**, que implementa el observador de Nicosia para estimar los estados no medidos directamente, en particular la velocidad angular del péndulo, a partir de la posición $q \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

En conjunto, estos bloques permiten simular el comportamiento del sistema en lazo cerrado: el error de posición es procesado por el controlador, que genera el par de entrada; el modelo dinámico responde a este esfuerzo y actualiza las variables de estado; finalmente, el observador estima las magnitudes requeridas para retroalimentar adecuadamente al control, garantizando así la estabilización del péndulo en su posición vertical inestable. Para las simulaciones, y con base en el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 4.1, se establecen en la Tabla 4.2 la posición de casa y la posición deseada del sistema.

Tabla 4.2: Posiciones del sistema.

Parámetro	Símbolo	Valor
Posición de casa	q_h	$-90^\circ \equiv 270^\circ$
Posición deseada	q_d	90°

4.2. Bloque del sistema

El **Péndulo Invertido con Rueda Inercial (PIRI)** fue modelado inicialmente en **SolidWorks®**, donde se diseñaron de manera individual las piezas que lo conforman, asignándoles materiales y propiedades geométricas coherentes con la realidad física. Las piezas se adjuntan en el Apéndice A. Posteriormente, estas piezas se ensamblaron en un modelo completo mediante restricciones geométricas que definen los grados de libertad del sistema. Este ensamblaje constituye la representación tridimensional del sistema, sobre la cual se establecen las condiciones físicas fundamentales: masas, centros de gravedad y tensores de inercia.

Para la simulación dinámica, el ensamblaje de **SolidWorks®** se exportó mediante el complemento **Simscape Multibody Link** (antes denominado **SimMechanics Link**), generando un archivo en formato **.xml** acompañado de archivos **.stl** para la visualización de las piezas. El archivo **.xml** describe la topología del mecanismo, las propiedades físicas de cada sólido y la traducción de las restricciones del ensamblaje a juntas cinemáticas equivalentes (rotacionales, prismáticas, esféricas o soldadas). El archivo **.xml** genera automáticamente un modelo en **Simscape Multibody**, donde cada pieza se representa mediante un bloque **Solid**, los acoplamientos rígidos se modelan con **Rigid Transform** y las restricciones geométricas se traducen a bloques de **Joint**. De esta manera, el modelo CAD se transforma en un esquema dinámico que puede ser simulado directamente. En la Figura 4.3 se muestra el modelo de **Simulink** obtenido a partir del ensamblaje tridimensional diseñado en **SolidWorks**. Dicho modelo corresponde a la importación automática realizada mediante la herramienta **Simscape Multibody Link**, la cual traduce las piezas y restricciones del CAD en bloques de sólidos, juntas y transformaciones rígidas dentro del entorno de simulación.

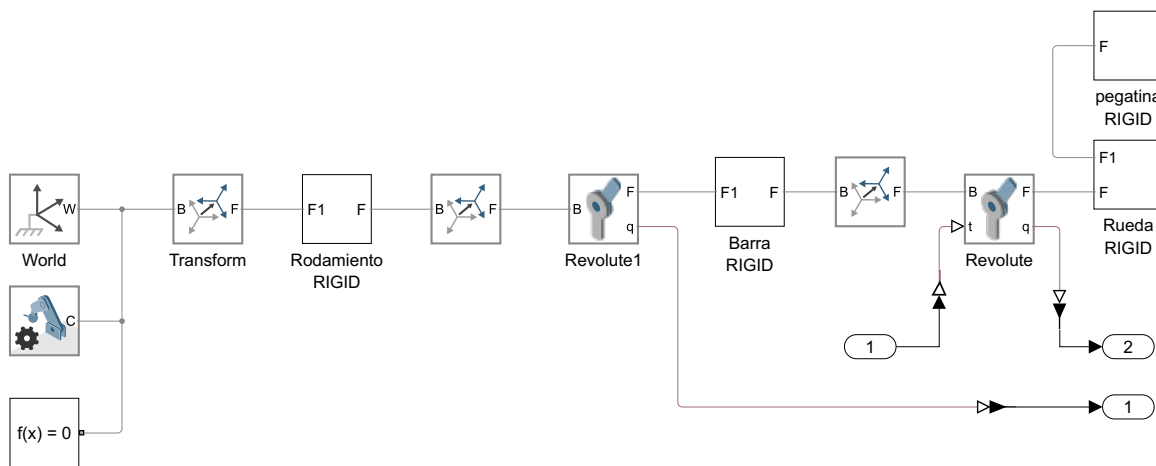


Figura 4.3: Diagrama de bloques del sistema en Simulink

El diagrama de bloques ilustrado en la Figura 4.3 detalla la estructura interna del bloque **SISTEMA PIRI**, mostrado en la Figura 4.2. En él se observa la correspondencia entre los componentes físicos modelados en **SolidWorks** y su representación dinámica en **Simulink**, lo que permite establecer una relación directa entre el modelo tridimensional y el análisis de control.

La Figura 4.4 muestra las vistas del sistema presentado en **Simulink**.

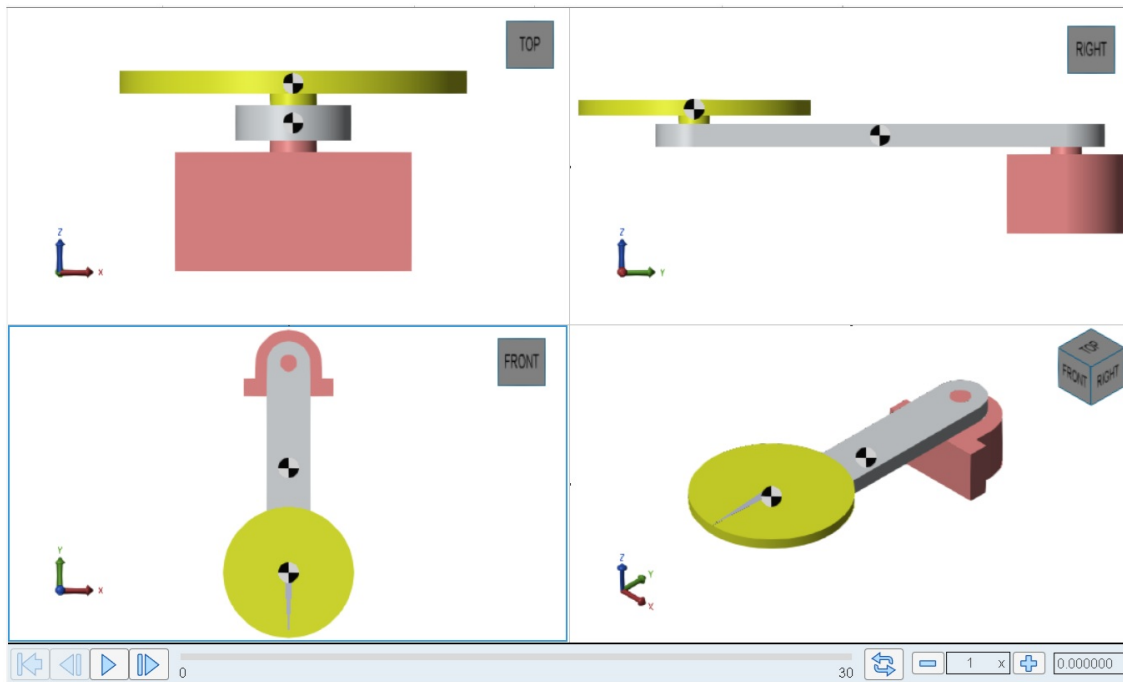


Figura 4.4: Representación del sistema en Simulink

La vista principal del simulador realizado en **Simulink** se muestra en la Figura 4.5.

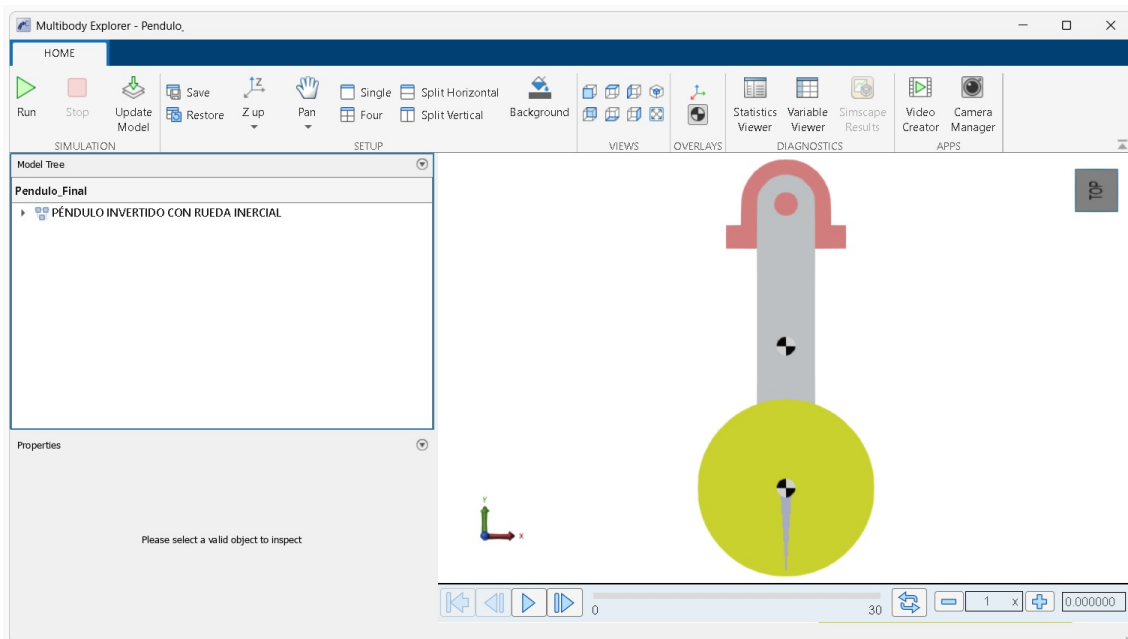


Figura 4.5: Simulador del sistema en Simulink

4.3. Validación de Controladores Clásicos

El objetivo principal de esta sección es analizar la respuesta dinámica del sistema bajo los esquemas de control PD y PID, evaluando su capacidad para estabilizar el péndulo en la posición de equilibrio vertical. Para garantizar una comparación objetiva, se consideran los mismos parámetros físicos del sistema y se emplea un índice de desempeño energético basado en la norma $\mathcal{L}_2$. El análisis se centra en dos aspectos principales: la estabilidad del sistema bajo la acción de cada controlador y la calidad de la respuesta en términos de sobreimpulso, tiempo de establecimiento y error en régimen permanente.

4.3.1. Control PD

El control proporcional-derivativo (PD) es una de las estrategias más empleadas para la estabilización de sistemas no lineales. Su acción de control se define como la suma ponderada del error de posición y su derivada temporal, lo que permite corregir desviaciones con rapidez y reducir las oscilaciones transitorias. Matemáticamente, esta ley de control puede expresarse como:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + g(q), \quad (4.3)$$

donde $\dot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ representa la velocidad articular del sistema, $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la ganancia proporcional, $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la ganancia derivativa, $g(q) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de par gravitacional, y $\tilde{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ representa el error de posición, el cual se define como la diferencia entre la posición deseada $q_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y la posición real $q \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, es decir

$$\tilde{q} = q_d - q. \quad (4.4)$$

El término proporcional genera una acción correctiva directamente proporcional a la magnitud del error, mientras que el término derivativo introduce una componente de amortiguamiento dependiente de la velocidad, lo que mejora la estabilidad y atenúa el sobreimpulso. No obstante, este esquema no elimina el error estacionario ante perturbaciones constantes o referencias escalón.

Esta ley de control tiene como objetivo estabilizar la posición de equilibrio vertical del péndulo en la posición inestable ($\pi/2 = 1.5708 = 90^\circ$), garantizando que el par aplicado por el motor sea proporcional al error angular y su velocidad.

La inclusión del término $g(q)$ asegura que el controlador compense el efecto de la gravedad, permitiendo que el sistema opere alrededor del punto de equilibrio inestable ($\pi/2 = 1.5708 \text{ rad} = 90^\circ$) sin esfuerzos innecesarios del actuador.

Para el control PD se utilizan las ganancias definidas en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3: Ganancias del controlador PD con compensación gravitacional.

Parámetro	Símbolo	Valor
Ganancia proporcional	K_p	$\text{diag}\{80.90\} \text{ N m s/rad}$
Ganancia derivativa	K_v	$\text{diag}\{48.54\} \text{ N m s/rad}$

El diagrama de bloques correspondiente a la función del control PD se presenta en la Figura 4.6. En él se identifican las señales de entrada a la función de control: el vector de posición $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, la velocidad $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (estimada mediante el observador de Nicosia) y el error de posición $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

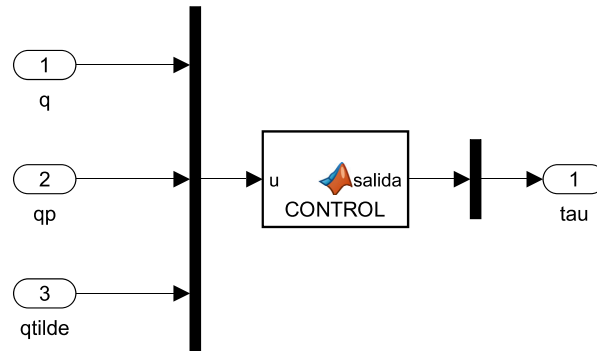


Figura 4.6: Diagrama a bloques de la función Control PD en Simulink

En la Figura 4.7 se muestra la **respuesta de la posición angular del péndulo invertido con rueda inercial** $q_p(t)$ bajo la acción del controlador PD con compensación gravitacional. La variable $q_p(t)$ se expresa en **radianes** [rad], y la gráfica muestra su convergencia hacia $\frac{\pi}{2} = 1.5708$ [rad], es decir 90° , correspondiente a la posición de inestabilidad (posición vertical eje y).

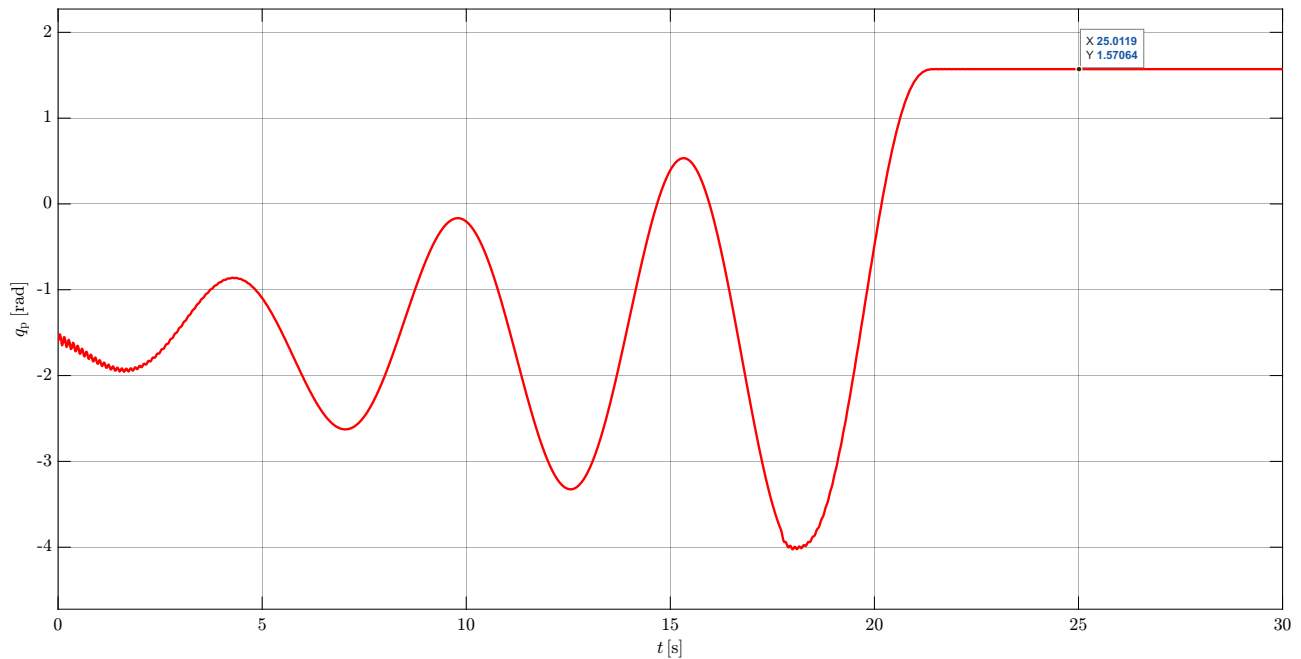


Figura 4.7: Posición en radianes descrita por el péndulo

Como se aprecia en la Figura 4.7, el péndulo parte de la posición inicial -90° , equivalente a $-\frac{\pi}{2} = -1.5708 \text{ rad} \equiv \frac{3\pi}{2} = 270^\circ = -1.5708 \text{ rad}$, y oscila hasta alcanzar la posición de referencia $q_d = 90^\circ$, es decir, $q_d = \frac{\pi}{2} = 1.5708 \text{ rad}$. La respuesta evidencia oscilaciones transitorias producto de la acción correctiva del controlador, cuyo objetivo es estabilizar el péndulo en la posición deseada.

El **bloque del observador** se encarga de estimar la velocidad angular del péndulo, la cual no puede medirse directamente debido a la ausencia de un sensor dedicado. El observador de Nicosia se ajusta comparando una de sus salidas, $\hat{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, con la salida real del sistema, $q \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. A partir de esta retroalimentación se calibran sus ganancias, lo que permite que el observador reproduzca adecuadamente el comportamiento dinámico de la posición del sistema y proporcione una estimación precisa de la velocidad angular.

Las ganancias utilizadas en el observador se presentan en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4: Ganancias del observador de Nicosia.

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidades
Ganancia tipo proporcional	H_p	64.72	rad s^{-1}
Ganancia tipo derivativa	H_v	6.472	adimensional

La Figura 4.8 presenta la velocidad estimada la cual presenta oscilaciones transitorias que desaparecen progresivamente hasta estabilizarse, momento en el cual el péndulo alcanza la posición deseada.

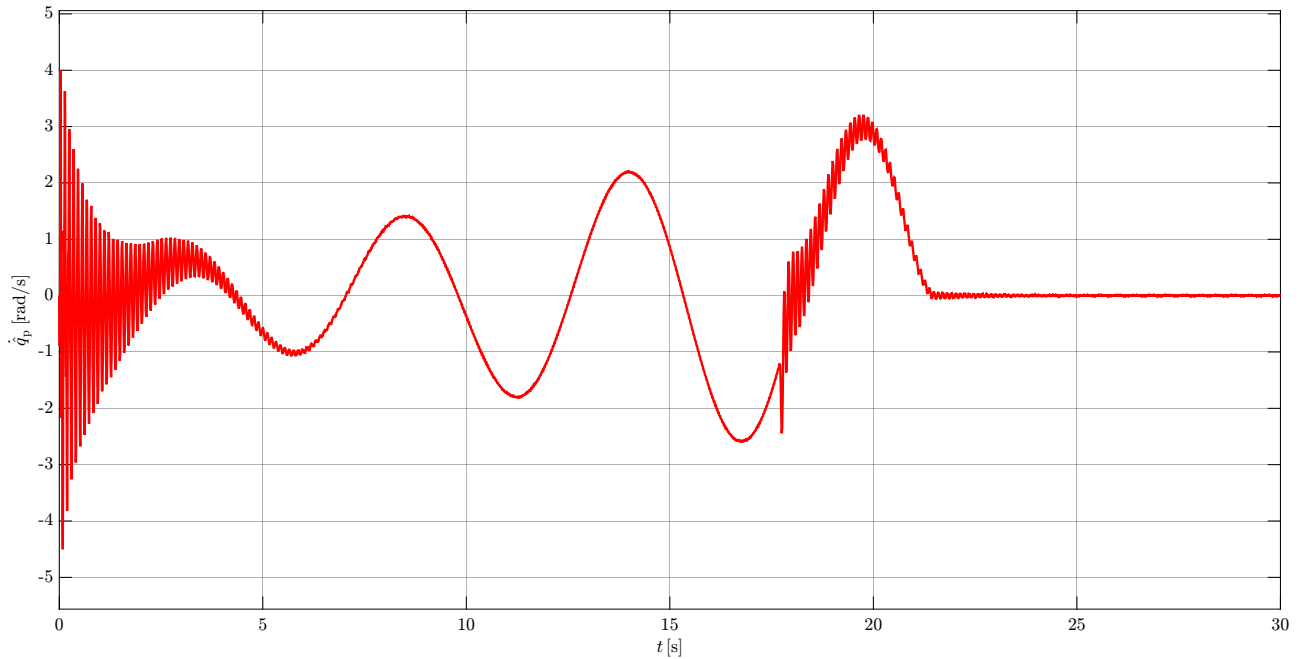


Figura 4.8: Velocidad estimada por el Observador

La Figura 4.9 presenta la señal de salida del controlador o par τ .

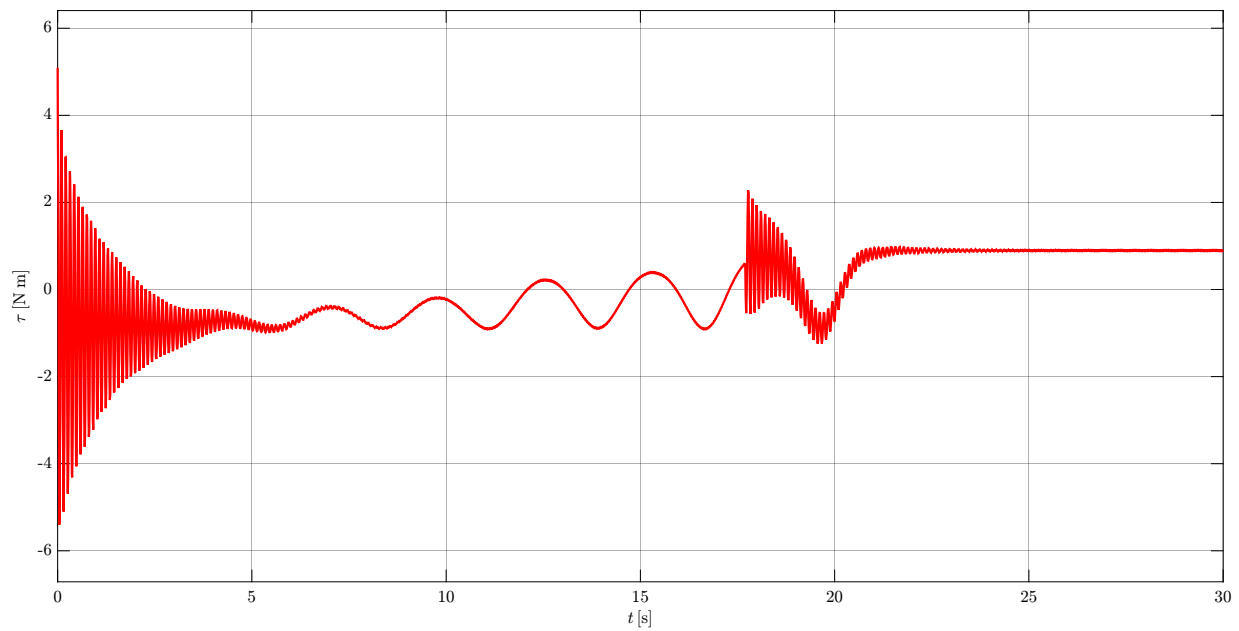


Figura 4.9: Par proporcionado por el control

Cuando las oscilaciones de la velocidad estimada desaparecen, el péndulo alcanza la posición deseada, por lo que el error de posición $\tilde{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tiende a cero, tal como se ilustra en la Figura 4.10.

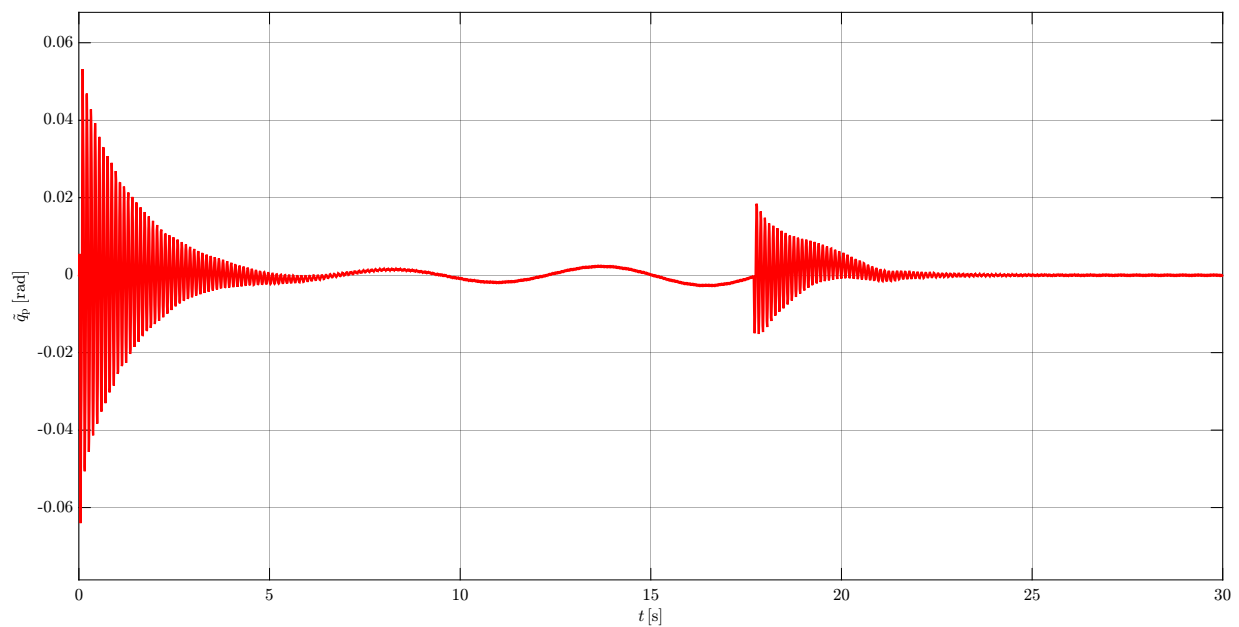


Figura 4.10: Error de posición

En la Figura 4.10 se observa que el error de posición inicia en $-90^\circ = -1.5708$ rad, valor correspondiente a la diferencia entre la condición inicial del péndulo y la posición de referencia. A medida que transcurre el tiempo, dicho error disminuye progresivamente hasta tender a cero. El error inicial de $-90^\circ = -1.5708$ rad se debe a que el péndulo invertido parte desde el eje negativo y , mientras que el objetivo de control es trasladarlo hacia el eje positivo y . En consecuencia, el péndulo debe recorrer un desplazamiento angular de 180° , por lo que la gráfica del error refleja un comportamiento coherente con la dinámica esperada del sistema.

4.3.2. Control PID

En esta sección se incorpora la acción integral, dando lugar al **controlador proporcional–integral–derivativo (PID)**, el cual se expresa como:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_i \int \tilde{q} dt + K_d \dot{\tilde{q}} + g(q) \quad (4.5)$$

donde $K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia integral.

Debe tenerse en cuenta que la acción proporcional reduce el error instantáneo, la acción integral elimina el error en régimen permanente y la acción derivativa mejora la respuesta transitoria al anticipar la variación del error.

Para el control PID se usan las mismas ganancias del control PD (4.3) y se agrega la ganancia integral mostrada en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5: Ganancia integral para el controlador PID con compensación gravitacional.

Parámetro	Símbolo	Valor
Ganancia integral	K_i	$\text{diag}\{32.36\}$ N m s/rad

La estructura del control PID realizada en Simulink se muestra en la Figura 4.11, la cual es análoga a la del control PD (Figura 4.6), pero con el bloque integral incorporado, tal y como se observa a continuación:

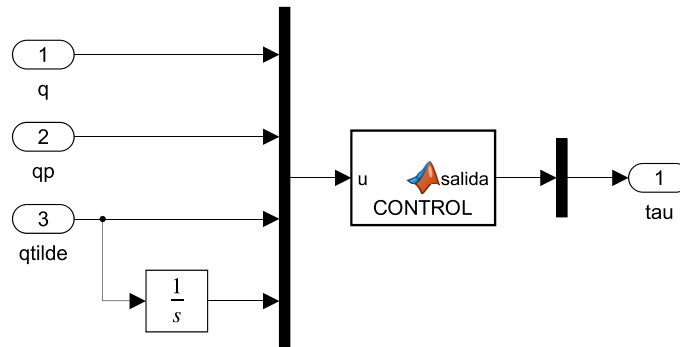


Figura 4.11: Diagrama a bloques de la función Control PID en Simulink

La posición descrita por el péndulo bajo la influencia del control PID se muestra en la Figura 4.12.

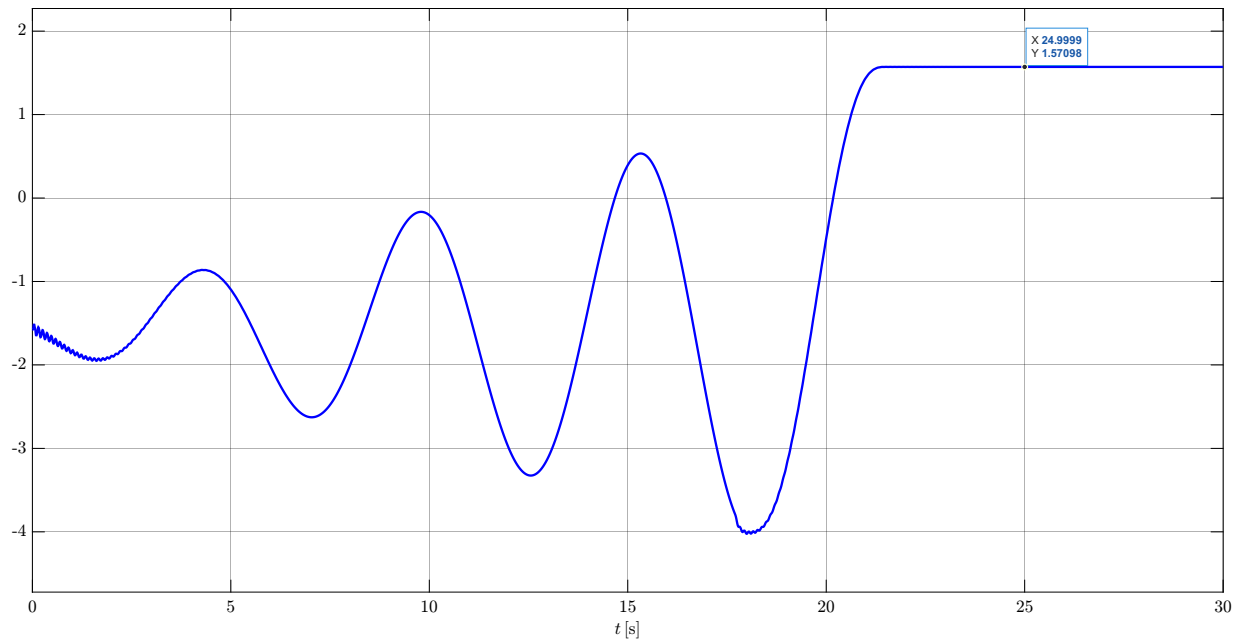


Figura 4.12: Posición descrita por el péndulo usando el control PID

Para el control PID se usa el mismo observador con las mismas ganancias. La Figura 4.13 presenta la velocidad estimada la cual se estabiliza cuando el péndulo alcanza la posición deseada.

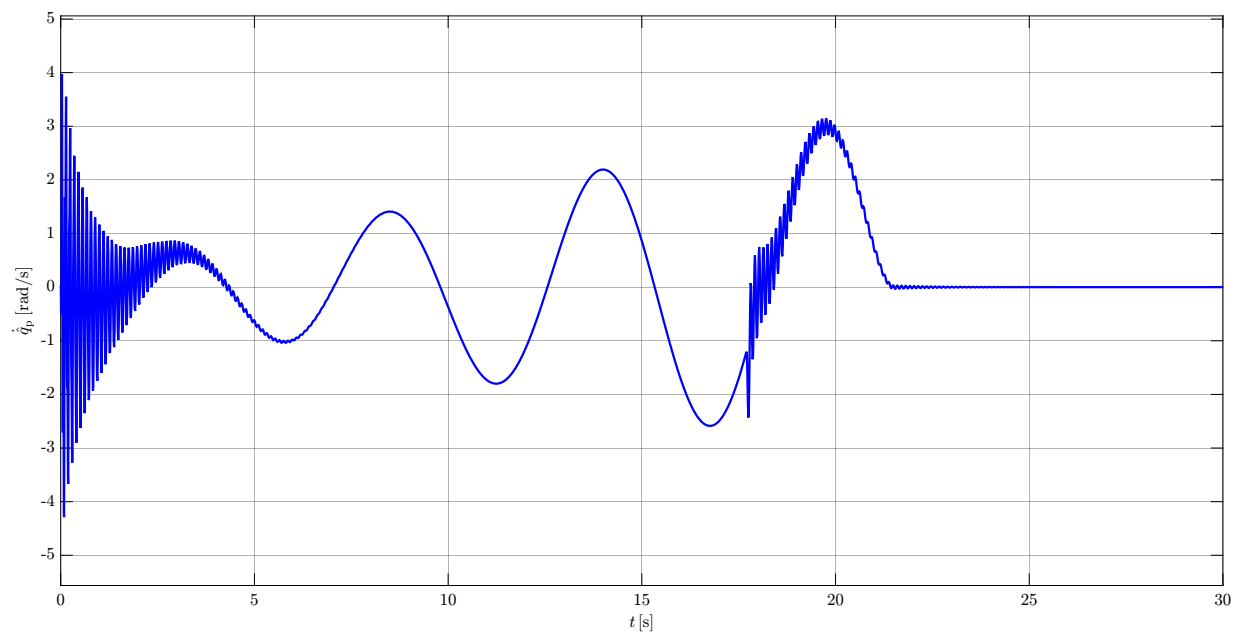


Figura 4.13: Velocidad estimada por el Observador

La Figura 4.14 presenta la señal de salida del controlador o par τ .

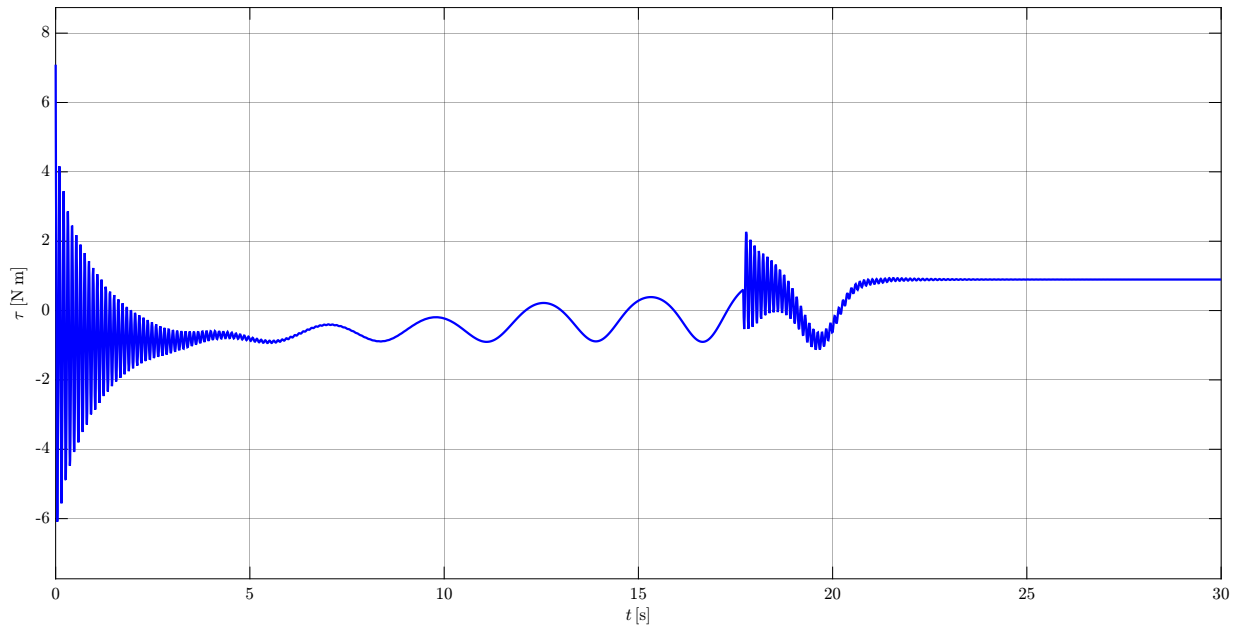


Figura 4.14: Par proporcionado por el control

Cuando el péndulo alcanza la posición deseada, las oscilaciones de la velocidad estimada desaparecen, por lo que el error de posición $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tiende a cero, tal como se ilustra en la Figura 4.15.

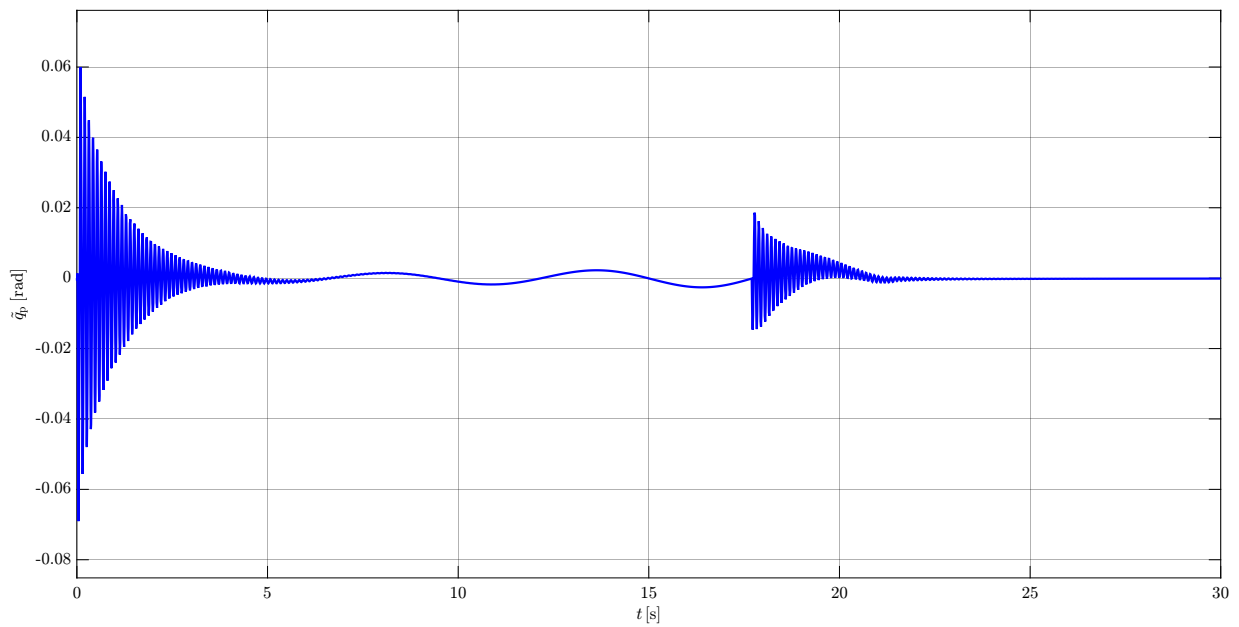


Figura 4.15: Error de posición

En la Figura 4.15 se observa que el error de posición inicia en $-90^\circ = -1.5708$ rad, es decir en el eje $-y$. A medida que transcurre el tiempo, dicho error disminuye tiende a cero.

Al comparar las posiciones realizadas por el sistema, tanto con el control PD y el control PID, se observa que usando las mismas ganancias el sistema alcanza la posición deseada, tal y como se observa en la Figura 4.16

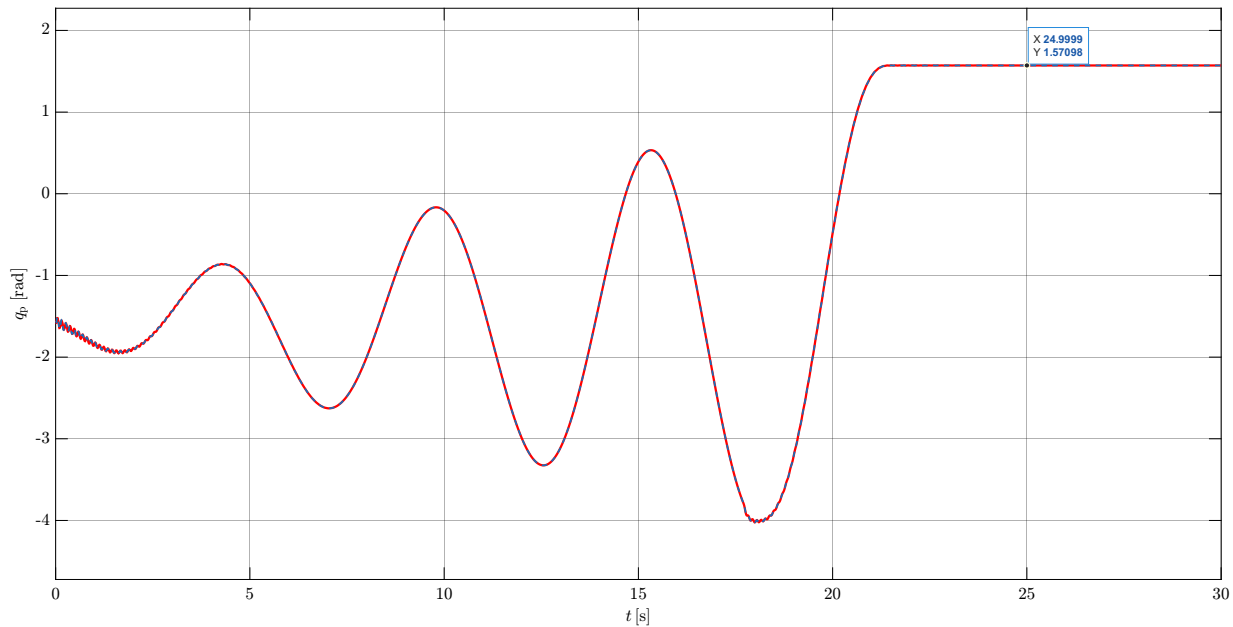


Figura 4.16: Posiciones usando el control PD (—) y el PID (---)

4.3.3. Índice de desempeño

La validación se realiza mediante simulaciones en **MATLAB/Simulink**, donde se analiza la respuesta temporal del sistema bajo dos estructuras de control: el controlador PD y el controlador PID.

Con el fin de efectuar una comparación objetiva entre ambas estrategias, se emplea un **índice de desempeño** que cuantifica el comportamiento dinámico del sistema en función del error acumulado a lo largo del tiempo.

Al resolver la ecuación (2.22) y comparar los resultados obtenidos, se observa que el controlador PD presenta un índice de desempeño de 1.618, mientras que el controlador PID alcanza un valor de 1.616.

Es importante destacar que dicho índice constituye una magnitud **adimensional**, y que el controlador con el valor numérico más bajo se considera el de mejor desempeño, ya que refleja un error global menor en la respuesta del sistema.

En la Figura 4.17 se aprecia una ligera diferencia en el desempeño entre el control PD y el control PID. El controlador PID muestra un desempeño superior debido a la acción integral, la cual contribuye a reducir el error estacionario y refinar el cumplimiento del objetivo de control. No obstante, ambas estructuras logran satisfactoriamente el propósito planteado.

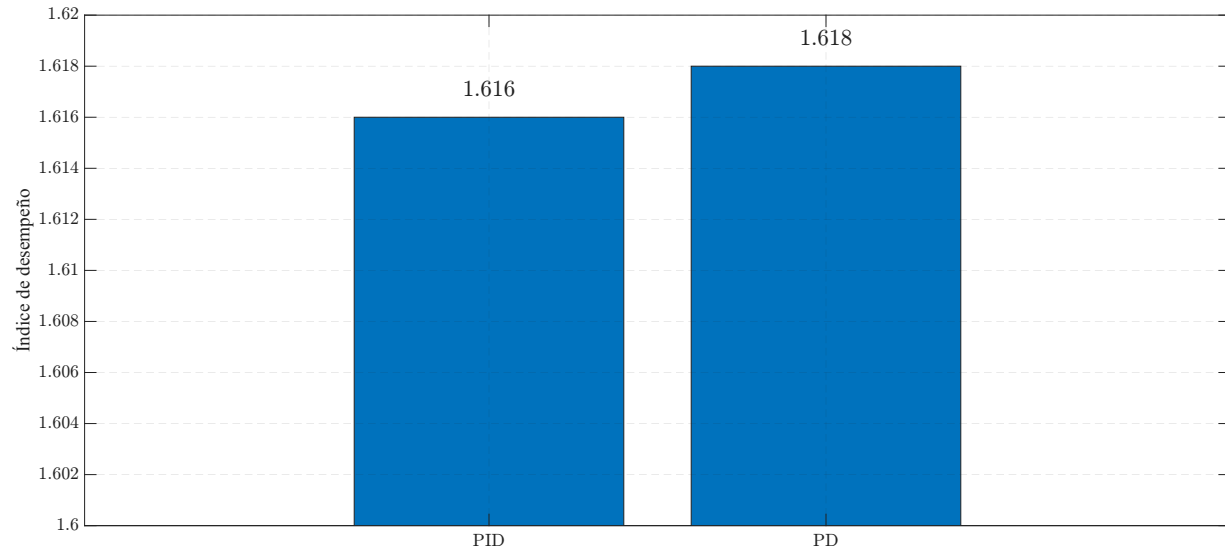


Figura 4.17: Índice de desempeño

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se desarrolló, implementó y evaluó un esquema de control para el **péndulo invertido con rueda inercial**, considerando tanto su modelado dinámico no lineal como la simulación completa del sistema en un entorno de **MATLAB/Simulink**. El diseño del controlador permitió estabilizar la posición vertical inestable del péndulo a partir de distintas condiciones iniciales, logrando un control efectivo de un sistema intrínsecamente subactuado. Su desempeño se fortaleció mediante la incorporación del **observador de Nicosia**, que posibilitó la estimación de variables no medibles directamente, mejorando la realimentación y la robustez general del lazo de control.

La validación del controlador y del observador se llevó a cabo mediante simulaciones en **Simulink**, en las cuales se verificó la estabilidad del sistema, la respuesta frente a perturbaciones y la acción del actuador. Los resultados demostraron que el sistema es capaz de estabilizarse con tiempos de respuesta aceptables y sin errores permanentes, a pesar de presentar oscilaciones naturales propias de su carácter subactuado e inestable. En términos cuantitativos, el **índice de desempeño** obtenido fue de 1.618 para el controlador PD y de 1.616 para el controlador PID, confirmando un mejor comportamiento dinámico del último debido a la acción integral, la cual reduce el error acumulado en el régimen estacionario. Cabe destacar que este índice constituye una magnitud **adimensional**, y que un valor menor indica un mejor rendimiento global del sistema.

Entre las principales limitaciones observadas destacan la saturación del actuador ante restricciones de voltaje, la sensibilidad del sistema a perturbaciones externas y errores de modelado, así como la dependencia de una estimación precisa de estados, la cual puede degradarse bajo variaciones significativas en las condiciones de operación. Estas limitaciones reflejan el reducido margen de control característico de los sistemas subactuados, aunque los resultados obtenidos permanecen coherentes con el comportamiento esperado de este tipo de plantas.

Adicionalmente, la representación tridimensional desarrollada en **SolidWorks** e integrada en **Simscape Multibody** permitió enriquecer la comprensión del sistema más allá del análisis matemático, ofreciendo una visión más cercana a una futura implementación física.

En síntesis, los **objetivos planteados** al inicio de este trabajo fueron alcanzados satisfactoriamente. El estudio realizado demuestra la viabilidad de estabilizar un sistema altamente inestable mediante técnicas de control clásico apoyadas en observadores de estado, validadas dentro de un entorno de simulación avanzado. Este trabajo sienta las bases para futuras investigaciones orientadas al desarrollo de estrategias de **control robusto, adaptativo o inteligente**, así como a la **implementación experimental** del sistema estudiado, considerando los efectos del ruido, la no linealidad y las limitaciones del actuador en un prototipo físico real.

Apéndice A

Dibujo técnico

En este apéndice se presentan los **planos y vistas técnicas** de las piezas que integran el prototipo del péndulo invertido con rueda inercial, Figura A.1. Todas las piezas fueron **diseñadas y modeladas en SolidWorks®** a partir de las dimensiones funcionales definidas en el modelado dinámico. Para cada componente se asignaron **materiales** y **propiedades geométricas** coherentes (masa, centro de gravedad y momentos de inercia), y se generaron los **dibujos 2D** con cotas, tolerancias básicas y acotaciones necesarias para su documentación.

Con el fin de mantener la trazabilidad entre el diseño CAD y la simulación, el ensamble fue exportado mediante **Simscape Multibody Link** para su uso en MATLAB/Simulink, conservando la correspondencia entre sólidos, uniones y parámetros físicos.

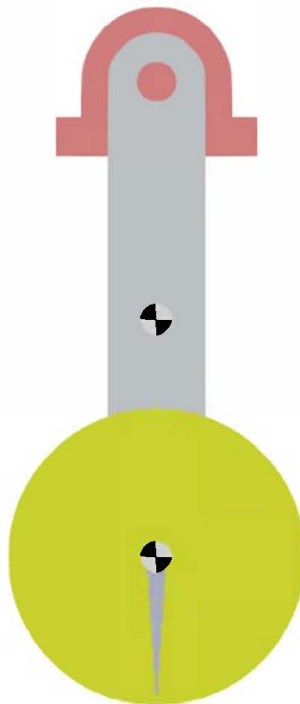
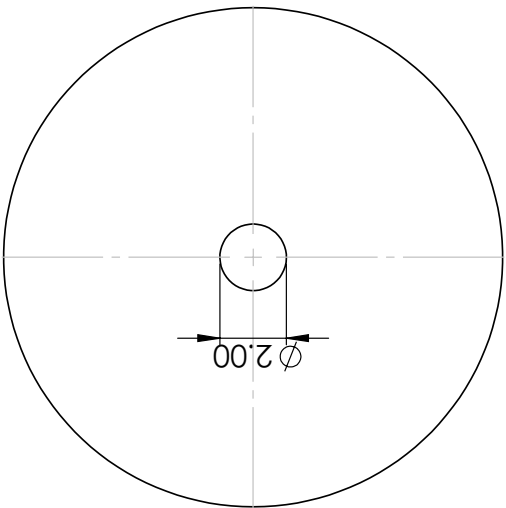
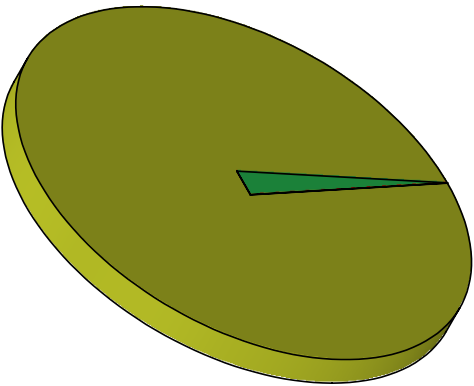
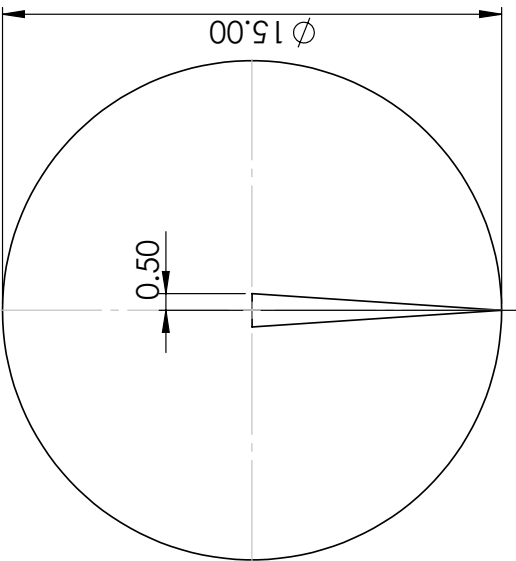
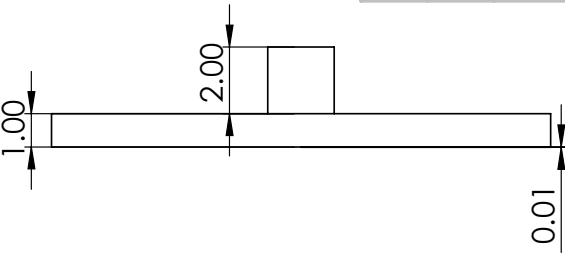
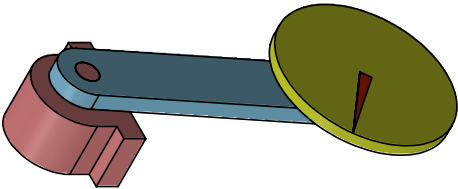
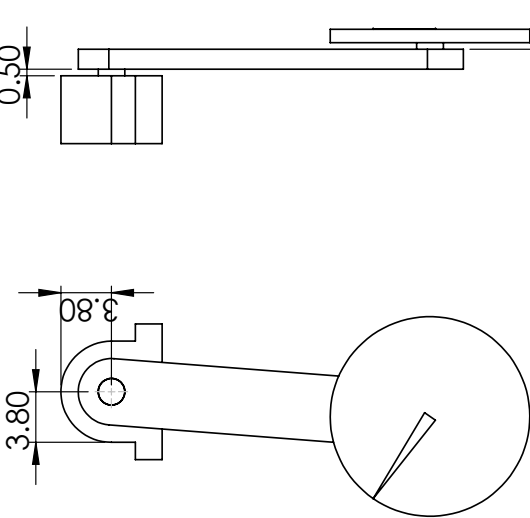
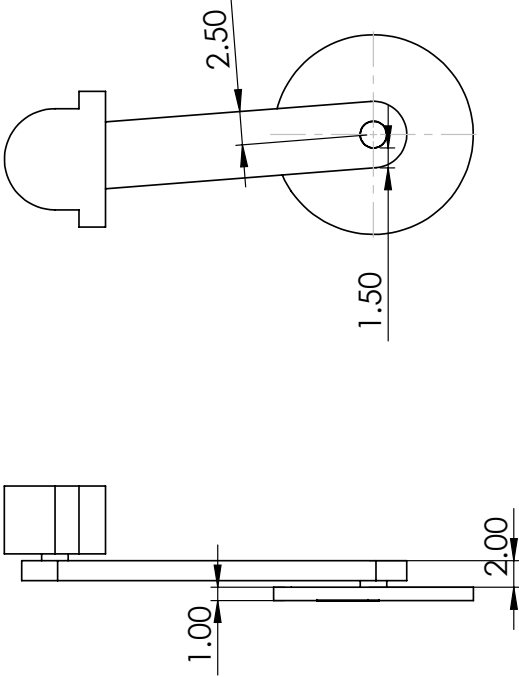


Figura A.1: Péndulo Invertido con Rueda Inercial

[illegible]

1		2		3		4																																											
NOTAS Masa = 237.95 gramos Volumen = 183.03 centímetros cúbicos																																																	
D		C		B		A																																											
<table border="1"><thead><tr><th>NO.</th><th>CANT.</th><th>MATERIAL</th></tr></thead><tbody><tr><td>R-01</td><td>1</td><td>PVC RÍGIDO</td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr></tbody></table>		NO.	CANT.	MATERIAL	R-01	1	PVC RÍGIDO													<table border="1"><thead><tr><th colspan="2">NOMBRE DE LA PIEZA:</th><th>NO. DE PIEZA:</th></tr></thead><tbody><tr><td colspan="2">RUEDA INERCIAL</td><td>PIEZA003</td></tr><tr><td colspan="2">DESCRIPCIÓN DE LA PIEZA:</td><td>RUEDA INERCIAL (ACTUADOR)</td></tr><tr><td colspan="2">BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA</td><td> </td></tr></tbody></table>		NOMBRE DE LA PIEZA:		NO. DE PIEZA:	RUEDA INERCIAL		PIEZA003	DESCRIPCIÓN DE LA PIEZA:		RUEDA INERCIAL (ACTUADOR)	BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA			<table border="1"><thead><tr><th colspan="2">DIBUJO: PÉNDULO INVERTIDO CON RUEDA INERCIAL</th></tr></thead><tbody><tr><td>ALUMNO:</td><td>JUAN DE DIOS HERNÁNDEZ ORTEGA</td></tr><tr><td>FECHA:</td><td>2025</td></tr><tr><td>ESCALA:</td><td>1:10</td></tr><tr><td>REVISIÓN:</td><td>1:0</td></tr><tr><td>HOJA:</td><td>3 DE 4</td></tr></tbody></table>		DIBUJO: PÉNDULO INVERTIDO CON RUEDA INERCIAL		ALUMNO:	JUAN DE DIOS HERNÁNDEZ ORTEGA	FECHA:	2025	ESCALA:	1:10	REVISIÓN:	1:0	HOJA:	3 DE 4		
		NO.	CANT.	MATERIAL																																													
		R-01	1	PVC RÍGIDO																																													
NOMBRE DE LA PIEZA:		NO. DE PIEZA:																																															
RUEDA INERCIAL		PIEZA003																																															
DESCRIPCIÓN DE LA PIEZA:		RUEDA INERCIAL (ACTUADOR)																																															
BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA																																																	
DIBUJO: PÉNDULO INVERTIDO CON RUEDA INERCIAL																																																	
ALUMNO:	JUAN DE DIOS HERNÁNDEZ ORTEGA																																																
FECHA:	2025																																																
ESCALA:	1:10																																																
REVISIÓN:	1:0																																																
HOJA:	3 DE 4																																																
D		C		B		A																																											

4	3	2	1												
D	C	B	A												
  															
NOTAS Masa = 3055.49 gramos Volumen = 678.87 centímetros cúbicos															
<table><thead><tr><th>NO.</th><th>CANT.</th><th>MATERIAL</th></tr></thead><tbody><tr><td>E-01</td><td>1</td><td>Acero Aleado</td></tr><tr><td>B-01</td><td>1</td><td>ALEACIÓN 6061</td></tr><tr><td>R-01</td><td>1</td><td>PVC RÍGIDO</td></tr></tbody></table>				NO.	CANT.	MATERIAL	E-01	1	Acero Aleado	B-01	1	ALEACIÓN 6061	R-01	1	PVC RÍGIDO
NO.	CANT.	MATERIAL													
E-01	1	Acero Aleado													
B-01	1	ALEACIÓN 6061													
R-01	1	PVC RÍGIDO													
NOMBRE DE LA PIEZA: PÉNDULO CON RUEDA INERCIAL NO. DE PIEZA: ENSAMBLE001 DESCRIPCIÓN DE LA PIEZA: PÉNDULO CON RUEDA INERCIAL ENSAMBLE BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA															
DIBUJO: PÉNDULO INVERTIDO CON RUEDA INERCIAL		ALUMNO: JUAN DE DIOS HERNÁNDEZ ORTEGA HOJA: 4 DE 4													
ASESOR: PABLO SÁNCHEZ SÁNCHEZ		FECHA: 2025 ESCALA: 1:10 REVISIÓN: 1:0													
4	3	2	1												

Bibliografía

- [1] D. Zaborniak, K. Patan, and M. Witczak, "Design, implementation, and control of a wheel-based inverted pendulum," *Electronics*, vol. 13, no. 3, p. 514, 2024. Incluye diseño físico, modelado dinámico y control PID y LQR con rueda inercial.
- [2] O. Boubaker and R. Iriarte, eds., *The Inverted Pendulum in Control Theory and Robotics: From Theory to New Innovations*. London, UK: The Institution of Engineering and Technology, 2017.
- [3] K. Yoshida, M. Sekikawa, and K. Hosomi, "Nonlinear analysis on purely mechanical stabilization of a wheeled inverted pendulum on a slope," *arXiv preprint arXiv:1509.00605*, 2015. Disponible en arXiv. Analiza sistemas subactuados como el péndulo invertido con rueda inercial.
- [4] S. Nikolov and V. Nedev, "Bifurcation analysis and dynamic behaviour of an inverted pendulum with bounded control," *Nonlinear Dynamics*, vol. 84, no. 3, pp. 1955–1968, 2016. Se discute que el sistema es subactuado, con torque aplicado a la rueda mediante motor DC.
- [5] R. Kelly, R. Carelli, C. C. de Wit, L. Basañez, and J. Reinoso, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. México: Editorial Alfaomega, Pearson Educación, 2010.
- [6] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3rd ed., 2002.
- [7] P. Sánchez-Sánchez, A. Gutiérrez-Giles, J. Pliego-Jiménez, and M. A. Arteaga-Pérez, "Seguimiento de trayectorias con incertidumbre del modelo usando un diferenciador robusto," *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 16, no. 4, pp. 423–434, 2019.