



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Decaimientos electromagnéticos con cambio de sabor  
leptónico y violación de CPT en la Extensión del  
Modelo Estándar

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para obtención del grado de

**Licenciado en Física**

por

Marcos Cerezo Vargas

Asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Puebla Pue.

Agosto del 2022



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Decaimientos electromagnéticos con cambio de sabor  
leptónico y violación de CPT en la Extensión del  
Modelo Estándar

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para obtención del grado de

**Licenciado en Física**

por

Marcos Cerezo Vargas

Asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Puebla Pue.

Agosto del 2022



**Título:** Decaimientos electromagnéticos con cambio de sabor leptónico y violación de CPT en la Extensión del Modelo Estándar

**Estudiante:** MARCOS CEREZO VARGAS

COMITÉ

---

Dr. Arturo Fernández Téllez  
Presidente

---

Dr. Héctor Novales Sánchez  
Secretario

---

Dr. Gilberto Tavares Velazco  
Vocal

---

Dr. Guillermo Tejeda Muñoz  
Vocal

---

Dr. J. Jesús Toscano Chávez  
Asesor

---

# Agradecimientos

---

Quiero agradecer sincera y profundamente a mis padres, que llevan un par de años viendo a su hijo estudiando y trabajando con cosas extrañas en el pizarrón. Gracias porque sus miradas al verme regresar de clases me expresaban más de lo que necesitaba, gracias por confiar en mí y por acompañarme en este primer paso de mi vida adulta. Gracias, madre, por prevenirme y aconsejarme no estudiar física, porque sabías lo difícil que sería. Gracias, padre, porque no dudaste en apoyar mi decisión desde la primera vez que la mencioné.

Quiero agradecer mi asesor de tesis el Dr. J. Jesús Toscano Chávez por su apoyo, dedicación y tiempo que hicieron posible la conclusión de este proyecto. Debo mencionar que es un profesor a quien respeto y admiro demasiado por su carrera como investigador y por su dedicación en la docencia, sin duda, tomaré como referencia la manera elegante con la que imparte clase.

Agradezco a mis hermanos, Alfredo y Charly, por respetar mi espacio de trabajo, por apoyarme a su manera y porque, incluso dentro de este mundo académico, me han servido como ejemplo y me han ayudado mucho a crecer como persona.

También quiero agradecer a Jacqueline y Roberto, su amistad estos años ha sido clave para no dejarme vencer. Gracias por las risas, por tantas pláticas y tantos momentos juntos que marcaron mi persona y guardaron muchos recuerdos en mi vida. Por último, un agradecimiento muy especial a Tania, que me acompañó en este proyecto, gracias por creer en mí y por animarme cada día a trabajar en mi tesis.

<b>1. El Modeo Estándar</b>	<b>1</b>
1.1. El Sector Electrodébil . . . . .	3
1.1.1. El mecanismo de Higgs . . . . .	4
1.1.2. El sector de Higgs . . . . .	6
1.1.3. El sector de Yang-Mills . . . . .	10
1.1.4. El sector de Yukawa . . . . .	12
1.1.5. El sector de Corrientes . . . . .	15
<b>2. La Extensión del Modelo Estándar</b>	<b>20</b>
2.1. Simetría de Lorentz y CPT . . . . .	20
2.1.1. El Grupo de Lorentz . . . . .	21
2.1.2. El Grupo de Lorentz y simetría CPT . . . . .	21
2.2. Violación de Lorentz y sus efectos. . . . .	23
2.3. La extensión del modelo estándar . . . . .	24
2.3.1. El sector leptónico impar bajo CPT . . . . .	25
<b>3. Los decaimientos <math>l_A \rightarrow l_B \gamma</math></b>	<b>28</b>
3.1. La amplitud invariante . . . . .	28
3.2. La anchura de decaimiento $\Gamma(l_A \rightarrow l_B \gamma)$ . . . . .	32
3.3. Branching ratio $\text{BR}(l_A \rightarrow l_B \gamma)$ . . . . .	35
3.3.1. Cotas para $b_0^{AB}$ y $ \vec{b}^{AB} $ . . . . .	36
<b>4. Conclusiones</b>	<b>40</b>
<b>5. Bibliografía</b>	<b>41</b>

---

# Índice de cuadros

---

1.1. Leptones (Spin 1/2) . . . . .	2
1.2. Quarks (Spin 1/2) . . . . .	2
1.3. Mediadores (Spin 1/2) . . . . .	3
3.1. Reglas de Feynman . . . . .	29

---

# Resumen

---

En el presente trabajo de tesis se estudian los decaimientos a nivel árbol  $l_A \rightarrow l_B \gamma$ , en el contexto de la extensión del modelo estándar (SME). Haciendo uso de las reglas de Feynman necesarias, se expone el cálculo de la anchura de decaimiento, en donde se presenta un resultado en términos del campo de fondo que implica la posible violación en la simetría de Lorentz y CPT. Se calculan cotas para el campo de fondo que introduce violación de CPT a partir de límites experimentales para los decaimientos de interés:  $\mu \rightarrow e \gamma$ ,  $\tau \rightarrow e \gamma$  y  $\tau \rightarrow \mu \gamma$ .

---

# Introducción

---

Toda teoría de campos de partículas elementales enfrenta el problema de combinar la estructura espaciotemporal de la relatividad especial con la teoría cuántica [1]. Por otra parte, es bien sabido que las leyes físicas cuentan con una gran cantidad de simetrías tales como invariancia de Lorentz, simetría gauge, invariancia de traslaciones, etc. [2]. La simetría de Lorentz, en especial, presenta la posibilidad de no ser exacta a muy altas energías o, equivalentemente, a muy pequeñas distancias. Hay dos posibles causas que pueden generar la violación en esta simetría, una de ellas surge tras el rompimiento espontáneo del grupo  $SO(1,3)$ , lo cual implica que los fotones son en realidad bosones de Goldstone [3]; la segunda causa posible surge al considerar el Modelo Estándar (SM, por sus siglas en inglés) sobre un espacio no conmutativo [4]. Todo enfoque de la violación de la simetría de Lorentz está presente en el llamado Extensión del Modelo Estándar (SME) [5], el cual presenta una teoría efectiva del Modelo Estándar que, además de presentar violación en la simetría, incluye violación de CPT.

La simetría CPT, también conocida como Teorema CPT [6], es una simetría discreta conjunta de conjugación de carga (C), paridad (P) y reversión temporal (T). Las operaciones P y T son observables a nivel clásico, mientras que C es una operación puramente cuántica. Todas las teorías cuánticas de campo, son construidas asumiendo que satisfacen la operación conjunta CPT, es decir, las lagrangianas asociadas a las teorías son pares bajo la aplicación sucesiva de las tres transformaciones. Sin embargo, tales simetrías no se conservan separadamente en algunas teorías. Tal es el caso del SM, el cual viola separadamente cada una de ellas e incluso la operación de CP. Note que si CPT se conserva en general, entonces la violación de CP implica la violación de T.

La localidad, unitariedad de la matriz  $S$  y la simetría de Lorentz dan soporte al Teorema CPT. Además, esta simetría conlleva a importantes resultados: para una pareja partícula-antipartícula, la simetría CPT implica igualdad de masas, diferencia en la carga eléctrica sólo en un signo, y en el caso de partículas inestables, tiempos de vida iguales. Se debe mencionar que violación de CPT implica LV [7], pero que la afirmación inversa no es verdadera, así que podemos tener violación en la simetría de Lorentz (LV) sin que se viole CPT.

El Modelo Estándar Extendido (SME) estudia casos en donde la nueva física implique violaciones CPT y de Lorentz, desarrollando un sistema que considere los efectos del rompimiento espontáneo de simetría como un escenario de una teoría efectiva a bajas energías [8]. El modelo preserva la simetría  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , y su lagrangiana consiste en todos los términos comunes de SM, añadiendo términos que incluyan campos del Modelo Estándar y puedan violar las simetrías de Lorentz y CPT.

En el presente trabajo de tesis se estudian los decaimientos raros electromagnéticos  $l_A \rightarrow l_B \gamma$ , con  $l_A$  un leptón cargado de generación mayor a  $l_B$ , existiendo tres casos, en el contexto del SME. Actualmente se sabe que los neutrinos tienen masa [9], lo que implica una posible violación del sabor leptónico, esto puesto que el SM considera a los neutrinos con masa exactamente igual a cero, es decir, dichos decaimientos están

estrictamente prohibidos a toda orden de la serie perturbativa. El SME incorpora efectos de violación del sabor leptónico (LFV), así, el decaimiento  $l_A \rightarrow l_B \gamma$ , es objeto de estudio en la literatura en diversos contextos, puesto que presenta LFV. El propósito de este proyecto de tesis es usar las restricciones experimentales que existen sobre estos decaimientos [10] para obtener cotas sobre el sector leptónico de la SME que introduce violación de CPT.

Esta tesis está organizada como sigue: en el capítulo uno se presenta un resumen del Modelo Estándar con énfasis en el sector electrodébil; el capítulo dos muestra una descripción cualitativa de la Extensión del Modelo Estándar, haciendo hincapié en el sector leptónico impar bajo CPT y las respectivas reglas de Feynman; en el tercer capítulo se expone el cuerpo importante de este trabajo: la anchura de decaimiento  $\Gamma(l_A \rightarrow l_B \gamma)$  en términos del campo de fondo, y el cálculo de las cotas de los campos de fondo asociados a los casos  $\mu \rightarrow e \gamma$ ,  $\tau \rightarrow e \gamma$  y  $\tau \rightarrow \mu \gamma$ ; por último, en el cuarto capítulo se presentan las conclusiones.

---

# 1. El Modeo Estándar

---

En la actualidad se conocen cuatro interacciones fundamentales en la naturaleza: la gravedad, la interacción débil, la interacción electromagnética y la interacción fuerte. Dos de estas interacciones tienen efectos no observables en la percepción natural humana, es hasta el análisis de efectos nucleares o subnucleares cuando logramos percibir los efectos de estas fuerzas. Es aquí en donde la física de partículas interviene para estudiar con mejor detalle la naturaleza de estas interacciones.

El SM, es un modelo que describe la naturaleza e interacciones fundamentales de las partículas elementales. Este modelo describe a nivel fundamental las así llamadas partículas de materia, que son fermiones de espín  $1/2$ , las cuales interactúan entre sí mediante el intercambio de los mediadores de las interacciones fundamentales, llamados bosones de norma [11].

El SM es una teoría cuántica de campos, basada en el grupo de norma  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . La interacción fuerte está descrita por el grupo  $SU(3)_C$ , donde  $C$  hace referencia al color;  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  describe la interacción electrodébil, la cual se rompe espontáneamente al grupo electromagnético  $U(1)_Q$ , a la escala de Fermi  $v$  ( $v$  es del orden de  $246 \text{ GeV}$ ).

Para poder trabajar con las ideas que ha desarrollado esta teoría, es necesario aclarar lo que entendemos como partícula, diferentes tipos de partículas y cómo estas interactúan. Una idea de lo que entendemos por partícula, es un punto constituido por materia que no presenta una subestructura conocida hasta los límites actuales de  $10^{-18} - 10^{-19}m$ . Cada partícula cuenta con propiedades, o números cuánticos, y estos son usados para implementar una clasificación de las partículas conocidas, y cumplen con una serie de reglas que delimitan la manera en que se comporta la descripción que se tiene hasta ahora del universo conocido. Las cantidades que definen la individualidad de cada partícula son, por ejemplo, la masa, el espín, la carga eléctrica, etc.

Una primera clasificación de las partículas elementales es la división de estas en dos bloques. El primer bloque está conformado por fermiones de spin  $s = \frac{1}{2}$ , que como ya se había mencionado, es el bloque que constituye la forma más básica de la materia. Los fermiones, a su vez, se clasifican en leptones y quarks.

Los constituyentes fundamentales de la materia existen en pares, es decir, existe una antipartícula con la misma masa y spin, pero con carga opuesta; este concepto es consecuencia directa de la unión entre la teoría de la relatividad especial y la mecánica cuántica, además de ser un hecho experimental irrefutable. Los leptones conocidos son: el electrón  $e^-$ , el muón  $\mu^-$  y tau  $\tau^-$ . Todos ellos con carga eléctrica negativa  $Q = -1$ ; y sus correspondientes neutrinos:  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ , con carga eléctrica  $Q = 0$ . Y por cada partícula existe una antipartícula, por lo que realmente contamos con 12 leptones en total.[12] [13].

Además, los leptones componen tres familias denotadas por  $L_i (i = e, \mu, \tau)$ . Estos objetos son dobletes de  $SU(2)_L$  de leptones izquierdos. Los números cuánticos y propiedades físicas de los leptones quedan descritos en la tabla 1.1.

Cuadro 1.1: Leptones (Spin 1/2)

Generación	Sabor	Carga ( $e$ carga-protón)	Masa (MeV/c <sup>2</sup> )	Tiempo de vida (s)
Primera	electrón ( $e$ )	-1	0.510999	$\infty$
	neutrino $e$ ( $\nu_e$ )	0	0	—
Segunda	muón ( $\mu$ )	-1	105.659	$2.19703 \times 10^{-6}$
	neutrino $\mu$ ( $\nu_\mu$ )	0	0	—
Tercera	tau ( $\tau$ )	-1	1776.99	$2.91 \times 10^{-13}$
	neutrino $\tau$ ( $\nu_\tau$ )	0	0	—

La segunda clasificación de los fermiones son los quarks. Los quarks conocidos son de seis diferentes sabores:  $u, d, s, c, b$  y  $t$  y tienen carga fraccionaria  $Q = \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$  y  $\frac{2}{3}$  respectivamente. Estos tienen un número cuántico adicional, el color, el cual ocurre en tres tipos, normalmente denotado como  $q_i, i = 1, 2, 3$ . Sabemos que el color no se ha visto en la naturaleza y por lo tanto los quarks elementales siempre están confinados en sistemas compuestos. Los sistemas de quarks más elementales son: los bariones, con número bariónico  $B \pm 1$ , conformado por tres quarks; y los mesones, con número bariónico  $B = 0$ , formado por un par quark-antiquark.

Las tres familias de quarks son dobletes de  $SU(2)_L$ ; y a su vez existen seis singletes de quarks derechos:  $u_R, d_R, c_R, s_R, t_R$  y  $b_R$ . Cada quark  $q_i$  se transforma como un triplete de  $SU(3)_C$ , son influenciados por la interacción fuerte debido a su color asociado, y la interacción es medida por vectores sin masa llamados gluones. Los números cuánticos y propiedades físicas de los quarks quedan descritos en la tabla 1.2.

Cuadro 1.2: Quarks (Spin 1/2)

Generación	Sabor	Carga ( $e$ carga-protón)	Masa (MeV/c <sup>2</sup> )
Primera	down ( $d$ )	$-1/3$	7
	up ( $u$ )	$2/3$	3
Segunda	strange ( $s$ )	$-1/3$	120
	charm ( $c$ )	$2/3$	1200
Tercera	bottom ( $b$ )	$-1/3$	4300
	top ( $t$ )	$2/3$	174000

La segunda clasificación de partículas elementales son las de interacción. En la Física de Partículas las interacciones son medidas por el intercambio de estas partículas fundamentales llamadas bosones, con spin  $S = 1$ . El fotón,  $\gamma$ , es la partícula intercambiada en las interacciones electromagnéticas; los ocho gluones,  $g_\alpha; \alpha = 1, \dots, 8$ , son los mediadores de la interacción fuerte entre los quarks; y los tres bosones débiles,  $W^\pm$  y  $Z$ , son los intermediarios de la interacción débil. Los números cuánticos y propiedades físicas de los mediadores quedan descritos en la tabla 1.3.

Además, existe una partícula escalar neutra, llamada bosón de Higgs, la cual es

Cuadro 1.3: Mediadores (Spin 1/2)

Interacción	Mediador	Carga ( $e$ carga-protón)	Masa ( $\text{MeV}/c^2$ )	Tiempo de vida (s)
Débil	$W^\pm$ (cargado)	$\pm 1$	80,420	$3.11 \times 10^{-25}$
	$Z^0$ (neutral)	0	91,190	$2.64 \times 10^{-25}$
Electromagnética	$\gamma$ (fotón)	0	0	$\infty$
Fuerte	$g$ (8 gluones)	0	0	$\infty$

la responsable de proveer de masa a todas las partículas del modelo, con la excepción quizás de los neutrinos. El bosón de Higgs está estrechamente vinculada a la interacción débil.

## 1.1. El Sector Electrodébil

En 1961 [S. Lee Glashow](#) propuso el unificar las interacciones débiles y electromagnéticas, mixturarlas en un sólo sistema teórico como manifestaciones diferentes de una interacción fundamental “electrodébil”. El primer gran problema que se presentó a esta idea fue la gran diferencia de intensidad entre ambas fuerzas, esto podía resolverse si las interacciones débiles estuvieran mediadas por partículas extremadamente masivas. Esta solución fue propuesta por [S. Weinberg](#) y [A. Salam](#), en 1967, en la forma del “mecanismo de Higgs”.

El Modelo Estándar Electrodébil (o GSW), ofrece una descripción detallada de las interacciones entre los quarks y los leptones. Teóricamente, esta está basada en el grupo de norma no abeliano  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ; este modelo contiene a la electrodinámica cuántica (QED) y el modelo de Fermi, mediante el rompimiento espontáneo de simetría (SSB). [[14](#)] [[15](#)]

En la teoría electrodébil, los estados de helicidad de los leptones y quarks son distinguibles, es decir, los mediadores correspondientes se acoplan a estos estados con diferente intensidad; esto implica violación de paridad.

Como ya se había mencionado anteriormente, los leptones y los quarks, se ordenan en tres dobletes izquierdos de  $SU(2)_L$ , denominados familias; y a su vez, existen tres singletes de leptones derechos y seis singletes de quarks derechos. Todos estos resumidos en la ecuación [1.1](#)

$$\begin{aligned}
 L_i &= \begin{pmatrix} v_i \\ l_i \end{pmatrix}_L ; \quad l_{R_i} \quad i = e, \mu, \tau \\
 Q_i &= \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L ; \quad u_{R_i} \text{ y } d_{R_i}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

La lagrangiana invariante de norma del grupo electrodébil puede ser dividida en dos partes: una que contenga los campos bosónicos, y que a su vez sea dividida en los sectores de Higgs y de Yang-Mills; y la otra parte conteniendo fermiones y bosones, dividida en los sectores de corriente y de Yukawa [16]. En general, la lagrangiana del modelo GSW se divide en el sector de Higgs, el sector de Yukawa, el sector de corrientes y el sector de Yang-Mills, una breve descripción de estos y del mecanismo de Higgs se proporcionará en las siguientes secciones, con una previsualización de esta en la ecuación 1.2 .

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_b \\ \mathcal{L}_f &= \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_C; \quad \mathcal{L}_b = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_H \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_C + \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_H\end{aligned}\tag{1.2}$$

### 1.1.1. El mecanismo de Higgs

El dotar de masa a los mediadores de la teoría GSW implica el rompimiento de simetría en esta teoría de manera explícita, y por lo tanto, haría inconsistente a la teoría al volverse no-renormalizable. Para evitar esto, es necesario introducir la noción de rompimiento espontáneo de una simetría.

#### El rompimiento espontáneo de simetría.

Rompimiento espontáneo de simetría (SSB, por sus siglas en inglés) ocurre cuando el lagrangiano es invariante bajo un grupo de transformaciones pero el estado base del sistema (el estado de vacío en teoría de campos) no lo es.

Planteando una idea general. Sea  $G$  un grupo de Lie y  $H$  un subgrupo de  $G$  ( $H \subset G$ ).  $G$  es de dimensión  $\text{Dim}_G$  con generadores  $T^G$ ; mientras que  $H$  es de dimensión  $\text{Dim}_H$  con generadores  $T^H$ . Clasificando los generadores de  $G$ , tenemos:

$$T^G \rightarrow \{T^H\}, \{T^{G-H}\},$$

donde los  $T^{G-H}$  son aquellos generadores de  $G$  pero no de  $H$ .

Supongamos ahora una lagrangiana  $\mathcal{L}_G$  que depende de campos escalares dados en una representación no trivial del grupo  $G$ . Si  $\mathcal{L}_G$  es invariante bajo  $G$ , entonces también lo es bajo  $H$ . Esto significa que el multiplete de campos en la representación de  $G$  puede ser arreglado en multipletes de campos en la representación de  $H$ , generando la siguiente relación:

$$\begin{aligned}G &\rightarrow H \\ \{\phi_G\} &\rightarrow \{\phi_H\} \\ \mathcal{L}_G(\phi_G, \partial\phi_G) &\rightarrow \mathcal{L}_H(\phi_H, \partial\phi_H).\end{aligned}$$

Cuando la simetría de  $G$  es global, se puede presentar el fenómeno de rompimiento espontáneo de la simetría  $G$  en  $H$ , tomando un vector constante  $\phi_0$ , el cual será invariante bajo  $H$ . Esto ocurre a cierta escala de energía  $v$ , y como ya se había mencionado, para  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  ocurre a la escala de fermi.

Cuando SSB ocurre, se dice que los generadores  $T^{G-H}$  son rotos, y a cada generador se le asocia un campo escalar sin masa, llamado bosón de Goldstone.

Como ejemplo, consideremos la lagrangiana de dos campos escalares con auto interacción, invariante bajo  $SO(2)$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 - V(\varphi_1, \varphi_2), \quad (1.3)$$

cuyo potencial es:

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2} \mu^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{4!} \lambda (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2. \quad (1.4)$$

Para  $\mu^2 < 0$ ,  $\lambda > 0$  los mínimos ocurren cuando  $(\phi_1, \phi_2)$  forman un círculo:

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \nu^2. \quad (1.5)$$

Los estados vacíos son puntos  $(\varphi_1, \varphi_2)$  sobre este círculo y se transforman entre ellos bajo  $SO(2)$ . Al potencial resultante se le llama coloquialmente Mexican Hat Potential. Fig.1.1. Escogiendo uno de ellos como estado de vacío implica rompimiento espontáneo de simetría, por ejemplo:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\nu, 0). \quad (1.6)$$

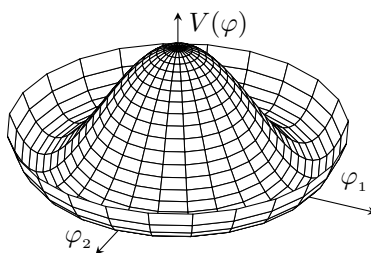


Figura 1.1: The Mexican hat potential

Haciendo el cambio de base:

$$\varphi_1' = \varphi_1 - \nu, \quad \varphi_2' = \varphi_2, \quad (1.7)$$

genera el siguiente lagrangiano:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1'\partial^\mu\varphi_1' + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_2'\partial^\mu\varphi_2' \\ & - \frac{1}{2}m^2\varphi_1'^2 - \frac{1}{3!}\nu(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)\varphi_1' - \frac{\lambda}{4!}(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)^2.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Notemos que los campos  $\varphi_1'$  adquieren masa  $m = \sqrt{2\mu^2}$ . Al campo de masa cero  $\varphi_2'$  se le conoce como bosón de Goldstone.

El mecanismo de Higgs [17] surge cuando la simetría es de norma. Este mecanismo utiliza la simetría local para eliminar los pseudo-bosones de Goldstone y dotar de masa a los bosones de norma. Los grados de libertad que ellos representan reaparecen como los estados de polarización longitudinal de los bosones de norma asociados con los generadores rotos [18].

### 1.1.2. El sector de Higgs

El sector de Higgs extiende la simetría global a una simetría local de gauge, generando las masas de los bosones  $W^\pm$ ,  $Z$  y de un nuevo bosón, el bosón de Higgs.

Lo que se hará es romper espontáneamente la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_e$  para dotar de masa a los fermiones y bosones de norma. Hasta ahora contamos con cuatro campos de norma asociados al grupo de nuestra teoría; introduciremos un nuevo campo escalar, llamado campo de Higgs, aplicaremos el mecanismo de Higgs y se pretende terminar con un fotón sin masa asociado a  $U(1)_e$ .

Consideremos un doblete de campos escalares complejos de  $SU(2)$ , con hipercarga  $Y = 1$ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} G_w^\pm \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}.\tag{1.9}$$

El sistema está descrito por la lagrangiana renormalizable:

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - V(\Phi),\tag{1.10}$$

donde  $V$  es el potencial de Higgs, cuya estructura renormalizable tiene la forma:

$$V(\Phi) = \mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2.\tag{1.11}$$

El rompimiento espontáneo de la simetría (SSB), ocurre si  $\mu < 0$ , con  $\lambda > 0$ , para esto es necesario que el valor esperado del campo de Higgs en el vacío sea no nulo. Las soluciones para el potencial mínimo, con estas condiciones, son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \Phi^\dagger} &= 0; \\ \Phi^\dagger \Phi &= -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

La dirección especificada por el vacío  $\Phi_0$  no es invariante bajo el grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , sin embargo, será invariante bajo el grupo de simetría  $U(1)_e$  de modo que se garantiza la conservación de la carga eléctrica.[19].

Sea  $Q \equiv \frac{\sigma^2}{2} + \frac{Y}{2}$ , el generador del grupo  $U(1)_e$ , se tomará una dirección  $\Phi_0$  tal que  $Q\Phi_0 = 0$ , por lo que se encuentra que:

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.\tag{1.13}$$

La teoría física se construye realizando pequeñas oscilaciones en torno al vacío, esto significa que debemos aplicar la siguiente transformación:

$$\begin{aligned}\Phi \rightarrow \Phi_0 + \Phi &= \begin{pmatrix} G_W^\pm \\ \frac{v+H+iG_Z}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G_W^\pm \\ \frac{iG_Z}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \Phi_G + \Phi_H,\end{aligned}\tag{1.14}$$

donde  $G_W^\pm$  y  $G_Z$  son bosones de Goldstone; con cargas eléctricas neutras para  $G_z$  y  $H$ , y carga uno para  $G_W^\pm$ , en unidades de  $e$ .

Del desarrollo del potencial de Higgs  $V$  se puede calcular la masa del bosón de Higgs  $m_H$ :

$$V(\Phi) = [\mu^2 + \lambda(\Phi^\dagger \Phi)](\Phi^\dagger \Phi)\tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger \Phi &= |\Phi_G + \Phi_H|^2 \\ &= |\Phi_G|^2 + |\Phi_H|^2.\end{aligned}\tag{1.16}$$

El resultado de la ecuación 1.16 se deduce del hecho que  $\Phi_G^\dagger \Phi_H + \Phi_H^\dagger \Phi_G = 0$ . Este mismo resultado aplicado en la ecuación 1.15, y sabiendo que  $\mu^2 = -\lambda v^2$ , nos implica la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}V(\Phi^\dagger, \Phi) &= \lambda \left[ 2\left(-\frac{v^2}{2} + |\Phi_H|^2\right) |\Phi_G|^2 \right. \\ &\quad \left. + (|\Phi_H|^2 - v^2) |\Phi_H|^2 + |\Phi_G|^2 \right].\end{aligned}\tag{1.17}$$

Desarrollando el primer término de la ecuación 1.17, y tomando en cuenta que:  $|\Phi_G|^2 = G_W^- G_W^+ + \frac{G_Z^2}{2}$ ,  $|\Phi_H|^2 = \frac{(v+H)^2}{2}$ ; se tiene que:

$$\lambda[2(-\frac{v^2}{2} + |\Phi_H|^2) |\Phi_G|^2] = 2\lambda(vH + \frac{H^2}{2})(G_W^- G_W^+ + \frac{G_Z^2}{2}). \quad (1.18)$$

Con esto, de la ecuación 1.18, deducimos que los campos  $G_W^\pm$  y  $G_Z$  no contienen términos que contribuyan con sus masas por lo que se demuestra que son bosones de Goldstone, que, como sabemos, siempre aparece uno por cada generador roto si la simetría es global.

Desarrollando el segundo término de la ecuación 1.17 podemos identificar un término que contribuye con la masa del campo  $H$ :

$$\begin{aligned} \lambda(|\Phi_H|^2 - v^2) |\Phi_H|^2 &= \lambda\left(\frac{-v^2 + H^2 + 2Hv}{2}\right)\left(\frac{v^2 + H^2 + 2Hv}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}m_H^2 H^2 + \dots, \end{aligned} \quad (1.19)$$

en la ecuación 1.19 puede verse que  $m_H = \sqrt{2\lambda}v$ .

La norma unitaria, es una transformación de norma particular, en donde los campos  $G_W^\pm$  y  $G_Z$  pueden borrarse:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

La masa de los bosones de norma débiles surge de la parte cinética. Para esto es necesario conocer la derivada covariante en la representación fundamental del grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ :

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\sigma^i}{2}W_\mu^i - ig'\frac{Y}{2}B_\mu, \quad (1.21)$$

donde  $\sigma^i$  son las matrices de Pauli y  $\frac{Y}{2}$  el generador del grupo  $S(U)_Y$ .

Definiendo los siguientes obojos, podemos reescribir la ecuación 1.21:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (1.22)$$

$$\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2). \quad (1.23)$$

Ahora, podemos escribir la derivada covariante aplicado al campo de la ecuación 1.20, usando las definiciones anteriores:

$$D_\mu \Phi = \frac{\partial_\mu H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{ig}{2}(\nu + H)W_\mu^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{8}}(\nu + H)(gW_\mu^3 - g'B_\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

El segundo término de la ecuación 1.10 describe el sector cinético de Higgs, que, aplicando el resultado anterior y desarrollando términos, tenemos:

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) &= \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu H + \frac{g^2}{4} (\nu + H)^2 W_\mu^- W_\mu^+ \\ &+ \frac{1}{8} (\nu + H)^2 (gW_\mu^3 - g'B_\mu)(gW^{3\mu} - g'B^\mu). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Desarrollado el segundo término de la ecuación anterior obtenemos los siguiente:

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) &= \left(\frac{gv}{2}\right)^2 W_\mu^- W_\mu^+ + \dots \\ &= m_W^2 W_\mu^- W_\mu^+ \dots \end{aligned} \quad (1.26)$$

De esta última expresión podemos concluir que  $m_W = \frac{gv}{2}$  es el término de masa para los campos de norma  $W^\pm$ .

Por otra parte, trabajando con el tercer término de la ecuación 1.25, podemos, después de cierta álgebra, llegar a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} (\nu + H)^2 (gW_\mu^3 - g'B_\mu)(gW^{3\mu} - g'B^\mu) &= \frac{1}{8} (\nu + H)^2 \times \\ &(W_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

El Bosón de Higgs dota de masa al bosón  $Z$  a través de la expresión anterior. Para esto es necesario definir el ángulo de Weinberg (o ángulo de mezcla débil)  $\theta_W$ , el cual modula la rotación del plano  $(W^3, B) \xrightarrow{\Theta_W} (Z, \gamma)$ , y se define como:

$$\begin{aligned} \tan \theta_W &\equiv \frac{g'}{g}; \\ \sin \theta_W = s_W &= \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}; \quad \cos \theta_W = c_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

con esto, la matriz  $2 \times 2$  de la ecuación 1.27 puede ser escrita como:

$$A = \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} c_W^2 & -c_W s_W \\ -c_W s_W & s_W^2 \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

dicha matriz puede ser diagonalizada de la forma:

$$A' = PAP^{-1},$$

donde  $A'$  y  $P$  resultan ser:

$$P = \begin{pmatrix} c_W & -s_W \\ s_W & c_W \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

$$A' = (g^2 + g'^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reescribiendo la ecuación 1.27, tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8}(\nu + H)^2(W_\mu^3, B_\mu)A \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}(\nu + H)^2(W_\mu^3, B_\mu)P^{-1}[PAP^{-1}]P \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}(\nu + H)^2(g^2 + g'^2)(Z_\mu, A_\mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

notemos que  $(W_\mu^3, B_\mu)P^{-1}$ , implica los siguientes resultados:

$$Z_\mu = c_W W_\mu^3 - s_W B^\mu; \quad A_\mu = s_W W_\mu^3 + c_W B_\mu. \quad (1.32)$$

Finalmente, es claro observar que  $m_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g^2 + g'^2} = \frac{m_W}{c_W}$ , además de que al campo  $A_\mu$  no tiene una masa asociada, es decir, el fotón no tiene masa.

### 1.1.3. El sector de Yang-Mills

En el año de 1953, C. N. Yang y R. Mills [20] extendieron la noción de la teoría de norma para grupos abelianos a los grupos no abelianos. Para la teoría GSW se hace uso de tres campos de norma de  $SU(2)_L$ , a los cuales llamamos formalmente Campos de Yang-Mills [21].

El sector de Yang-Mills se encarga de describir las interacciones entre los campos de norma del grupo no abeliano  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , para esto es necesario construir estructuras covariantes: el tensor de campo  $W_{\mu\nu}$  (ecuación 1.33), asociado al grupo no abeliano  $SU(2)_Y$ ; y el tensor  $B_{\mu\nu}$  (ecuación 1.34), asociado al grupo abeliano  $U(1)_Y$ .

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{ijk}W_\mu^j W_\nu^k \quad (1.33)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (1.34)$$

de esta forma, la lagrangiana del sector de Yang-Mills de la teoría electrodébil está dada por:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}. \quad (1.35)$$

Los campos  $B_\mu$  y  $W_\mu^3$  pueden ser escritos en términos de los campos  $A_\mu$  y  $Z_\mu$  de forma similar a como se hizo en la ecuación 1.32:

$$B_\mu = c_W A_\mu - s_W Z_\mu \quad (1.36)$$

$$W_\mu^3 = s_W A_\mu + c_W Z_\mu. \quad (1.37)$$

Aplicando los resultados anteriores y la ecuación 1.22 en las ecuaciones 1.33 y 1.34 obtenemos:

$$B_{\mu\nu} = c_W F_{\mu\nu} - s_W Z_{\mu\nu} \quad (1.38)$$

$$W_{\mu\nu}^3 = s_W F_{\mu\nu} + c_W Z_{\mu\nu} + ig(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+). \quad (1.39)$$

de esta manera, se tendrá:

$$\hat{W}_{\mu\nu}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{\mu\nu}^1 - iW_{\mu\nu}^2) \quad \hat{W}_{\mu\nu}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{\mu\nu}^1 + iW_{\mu\nu}^2) \quad (1.40)$$

$$W_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{W}_{\mu\nu}^+ + \hat{W}_{\mu\nu}^-) \quad W_{\mu\nu}^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{W}_{\mu\nu}^+ - \hat{W}_{\mu\nu}^-), \quad (1.41)$$

donde los  $\hat{W}^\pm$  son tnsores con contenido de carga eléctrica.

Definiendo:

$$W_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm, \quad (1.42)$$

y realizando el álgebra para  $\hat{W}^+$ , se verá qué:

$$\hat{W}_{\mu\nu}^+ = W_{\mu\nu}^+ + ie(W_\mu^+ A_\nu - W_\nu^+ A_\mu) + igc_W(W_\mu^+ Z_\nu - W_\nu^+ Z_\mu), \quad (1.43)$$

donde  $e = gs_W$ . A la vez observemos que  $\hat{W}_{\mu\nu}^-$  no es otra cosa más que el conjugado hermítico de  $\hat{W}_{\mu\nu}^+$ .

Por último, aplicando todos estos resultados en la lagrangiana de la ecuación 1.35, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} = & -\frac{1}{2}\hat{W}_{\mu\nu}^-\hat{W}^{+\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - ig(s_W F_{\mu\nu} + c_W Z_{\mu\nu})\times \\ & W^{-\mu}W^{+\nu} + \frac{g^2}{4}(W_{\mu}^-W_{\nu}^+ - W_{\mu}^+W_{\nu}^-)(W^{-\mu}W^{+\nu} - W^{+\mu}W^{-\nu}). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Esta es la lagrangiana de Yang-Mills y describe las interacciones entre los bosones de norma electrodébiles de la teoría GSW.

#### 1.1.4. El sector de Yukawa

El sector de Yukawa tiene una estructura de Lorentz tipo escalar y pseudoescalar, asimismo, tiene como propósito el generar masas de los fermiones quirales vía el mecanismo de Higgs. La teoría GSW presenta ausencia de neutrinos con helicidad derecha, lo que imposibilita acoplamientos de Yukawa que generarían sus posibles masas.

La lagrangiana de este sector se divide en dos términos: uno asociado a los leptones,  $\mathcal{L}_Y^l$ ; y otro a los quarks,  $\mathcal{L}_Y^q$ . Y se expresa de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y^l + \mathcal{L}_Y^q. \quad (1.45)$$

#### El sector de Yukawa para Leptones

La lagrangiana del sector de Yukawa Leptónico viene dada por:

$$\mathcal{L}_Y^l = -Y_{ij}^l \bar{L}'_i \Phi'_R j + h.c., \quad (1.46)$$

donde  $Y_{ij}^l$  es una matriz adimensional  $3 \times 3$ , matriz de Yukawa.

La Lagrangiana de este sector en la norma unitaria puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_y^l = & -Y_{ij}^l (\nu_{Li}' , \bar{l}_{Li}') \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} l'_{Ri} + h.c. \\ = & -\frac{v+H}{\sqrt{2}} Y_{ij}^l \bar{l}'_{Li} l'_{Rj} + h.c. \end{aligned}$$

Definiendo  $E' = \begin{pmatrix} e' \\ \mu' \\ \tau' \end{pmatrix}$  un vector en el espacio de sabor; la lagrangiana toma la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_y^l = -\bar{E}'_L \frac{Y^l v}{\sqrt{2}} E'_R - \frac{H}{\sqrt{2}} \bar{E}'_L Y^l E'_R + h.c. \quad (1.47)$$

$$= -(1 + \frac{H}{v}) \bar{E}'_L \bar{Y}^l E'_R + h.c., \quad (1.48)$$

donde  $\bar{Y}^l_{ij} = \frac{Y^l_{ij} v}{\sqrt{2}}$ , son las componentes de la matriz de masa para leptones, que determinaremos al diagonalizar la matriz de forma similiar a como lo trabajamos en la ecuación 1.30

Dadas las siguientes transformaciones:

$$E'_{R,L} = V_{R,L}^l E_{R,L}, \quad (1.49)$$

donde  $V_{R,L}^l$  son matrices de rotación unitarias. De esta forma, podemos escribir la lagrangiana de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_Y^l = -(1 + \frac{H}{v}) \bar{E}'_L V_L^{l\dagger} \bar{Y}^l V_R^l E'_R + h.c. \quad (1.50)$$

Observemos que  $V_L^{l\dagger} \bar{Y}^l V_R^l$  resulta ser una matriz real y diagonal, a la cual llamaremos  $M^l$ . Esta será la matriz de masa de leptones:

$$M^l = V_L^{l\dagger} \frac{v}{\sqrt{2}} Y^l V_R^l = \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

donde los elementos de la diagonal son las masas de los respectivos leptones cargados.

Así, el lagrangiano de Yukawa para leptones se escribe como:

$$\mathcal{L}_Y^l = -(1 + \frac{H}{v}) \bar{E}' M^l E, \quad (1.52)$$

aquí podemos apreciar como el bosón de Higgs se acopla únicamente al mismo tipo de leptón cargado, es decir, el sector de Yukawa leptónico conserva el sabor.

## El sector de Yukawa para Quarks

La lagrangiana del sector de Yukawa Leptónico viene dada por:

$$\mathcal{L}_Y^q = -Y_{ij}^d \bar{Q}'_i \Phi d'_{Rj} - Y_{ij}^u \bar{Q}'_i \tilde{\Phi} u'_{Rj} + h.c., \quad (1.53)$$

donde  $Y_{ij}^q$  y  $Y_{ij}^u$  son matrices adimensionales  $3 \times 3$ , llamadas matriz de Yukawa.

Para el caso de los quarks es necesario considerar un nuevo objeto,  $\tilde{\Phi}$ , que se transforme covariantemente bajo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , esto puesto que en los quarks existen estados derechos asociados a los miembros del doblete izquierdo. Así pues, este objeto está dado por:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} &= i\sigma^2\Phi \\ \tilde{\Phi} &\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.54}$$

Nuevamente, haciendo uso de la norma unitaria, y definiendo los siguientes vectores en el espacio de sabor:

$$U' = \begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix}\tag{1.55}$$

$$D' = \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix},\tag{1.56}$$

la lagrangiana del sector de Yukawa para quarks queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y^q &= -Y_{ij}^u(\bar{u}'_{Li}, \bar{d}'_{Li}) \begin{pmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} u'_{Rj} - Y_{ij}^d(\bar{u}'_{Li}, \bar{d}'_{Li}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} d'_{Rj} + h.c. \\ &= -\frac{v+H}{\sqrt{2}} Y_{ij}^u \bar{u}'_{Li} u'_{Rj} - \frac{v+H}{\sqrt{2}} Y_{ij}^d \bar{d}'_{Li} d'_{Rj} + h.c. \\ &= -\frac{v+H}{\sqrt{2}} (\bar{U}'_L Y^u U'_R + \bar{D}'_L Y^d D'_R) + h.c. \\ &= -(1 + \frac{H}{v}) (\bar{U}'_L \bar{Y}^u U'_R + \bar{D}'_L \bar{Y}^d D'_R) + h.c.,\end{aligned}\tag{1.57}$$

donde:  $\bar{Y}_{ij}^u = \frac{Y_{ij}^u v}{\sqrt{2}}$  y  $\bar{Y}_{ij}^d = \frac{Y_{ij}^d v}{\sqrt{2}}$  son las componentes de la matriz de masa para quarks de tipo up y down, respectivamente, y que calcularemos diagonalizando las matrices de forma similar al sector de leptones.

Dadas las siguientes transformaciones:

$$U'_{R,L} = V_{R,L}^u U_{R,L}\tag{1.58}$$

$$D'_{R,L} = V_{R,L}^d D_{R,L},\tag{1.59}$$

donde  $U'_{R,L}$  y  $D'_{R,L}$  son matrices unitarias. De esta forma podemos escribir la lagrangiana de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_Y^l = -(1 + \frac{H}{v})(\bar{U}_L V_L^{u\dagger} \bar{Y}^u V_R^u U_R + \bar{D}_L V_L^{d\dagger} \bar{Y}^d V_R^d D_R) + h.c. \quad (1.60)$$

Observemos que  $V_L^{u\dagger} \bar{Y}^u V_R^u$  y  $V_L^{d\dagger} \bar{Y}^d V_R^d$  son matrices reales y diagonales, a las cuales llamaremos  $M^u$  y  $M^d$  respectivamente.

La matriz de masa para quarks de tipo up será:

$$M^u = V_L^{u\dagger} \frac{v}{\sqrt{2}} Y^u V_R^u = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}; \quad (1.61)$$

mientras que la matriz de masa para quarks tipo down será:

$$M^d = V_L^{d\dagger} \frac{v}{\sqrt{2}} Y^d V_R^d = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

Por último, podemos escribir la lagrangiana de Yukawa para quarks de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_Y^q = -(1 + \frac{H}{v})(\bar{U} M^u U + \bar{D} M^d D), \quad (1.63)$$

y nuevamente podemos apreciar que el bosón de Higgs se acopla a pares del mismo tipo de quarks, es decir, el sector de Yukawa para quarks conserva el sabor.

### 1.1.5. El sector de Corrientes

El sector de Corrientes determina los términos cinéticos de leptones y quarks. Además, describe la interacción entre fermiones y los bosones de norma de la teoría GSW. Este sector se construye al aplicar la derivada covariante a los fermiones quirales, generando términos que presentan acoplamiento de los fermiones con los campos de norma, caracterizados por estructuras matemáticas (de Lorentz)  $\gamma_\mu$  y  $\gamma_\mu \gamma_5$  [16][22]. A los acoplamientos de pares de fermiones con el bosón  $W^\pm$  se le conoce como corrientes cargadas, mientras que los acoplamientos con los bosones  $Z$  y  $\gamma$  con pares de fermiones se les conoce como corrientes neutras [23].

La lagrangiana invariante de norma se divide en dos partes: una que describe a los leptones y otra, a su vez, a los quarks.

$$\mathcal{L}_C = \mathcal{L}_C^l + \mathcal{L}_C^q, \quad (1.64)$$

donde  $\mathcal{L}_C^l$  y  $\mathcal{L}_C^q$  representan los sectores de leptones y quarks, respectivamente.

## El sector de Corrientes para Leptones

Para el sector de leptones, tenemos:

$$\mathcal{L}_C^l = i\bar{L}'_i \gamma^\mu \mathbf{D}_\mu L'_i + i\bar{l}'_{R_i} \gamma^\mu D_\mu l'_{R_i}. \quad (1.65)$$

Definiendo las derivadas de la ecuación 1.65, tenemos:

$$\mathbf{D}_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^i - ig' \frac{Y_L}{2} B_\mu \quad (1.66)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig' \frac{Y_{l_R}}{2} B_\mu. \quad (1.67)$$

Haciendo uso del ángulo débil, podemos escribir las dos ecuaciones anteriores como:

$$\mathbf{D}_\mu = \partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{2}} (\sigma^+ W_\mu^+ + \sigma^- W_\mu^-) - i \frac{g}{2c_w} (\sigma^3 - 2s_w^2 Q_l) Z_\mu - ie Q_l A_\mu \quad (1.68)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ie Q_l A_\mu + ig Q_l \frac{s_w^2}{c_w} z_\mu. \quad (1.69)$$

Aplicando a la ecuación 1.65 los dobletes y singletes de leptones de la ecuación 1.1, usando las definiciones de derivada covariante anteriores, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C^l = & i\bar{\nu}'_{L_i} \gamma^\mu \partial_\mu \nu'_{L_i} + i\bar{l}'_{L_i} \gamma^\mu \partial_\mu l'_{L_i} + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{\nu}'_{L_i} \gamma^\mu l'_{L_i} + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{l}'_{L_i} \gamma^\mu \nu'_{L_i} \\ & + e Q_l A_\mu \bar{l}'_{L_i} \gamma^\mu l'_{L_i} + \frac{g}{2c_w} Z_\mu [\bar{\nu}'_{L_i} \gamma^\mu \nu'_{L_i} - (1 + 2s_w^2 Q_l) (\bar{l}'_{L_i} \gamma^\mu l'_{L_i})] \\ & + i\bar{l}'_{R_i} \gamma^\mu \partial_\mu l'_{R_i} + e Q_l A_\mu \bar{l}'_{R_i} \gamma^\mu l'_{R_i} - et_w Q_l Z_\mu \bar{l}'_{R_i} \gamma^\mu l'_{R_i}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Nuevamente, definimos un vector  $\nu' = \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix}$  en el espacio de sabores, y haciendo uso del vector  $E'$  (el cual usamos en el sector de Yukawa), podemos escribir la lagrangiana de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C^l = & i\bar{\nu}'_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu'_L + i\bar{E}'_L \gamma^\mu \partial_\mu E'_L + i\bar{E}'_R \gamma^\mu \partial_\mu E'_R + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{\nu}'_L \gamma^\mu E'_L \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{E}'_L \gamma^\mu \nu'_L + e Q_l A_\mu (\bar{E}'_L \gamma^\mu E'_L + \bar{E}'_R \gamma^\mu E'_R) \\ & + \frac{g}{2c_w} Z_\mu [\bar{\nu}'_L \gamma^\mu \nu'_L - (1 + 2s_w^2 Q_l) (\bar{E}'_L \gamma^\mu E'_L)] - et_w Q_l Z_\mu \bar{E}'_R \gamma^\mu E'_R. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Usando las transformaciones de la ecuacion 1.49, podemos escribir la lagrangiana en términos de los eigenestados de masa. Por otro lado,  $\nu'$  no aparece en el sector de Yukawua leptónico, así, elegimos una transformación de la misma forma que  $E'$  con la intención de eliminar los efectos de violación de sabor en los leptones cargados. Se tiene:

$$\nu'_L = V_L^l \nu_L, \quad (1.72)$$

y verificando que efectivamente con esta transformación se conserva el sabor de las corrientes neutras:

$$\begin{aligned} \bar{\nu}'_L \gamma^\mu E_L &= \bar{\nu} V_L^{l\dagger} \gamma^\mu V_L^l E_L \\ &= \bar{\nu} \gamma^\mu V_L^{l\dagger} V_L^l E_L \\ &= \bar{\nu} \gamma^\mu E_L. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Ahora, verificaremos que en el caso de corrientes cargadas los acoplamientos entre miembros de distintas familias no existe:

$$\begin{aligned} \bar{E}'_L \gamma^\mu \partial_\mu E'_L + \bar{E}'_R \gamma^\mu \partial_\mu E'_R &= \bar{E} V_L^{l\dagger} V_L^l \gamma^\mu \partial_\mu E_L + \bar{E} V_R^{l\dagger} V_R^l \gamma^\mu \partial_\mu E_R \\ &= \bar{E} \gamma^\mu \partial_\mu E_L + \bar{E} \gamma^\mu \partial_\mu E_R \\ &= \bar{E} \gamma^\mu \partial_\mu P_L E + \bar{E} \gamma^\mu \partial_\mu P_R E = \bar{E} \gamma^\mu \partial_\mu (P_L + P_R) E \\ &= \bar{E} \gamma^\mu \partial_\mu E. \end{aligned} \quad (1.74)$$

De esta forma, la lagrangiana de Corrientes para leptones se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C^l &= i\bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu'_L + i\bar{E} \gamma^\mu \partial_\mu E + eA_\mu (Q_l \bar{E}_L \gamma^\mu E) \\ &\quad + \frac{g}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \bar{\nu} \gamma^\mu P_L E + W_\mu^- \bar{E} \gamma^\mu P_L \nu) \\ &\quad + \frac{g}{2c_w} Z_\mu [\bar{\nu} \gamma^\mu P_L \nu + g_L^l \bar{E}_L \gamma^\mu E_L + g_R^l \bar{E}_R \gamma^\mu E_R], \end{aligned} \quad (1.75)$$

donde,  $g_L^l = -(1 + 2s_w^2 Q_l)$  y  $g_R^l = -2s_w^2 Q_l$ .

### El sector de Corrientes para Quarks

De forma semejante a 1.65, contamos con una expresión para la Lagrangiana del sector de Corrientes, ahora para quarks, dada por:

$$\mathcal{L}_C^q = i\bar{Q}'_i \gamma^\mu D_\mu Q'_i + i\bar{u}'_{Ri} \gamma^\mu D_\mu u'_{Ri} + i\bar{d}'_{Ri} \gamma^\mu D_\mu d'_{Ri}. \quad (1.76)$$

Usando los vectores definidos en 1.55 y 1.56, y aplicando las representaciones de las derivadas covariantes, 1.66 para dobletes, y 1.67 para singletes, la lagrangiana toma la forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_C^q &= i\bar{U}'_L\gamma^\mu\partial_\mu U'_L + i\bar{D}'_L\gamma^\mu\partial_\mu D'_L + i\bar{U}'_R\gamma^\mu\partial_\mu U'_R + i\bar{D}'_R\gamma^\mu\partial_\mu D'_R + \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+\bar{U}'_L\gamma^\mu D'_L \\
&\quad + \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^-\bar{D}'_L\gamma^\mu U'_L + eA_\mu(Q_l\bar{D}'_L\gamma^\mu D'_L + Q_l\bar{U}'_R\gamma^\mu U'_R + Q_l\bar{D}'_R\gamma^\mu D'_R) \\
&\quad + \frac{g}{2c_w}Z_\mu[\bar{U}'_L\gamma^\mu U'_L - (1 + 2s_w^2Q_l)(\bar{D}'_L\gamma^\mu D'_L)] - \frac{s_w^2}{c_w}gQ_lZ_\mu(\bar{U}'_R\gamma^\mu U'_R - \bar{D}'_R\gamma^\mu D'_R).
\end{aligned} \tag{1.77}$$

Pasando a eigenestado de masa mediante las transformaciones de las ecuaciones 1.58 y 1.59, se obtienen corrientes cargadas y neutras en este sector. Aplicando las propiedades de transformaciones unitarias es fácil ver que las corrientes neutras conservan el sabor, sin embargo para corrientes cargadas tenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
\bar{U}'_L\gamma^\mu D' &= \bar{U}_L V_L^{u\dagger}\gamma^\mu V_L^d D_L \\
&= \bar{U}_L V_L^{u\dagger} V_L^d \gamma^\mu D_L,
\end{aligned}$$

sea  $K = V_L^{u\dagger} V_L^d$  la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa o matriz CKM. Entonces:

$$\bar{U}'_L\gamma^\mu D' = \bar{U}_L K \gamma^\mu D_L, \tag{1.78}$$

esto nos dice que en las corrientes cargadas se presentan transiciones entre familias a través de las matriz CKM. Las interacciones entre quarks de diferentes familias es un efecto derivado del sector de Yukawua a través del proceso de rotación. La presencia de corrientes cargadas con cambio de sabor a nivel árbol da lugar a la aparición de corrientes neutras con cambio de sabor a nivel de un lazo.



---

## 2. La Extensión del Modelo Estándar

---

La Extensión del Modelo Estándar (SME) [5], es una teoría que toma la teoría ya conocida del SM y agrega términos que involucran violación de CPT y de Lorentz. A su vez, es considerada como el límite a bajas energías de una teoría fundamental. Además, el SME es invariante de norma, conserva energía-momento, es covariante bajo rotaciones y boosts de observador, mientras que rompe la covarianza bajo rotaciones y boosts de partículas.

### 2.1. Simetría de Lorentz y CPT

Hasta antes de 1905 la física se construía considerando un tiempo absoluto, esta era la idea desarrollada por Galileo, y fue la base para crear la mecánica de Newton, la cual es una de las teorías de la física clásica más importantes. En 1900, Lorentz descubrió que las ecuaciones de Maxwell eran invariantes bajo un tipo de transformaciones, ahora conocidas como transformaciones de Lorentz (LT); y hasta este año, los físicos asumían que la invariancia de la velocidad de las ondas electromagnéticas se debía a un sistema de referencia "privilegiado", echo que se conoce como hipótesis del éter. Tras la llegada de la Relatividad Especial, desarrollada por Einstein, se probó que la mecánica de Newton era parte de una teoría más general, fue aquí dónde las LT se mostraban como el candidato ganador para relacionar cantidades físicas medidas en dos marcos de referencia inerciales.

Las LT son un conjunto de operaciones matemáticas que relacionan cantidades físicas medibles dados dos marcos de referencias inerciales, es decir, que se mueven a diferentes velocidades relativas constantes una de la otra. Estas transformaciones son rotaciones en el espacio-tiempo tetradimensional; llamamos rotaciones a aquellas que se hacen en dos dimensiones espaciales y boosts a aquellas en donde interviene la dimensión temporal. Se dice que una teoría presenta simetría de Lorentz cuando las leyes físicas que la involucran presentan los mismos resultados para todo sistema de referencia inercial en donde se observe, y estos marcos se puedan relacionar a través de LT.

En la mecánica relativista no existe un tiempo absoluto, esto implica que tanto el intervalo de tiempo como la distancia medida por diferentes observadores, en diferentes sistemas inerciales, son diferentes, por lo tanto las coordenadas registradas por los dos observadores serán distintas. Sin embargo, las LT pueden relacionar las medidas de estos observadores. Así, la simetría de Lorentz apoya el principio de la relatividad en donde se establece que los resultados de cualquier experimento no dependen de la orientación del laboratorio o de su velocidad en el espacio, invariancia ante rotaciones y boosts respectivamente.

### 2.1.1. El Grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz  $GL(4, R)$  es un grupo de Lie simple y no compacto. Sus representaciones de dimensión finita no son unitarias y sus representaciones unitarias son de dimensión infinita (espacio de Hilbert de una partícula). Y se define como el grupo de transformaciones lineales de coordenadas:

$$x^\mu \mapsto x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad (2.1)$$

que deja invariante la cantidad:

$$x_{\mu} x^{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}, \quad (2.2)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski.

$GL(4, R)$  es isomorfo a  $O(1, 3)$ , esto puesto que:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} x^{\mu'} x^{\nu'} &= g_{\rho\sigma} x^{\rho} x^{\sigma} \\ \Rightarrow g_{\rho\sigma} &= g_{\mu\nu} \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} \\ \Rightarrow g &= \Lambda^T g \Lambda \end{aligned} \quad (2.3)$$

Por otro lado, podemos distinguir cuatro tipos de transformaciones de Lorentz: dos cuyo determinante es positivo y dos con determinante negativo. De estas transformaciones sólo el conjunto que cumple con ser transformaciones propias ( $\det \Lambda = 1$ ), y además ortocronas ( $\Lambda_0^0 \geq 1$ ), forman un subgrupo, el cual es isomorfo a  $SO(1, 3)$ , en general es a este grupo a quien se le nombra Grupo de Lorentz ( $SO(1, 3)$ ). Sus elementos son transformaciones continuas que se pueden conectar con la identidad mediante sucesivas transformaciones infinitesimales.

Aún más general existe un grupo que contiene al grupo de Lorentz  $SO(1, 3)$  y al grupo de translaciones espacio-temporales  $T(1, 3)$ . Este grupo es conocido como grupo de Poincaré  $ISO(1, 3)$ .

### 2.1.2. El Grupo de Lorentz y simetría CPT

Exite un conjunto de transformaciones rescatadas del Grupo de Lorentz completo  $O(1, 3)$ , las cuales tienen gran importancia en la física.

La primera de ellas es la reversión espacial, o transformación de paridad  $P$ . Esta transformación invierte el signo de las coordenadas espaciales. Su acción sobre un cuadri-vector en el espacio-tiempo tetradimensional, se ve escrita de la siguiente forma:

$$P : (x^0, \vec{x}) \rightarrow (x^0, -\vec{x}) \quad (2.4)$$

Es común que, al trabajar con tres dimensiones espaciales, las variables clásicas cuyos signos se invierten cuando se aplica una transformación de paridad son predominantemente vectores, se dice que estas son de paridad impar; las variables clásicas

que no cambian con la inversión espacial son predominantemente cantidades escalares, entonces se dice que estas son de paridad par.

La segunda transformación rescatada de  $O(1, 3)$  es la transformación de inversión temporal  $T$ . Su acción sobre un quadri-vector en el espacio-tiempo tetradimensional, se ve escrita de la siguiente forma:

$$T : (x^0, \vec{x}) \rightarrow (-x^0, \vec{x}) \quad (2.5)$$

Si además de las transformaciones  $P$  y  $T$ , se considera una tercera, la transformación de conjugación de carga, bajo la cual todas las partículas son transformadas en sus correspondientes antipartículas y viceversa, se tiene una operación de simetría, la simetría  $CPT$ , donde  $C$  denota la transformación de conjugación de carga.

Toda teoría cuántica de campo, como SM, la teoría GSW y QED, son construidas asumiendo que sus lagrangianas correspondientes son pares bajo la aplicación sucesiva de las transformaciones  $CPT$ . Sin embargo, la conservación de  $CPT$  no significa que tales simetrías se conserven separadamente en una teoría dada. Aunque QED respeta cada una de estas simetrías por separado, este no es el caso del SM, el cual viola separadamente cada una de ellas e incluso la operación de  $CP$ .

Existe un fuerte soporte teórico y experimental sobre el carácter fundamental de la simetría  $CPT$ . La simetría de Lorentz puede ser entendida gracias a la simetría  $CPT$ , es por eso que guardan una fuerte relación. La simetría  $CPT$ , también conocida como teorema  $CPT$  [6], tiene tres soportes importantes: localidad, unitariedad de la matriz  $S$  y simetría de Lorentz. La simetría  $CPT$  implica la igualdad entre la masa de la partícula y la de su antipartícula. Para partículas, inestables, esta simetría implica que los tiempos de vida de la partícula y su antipartícula coinciden exactamente. También implica que la carga eléctrica que posee la antipartícula difiere de la que porta la partícula sólo en un signo, lo cual restringe fuertemente el resto de propiedades electromagnéticas de las partículas, como dipolos y multipolos de más altos órdenes.

A la par, existe un teorema anti- $CPT$  [7], probado por Greenberg en el 2002, el cual dice que cualquier teoría de interacción unitaria que viole la simetría  $CPT$  necesariamente viola la invariancia de simetría de Lorentz. Esto significa que no podemos tener una violación de  $CPT$  sin una violación de la simetría de Lorentz, aunque si es posible tener violación de Lorentz mientras se conserva la simetría  $CPT$ . El teorema  $CPT$  es fundamental para las teorías de campo, sin embargo, no tiene porque mantener su vigencia a escalas de distancias tan pequeñas como la escala de Planck  $\sim M_{Pl}^{-1}$ , pues existen bases fundadas de que a esta escala tanto gravedad cuántica [24] como teoría de cuerdas [25] [26] pueden violar esta simetría, implicando que la conservación exacta que se observa a las escalas de energía actuales sea sólo producto del hecho de que el efecto es tan pequeño que pasa desapercibido por los detectores.

## 2.2. Violación de Lorentz y sus efectos.

El rompimiento de Simetría de Lorentz o CPT es de gran importancia pues es una forma de arreglar el problema de no contar en el presente con experimentos que manejen escalas de energía semejantes a la masa de Planck ( $M_p \sim 10^{19} GeV$ ). Recordemos que sólo a estas escalas de energía teorías como Gravedad Cuántica y Teoría de Cuerdas tienen resultados satisfactorios, intencionados a crear una teoría del todo, unificando SM y la teoría de Relatividad General; donde SM describe tres de las cuatro fuerzas a través de las cuales interactúan todas las partículas elementales, y RG describe la cuarta fuerza fundamental; y en el límite de energías usadas en los experimentos actuales, con 15 ordenes de magnitud menor entre  $M_p$  y las energías usadas en el LHC; estas teorías del todo consideran a SM y a la teoría de Relatividad General como dos teorías completamente separadas.

Se ha desarrollado una teoría cuántica de campo efectiva, con toda la física ya conocida del SM, que investiga y analiza de forma metódica causas, posibilidades y efectos de la violación en la simetría de Lorentz, registrando y ordenando los resultados experimentales. Esta teoría es llamada la Extensión del Modelo Estándar (SME) [5], manteniendo características propias del SM como el mecanismo de Higgs y la invariancia de norma pero sin conservar la simetría de Lorentz y de CPT. Esta teoría es covariante bajo LT del observador pero rompe esta covarianza ante LT de partículas, generando coeficientes que parametrizan el rompimiento de la simetría de Lorentz, así como el rompimiento de la simetría CPT. Actualmente existen cientos de trabajos realizados en este tema; Kostelecky y Russell elaboran un resumen anual exponiendo los coeficientes de violación de Lorentz, registrados también como cotas experimentales en el documento *Data Tables for Lorentz and CPT Violation* [27]. Existen implicaciones fenomenológicas ya estudiadas, como en [28], que estudia el decaimiento  $q_i \rightarrow q_i \gamma$  en el contexto del sector electrodébil de Yang-Mills ampliado con un tensor 2 constante que viola Lorentz; en [29] se concluye que no existen modelos de violación de CP en el esquema de cuartetos en la interacción débil sin introducir nuevos campos; en [30] se presentan las fracciones de decaimiento (BR) de  $H$  para los modos  $bs$ ,  $bd$ ,  $sd$  y  $cu$  con ordenes de  $10^{-7}$ ,  $10^{-8}$ ,  $10^{-8}$  y  $10^{-15}$  respectivamente, y cuya observación implicaría la presencia de nueva física de partículas con cambio de sabor, este tipo de decaimientos raros del bosón de Higgs con cambio de sabor han sido de gran interés y se presentan estudios tanto en el contexto del sector de quarks [31] como en el de leptones [32].

Es necesario mencionar que existen diferencias entre LT de observador y de partícula. El rompimiento en la simetría de Lorentz en el contexto del SME se refiere a violaciones en LT de partícula. Esto se debe a que ambas transformaciones son inversamente relacionadas en el vacío, pero no es el mismo caso en presencia de un campo de fondo. El sistema con campo de fondo es invariante bajo LT de observador. Sin embargo, cuando se realiza una LT de partículas, el sistema se distingue físicamente de su versión transformada debido a que la existencia del campo de fondo se puede inferir del experimento. Podemos deducir que el campo de fondo rompe la simetría especificando una dirección preferida.

Ejemplo: sea  $-b_\mu^{AB} \bar{l}_A \gamma_5 \gamma^\mu l_B$  un término de la lagrangiana del SME que viola Lorentz.  $b_\mu^{AB}$  es el coeficiente que parametriza dicha violación y puede ser visto como un campo

de fondo con valores constantes. Aplicando LT de observador a este término implica:

$$b_\mu^{AB} \bar{l}_A \gamma_5 \gamma^\mu l_B \xrightarrow{\text{observador}} \Lambda_\mu^\nu \Lambda_\lambda^\mu b_\nu^{AB} \bar{l}_A \gamma_5 \gamma^\lambda l_B = b_\mu^{AB} \bar{l}_A \gamma_5 \gamma^\mu l_B, \quad (2.6)$$

donde las  $\Lambda$ 's son las transformaciones descritas en 2.1. Como se observa, existe invariancia en LT de observador. Ahora, aplicando transformaciones de partícula, los campos de fondo no son afectados por la transformación [33]:

$$b_\mu^{AB} \bar{l}_A \gamma_5 \gamma^\mu l_B \xrightarrow{\text{particula}} \Lambda_\lambda^\mu b_\mu^{AB} \bar{l}_A \gamma_5 \gamma^\lambda l_B, \quad (2.7)$$

de esto podemos decir que los coeficientes que parametrizan la violación en la simetría de Lorentz cambian bajo transformaciones de observador y presentan dependencia del tiempo en sistemas con movimiento constante, es decir, cuando podemos aplicar LT en el sistema de referencia, por lo que se presenta la necesidad de crear un marco de referencia. Los coeficientes son reportados en un sistema centrado en el sol [34], el cual es un marco aproximadamente inercial siempre y cuando el tiempo del experimento no revase los cientos de años.

Es necesario mencionar que existen muchos marcos de referencia y ninguno de estos presenta signos preferenciales. Kostelecký y Mewes presentaron un trabajo [35] mostrando las transformaciones en diferentes marcos de referencias, como la de un laboratorio, el marco centrado en el Sol y un marco fijado a un objeto que orbita la Tierra. En general los sistemas de referencia que se usan en los experimentos va de la mano con el área de la física que se estudia, y puesto que es posible que no todas las partículas del SM violen la simetría, es necesario una gran cantidad de experimentos en cada sector de partículas para tener una investigación completa.

## 2.3. La extensión del modelo estándar

Calladay y Kostelecký presentaron un trabajo [5] el cual es una extensión del grupo de norma basada en el grupo  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  (Modelo Estándar) que incluye términos que presentan efectos de violación de CPT y Lorentz en forma independiente del modelo. A esta teoría la conocemos como la Extensión del Modelo Estándar (SME), y podemos verla como el límite a bajas energías de una teoría física fundamental con dinámica covariante de Lorentz en la que se produce una violación espontánea en la simetría global de Lorentz bajo transformaciones de partículas, dando lugar a modos de Nambu-Goldstone.

La lagrangiana del modelo estándar es extendida de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{SME} = \mathcal{L}_{SM} + \Delta\mathcal{L}, \quad (2.8)$$

donde  $\mathcal{L}_{SM}$  representa la lagrangiana de la teoría estándar y  $\Delta\mathcal{L}$  contiene los términos que violan la simetría de Lorentz y, en ocasiones, invariancia bajo CPT. Es necesario

hacer énfasis en las consecuencias de los teoremas CPT [6] y anti-CPT [7]; la violación de CPT implica LV, sin embargo, la afirmación inversa no es verdadera, es decir, podemos tener LV sin que se viole CPT.

Los términos que violan la simetría de Lorentz involucran una parte que actúa como coeficiente de acoplamiento y otra parte construida a partir de los campos básicos del SM, es decir, los campos de norma, leptones, quarks y el bosón de Higgs. Estos están hechos de productos de la forma  $T^{\mu_1, \dots, \mu_n} \mathcal{O}_{\mu_1, \dots, \mu_n}$ , donde los  $T^{\mu_1, \dots, \mu_n}$  son  $n$ -tensores de Lorentz constantes, los cuales, aunque no representan grados de libertad, introducen direcciones especiales en el espacio, cuya presencia puede afectar de manera significativa el comportamiento dinámico de las partículas conocidas; y las cantidades  $\mathcal{O}_{\mu_1, \dots, \mu_n}$  son construidas a partir de contracciones propias de los campos del SM, los cuales son  $n$ -tensores bajo  $SO(1, 3)$  e invariantes bajo el grupo de norma del SM,  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Los términos construidos con operadores de orden mayor a cuatro son suprimidos por factores inversos a la escala de Planck, esto con respecto a los operadores de orden menor o igual a cuatro. Esto genera un sector importante del SME, la extensión del modelo estándar mínimo (mSME), el cual describe las principales contribuciones de LV y se construye a partir de operadores de dimensión canónica.

### 2.3.1. El sector leptónico impar bajo CPT

En el sector de fermiones de la extensión del modelo estándar, la contribución al lagrangiano se puede dividir en cuatro partes según si el término es CPT par o impar y si se trata de leptones o quarks. En este proyecto, centraremos nuestra atención en el sector leptónico que es impar bajo CPT [5]:

$$\mathcal{L}_{lepton}^{CPT-odd} = -(a_L)_{\mu}^{AB} \bar{L}_A \gamma^{\mu} L_B - (a_R)_{\mu}^{AB} \bar{R}_A \gamma^{\mu} R_B, \quad (2.9)$$

donde  $A, B, \dots$  son índices de sabor (distintas especies de leptones cargados;  $e, \mu, \tau$ ), y generando una nueva notación equivalente a la usada en 1.1,

$$L_A = L_i; \quad R_A = (l_A)_R = l_{R_i}, \quad (2.10)$$

$\gamma^{\mu}$  son matrices de Dirac,  $(a_{L,R})_{\mu}^{AB}$  son matrices hermitianas  $3 \times 3$  definidas en el espacio de sabor con dimensión de masa;  $R_A$  representa un leptón cargado de quiralidad derecha, en tanto que  $\bar{L} = (\bar{\nu}_{lL}, \bar{l}_L)$  es un doblete de quiralidad izquierda del grupo débil  $SU(2)_L$ , de los cuales hay tres y son conocidos como familias, a saber, la primera familia:  $(\bar{\nu}_{eL}, \bar{e}_L)$ ; la segunda:  $(\bar{\nu}_{\mu L}, \bar{\mu}_L)$ ; la tercera:  $(\bar{\nu}_{\tau L}, \bar{\tau}_L)$ .

### Breve paso por la Electrodinámica Cuántica Extendida

Para estudiar los decaimientos  $l_A \rightarrow l_B \gamma$ , necesitamos la parte de la lagrangiana del SM que involucra los acoplamientos del fotón con leptones cargados. Estos acoplamientos son por electrodinámica cuántica (QED),

$$\mathcal{L}_{QED} = -e\bar{l}_A\gamma_\mu l_A A^\mu, \quad (2.11)$$

donde  $e$  es la carga eléctrica en unidades de la carga del positrón,  $A_\mu$  es el campo electromagnético y se sobre entiende suma sobre el índice repetido  $A = e, \nu, \tau$ .

De la lagrangiana del SME que se proporcionón en 2.9 se puede extraer la electrodinámica cuántica generalizada que describe las interacciones electromagnéticas de los leptones cargados y que incorpore términos que violen la simetría de Lorentz. Esto se puede lograr estableciendo en cero los campos  $G_\mu$  para los gluones,  $W_\mu^\pm, Z_\mu^0$  para los bosones débiles y el campo físico de Higgs (pero no el valor esperado del doblete de Higgs, el cual genera las masas de los fermiones). De esta forma el único bosón que queda es el fotón, el cual media en las interacciones electromagnéticas.

Los términos impares de CPT que involucran los campos de leptones cargados es

$$\mathcal{L}_{lepton}^{CPT-odd} = -(a)_\mu^{AB}\bar{l}_A\gamma^\mu l_B - (b)_\mu^{AB}\bar{l}_A\gamma^5\gamma^\mu l_B, \quad (2.12)$$

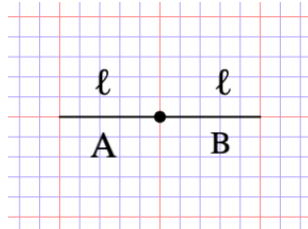
de esta expresión,  $a_\mu^{AB}$  y  $b_\mu^{AB}$  son combinaciones lineales de  $(a_{L,R})_\mu^{AB}$  y por lo tanto son hermitianas y tienen dimensión de masa. Estas matrices permiten mezclas entre leptones de diferentes familias. En la literatura [36][37], se ha demostrado que la matriz  $a_\mu^{AB}$  puede ser removida de la teoría mediante una transformación espinorial, por lo que en este trabajo será ignorada esta contribución, centrándonos sólo en los efectos de los coeficientes  $b_\mu^{AB}$ .

## Reglas de Feynman

En el contexto de la SME, los decaimientos  $l_A \rightarrow l_B\gamma$  ocurren a nivel de árbol vía la inserción del vértice de dos puntos que surge de la lagrangiana

$$\mathcal{L}_{l_A l_B} = -(b)_\mu^{AB}\bar{l}_A\gamma^5\gamma^\mu l_B, \quad (2.13)$$

de la cual derivaremos la respectiva regla de Feynman.



El diagrama anterior muestra el vértice donde se produce el cambio de sabor y cuya regla de Feynman asociada a esta es

$$-i\not{b}^{AB}\gamma^5. \quad (2.14)$$



---

## 3. Los decaimientos $l_A \rightarrow l_B \gamma$

---

En este capítulo trataremos la parte central de este proyecto. El objetivo es estudiar los decaimientos raros electromagnéticos con cambio de sabor leptónico en el contexto del SME que son inducidos por violación de CPT. Se calcula la anchura de decaimiento  $\Gamma(l_A \rightarrow l_B \gamma)$  en términos del campo de fondo  $b$  y se obtiene una cota del límite experimental correspondiente [10].

Los decaimientos de interés son  $\mu \rightarrow e \gamma$ ,  $\tau \rightarrow e \gamma$  y  $\tau \rightarrow \mu \gamma$ . En el SM, dichos decaimientos están estrictamente prohibidos a todo orden de la serie perturbativa, esto puesto que el SM considera a los neutrinos con masa exactamente igual a cero, o dicho de otra forma, sólo se consideran neutrinos izquierdos. Actualmente se sabe que los neutrinos tienen masa [9], lo que implica que la violación del sabor leptónico sea una posibilidad.

### 3.1. La amplitud invariante

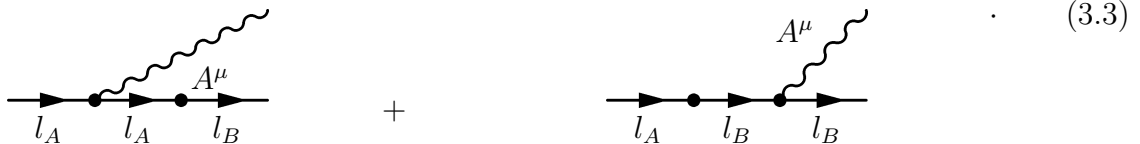
En el contexto del SME, la amplitud de los decaimientos toma la siguiente forma:

$$\mathcal{M}_{SME} = \mathcal{M}_{SM} + \mathcal{M}_{LV}. \quad (3.1)$$

En SM los decaimientos estudiados no se generan por lo que la ecuación 3.1 se reduce a:

$$\mathcal{M}_{SME} = \mathcal{M}_{LV}. \quad (3.2)$$

Los decaimientos ocurren a nivel árbol a través de los siguientes diagramas de Feynman:

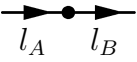
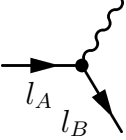
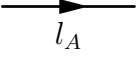


$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} = \quad (3.3)$$

Las respectivas reglas de Feynman de los diagramas anteriores se encuentran en el cuadro 3.1.

La amplitud invariante de los diagramas anteriores se escribe de la siguiente forma:

Cuadro 3.1: Reglas de Feynman

Diagrama	Regla	Naturaleza
	$-i\not{b}^{AB}\gamma^5$	vértice
	$-ie\gamma_\mu\delta_{AB}$	vértice
	$i\frac{\not{p}+m_A}{p^2-m_A^2}$	propagador

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad (3.4)$$

$$\mathcal{M}_1 = \bar{u}(p_2, s_2)(-i\not{b}^{AB}\gamma^5)\left(i\frac{\not{p}_2 + m_A}{p_2^2 - m_A^2}\right)(-ie\gamma_\mu)u(p_1, s_1)\epsilon^{\mu*}(q, \lambda) \quad (3.5)$$

$$\mathcal{M}_2 = \bar{u}(p_2, s_2)(-ie\gamma_\mu)\left(i\frac{\not{p}_1 + m_B}{p_1^2 - m_B^2}\right)(-i\not{b}^{AB}\gamma^5)u(p_1, s_1)\epsilon^{\mu*}(q, \lambda) \quad (3.6)$$

donde  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  son las amplitudes asociadas con el primer y segundo diagrama de 3.3 respectivamente. Con  $\bar{u}(p_2, s_2)$  describiendo al leptón que sale,  $u(p_1, s_1)$  describe el leptón que entra y  $\epsilon^{\mu*}(q, \lambda)$  el fotón que sale.

Usando ecuación de Dirac y el álgebra de Clifford, se encuentran nuevas expresiones para 3.5 y 3.6,

$$\mathcal{M}_1 = \frac{ie}{m_A^2 - m_B^2}\bar{u}(p_2, s_2)[-2p_2 \cdot b^{AB} + (m_A + m_B)\not{b}^{AB}]\gamma^5\gamma_\mu u(p_1, s_1)\epsilon^{\mu*}(q, \lambda) \quad (3.7)$$

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{ie}{m_A^2 - m_B^2}\bar{u}(p_2, s_2)\gamma^5\gamma_\mu[-2p_1 \cdot b^{AB} + (m_A + m_B)\not{b}^{AB}]u(p_1, s_1)\epsilon^{\mu*}(q, \lambda). \quad (3.8)$$

Por lo que la ecuación 3.4 tiene la siguiente configuración:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \frac{ie}{m_A^2 - m_B^2} \bar{u}(p_2, s_2) \{ [-2p_2 \cdot b^{AB} + (m_A + m_B) \not{b}^{AB}] \gamma^5 \gamma_\mu \\
&\quad - \gamma^5 \gamma_\mu [-2p_1 \cdot b^{AB} + (m_A + m_B) \not{b}^{AB}] \} u(p_1, s_1) \epsilon^{\mu*}(q, \lambda) \\
&= \frac{ie}{m_A^2 - m_B^2} \bar{u}(p_2, s_2) \Gamma_\mu u(p_1, s_1) \epsilon^{\mu*}(q, \lambda),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu &= [-2p_2 \cdot b^{AB} + (m_A + m_B) \not{b}^{AB}] \gamma^5 \gamma_\mu \\
&\quad - \gamma^5 \gamma_\mu [-2p_1 \cdot b^{AB} + (m_A + m_B) \not{b}^{AB}].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Es importante mencionar que la expresión definida en 3.10 cumple la siguiente identidad:

$$\bar{u}(p_2, s_2) \not{q} \Gamma_\mu u(p_1, s_1) = 0, \tag{3.11}$$

siendo  $\not{q} = \not{p}_1 - \not{p}_2$ , asociado al momento del fotón, que, además, por ecuación de Dirac cumple lo siguiente:  $\not{q} u(p_1, s_1) = (m_A - \not{p}_2) u(p_1, s_1)$ , y  $\bar{u}(p_2, s_2) \not{q} = \bar{u}(p_2, s_2) (m_B - \not{p}_1)$ .

Cuadrando la amplitud de 3.9, y promediando sobre los estados de espín del leptón inicial, sumando sobre los estados de espín del leptón final y sumando sobre los estados de polarización del fotón se tiene:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \left( \frac{1}{2} \sum_{s_1} \right) \left( \sum_{s_2} \right) \left( \sum_{\lambda=1}^2 \right) \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^\dagger \\
&= \left( \frac{1}{2} \sum_{s_1} \right) \left( \sum_{s_2} \right) \left( \sum_{\lambda=1}^2 \right) \frac{e^2}{(m_A^2 - m_B^2)^2} [\bar{u}(p_2, s_2) \Gamma_\mu u(p_1, s_1) \epsilon^{\mu*}(q, \lambda)] \\
&\quad \cdot [\bar{u}(p_2, s_2) \Gamma_\nu u(p_1, s_1) \epsilon^{\nu*}(q, \lambda)]^\dagger \\
&= \frac{e^2}{2(m_A^2 - m_B^2)^2} \left( \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon^{\mu*}(q, \lambda) \epsilon^\nu(q, \lambda) \right) \left( \sum_{s_1} (u(p_1, s_1))_\beta (\bar{u}(p_1, s_1))_\gamma \right) \\
&\quad \cdot \left( \sum_{s_2} (u(p_2, s_2))_\delta (\bar{u}(p_2, s_2))_\alpha \right) (\Gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\Gamma_\nu^\dagger)_{\gamma\delta}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Usando las siguientes identidades podemos simplificar la expresión anterior,

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu = -g_{\mu\nu}; \quad \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m. \tag{3.13}$$

Por lo tanto, la expresión 3.12 resulta ser:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{-e^2}{2(m_A^2 - m_B^2)^2} Tr \left\{ (\not{p}_2 + m_B) \Gamma_\mu (\not{p}_1 + m_A) \Gamma^{\mu'} \right\}, \quad (3.14)$$

la nueva expresión,  $\Gamma^{\mu'}$ , tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu'} &= \gamma^0 \Gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \\ &= \gamma^5 \gamma^\mu [-2(p_2 \cdot b^{AB})^* + (m_A + m_B) \not{b}^{AB*}] \\ &\quad - [-2(p_1 \cdot b^{AB})^* + (m_A + m_B) \not{b}^{AB*}] \gamma^5 \gamma^\mu. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Calculando la traza de la ecuación 3.14,

$$\begin{aligned} Tr \left\{ (\not{p}_2 + m_B) \Gamma_\mu (\not{p}_1 + m_A) \Gamma^{\mu'} \right\} &= \\ -16 \left\{ (3m_A m_B + m_A^2) \left[ |p_1 \cdot b^{AB}|^2 - (p_1 \cdot b^{AB})(p_2 \cdot b^{AB})^* \right] \right. \\ &\quad \left. + (3m_A m_B + m_B^2) \left[ |p_2 \cdot b^{AB}|^2 - (p_1 \cdot b^{AB})^*(p_2 \cdot b^{AB}) \right] \right. \\ &\quad \left. + (m_A m_B + m_A^2) \left[ (p_1 \cdot b^{AB})(p_2 \cdot b^{AB*}) - (p_2 \cdot b^{AB})(p_2 \cdot b^{AB*}) \right] \right. \\ &\quad \left. + (m_A m_B + m_B^2) \left[ (p_2 \cdot b^{AB})(p_1 \cdot b^{AB*}) - (p_1 \cdot b^{AB})(p_1 \cdot b^{AB*}) \right] \right\} \\ &\quad + 8(m_A^2 - m_B^2)^2 b^{AB} \cdot b^{AB*} \end{aligned} \quad (3.16)$$

En general las matrices  $b^{AB}$  son complejas. Para simplificar los cálculos, se asumirán reales, reduciendo la expresión anterior a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} Tr \left\{ (\not{p}_2 + m_B) \Gamma_\mu (\not{p}_1 + m_A) \Gamma^{\mu'} \right\} &= \\ -16 \left\{ 2m_A m_B \left[ (p_1 \cdot b^{AB}) - (p_2 \cdot b^{AB}) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + (m_A^2 - m_B^2) \left[ (p_1 \cdot b^{AB})^2 - (p_2 \cdot b^{AB})^2 \right] \right\} \\ &\quad + 8(m_A^2 - m_B^2)^2 b^{AB^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Finalmente, la amplitud invariante al cuadrado toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^2}{(m_A^2 - m_B^2)^2} \left\{ 4m_A m_B (q_1 \cdot b^{AB})^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(m_A^2 - m_B^2) \left[ (p_1 \cdot b^{AB})^2 - (p_2 \cdot b^{AB})^2 \right] - (m_A^2 - m_B^2)^2 b^{AB^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde  $b^{AB^2} = b^{AB} \cdot b^{AB}$ .

### 3.2. La anchura de decaimiento $\Gamma(l_A \rightarrow l_B \gamma)$

La anchura de decaimiento se calcula en el marco de reposo de la partícula que decae. En este marco, los momentos de del leptón  $l_B$  y del fotón son colineales y de sentido opuesto, lo cual permite realizar una serie de simplificaciones en la forma de la amplitud invariante al cuadrado.

Se sabe que por la conservación de energía y momento se debe satisfacer  $p_1 = p_2 + q$ . Puesto que consideramos el marco de reposo del leptón  $l_A$ , su cuadrimomento es  $p_1 = (m_A, \vec{0})$ , además,  $q = (|\vec{q}|, \vec{q})$ ; la parte espacial implica:

$$\begin{aligned} \vec{p}_2 &= -\vec{q}, \\ |\vec{p}_2| &= |\vec{q}| = |\vec{p}|, \\ \vec{q} &= |\vec{p}| \hat{p}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde la expresión para  $\hat{p}$  surge de la geometría del sistema y se define más adelante. Por otro lado, la parte temporal lleva a la siguiente relación:

$$m_A = E_2 + E_q = \sqrt{m_B^2 + \vec{p}^2} + |\vec{p}|,$$

con un poco de álgebra podemos llegar a las siguientes expresiones:

$$|\vec{p}| = \frac{m_A^2 - m_B^2}{2m_A}, \tag{3.20}$$

$$E_2 = \frac{m_A^2 + m_B^2}{2m_A}. \tag{3.21}$$

Dadas las ecuaciones 3.19, 3.20 y 3.21, podemos reescribir las siguientes expresiones:

$$(q \cdot b^{AB})^2 = \frac{(m_A^2 - m_B^2)^2}{4m_A^2} (b_0^{AB} + \vec{b}^{AB} \cdot \hat{p})^2 \tag{3.22}$$

$$(p_1 \cdot b^{AB})^2 = (m_A b_0^{AB})^2 \tag{3.23}$$

$$(p_2 \cdot b^{AB})^2 = \frac{(m_A^2 - m_B^2)^2}{4m_A^2} \left[ \frac{m_A^2 + m_B^2}{m_A^2 - m_B^2} b_0^{AB} - \vec{b}^{AB} \cdot \hat{p} \right]^2, \tag{3.24}$$

los cuales son términos que aparecen en la ecuación 3.18. Así, la amplitud invariante al cuadrado en términos del campo de fondo y del vector unitario luce de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 = 2e^2 \left\{ \left( \frac{m_B^2}{m_A^2} + 2\frac{m_B}{m_A} + 3 \right) b_0^{AB^2} \right. \\
+ 2 \left( \frac{m_B^2}{m_A^2} + 2\frac{m_B}{m_A} + 1 \right) b_0^{AB} \vec{b}^{AB} \cdot \hat{p} \\
+ \left( \frac{m_B^2}{m_A^2} + 2\frac{m_B}{m_A} - 1 \right) (\vec{b}^{AB} \cdot \hat{p})^2 \\
\left. - 2b^{AB^2} \right\} \tag{3.25}
\end{aligned}$$

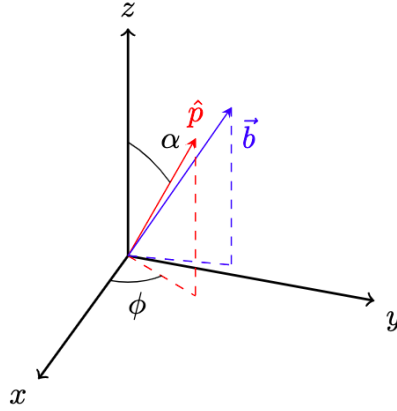


Figura 3.1: Marco de reposo del leptón  $l_A$ .

Al utilizar la configuración de ángulos de la figura 3.1, el segundo y tercer término que conforman la amplitud  $|\mathcal{M}|^2$  son funciones implícitas de los ángulos de decaimiento  $\alpha$  y  $\phi$ , la dependencia angular de estas expresiones es trivial, toda vez que las proyecciones de  $\hat{p}$  con el vector  $\vec{b}$  se define en coordenadas esféricas.

En general, la expresión para la anchura de decaimiento, en el marco de reposo de la partícula P, es dada por [38]

$$\Gamma(P \rightarrow \{p_f\}) = \int \frac{1}{2m_P} |\mathcal{M}|^2 d\Pi_n, \tag{3.26}$$

donde la integral de  $d\Pi_n$  representa el espacio fase de  $n$  partículas distintas, expresado como:

$$\int d\Pi_n = \left( \prod_f \int \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - \sum p_f). \tag{3.27}$$

Para un espacio fase de  $n = 2$  partículas distintas, calcularemos la anchura de decaimiento  $\Gamma(l_A \rightarrow l_B \gamma)$ , usando las dos expresiones anteriores, de la siguiente manera:

$$\Gamma(l_A \rightarrow l_B \gamma) = \frac{1}{32\pi^2 m_A} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta^4(p_1 - p_2 - q)}{E_2 E_q} d^3 \vec{p}_2 d^3 \vec{q}. \quad (3.28)$$

Usando la identidad de la delta de Dirac:  $\delta^4(p_1 - p_2 - q) = \delta(p_1^0 - p_2^0 - q^0) \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{q})$ , sustituyendo los valores:  $p^0 = m_A$ ,  $\vec{p}_1 = 0$  y  $p_i^0 = E_i$ , entonces:

$$\Gamma(l_A \rightarrow l_B \gamma) = \frac{1}{32\pi^2 m_A} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(m_A - E_2 - E_q)}{E_2 E_q} \delta^3(\vec{p}_2 + \vec{q}) d^3 \vec{p}_2 d^3 \vec{q}. \quad (3.29)$$

La integral con respecto a  $\vec{q}$  se puede resolver inmediatamente usando la delta  $\delta^3(\vec{p}_2 + \vec{q})$ ,

$$\Gamma(l_A \rightarrow l_B \gamma) = \frac{1}{32\pi^2 m_A} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(m_A - E_2 - E_q)}{E_2 E_q} d^3 \vec{p}_2. \quad (3.30)$$

Resolviendo la inetagral haciendo uso de coordenadas esféricas  $(r, \alpha, \phi)$ , tomando a  $r = |\vec{p}|$  en el espacio de momentos y  $\hat{p} = (\cos \phi \sin \alpha, \sin \phi \sin \alpha, \cos \alpha)$

$$\Gamma(l_A \rightarrow l_B \gamma) = \frac{1}{32\pi^2 m_A} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(m_A - E_2 - E_q)}{E_2 E_q} r^2 \sin \alpha dr d\alpha d\phi, \quad (3.31)$$

donde  $E_2 = \sqrt{r^2 + m_B^2}$  y  $E_q = |r|$ . Para hacer la ineegral con respecto a  $r$ , usaremos el siguiente cambio de variable:  $u = E_2 + E_q$ ; para el límite de integración inferior si  $r = 0 \rightarrow u = m_B$ ; y para el diferencial,  $dr = \frac{E_2 E_q}{ru} du$ . Aplicando este cambio de variable, tenemos:

$$\Gamma(l_A \rightarrow l_B \gamma) = \frac{1}{32\pi^2 m_A} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{m_B}^\infty |\mathcal{M}|^2 \delta(m_A - u) \frac{r}{u} \sin \alpha du d\alpha d\phi. \quad (3.32)$$

Podemos resolver la integral con respecto a  $u$  de forma trivial usando la delta  $\delta(m_A - u)$ , lo que implica sustituir a  $u$  por  $m_A$ , además de que  $r$  toma un valor constante, que recordando el resultado de la ecuación 3.20, tenemos  $r = \frac{m_A^2 - m_B^2}{2m_A}$ .

$$\Gamma(l_A \rightarrow l_B \gamma) = \frac{m_A^2 - m_B^2}{(8\pi)^2 m_A^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathcal{M}|^2 \sin \alpha d\alpha d\phi. \quad (3.33)$$

El último paso es integrar sobre los ángulos  $\alpha$  y  $\phi$ . Cuando el integrando no depende de estos ángulos, la amplitud es una constante y la integral aporta un factor de  $4\pi$ , este caso se presenta en el primer y cuarto término de la expresión 3.25.

Para los términos de la amplitud que dependen de los ángulos  $\alpha$  y  $\phi$ , tenemos dos casos. El primero es el término que presenta el el producto punto  $\vec{b}^{AB} \cdot \hat{p}$ ,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\vec{b}^{AB} \cdot \hat{p}) \sin\alpha d\alpha d\phi = \\
= & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [b_1^{AB} \cos\phi \sin^2\alpha + b_2^{AB} \sin\phi \sin^2\alpha + b_3^{AB} \cos\alpha \sin\alpha] d\alpha d\phi = \\
& = 0, \tag{3.34}
\end{aligned}$$

lo que significa que este término no contribuye porque la integral es igual a cero. Para el segundo caso tenemos el término que presenta  $(\vec{b}^{AB} \cdot \hat{p})^2$ , este término contribuye con el siguiente factor:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\vec{b}^{AB} \cdot \hat{p})^2 \sin\alpha d\alpha d\phi = \frac{4\pi}{3} |\vec{b}^{AB}|^2. \tag{3.35}$$

Así,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathcal{M}|^2 \sin\alpha d\alpha d\phi = \\
= & 8\pi e^2 \left\{ \left( \frac{m_B^2}{m_A^2} + 2\frac{m_B}{m_A} + 1 \right) b_0^{AB^2} + \frac{1}{3} \left( \frac{m_B^2}{m_A^2} + 2\frac{m_B}{m_A} + 5 \right) |\vec{b}^{AB}|^2 \right\}. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Finalmente, la anchura de decaimiento toma la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
\Gamma(l_A \rightarrow l_B \gamma) = & \frac{e^2}{8\pi} \frac{m_A^2 - m_B^2}{m_A^3} \left\{ \left( 1 + \frac{m_B}{m_A} \right) b_0^{AB^2} \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} \left( \frac{m_B^2}{m_A^2} + 2\frac{m_B}{m_A} + 5 \right) |\vec{b}^{AB}|^2 \right\}. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

### 3.3. Branching ratio $\mathbf{BR}(l_A \rightarrow l_B \gamma)$

Para calcular el branching ratio es conveniente reducir un poco más la expresión de la anchura de decaimiento, para conseguirlo definiremos la siguiente variable,

$$x_{AB} \equiv \frac{m_B}{m_A}, \tag{3.38}$$

con esta nueva definición y un poco de álgebra, podemos reescribir la expresión 3.37 de la forma siguiente,

$$\begin{aligned}
\Gamma(l_A \rightarrow l_B \gamma) = & \frac{\alpha}{2} m_A (1 - x_{AB}^2) \left\{ (1 + x_{AB})^2 \left( \frac{b_0^{AB}}{m_A} \right)^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} [4 + (1 + x_{AB})^2] \left( \frac{|\vec{b}^{AB}|}{m_A} \right)^2 \right\}, \tag{3.39}
\end{aligned}$$

donde  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ .

El braching ratio (fracción de decaimiento) está dado por:

$$\begin{aligned} BR(l_A \rightarrow l_B \gamma) &= \frac{\Gamma(l_A \rightarrow l_B \gamma)}{\Gamma_A} \\ &= \frac{\alpha m_A}{2 \Gamma_A} (1 - x_{AB}^2) \left\{ (1 + x_{AB})^2 \left( \frac{b_0^{AB}}{m_A} \right)^2 + \frac{1}{3} [4 + (1 + x_{AB})^2] \left( \frac{|\vec{b}^{AB}|}{m_A} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde  $\Gamma_A$  es la anchura total del leptón que decae,  $l_A$ .

### 3.3.1. Cotas para $b_0^{AB}$ y $|\vec{b}^{AB}|$

Los decaimientos  $\mu \rightarrow e\gamma$ ,  $\tau \rightarrow e\gamma$  y  $\tau \rightarrow \mu\gamma$  han sido buscados experimentalmente. Debido a que no han sido observados se han puesto los siguientes límites [10]:

$$BR(\mu \rightarrow e\gamma) < 4.2 \times 10^{-13} \quad (3.41)$$

$$BR(\tau \rightarrow e\gamma) < 3.3 \times 10^{-8} \quad (3.42)$$

$$BR(\tau \rightarrow \mu\gamma) < 4.2 \times 10^{-8}. \quad (3.43)$$

Se demanda que la contribución de la extensión del modelo estándar (SME) sea menor que el límite experimental,

$$BR(l_A \rightarrow l_B \gamma) < BR(l_A \rightarrow l_B \gamma)^{LE}, \quad (3.44)$$

donde  $BR(l_A \rightarrow l_B \gamma)^{LE}$  es el límite experimental dado por las ecuaciones 3.41, 3.42 y 3.43. Haciendo un despeje tenemos:

$$(1 + x_{AB})^2 \left( \frac{b_0^{AB}}{m_A} \right)^2 + \frac{1}{3} [4 + (1 + x_{AB})^2] \left( \frac{|\vec{b}^{AB}|}{m_A} \right)^2 < \frac{2BR(l_A \rightarrow l_B \gamma)^{LE} \Gamma_A}{\alpha m_A} (1 - x_{AB}^2)^{-1}, \quad (3.45)$$

de esta expresión se puede estudiar cada uno de los tres casos de interés. Una buena aproximación es ignorar a  $x_{AB}$  frente a 1, entonces se tiene,

$$\left( \frac{b_0^{AB}}{m_A} \right)^2 + \frac{5}{3} \left( \frac{|\vec{b}^{AB}|}{m_A} \right)^2 < \frac{2BR(l_A \rightarrow l_B \gamma)^{LE} \Gamma_A}{\alpha m_A}, \quad (3.46)$$

con la expresión anterior sólo es necesario conocer las propiedades de las partículas  $e$ ,  $\mu$  y  $\tau$ , pero estas están dadas en el cuadro 1.1.

Con los datos necesarios y haciendo los cálculos correspondientes, se obtienen los siguientes resultados:

## Decaimiento $\mu \rightarrow e\gamma$

Razón de masas de  $e$  y  $\mu$ :

$$x_{\mu e} = \frac{m_e}{m_\mu} = \frac{0.51 \times 10^{-3} GeV}{0.105 GeV} = 4.86 \times 10^{-3}$$

Anchura total de decaimiento de  $\mu$ :

$$\Gamma_\mu = 2.865552 \times 10^{-19} GeV$$

Límite experimental para el decaimiento  $\mu \rightarrow e\gamma$ :

$$BR(\mu \rightarrow e\gamma) < BR(\mu \rightarrow e\gamma)^{LE} = 4.2 \times 10^{-13}$$

Cotas para  $b^{\mu e}$ :

$$\frac{1}{m_\mu^2} \left[ (b_0^{\mu e})^2 + \frac{5}{3} |\vec{b}^{\mu e}|^2 \right] < 3.140644 \times 10^{-18}$$
$$(b_0^{\mu e})^2 + \frac{5}{3} |\vec{b}^{\mu e}|^2 < 3.46256 \times 10^{-20} GeV^2$$

## Decaimiento $\tau \rightarrow e\gamma$

Razón de masas de  $e$  y  $\tau$ :

$$x_{\tau e} = \frac{m_e}{m_\tau} = \frac{0.51 \times 10^{-3} GeV}{1.776 GeV} = 0.29 \times 10^{-3}$$

Anchura total de decaimiento de  $\tau$ :

$$\Gamma_\tau = 2.26735 \times 10^{-12} GeV$$

Límite experimental para el decaimiento  $\tau \rightarrow e\gamma$ :

$$BR(\tau \rightarrow e\gamma) < BR(\tau \rightarrow e\gamma)^{LE} = 3.3 \times 10^{-8}$$

Cotas para  $b^{\tau e}$ :

$$\frac{1}{m_\tau^2} \left[ (b_0^{\tau e})^2 + \frac{5}{3} |\vec{b}^{\tau e}|^2 \right] < 1.154356 \times 10^{-17}$$
$$(b_0^{\tau e})^2 + \frac{5}{3} |\vec{b}^{\tau e}|^2 < 3.641041 \times 10^{-17} GeV^2$$

## Decaimiento $\tau \rightarrow \mu\gamma$

Razón de masas de  $\mu$  y  $\tau$ :

$$x_{\tau\mu} = \frac{m_\mu}{m_\tau} = \frac{0.105\text{GeV}}{1.776\text{GeV}} = 6 \times 10^{-2}$$

Anchura total de decaimiento de  $\tau$ :

$$\Gamma_\tau = 2.26735 \times 10^{-12}\text{GeV}$$

Límite experimental para el decaimiento  $\tau \rightarrow \mu\gamma$ :

$$BR(\tau \rightarrow \mu\gamma) < BR(\tau \rightarrow \mu\gamma)^{LE} = 4.2 \times 10^{-8}$$

Cotas para  $b^{\tau\mu}$ :

$$\frac{1}{m_\tau^2} \left[ (b_0^{\tau\mu})^2 + \frac{5}{3} |\vec{b}^{\tau\mu}|^2 \right] < 1.469181 \times 10^{-17}$$
$$(b_0^{\tau\mu})^2 + \frac{5}{3} |\vec{b}^{\tau\mu}|^2 < 4.634055 \times 10^{-17}\text{GeV}^2$$

Todas estas cotas son válidas para el marco de reposo del correspondiente leptón  $l_A$ .



---

## 4. Conclusiones

---

Uno de los mayores objetivos de la física teórica contemporánea es el desarrollo de una teoría fundamental que logre unificar la relatividad general y el modelo estándar de física de partículas. Sin embargo, se espera que dicha teoría de unificación se vuelva relevante a escalas de energía tan altas que su verificación experimental resulta problemática. Una manera de intentar superar este problema se encuentra en la posibilidad de que a muy altas energías, la teoría fundamental viole las simetrías de CPT y de Lorentz. Pequeñas evidencias de estas violaciones pueden ser detectables a escalas de energía que pueden ser alcanzadas en experimentos actuales y cualquier detección de tal violación de estas simetrías sería una clara señal de la existencia de nueva física.

En este trabajo de tesis se han estudiado los decaimientos electromagnéticos con cambio de sabor leptónico  $l_A \rightarrow l_B \gamma$  en el contexto de la Extensión del Modelo Estándar. Este tipo de decaimientos, los cuales están prohibidos a todo orden de la serie perturbativa en el Modelo Estándar, ocurren a nivel de árbol en este modelo a través de un término impar bajo transformaciones de CPT. Un aspecto interesante de los términos que violan CPT es que están caracterizados por coeficientes de Lorentz que son 4-vectores bajo transformaciones de observador, los cuales tienen unidades de masa y, por lo tanto, conducen a fuertes contribuciones sobre observables de bajas energías, ya que, por consideraciones de dimensionalidad, las contribuciones son, en el caso del presente estudio, proporcionales al cuadrado del inverso de la masa del leptón  $l_A$ .

Usando los límites experimentales existentes sobre los decaimientos  $\mu \rightarrow e\gamma$ ,  $\tau \rightarrow e\gamma$  y  $\tau \rightarrow \mu\gamma$

$$BR(\mu \rightarrow e\gamma) < 4.2 \times 10^{-13}, \quad (4.1)$$

$$BR(\tau \rightarrow e\gamma) < 3.3 \times 10^{-8}, \quad (4.2)$$

$$BR(\tau \rightarrow \mu\gamma) < 4.2 \times 10^{-8}, \quad (4.3)$$

se ha logrado establecer las siguientes cotas sobre los elementos de matriz correspondientes  $b_\mu^{AB}$ :

$$(b_0^{\mu e})^2 + \frac{5}{3} \left| \vec{b}^{\mu e} \right|^2 < 3.46 \times 10^{-20} GeV^2 \quad (4.4)$$

$$(b_0^{\tau e})^2 + \frac{5}{3} \left| \vec{b}^{\tau e} \right|^2 < 3.64 \times 10^{-17} GeV^2 \quad (4.5)$$

$$(b_0^{\tau \mu})^2 + \frac{5}{3} \left| \vec{b}^{\tau \mu} \right|^2 < 4.63 \times 10^{-17} GeV^2 \quad (4.6)$$

---

## 5. Bibliografía

---

- [1] Werner Heisenberg. Quantum theory of fields and elementary particles. *Scientific Review Papers, Talks, and Books Wissenschaftliche Übersichtsartikel, Vorträge und Bücher*, pages 552–561, 1984.
- [2] C.D. Froggatt and H.B. Nielsen. *Origin Of Symmetries*. World Scientific Publishing Company, 1991. ISBN 9789814508025. URL <https://books.google.com.mx/books?id=aosGCwAAQBAJ>.
- [3] OJ Franca, R Montemayor, and LF Urrutia. Emergent electrodynamics from the nambu model for spontaneous lorentz symmetry breaking. *arXiv preprint arXiv:1203.1659*, 2012.
- [4] Xavier Calmet, Branislav Jurčo, Peter Schupp, Julius Wess, and Michael Wohlgenannt. The standard model on non-commutative space-time. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, 23(2):363–376, 2002.
- [5] Don Colladay and V Alan Kostelecký. Lorentz-violating extension of the standard model. *Physical Review D*, 58(11):116002, 1998.
- [6] Wolfgang Pauli, Léon Rosenfeld, and Victor Weisskopf. Niels bohr and the development of physics. *British Journal for the Philosophy of Science*, 7(28), 1957.
- [7] Oscar W Greenberg. C p t violation implies violation of lorentz invariance. *Physical Review Letters*, 89(23):231602, 2002.
- [8] Paola Carolina Arias Reyes. *Fenomenología de la Violación de Invarianza Lorentz/CPT en Física de Partículas y Teoría Cuántica de Campos*. PhD thesis, Universidad de Santiago de Chile, 2008.
- [9] SnO Collaboration et al. Measurement of the rate of  $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$  interactions produced by  $8b$  solar neutrinos at the sudbury neutrino observatory. *arXiv preprint nucl-ex/0106015*, 2001.
- [10] Particle Data Group, PAea Zyla, RM Barnett, J Beringer, O Dahl, DA Dwyer, DE Groom, C-J Lin, KS Lugovsky, E Pianori, et al. Review of particle physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020(8):083C01, 2020.
- [11] W Noel Cottingham and Derek A Greenwood. *An introduction to the standard model of particle physics*. Cambridge university press, 2007.
- [12] M. Herrero. *The Standard Model*, pages 1–59. Springer Netherlands, Dordrecht, 1999. ISBN 978-94-011-4689-0. doi: 10.1007/978-94-011-4689-0\_1. URL [https://doi.org/10.1007/978-94-011-4689-0\\_1](https://doi.org/10.1007/978-94-011-4689-0_1).
- [13] David J. Griffiths. *Introduction to elementary particles*, volume 1. Harper and Row, New York, 1987.

- [14] Peter Renton. *Electroweak Interactions: An Introduction to the Physics of Quarks and Leptons*, volume 1. Cambridge University Press, 1990.
- [15] Walter Greiner and Berndt Müller. *Gauge Theory of Weak Interactions*, volume 1. Springer Berlin, Heidelberg, 2009.
- [16] Adriana Pérez. *El sector de Yukawa del Modelo Estándar en 6 dimensiones*. Degree thesis, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Diciembre 2013.
- [17] Peter W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, Oct 1964. doi: 10.1103/PhysRevLett.13.508. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.508>.
- [18] J. Alfonso Ahuatzí. *Los decaimientos raros del bosón de Higgs  $H \rightarrow q_A q_B$  en la Extensión del Modelo Estándar*. Degree thesis, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Diciembre 2019.
- [19] T. Morii, C.S. Lim, and S.N. Mukherjee. *The Physics of the Standard Model and Beyond*. World Scientific, 2004. ISBN 9789812795601. URL <https://books.google.com.mx/books?id=f89yg8a1t-EC>.
- [20] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Physical Review*, 96(1):191–195, October 1954. doi: 10.1103/PhysRev.96.191.
- [21] Thomas Teubner. The standard model. *Lecture Oxford University*, 2009.
- [22] Lucero Guadalupe Benitez Guzmán, BENITEZ GUZMAN, LUCERO GUADALUPE, et al. El decaimiento del bosón de higgs a tres gluones en el modelo estándar. Master’s thesis, Benemérita Univerisdad Autónoma de Puebla, 2015.
- [23] Arturo Sosa Chávez et al. El decaimiento  $h \rightarrow zv$  en el modelo estándar con dimensiones extra. Master’s thesis, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2017.
- [24] Dan Hooper, Dean Morgan, and Elizabeth Winstanley. Lorentz and c p t invariance violation in high-energy neutrinos. *Physical Review D*, 72(6):065009, 2005.
- [25] V. Alan Kostelecký and Stuart Samuel. Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings. *Phys. Rev. D*, 40:1886–1903, Sep 1989. doi: 10.1103/PhysRevD.40.1886. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.40.1886>.
- [26] Gustavo C. Branco and V. Alan Kostelecký. Cp violation in supersymmetric models. *Phys. Rev. D*, 39:2075–2078, Apr 1989. doi: 10.1103/PhysRevD.39.2075. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.39.2075>.
- [27] V. Alan Kostelecký and Neil Russell. Data tables for lorentz and cpt violation. *Reviews of Modern Physics*, 83(1):11–31, mar 2011. doi: 10.1103/revmodphys.83.11. URL <https://doi.org/10.1103%2Frevmodphys.83.11>.

- [28] G. Ahuatzin, I. Bautista, J. A. Hernández-López, F. Ramírez-Zavaleta, and J. J. Toscano. Decay  $b \rightarrow s\gamma$  in the presence of a constant antisymmetric tensor field. *Phys. Rev. D*, 82:053001, Sep 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.82.053001. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.053001>.
- [29] Makoto Kobayashi and Toshihide Maskawa. CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction. *Progress of Theoretical Physics*, 49(2):652–657, 02 1973. ISSN 0033-068X. doi: 10.1143/PTP.49.652. URL <https://doi.org/10.1143/PTP.49.652>.
- [30] L G Benitez-Guzmán, I García-Jiménez, M A López-Osorio, E Martínez-Pascual, and J J Toscano. Revisiting the flavor changing neutral current higgs decays  $h \rightarrow q_i q_j$  in the standard model. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 42(8):085002, jul 2015. doi: 10.1088/0954-3899/42/8/085002. URL <https://doi.org/10.1088/0954-3899/42/8/085002>.
- [31] J. I. Aranda, A. Cordero-Cid, F. Ramírez-Zavaleta, J. J. Toscano, and E. S. Tututi. Higgs mediated flavor violating top quark decays  $t \rightarrow u_i h$ ,  $u_i \gamma$ ,  $u_i \gamma \gamma$ , and the process  $\gamma \gamma \rightarrow tc$  in effective theories. *Phys. Rev. D*, 81:077701, Apr 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.81.077701. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.077701>.
- [32] M A López-Osorio, E Martínez-Pascual, and J J Toscano. Implications of lorentz violation on higgs-mediated lepton flavor violation. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 43(2):025003, jan 2016. doi: 10.1088/0954-3899/43/2/025003. URL <https://doi.org/10.1088/0954-3899/43/2/025003>.
- [33] J. P. Noordmans. *Lorentz violation in weak decays*. PhD thesis, University of Groningen, 2014.
- [34] Robert Bluhm, V. Alan Kostelecký, Charles D. Lane, and Neil Russell. Probing lorentz and CPT violation with space-based experiments. *Phys. Rev. D*, 68:125008, Dec 2003. doi: 10.1103/PhysRevD.68.125008. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.68.125008>.
- [35] V. Alan Kostelecký and Matthew Mewes. Signals for lorentz violation in electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 66:056005, Sep 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.66.056005. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.66.056005>.
- [36] Don Colladay and Patrick McDonald. Redefining spinors in lorentz-violating quantum electrodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 43(7):3554–3564, 2002.
- [37] Don Colladay and V Alan Kostelecký. Cpt violation and the standard model. *Physical Review D*, 55(11):6760, 1997.
- [38] Michael E Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.