Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Comprensión de las ecuaciones de primer grado en secundaria desde la teoría APOE

Tesis presentada a la

Academia de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

Presenta:

Yeimi Durán Vargas

Director de tesis:

Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar

Codirector de tesis:

Mtro. Reynaldo Iglecias Antonio

Puebla, Pue. Octubre 2024

Título: Comprensión de las ecuaciones de primer grado en secundaria desde la teoría APOE

Estudiante: YEIMI DURÁN VARGAS

COMITÉ

Mtra. Elizabeth Martínez Banfi
Presidente

Mtro. David Nexticapan Cortes
Secretario

Mtro. José Antonio Sánchez García
Vocal

Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar
Asesora

Mtro. Reynaldo Iglecias Antonio
Codirector

Agradecimientos

Quiero expresar mis agradecimientos a mis padres y a mi abue, por su amor incondicional, apoyo y confianza a lo largo de mi vida. Sin su apoyo este proyecto no sería posible.

A mi hermano Gustavo, gracias por estar siempre ahí para escucharme, hacerme compañía y cuidar de Simba, lo que me permitió dedicarme plenamente a este trabajo.

A mis niñas Candy y Princesa, por los sacrificios que hicieron y por todo el amor incondicional que me brindaron.

A mi novio Jesús Daniel, quien me inspira para ser mejor todos los días, me apoya, me escucha y me entiende.

A la Dra. Lidia, por aceptar ser mi directora de tesis y por sus enseñanzas, consejos y apoyo a lo largo de este proceso. Su orientación ha sido clave para culminar este trabajo y me ha motivado a dar lo mejor de mí.

Al Mtro. Reynaldo por su apoyo y colaboración con este proyecto, sus retroalimentaciones enriquecieron el trabajo.

A mis sinodales, por dedicar su tiempo para leer mi trabajo y hacer una retroalimentación, sus observaciones enriquecieron esta investigación.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Resumen

En este trabajo se presenta una descomposición genética preliminar (DGP), desarrollada bajo el enfoque de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), tras una investigación documental sobre la enseñanza de las ecuaciones de primer grado. Dicha investigación abarca los antecedentes del concepto de ecuación de primer grado, los errores comunes que los estudiantes suelen cometer al resolver estas ecuaciones y problemas relacionados, así como investigaciones previas relevantes. Además, se incluye un análisis del plan de estudios y libro de matemáticas de la Secretaría de Educación Pública (SEP) para primero de secundaria, destacando los temas previos al de ecuaciones de primer grado.

Basándose en estos resultados, se propone el diseño de una DGP referente al concepto solución de una ecuación de primer grado. Posteriormente se describe el diseño de un cuestionario, cuyo objetivo es validar la DGP propuesta.

También se describe el proceso de aplicación del cuestionario a estudiantes de primero de secundaria en una escuela de la SEP y a una estudiante de segundo grado de secundaria de una escuela particular, y finalmente, se presenta el análisis de los resultados y las conclusiones. En los resultados se observó que, al resolver problemas de ecuaciones de primer grado, los estudiantes participantes enfrentaron dificultades en el proceso de modelación.

Palabras clave: Teoría APOE, descomposición genética, álgebra, ecuaciones de primer grado, errores.

ABSTRACT

This paper presents a preliminary genetic decomposition (PGD), developed under the APOE (Action, Process, Object, and Schema) approach, following an investigation into the teaching of first-degree equations. This research covers the background of the concept of first-degree equation, the common mistakes that students often make when solving these equations and related problems, as well as relevant previous research. In addition, an analysis of the Ministry of Public Education (SEP) curriculum and mathematics textbook for first year of secondary school is included, highlighting the topics prior to first-degree equations.

Based on these results, the design of a PGD regarding the concept of solving a first-degree equation is proposed. Subsequently, the design of a questionnaire is described, the objective of which is to validate the proposed PGD.

The process of applying the questionnaire to first-year secondary school students in a SEP school and to a second-year secondary school student from a private school is also described, and finally, the analysis of the results and conclusions are presented. The results showed that when solving problems involving first-degree equations, participating students faced difficulties in the modeling process.

Keywords: APOE theory, genetic decomposition, algebra, first-degree equations, errors.

Introducción

Según Cabrera (2022) “el estudio del Proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal es un tópico relevante en la investigación en matemática educativa debido a su naturaleza particular en comparación con otras áreas de las matemáticas" (p. 3). En particular, el estudio del concepto de ecuación de primer grado de la forma $ax + b = c$ con a $\neq 0, b, c$ constantes, constituye un tema de estudio a partir de la secundaria. Distintos autores han investigado el tema. Por ejemplo, Moreno y Cobo (1997), presentaron una secuencia de enseñanza de ecuaciones de primer grado, en la que introducen el concepto usando una balanza y observan que los estudiantes lograron desarrollar habilidades para despejar la incógnita. Por otro lado, Tettay-Mejía et al. (2019), presentan un trabajo enfocado en los errores en la resolución de problemas con ecuaciones, con el objetivo de identificar las dificultades que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones. Asimismo, Moreno et al. 2024, presentaron una propuesta didáctica para la enseñanza de las ecuaciones lineales, y concluyeron que, en secundaria, el principal desafío es la transición del pensamiento aritmético al algebraico, entre otros autores que también han abordado este tema. A diferencia de otras investigaciones, este trabajo se basa en la teoría APOE y presenta una DGP diseñada para el concepto solución de una ecuación de primer grado. El objetivo de dicha descomposición es describir cómo un estudiante de primer año de secundaria podría construir el concepto de solución de una ecuación de primer grado.

Este trabajo está estructurado en cinco capítulos como se detalla a continuación.

En el Capítulo 1 se presenta el planteamiento de la investigación donde se habla del planteamiento del problema, las preguntas de investigación que se dividen en la general y específicas, además de la justificación de tema y, por último, los objetivos de este trabajo.

En el Capítulo 2 se presenta la revisión de la literatura, donde se enuncian los antecedentes históricos del concepto ecuación de primer grado, algunas investigaciones relacionadas con dicho concepto, investigaciones en torno al álgebra realizadas desde la teoría APOE, los métodos actuales de enseñanza de este tema y los errores que suelen cometer los estudiantes al momento de resolver ecuaciones y problemas de ecuaciones. Luego, se incluye un análisis del plan de estudios de la SEP y del libro que utilizan los estudiantes. Por último, se muestra la importancia de resolver problemas, así como los pasos y conocimiento previos necesarios para abordarlos.

En el Capítulo 3 se presenta el marco teórico que da sustento a la investigación, la teoría APOE, que permitió dar un posible camino para la construcción de la DGP del concepto solución de una ecuación de primer grado, además de la definición de ecuación de primer grado.

En el Capítulo 4 se presenta la metodología de trabajo, la DGP con la cual se diseñaron los instrumentos, así como todas las especificaciones necesarias para la aplicación.

En el Capítulo 5, se presenta el análisis de los resultados obtenidos, así como las conclusiones.

Capítulo 1

1 Planteamiento de la investigación

Según Wicaksono et al. (2024) “Las matemáticas son un campo de estudio que debe estudiarse desde la escuela primaria hasta el nivel universitario” (p. 33).

Cabe aclarar que, la educación básica culmina con la secundaria (12 y 13 años), donde los estudiantes refinan las competencias que han ido desarrollando desde que empezaron su vida estudiantil (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2014).

Además, de que, conforme a Wicaksono et al. (2024):

> Las etapas del desarrollo cognitivo de Piaget, los alumnos en este rango de edad ingresan a la etapa de operaciones formales. Sin embargo, en este rango de edad aún se encuentran en la transición cognitiva del estudiante de la etapa de operaciones concretas a la etapa de operaciones formales. El desarrollo cognitivo según la teoría del constructivismo es la construcción del conocimiento que se refleja en las etapas de comprensión de los conceptos matemáticos (p. 37).

En lo que respecta a la formación matemática, el progreso depende en gran medida del nivel de conocimientos adquiridos, así como de las habilidades y actitudes que se desarrollen. No obstante, el éxito se ve principalmente influenciado por las experiencias previas y las vivencias actuales, las cuales pueden generar tanto un interés genuino en el tema por parte del estudiante como simplemente buscar la reproducción de algoritmos para obtener respuestas correctas (SEP, 2011).

Enfatizando lo anterior y tomando en cuenta que el álgebra es fundamental para encontrar soluciones a diversos problemas, las ecuaciones de primer grado son de los temas más desafiantes a los que los estudiantes se enfrentan (Wicaksono et al., 2024).

Además de que se introduce durante el primer grado de secundaria, y es importante ya que permite el desarrollo del pensamiento abstracto y se utilizan para resolver diversas situaciones de la vida real. De acuerdo con Maffey García (2006) “son base fundamental en estudios posteriores de matemática y en el aprendizaje de diversos contenidos en las materias de física y química” (p.13).

Sin embargo, debido a la amplitud del temario, es comprensible que los estudiantes puedan cometer errores al aprender ecuaciones de primer grado. Estos errores pueden manifestarse cuando, no realizan correctamente operaciones aritméticas, “olvidan” los procedimientos de resolución, entre otros. Además, la forma en que se enseña el tema contribuye a estos errores, ya que se centra en la repetición de algoritmos en lugar de promover una comprensión total del concepto, no obstante, dicho enfoque carece de utilidad plena, ya que no permite a los estudiantes apropiarse del significado detrás de las ecuaciones de primer grado, sino que simplemente aprenden a repetir un algoritmo. Según Sandoval (2018) “la manera tradicional de enseñar no favorece la comprensión del concepto en los estudiantes” (p.30).

Es por esto que, distintos autores han reportado dificultades en la comprensión de este y otros temas de la matemática y han realizado investigaciones en torno a esto, buscando mejorar las estrategias y promover un aprendizaje más significativo.

En otras palabras, Moreno y Cobo (1997) mencionan que:

> Esta forma de enseñanza no les permite a los alumnos partir de elementos concretos para su aprendizaje; esto hace que el tema sea para ellos ocasión de seguir un procedimiento mecánico más que el análisis y significación del concepto de ecuación (p. 251).

El rol de profesor y la manera en que enseña influye mucho en el aprendizaje del estudiante.

De acuerdo con Moreno (2013):

> El papel que el profesor juega en la adquisición de conocimiento de los estudiantes, particularmente, en la forma como se ha ido construyendo la noción y maneras de abordar las ecuaciones de primer grado en el colegio se vuelve un punto central para intentar aproximar posibles cuestiones frente a las dificultades y errores que manifiestan los estudiantes en sus estudios y tratamientos con este Objeto matemático (p. 1046).

A pesar de que ya se ha reconocido la importancia de la enseñanza del álgebra en la formación de los estudiantes, aún hay trabajo que realizar, pues no se han logrado los aprendizajes esperados, y un ejemplo de esto son los resultados de las pruebas PISA aplicadas a estudiantes mexicanos, las cuales indican que existe un atraso educativo significativo entre los estudiantes (Jaramillo, 2018).

Por lo tanto, la problemática que se quiere destacar es la necesidad de identificar y trabajar en los conceptos fundamentales que los estudiantes necesitan antes de abordar el tema de ecuaciones de primer grado. Este enfoque ayuda a reducir errores y mejora la experiencia de aprendizaje, lo que conduce a una comprensión más profunda del significado de las ecuaciones de primer grado y sus métodos de resolución. Es crucial destacar la importancia de la participación activa del docente, por lo que, si se realiza un trabajo más detallado de la ecuación de primer grado, podrá desglosar el tema en componentes más sencillos y enfocarse en cada parte para que el estudiante tenga un mejor desarrollo de su conocimiento.

Dentro de este contexto, en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado, este trabajo se propone contribuir a la investigación en este campo mediante la presentación de una DGP que permita describir las estructuras mentales requeridas para comprender la resolución de ecuaciones de primer grado en estudiantes de primer año de secundaria.

En general, la revisión de la literatura, la cual se abordará más a profundidad en el siguiente capítulo, brindó el material necesario para el desarrollo de este trabajo, más aún, se llegó a la conclusión de que es necesario investigar aún más en el aula, para poder seguir trabajando.

1.1 Preguntas de investigación

Dada la situación descrita previamente, surge la necesidad de identificar las estructuras mentales que los estudiantes desarrollan, o no, en relación con la comprensión del concepto en cuestión, con apoyo de las investigaciones acerca de los errores, la forma de enseñanza del tema ecuaciones de primer grado y la manera en que los estudiantes aprenden este concepto, por lo tanto, se ha tomado como marco teórico la teoría APOE.

En este sentido, resulta relevante formular la siguiente pregunta de investigación general, así como sus respectivas interrogantes específicas, el objetivo general y los objetivos específicos.

1.1.1 Pregunta general

¿Qué estructuras mentales se requieren para comprender el concepto solución de una ecuación lineal de manera algebraica y geométrica en la educación secundaria?

1.1.2 Preguntas específicas

- ¿Qué estructuras mentales sobre la solución de ecuaciones lineales se deben plantear en una descomposición genética preliminar?
- ¿Qué preguntas o actividades permiten evaluar la comprensión de la ecuación lineal y su solución?
- ¿Qué estructuras mentales han construido sobre la solución de ecuaciones lineales estudiantes de primer grado de secundaria?

- ¿Las estructuras mentales que muestran los estudiantes encuestados son las mismas que las planteadas en la descomposición genética preliminar?

1.2 Justificación

Esta idea es motivada por mi experiencia como asesora de estudiantes de nivel bachillerato/preparatoria y licenciatura (principalmente), donde he observado que los estudiantes presentan dificultades para aprender nuevos conceptos debido a una falta de comprensión de los fundamentos básicos, por ejemplo, comprender el concepto sistema de ecuaciones es muy difícil pues parte del concepto ecuación el cual solo aprendieron a resolver de manera mecánica. Así, surge la duda ¿cómo pueden los estudiantes avanzar en el contenido temático si no comprenden adecuadamente los conceptos previos?

Aunado a esto, según Wicaksono et al. (2024):

> La baja capacidad de los estudiantes en la materia de álgebra, especialmente ecuaciones lineales con una variable, también se puede ver en los resultados del Estudio de Tendencias en Matemáticas y Ciencias Internacionales (TIMSS) de 2011, que indicó que la capacidad matemática de los estudiantes de secundaria de Indonesia se ubicó en el puesto 38 entre 42 países (pp. 34-35).

Es por esto que surge la necesidad de generar otra herramienta que permita a los docentes crear material que facilite un mejor aprendizaje para los estudiantes con respecto al tema ecuaciones de primer grado, puesto que, actualmente, muchos docentes aún siguen enseñando el tema con el método que consiste en presentar la ecuación, explicar la transposición de términos y pasar a la resolución de ejercicios, método con el cual, el estudiante no le encuentra utilidad al concepto, lo que dificulta el aprendizaje para los estudiantes.

Aunado a esto, la enseñanza del tema suele enfocarse en lo algebraico, dejando como opción la interpretación geométrica y aplicando problemas que no están contextualizados, lo cual provoca que el estudiante no genere un interés propio por resolverlos (Maffey García, 2006). Además de que, cuando se enseña el tema, muchas veces no se enfatiza en la importancia que tiene comprenderlo para temas futuros.

Ante esta situación, se han realizado diversas propuestas, que promueven la enseñanza de las ecuaciones de primer grado, como la realización de juegos o por medio de la balanza, sin embargo, el trabajo aún no termina.

Es por esto que el presente trabajo, busca abordar el tema desde otro enfoque.

Después de analizar diversas teorías se escogió la teoría APOE. Esta elección se fundamenta en la ausencia de investigaciones previas en torno al tema de interés y en los sólidos resultados obtenidos en otros temas de álgebra, por ejemplo, los resultados de diversos proyectos donde trabajan con la modelación y la aplicación de actividades basadas en una descomposición genética han mostrado una mejora significativa en la comprensión del concepto por parte de los estudiantes. Dichas actividades no solo han motivado a los estudiantes a participar de manera activa, sino que, también los impulsa a reflexionar y formalizar los conceptos estudiados, así es como se ha logrado que los estudiantes construyan conceptos que son difíciles para la mayoría. De esta manera, los estudiantes asumen la responsabilidad de su propio aprendizaje, lo que les permite desarrollar de manera independiente herramientas de análisis (Trigueros, 2013, 2014).

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Proponer y validar una descomposición genética sobre el concepto solución de una ecuación de primer grado en el marco de la teoría APOE.

1.3.2 Objetivos particulares

- Diseñar una descomposición genética preliminar para la solución de una ecuación de primer grado.
- Diseñar un cuestionario para evaluar las estructuras mentales descritas en la descomposición genética en estudiantes de primero de secundaria.
- Analizar las respuestas de los estudiantes a un cuestionario basado en la DGP del concepto “solución de una ecuación de primer grado”.
- Revisar la descomposición genética preliminar con base en la respuesta de los estudiantes.

Capítulo 2

2 Revisión de literatura

Según Cabrera (2022), “en cualquier campo de investigación es útil “mirar atrás” de manera periódica, para considerar su estado de desarrollo y los resultados producidos” (p. 9). Es por esto que, en el presente capítulo, se muestran algunos trabajos de investigación que se han realizado anteriormente y que guardan relación con el trabajo a desarrollar.

2.1 Antecedentes históricos del concepto ecuación de primer grado

Explorar la historia de las matemáticas permite ver que para llegar a los conocimientos que se tienen ahora, se han superado diversos desafíos (Sánchez Moreno et al., 2024).

En el caso de las ecuaciones de primer grado, fueron trabajadas por:

Los Babilonios (2000 A.C-600 A.C.):

La información que proporcionaron a través de las tablillas de arcilla, son muestra de que los problemas que resolvían trataban de áreas de cuadrados, rectángulos, etc., y para solucionarlos, utilizan lo que ahora se conoce como ecuaciones de primer grado.

Los egipcios (2000 A.C-1800 A.C):

En el Papiro de Rhind fue donde se encontró la información sobre los problemas matemáticos que resolvían, los cuales se clasificaban en aritméticos y algebraicos, y para resolverlos utilizaban lo equivalente a lo que ahora son ecuaciones del tipo $ax = b, a + ax + bx = c$ (Dalcín y Olave , 2007).

2.2 Investigaciones previas en torno al concepto ecuación de primer grado

Debido a que las investigaciones referentes al concepto “solución de una ecuación de primer grado” han tenido bastante desarrollo, es importante organizar los resultados que han enriquecido el desarrollo de este trabajo.

En lo que sigue, se presentan los resultados del análisis, organizados de acuerdo a los subtemas planteadas al inicio de esta sección.

2.3 Conceptos previos a estudiar ecuaciones de primer grado

Según Moreno y Cobo (1997):

> Se requiere que cada alumno opere correctamente con números enteros (suma, resta, multiplicación y división); halle el valor numérico de expresiones algebraicas sencillas para un valor específico de la variable (e.g. $x + 4$ para $x = 2$; $2x$ para $x = -4$); identifique la jerarquía de las operaciones suma, resta y multiplicación en expresiones numéricas propuestas (e.g. $-4 \times 3 + (-8)$; $-4 + 3 \times 4$); interprete enunciados sencillos que le permitan seguir instrucciones en la guía de trabajo; e identifique la incógnita (elemento de valor desconocido) en una igualdad (p. 249).

Pero no solo eso, pues al momento de pasar a un problema de aplicación, una parte importante es saber plantear la ecuación que modela el problema, sin embargo, como es complejo para los estudiantes, muchas veces recurren al tanteo para evitar tener que plantear la ecuación. En otras palabras, según Tettay-Mejía et al. (2019):

> La mayor cantidad de errores en la resolución de problemas radica en la falta de uso y manejo del lenguaje algebraico, pero, además, las reglas de procedimiento son un factor importante en este, ya que los estudiantes confunden propiedades o no saben operar ecuaciones (p. 195).

2.4 Propuestas didácticas para la enseñanza del tema ecuación de primer grado

Como ya se ha evidenciado anteriormente, la forma tradicional no permite que el estudiante disfrute del proceso de aprendizaje ni mucho menos comprenda el tema y sus aplicaciones. Es por esto, que, se busca que los problemas planteados a los estudiantes tengan relación con el contexto en el que se encuentran.

Por esto, se han realizado investigaciones donde se presentan propuestas didácticas completamente diferentes a la tradicional con la finalidad de modificar estos resultados. Maffey García (2006) propuso una lista de características que deben cumplir las situaciones didácticas para desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes:

- Los alumnos se responsabilicen de la organización de su actividad para tratar de resolver el problema propuesto, es decir, que formulen sus propios proyectos personales.
- La actividad de los alumnos esté orientada hacia la obtención de un resultado preciso, previamente hecho explícito por el profesor y que pueda ser identificado por los propios alumnos. Estos deben anticipar y luego verificar los resultados de su actividad.
- La resolución del problema planteado implica la toma de múltiples decisiones por parte de los alumnos, y la posibilidad de conocer directamente las consecuencias de sus decisiones a fin de modificarlas para adecuarlas al logro del objetivo perseguido. Es decir, se permite que los alumnos intenten resolver el problema varias veces.
- Los alumnos pueden recurrir a diferentes estrategias para resolver el problema planteado, estrategias que corresponden a diversos puntos de vista sobre el problema. Es indispensable que, en el momento de plantear el problema, los alumnos dispongan al menos de una estrategia (estrategia base) para que puedan comprender la consigna y comenzar su actividad de búsqueda de la solución.

> Se trata de enfrentar a los alumnos a una situación que evolucione de tal manera que el conocimiento que se quiere que aprendan sea el único medio eficaz para controlar dicha situación (pp.27-28).

El trabajo de Moreno y Cobo (1997) "presenta el diseño de una secuencia de aprendizaje que parte del concepto de igualdad representado a través de balanzas en equilibrio y posteriormente incorporar la incógnita como elemento desconocido cuyo valor se desea descubrir" (pp. 251-252). Así, llega a que los estudiantes logran despejar la incógnita en las ecuaciones.

Por otro lado, el trabajo de Sánchez Moreno et al. (2024) consistió en desarrollar una propuesta didáctica aplicada a la enseñanza de las ecuaciones lineales algebraicas, donde comienza con el profesor platicando la historia de la ecuación, pero en forma de historia para atraer la atención del estudiante, de ahí, hacer un repaso de los conocimientos previos aprendidos durante la primaria, para irlos introduciendo poco a poco al álgebra mediante su guía. Así, ya podrán pasar al aprendizaje conceptual donde se nombrará todo lo que han aprendido, esto, lo proponen por medio de ejercicios prácticos con oraciones sencillas y el uso de la recta.

Por otra parte, Maffey García (2006) diseñó una serie de problemas para introducir al estudiante en el tema de ecuaciones de primer grado, partiendo de la modelación de situaciones, con lo que se pretende proveer al conocimiento de un contexto y con ello de un significado tangible; y los resultados de este trabajo muestran que "sí es factible el trabajo didáctico de las ecuaciones de primer grado partiendo de problemas concretos y no de definiciones" (p. 127). Con la aclaración de que no es recomendable trabajar todo en una misma sesión, pues resulta cansado para el estudiante.

Por último, Hernández et al. (s.f.) proponen dos juegos: el Memorama de ecuaciones equivalentes y el de la balanza como estrategias para ayudar a mejorar la motivación del alumno hacia la matemática. Ellos aplicaron un examen diagnóstico antes de aplicar los juegos, luego, se aplicó otro para comparar los resultados, los cuales fueron muy prometedores, pues favoreció el aprendizaje debido a la interacción entre compañeros.

Es así, como los resultados, permiten identificar los aspectos en los que se han centrado las investigaciones sobre las ecuaciones de primer grado, (errores, conocimientos previos e historia), además de la enseñanza y el aprendizaje de dicho concepto, los cuales tienen resultados prometedores, pero desgraciadamente aún no son populares en el aula.

2.5 Investigaciones relacionadas con el álgebra desde la teoría APOE

Según Jaramillo (2018) "diversas investigaciones en educación matemática señalan al álgebra como un elemento esencial en el desarrollo de estructuras de pensamiento lógico y racional que el estudiante necesitará fuera del contexto escolar" (p. 16).

Es por esto mismo, que es de vital importancia que los estudiantes tengan buen dominio de los conceptos, sin embargo, como ya se enunció anteriormente la realidad es completamente distinta, y es por esto que desde hace muchos años se ha trabajado en diversas investigaciones para que, mediante el aprendizaje del álgebra, le encuentren utilidad fuera del aula y tengan una mejor comprensión de los conceptos.

Dentro de las investigaciones en educación matemática, especialmente de álgebra con la teoría APOE, se pueden encontrar trabajos enfocados en diversos temas que, si bien no son explícitamente el tema "solución de ecuaciones de primer grado", han sido una guía para este trabajo de tesis.

A continuación, se enuncian algunos de ellos para proporcionar una visión general de las áreas de investigación que los abordan y su relación con el tema de interés.

El trabajo de Trigueros (2013) presentó los resultados de dos proyectos de investigación centrados en el aprendizaje de algunos conceptos del Álgebra Lineal como sistemas de ecuaciones lineales y espacio vectorial. En estos proyectos se utilizaron problemas abiertos junto con la teoría APOE para la enseñanza.

Los resultados resaltan la importancia de comprender la variable en el aprendizaje de todos los conceptos mencionados y mostraron que trabajar con modelos y actividades específicas que abordan las dificultades relacionadas con las variables puede reducir las dificultades de los estudiantes y mejorar su comprensión de los conceptos nuevos. En términos generales, el empleo de problemas abiertos durante la clase de álgebra lineal permite generar discusiones interesantes con el grupo sobre los conceptos clave del tema. Por ejemplo, comparar distintos sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución, así como introducir nuevas técnicas y conceptos para profundizar en la construcción de un modelo.

De manera similar, el trabajo de Trigueros (2014) destaca que la modelación tiene muchos beneficios para la enseñanza de conceptos del álgebra, y este trabajo continúa bajo la misma línea enfocándose en el concepto ecuación diferencial y su solución. Aquí se presenta la descomposición genética del proceso de modelación y la descomposición genética del concepto ecuación diferencial y su solución, de donde cabe resaltar que, entre los conceptos previos se encuentra la ecuación lineal y la variable.

Es por esto que, para el diseño de la descomposición genética se ha decidido partir de la modelación de un problema contextualizado.

Por otro lado, Tabares Cano (2021) diseñó una descomposición genética para el concepto "número entero" enfocándose en los métodos de enseñanza partiendo de la teoría APOE, presentando los obstáculos del aprendizaje. De este trabajo se obtuvo información importante respecto a una parte fundamental que los estudiantes deben saber antes de iniciar el tema de ecuación de primer grado, el manejo de los números enteros, justificando así, por qué los estudiantes presentan muchos errores al momento de operar números.

Por otra parte, Jaramillo (2018) presenta una descomposición genética para el método de reducción en bachillerato, de donde se destaca que es necesario que el estudiante sepa interpretar un problema planteado en forma de enunciado para luego proponer una ecuación que satisfaga la información dada y resolverla, además del concepto de igualdad de expresiones algebraicas como Proceso y simplificación de expresiones algebraicas, generando así, herramientas para los conceptos previos de la propia descomposición genética.

No obstante, Cabrera (2022), presenta descomposiciones genéticas para el concepto igualdad, conjunto y operación binaria, para entonces generar la descomposición genética del concepto espacio vectorial. Es importante destacar que la descomposición genética del concepto igualdad, fue especialmente útil para este trabajo, pues para la ecuación de primer grado una parte importante es el significado de igualdad como equivalencia el cual deben construir los estudiantes. Esta descomposición proporcionó tal información y se tomó en cuenta para el desarrollo de la DGP.

Por último, Sandoval (2018) presenta una DGP del concepto ecuación cuadrática diseñado para estudiantes de secundaria, y es por esto que su trabajo se acerca más a lo que se busca desarrollar, pues, como los anteriores son para nivel bachillerato-licenciatura, es importante aclarar que existe una diferencia importante en estos niveles, pues en secundaria los objetos son concretos, mientras que, en los niveles posteriores, los objetos son típicamente abstractos. Después, presenta la DGP, realizando antes un análisis y un cuestionario previo que le sirvió como guía. De esto, es importante notar que los estudiantes deben saber operar los números reales (Proceso), además de las operaciones inversas de las operaciones básicas de los números reales (Proceso), además del Proceso de igualdad.

2.6 Método de enseñanza actual

En particular, en el estudio del concepto de ecuación de primer grado, el estudiante puede llegar a encontrarse con muchos obstáculos debido a la forma en que se enseña el tema.

Una de ellas es, según Moreno y Cobo (1997):

> Al introducir el tema de ecuaciones de primer grado con una incógnita usualmente éstas se presentan como una igualdad de la forma $Ax + B = C$, con A, B, C constantes y x la incógnita. Utilizar en la enseñanza del tema -inicial y exclusivamente- la representación simbólica de la ecuación lineal impide al estudiante la interpretación y el análisis de otras representaciones más concretas en las cuales se evidencia el papel que desempeña cada uno de los elementos dentro de la igualdad (p. 251).

Otra de las maneras es, según Maffey García (2006):

> Se inicia en muchos libros de texto con una presentación de las igualdades, sus características y propiedades, para luego extenderlas al ámbito de las ecuaciones. Al tratar a éstas específicamente, por lo general se les maneja fuera de un contexto que les dé origen, estableciendo en varios casos una metodología para su resolución. No se aborda el manejo gráfico de ellas o se deja como un aspecto opcional. El tratamiento de las ecuaciones como "herramientas" para resolver problemas se maneja aparte y con poca relevancia, incluso manejando problemas de poco interés para los estudiantes y de escaso valor en la realidad (p. 15).

Por último, otra de las técnicas más comunes es cuando el maestro resuelve un problema frente al grupo explicando paso a paso cómo llegar al resultado, y después coloca otro análogo y espera que los estudiantes reconozcan esta situación y que con la explicación dada reproduzcan el mismo método de solución para afrontar con éxito la nueva situación. Con este método, la mayoría de los estudiantes obtienen resultados positivos, pero no es porque hayan comprendido el problema, simplemente establecieron la semejanza con el otro ejercicio y replicaron el procedimiento (D'Amore, 2008).

2.7 Errores más comunes al resolver ecuaciones de primer grado.

Según Tettay-Mejía et al. (2019):

> Los errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas y especialmente en el álgebra es un tema que genera interés y preocupación en la comunidad docente e investigadores en educación matemática. Estos errores se presentan de manera repetitiva en la construcción de los conocimientos (p. 194).

En cuanto al origen de los errores, Ruano et al. (2008) mencionan los siguientes:

- Obstáculo: Cuando un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos, no es efectivo en otros contextos.
- Ausencia de sentido: Se diferencian en 3 etapas:
    - Errores del álgebra que tienen su origen en la artimética
    - Errores de procedimiento en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento
- Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico

- Actitudes afectivas y emocionales: Falta de concentración, bloqueos, olvidos, etc. (pp.63-64).

En general, un mismo error puede deberse a más de una causa. Con base en los análisis, a continuación, se muestra la tabla 1 (tomada de Moreno y Cobo, 1997, pp.249-250) que enumera los tipos de errores en ecuaciones de primer grado:

Tabla 1

Errores comunes en ecuaciones de primer grado

i) Un número que multiplica a la incógnita en uno de los lados de la ecuación se pasa a restar al lado opuesto. $3x+1=0$ $x=-1-3$	ii) Cambian el signo en un miembro de la ecuación sin hacer la misma modificación en el otro. a) $-3x+4 = 2$ $3x = 2-4$ b) $-3y=-1$ $y = -\frac{1}{3}$	iii) No realizan la transposición de términos (sumando factores) en el orden correcto. a) $\frac{5x}{3}+2=3$ $5x+2=9$ b) $\frac{4m-3}{2}=6$ $\frac{4m}{2}=6+3$
iv) Al resolver una ecuación realizan sólo las operaciones en un miembro de la igualdad sin hacer las debidas modificaciones en el otro. a) $2x+3 = 5$ $2x+3-3=5$	v) Para resolver la ecuación comienzan por desarrollar la expresión, aplicando la propiedad distributiva, pero lo hacen deficientemente. a) $2(x+4) = 6$	vi) Al realizar las operaciones de suma o resta implicadas en alguno de los miembros de la ecuación, presentan deficiencias. a) $2(-3x+1) = 4$ $6x+2 = 4$

b) $4x = 7 - 3$ $\frac{4x}{4} = 7 - 3$	$x + 8 = 6$ b) $5(x + 2) = 15$ $5x + 2 = 15$	b) $5y = -2 + 3$ $5y = -5$ c) $x = \frac{5}{10}$ $x = 2$

Nota. Fuente: Adaptada de *Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita* por Moreno y Cobo, 1997, pp.249-250. Copyright 2024 por Yeimi Durán Vargas

Además "en el caso de la educación secundaria, podemos decir que el problema fundamental al que se enfrentan los estudiantes es el de superar la transición del pensamiento aritmético (adquirido en educación primaria) al pensamiento algebraico" (Sánchez Moreno et al., 2024, pp. 209-210).

Seguido de esto, se puede hablar acerca de los problemas al resolver ecuaciones de primer grado, y es que, según Maffey García (2006):

> El alumno promedio pocas veces logra dominar el empleo de las ecuaciones de primer grado para la resolución de problemas concretos y extender las técnicas de resolución a otros contextos, tales como el manejo de fórmulas en física o química, o bien, la resolución de ecuaciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales; mucho menos aún, visualizar la necesidad de emplear una ecuación para resolver un problema fuera de un contexto escolar, lo que es síntoma de que el trabajo realizado al respecto en los cursos de álgebra no ha sido suficiente para lograr un aprendizaje real del tema (p. 14).

2.8 Errores en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado

Azañero Távara (2013) evidencia las dificultades y errores que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones lineales, utilizando la teoría de registros de representación semiótica de Raymond Duval y llegando a la conclusión de que los problemas principales encontrados fueron:

1. Se hace uso inadecuado de la variable
2. No se logra usar el concepto de perímetro en términos de la variable x
3. No se pasa del cálculo aritmético al uso de una ecuación
4. La representación verbal no corresponde a la representación algebraica

5. La representación algebraica no corresponde a la representación verbal
6. La ecuación no se resuelve correctamente (p. 92).

2.9 Análisis del plan de estudios SEP (referente al concepto ecuación de primer grado)

Según Maffey García (2006):

> El plan de la SEP para secundaria en la materia de matemáticas y en particular para el tema de ecuaciones de primer grado, enfatiza la importancia de que los alumnos adquieran la habilidad de aplicar el conocimiento algebraico en la resolución de problemas (p. 36).

Es así como, antes de entrar al tema ecuaciones de primer grado, según el Programa sintético de la educación básica 2022, enuncia los siguientes contenidos de aprendizaje del campo formativo de la SEP:

Figura 1

Contenidos y Procesos de desarrollo de aprendizaje del Campo Formativo-Parte 1

Contenido	Procesos de desarrollo de aprendizaje		
	1er grado	2do grado	3er grado
Matemáticas			
Expresión de fracciones como decimales y de decimales como fracciones.	Usa diversas estrategias al convertir números fraccionarios a decimales y viceversa.		
Extensión de los números a positivos y negativos y su orden.	Reconoce la necesidad de los números negativos a partir de usar cantidades que tienen al cero como referencia. Compara y ordena números con signo (enteros, fracciones y decimales) en la recta numérica y analiza en qué casos se cumple la propiedad de densidad.		
Extensión del significado de las operaciones y sus relaciones inversas.	Reconoce el significado de las cuatro operaciones básicas y sus relaciones inversas al resolver problemas que impliquen el uso de números con signo. Comprueba y argumenta si cada una de estas operaciones cumple las propiedades: conmutativa, asociativa y distributiva.	Usa criterios de divisibilidad y números primos al resolver problemas que implican calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. Calcula potencias con exponente entero y la raíz cuadrada. Usa la notación científica.	

Nota: Imagen reproducida de Secretaría de Educación Pública. (2022). *Programa sintético de la educación básica 2022*. Informe Gubernamental.pdf - Google Drive

Figura 2

Contenidos y Procesos de desarrollo de aprendizaje del Campo Formativo-Parte 2

Contenido	Procesos de desarrollo de aprendizaje		
	1er grado	2do grado	3er grado
	Identifica y aplica la jerarquía de operaciones y símbolos de agrupación al realizar cálculos.	Usa la notación científica al realizar cálculos con cantidades muy grandes o muy pequeñas.	
Regularidades y Patrones.	Representa algebraicamente una sucesión con progresión aritmética de figuras y números.	Representa algebraicamente una sucesión con progresión cuadrática de figuras y números.	
Introducción al álgebra.	Interpreta y plantea diversas situaciones del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa. Representa algebraicamente perímetros de figuras.	Representa algebraicamente áreas que generan una expresión cuadrática. Identifica y usa las propiedades de los exponentes al resolver distintas operaciones algebraicas.	Representa algebraicamente áreas y volúmenes de cuerpos geométricos y calcula el valor de una variable en función de las otras.
Ecuaciones lineales y cuadráticas.	Resuelve ecuaciones de la forma $Ax=B$, $Ax+B=C$, $Ax+B=Cx+D$ con el uso de las propiedades de la igualdad. Modela y resuelve problemas cuyo planteamiento es una ecuación lineal. Resuelve problemas de porcentajes en diversas situaciones.	Resuelve desigualdades con expresiones algebraicas. Modela y soluciona sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por algún método para dar respuesta a un problema.	Resuelve ecuaciones de la forma $Ax^2+Bx+C=0$ por factorización y fórmula general. Resuelve problemas cuyo planteamiento es una ecuación cuadrática.
Funciones.	Relaciona e interpreta relaciones proporcional y no proporcional a partir de su	Relaciona e interpreta la proporcionalidad inversa de dos magnitudes o cantidades, además usa	Relaciona e interpreta la variación de dos cantidades a partir de su representación

Nota: Imagen reproducida de Secretaría de Educación Pública. (2022). *Programa sintético de la educación básica 2022*. Informe Gubernamental.pdf - Google Drive

De esto se puede observar que el temario de primero de secundaria, es extenso y completo, en el sentido de que los estudiantes adquieren los conocimientos previos necesarios para construir el Objeto solución de una ecuación de primer grado (algebraicamente), sin embargo, debido a la extensión podría suceder que los estudiantes estudien los temas superficialmente.

2.10 Análisis del libro de secundaria

El libro con el que trabajan los estudiantes de primer grado es el de Saberes y pensamiento científico de la colección Ximhai, y se considera importante realizar el análisis, pues es el material de apoyo que utilizan los docentes para dejar tareas y guiar sus clases.

De manera general, se observó que el libro es solamente un material de apoyo pues no incluye ejercicios para el lector, sino que presenta una explicación breve de cada uno de los temas.

Figura 3

Índice

Nota: Imagen reproducida de Secretaría de Educación Pública. (2023). Colección Ximhai. Saberes y Pensamiento Científico. Primer Grado (s.p.). Secretaría de Educación Pública.

En un principio, en el índice, se puede notar que los temas del libro no siguen la misma secuencia que el plan de estudios, pues en este, el tema de ángulos está después del tema de ecuaciones de primer grado. Sin embargo, el principal problema que se observa, es que el tema de “extensión del significado de la suma y la multiplicación” se encuentra después del tema de ecuación lineal.

Es importante aclarar que se dará especial énfasis en el capítulo de ecuación lineal, el cual comienza con la definición de ecuación de primer grado, sus características y su utilidad.

Figura 4

Definición de ecuación lineal

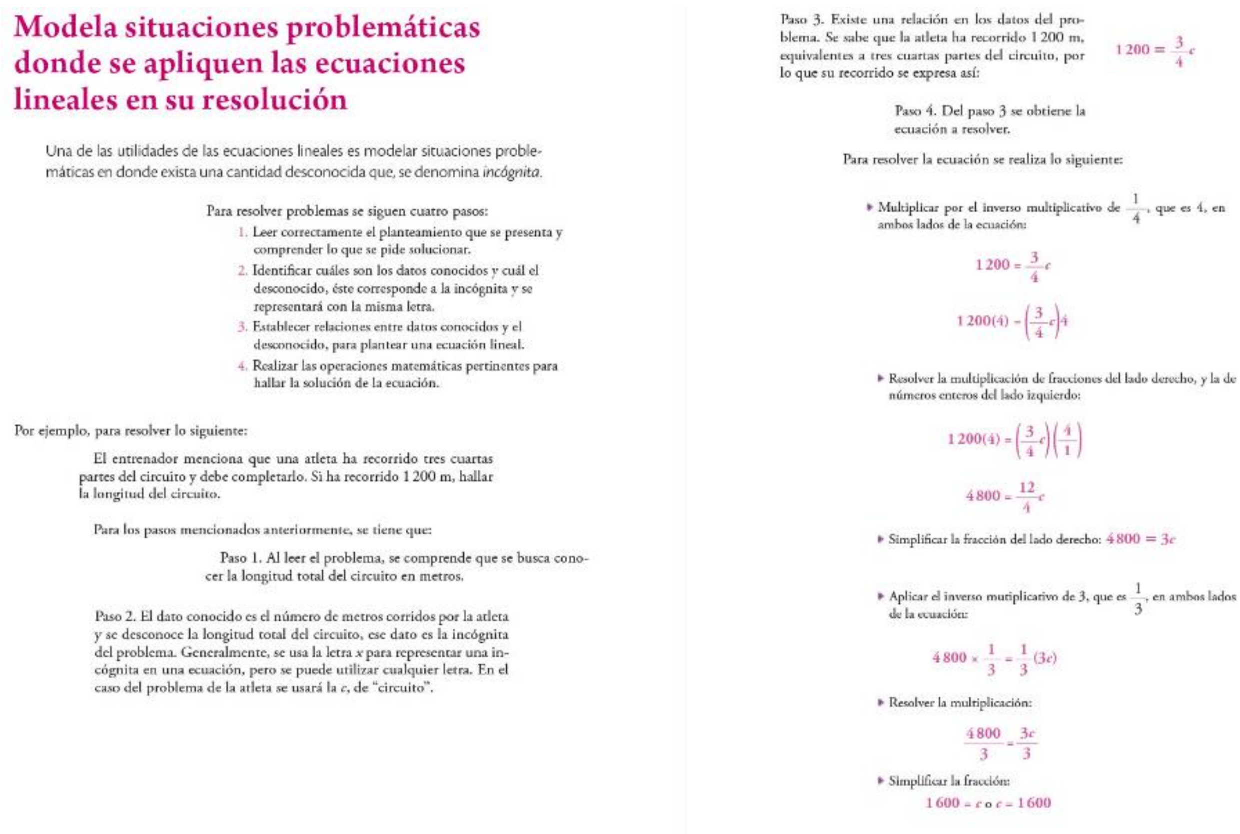
Ecuación lineal

Una ecuación lineal o de primer grado, es una igualdad algebraica en la que los términos involucrados tienen un exponente máximo de uno. Es de gran importancia ejemplificar y resolver situaciones con ecuaciones lineales, ya que ayudan a modelar y resolver problemas de manera efectiva.

Nota: Imagen reproducida de Secretaría de Educación Pública. (2023). Colección Ximhai. Saberes y Pensamiento Científico. Primer Grado (p.33). Secretaría de Educación Pública.

Figura 5

Página del libro



Modela situaciones problemáticas donde se apliquen las ecuaciones lineales en su resolución

Una de las utilidades de las ecuaciones lineales es modelar situaciones problemáticas en donde exista una cantidad desconocida que, se denomina *incógnita*.

Para resolver problemas se siguen cuatro pasos:

1. Leer correctamente el planteamiento que se presenta y comprender lo que se pide solucionar.
2. Identificar cuáles son los datos conocidos y cuál el desconocido, éste corresponde a la incógnita y se representará con la misma letra.
3. Establecer relaciones entre datos conocidos y el desconocido, para plantear una ecuación lineal.
4. Realizar las operaciones matemáticas pertinentes para hallar la solución de la ecuación.

Por ejemplo, para resolver lo siguiente:

El entrenador menciona que una atleta ha recorrido tres cuartas partes del circuito y debe completarlo. Si ha recorrido 1 200 m, hallar la longitud del circuito.

Para los pasos mencionados anteriormente, se tiene que:

Paso 1. Al leer el problema, se comprende que se busca conocer la longitud total del circuito en metros.

Paso 2. El dato conocido es el número de metros corridos por la atleta y se desconoce la longitud total del circuito, ese dato es la incógnita del problema. Generalmente, se usa la letra *x* para representar una incógnita en una ecuación, pero se puede utilizar cualquier letra. En el caso del problema de la atleta se usará la *c*, de "circuito".

Paso 3. Existe una relación en los datos del problema. Se sabe que la atleta ha recorrido 1 200 m, equivalentes a tres cuartas partes del circuito, por lo que su recorrido se expresa así:

$$1\,200 = \frac{3}{4}c$$

Paso 4. Del paso 3 se obtiene la ecuación a resolver.

Para resolver la ecuación se realiza lo siguiente:

- Multiplicar por el inverso multiplicativo de $\frac{1}{4}$, que es 4, en ambos lados de la ecuación:

$$1\,200 = \frac{3}{4}c$$

$$1\,200(4) = \left(\frac{3}{4}c\right)4$$

- Resolver la multiplicación de fracciones del lado derecho, y la de números enteros del lado izquierdo:

$$1\,200(4) = \left(\frac{3}{4}c\right)\left(\frac{4}{1}\right)$$

$$4\,800 = \frac{12}{4}c$$

- Simplificar la fracción del lado derecho: $4\,800 = 3c$

- Aplicar el inverso mutiplicativo de 3, que es $\frac{1}{3}$, en ambos lados de la ecuación:

$$4\,800 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(3c)$$

- Resolver la multiplicación:

$$\frac{4\,800}{3} = \frac{3c}{3}$$

- Simplificar la fracción:

$$1\,600 = c \text{ o } c = 1\,600$$

Nota: Imagen reproducida de Secretaría de Educación Pública. (2023). Colección Ximhai. Saberes y Pensamiento Científico. Primer Grado (p.p.34-35). Secretaría de Educación Pública.

El capítulo de ecuación lineal comienza mostrando un listado de Acciones que los estudiantes deben llevar a cabo para resolver los problemas de ecuaciones de primer grado.

Seguido de eso, muestra una serie de ejemplos y los resuelve utilizando la lista que proporcionaron al principio, describiendo el paso y el desarrollo del mismo.

2.11 Importancia de la resolución de problemas

Según Azañero Távara (2013), "un problema matemático es una situación en la cual se debe superar una dificultad estableciendo relaciones a partir de la información dada y no se conoce el camino a seguir" (p. 23).

Luego, como ya se ha mencionado anteriormente, los estudiantes obtienen mejores resultados cuando se les presentan problemas contextualizados del tema que estén trabajando, es por ello que, Azañero Távara (2013) menciona que “es necesario considerar la importancia de no solo resolver problemas rutinarios sino aplicar conceptos para la resolución de problemas en diferentes contextos (extra matemáticos)” (p. 9).

Además, es importante reconocer las ventajas que existen de que los estudiantes elaboren problemas propios en torno al concepto que han aprendido, pues se estimula la creatividad.

Capítulo 3

3 Marco teórico

Comenzamos por dar la definición de ecuación de primer grado con una incógnita:
"Es una igualdad de la forma $ax + b = c$ donde (a, b, c son números conocidos) compuesto por dos miembros separados por el signo igual, $ax + b =$ primer miembro y $c =$ segundo miembro" (Lazaro, 2004, como se citó en Molina, 2014, pág. 36).
Como se ha mencionado antes, desgraciadamente los estudiantes no se están apropiando del concepto ecuación de primer grado, lo cual es un hecho preocupante ya que es la base para conceptos más complejos.

Según Tabares Cano (2021), la teoría APOE "nace del trabajo de Dubinsky y su preocupación por los procesos de aprendizaje en matemáticas" (p. 21).

3.1 De la teoría de Piaget a la teoría APOE

Una de las principales ideas de Piaget es lo que se conoce como "abstracción reflexiva", y su definición varía dependiendo el área de la que estemos hablando, en particular, hablando de las matemáticas, la abstracción reflexiva es el mecanismo mental por el cual se derivan todas las estructuras lógico-matemáticas (Arnon et al., 2014).
(Piaget 1973, citado en Arnon et al., 2014), responde a la pregunta ¿qué es la abstracción reflexiva? de la siguiente manera:

> La respuesta de Piaget, repetida en muchas publicaciones diferentes, consta de dos partes, la primera parte implica la reflexión, en el sentido de conciencia y pensamiento contemplativo, sobre lo que Piaget llamó contenido y operaciones sobre ese contenido, y en el sentido de reflejar el contenido y las operaciones desde un nivel o etapa cognitivo inferior a una superior (es decir, de Procesos a Objetos). La segunda parte consiste en la reconstrucción y reorganización del contenido y las operaciones en esta etapa superior que da como resultado que las operaciones mismas se conviertan en contenido al que se pueden aplicar nuevas operaciones (p. 6).

Tiempo después, Dubinsky, un investigador matemático, pasó de la investigación en matemáticas a la investigación de las actividades mentales involucradas en el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes (Arnon et al., 2014).

Junto con sus colaboradores, creó RUMEC: Comunidad de Investigación en Educación Matemática Universitaria, con el propósito de elaborar un marco de referencia (teoría APOE) que permitiera comprender mejor el proceso de aprendizaje de las matemáticas y, en consecuencia, desarrollar una pedagogía para enseñarlas a nivel universitario (Jaramillo, 2018).

Es así que, "la teoría APOE, trata de la construcción del conocimiento matemático mediante el uso del mecanismo de abstracción reflexiva" (Arnon et al., 2014, como se citó en Trigueros, 2014, p.209).

3.2 Teoría APOE

"La teoría APOE es principalmente un modelo para describir cómo se pueden aprender los conceptos matemáticos; es un marco utilizado para explicar cómo los individuos construyen mentalmente su comprensión de los conceptos matemáticos" (Arnon et al., 2014, p.17).

3.3 Estructuras y mecanismos mentales

Acciones

"Una Acción es externa en el sentido de que cada paso de la transformación debe realizarse explícitamente y guiarse por instrucciones externas; además, cada paso impulsa al siguiente" (Arnon et al., 2014, p.19).

Interiorización, coordinación y Procesos

Según Tabares Cano (2021) "un Proceso se da cuando el estudiante es capaz de reflexionar sobre el concepto matemático, quiere decir que es consciente de él y puede realizar Acciones internas" (p. 22).

Ahora, para llegar al Proceso, según Gil et al. (2021):

> Proceso, es el resultado de la interiorización de las Acciones que se realizan repetidamente y se reflexiona sobre estas. Esta estructura es dinámica y se evidencia cuando el sujeto es capaz de realizar las mismas Acciones, pero ahora en forma autónoma y dirigida por una

> estructura mental interna. Otra manera de generar Procesos es por mecanismos de coordinación o inversión de uno o más Procesos en la mente (p. 3).

Encapsulación y Objetos

Según Arnon et al. (2014) "la encapsulación ocurre cuando un individuo aplica una Acción a un Proceso, es decir, ve una estructura dinámica (Proceso) como una estructura estática a la que se pueden aplicar Acciones" (p. 21).

Desencapsulación, coordinación y reversión

Cuando un estudiante aplica el mecanismo de desencapsulación, regresa al proceso de donde viene el Objeto. Por otra parte, cuando se desencapsulan Objetos, sus Procesos pueden ser coordinados, lo cual nos dará un nuevo Proceso que se puede encapsular en un nuevo Objeto (Arnon et al., 2014). (Dubinsky 1997, citado en Sandoval, 2018) establece que: "reversión: cuando un Proceso existe interiormente es posible pensar en la reversión, como un medio de construir un nuevo Proceso que consiste en revertir el Proceso que le dio origen" (p. 37).

Esquemas

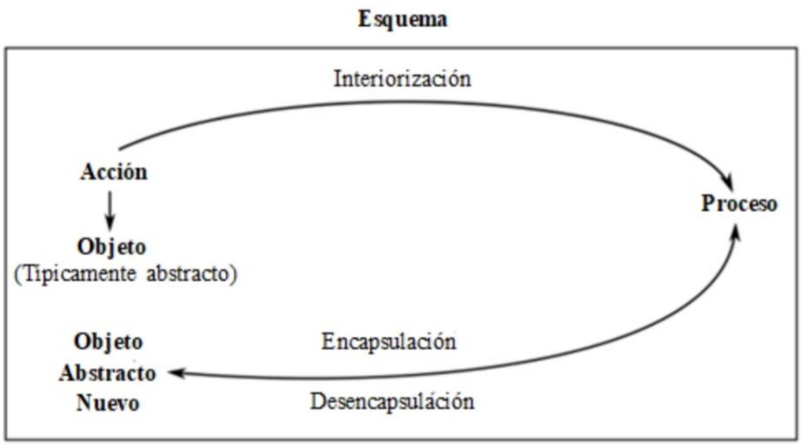
Según Trigueros (2014):

> Un Esquema se considera como una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que se sintetizan para formar estructuras matemáticas útiles en la solución de problemas. Estos Esquemas pueden evolucionar conforme se construyen relaciones entre sus componentes, de manera que los Esquemas cambian dinámicamente construyéndose y reconstruyéndose. La evolución de los Esquemas se describe mediante los niveles de la triada: el nivel Intra- se caracteriza por el enfoque en estructuras de otras estructuras de naturaleza similar. En el nivel Inter- se construyen relaciones entre los componentes del Esquema, se agrupan y se pueden identificar con el mismo nombre. En el nivel Trans- se construyen síntesis entre los componentes del Esquema que permiten entender las relaciones construidas con anterioridad y decidir cuándo el Esquema es aplicable a una situación particular (pp. 209-210).

La Figura 6, muestra el diagrama de lo dicho anteriormente.

Figura 6

Teoría APOE para estudiantes postsecundaria



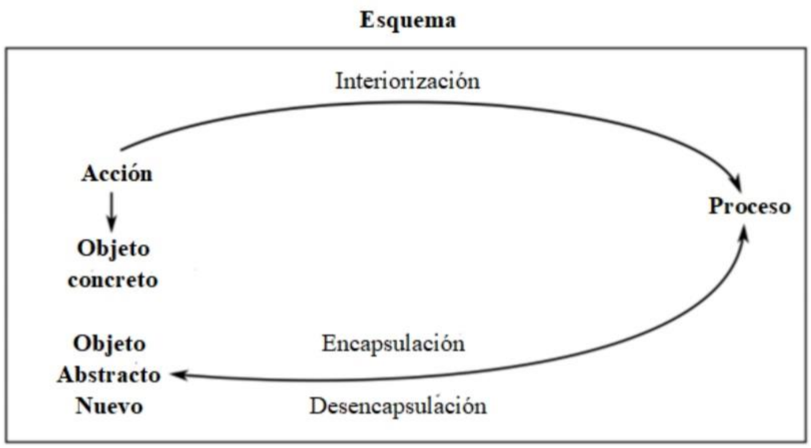
Nota: Imagen reproducida de Sandoval. (2018). *Análisis cognitivo del concepto ecuación cuadrática y su solución en el nivel secundaria*. Universidad Autónoma de Zacatecas. http://ricaxcan.uaz.edu.mx/jspui/bitstream/20.500.11845/1181/1/2018%20Rosales%2c%20S.G.pdf

Sin embargo, se debe hacer la siguiente observación.

Como el trabajo es enfocado en estudiantes de nivel básico, donde se trabaja en un contexto concreto, a diferencia de la post secundaria donde el contexto es abstracto, se debe hacer la siguiente especificación en el diagrama:

Figura 7

Teoría APOE para estudiantes de nivel básico



Nota: Imagen reproducida de Sandoval (2018). Teoría APOE para estudiantes postsecundaria. En Análisis cognitivo del concepto ecuación cuadrática y su solución en el nivel secundaria. Universidad Autónoma de Zacatecas.

http://ricaxcan.uaz.edu.mx/jspui/bitstream/20.500.11845/1181/1/2018%20Rosales%2c%20S.G.pdf

Sandoval (2018) explicó:

> El diagrama es una adaptación que se realizó para representar la implementación de la teoría APOE, para estudiantes en etapa de operaciones concretas, se puede observar cómo las Acciones aplicadas a Objetos físicos genera Objetos matemáticos abstractos en la mente de un estudiante de este nivel. En la etapa de las operaciones concretas, los objetos sobre los que actúa el estudiante deben ser concretos. Los Objetos que surgen de la encapsulación de las Acciones interiorizadas son abstractos, al igual que para los estudiantes de nivel postsecundario (p. 39).

3.4 Descomposición genética y Ciclo de enseñanza ACE

Para aplicar la teoría APOE se requiere del diseño de un modelo teórico de análisis, que en este caso es la descomposición genética, la cual no necesariamente es única, y consiste en una descripción de estructuras y mecanismos necesarios para la construcción del concepto matemático de interés. Para después, validarla o refinarla por medio de investigación empírica (Trigueros, 2013).

Es importante notar que hasta que se ponga a prueba la descomposición genética, se le llamará descomposición genética preliminar (Arnon et al., 2014).

El ciclo de enseñanza ACE (Actividades, discusión en clase y ejercicios) es una estrategia pedagógica que consta de tres componentes:

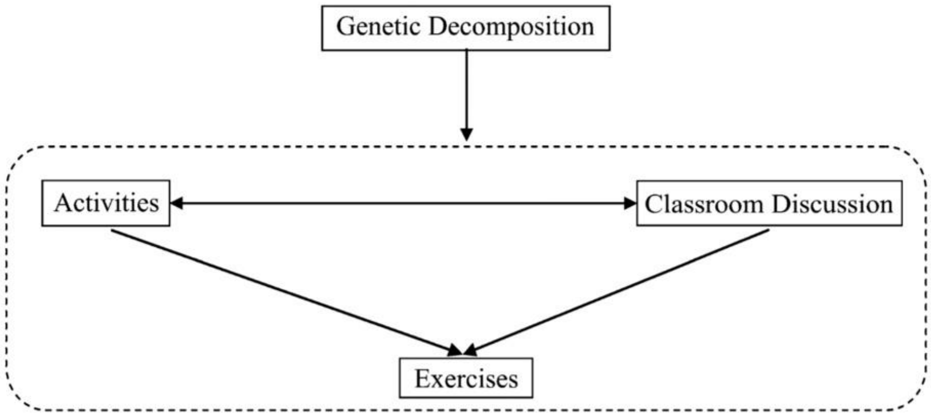
Según Cabrera (2022):

> En las actividades, que constituyen el primer paso del ciclo, los estudiantes trabajan cooperativamente en equipos con las tareas diseñadas para ayudarles a hacer las construcciones mentales sugeridas en la descomposición genética. El foco de esas tareas es promover la abstracción reflexiva más que solo obtener respuestas correctas, con el fin de ayudar a los alumnos a realizar las construcciones mentales propuestas como requeridas para el aprendizaje del concepto.
>
> Las discusiones en clases, la segunda parte del ciclo involucra discusiones en pequeños grupos guiadas por el profesor, así como tareas para el estudiante con papel y lápiz que construye sobre las actividades de la fase anterior. Las discusiones con sus compañeros y el trabajo realizado en clases, sobre la resolución de las actividades marcadas, son fundamentales, ya que le dan al estudiante la oportunidad de reflexionar en su trabajo. En este punto, el profesor puede proporcionar definiciones, explicaciones y/o presentar un resumen que concrete los conceptos matemáticos sobre los cuales los alumnos han trabajado.
>
> Por último, los ejercicios consisten de problemas estándar diseñados para reforzar las actividades computacionales y la discusión de clases. Los ejercicios ayudan a promover la continuidad del desarrollo de las construcciones mentales (p. 39-40).

En la figura 8, se muestra el esquema del ciclo de investigación de la teoría APOE.

Figura 8

Esquema del ciclo de investigación ACE



Nota: Imagen reproducida de: Arnon et al. (2014). APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. (p. 58). Editorial Springer.

3.5 Forma de analizar los datos

(Arnon et al., 2014, citado en Sandoval, 2018):

> El análisis y la verificación de datos es la tercera componente del ciclo de investigación de la teoría APOE. Esta es importante para la investigación, pues en ella se valida la DGP, y se intenta responder las siguientes preguntas, a través de la evidencia empírica:
>
> 1. ¿Los estudiantes describen las construcciones mentales descritas en la DGP?
> 2. ¿Los estudiantes construyeron el concepto matemático en estudio? (p. 40).

Según Cabrera (2022):

> Cabe señalar que el análisis de los datos se lleva a cabo de forma triangulada, a través de la investigación colaborativa que resulta de la negociación de los investigadores, en la búsqueda de un consenso sobre la interpretación de los datos. Esta interpretación se realiza a la luz de la descomposición genética propuesta para la investigación, con el fin de darle un sentido objetivo (p. 43).

Para responder a estas dos preguntas, la teoría APOE contempla diferentes instrumentos. Para el desarrollo de este trabajo, se consideraron las siguientes dos herramientas (Arnon et al., 2014):

- Entrevistas: las entrevistas son el medio más importante mediante el cual se recopilan datos en la investigación basada en APOE. Aunque se puede utilizar una entrevista para evaluar las actitudes de los estudiantes y comparar el desempeño matemático entre diferentes enfoques de enseñanza, el objetivo principal es determinar si los estudiantes han hecho las construcciones mentales establecidas por la descomposición genética utilizada en el estudio particular. Los sujetos de la entrevista pueden seleccionarse en función de sus respuestas a un cuestionario escrito o un examen administrado previamente, la retroalimentación del instructor o una combinación de estos criterios. La idea es acceder a datos que muestren una variedad de desempeño matemático en diferentes tareas matemáticas para comparar el pensamiento de los estudiantes que tuvieron dificultades con el pensamiento de los estudiantes que tuvieron éxito. Estas diferencias permiten a los investigadores determinar si las construcciones mentales requeridas por el análisis teórico explican las diferencias en el desempeño o si se requieren otras construcciones mentales no consideradas por el análisis teórico. Al diseñar las preguntas de la entrevista, se pueden utilizar diferentes fuentes. Las respuestas a un examen escrito o cuestionario administrado previamente pueden formar la base de dichas preguntas. En este caso, se pide a los estudiantes que aclaren sus respuestas y/o las amplíen. Otra posibilidad podrían ser entrevistas piloto cuyos resultados podrían revelar ciertas cuestiones que pueden investigarse más profundamente mediante un protocolo de entrevista que se administra a un grupo más grande de estudiantes. Las observaciones también pueden desempeñar un papel. En este caso, las dificultades que surjan en las sesiones de laboratorio, en las discusiones en el aula o en los ejercicios para casa podrán utilizarse como base para la construcción de las preguntas de entrevista. En todos estos casos, la descomposición genética informa el diseño; el objetivo de análisis es determinar si los estudiantes realizaron las construcciones mentales propuestas y encontrar evidencia que las respalde (p. 95-96).

- Preguntas escritas: las preguntas escritas se pueden administrar a grandes grupos de estudiantes durante un examen o en forma de cuestionario. Proporcionan información básica sobre el rendimiento matemático de los estudiantes. También se pueden utilizar en el diseño de preguntas de entrevista debido a su capacidad para revelar dificultades de los estudiantes que requieren más análisis (p. 101).

A continuación, se presentan las descomposiciones genéticas que fueron tomadas como referencia para realizar la DGP del concepto solución de una ecuación de primer grado.

3.6 Descomposición genética del concepto igualdad

Según Cabrera (2022):

> Entre los elementos previos que necesita un estudiante para construir el concepto de igualdad está la noción de qué es una definición matemática y el concepto de proposición lógica. Por un lado, el primero permite al estudiante reconocer sentencias en las que se asignan valores y símbolos en contextos matemáticos específicos, por ejemplo, en la definición de una operación u operador, la definición de una función o de una variable, entre muchos otros. Por otro lado, el concepto de proposición matemática permite al estudiante trabajar con proposiciones que requieren de un Proceso de verificación para determinar su valor de verdad. La construcción del concepto de igualdad inicia con la Acción de comparar distintas expresiones matemáticas para identificar objetos que son iguales con base en una definición dada, así el individuo que construye el concepto debe determinar el valor de verdad de una proposición en la que interviene el signo de igualdad, tomando como estímulo externo una definición que establece la validez de la igualdad plasmada en dicha proposición.
>
> Cuando el individuo reflexiona sobre diferentes proposiciones, sus valores de verdad y la aplicación de las definiciones para establecer estos valores de verdad, entonces interioriza las Acciones en un Proceso de verificación de igualdades sin necesidad de contar con la definición en forma explícita, además el individuo puede, dada una expresión matemática, establecer otra expresión que sea igual a la dada.
>
> El Proceso de generar expresiones que sean iguales a una expresión matemática dada, es una estructura dinámica que depende del contexto particular en que se generan y las definiciones que se manejan en dichas igualdades; cuando el individuo reconoce el Proceso como una estructura estática a la cual le puede aplicar la operación de encadenar diferentes expresiones por medio de una sucesión de dos o más relaciones de igualdad que sean válidas, entonces se puede decir que el concepto de igualdad se ha encapsulado en un Objeto. Un individuo que ha construido una concepción Objeto del concepto de igualdad puede, por ejemplo, realizar un proceso de "despeje" de una variable, encadenando

> diferentes relaciones que involucran las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva del signo de igualdad (pp. 46-47).

3.7 Descomposición genética del Proceso de modelación

De acuerdo con Trigueros (2014):

> Cuando los estudiantes se enfrentan a una situación de modelación, utilizan sus Esquemas matemáticos conjuntamente con los Esquemas que han construido en otros dominios del conocimiento y que pueden ser útiles en la solución de los problemas que afrontan.
>
> Los estudiantes toman de estos Esquemas las construcciones necesarias para abordar el problema, seleccionar las variables y formular implícita o explícitamente las primeras hipótesis acerca del comportamiento de la solución al problema y su posible simplificación en términos matemáticos. Aprovechando las hipótesis, es posible hacer Acciones sobre las variables y establecer relaciones entre ellas. Estas Acciones se interiorizan en Procesos mediante los cuales las relaciones se manipulan y se transforman. Los Procesos se coordinan con Procesos contenidos en los Esquemas matemáticos. El resultado de estas coordinaciones es un modelo emergente que puede ser encapsulado como un Objeto sobre el cual es posible hacer nuevas Acciones que permiten, cuando se interiorizan o encapsulan, analizarlo, determinar sus propiedades y plantear nuevas preguntas que podrían modificar el modelo. Durante el trabajo con el modelo, puede ser necesario construir nuevos Procesos, Objetos o Esquemas para responder las preguntas que se han planteado. Este ciclo puede repetirse hasta que se encuentra un modelo que se considera apropiado en términos de la descripción de la situación original. El trabajo en el modelo permite, además, plantear otras preguntas que posibilitarían ampliar el dominio de aplicación del modelo y los esquemas construidos (p. 211).

Es así, que se han tomado como guía las DG anteriores para la DGP que se presenta en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

4 Metodología

En este capítulo se presenta, en primer lugar, el tipo de estudio y la población, seguido de la descomposición genética preliminar para la solución de una ecuación de primer grado con la cual se diseñó y analizó un cuestionario.

4.1 Tipo de estudio

> Esta es una investigación cualitativa, ya que este tipo de investigación estudia la realidad en su contexto natural y cómo sucede, sacando e interpretando fenómenos de acuerdo con las personas implicadas. (Blasco, 2007, p. 25 como se citó en Londoño Mosquera, 2019, p.45)
>
> Dicha investigación se basa en el método de investigación de la teoría APOE, el cual se ajusta al ciclo de investigación de APOE, pues se realizó un análisis de datos, que se presentó en los capítulos anteriores. También se diseñó un cuestionario fundamentado en la DGP para la solución de una ecuación de primer grado, el cual se detalla en este capítulo. Finalmente, el cuestionario fue aplicado y los datos se analizaron, los resultados de estos se presentan en el capítulo 5.

4.2 Población

- Se aplicó una primera prueba a una estudiante de trece años que cursaba el segundo grado de secundaria. Dicha prueba empezó como una entrevista clínica, pero durante la aplicación del cuestionario, la estudiante enfrentó dificultades para resolver los ejercicios. Ante esto, se le proporcionó apoyo, lo cual llevó a implementar una intervención didáctica.
- Se aplicó una segunda prueba a un grupo de 47 estudiantes de primer grado de secundaria de una escuela pública (entre 12 y 13 años), posteriormente, se hicieron entrevistas individuales a cuatro de ellos para indagar más sobre sus respuestas. Dichos estudiantes fueron seleccionados con el apoyo del docente a cargo de la asignatura de matemáticas, bajo el criterio de “los estudiantes con mejor desempeño en el aula”.

4.3 Construcciones previas necesarias para la construcción del concepto solución de ecuación de primer grado

Para poder construir el concepto de solución de ecuación de primer grado, se considera que los estudiantes deben tener algunos conocimientos previos que se requieren para el aprendizaje del concepto de estudio, ya que, sin ellos, se considera que no se podrá construir.

Para empezar, los estudiantes deben manejar las operaciones básicas con números enteros y racionales en una estructura Esquema, por ejemplo, las operaciones que con frecuencia son utilizadas al abordar una ecuación de primer grado son: Suma, resta, multiplicación y división. Además de utilizar las propiedades asociativas y distributivas principalmente (Jaramillo, 2018).

Para empezar, es importante que los estudiantes construyan el Proceso de representar puntos en el plano cartesiano, para que puedan observar cómo se comporta la solución en el plano cartesiano, ya que, si se encuentran en la estructura Acción, no podrán notar esta relación, puesto que en esta estructura solamente ubican puntos en el plano cartesiano sin tomar en cuenta que dicho punto se define mediante coordenadas (x, y) y que para ubicarlo debe moverse x unidades en el eje X, luego moverse y unidades sobre el eje Y y que el punto en la intersección de estas dos posiciones es (x, y).

Por otro lado, se considera necesario que los estudiantes hayan construido la Acción de incógnita, para que puedan identificarla en el contexto de cualquiera de los problemas y así, planteen el modelo de solución correcto.

Otro Esquema que se considera indispensable que se haya construido previamente es el Esquema de expresiones algebraicas, donde los estudiantes realicen operaciones básicas y puedan simplificar una expresión hasta dejarla en su forma irreducible (Jaramillo, 2018).

También se considera que el estudiante haya construido la Acción de igualdad, en donde la interpretación del signo $(=)$ es el resultado de operar lo que está en un lado de la igualdad.

Por último, se considera necesario que los estudiantes hayan construido el Proceso de plantear situaciones del lenguaje común a lenguaje algebraico y viceversa, lo cual les permitirá traducir los problemas al lenguaje algebraico e interpretar su solución en el contexto de problema.

4.4 Descomposición genética preliminar para la solución de una ecuación de primer grado

Para iniciar la construcción de la solución de una ecuación de primer grado, se supone que los estudiantes ya han construido las concepciones siguientes:

Proceso de representar puntos en el plano cartesiano.
Acción de incógnita.
Esquema de expresiones algebraicas.
Proceso de plantear situaciones del lenguaje común a lenguaje algebraico y viceversa.
Acción de igualdad

La construcción de este concepto comienza cuando se le presenta al estudiante un problema de la vida cotidiana donde debe realizar las Acciones de identificar los datos y a la incógnita.

El estudiante hace la Acción de relacionar las condiciones dadas por los datos y la incógnita del problema para transcribirlo a lenguaje algebraico, y establecer una relación de igualdad entre ellas, y así, plantear el modelo de solución que tendrá alguna de las siguientes formas: $ax + b = c,\ ax = b$; $(a \neq 0, a, b, c$ fijos) luego, esta Acción es interiorizada en el Proceso "modelar un problema con una ecuación lineal" en el que es posible considerar una ecuación de primer grado como una expresión que relaciona un valor desconocido con otro conocido. Este Proceso se encapsula en el Objeto "ecuación de primer grado" cuando se realizan Acciones como identificar si una ecuación es de primer grado o no, por medio de verificar que el exponente de la variable es uno y la forma de la ecuación, donde $a \neq 0$. Además de identificar cuál es la incógnita y los términos independientes. Así, es posible considerar una ecuación como una igualdad algebraica que contiene una incógnita.

Para hallar la solución de la ecuación de primer grado, es necesario hacer Acciones sobre este Objeto.

Construcción del Proceso solución de la ecuación lineal en el registro algebraico.

El estudiante hace la Acción de sumar o multiplicar por inversos aditivos o multiplicativos, según corresponda, hasta obtener un valor para la incógnita.

Cuando los estudiantes repiten y reflexionan sobre estas Acciones, estas se interiorizan en el Proceso “Solución en el registro algebraico", donde interpretará el signo $(=)$ como una equivalencia y entenderá que, al sumar o multiplicar en ambos lados de la igualdad, esta se mantiene y obtendrá la solución a la ecuación.

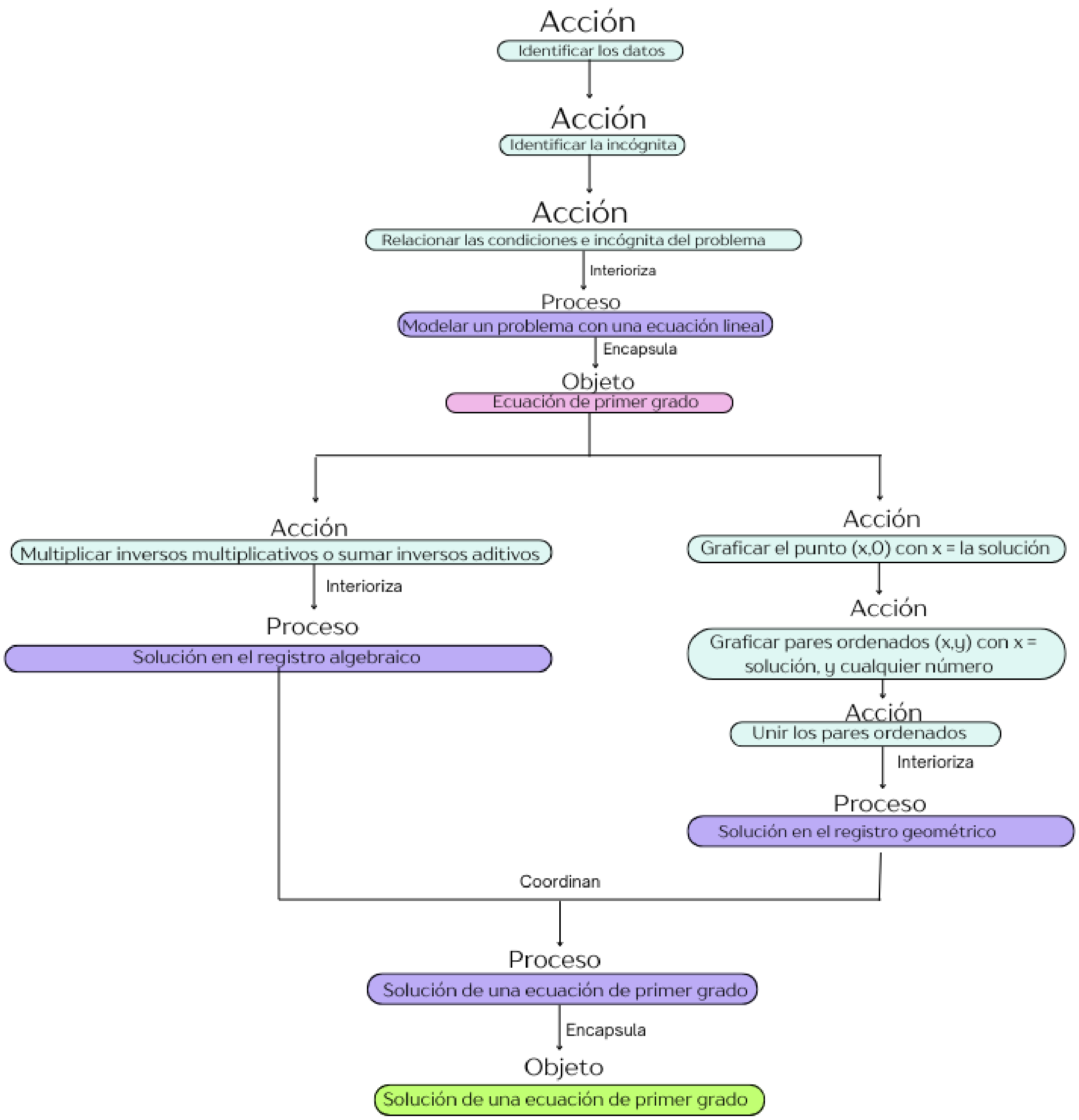
Construcción del Proceso solución de la ecuación lineal en el registro gráfico

Por otra parte, es posible hacer las Acciones de graficar el punto $(x, 0)$ donde x es la solución y $y = 0$ y graficar puntos (x, y) con $x\ =$ solución y y cualquier número con la finalidad de obtener pares de coordenadas y luego, graficarlas en el plano cartesiano y unir dichos pares. Cuando estas Acciones se repiten con distintas ecuaciones, se interiorizan en el Proceso solución en el registro gráfico, que permite considerar la solución de una ecuación de primer grado como el punto de intersección de la recta con el eje X.

Ambos Procesos de solución, el algebraico y el gráfico, se coordinan en otro Proceso que permite considerar la solución de una ecuación de primer grado en distintas representaciones y se puede encapsular en el Objeto “solución de una ecuación de primer grado”, sobre el cual es posible realizar Acciones, como la de sustituir el valor de la x en la ecuación para comprobar que se verifica la igualdad, o para considerar sus propiedades. Un ejemplo sería, interpretar y validar la solución encontrada en el contexto del problema.

Figura 9

DGP para el concepto solución de una ecuación de primer grado



Nota: Elaboración propia.

4.5 Diseño del cuestionario

A partir de la descomposición genética presentada anteriormente, además de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones de primer grado, y el hecho de que trabajar con problemas contextualizados ha tenido resultados favorables, se diseñó del siguiente cuestionario, el cual se aplicó en el aula con el fin de validar la DGP.

Todos los problemas se diseñaron en contextos diferentes con los cuales los estudiantes se pueden sentir identificados y, por lo mismo, aumentar su interés por resolverlos.

Sin embargo, es importante aclarar los siguientes puntos:

- El problema 5 es diferente, pues busca que el estudiante sea capaz de determinar que la ecuación que modela el problema no es una ecuación de primer grado.
- A los estudiantes no se les enseñó con la metodología de la teoría APOE, por lo cual el objetivo de los análisis es evaluar las estructuras mentales después de haber aprendido el concepto de ecuación lineal sin esta teoría.
- A la estudiante de la primera prueba se le realizó una entrevista clínica.

Dicho lo anterior, se muestran las preguntas que acompañan a cada uno de los problemas, junto al objetivo de las mismas.

Tabla 2

Justificación de los Ítems

Ítem	Objetivo
a) ¿Cuál es la incógnita?	Si los estudiantes responden de manera correcta a la pregunta, será evidencia de que muestran la Acción de identificar la incógnita.
b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?	Si los estudiantes identifican todas las condiciones de los problemas, será evidencia de que muestran la Acción de identificar los datos del problema.
c) Escribe el procedimiento para resolver el problema	Si los estudiantes plantean la ecuación correcta a cada uno de los problemas, será evidencia de que muestran el Proceso de modelar un problema con una ecuación lineal. Si, además, resuelven de manera correcta la ecuación, será evidencia de que muestran el

	Proceso de solución de una ecuación de primer grado.
d) ¿Cómo podrías confirmar que tu resultado es correcto? Por favor, compruébalo	Si los estudiantes sustituyen el valor que obtuvieron en la ecuación y confirman que su resultado es correcto será evidencia de que muestran la Acción de sustituir el valor de la x en la ecuación para comprobar que se verifica la igualdad.
e) Con base en tu resultado, ¿existe otro número que resuelva el problema?, ¿Por qué?	Si los estudiantes responden que no, y argumentan de manera correcta el porqué, será evidencia de que los estudiantes diferencien entre una ecuación que es de primer grado y otra que no.

Nota. Elaboración propia.

A continuación, se presentan los problemas que conforman el cuestionario junto con las respuestas esperadas en cada uno.

Tabla 3

Problema 1 y respuestas esperadas

Problema 1:	Respuestas esperadas:
A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además, dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro? Responde: a) ¿Cuál es la incógnita? b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?	a) Las tres calificaciones. b) La suma de las calificaciones de los 3 exámenes es 243 y que las calificaciones son enteras y consecutivas. c) Primera calificación: x Segunda calificación: $x + 1$ Tercera calificación: $x + 2$ Ecuación: $x + x + 1 + x + 2 = 243$ $3x + 3 = 243, x = 80$

c) Escribe el procedimiento para resolver el problema d) ¿Cómo podrías confirmar que tu resultado es correcto? Por favor, compruébalo e) Con base en tu resultado, ¿Existe otro número que resuelva el problema?, ¿Por qué?	Las calificaciones son 80,81,82 d) $(80)\ +(80)\ +1+(80)\ +2=$ $243, 243\ =\ 243$ e) No, porque la ecuación solo da un resultado por ser de primer grado.

Nota. Elaboración propia.

Tabla 4

Problema 2 y respuestas esperadas

Problema 2:	Respuestas esperadas:
Alejandra quiere comprar una libreta como la que tiene, pero en la tienda tienen varias de diversos tamaños, y ella no recuerda las medidas de la suya, sin embargo, recuerda que el perímetro es de 48cm, y que el largo mide el triple que el ancho, por un ejercicio hecho en clase. ¿Cuáles son las medidas de la libreta? Responde: a) ¿Cuál es la incógnita? b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema? c) Escribe el procedimiento para resolver el problema d) ¿Cómo podrías confirmar que tu resultado es correcto? Por favor, compruébalo	a) Las medidas de la libreta, largo y ancho. b) El perímetro de la libreta es 48 y que el largo mide el triple que el ancho. c) Ancho: x Largo: $3x$ Ecuación: $x+x+3x+3x\ =$ $48, 8x\ =\ 48, x\ =\ 6$ Por lo tanto, el ancho es 6 y el largo es 18. d) $(6)\ +(6)\ +(18)\ +(18)\ =$ $48, 48\ =\ 48.$ e) No, porque la ecuación solo da un resultado por ser de primer grado.

e) Con base en tu resultado, ¿Existe otro número que resuelva el problema?, ¿Por qué?	

Nota. Elaboración propia.

Tabla 5

Problema 3 y respuestas esperadas

Problema 3:	Respuestas esperadas:
De lunes a viernes, Andrea compró un total de 38 hojas blancas para hacer un proyecto, el martes compró el doble de lo que compró el lunes, el miércoles la mitad de lo del lunes, el jueves un cuarto del lunes y el viernes volvió a comprar la misma cantidad que el lunes. ¿Cuántas hojas compró el viernes? Responde: a) ¿Cuál es la incógnita? b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema? c) Escribe el procedimiento para resolver el problema d) ¿Cómo podrías confirmar que tu resultado es correcto? Por favor, compruébalo e) Con base en tu resultado, ¿Existe otro número que resuelva el problema?, ¿Por qué?	a) Las hojas que compró el viernes b) El total de hojas que compró es 38 y que el martes compró el doble de lo que compró el lunes, el miércoles la mitad de lo del lunes, el jueves un cuarto del lunes y el viernes volvió a comprar la misma cantidad que el lunes. c) x: Cantidad de hojas compradas el lunes y viernes $2x$: Cantidad de hojas compradas el martes $\frac{1}{2}x$: Cantidad de hojas compradas el miércoles $\frac{1}{4}x$: Cantidad de hojas compradas el jueves $x + 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + x = 38, x = 8$ d) $(8) + 2(8) + \frac{1}{2}(8) + \frac{1}{4}(8) + 8 = 38, 38 = 38$ e) No, porque la ecuación solo da un resultado por ser de primer grado.

Nota. Elaboración propia.

Tabla 6

Problema 4 y respuestas esperadas

Problema 4:	Respuestas esperadas:
Fernando, Areli, Martha son amigos. Fernando es 5 años mayor que Areli. Además, la edad de Martha es dos veces la edad de Areli menos 10. Si la suma de sus edades es 47 años ¿Cuál es la edad de Fernando? Responde: a) ¿Cuál es la incógnita? b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema? c) Escribe el procedimiento para resolver el problema d) ¿Cómo podrías confirmar que tu resultado es correcto? Por favor, compruébalo e) Con base en tu resultado, ¿Existe otro número que resuelva el problema?, ¿Por qué?	a) La edad de Fernando b) Fernando es 5 años mayor que Areli, la edad de Martha es dos veces la edad de Areli menos 10 y que la suma de las edades es 47 c) La edad de Fernando: x La edad de Areli: $x - 5$ La edad de Martha: $2(x-5) - 10 = 2x - 20$ $x + x - 5 + 2x - 20 = 47, x = 18$ Por lo tanto, la edad de Fernando es 18, la de Areli es 13 y Martha tiene 16. d) $18 + (18) - 5 + 2(18) - 20 = 47, 47 = 47$ e) No, porque la ecuación solo da un resultado por ser de primer grado.

Nota. Elaboración propia.

Tabla 7

Problema 5 y respuestas esperadas

Problema 5:	Respuestas esperadas:

La longitud de un rectángulo es el doble de su ancho. Si el área del rectángulo es de 72 metros cuadrados, ¿cuáles son sus dimensiones? Responde: a) ¿Cuál es la incógnita? b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema? c) Escribe el procedimiento para resolver el problema d) ¿Cómo podrías confirmar que tu resultado es correcto? Por favor, compruébalo e) Con base en tu resultado, ¿Existe otro número que resuelva el problema?, ¿Por qué?	a) Ancho de rectángulo. b) La longitud de un rectángulo es el doble de su ancho y que el área del rectángulo es de 72 metros cuadrados. c) x: Ancho del rectángulo. $2x$: Longitud del rectángulo. $(2x)x = 72, 2x\text{^}2 = 72$, esta no es una ecuación de primer grado.

Nota: Elaboración propia.

Capítulo 5

5 Recolección y análisis de datos

En este capítulo se describe la recolección y análisis de los datos de esta investigación.

Primero se reporta el análisis de los datos obtenidos de la primera prueba, y después los de la segunda, por último, se presenta el análisis de los datos obtenidos de las entrevistas sobre el concepto de estudio.

Sin embargo, se considera pertinente aclarar que la parte de la DGP que corresponde al Proceso solución de la ecuación de primer grado (geométricamente) no fue analizado durante la aplicación del cuestionario, pues durante la primera aplicación la estudiante argumentó que eso no lo habían visto, además de que en el plan de estudios de la SEP tampoco está marcado que se enseñe a la par del tema.

5.1 Aplicación y resultados de la primera prueba

La primera prueba se realizó en la casa de la estudiante, la cual se identifica como A2, y a la entrevistadora se le identificará como E. También cabe mencionar que hubo momentos en la entrevista donde la estudiante no contestaba durante mucho tiempo, por lo cual se pondrá el siguiente símbolo (----).

Se le presentó el cuestionario después de dar una presentación acerca de cómo sería la forma de trabajo, la cual consistió en que mientras ella resolvía los ejercicios se le harían preguntas para analizar sus respuestas, de igual forma, si requería apoyo para resolver los ejercicios se le proporcionaría. También cabe aclarar que la prueba constó de 6 ejercicios, (agregando uno a los problemas anteriores, el cual se menciona a continuación, además, se hace notar que la numeración de los problemas se recorre), y se desarrolló durante una hora y media. Por último, con respecto a la pregunta ¿cómo interpretarías la solución en el plano cartesiano?, no se analizó durante la entrevista pues la estudiante comentó que no se lo habían enseñado.

Tabla 8

Problema extra

1. Juan tiene 4 veces la edad que tiene su hermana Marta. Si la suma de sus edades es 45 años, ¿cuántos años tiene cada uno?, ¿cómo interpretarías la solución en el plano cartesiano? Solución: Edad de Marta: x Edad de Juan: $4x$ $4x + x = 45, x = 9$ Marta tiene 9 y Juan tiene 36.

Nota. Elaboración propia

5.1.1 Estructura Acción identificar los datos del problema y Acción identificar la incógnita del problema

En cuanto a la Acción de incógnita, en el primer ejercicio, la estudiante planteó la ecuación sin especificar quién era la incógnita, por lo que se le realizó la pregunta de ¿quién era tu incógnita en el problema?, a continuación, se muestra su respuesta.

> A2: Pues, como se definen las ecuaciones.

Después de otras preguntas, se llegó a esto:

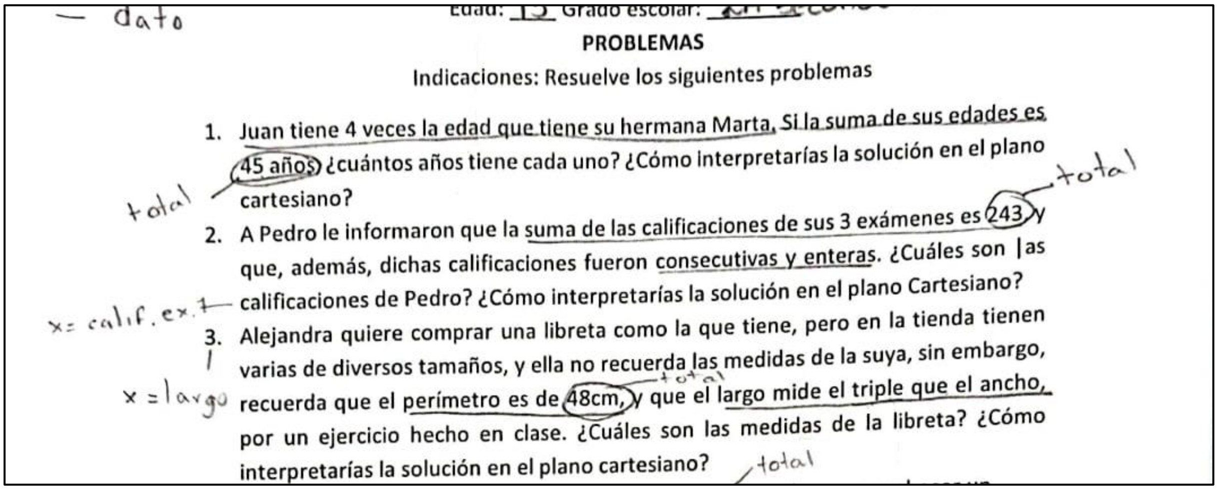
> E: Ok, está perfecto, mira vamos a ver, pero aquí, ¿quién es tu valor desconocido?, las edades o ¿qué es lo que tú buscas obtener?
>
> A2: Pues, la edad de Juan.

Como se aprecia en el diálogo anterior, la estudiante no identificó la incógnita, le resultó complicado y requirió ayuda, lo cual significa que la estudiante no mostró la Acción de incógnita.

Después de ofrecerle apoyo explicándole qué es la incógnita, subrayó los datos y la incógnita en cada uno de los problemas con lápiz, como se observa en la Figura 10, lo cual muestra la Acción identificar los datos del problema y la Acción identificar la incógnita de problema.

Figura 10

Acción identificar los datos del problema y Acción identificar la incógnita de la estudiante A2


— dato

Edad: 15 Grado escolar:

PROBLEMAS

Indicaciones: Resuelve los siguientes problemas

1. Juan tiene 4 veces la edad que tiene su hermana Marta. Si la suma de sus edades es 45 años ¿cuántos años tiene cada uno? ¿Cómo interpretarías la solución en el plano cartesiano?
total
2. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243 y que, además, dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro? ¿Cómo interpretarías la solución en el plano Cartesiano?
total
x= calif. ex. 1
3. Alejandra quiere comprar una libreta como la que tiene, pero en la tienda tienen varias de diversos tamaños, y ella no recuerda las medidas de la suya, sin embargo, recuerda que el perímetro es de 48cm, y que el largo mide el triple que el ancho, por un ejercicio hecho en clase. ¿Cuáles son las medidas de la libreta? ¿Cómo interpretarías la solución en el plano cartesiano?
total
x = largo
total

Nota: Elaboración propia

De modo que, antes de proporcionarle el apoyo la estudiante solo mostró la Acción identificar los datos del problema, y después con la explicación de lo que es la incógnita mostró la Acción identificar la incógnita.

5.1.2 Estructura Acción relacionar las condiciones e incógnita del problema

En el caso del problema 1 se observó que la estudiante planteó una expresión algebraica con los datos dados por el problema. Sin embargo, la expresión no es correcta, como se observa en la Figura 11 y en el siguiente fragmento de la entrevista.

Figura 11

Respuesta de la estudiante A2

(1) $2x = 45$

Nota: Elaboración propia

A2: ¿Está bien así?

E: Mm, ¿a ver, como la planteaste?

A2: $2x = 45$, porque son Juan y Marta.

Por ello, como se muestra en la siguiente parte de la transcripción, inclusive la entrevistadora tuvo que explicarle cómo se representaban algebraicamente algunas condiciones del problema.

E: Empecemos por definir quién va a ser "x", ¿te parece si ponemos a x como la edad de Marta?

A2: Ajá.

E: Entonces si x es la edad de Marta, ¿Cómo se representaría la edad de Juan?, en una expresión algebraica.

A2: ----

E: Si yo te digo que escribas el, 4 veces un número, ¿Cómo lo escribes?

A2: Pues, ah, pues un número si no sabes, sería la x.

E: Así ¿no?, $4x$.

A2: Aja, así $4x$.

E: Pero aquí tu número en particular es la edad de Marta, ¿no?, entonces viene siendo x .

A2: Ah, ok.

E: Entonces, te están diciendo que la suma de sus edades es 45, ¿Qué estás sumando?

A2: Pues, no sé, ayúdame.

E: Tranquila es cosa de practicar.

A2: Nunca le he entendido a esto, es que no le entiendo a las ecuaciones.

E: Ok, pero, ¿entiendes transcribir como pequeños textos a expresiones algebraicas?

A2: ---

E: No tampoco.

A2: No, es que no me enseñan bien, pero, 4 veces es $4x$.

E: Ajá.

A2: Y la edad de Marta ¿no se sabe bien?

E: Mm, no se sabe, pero, también está en relación con la de Juan, ¿no?

A2: Entonces, sería $4x + x$ porque no se sabe.

E: Si.

A2: Ok, y con las dos edades dan 45, ¿sí?

Después de esto, la estudiante planteó la ecuación de la Figura 12, la cual es correcta, sin embargo, en el extracto del diálogo se puede ver que la entrevistadora tuvo que guiarla para que ella lograra relacionar los datos mediante una suma e igualar esta con 45. Así, después del apoyo, la estudiante hizo la Acción de relacionar las condiciones e incógnita del problema.

Figura 12

Ecuación de problema 1 de la estudiante A2

① $4x+x=45$ x - Edad Marta - 9
$5x=45$ $4x$ - Edad Juan - 36
$= 5/45$ $45/5=9$
$45-9=36$

Nota: Elaboración propia

Cuando se avanzó al problema 2, la estudiante propuso la ecuación de la Figura 13, sin embargo, resultó ser incorrecta, debido a la interpretación de la palabra “consecutivas”, que entiende como “repetidas”.

Figura 13

Evidencia de interpretación de "consecutivas"

(2) Repetidas – $x+x+x=243$

Nota: Elaboración propia

Después de ofrecerle apoyo proporcionándole el significado de la frase “enteras y consecutivas”, planteó la ecuación de la Figura 14, la cual es la ecuación correspondiente al problema en cuestión.

Figura 14

Ecuación de problema 2 de la estudiante A2

$x+x+1+x+2=243$

Nota: Elaboración propia

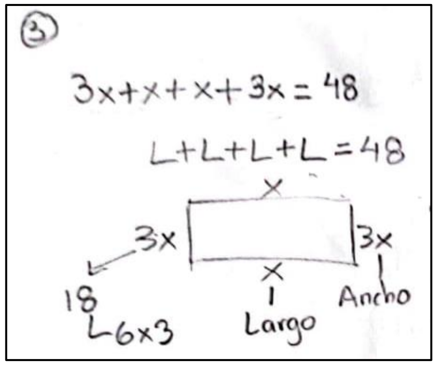
Para el problema 3, en el siguiente fragmento de entrevista y en la Figura 15, la estudiante planteó la ecuación correspondiente al problema y justificó por qué lo hizo de esa manera.

E: Ahora, antes de que avances, ¿por qué propusiste esta ecuación?

A2: Pues, es que, bueno, digamos que, si dice el triple, o sea, es 3 pero no sabemos cómo tal el valor, o sea el número, entonces en ese caso sería digamos sería $3x, 3x,$ y las otras, el ancho sería este, y como no sabemos cómo tal su valor, eh, bueno yo también, bueno yo lo pongo como x porque pues no sé, por eso escogí esos, pues no sé.

Figura 15

Acción relacionar las condiciones e incógnita del problema 3 de la estudiante A2



Nota: Elaboración propia

Es importante notar que, en este problema, la estudiante no requirió de apoyo.

Sin embargo, al intentar resolver el problema 5, en un principio, no pudo plantear la ecuación, pues había entendido que como se hablaba de 3 amigos, entonces tendría $3x$, pues se desconocían las edades, entonces, pidió apoyo y al proporcionarlo, planteó la ecuación de acuerdo con los datos del problema, como se observa en el siguiente fragmento de entrevista y en la Figura 16.

A2: La verdad no sé, ¿me podrías explicar este?

E: Ok, empiezas con que tienes tres amigos ¿no?

A2: Ajá.

E: Y Fernando es 5 años mayor que Areli y que la edad de Martha es dos veces la edad de Areli menos 10, entonces lo primero que hay que hacer ¿qué es?, definir una variable, ¿no?, las 3 son variables porque no sabes la edad de ninguno.

A2: Ajá.

E: Pero te parece si llamamos a la edad de, de quien de Areli a x.

A2: Ok.

E: La edad de Fernando es 5 años más que la de Areli.

A2: ¿$5x + 5x$? no verdad.

E: La, o sea tienes la edad de Areli y le vas a sumar 5 años, esa es la edad de Fernando.

A2: Ah, ¿$x + 5$?

E: Sí.

A2: Ok.

E: Bueno y ahí te falto otra x, ¿no?, la primera es la edad de Areli.

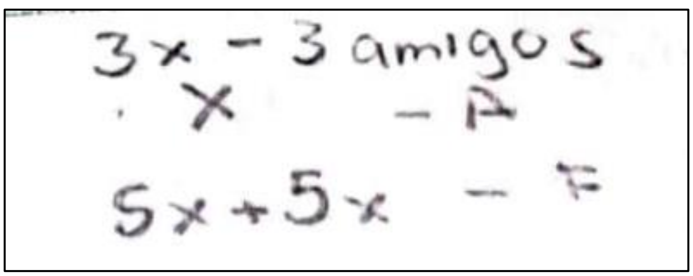
A2: A, ok.

E: Ahora vamos con la edad de Martha, aquí te dice que la edad de Martha es dos veces la edad de Areli menos 10, la edad de Areli acuérdate que es x , entonces, ¿cómo traduces dos veces la edad de Areli menos 10?, o, en otras palabras, ¿cómo traduces dos veces un número menos 10?

A2: Pues, ¿$2x - 10$?

Figura 16

Solución del problema 5 de la estudiante A2



Nota: Elaboración propia

Por lo tanto, después de proporcionarle apoyo a la estudiante, ella mostró la Acción de relacionar las condiciones e incógnita del problema.

5.1.3 Estructura Proceso modelar un problema con una ecuación lineal

La estudiante no muestra la estructura Proceso de modelar un problema con una ecuación lineal debido a que, como se mencionó en el análisis anterior, la mayoría de las ocasiones requirió de explicaciones para plantear las ecuaciones correctas.

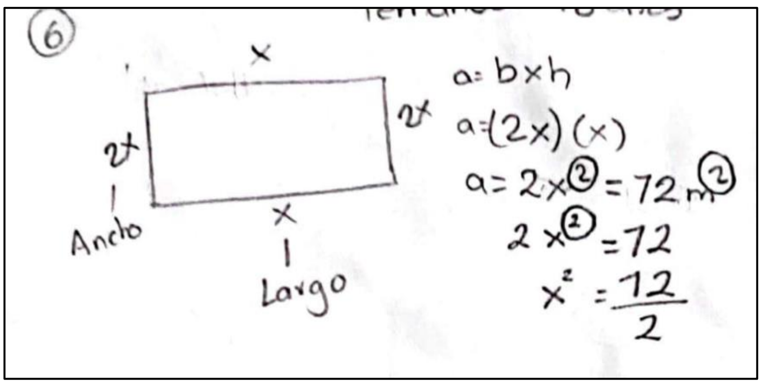
5.1.4 Estructura Objeto ecuación de primer grado

Con base en el análisis teórico, la encapsulación del Objeto se alcanza cuando el estudiante realiza las Acciones enunciadas en la DGP para construir los Procesos de solución en el registro algebraico y geométrico.

Como se mencionó anteriormente, la ecuación del problema 6 no era de primer grado y se pretendía que la estudiante reconociera este hecho. Ella lo hizo al plantear la ecuación, como se muestra en la Figura 17. Posteriormente, al preguntarle si podría resolver esa ecuación respondió: "pero nada más una tiene el cuadrado entonces no se puede".

Figura 17

Respuesta al problema 6 por la estudiante A2



Nota: Elaboración propia

Teniendo esto en cuenta, y a pesar de que la estudiante presentó dificultades para plantear las ecuaciones, con apoyo logró plantear las ecuaciones de cada problema, además de distinguir entre una ecuación de primer grado y otras que no lo son, e identificó tanto la incógnita como las condiciones del problema, por lo tanto, la estudiante muestra el Objeto "Ecuación de primer grado".

Por otro lado, aún falta analizar las respuestas correspondientes a las Acciones a realizar sobre el Objeto ecuación de primer grado.

5.1.5 Estructura Acción sumar o multiplicar inversos aditivos o multiplicativos

En el problema 1 la estudiante cometió un error en el despeje como se observa en la Figura 18, pues al despejar x de $5x = 45$, no lo hizo de manera correcta, y al preguntarle por qué lo había hecho así, su respuesta fue la siguiente:

E: ¿Por qué el 5 lo pones arriba?

A2: Pues es que, no sé.

E: Ok.

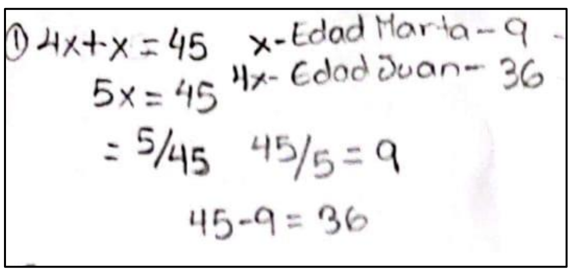
A2: Y…

E: Ajá, ¿porqué, este, porque lo, que te enseñaron a hacer en este caso, o cómo te lo nombraron?

A2: Es que nada más me dijeron que, o sea nos ponían un ejemplo así y siempre se dividía.

Figura 18

Evidencia de error de A2



Nota: Elaboración propia

Seguido de esto, se le explicó cómo resolver la parte donde cometió algún error como se muestra a continuación:

E: ¿Por qué el 5 lo pones arriba?

A2: Pues es que, no sé, es que nada más me dijeron que, o sea nos ponían un ejemplo así y siempre se dividía.

E: Ok, mm.

A2: Sí, eso, eso me enseñaron.

E: Ok, entonces, ¿ese sería tu valor de x?

A2: No.

E: No, entonces.

A2: No, no, no, eso creo.

E: Ok haber, si te enseñaron que se pasa dividiendo ¿no?

A2: Ajá.

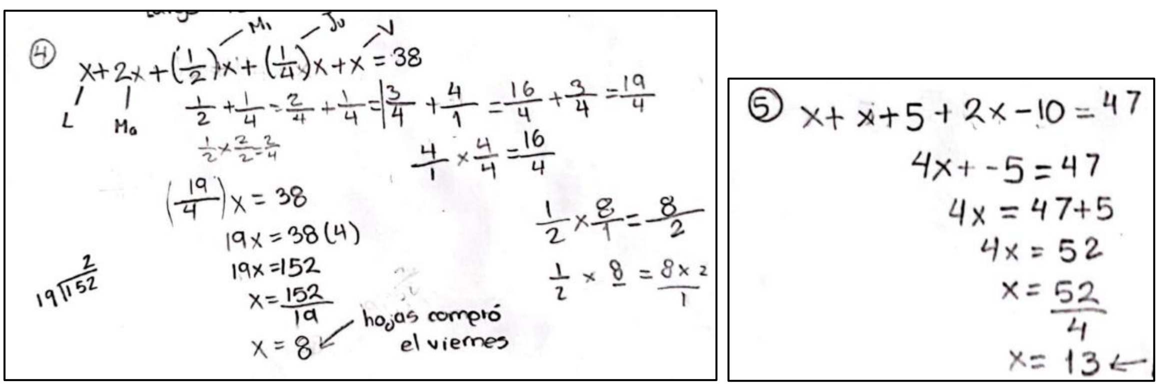
E: Va, pero, em, acuérdate que si pasa dividiendo pasa dividiendo por abajo del número, o sea, abajo del 45.

De modo que, como la estudiante requirió apoyo de la entrevistadora, solo muestra la Acción sumar inversos aditivos.

Luego de haberle explicado el procedimiento para hacer el "despeje", la estudiante resolvió los siguientes problemas como se puede observar en la Figura 19.

Figura 19

Evidencia Acción sumar o multiplicar inversos aditivos o multiplicativos de A2



Nota: Elaboración propia

Es destacable el hecho de que la estudiante A2 mostró el Esquema aritmético, pues evidenció un manejo adecuado de las operaciones, además de realizarlas de manera ordenada.

5.1.6 Estructura Proceso solución en el registro algebraico

Recordemos que la interiorización del Proceso solución de la ecuación de primer grado en el registro algebraico se alcanza cuando los estudiantes realizan el procedimiento de despeje justificando cada uno de los pasos. Tomando en cuenta lo anterior, además de que a la estudiante se le proporcionó apoyo y que realizó los despejes siguiendo las “reglas”, ella no mostró el Proceso solución de la ecuación de primer grado en el registro algebraico, pero sí la Acción solución de la ecuación de primer grado en el registro algebraico.

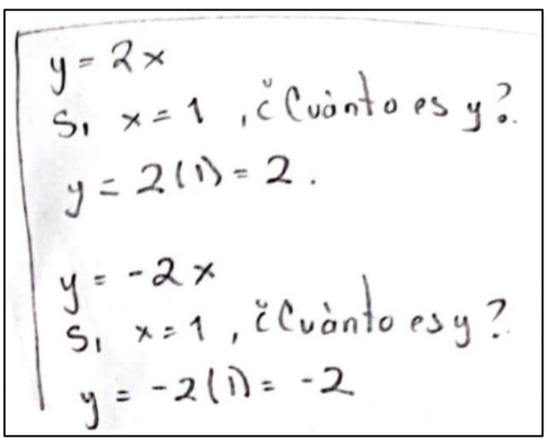
A continuación, se muestra el análisis de las Acciones para llegar al Proceso Solución de la ecuación de primer grado en el registro gráfico.

5.1.7 Estructura Acción sustituir valores específicos para x para obtener pares ordenados

Durante la entrevista la estudiante no mostró evidencia de ninguna de las estructuras relacionadas al Proceso solución en el registro geométrico, sin embargo, en la segunda visita que se le hizo se observó que evidenció la Acción “sustituir valores específicos para x para obtener pares ordenados” como se ve en la Figura 20, ya que se le presentaron las ecuaciones “$y = 2x$” y “$y = -2x$” y se le solicitó hallar el valor de “y” para valores de x específicos.

Figura 20

Evidencia de Acción sustituir valores específicos para x para obtener pares ordenados de A2



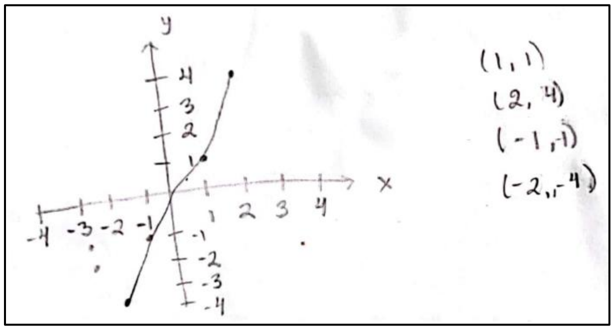
Nota: Elaboración propia

5.1.8 Estructura Acción graficar y unir los pares ordenados

Cuando se le solicitó que graficara los pares ordenados que había obtenido en el ejercicio anterior, comentó que no entendía a qué se refería eso y no lo sabía hacer, sin embargo, cuando se le presentó una lista de pares ordenados, sí realizó la Acción de ubicarlos en el plano y después unirlos como se observa en la Figura 21.

Figura 21

Evidencia de la estudiante A2



Nota: Elaboración propia

A continuación, se muestra evidencia de la Acción que se planteó en la DGP, que permite ver si la estudiante construyó el Objeto "Solución de una ecuación de primer grado".

5.1.9 Estructura Acción sustituir el valor de la x para verificar que se cumple la igualdad

La estudiante no mostró evidencias de esta Acción, como se puede notar en el siguiente extracto de la conversación:

> E: Sí, ok, y ¿cómo validarías que la, que el resultado que obtuviste es correcto?
>
> A2: ¿Para revisarlo?
>
> E: Sí, ¿Cómo escribirías que esta es la respuesta correcta?
>
> A2: Eso no me enseñaron.
>
> E: Ok, entonces no te lo enseñaron, am, ¿te enseñaron como interpretar tu solución en el plano cartesiano?
>
> A2: ----
>
> E: Tampoco.
>
> A2: Mm, es que no me enseñan bien, perdón, no me enseñan bien.

Durante la entrevista se notó que cuando la estudiante comentaba "no me enseñan bien", mostraba negación al intento de responder a las preguntas o intentar los procedimientos sugeridos, por lo cual no se le insistió.

De esto se sigue que, la estudiante no mostró evidencia del Objeto "Solución de una ecuación de primer grado", sin embargo, después de la ayuda proporcionada durante la aplicación, la estudiante mostró el Proceso modelar un problema con una ecuación de lineal, además evidenció la estructura

Acción de solución de una ecuación de primer grado en el registro algebraico y una estructura Acción de solución de una ecuación de primer grado en el registro geométrico.

5.2 Análisis de la segunda prueba

El 21 de mayo de 2024, se acudió a las instalaciones de la escuela y se aplicó el cuestionario a un grupo de primero de secundaria con 47 alumnos durante 1 hora, y el 22 de mayo de 2024 se regresó a las instalaciones para aplicar las entrevistas (duración de una hora y media) a los estudiantes seleccionados.

Para el análisis se revisaron las respuestas de 44 estudiantes, pues los otros 3 no contestaron el cuestionario, sin embargo, se presentarán evidencias de 22 de ellos, pues estos fueron los que aportaron mayor información.

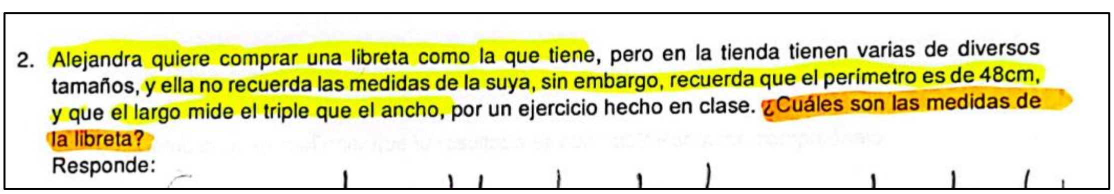
Las etiquetas para los 22 estudiantes son E1-E22.

5.2.1 Estructura Acción identificar los datos del problema y Acción identificar la incógnita del problema

De acuerdo con el análisis de los resultados, se tiene que menos de la mitad de los estudiantes mostraron evidencia de estas Acciones. Durante la resolución de los ejercicios subrayaron los datos y la incógnita como se ve en la Figura 22, o marcaron con una línea las respuestas a las preguntas de los incisos a) y b) como se observa en la Figura 23.

Figura 22

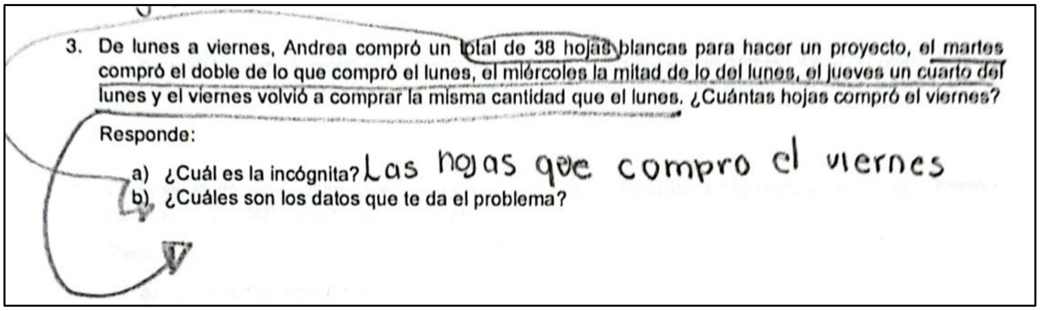
Evidencia de Acción con subrayado del estudiante E14


2. Alejandra quiere comprar una libreta como la que tiene, pero en la tienda tienen varias de diversos tamaños, y ella no recuerda las medidas de la suya, sin embargo, recuerda que el perímetro es de 48cm, y que el largo mide el triple que el ancho, por un ejercicio hecho en clase. ¿Cuáles son las medidas de la libreta?
Responde:

Nota: Elaboración propia

Figura 23

Evidencia responder incisos del estudiante E15



3. De lunes a viernes, Andrea compró un total de 38 hojas blancas para hacer un proyecto, el martes compró el doble de lo que compró el lunes, el miércoles la mitad de lo del lunes, el jueves un cuarto del lunes y el viernes volvió a comprar la misma cantidad que el lunes. ¿Cuántas hojas compró el viernes?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? Las hojas que compro el viernes

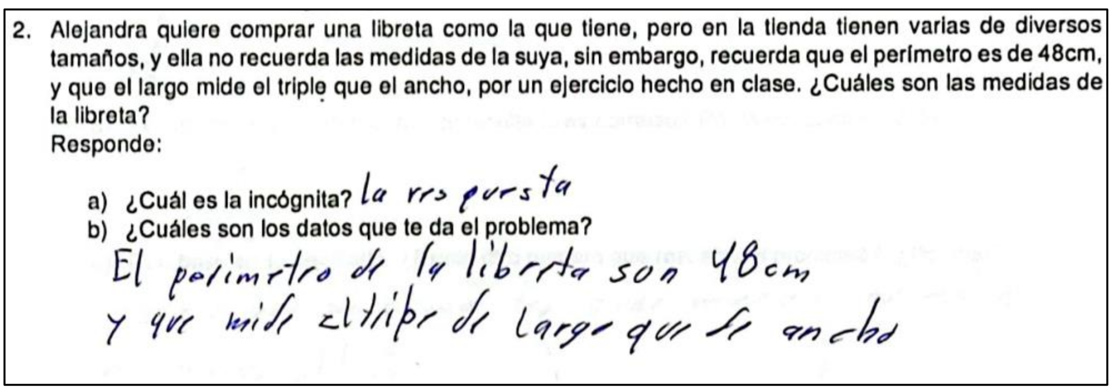
b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?

Nota: Elaboración propia

Algunos estudiantes mostraron la Acción identificar los datos del problema, pero no la Acción identificar la incógnita del problema como se puede observar en la Figura 24, donde las respuestas más comunes al inciso a) fueron: “la respuesta” y el número que apareciera en el problema.

Figura 24

Evidencia de las Acciones del estudiante E8



2. Alejandra quiere comprar una libreta como la que tiene, pero en la tienda tienen varias de diversos tamaños, y ella no recuerda las medidas de la suya, sin embargo, recuerda que el perímetro es de 48cm, y que el largo mide el triple que el ancho, por un ejercicio hecho en clase. ¿Cuáles son las medidas de la libreta?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? la respuesta

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?

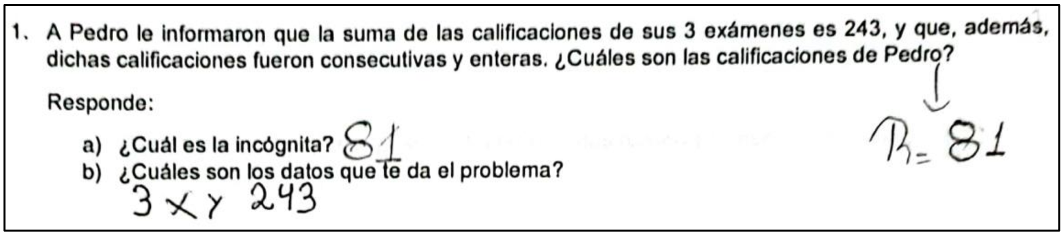
El perimetro de la libreta son 48cm y que mide el triple de largo que el ancho

Nota: Elaboración propia

Otros estudiantes no mostraron la Acción identificar los datos del problema y la Acción identificar la incógnita de problema, como se muestra en la Figura 25.

Figura 25

Respuestas al inciso a) y b) de E7



1. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además, dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? 81

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?

3 x y 243

R= 81

Nota: Elaboración propia

Sin embargo, algo muy común fue que algunos de los estudiantes que respondieron los problemas se saltaban esta pregunta, y al observar esto durante la aplicación se le preguntó a un estudiante en particular, "¿por qué no contestas esta pregunta?", a lo que respondió, "no me acuerdo qué era la incógnita, no entendí mucho cuando nos explicaron en clase, entonces aprendí a resolver los problemas solo encontrando lo que pide la pregunta", es decir, de manera implícita encuentra la incógnita.

En la tabla 9 se muestran los resultados de los 22 estudiantes.

Tabla 9

Resumen de resultados Acciones

Acción identificar los datos del problema				Acción identificar la incógnita del problema				
Mostraron la Acción	No mostraron la Acción			Mostraron la Acción	No mostraron la Acción			
E2 E3 E5	Respuesta incompleta	#	Ecuación	E6 E9 E10	"La respuesta"	No contestaron	Un número	Definición de incógnita

E6	E18	E1	E17	E11	E8	E3	E1	E12
E8	E22	E4	E19	E14		E4	E2	
E9		E7		E15			E5	
E10		E11		E16			E7	
E12		E13		E18			E13	
E14		E16		E19			E17	
E15		E21		E20				
E20				E21				
				E22				

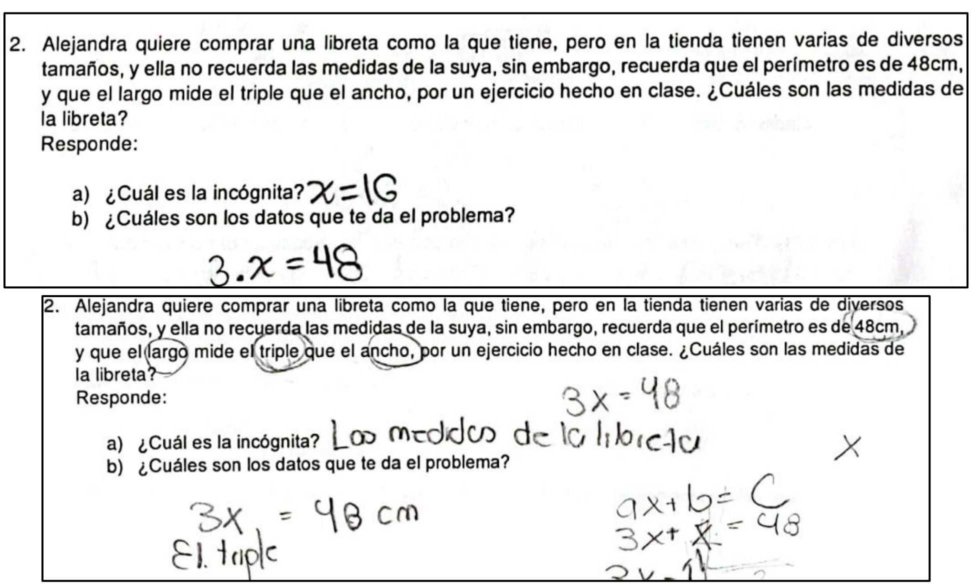
Nota: Elaboración propia

5.2.2 Estructura Acción relacionar las condiciones e incógnita del problema

De acuerdo con las respuestas obtenidas, solo dos estudiantes plantearon ecuaciones en todos los problemas, sin embargo, dichas ecuaciones eran de la forma "$ax = b$" , como se observa en la Figura 26. Cabe mencionar que dichas ecuaciones no eran las que representaban a los problemas.

Figura 26

Ecuaciones planteadas por los estudiantes E17 y E6


2. Alejandra quiere comprar una libreta como la que tiene, pero en la tienda tienen varias de diversos tamaños, y ella no recuerda las medidas de la suya, sin embargo, recuerda que el perímetro es de 48cm, y que el largo mide el triple que el ancho, por un ejercicio hecho en clase. ¿Cuáles son las medidas de la libreta?
Responde:
a) ¿Cuál es la incógnita? $x = 16$
b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?
$3.x = 48$

2. Alejandra quiere comprar una libreta como la que tiene, pero en la tienda tienen varias de diversos tamaños, y ella no recuerda las medidas de la suya, sin embargo, recuerda que el perímetro es de 48cm, y que el largo mide el triple que el ancho, por un ejercicio hecho en clase. ¿Cuáles son las medidas de la libreta?
Responde:
a) ¿Cuál es la incógnita? Los medidas de la libreta
b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?
$3x = 48$
$3x = 48$ cm
El triple
$ax + b = c$
$3x + \cancel{x} = 48$

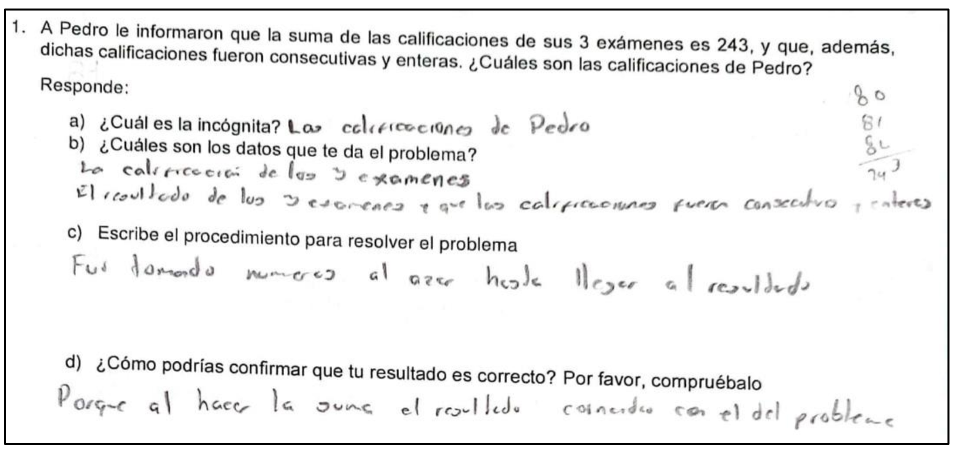
Nota: Elaboración propia

Cabe resaltar que, si bien solo E6 y E17 plantearon ecuaciones en todos los problemas y los demás resolvieron como máximo 3 problemas, se presentaron los siguientes casos:

- Durante la aplicación del examen se observó que la mayoría planteaban las mismas ecuaciones, lo que llevó a seleccionar a uno de ellos y se le preguntó sobre el problema 1 (destacando que fue el problema más resuelto) por qué planteó la ecuación $3x = 243$, a lo que respondió: “como son 3 exámenes y no sabemos sus calificaciones entonces es x y como en total suman 243 por eso se pone igual”, es decir, los estudiantes no tomaron en cuenta todas las condiciones de problema.
- Otros estudiantes no plantearon ecuaciones, si no que aplicaron el método del tanteo y algunos llegaron a la respuesta correcta como se observa en la Figura 27.

Figura 27

Respuesta a problema 1 del estudiante E20


1. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además, dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? Las calificaciones de Pedro

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?
La calificaciones de los 3 examenes
El resultado de los 3 examenes y que las calificaciones fueron consecutivo y enteros

80
81
82
243

c) Escribe el procedimiento para resolver el problema
Fui tomando numeros al azar hasta llegar al resultado

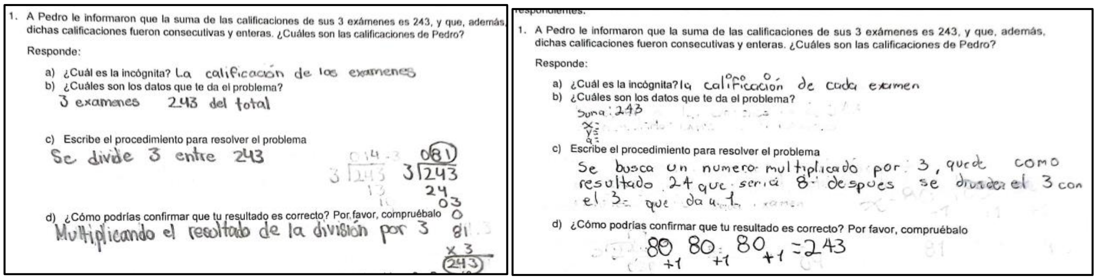
d) ¿Cómo podrías confirmar que tu resultado es correcto? Por favor, compruébalo
Porque al hacer la suma el resultado coincidio con el del problema

Nota: Elaboración propia

- Algunos estudiantes dividían uno de los números entre el otro, y lo hacían de manera correcta, ver Figura 28.

Figura 28

Respuesta a problema 1 de los estudiantes E21 y E22

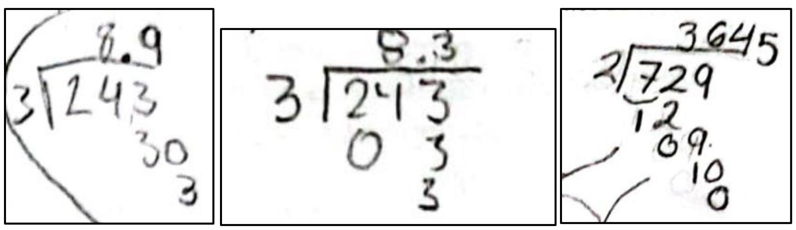


Nota: Elaboración propia

- Por otra parte, algunos estudiantes presentaron problemas al realizar divisiones, lo cual se observa en la Figura 29 e implica que no muestran la Acción operaciones aritméticas

Figura 29

Errores aritméticos de los estudiantes E5, E3 y E4 respectivamente



Nota: Elaboración propia

En la tabla 10, se muestran los resultados de los 22 estudiantes.

Tabla 10

Resumen de la sección 5.2.2

<table>
<tr><td colspan="4">Acción relacionar las condiciones e incógnita del problema</td></tr>
<tr><td>Plantearon ecuaciones de la forma
$ax = b$</td><td colspan="3">No plantearon ecuaciones</td></tr>
<tr><td rowspan="2">E3,E6,E9,E10,E11,E12,E13,E16,
E17</td><td>Tanteo</td><td>Operar los números
del problema</td><td>No contestaron</td></tr>
<tr><td>E20 E21</td><td>E1,E2,E5,E7,E8,E14
,E15,E18,E21,E22</td><td>E4</td></tr>
</table>

Nota: Elaboración propia

Por lo tanto, con la información anterior, se concluyó que los estudiantes no mostraron la Acción de relacionar las condiciones e incógnita de problema.

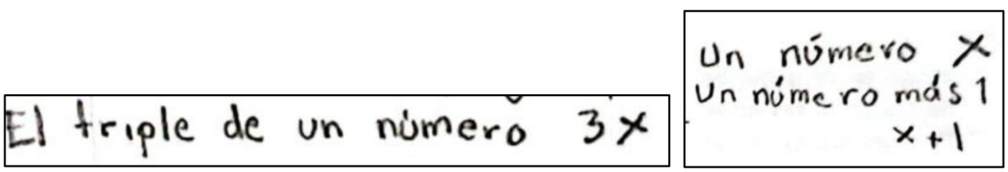
5.2.3 Estructura Proceso Modelar un problema con una ecuación lineal

Con base en las respuestas de los alumnos, se tiene que ninguno mostró evidencia del Proceso de modelar un problema con una ecuación lineal, a pesar de poder identificar los datos y la incógnita de los problemas, no los relacionaron de manera correcta, generalmente omitieron una de las condiciones.

Es importante mencionar que durante la aplicación, se escogieron a tres estudiantes a quienes se les plantearon pequeños textos que tenían relación con el problema a resolver y se les pidió que los transcribieran al lenguaje algebraico. Dichos estudiantes lo hicieron de manera correcta como se muestra en la Figura 30, por lo cual mostraron evidencia de la estructura Acción de plantear situaciones del lenguaje común a lenguaje algebraico y viceversa.

Figura 30

Transcripción de textos pequeños de los estudiantes E12 y E13



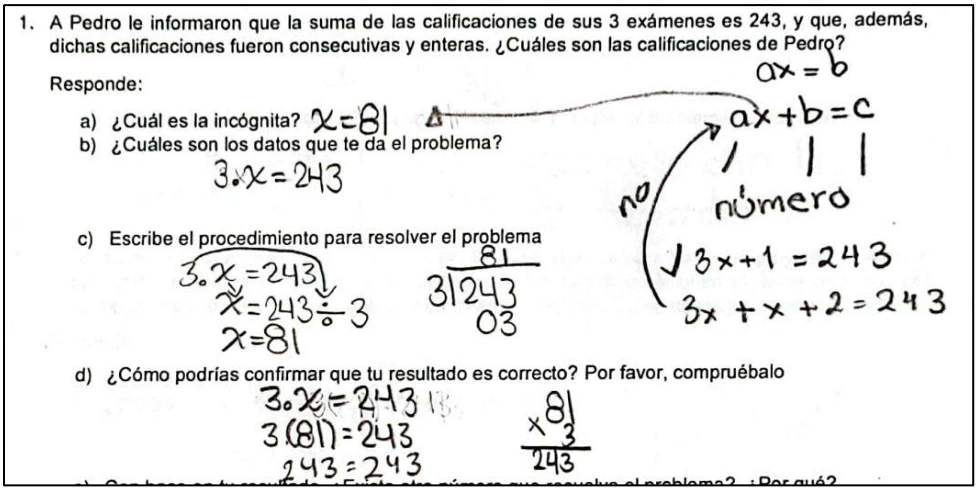
Nota: Elaboración propia

5.2.4 Estructura Objeto ecuación de primer grado

Durante la aplicación del examen se observó que la mayoría de los estudiantes no respondieron el problema 5, por lo que se decidió escoger al estudiante E17, quien era de los pocos que si lo estaba resolviendo, para preguntarle si lo que había planteado era una ecuación y porqué, a lo que respondió que sí porque: “comparo con las fórmulas que nos dieron, la primera $ax = b$, y aquí mi ecuación $3x = 243$ es así”, así que se le plantearon dos ecuaciones y se le preguntó si consideraba que esas ecuaciones eran de primer grado y respondió: “Sí, pero de diferentes tipos, la primera, ($3x + 1 = 243$) era $ax + b = c$, y la otra ($3x + x + 2 = 243$) no estoy seguro, hay una tercera fórmula pero ya no me acuerdo, pero ya no es como esta porque aquí $a = 3, b = 2, c = 243$, pero me sobra la x", lo que indica que si bien, no realiza la suma de $3x + x$, si sabe diferenciar entre los términos independientes y la variable como se observa en la Figura 31.

Figura 31

Evidencia de diferenciar una ecuación de primer grado y otra que no lo es del estudiante E17



1. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además, dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? $x=81$

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?

$3 \cdot x = 243$

c) Escribe el procedimiento para resolver el problema

$3 \cdot x = 243$
$x = 243 \div 3$
$x = 81$

$243 \div 3 = 81$

d) ¿Cómo podrías confirmar que tu resultado es correcto? Por favor, compruébalo

$3 \cdot x = 243$
$3(81) = 243$
$243 = 243$

$81 \times 3 = 243$

$ax = b$
$ax + b = c$
número
no
$3x + 1 = 243$
$3x + x + 2 = 243$

Nota: Elaboración propia

De esto se sigue que al menos el estudiante E17 muestra el Objeto "Ecuación de primer grado".

Sin embargo, aún falta analizar las respuestas correspondientes a las Acciones a realizar sobre el Objeto ecuación de primer grado.

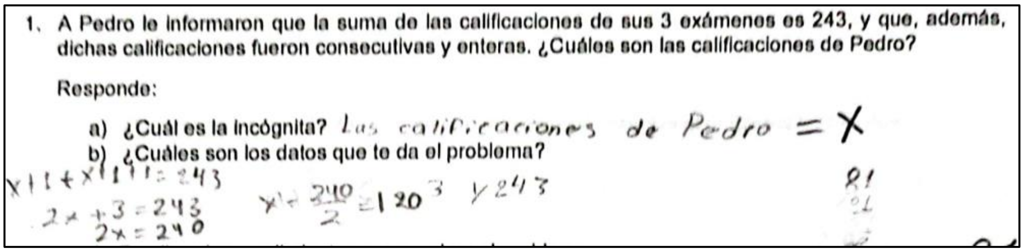
5.2.5 Estructura Acción de sumar o multiplicar inversos aditivos o multiplicativos

Debido a que solamente los estudiantes E3, E6, E9, E10, E11, E12, E13, E16, E17 plantearon ecuaciones en al menos uno de los problemas, de aquí en adelante se hará el análisis con respecto a estos estudiantes.

El estudiante E11, solamente contestó un problema completo, en el que planteó la ecuación $x + 1 + x + 1 + 1 = 243$, y para resolverla muestra la Acción de sumar el inverso aditivo de 3 y luego divide por 2, ver Figura 32.

Figura 32

Evidencia Acción de Sumar inversos aditivos y multiplicar inversos multiplicativos del estudiante E11



1. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además, dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? Las calificaciones de Pedro = X

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?

$2x+3=243$

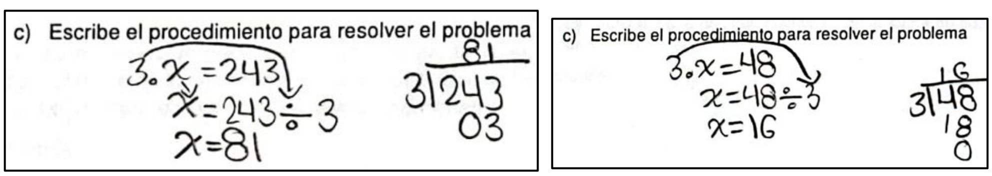
$2x=240$

Nota: Elaboración propia

Por otro lado, el estudiante E17, resolvió los 5 problemas y planteó ecuaciones de la forma $ax = b$, y realizó la Acción de multiplicar por el inverso aditivo de a. En la Figura 33 se muestran las respuestas a dos de los problemas.

Figura 33

Evidencia de Acción multiplicar por inverso multiplicativo de a de la estudiante E17



c) Escribe el procedimiento para resolver el problema

$3\cdot x = 243$

$x = 243 \div 3$

$x = 81$

c) Escribe el procedimiento para resolver el problema

$3\cdot x = 48$

$x = 48 \div 3$

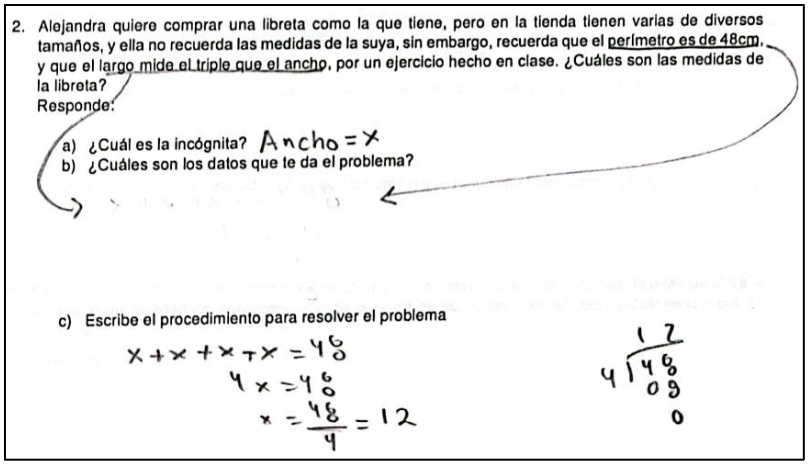
$x = 16$

Nota: Elaboración propia

El estudiante E10 contestó tres problemas, y en todos planteó ecuaciones y mostró la Acción de multiplicar por inversos multiplicativos, por ejemplo, en la Figura 34, se observa su respuesta para el problema 2, donde planteó la ecuación $x + x + x + x = 48$, concluye que $4x = 48$ y divide por 4.

Figura 34

Evidencia de Acción multiplicar por el inverso multiplicativo de 4 del estudiante E10



2. Alejandra quiere comprar una libreta como la que tiene, pero en la tienda tienen varias de diversos tamaños, y ella no recuerda las medidas de la suya, sin embargo, recuerda que el perímetro es de 48cm, y que el largo mide el triple que el ancho, por un ejercicio hecho en clase. ¿Cuáles son las medidas de la libreta?
Responde:
a) ¿Cuál es la incógnita? Ancho = x
b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?
c) Escribe el procedimiento para resolver el problema

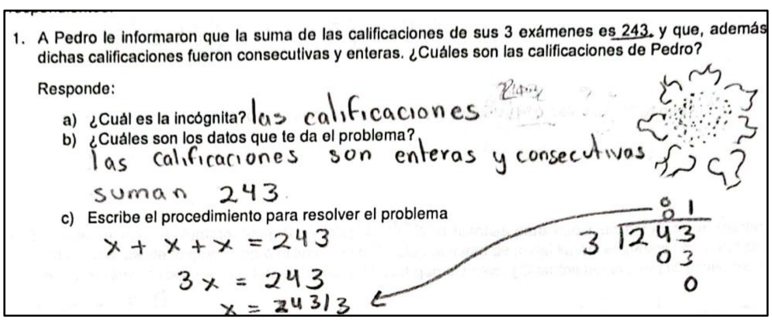
$x + x + x + x = 48$
$4x = 48$
$x = \frac{48}{4} = 12$

Nota: Elaboración propia

En cuanto al estudiante E9, durante la aplicación del cuestionario, solicitó apoyo para resolver los problemas, posteriormente logró resolver tres problemas y planteó las ecuaciones correspondientes a los problemas. En dos problemas logró evidenciar la Acción de multiplicar por el inverso multiplicativo como se puede observar en las Figuras 35 y 36.

Figura 35

Acción de multiplicar por el inverso multiplicativo de 3 del estudiante E9



1. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro?
Responde:
a) ¿Cuál es la incógnita? las calificaciones
b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?
las calificaciones son enteras y consecutivas
suman 243.
c) Escribe el procedimiento para resolver el problema

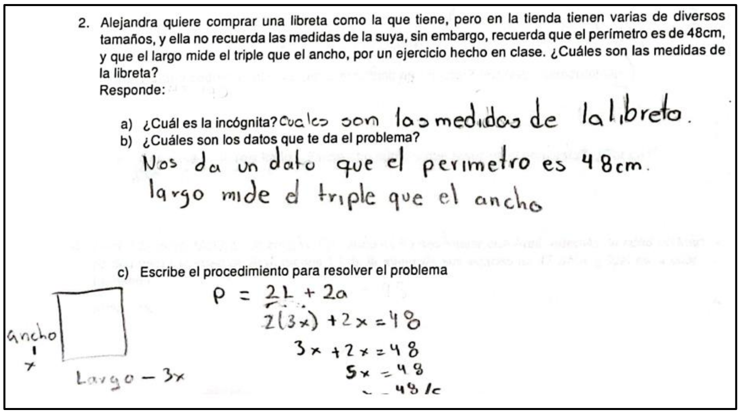
$x + x + x = 243$
$3x = 243$
$x = 243/3$

En la Figura 35, se observa que el estudiante E9 planteó la ecuación $x + x + x = 243$ para el problema 1, y realiza la Acción de dividir entre 3.

Nota: Elaboración propia

Figura 36

Acción de multiplicar por el inverso multiplicativo de 5 del estudiante E9



2. Alejandra quiere comprar una libreta como la que tiene, pero en la tienda tienen varias de diversos tamaños, y ella no recuerda las medidas de la suya, sin embargo, recuerda que el perímetro es de 48cm, y que el largo mide el triple que el ancho, por un ejercicio hecho en clase. ¿Cuáles son las medidas de la libreta?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? Cuales son los medidas de la libreta.

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?

Nos da un dato que el perimetro es 48cm.

largo mide el triple que el ancho

c) Escribe el procedimiento para resolver el problema

ancho x

Largo – 3x

$P = 2L + 2a$

$2(3x) + 2x = 48$

$3x + 2x = 48$

$5x = 48$

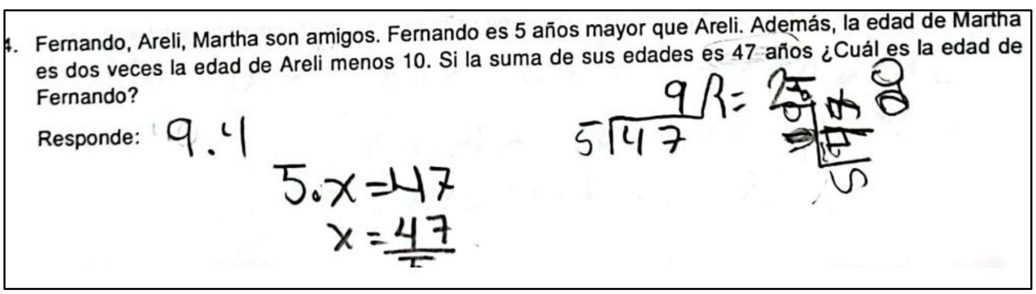
En la Figura 46, se observa que el estudiante E9 planteó la ecuación $2(3x) + 2x = 48$, para el problema 2, y no muestra evidencia del Esquema de expresiones algebraicas, pues no resuelve de manera correcta $2(3x) + 2x$, pero sí realiza la Acción de dividir entre 5.

Nota: Elaboración propia

Por último, el estudiante E3 contestó los cinco ejercicios, sin embargo, solamente planteó ecuaciones en dos de ellos como se observa en la Figura 37, donde para el problema 4 planteó la ecuación $5x = 47$, y realizó la Acción de dividir entre 5.

Figura 37

Acción multiplicar por el inverso multiplicativo de 5 del estudiante E3



4. Fernando, Areli, Martha son amigos. Fernando es 5 años mayor que Areli. Además, la edad de Martha es dos veces la edad de Areli menos 10. Si la suma de sus edades es 47 años ¿Cuál es la edad de Fernando?

Responde: 9.4

$5 \cdot x = 47$

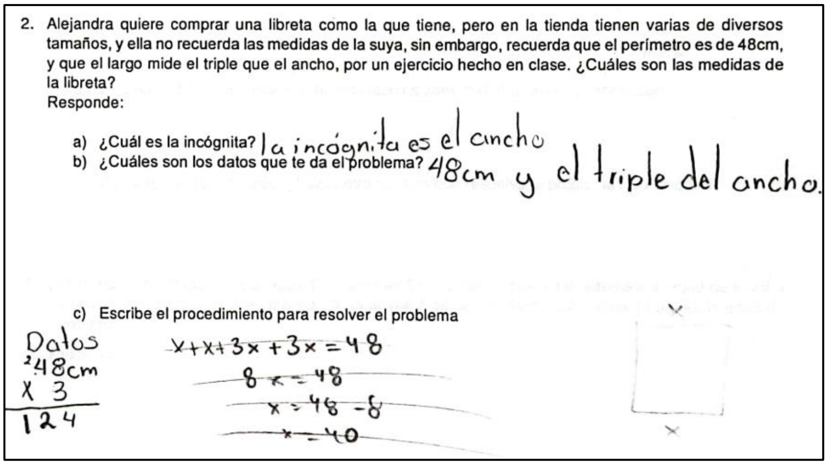
$x = \frac{47}{5}$

Nota: Elaboración propia

Por otro lado, los estudiantes E13 y E16 plantearon ecuaciones en alguno de los problemas que resolvieron como se muestra en las Figuras 38 y 39.

Figura 38

Ecuación del estudiante E13

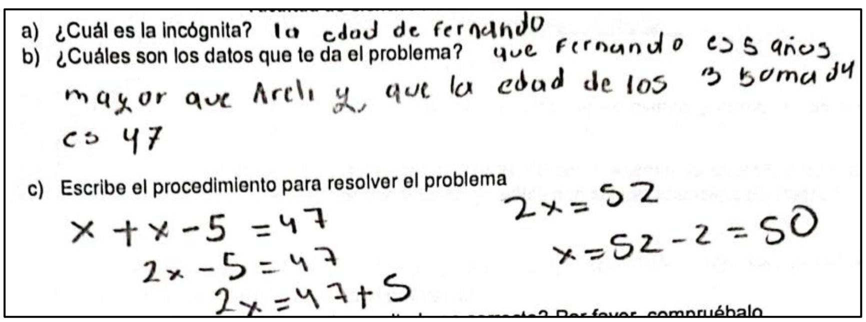

2. Alejandra quiere comprar una libreta como la que tiene, pero en la tienda tienen varias de diversos tamaños, y ella no recuerda las medidas de la suya, sin embargo, recuerda que el perímetro es de 48cm, y que el largo mide el triple que el ancho, por un ejercicio hecho en clase. ¿Cuáles son las medidas de la libreta?
Responde:
a) ¿Cuál es la incógnita? la incógnita es el ancho
b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema? 48cm y el triple del ancho.
c) Escribe el procedimiento para resolver el problema
Datos
48cm
x 3
124
x+x+3x+3x=48
8x=48
x=48-8
x=40

En el problema 2, la estudiante E13 planteó la ecuación $x + x + 3x + 3x = 48$ y no multiplica el inverso multiplicativo de 8.

Nota: Elaboración propia

Figura 39

Ecuación del estudiante E16


a) ¿Cuál es la incógnita? la edad de fernando
b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema? que Fernando es 5 años mayor que Areli y, que la edad de los 3 sumada es 47
c) Escribe el procedimiento para resolver el problema
x+x-5 =47
2x-5=47
2x=47+5
2x=52
x=52-2=50

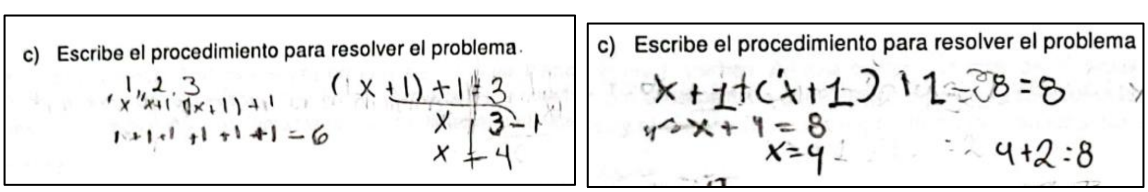
En el problema 4, la estudiante E16 plantea la ecuación $x + x - 5 = 47$ y comienza realizando la Acción de sumar el inverso aditivo de 5 pero no la de dividir entre 2.

Nota: Elaboración propia

De manera similar, los estudiantes E12 y E16, realizaron la sustitución de x por 1, como se muestra en la Figura 40.

Figura 40

Evidencia de ecuaciones de los estudiantes E12 y E16 en problema 1

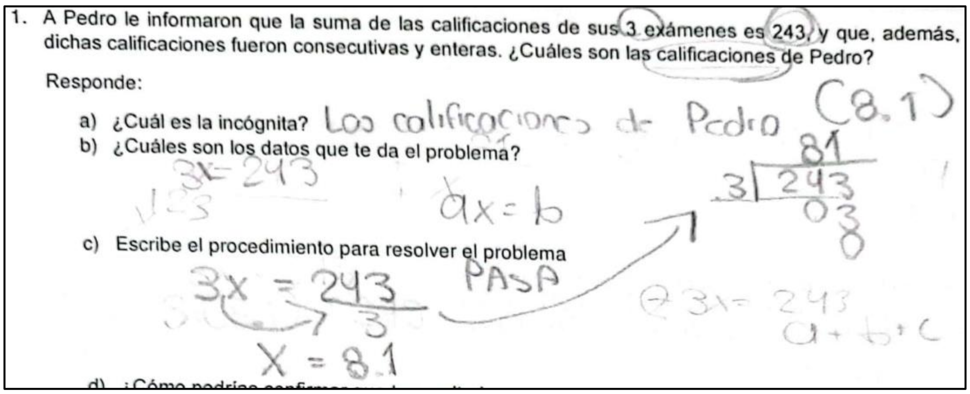

c) Escribe el procedimiento para resolver el problema
c) Escribe el procedimiento para resolver el problema

Nota: Elaboración propia

Por último, en la sección anterior se mencionó que el estudiante E6 planteo ecuaciones para todos los problemas, que, aunque no son las que corresponden, las resolvió de manera correcta, sin embargo, en escritura presenta un problema que, como se muestra en la Figura 41, realiza en un mismo paso el “despeje”.

Figura 41

Respuesta a problema 1 del estudiante E6


1. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además, dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? Los calificaciones de Pedro (8.1)

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?

3x = 243

ax = b

c) Escribe el procedimiento para resolver el problema

$3x = \frac{243}{3}$ PASA

X = 8.1

Nota: Elaboración propia

Por lo tanto, los estudiantes E6 y E11 mostraron evidencia de la Acción de sumar o multiplicar inversos aditivos o multiplicativos.

En la tabla 11 se presenta un resumen de los resultados obtenidos.

Tabla 11

Resumen de la sección 5.2.5

Acción sumar inversos aditivos			Multiplicar inversos multiplicativos	
Mostró la Acción	No mostró la Acción	No se tiene información	Mostró la Acción	No mostró la Acción
E6, E11	E12	E3, E9, E10, E13, E17	E3, E6, E9, E10, E11, E17	E12, E13, E16

5.2.6 Estructura Proceso solución en el registro algebraico

Tomando en cuenta el análisis anterior, se concluye que los estudiantes E6, E11 mostraron evidencia del Proceso solución de la ecuación de primer grado en el registro algebraico, lo cual se muestra en las Figuras 32 y 41.

A continuación, se muestra evidencia de la Acción que se planteó en la DGP, que permitirán ver si los estudiantes han construido el Objeto "Solución de una ecuación de primer grado".

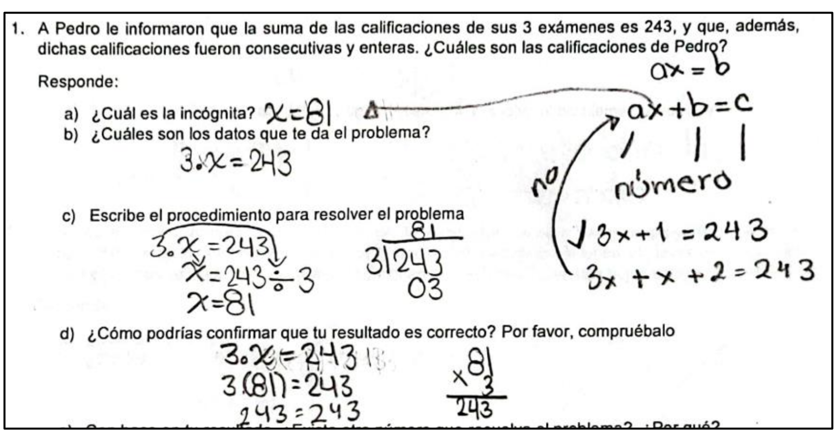
5.2.7 Estructura Acción de sustituir el valor de la x para verificar que se cumple la igualdad

Solamente los estudiantes E3, E6, E9 y E17 mostraron la Acción como se muestra en las Figuras 42 y 43.

En el problema 1, los estudiantes E6, E9, E17, plantearon la ecuación $3x = 243$, de donde obtuvieron que $x = 81$, y para responder la pregunta d), realizaron la Acción de sustituir 81 en la ecuación, teniendo como resultado que $243 = 243$, por lo tanto, confirmaron que su resultado era correcto, ver Figura 42.

Figura 42

Evidencia de Acción de sustituir el valor de x para verificar la igualdad de E17, E6, E9 respectivamente


1. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además, dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? $x=81$

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?

$3 \cdot x = 243$

c) Escribe el procedimiento para resolver el problema

$3 \cdot x = 243$

$x = 243 \div 3$

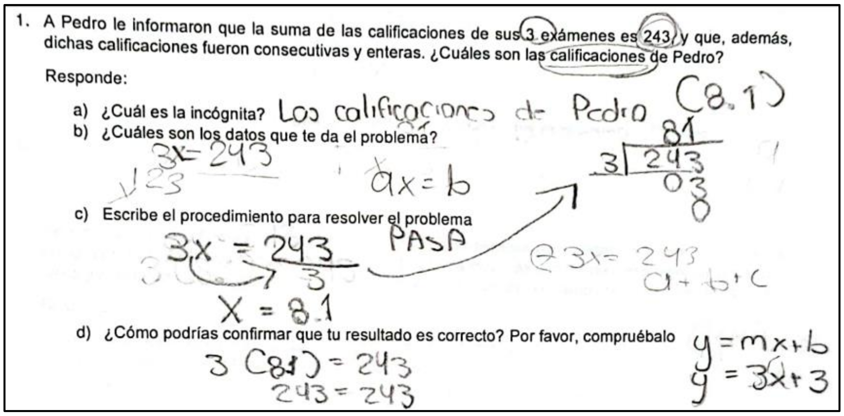
$x = 81$

d) ¿Cómo podrías confirmar que tu resultado es correcto? Por favor, compruébalo

$3 \cdot x = 243$

$3(81) = 243$

$243 = 243$



1. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además, dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? Los calificaciones de Pedro (8.1)

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?

3x = 243 ax = b

c) Escribe el procedimiento para resolver el problema

$3x = \frac{243}{3}$ PASA

$x = 8.1$

3x = 243 a + b + c

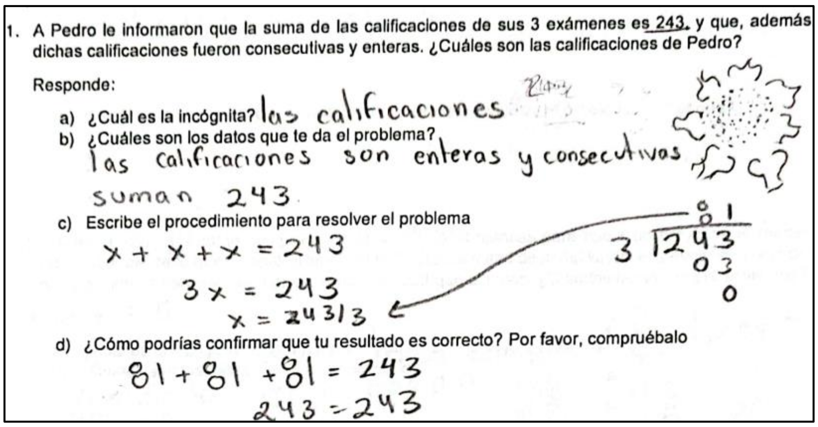
d) ¿Cómo podrías confirmar que tu resultado es correcto? Por favor, compruébalo

3 (81) = 243

243 = 243

y = mx + b

y = 3x + 3



1. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? las calificaciones

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema? las calificaciones son enteras y consecutivas suman 243.

c) Escribe el procedimiento para resolver el problema

x + x + x = 243

3x = 243

x = 243/3

d) ¿Cómo podrías confirmar que tu resultado es correcto? Por favor, compruébalo

81 + 81 + 81 = 243

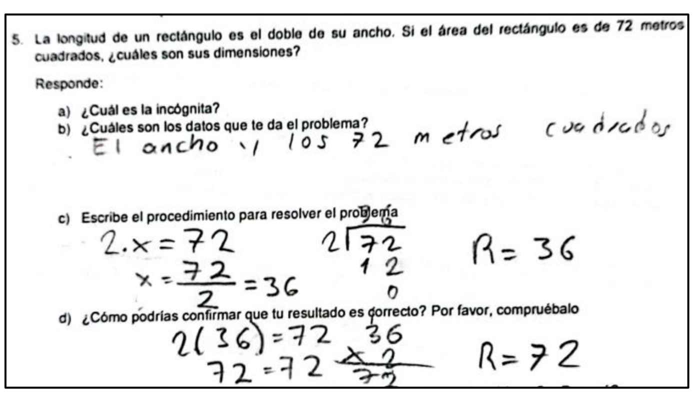
243 = 243

Nota: Elaboración propia

El estudiante E3 realizó el mismo procedimiento, pero en el problema 5 como se muestra en la Figura 43, él escribió $2x = 72$.

Figura 43

Evidencia de Acción de sustituir el valor de x para verificar la igualdad del estudiante E3



5. La longitud de un rectángulo es el doble de su ancho. Si el área del rectángulo es de 72 metros cuadrados, ¿cuáles son sus dimensiones?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita?

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema? El ancho y los 72 metros cuadrados

c) Escribe el procedimiento para resolver el problema

2.x = 72

$x = \frac{72}{2} = 36$

R = 36

d) ¿Cómo podrías confirmar que tu resultado es correcto? Por favor, compruébalo

2(36) = 72

72 = 72

R = 72

Nota: Elaboración propia

Sin embargo, los demás estudiantes no mostraron la Acción ya que no respondieron al inciso d).

De todo lo anterior se sigue que, solamente los estudiantes E3 y E17 mostraron evidencia del Objeto "Solución de una ecuación de primer grado".

5.3 Análisis de las entrevistas

Se realizaron entrevistas a 4 estudiantes (E2, E6, E18, E19) seleccionados por el docente al día siguiente de la aplicación de los exámenes, dichas entrevistas duraron entre 20 y 30 minutos, las cuales fueron grabadas con audio.

Antes de comenzar a realizar las preguntas referentes a los ejercicios resueltos por cada estudiante, debido a que la mayoría no plantearon ecuaciones para resolver los problemas, ni responder el inciso a), se decidió comenzar preguntándoles qué entendían por ecuación y por incógnita, de donde se obtuvieron las siguientes respuestas.

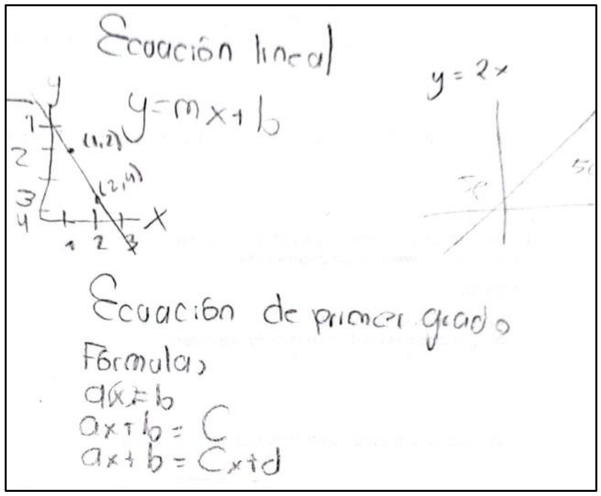
En cuanto a la pregunta ¿qué entiendes por ecuación?, se obtuvieron las siguientes respuestas:

En primer lugar, el estudiante E6, respondió lo siguiente:

> E6: Una ecuación, depende, porque hay dos tipos, una ecuación lineal y una ecuación de primer grado, la ecuación de primer grado es una igualdad, mientras que la otra ecuación lineal es una gráfica, está representada con una gráfica.
> E: Ah, ok, y podrías dibujar, bueno escribir o marcarme un ejemplo de las diferencias que ahorita mencionaste de ecuación.
> E6: ¿De ecuación?, una ecuación lineal ocupa (dibujo).
> E: Entonces, si, por ejemplo, yo te doy $y = 2x$ y te la dibujo, ¿son diferentes?
> E6: Sí.
> E: ¿Por qué son diferentes?
> E6: Mm, no recuerdo muy bien el nombre, pero, aunque esta es una ecuación lineal, este tiene otro nombre, digamos que, hay como dos tipos, uno que he entendido en la clase y el otro, supongamos, no me sé el nombre, pero si aquí hay 50, pero hay diferentes formas, todas tienen un nombre.

Figura 44

Definición de ecuación por el estudiante E6



Nota: Elaboración propia

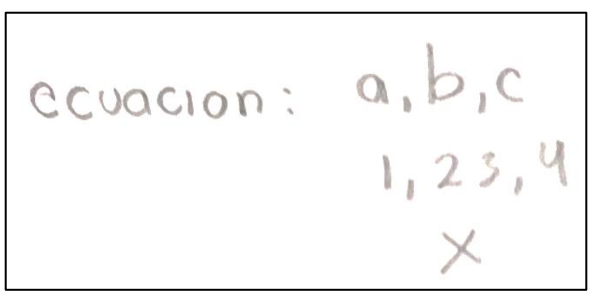
En conclusión, para esta estudiante, ambas son ecuaciones diferentes, sin embargo, si es posible obtener una de la otra, lo que significa que ha construido el Proceso "ecuación de primer grado", pues reconoce que una ecuación es una igualdad entre dos miembros.

En cuanto al estudiante E19 se obtuvo la siguiente información:

> E19: Es, una ecuación es donde hay letras, números, y vamos resolviendo, despejando y encuentras una incógnita.

Figura 45

Definición de ecuación de estudiante E19



Nota: Elaboración propia

Esto indica que el estudiante identificó los elementos que tiene una ecuación, aunque omitió la igualdad, y dio una breve explicación del procedimiento para resolverla, lo que significa que no ha construido el Proceso "ecuación de primer grado".

Por otro lado, el estudiante E2 respondió:

E2: Una ecuación, mm, una forma de resolver un problema, o, no, no sé.

Este estudiante sabe la utilidad de la ecuación, pero no planteó ninguna para la resolución de los problemas, lo que significa que no ha construido el Proceso “ecuación de primer grado”.

Por último, el estudiante E18 identificó la ecuación como una operación y no como una relación de igualdad, sin embargo, identificó sus partes, como se puede observar a continuación:

E18: Em, una ecuación es este, como una operación con símbolos, em, incógnitas, con x.

Lo que significa que no ha construido el Proceso “ecuación de primer grado”.

En lo que respecta a la pregunta, ¿qué entiendes por incógnita?, se obtuvieron las siguientes respuestas:

La estudiante E6 respondió: “una incógnita es la variable que se busca encontrar”, lo que indica que muestra la Acción incógnita.

De manera similar, el estudiante E19, entiende por incógnita un valor desconocido asociado a un número, como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista, por lo que, también muestra la Acción incógnita.

E19: Una incógnita es un número que, un número o una letra que estoy buscando en una ecuación.

E: ¿Un valor cualquiera, podríamos decirlo?

E19: Sí.

Por otro lado, el estudiante E2, entiende por incógnita el número que te da el problema, un ejemplo de esto se ve en la Figura 50 y en el siguiente fragmento de entrevista.

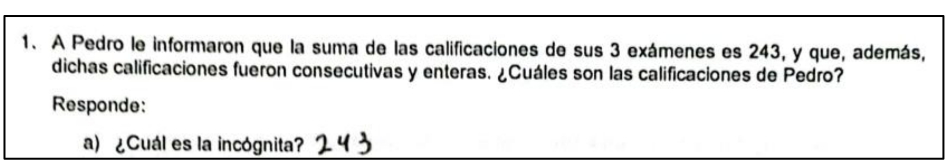
E2: Que el número que más resalta o en un problema.

E: Em, ¿Qué significa que el número que más resalta?

E2: O sea pues, el dato más importante que te dan, o el resultado.

Figura 46

Definición de incógnita de estudiante E2



1. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además, dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? 243

Nota: Elaboración propia

Esto muestra que el estudiante no ha construido la Acción incógnita.

Por último, el estudiante E18, en las respuestas del examen solamente contestó dos preguntas, y en ambas determinó de manera correcta quien es la incógnita, pues es un valor desconocido, lo cual está en estrecha relación con su respuesta.

> E18: Pues es como un, como una x pero que no se sabe, sí, en el problema se quiere saber cuánto vale la incógnita.

Así, mostró la Acción incógnita.

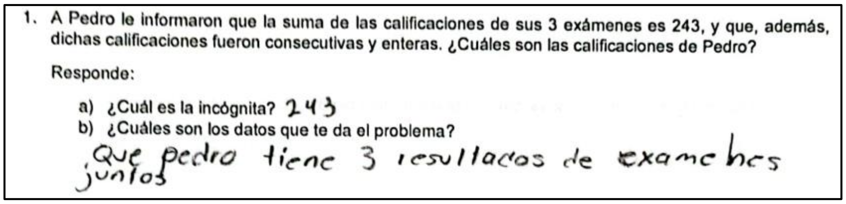
5.3.1 Estructura Acción identificar los datos del problema y Acción identificar la incógnita del problema

El estudiante E2 mostró evidencia de estas dos Acciones; como se observa en la Figura 47, no respondió de manera completa la pregunta al inciso b), al preguntarle sobre su respuesta se muestra que sí identifica toda la información que le proporciona el problema como se ve en el siguiente fragmento de entrevista.

> E: Ok, las que compró el viernes, ¿no?
>
> E2: Bueno yo supuse que era saber todos los resultados, cuántas hojas compró cada día y después sumarlos, bueno yo le entendí que en toda la semana cuántas compró.
>
> E: Ajá, si, aquí por ejemplo te dice que compró un total de 38 hojas, eso, ¿cómo lo relacionas con respecto a toda la, pues todo lo que te dice después de lo que fue comprando?
>
> E2: Pues es uno de los datos más importantes, porque el martes dice que compró la mitad, ajá ah no, lo doble, sería 76, o sea esto es lo más importante de todo el problema, porque si no tuviéramos esto sería más complicado resolverlo.
>
> E: Mm, pero si te darías una idea si no lo tuvieras.
>
> E2: No creo, bueno.
>
> E: Mm, bueno acá pones que el lunes compró 38.
>
> E2: Sí, 38, el martes lo doble que sería 76, el miércoles creo que dijo la mitad, ajá, que serían 19 el jueves ahí si no sabía cómo hacerle, le dividí y me dio 4 y el viernes 175.

Figura 47

Evidencia Acciones del estudiante E2


1. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además, dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? 243

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?

Que pedro tiene 3 resultados de examenes juntos

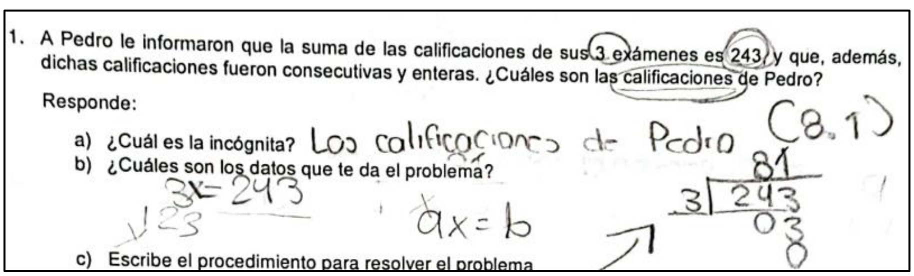
Nota: Elaboración propia

De igual forma, el estudiante E6 mostró evidencia de estas Acciones como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista y en la Figura 48.

> E: Ajá, ok, va, entonces ahora sí, después de eso, vamos a pasar a lo de tus preguntas, este, aquí entiendo por, bueno, cuáles son los datos que te da el problema, pones $3x = 243$.
> E6: Porque aquí, dice que los exámenes eran equivalentes, entonces dice que buscamos las calificaciones de Pedro, le puse que es igual pues la suma de estos los exámenes, fueron de 243, por eso lo puse.

Figura 48

Evidencia de Acción identificar condiciones y variables del estudiante E6


1. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además, dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? Los calificaciones de Pedro (8.1)

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?

3x=243 ax=b 81 3|243 03 0

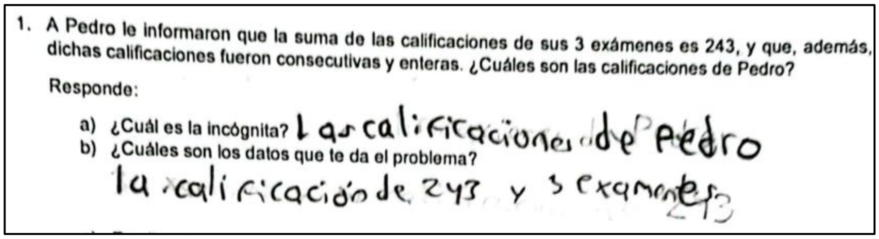
c) Escribe el procedimiento para resolver el problema

Nota: Elaboración propia

Sin embargo, el estudiante E18 muestra evidencia de la Acción identificar la incógnita, pero no mostró evidencia de la Acción identificar los datos del problema, pues, aunque identificó que la suma de las calificaciones es 243 y son 3 exámenes, omitió el hecho de que las calificaciones son enteras y consecutivas, ver Figura 49.

Figura 49

Evidencia Proceso de incógnita del estudiante E18



1. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además, dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? Las calificaciones de Pedro

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema?

la calificación de 243 y 3 examenes

Nota: Elaboración propia

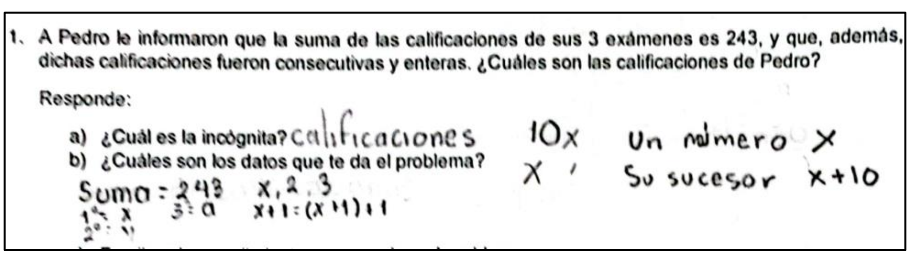
Lo mismo sucedió con el estudiante E19, como se muestra en la Figura 50 y en el siguiente fragmento de entrevista.

Por otro lado, el estudiante E19 no muestra evidencia de las Acciones en cuestión pues no las identificó en el examen y en la entrevista argumentó lo siguiente:

> E: Ok, entonces ahora sí, vamos a pasar con las respuestas de tu examen va, ok, a ver, por ejemplo, aquí no respondiste, ¿cuál es la incógnita?, para ti, ¿cuál sería?
>
> E19: Es que intenté, intenté resolverlo, pero se me hizo algo complicado.
>
> E: ¿Qué se te complicó?
>
> E19: Eh, los problemas.
>
> E: ¿La comprensión del problema?
>
> E19: Ajá, la comprensión del problema, porque en si las ecuaciones si las entiendo, pero el problema no, no.

Figura 50

Evidencia respuestas del estudiante E19



1. A Pedro le informaron que la suma de las calificaciones de sus 3 exámenes es 243, y que, además, dichas calificaciones fueron consecutivas y enteras. ¿Cuáles son las calificaciones de Pedro?

Responde:

a) ¿Cuál es la incógnita? calificaciones 10x Un número x

b) ¿Cuáles son los datos que te da el problema? x Su sucesor x+10

Suma = 243 x, 2, 3

Nota: Elaboración propia

En general, solamente los estudiantes E2 y E6 mostraron evidencia de la Acción identificar los datos del problema y la Acción identificar la incógnita del problema.

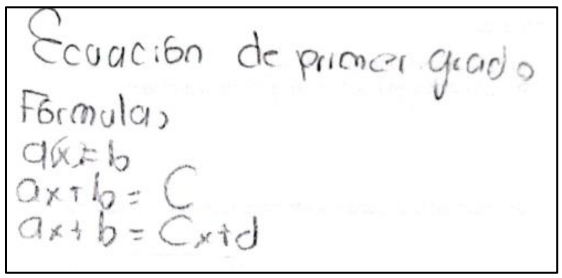
Por lo tanto, debido a que ninguno de los alumnos plantearon las ecuaciones correspondientes a cada problema, no se tiene evidencias de la Acción relacionar las condiciones e incógnita de problema, además, tampoco mostraron evidencia del Proceso modelar un problema con una ecuación lineal.

5.3.2 Estructura Objeto ecuación de primer grado

El estudiante E6 identificó las ecuaciones por medio de las “fórmulas de cada una de ellas” como se observa en la Figura 51.

Figura 51

Tipos de ecuaciones según el estudiante E6



Nota: Elaboración propia

En general, solo el estudiante E6 evidenció el Objeto “ecuación de primer grado”, pues reconoce cuando una ecuación es de primer grado o no, identificó de manera correcta los datos y la incógnita del problema.

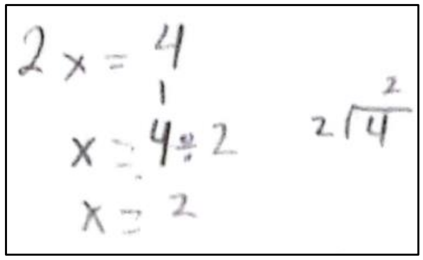
Sin embargo, aún falta analizar las respuestas correspondientes a las Acciones a realizar sobre el Objeto ecuación de primer grado.

5.3.3 Estructura Acción sumar o multiplicar inversos aditivos o multiplicativos

El estudiante E2 no mostró evidencia de la Acción, pues, aunque hay ecuaciones como la que se muestra en la Figura 52 las cuales puede resolver de manera correcta, presentó dificultades con ecuaciones que involucraron el signo $(-)$, ver Figura 53. A continuación, se presenta un fragmento de la entrevista que completa la información.

Figura 52

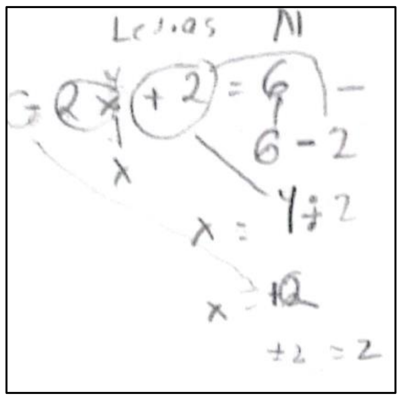
Ecuación resuelta por el estudiante E2



Nota: Elaboración propia

Figura 53

Evidencia de error del estudiante E2



Nota: Elaboración propia

E2: $-2x$, primero bajamos los que están en su lugar que sería x, y luego voy con suma, si está sumando pasa al otro lado negativo, pasa restando, sería -2 sería 4, sigue bajando x, ahora tenemos -2, ay creo que sería, ay mm, se pasaría sumando el -2 sería igual a 6, no, no es 6, debe de ser, 4, serían 4, rayos, ay, a ya, a ver, sería entre dos, pero no, no podría, no, no sé, el resultado sería acá 4, pero no, no sé cómo hacerlo.

E: ¿Por qué sabes que es 4?

E2: Por que eh, puedo multiplicar 4 por 2, 4 por 2, a no, entonces sería 2, serían 2 porque dos por 2 serían 4 más dos 6 y el resultado es 6, sería pasa más dos, mm, haber, la comprobación sería $2x$ más 2 más, no igual a 6, este se pasa 2 igual a, sería $2 + 2 = 6$, acá se multiplica sería 4 más dos, pues según yo sí.

E: Ok, mm, ¿porque hubo problemas cuando aquí era un y aquí un menos dos?

E2: Menos dos.

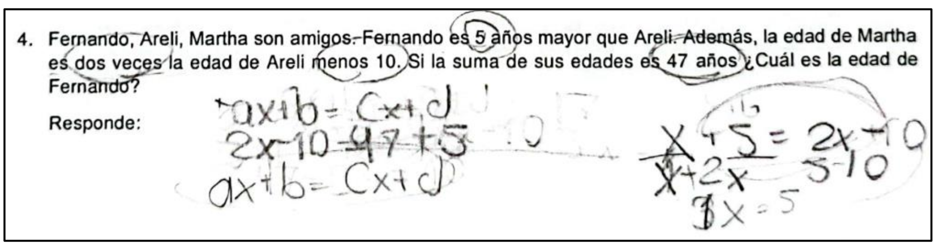
E: ¿Cómo te enseñaron esa parte del despeje?

E2: Del despeje, pues, primero me enseñaron que tenía que despejar las que estaban en su lugar, porque acá van letras y acá van números, y me enseñaron que primero tengo que bajar los que están en su lugar como sería el 6, porque es un número y x esos tenemos que ponerlo en su lugar, sería todo esto, pasaría hacia acá, sería restando, este es, como está multiplicando, se puede decir que multiplicando, pasa dividiendo, y este como está restando pasa sumando y como ya pues ya acabó sería dos la respuesta, el positivo, como es positivo así se deja sería dos.

Para el problema 4, el estudiante E6 planteó la ecuación $x + 5 = 2x - 10$, y realizó la transposición del 5 y 2 x de manera incorrecta como se observa en la Figura 54, por lo tanto, no mostró la Acción en cuestión.

Figura 54

Ecuación planteada por el estudiante E6 para problema 4


4. Fernando, Areli, Martha son amigos. Fernando es 5 años mayor que Areli. Además, la edad de Martha es dos veces la edad de Areli menos 10. Si la suma de sus edades es 47 años ¿Cuál es la edad de Fernando?

Responde:

Nota: Elaboración propia

Por último, los estudiantes E18 y E19, prefirieron resolver los problemas por medio del tanteo, por lo cual no mostraron evidencia de la Acción.

En la tabla 12 se muestra un resumen de lo observado en esta sección.

Tabla 12

Resumen de sección 5.3.3

Acción sumar o multiplicar inversos aditivos o multiplicativos	
Estudiante	Análisis
E2	No mostró la Acción porque presentó dificultades para resolver ecuaciones del tipo: $-ax + b = c$
E6	No mostró la Acción porque no realiza el “despeje” de manera correcta.

E18 y E19	Resolvieron los problemas por medio de tanteo.

Nota: Elaboración propia

En conclusión, ninguno de los estudiantes mostró la Acción de sumar o multiplicar inversos aditivos o multiplicativos.

Por otro lado, tomando en cuenta el análisis anterior, ninguno de los estudiantes evidenció la estructura Proceso solución en el registro algebraico.

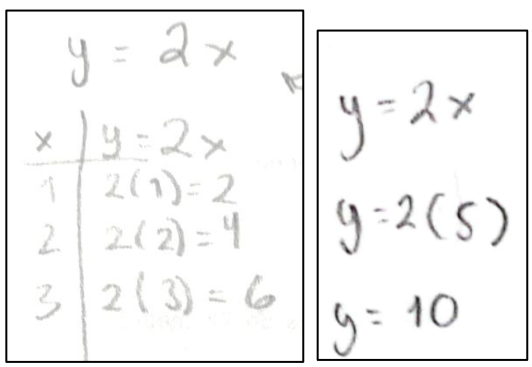
A continuación, se pasa al análisis de las Acciones correspondientes al Proceso solución de una ecuación de primer grado en el registro geométrico.

5.3.4 Estructura Acción sustituir valores específicos para x para obtener pares ordenados

Solamente los estudiantes E6 y E19 mostraron evidencia de la Acción, ya que durante la entrevista se les planteó $y = 2x$ y realizaron la evaluación de valores específicos de "x" para obtener el resultado de "y" como se muestra en la Figura 55.

Figura 55

Evidencia de Acción de los estudiantes E6 y E19 respectivamente



Nota: Elaboración propia

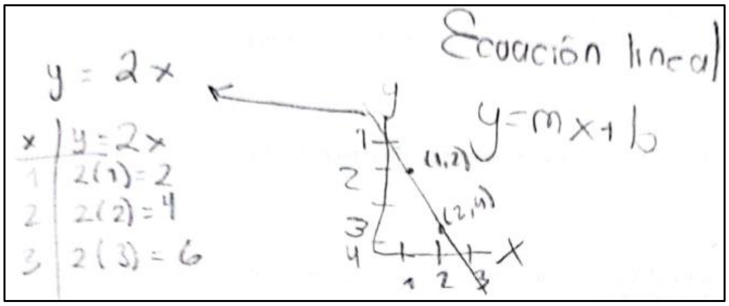
5.3.5 Estructura Acción graficar y unir los pares ordenados

Los estudiantes E2 y E18 argumentaron no saber cómo graficar pares ordenados, por consiguiente no mostraron evidencia de la Acción graficar pares ordenados.

Por otro lado, el estudiante E6 realizó la Acción de sustituir valores específicos para x para obtener pares ordenados, como se muestra en la Figura 56, pero no ubicó de manera correcta los pares ordenados, por lo tanto, no se concluyó que no mostró la Acción graficar pares ordenados.

Figura 56

Evidencia de error en el Proceso de E6



Nota: Elaboración propia

En cuanto al estudiante E19, realizó la Acción de darle un valor a "x" para obtener "y", sin embargo, identificó de manera opuesta los ejes coordenados como se muestra en la Figura 57 y en el siguiente fragmento de entrevista.

> E19: Supongo yo que a la x le tengo que encontrar algún valor, pero, lo que no sé es si ese es el valor de x, o solamente, porque yo conocía ecuaciones donde ósea le ponían entre paréntesis ponían el número y ese lo multiplicaban, por ejemplo, 2 por cuatro y eso lo ubicaba en el plano cartesiano.
>
> E: Ah, ok, tú le asignabas un valor.
>
> E19: Ajá.
>
> E: Sí, asígnale varios valores.
>
> E19: Cualquiera que yo quiera.
>
> E: Cualquiera que tú quieras.
>
> E19: Y cuando hago el plano cartesiano, hago primero el plano y el 10 lo ubico, pero, mm, y eso es "y", y acá tengo que encontrar el 10 y aquí x y hasta acá estaría acá estaría, am, el 10.
>
> E: el 10 y bueno que otro punto, que coordenada le asignarías al x.

E19: ¿A la x?, mm, o sea que número le asignaría a la x, mm, 5, mm, ahora tengo que juntar este con este, para hacer.

E: Ok, ¿Cómo los juntarías?

E19: Uniéndolo así.

E: A ver únelos.

E19: Me voy a ir chueco.

E: No importa.

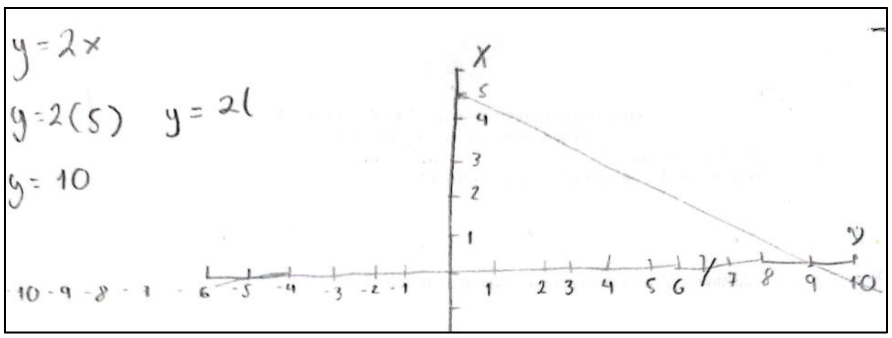
E19: Así.

E: Y entonces esa sería la recta $y = 2x$.

E19: Sí.

Figura 57

Evidencia de error en el Proceso de E19



Nota: Elaboración propia

En la tabla 13 se muestra un resumen de la sección.

Tabla 13

Resumen sección 5.3.5

Acción graficar los pares ordenados	
Estudiantes	Análisis
E2, E18	No mostraron evidencias de la Acción.
E6, E19	Mostró la Acción "Sustituir valores específicos para x para obtener pares ordenados", sin embargo, no evidenció la Acción "graficar pares ordenados", ya que no ubicó de manera correcta los puntos.

Nota: Elaboración propia

En conclusión, ninguno de los estudiantes mostró evidencia de la Acción graficar los pares ordenados.

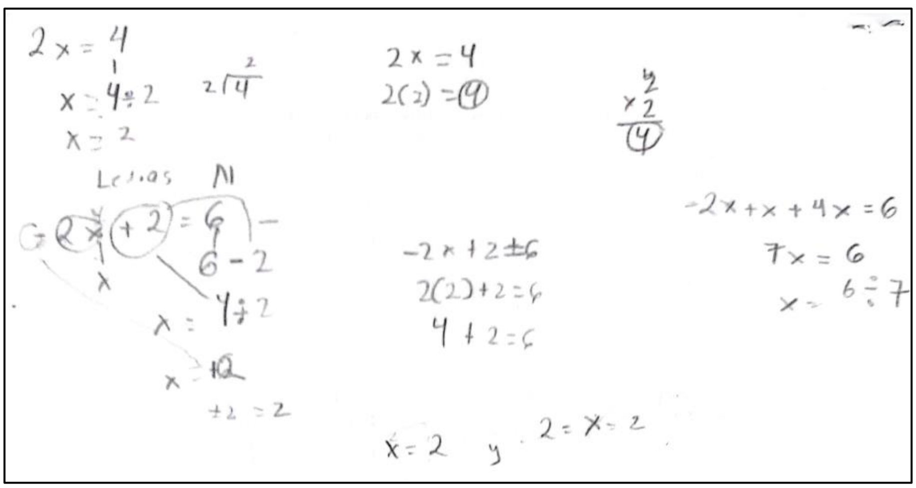
Por último, se presenta evidencia de la Acción que se planteó en la DGP, que permite ver si los estudiantes construyeron el Objeto “Solución de una ecuación de primer grado”.

5.3.6 Estructura Acción sustituir el valor de la x para verificar que se cumple la igualdad

Como ya se mencionó anteriormente, el estudiante E2 mostró evidencia de la Acción, a continuación, se presenta la evidencia con respecto a las ecuaciones que se le plantearon durante la entrevista (ver Figura 58) y un fragmento de la entrevista.

Figura 58

Evidencia Acción de sustituir el valor de x para verificar la igualdad de E2



Nota: Elaboración propia

E: ¿Cuál era el proceso?

E2: Es eh, se ocupaba, ecuaciones de primer grado ¿no?

E: Sí.

E2: Es eh, si primero se ocupaba las sumas y después iban si, sumas o restas o multiplicación y división, de un lado tenemos, se puede decir que positivo y en el otro negativo, si acá esta, si este número está sumando pasa restando, si este número está multiplicando pasa dividiendo, o sea es lo contrario.

Por otro lado, ya se ha comentado que la estudiante E6 mostró la Acción, sin embargo, para complementar lo dicho, se muestra el siguiente fragmento de la entrevista.

> E: Ok, y ¿cómo te enseñaron a resolver una ecuación de primer grado?
>
> E6: Mm, por ejemplo, en las ecuaciones lineales, una vez que obtenías el resultado, aquí se ponía la incógnita para comprobarlo.
>
> E: Ah, ok.
>
> E6: Entonces, y si el resultado salía el mismo que salía en la ecuación, entonces tu resultado era correcto.

La estudiante hizo mención de que las ecuaciones tienen fórmulas y que con ellas uno puede obtener el valor de x, es decir, el despeje es el mismo dependiendo de la forma de la ecuación, y como se nota en lo anterior, tiene claro en qué momento puede comprobar si su resultado es correcto.

En conclusión, respecto a las entrevistas realizadas, ninguno de los estudiantes mostró evidencia del Objeto “Solución de una ecuación de primer grado”.

Conclusiones

En este trabajo se analizaron las respuestas de un cuestionario que se diseñó para evaluar las estructuras mentales que los estudiantes utilizan para resolver problemas que involucran a una ecuación de primer grado. Dichas construcciones fueron evidenciadas a través de sus respuestas y las entrevistas realizadas.

Es importante destacar que, aunque el cuestionario se aplicó a estudiantes que ya habían visto el tema de ecuaciones de primer grado, se identificaron diversas dificultades, principalmente en el Proceso de modelación, pues como se hizo notar en el análisis de los datos, algunos estudiantes identificaron de manera correcta la incógnita y los datos del problema, pero no lograron relacionar de manera correcta la incógnita con los datos, esto debido a que no han construido el Proceso de plantear situaciones de lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa. Además, se identificaron varios estudiantes que prefirieron usar métodos como el tanteo para resolver los problemas en lugar de plantear ecuaciones. Otro de los inconvenientes detectados estaba relacionado con los prerrequisitos, pues había estudiantes que planteaban ecuaciones y realizaban correctamente los procedimientos para resolverlas, pero cometían errores en las operaciones aritméticas, lo que significa que no mostraron evidencia del Esquema de expresiones algebraicas. De esto se sigue que, los estudiantes no han construido las estructuras propuestas como prerrequisitos para abordar el tema de ecuaciones de primer grado.

Por otro lado, es importante destacar que, aunque los estudiantes no plantearon las ecuaciones propias para cada problema, lograron resolver correctamente las ecuaciones de la forma "$ax = b$" que propusieron. Sin embargo, esto limitó el análisis, pues como se observó en las entrevistas, al plantearles ecuaciones donde se involucraba al signo (-), o se requería simplificar un lado de la ecuación, mostraban dificultades asociadas a que no habían construido el Esquema de expresiones algebraicas.

Los resultados que se obtuvieron, evidencian que los estudiantes no han estado expuestos a situaciones donde deban modelar utilizando ecuaciones de primer grado, lo cual destaca la necesidad de implementar técnicas que permitan a los estudiantes trabajar con modelación, esto se podría lograr implementando ejercicios de práctica como traducir problemas verbales a situaciones algebraicas, como lo propone el plan de estudios de la SEP.

Recordando el objetivo general de la tesis, que fue proponer y validar una DGP sobre el concepto solución de una ecuación de primer grado, como resultado se obtuvo que:

Para la parte del Objeto ecuación de primer grado, se encontró que la mayoría de los estudiantes realizaron las Acciones sobre él propuestas en la DGP las cuales fueron diferenciar entre una ecuación de primer grado y una que no lo es, verificar que el exponente de la variable es 1, e identificar quien es la incógnita y los términos independientes.

Pensando en el Proceso solución de la ecuación de primer grado en el registro algebraico, solamente 3 estudiantes mostraron evidencia de este Proceso.

Además, en cuanto al Proceso solución de la ecuación de primer grado en el registro geométrico, según el análisis, hace falta información para poder concluir.

Por último, recordemos que la DGP ofrece una visión detallada de como creemos que un estudiante construye el concepto “solución de una ecuación de primer grado”, por lo cual es necesario que los métodos de enseñanza se adapten para abordar las dificultades encontradas (uso inadecuado de la variable, uso del signo $(-)$ o la transcripción de textos pequeños), esto se podría lograr implementando alguna de las propuestas didácticas que se revisaron en el capítulo 2, como el método de la balanza donde los estudiantes construirán el Proceso de igualdad y los Objetos ecuación de primer grado y solución de una ecuación de primer grado.

De este modo, en futuras investigaciones, se podrían utilizar estos datos como guía para diseñar y aplicar una secuencia didáctica, en la que se incluyan problemas contextualizados.

6 Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-7966-6

Azañero Távara, L. M. (2013). *Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales* [Tesis de licenciatura, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio PUCP. http://hdl.handle.net/20.500.12404/5064

Cabrera, A. F. C. (2022). *Construcciones mentales en el aprendizaje del concepto de espacio vectorial* [Tesis doctoral, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada]. https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_doctorado/2022/acan_22.pdf

Dalcín, M., & Olave, M. (2007). Ecuaciones de segundo grado: Su historia. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20*, 156–161. https://core.ac.uk/reader/33251800

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Enseñanza de la matemática: Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática), 17*(1), 87–106. 655_Epistemologia_didactica_y_practicas-libre.pdf (d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net)

Gil, D. C. S., Aguilar, Z. E. S., & Delgado, O. S. (2021). La comprensión de la recta desde la teoría APOE. *Boletín Redipe, 10*(9), 371–387. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8114573

Hernández, L. M., Flores, E. G. R., & Domínguez, Á. (n.d.). *El juego y el aprendizaje cooperativo en la enseñanza de las ecuaciones de primer grado*.

Academia.edu | Search | El juego y el aprendizaje cooperativo en la enseñanza de las ecuaciones de primer grado.

Jaramillo, D. H. (2018). Descomposición genética propuesta para el método de reducción en bachillerato. *PädiUAQ, 2*(3), 78–103. https://revistas.uaq.mx/index.php/padi/article/view/104/668

Jaramillo, D. H. (2018). *Propuesta didáctica para la enseñanza y evaluación del álgebra desde la perspectiva de la teoría APOE* [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Querétaro]. https://ri-ng.uaq.mx/bitstream/123456789/1309/1/RI004391.pdf

Londoño Mosquera, E. (2019). *Análisis de gráficos estadísticos (barra y circular): Una perspectiva desde la teoría APOE con estudiantes de secundaria (13 y 15 años)* [Tesis de maestría, Universidad de Medellín]. https://repository.udem.edu.co/handle/11407/6603

Maffey García, S. G. (2006). *Estudio sobre la metacognición y competencia de profesores y estudiantes en relación al tema de las ecuaciones lineales* [Tesis de maestría, IPN]. Instituto Politécnico Nacional. Microsoft Word - TESIS-2-portada (ipn.mx)

Molina, J. (2014). *Aprendizaje significativo y resolución de problemas de ecuaciones de primer grado* [Tesis de maestría, Universidad Rafael Landívar]. https://recursosbiblio2.url.edu.gt/tesiseortiz/2014/05/86/Lopez-Juan.pdf

Moreno, A. S., Collazo, R. C., Ruiz, A. K. C., & Renovato, I. H. (2024). *Propuesta para la enseñanza de las ecuaciones lineales algebraicas*. *Revista Tecnología, Ciencia y Educación*, *27*(1), 187-214. https://doi.org/10.51302/tce.2024.18775

Moreno, C. A. H. (2013). *Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita y su impacto en la educación básica*. En *Actas del VII CIBEM* (pp. 1045). ISSN 2301-0797. https://core.ac.uk/download/pdf/328836645.pdf

Moreno, I. D., & Cobo, L. D. (1997). *Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita*. *Revista EMA*, *2*(3), 247-258. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/secuencia-de-ensenanza-para-solucionar-ecuaciones-de-primer-grado-con-una-incognita/

Ruano, R.M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. PNA 2(2), 61-74.

https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/77572/00820103009095.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Sandoval, L. J. (2018). *Análisis cognitivo del concepto de ecuación cuadrática y su solución en el nivel secundaria* [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Zacatecas]. http://ricaxcan.uaz.edu.mx/jspui/bitstream/20.500.11845/1181/1/2018%20Rosales%2c%20S.G..pdf

Secretaría de Educación Pública. (19 de agosto de 2011). *Secundaria. Primer grado: Matemáticas*. Gobierno de México. Recuperado el 2 de julio de 2024 de https://www.gob.mx/sep/acciones-y-programas/secundaria-primer-grado-matematicas?state=published

Secretaría de Educación Pública. (13 de octubre 2014). *Secundaria: Programa de estudio*. Gobierno de México. Recuperado el 2 de julio de 2024 de https://www.gob.mx/sep/acciones-y-programas/secundaria-programas-de-estudio

Secretaría de Educación Pública. (2022). *Programa sintético de la Educación Básica 2022*. Tarea 4 (google.com)

Tabares Cano, D. E. (2021). *La enseñanza de los números enteros desde la mirada de la teoría APOE: Modalidades y métodos de enseñanza* [Tesis doctoral, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/79829/1032327968.2021.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Tettay-Mejía, S. I., Pulgar-García, M., & Rojas-Sandoval, Y. (2019). Errores en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en estudiantes de secundaria. *Praxis*, *15*(2), 193–205. https://doi.org/10.21676/23897856.3249

Trigueros, M. (2013). *¿Qué nos dice la teoría APOE sobre la enseñanza del álgebra lineal?* https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1148081/Trigueros201325C225BFQue.pdf

Trigueros, M. (2014). *Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución*. *Educación Matemática*, *26*(2), 207-226. https://www.redalyc.org/pdf/405/40540854011.pdf

Wicaksono, A., Prabawanto, S., & Suryadi, D. (2024). *How students' obstacles in solving mathematical tasks dealing with linear equations in one variable*. *Al-Jabar: Pendidikan Matematika*, *15*(1), 33-44. https://doi.org/10.24042/ajpm.v15i1.21137