



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

**Interferometría de corrimiento de
fase autocalibrado de tres pasos
desiguales mediante el método de la
distancia Euclídea en un cilindro
elíptico**

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito para la obtención del grado de

Licenciada en Física

por

Marymar Castillo Luna

asesorada por

Cruz Meneses Fabián

Puebla, Pue.

Enero 2016

**Interferometría de corrimiento de fase autocalibrado
de tres pasos desiguales mediante el método de la
distancia Euclídea en un cilindro elíptico**

Tesis

Marymar Castillo Luna

Cruz Meneses Fabián



Título: Interferometría de corrimiento de fase autocalibrado de tres pasos desiguales mediante el método de la distancia Euclídea en un cilindro elíptico.

Estudiante: Marymar Castillo Luna

COMITÉ

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Presidente

Dra. Rosibel Carrada Legaria
Secretario

Dr. Antonio Barcelata Pinzón
Vocal

Dr. Cruz Meneses Fabián
Asesor

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca parcial que me otorgó durante la elaboración de ésta tesis bajo el proyecto de Investigación Científica Básica con número de referencia CB-2011/166742.

Al Cuerpo Académico de Óptica de la FCFM por la beca complementaria.

A mi asesor por todo el apoyo y motivación que me ha brindado y el tiempo que dedicó para que se realizará este trabajo.

A mis padres que son la base para poder lograr cada uno de mis objetivos.

A cada una de las personas de mi jurado, por sus comentarios y observaciones para mejorar ésta tesis.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
1.2. Planteamiento del problema	5
1.3. Objetivos	5
1.4. Antecedentes	6
1.5. Contexto del trabajo	8
1.6. Organización de la tesis	10
2. Bases Teóricas	11
2.1. Introducción	11
2.2. Interferencia de dos ondas	11
2.3. Extracción de fase	15
2.3.1. Interferometría de corrimiento de fase	15
2.3.2. Interferometría de corrimiento de fase autocalibrado y generalizado	18

2.3.3. Desenvolvimiento de fase	20
2.4. Mínimos Cuadrados	22
2.5. Cilindro elíptico	24
3. Extracción de fase por el Método de la distancia Euclídea	31
3.1. Introducción	31
3.2. Cilindro elíptico de irradiancia	32
3.3. Cilindro elíptico y mínimos cuadrados	34
3.4. Distancia Euclídea y extracción de fase	39
4. Resultados numéricos y experimentales	41
4.1. Introducción	41
4.1.1. Diagrama a bloques	42
4.2. Implementación numérica	43
4.2.1. Simulación numérica	43
4.3. Evaluación de patrones de interferencia experimentales	49
5. Conclusiones	63
5.1. Conclusiones	63
5.1.1. Conclusiones Generales	63
5.1.2. Discusión	64
5.1.3. Trabajo a futuro	65

Resumen

A lo largo de más de 40 años de investigación se ha logrado introducir una gran variedad de métodos de evaluación de la función de fase de un interferograma, siendo el método conocido como interferometría de corrimiento de fase (PSI, de sus siglas en inglés, Phase-shifting interferometry) uno de los más usados y más ampliamente estudiados, que como característica típica usa siempre la función tangente. La razón yace en su alta precisión y su alta aplicabilidad en metrología, por mencionar solo un ejemplo, haciendo indispensable su uso en investigación básica y aplicada en muchas áreas de la ciencia y la tecnología. El quehacer de la presente tesis estriba en como calcular la fase del objeto mediante la distancia Euclídea de un punto a un cilindro de base elíptica. Este cilindro elíptico es obtenido mediante el ajuste por mínimos cuadrados de puntos de intensidad construidos por un conveniente acomodo de tres interferogramas cambiados en fase de valores desconocidos y arbitrarios capturados de la interferencia de dos haces en un experimento. En este método, llamado el método de la distancia Euclídea (ED, de sus siglas en inglés, (Euclidean Distance,)) es evitado el uso de la función tangente, lo cual constituye una de las características más importantes que podría propiciar, bajo ciertas condiciones de ruido, el de obtener con mayor precisión y exactitud la extracción de la fase del objeto. En la

presente tesis se desarrolla un modelo teórico, se implementa una simulación numérica y se muestra la evaluación de patrones de franjas experimentales.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

PSI es un método capaz de obtener la fase deseada mediante la solución de un sistema de ecuaciones formado por tres ó mas interferogramas desplazados en corrimientos de fase conocidos e igualmente espaciados [1-2]. Los intentos de llevar a cabo estas importantes y necesarias condiciones en el mundo experimental han requerido la cuidadosa y exhaustiva calibración de los desplazamientos de fase, demandando alto costo y mucho esfuerzo. Debido a que PSI es una técnica no invasiva, de no contacto, de campo completo, y de alta aproximación, es empleada en muchos campos de la ciencia y la tecnología, tal como Física, Astronomía, Biología, Química, Medicina, Mecánica, Metrología, Microscopía, Holografía, además de muchas otras. PSI también ha sido empleado para medir el índice de refracción de medios transparentes incluyendo gases, líquidos, sólidos y plasmas, y además, para medir viscosidad, densidad, difusión, temperatura, homogeneidad, pureza, etc.; también

PSI ha sido usado para medir desplazamiento angular y lineal a muy cortas distancias, y además estimar grosor, rugosidad, topografía, modos de vibración en materiales, y muchas otras mediciones [3-4].

Bruning et al [1] propusieron en 1974 el uso de un transductor piezoeléctrico (PZT) como un desplazador de fase para introducir escalones de fase en los interferogramas y realizar por primera vez el método PSI. Después de él muchas otras técnicas experimentales para lograr un desplazamiento de fase fueron propuestas, incluyendo polarización [5], rejillas [6-7], moduladores espaciales de luz [8], desplazamiento lateral de la fuente de luz [9], y recientemente con filtros de amplitud [10-12] basados en la teoría de modulación de amplitud fuera de fase en cuadratura (QAM) [13] y no cuadratura NQAM [14]. No obstante, a pesar de todos los grandes esfuerzos para desarrollar la detección sincrónica de interferogramas como es requerido por el método PSI, las condiciones deseadas no son obtenidas experimentalmente, debido a la inhomogeneidad en los materiales, y otras características tales como su respuesta no lineal, histéresis, y su dependencia con la temperatura, y por defectos de fabricación, así como de muchas otras condiciones que forman parte de la configuración experimental, tales como vibraciones mecánicas, turbulencia atmosférica, gradientes de temperatura, inestabilidad de las fuentes de luz, no linealidad en el detector, y defectos en el uso de las componentes ópticas. Las características intrínsecas de los desplazadores de fase y las innatas fluctuaciones en las configuraciones experimentales, introducen inevitablemente variaciones indeseables no solo en el corrimiento de fase sino también en la luz de fondo e iluminación de los interferogramas. Por esta razón muchos estudios para estimar la incertidumbre en la medición de la fase del objeto han sido ampliamente desarrollados por Schreiber [15],

Hariharan [16], Schmit y Creath [17], y otros investigadores. Una primera alternativa a la mejora de las desventajas en PSI fue proponer un algoritmo capaz de demodular la fase de los interferogramas con corrimiento de fase desigual, conocida como detección asincrónica de interferogramas, nombrado como interferometría de corrimiento de fase generalizado (GPSI). Sin embargo estos pasos deben ser todavía conocidos, implicando calibración de los corrimientos de fase. Entonces como una forma para evitar esta difícil tarea, una alternativa emerge al estimar los corrimientos de fase desconocidos en los interferogramas, los cuales son introducidos típicamente con un cambiador de fase no calibrado, esta propuesta es conocida como algoritmos de corrimientos de fase (PSA) de autocalibración. En 1982 Morgan [18], y en 1984 Grievenkamp [19] presentaron una propuesta basada en el método de mínimos cuadrados, y después de muchas interesantes propuestas que combinan GPSI con métodos de autocalibración como es clasificado por Patit et al [20] fueron presentados basados en conceptos como la transformada de Fourier [21], propiedades estadísticas [22-23], ajuste a curvas elípticas [24-28], métodos iterativos [29], espacio temporales [30], y optimización [31]. El mérito de estos métodos esta en como calcular en muchos de los casos los corrimientos de los interferogramas y después calcular la fase del objeto aplicando algunos métodos PSA basados en PSI o GPSI. Asumiendo una detección sincrónica el caso mas simple fue propuesto por Carré [32] en 1996, y un análisis de incertidumbre así como un amplio estado del arte fue presentado por Kemaio et al [33], Novak and Miks [34], Hack [35], Rastogi y Hack [36], y en las referencias citadas ahí dentro. La primera propuesta para autocalibración con detección asincrónica fue resuelta por el uso de métodos iterativos [37-38] demandando largos tiempos de cálculo de computo al procesar solo unas pocas muestras o con muchas pero con poca resolución. Métodos no iterativos fue-

ron también propuestos reduciendo considerablemente el tiempo de cómputo permitiendo muchas muestras de alta resolución y con mejor aproximación en la demodulación de fase [39-41]. En 1990 Freischlad, y Koliopoulos [42] presentaron por primera vez esta idea, seguidos por Larkin y Oreb [43], Schmit y Creath [17], y finalmente este método fue generalizado por Servin et al [44-45], Mosiño et al [46-47], y Tellez-Quiñones et al [48]. Básicamente, la transformada de Fourier fue usada como una principal herramienta para desarrollar esta aproximación. Sin embargo otras transformaciones integrales han sido usadas tal como la transformada wavelet [49], transformada S [50], y transformada Z usada por Surrel en 1996 [51] para introducir la idea de un polinomio característico.

Todos los métodos arriba mencionados incluyendo PSI, GPSI, y de auto-calibración pueden clasificarse bajo los algoritmos de corrimiento de fase, los cuales tienen como mínimo dos características comunes tal como la uniformidad espacial o desplazamiento de fase homogéneo (corrimiento de fase), y el cálculo de la fase del objeto vía la función tangente. Un método que no usa la función tangente fue recientemente propuesto por Meneses-Fabián y Lara-Cortes [52], llamado el método de la distancia Euclídea (ED), aplicado al caso de tres interferogramas con corrimientos de fase desconocidos y arbitrarios y basado en el ajuste de puntos de intensidad a elipses por el método de mínimos cuadrados y en la asociación del parámetro de fase obtenido para calcular la distancia Euclídea de un punto de intensidad a la elipse ajustada. Este método es operado por renglones o por columnas.

El presente trabajo de tesis esta englobado dentro de esta idea, con la particularidad de considerar toda la información del patrón de interferencia en lugar de ir por renglones o por columnas, por esa razón se construye un

cilindro elíptico en lugar de elipses en el plano.

1.2. Planteamiento del problema

Partiendo de tres patrones de interferencia cambiados en fase, con la particularidad de ser arbitrarios y desconocidos, se propone un modelo matemático para formar puntos de intensidad que obedezcan a la ecuación de un cilindro elíptico. Sin embargo, dada la naturaleza de la distribución espacial no homogénea de la luz de fondo y modulación de los interferogramas, así como de la presencia de ruido inherente en todo experimento, los puntos de intensidad, formados usando estos tres interferogramas de acuerdo al modelo matemático, no pertenecerán al mismo cilindro elíptico. La alternativa adoptada en este trabajo es la de realizar un ajuste por mínimos cuadrados para obtener un único cilindro elíptico que mejor represente a todos los puntos de intensidad, y posteriormente, con la finalidad de extraer la información de fase del objeto, se propone conseguir mediante la asociación del parámetro de fase obtenido de calcular la distancia Euclídea de un punto de intensidad al cilindro elíptico ajustado.

1.3. Objetivos

OBJETIVO GENERAL

Recuperar la fase del objeto en interferometría de fase generalizado de auto-calibración aplicando el concepto de la distancia Euclídea de un punto a un cilindro de base elíptica.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS Y METAS

1. Desarrollar un modelo teórico.
2. Implementar el método de mínimos cuadrados para ajustar puntos dispersos a un cilindro elíptico.
3. Implementar un algoritmo para calcular la distancia Euclídea de un punto a un cilindro elíptico.
4. Evaluar patrones de interferencia experimentales

1.4. Antecedentes

La interferometría estudia la superposición de dos o más ondas, en óptica, éstas ondas luminosas generalmente coherentes forman un patrón de franjas brillantes y oscuras. Las franjas brillantes son formadas debido a las ondas que llegan en fase, efecto conocido como interferencia constructiva, mientras que las franjas oscuras son formadas debido a las ondas que llegan en contrafase, conocida como interferencia destructiva. Es bien sabido que la separación entre dos franjas brillantes o dos franjas oscuras es de una longitud de onda y que la forma de las franjas, el contraste de ellas, así como el número, refleja la diferencia de las fases, amplitudes, estados de polarización, grado de coherencia entre las ondas involucradas en la interferencia [53].

Para el caso de la interferencia de dos ondas coherentes polarizadas linealmente en el mismo plano, suponiendo conocida una de ellas, llamada onda de referencia, en la mayoría de los casos se considera una onda plana o una onda esférica, mientras que la segunda se considera onda de prueba u onda

del objeto, por lo que las variaciones de las franjas en el patrón de interferencia son atribuidas a ésta [54]. Con el anterior punto de vista, la evaluación de la fase del patrón de interferencia viene a ser la medida de las variaciones de fase de la onda que cruza el objeto. En general, las variaciones de fase pueden ser atribuidas a cambios en: la longitud de onda, índice de refracción, caminos ópticos, polarización de la luz, cambios del vector de propagación, etc [55].

Bajo ciertas circunstancias y mediciones específicas, la evaluación de fase puede ser interpretada en diferentes campos de la metrología para evaluar o medir diferentes variables o cantidades físicas, dentro de las que se puede mencionar: pruebas de superficies ópticas, espejos, lentes; estudio de fluidos, mezclas, densidades, velocidad de flujo; estudio interno de objetos usando tomografía, gradientes de temperatura en sólidos, líquidos y gases, como ceras y parafinas, etc. [56-72]; en el estudio de vibraciones en placas metálicas para la observación y medición de modos y frecuencias naturales; en la medición de perfiles de objetos en 3D, a nivel macroscópico y nivel microscópico, en objetos estáticos y objetos dinámicos, etc.

1.5. Contexto del trabajo

El presente trabajo se desarrolló en el laboratorio de Óptica Aplicada de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Este trabajo forma parte de las líneas de generación y aplicación del conocimiento que el Cuerpo Académico de Óptica practica. También, la presente es parte de un proyecto de investigación interno patrocinado por Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

El trabajo desarrollado forma parte de una línea de investigación que se encarga de evaluar patrones de interferencia, la característica principal de esta técnica es que no usa la función tangente como en la mayoría de los métodos propuestos a lo largo de mas de 40 años desde que Bruning la introdujo. Estas ideas iniciaron con el trabajo de licenciatura y maestría del estudiante Francisco Alejandro Lara Cortés y con su trabajo doctoral a un en desarrollo sobre la idea de extraer la fase sobre el concepto geométrico de la distancia Euclídea. En este trabajo doctoral se ha publicado un artículo que trata sobre ajustar por renglones o por columnas los datos dispersos dados por los patrones de interferencia a una elipse, y como segundo paso calcular la distancia Euclídea de un punto a una elipse[52]. El trabajo actual trata sobre una variante de esta idea, en lugar de ir por renglones o por columnas se toma en cuenta toda la matriz, es decir, todos los renglones o todas las columnas simultáneamente para construir, en este caso, un cilindro de base elíptica. Se entiende que existe una gran variedad de posibilidades en ajustar estos puntos de intensidad, aquí se ha considerado el caso mas simple, así como también se ha escogido obtener este cilindro elíptico por mínimos

1.5. CONTEXTO DEL TRABAJO

cuadrados, quedando abierta la posibilidad de usar otras geometrías, tales como elipsoides o paraboloides, por mencionar solo dos ejemplos, así como también se pueden usar otros métodos de ajuste.

1.6. Organización de la tesis

El presente escrito esta organizado en 5 capítulos, en el capítulo 1 se muestra el resumen los antecedentes y el planteamiento del problema, así como los objetivos y la forma en que este trabajo es sustentado y desarrollado. En el capítulo 2 se asientan las bases teóricas para el desarrollo del presente trabajo. En el capítulo 3 se desarrolla el modelo matemático que sustenta la idea plasmada en esta nueva técnica de extraer la fase de un patrón de interferencia. En el Capítulo 4 se demuestra mediante una simulación numérica que el modelo matemático expuesto en el capítulo 3 es viable, además se muestra la evaluación de patrones de interferencia obtenidos experimentalmente. En el Capítulo 5 se redactan las conclusiones generales de la tesis se da una discusión del método juzgando sus ventajas y desventajas y finalmente se trazan las tareas futuras pendientes por desarrollar para subsanar o mejorar las posibles desventajas del método de la distancia Euclídea usando un cilindro elíptico.

Capítulo 2

Bases Teóricas

2.1. Introducción

2.2. Interferencia de dos ondas

El fenómeno de interferencia [73-75], se produce cuando dos o más ondas se superponen en un punto del espacio y la onda resultante es igual a la suma de las perturbaciones constitutivas individuales. Así, la interferencia óptica equivale a la interacción de dos o más ondas de luz que producen una irradiancia resultante que se desvía de la suma de las irradiancias componentes y es definida como la energía medida por unidad de área por unidad de tiempo (medida para la potencia óptica de las fuentes).

Para analizar el fenómeno de interferencia es necesario explicar de forma breve cuales son los argumentos físicos que están involucrados. Utilizando el principio de superposición consideramos dos fuentes puntuales S_1 y S_2 que emiten ondas monocromáticas en un medio homogéneo, ver Figura(2.1). Sea

su separación a mucho mayor que la longitud de onda λ . Colocando el punto de observación P lo suficientemente lejos de las fuentes para que en P los frentes de onda sean planos.

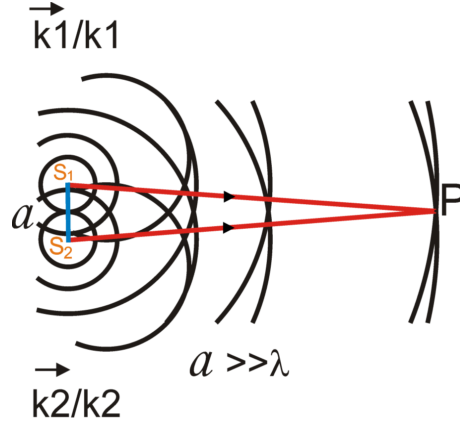


Figura 2.1: Superposición de dos frentes de ondas cuyas fuentes puntuales están separadas por una distancia a .

Considerando solamente frentes de ondas linealmente polarizados cuya forma es

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \hat{i}A_{01} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha_1), \quad (2.1)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \hat{i}A_{02} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha_2), \quad (2.2)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t), \quad (2.3)$$

donde \vec{E}_1 y \vec{E}_2 es el campo eléctrico de los haces provenientes de S_1 y S_2 y A_{01} y A_{02} sus amplitudes, \vec{k}_1 y \vec{k}_2 los vectores de propagación, \vec{r} el vector de posición donde se reproduce la interferencia, ω es la frecuencia angular, α_1 y α_2 son las fases iniciales de ambas fuentes.

Supongamos que estamos en un medio homogéneo expresaremos la irradiancia como

$$I = \langle \vec{E}^2 \rangle_T = \langle \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \rangle \cdot \langle \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \rangle = \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle + 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle. \quad (2.4)$$

Lo que expresa $\langle \rangle$ es el promedio temporal de la magnitud de la intensidad de campo eléctrico al cuadrado $\langle E \cdot E \rangle$ y T es el tiempo de integración del detector. Tomando el promedio temporal en el tiempo T de ambos lados, la irradiancia pasa a ser

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}, \quad (2.5)$$

siempre que $I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle_T$, $I_2 = \langle \vec{E}_2^2 \rangle_T$, $I_{12} = 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle_T$. La última expresión se denomina término de interferencia.

Después de multiplicar y calcular el promedio de la ecuación, obtenemos que el término de interferencia esta dado por,

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \alpha_1 + \alpha_2), \quad (2.6)$$

donde $(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \alpha_1 + \alpha_2)$ es la diferencia de fase resultante de la combinación de una diferencia de longitud de camino y una diferencia del ángulo de desfase inicial reescribiendo la expresión (2.5)

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi + \alpha). \quad (2.7)$$

considerando a $\phi = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}$ y $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Observemos que el frente de onda se modifica al pasar por el objeto de fase dejando de ser el de una onda plana, para estos casos ϕ toma otros valores. La ecuación (2.7) puede

ser escrita de la forma

$$I = a + b \cos(\phi + \alpha) \quad (2.8)$$

con $a = I_1 + I_2$ llamada luz de fondo y $b = 2\sqrt{I_1 I_2}$ luz de modulación.

En varios puntos del espacio, la irradiancia resultante puede ser mayor, menor o igual a $I_1 + I_2$ dependiendo del valor de I_{12} . Un máximo en la irradiancia se obtiene cuando $\cos(\phi + \alpha) = 1$ de modo que $I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$, cuando $\phi + \alpha = (0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots)$ es el caso de interferencia constructiva total, el desfase entre las dos ondas es un múltiplo entero de 2π mientras que las perturbaciones están en fase.

Cuando $0 < \cos(\phi + \alpha) < 1$ las ondas están fuera de fase, $I_1 + I_2 < I < I_{max}$. y el resultado se denomina interferencia constructiva.

Con $\phi + \alpha = \frac{\pi}{2}$, $\cos(\phi + \alpha) = 0$, las perturbaciones ópticas están desfasadas 90° e $I = I_1 + I_2$.

Para $0 > \cos(\phi + \alpha) > -1$ disponemos de la condición de interferencia destructiva, $I_1 + I_2 > I > I_{min.}$.

Una irradiancia mínima se produce al estar las ondas desfasadas 180° , los valles se superponen a las crestas, $\cos(\phi + \alpha) = -1$ y $I_{min.} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$. Esto se produce cuando $\phi + \alpha = (\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots)$ y se denomina interferencia destructiva total.

Otro caso especial, aunque muy importante, aparece cuando las amplitudes de ambas ondas que llegan a P en la Fig. 2.1 son iguales, es decir, $A_{01} = A_{02}$. Ya que las contribuciones a la irradiancia de ambas fuentes son entonces iguales, hagamos $I_1 = I_2 = I_0$. La Ec.(2.7) se puede escribir como

$$I = 2I_0(1 + \cos(\phi + \alpha)) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\phi_0 + \alpha}{2}\right),$$

de lo cual se deduce que $I_{min.} = 0$ sí $\frac{\phi_0 + \alpha}{2} = (\pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \dots)$ e $I_{max.} = 4I_0$ sí $\frac{\phi_0 + \alpha}{2} = (0, \pm2\pi, \pm4\pi, \dots)$.

2.3. Extracción de fase

2.3.1. Interferometría de corrimiento de fase

Para determinar la fase sin ninguna ambigüedad, necesitamos un mínimo de tres muestras. Consideremos ahora el caso de tres muestras de la señal, con fases iniciales α_1 , α_2 y α_3 conocidas, distintas pero igualmente espaciadas. Por lo tanto, nosotros podemos escribir

$$I_1 = a(x, y) + b(x, y) \cos(\phi(x, y) + \alpha_1), \quad (2.9)$$

$$I_2 = a(x, y) + b(x, y) \cos(\phi(x, y) + \alpha_2), \quad (2.10)$$

$$I_3 = a(x, y) + b(x, y) \cos(\phi(x, y) + \alpha_3), \quad (2.11)$$

donde a y b son la luz de fondo y modulación respectivamente, estas expresiones también pueden escribirse como:

$$I_1 = a + b \cos \alpha_1 \cos \phi - b \sin \alpha_1 \sin \phi, \quad (2.12)$$

$$I_2 = a + b \cos \alpha_2 \cos \phi - b \sin \alpha_2 \sin \phi, \quad (2.13)$$

$$I_3 = a + b \cos \alpha_3 \cos \phi - b \sin \alpha_3 \sin \phi, \quad (2.14)$$

donde la dependencia de x e y esta de manera implícita para a , b y ϕ .

Si renombramos a α_1 , α_2 , α_3 como α_k y hacemos que tome los siguientes valores de fase en este caso:

$$\alpha_k = -\alpha, 0, \alpha; \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.15)$$

sustituyendo los valores de α_k

$$I_1 = a + b \cos(\phi - \alpha), \quad (2.16)$$

$$I_2 = a + b \cos(\phi), \quad (2.17)$$

$$I_3 = a + b \cos(\phi + \alpha), \quad (2.18)$$

utilizando las identidades trigonométricas

$$I_1 = a + b \cos \alpha \cos \phi + b \sin \alpha \sin \phi, \quad (2.19)$$

$$I_2 = a + b \cos(\phi), \quad (2.20)$$

$$I_3 = a + b \cos \alpha \cos \phi - b \sin \alpha \sin \phi \quad (2.21)$$

realizando las operaciones siguientes se llega a

$$I_1 - I_3 = 2b \sin \alpha \sin \phi, \quad 2I_2 - I_1 - I_3 = 2b(1 - \cos \alpha) \cos \phi \quad (2.22)$$

se encuentra la tangente con las convenientes manipulaciones algebraicas obtenemos:

$$\tan \phi(x, y) = \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \frac{I_1 - I_3}{2I_2 - I_1 - I_3} \quad (2.23)$$

Si proponemos que α_k tome los siguientes valores $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ$ y $\alpha_3 = 300^\circ$ siguiendo el mismo procedimiento obtenemos los siguientes resultados para la tangente de fase

$$\tan(\phi) = -\sqrt{3} \frac{I_1 - I_3}{I_1 - 2I_2 + I_3} \quad (2.24)$$

2.3.2. Interferometría de corrimiento de fase autocali- brado y generalizado

El estudio de franjas de interferencia asociada a la ecuación (2.8) ha introducido varias técnicas que recuperan la fase ϕ , en un principio evaluando los máximos y mínimos de cada patrón de franjas

$$I = a + b \cos \phi \quad (2.25)$$

A partir del desarrollo de la técnica de corrimiento de fase propuesta por J.H.Bruning [1] que consideró los valores intermedios entre los máximos y mínimos de intensidad, se han desarrollado varias técnicas de extracción de fase que involucran $N \geq 3$ corrimientos de fase α_k con $k= 0,1,2,N-1$.

$$I_k = a + b \cos(\phi + \alpha_k), \quad (2.26)$$

$$\alpha_k = \frac{2\pi k}{N}, \text{ donde } k = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1, \quad N \geq 3,$$

$$\tan \phi(x, y) = \frac{\sum I_k(x, y) \sin_k}{\sum I_k(x, y) \cos_k}. \quad (2.27)$$

La forma más usual de introducir estos corrimientos es por medio de un piezo-eléctrico que desplaza un espejo colocado en un brazo de referencia del interferómetro, en fracciones de longitud de onda modificando la diferencia de camino óptico entre el brazo de referencia y el brazo donde está colocado el objeto de prueba, así para cada corrimiento de fase se asocia un patrón de franjas de interferencia. En la práctica hay complicaciones al implementar con exactitud el corrimiento de fase que se propone teóricamente, debido a la calibración del piezo-eléctrico y a la estabilidad del arreglo interferométrico.

co que esta sujeta a vibraciones sobre la superficie de trabajo, entre otros factores. Se han desarrollado otras técnicas de corrimiento de fase en las que no es preciso conocer de manera inicial estos valores, a estas técnicas se les asocia el nombre de interferometría de corrimiento de fase autocalibrado y generalizado (GPSI). Las principales propiedades de las técnicas GPSI son

- a) a , b , ϕ son constantes en el tiempo.
- b) α_k es desconocido y arbitrario.
- c) El número de corrimientos puede ser $N \geq 2$.
- d) Se forma un sistema de N ecuaciones por $(N + 3)$ incógnitas para N corrimientos, como consecuencia no hay solución bajo el criterio del PSI.
- e) Las soluciones son aproximadas, basados en encontrar los N corrimientos α_k donde $k = 0, 1, 2, N-1$.
- f) Encontrar la fase del objeto ϕ por el método del PSI.

Al igual que con PSI, con GPSI se puede extraer la información de la fase ϕ contenida en un patrón de interferencia, para tal fin primero es necesario encontrar los valores de las fases adicionales α_k , mediante las relaciones y propiedades físicas entre los patrones de interferencia.

Se han propuesto técnicas GPSI con solo dos interferogramas de campos de difracción con un corrimiento entre ambos de α con $0 < \alpha < \pi$ y la intensidad de la onda de referencia constante. Calculando la suma y resta de ambas interferogramas y promediando estas cantidades se despeja el valor del corrimiento de fase, con el valor de α se encuentra la intensidad del frente de onda del objeto en el plano donde se registran los patrones de interferencia

y finalmente calcular el campo del objeto en el plano de entrada aplicando la transformada inversa de Fresnel [76]. Hay algoritmos que no explícitamente tienen el nombre de técnicas de corrimiento de fase como la técnica de Thomas Kreis [73] que utiliza la transformada de Fourier. Aplicando la transformada de Fourier a un interferograma filtra en el espacio de frecuencias un lóbulo modificando el comportamiento de la fase, generando un cambio o inversión de signo en puntos críticos de la fase, propone introducir otro interferograma con corrimiento de fase $0 < \alpha < \pi$ y calcular el valor del corrimiento introducido, en este caso lo que importa es el signo de α que multiplicará a la fase envuelta y corregirá el cambio de signo, finalmente se desenvuelve y se recupera el valor de la fase.

2.3.3. Desenvolvimiento de fase

El cálculo de la fase presentará discontinuidades debido a que es obtenida mediante el uso de la tangente inversa Ec.(2.25). Debido a que la tangente inversa es una función multivaluada, la solución para ϕ es una función diente de sierra Figura (2.2)(línea azul), donde las discontinuidades ocurren cada vez que ϕ cambia por 2π . Si ϕ se incrementa, la pendiente de la función es positiva y viceversa si la fase decrece. El paso final en el proceso de medición del patrón de franjas es desenvolver o integrar la fase a lo largo de una línea o camino contando las discontinuidades en 2π y sumándole 2π cada vez que el ángulo de la fase haga un salto de 2π a cero y restando 2π si cambia de cero a 2π . La Figura (2.2)(línea roja) muestra los datos de la línea azul después del desenvolvimiento. La clave de un confiable algoritmo de desenvolvimiento de fase está en su capacidad de detectar con estos saltos con precisión.

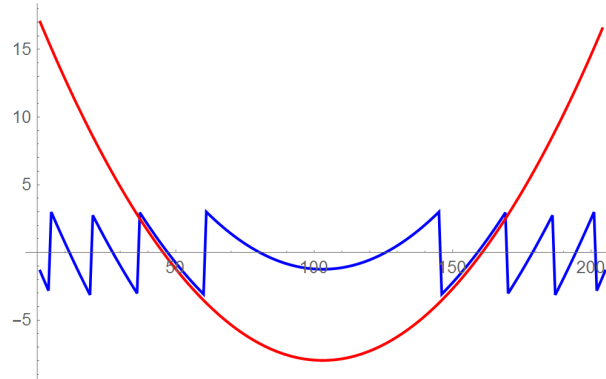


Figura 2.2: La gráfica en color azul muestra las discontinuidades que se presentadas en una fase envuelta, en rojo se tiene la fase desenvuelta.

El principio básico del desenvolvimiento de fase es integrar la fase envuelta (en unidades de 2π) a lo largo de una línea de datos. El gradiente de fase se calcula para cada pixel

$$\Delta\phi = \phi_n - \phi_{n-1}, \quad (2.28)$$

donde n es el número de pixel. Si $|\Delta\phi|$ excede un cierto umbral como π , entonces se asume una discontinuidad. Este salto de fase es corregido mediante la suma o resta de 2π dependiendo del signo de $\Delta\phi$. El principio más usado para corregir estas discontinuidades en la fase se basa en el hecho que la diferencia de fase entre cualesquiera dos puntos medida integrando la fase a lo largo de una trayectoria entre estos dos puntos es independiente del camino escogido, siempre y cuando no pase a través de una discontinuidad de fase.

2.4. Mínimos Cuadrados

En ciencia e ingeniería es frecuente el caso que un experimento produzca un conjunto de puntos de datos, donde las abscisas son distintas. Una meta de los métodos numéricos es el determinar una fórmula matemática que relacione estas variables. Hay diferentes posibilidades para el tipo de función que puede ser usada. Frecuentemente hay un modelo matemático, basado en la naturaleza de la situación física, que determina la forma de la función. Considerando que en cualquier experimento se encuentran fuentes de error (error residual) que deben considerarse al momento de aproximar los datos a una función que los represente.

Hay muchas formas de calcular el error residual o desviación:

$$\begin{aligned} \text{Máximo error: } E_{\infty}(f) &= \max_{1 \leq k \leq N} |f(x_k) - y_k|, \\ \text{Error promedio: } E_1(f) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |f(x_k) - y_k|, \\ \text{Error cuadrático promedio: } E_2(f) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (f(x_k) - y_k)^2. \end{aligned}$$

Plantaremos los conceptos básicos de mínimos cuadrados aplicados a encontrar la ecuación de una curva que se aproxime a un conjunto de puntos de datos finitos, y trasladaremos ésta técnica a encontrar la elipse de intensidad que mejor se ajuste a un conjunto de puntos que se obtienen de la captura de datos de irradiancia en un experimento.

Elegida la variable que se va a considerar independiente (x , por ejemplo), y dado el conjunto de puntos (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, N$, se selecciona la función que mejor se puede adaptar. Supongamos que ésta viene dada en la forma

$$y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (2.29)$$

donde a_1, a_2, \dots, a_n son n parámetros, que dependen del tipo de función y que han de ser determinados.

A cada valor x_i de la variable independiente x le corresponden entonces dos valores de la variable y : uno es el valor y_i que corresponde al conjunto de puntos al que llamaremos observado o real y otro y_i^* al que llamaremos teórico, que se obtiene de sustituir x_i en la función elegida:

$$y_i^* = f(x, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (2.30)$$

Se tienen así dos distribuciones, una real u observada y otra teórica, dependiendo ésta última de los valores que se puedan asignar a los parámetros a_1, a_2, \dots, a_n .

El problema que se plantea es el determinar estos parámetros de forma que ambas distribuciones se aproximen lo más posible, las distintas formas de conseguirlo dan lugar a los diversos procedimientos de ajuste. Una manera de resolver este problema es hallar la diferencia que hay entre el valor observado y_i y el valor teórico y_i^* , que representaremos por E_i :

$$E_i = (y_i - y_i^*). \quad (2.31)$$

La idea, en principio, es determinar los parámetros a_1, a_2, \dots, a_n para ello sumamos para todos los valores de i de forma que la suma es

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_i^*). \quad (2.32)$$

En esta expresión, habrá sumandos positivos y negativos, que pueden compensarse unos con otros, dando una suma pequeña aún cuando el ajuste no sea bueno. Por ello, el método de mínimos cuadrados consiste en determinar

los parámetros a_1, a_2, \dots, a_n , tratando de hacer mínima la siguiente ecuación

$$E(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_i^*)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_n))]^2. \quad (2.33)$$

La condición necesaria para que esta expresión sea mínima es que las derivadas parciales de primer orden respecto de cada uno de los parámetros se anulen. De esta manera se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales, llamadas normales, cuya resolución nos permite obtener los valores de los parámetros y, por tanto, la expresión de la función ajustada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_1} &= -2 \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_n)] \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \\ \\ \frac{\partial E}{\partial a_2} &= -2 \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_n)] \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \\ \\ &\vdots \\ \frac{\partial E}{\partial a_n} &= -2 \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_n)] \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

2.5. Cilindro elíptico

Comúnmente se entiende que un cilindro es aquel que tiene base circular de radio r y altura h , sin embargo este es un caso particular de una familia de cilindros. Hay otros tipos de cilindros que son los que tienen base parabólica y base hiperbólica. En este trabajo ocuparemos los cilindros de base elíptica o también llamados cilindros elípticos.

La forma de construir un cilindro elíptico es construyendo su base de forma elíptica y repitiendo esta base a diferentes alturas.

Tomando como directriz una elipse, se puede generar una superficie cilíndrica elíptica (que incluye a los cilindros circulares, cuando los semiejes de la elipse son iguales). En un sistema ortogonal de coordenadas (u, v, w) , tomando como eje w una recta cuya dirección es paralela a la generatriz, si se escoge como origen el centro de simetría, la ecuación de la superficie cilíndrica es similar a la de la superficie cónica correspondiente. La ecuación de un cilindro elíptico canónico es de la forma:

$$\frac{u^2}{u_0^2} + \frac{v^2}{v_0^2} = 1, \quad (2.35)$$

donde u_0 y v_0 son los semiejes, la ecuación de un cilindro elíptico rotado es

$$\frac{u^2}{u_0^2} + \frac{v^2}{v_0^2} - 2\frac{uv}{u_0v_0} \cos \alpha = \sin^2 \alpha, \quad (2.36)$$

la coordenada w varía de un valor inicial w_0 a uno final $w_0 + h$ con h un número real. La representación matemática de la base tiene la forma de las ecuaciones paramétricas de una elipse.

$$u = u_0 \cos(\varphi), \quad v = v_0 \cos(\varphi + \alpha). \quad (2.37)$$

De manera similar utilizando el Método de Mínimos Cuadrados planteamos encontrar el mejor cilindro elíptico de intensidad que minimice el error y represente a los datos experimentales, partimos de la ecuación de la elipse rotada un ángulo ψ en el origen ecuación(2.36), multiplicamos por u_0^2 ambos

lados de la ecuación y restamos en ambos lados de la igualdad $u_0^2 \sin^2 \alpha$,

$$u^2 + \frac{u_0^2}{v_0^2} v^2 - 2 \frac{u_0}{v_0} uv \cos \alpha - u_0^2 \sin^2 \alpha = 0. \quad (2.38)$$

Para evitar que las variables u_0 , v_0 y α estén ligadas lo que nos plantea bajo el tratamiento de mínimos cuadrados un sistema de ecuaciones sin solución, realizamos un cambio de variables:

$$A_1 = -\frac{u_0^2}{v_0^2}; \quad A_2 = 2 \frac{u_0}{v_0} \cos \alpha; \quad A_3 = u_0^2 \sin^2 \alpha. \quad (2.39)$$

De esta manera la función propuesta para encontrar la mejor aproximación de los datos a una elipse de intensidades es

$$u^2 - A_1 v^2 - A_2 uv - A_3 = 0, \quad (2.40)$$

como se desea encontrar los valores de A_1 , A_2 , A_3 para luego obtener los de u_0 , v_0 , α se da un tratamiento análogo al de mínimos cuadrados para obtener éstos valores, se eleva al cuadrado la ecuación (2.40),

$$E(A_1, A_2, A_3) = \sum_{i=1}^N (u_i^2 - A_1 v_i^2 - A_2 u_i v_i - A_3)^2. \quad (2.41)$$

Para obtener el mínimo error se deriva e iguala a cero con respecto a cada una de las variables A_1 , A_2 , A_3 donde los valores de u_i , v_i se consideran constantes.

$$\frac{\partial E(A_1, A_2, A_3)}{\partial A_1} = \sum_{i=1}^N (u_i^2 v_i^2 - A_1 v_i^4 - A_2 u_i v_i^3 - A_3 v_i^2) = 0, \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial E(A_1, A_2, A_3)}{\partial A_2} = \sum_{i=1}^N (u_i^3 v_i - A_1 u_i v_i^3 - A_2 u_i^2 v_i^2 - A_3 v_i) = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial E(A_1, A_2, A_3)}{\partial A_3} = \sum_{i=1}^N (u_i^2 - A_1 v_i^2 - A_2 u_i v_i - A_3) = 0. \quad (2.44)$$

Se forma un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que es representado en forma matricial por

$$\begin{pmatrix} \sum v_i^4 & \sum u_i v_i^3 & \sum v_i^2 \\ \sum u_i v_i^3 & \sum u_i^2 v_i^2 & \sum u_i v_i \\ \sum v_i^2 & \sum u_i v_i & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum u_i^2 v_i^2 \\ \sum u_i^3 v_i \\ \sum u_i^2 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

Si denotamos a las matrices como

$$D = \begin{pmatrix} \sum v_i^4 & \sum u_i v_i^3 & \sum v_i^2 \\ \sum u_i v_i^3 & \sum u_i^2 v_i^2 & \sum u_i v_i \\ \sum v_i^2 & \sum u_i v_i & N \end{pmatrix}; \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} \sum u_i^2 v_i^2 \\ \sum u_i^3 v_i \\ \sum u_i^2 \end{pmatrix},$$

entonces la ecuación (2.45) cambia a la forma

$$D \vec{A} = \vec{R}, \quad (2.46)$$

donde las entradas de la matriz D y las del vector \vec{R} son valores numéricos puesto que son el resultado de una suma de valores conocidos. Suponga que $\det D \neq 0$. Entonces la solución al sistema (2.46) está dada por $A = D^{-1}R = \frac{1}{\det D}(\text{adj}D)R$.

Resuelto el sistema de ecuaciones regresaremos a las variables originales u_0 , v_0 , α ver (2.39) que son parámetros con los que caracterizamos una elipse

rotada en el origen de coordenadas y función a la que queremos aproximar los valores medidos de intensidad. Al elevar al cuadrado la variable A_2 y sustituir el valor de A_1

$$A_2^2 = 4 \frac{u_0^2}{v_0^2} \cos^2 \alpha = -4A_1 \cos^2 \alpha, \quad (2.47)$$

despejando α

$$\alpha = \arccos\left(\frac{A_2}{2\sqrt{-A_1}}\right), \quad (2.48)$$

para obtener u_0 se despeja de las expresiones (2.39) y se obtiene

$$u_0 = \sqrt{\frac{A_3}{\sin^2 \alpha}}, \quad (2.49)$$

se toma a $\cos^2 \alpha$ de la ecuación (2.47) para obtener el $\sin^2 \alpha$, mediante la relación $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, se encuentra

$$u_0 = \sqrt{\frac{4A_1A_3}{A_2^2 + 4A_1}}, \quad (2.50)$$

nuevamente de las ecuaciones (2.39) se despeja a v_0

$$v_0 = \sqrt{-\frac{u_0^2}{A_1}}, \quad (2.51)$$

se sustituye el valor de u_0 obtenido en (2.50), finalmente

$$v_0 = \sqrt{\frac{4A_3}{A_2^2 - 4A_1}}. \quad (2.52)$$

La manera de interpretar estos valores para las tres elipses de intensidad que hemos formado es el poder establecer las ecuaciones paramétricas que mejor representan a los datos obtenidos experimentalmente.

Capítulo 3

Extracción de fase por el Método de la distancia Euclídea

3.1. Introducción

En la presente tesis se desarrolla una variante del Método de la distancia Euclídea que consiste en utilizar el Método de Mínimos Cuadrados para ajustar puntos de intensidad a un cilindro elíptico los puntos son construidos partiendo de 3 interferogramas cambiados en fase de valores desconocidos y arbitrarios medidos de la interferencia de dos haces en un experimento, se halla la distancia Euclídea para asociar el parámetro de fase del punto de intensidad con el valor de fase del punto que pertenece al cilindro elíptico el cual haga que la distancia entre ellos sea la mínima.

3.2. Cilindro elíptico de irradiancia

Se tienen 3 interferogramas de la forma

$$I_0(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos \phi(x, y), \quad (3.1)$$

$$I_1(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\phi(x, y) + \alpha_1), \quad (3.2)$$

$$I_2(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\phi(x, y) + \alpha_2), \quad (3.3)$$

donde α_1, α_2 son corrimientos de fase inicial arbitrarios, ϕ es la fase del objeto de prueba, a y b la luz de fondo y de modulación respectivamente.

Se forman las siguientes ecuaciones para eliminar a la variable a de los interferogramas I_0, I_1, I_2

$$p = I_0 - I_1; \quad q = I_1 - I_2, \quad (3.4)$$

sustituyendo a I_0, I_1, I_2 y realizando algunas las operaciones la Ec.(3.4) queda como

$$p = 2b(x, y) \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \sin\left(\phi(x, y) + \frac{1}{2}\alpha_1\right), \quad (3.5)$$

$$q = 2b(x, y) \sin\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \sin\left(\phi(x, y) + \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)\right), \quad (3.6)$$

notemos que en las ecuaciones (3.5) y (3.6) cambian su valor en cada punto (x, y) porque dependen de b y ϕ que son diferentes para cada punto de los datos de intensidad. Es conveniente expresar a p y q de forma matricial,

$$p_{ij} = 2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) b_{ij} \sin\left(\phi_{ij} + \frac{1}{2}\alpha_1\right), \quad (3.7)$$

$$q_{ij} = 2 \sin\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) b_{ij} \sin\left(\phi_{ij} + \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)\right), \quad (3.8)$$

Denotamos a p_{ij} y q_{ij} como los valores que toman en la i -ésima fila y j -ésima columna de los datos registrados. Ahora observemos que las ecuaciones (3.7) y (3.8) guardan similitud con las ecuaciones paramétricas de una elipse excepto por b_{ij} que no es constante, entonces con el fin de hacer que los datos de intensidad obedezcan a la forma matemática de las ecuaciones de un cilindro elíptico se toma una dimensión más y se forman las ecuaciones paramétricas de un cilindro elíptico en analogía a la Ec.(2.37) descrita en la sección (2.5)

$$p = p_{ij}; \quad q = q_{ij}; \quad r = q_{i1}, \quad (3.9)$$

el valor para r se eligió arbitrariamente ya que no influye en cálculos posteriores y su propósito es proporcionar una altura que nos permita visualizar mejor los puntos, en este caso se eligió q_{i1} que son los valores de la columna uno de q .

Formando la triada (p, q, r) para todo renglón i y para toda columna j de los patrones de interferencia, se puede prever que estos puntos están dispersos distando de un cilindro elíptico. Esto es debido a la influencia de dos características intrínsecas de la situación experimental, una es la dependencia espacial de la amplitud del campo óptico que recae directamente en el comportamiento espacial de la luz de modulación b , y dos, debido a la influencia del ruido presente en todo experimento. La presente tesis esta desarrollada

suponiendo una variación suave de la luz de modulación y por lo tanto en una variación suave de la amplitud del campo óptico y, además se considera la presencia de bajo nivel de ruido. La determinación del umbral acerca del nivel de variación de b y del nivel de ruido presente están fuera del alcance de la presente tesis de Licenciatura.

3.3. Cilindro elíptico y mínimos cuadrados

Una vez que se obtiene el modelo matemático del comportamiento de los puntos (p, q, r) se busca ajustar toda la colección de puntos a un cilindro elíptico que mejor ajuste los datos de intensidad por el Método de Mínimos Cuadrados.

Se deduce la ecuación de una elipse para ello se parte de las Ecs.(3.5), (3.6) y se hace un pequeño despeje

$$\frac{p}{2b \sin(\frac{1}{2}\alpha_1)} = \sin(\phi + \frac{1}{2}\alpha_1), \quad (3.10)$$

$$\frac{q}{2b \sin(\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1))} = \sin(\phi + \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)). \quad (3.11)$$

Las variables b y ϕ siguen dependiendo de x, y solo se omitió la dependencia por simplicidad.

Al desarrollar el lado derecho de la ecuación (3.11) y sustituir a (3.10) se llega a

$$\frac{q}{2b \sin(\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1))} - \frac{p \cos(\frac{1}{2}\alpha_2)}{2b \sin \frac{1}{2}\alpha_1} = \cos(\phi + \frac{1}{2}\alpha_1) \sin \frac{1}{2}\alpha_2. \quad (3.12)$$

3.3. CILINDRO ELÍPTICO Y MÍNIMOS CUADRADOS

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (3.10) y (3.12) y realizar algunas operaciones se encuentra que

$$p^2 + q^2 \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\alpha_1)}{\sin^2(\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1))} - 2pq \frac{\sin^2(\frac{\alpha_1}{2}) \cos(\frac{\alpha_2}{2})}{\sin(\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1))} - 4b^2 \sin^2(\frac{\alpha_2}{2}) \sin^2(\frac{\alpha_1}{2}) = 0. \quad (3.13)$$

Si sustituimos la función b por una constante que llamaremos B en principio desconocida la ecuación (3.13) ya no será exactamente igual a cero por consiguiente tomará un valor $E_{i,j}$ que es el error que hay por dicha consideración. En la práctica b no es constante pero se puede lograr al hacer que b varié muy poco de tal forma que se pueda aproximar a una constante. Se requiere encontrar nuevos valores de α_1 , α_2 y a B que hagan que el error total E sea el mínimo tomando en cuenta estas consideraciones, la Ec.(3.13) queda descrita de la siguiente manera

$$p_{ij}^2 - C_0 - C_1 p_{ij} q_{ij} - C_2 q_{ij}^2 = E_{ij}, \quad (3.14)$$

donde C_0 , C_1 , C_2 son las variables a encontrar que dependen a la vez de β_1 , β_2 que representan los nuevos valores de α_1 , α_2 respectivamente

$$C_0 = 4B^2 \sin^2(\frac{1}{2}\beta_1) \sin^2(\frac{1}{2}\beta_2); \quad C_1 = \frac{\sin(\frac{1}{2}\beta_1) \cos(\frac{1}{2}\beta_2)}{\sin(\frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1))}; \quad (3.15)$$

$$C_2 = \frac{-\sin^2(\frac{1}{2}\beta_1)}{\sin^2(\frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1))}.$$

Como parte de la teoría de mínimos cuadrados al elevar al cuadrado la ecuación (3.14) y sumar todos los valores de $E_{i,j}$ se obtiene el error total E

$$E(C_0, C_1, C_2) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (p_{ij}^2 - C_0 - C_1 p_{ij} q_{ij} - C_2 q_{ij}^2)^2, \quad (3.16)$$

con M y N la cantidad de datos de intensidad que se tienen.

Como se busca que el error sea el mínimo esto se consigue derivando a la ecuación (3.16) con respecto a C_0, C_1, C_2 e igualando a cero.

$$\frac{\partial E}{\partial C_0} = -2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (p_{ij}^2 - C_0 - C_1 p_{ij} q_{ij} - C_2 q_{ij}^2) = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial E}{\partial C_1} = -2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N p_{ij} q_{ij} (p_{ij}^2 - C_0 - C_1 p_{ij} q_{ij} - C_2 q_{ij}^2) = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial E}{\partial C_2} = -2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N q_{ij}^2 (p_{ij}^2 - C_0 - C_1 p_{ij} q_{ij} - C_2 q_{ij}^2) = 0. \quad (3.19)$$

Después se procede a resolver el sistema de ecuaciones que se deriva de (3.17), (3.18), (3.19) donde las variables a encontrar son C_0, C_1, C_2 puesto que los valores de $p_{i,j}$ y $q_{i,j}$ se conocen de los datos de entrada,

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{B} \quad (3.20)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M 1 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_{ij} q_{ij} & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M q_{ij}^2 \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_{ij} q_{ij} & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (p_{ij} q_{ij})^2 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M q_{ij}^2 p_{ij} q_{ij} \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M q_{ij}^2 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_{i,j} q_{ij} q_{ij}^2 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M q_{ij}^2 q_{ij}^2 \end{pmatrix},$$

3.3. CILINDRO ELÍPTICO Y MÍNIMOS CUADRADOS

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_{ij}^2 \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_{ij}^2 p_{ij} q_{ij} \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_{ij}^2 q_{ij}^2 \end{pmatrix}$$

Una forma alternativa de calcular cada una de las entradas de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} y así resolver el sistema descrito en (3.20) es la siguiente.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} Tr[1(1)^T] & Tr[p_{ij}(q_{ij})^T] & Tr[q_{ij}(q_{i,j})^T] \\ Tr[p_{ij}(q_{ij})^T] & Tr[p_{ij}^2(q_{ij}^2)^T] & Tr[q_{ij}^2(pq_{ij})^T] \\ Tr[q_{ij}(q_{ij})^T] & Tr[q_{ij}^2(pq_{ij})^T] & Tr[q_{ij}^2(q_{ij}^2)^T] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} Tr[p_{ij}(p_{ij})^T] \\ Tr[p_{ij}^2(pq_{ij})^T] \\ Tr[p_{ij}^2(q_{ij}^2)^T] \end{pmatrix}$$

donde con Tr denotamos la traza de la matriz [],

$$pq_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11}q_{11} & p_{12}q_{12} & \cdots & p_{1M}q_{1M} \\ p_{21}q_{21} & p_{22}q_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1}q_{N1} & p_{N2}q_{N2} & \cdots & p_{MN}q_{MN} \end{pmatrix}, \quad q_{ij}^2 = \begin{pmatrix} q_{11}q_{11} & q_{12}q_{12} & \cdots & q_{1M}q_{1M} \\ q_{21}q_{21} & q_{22}q_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N1}q_{N1} & q_{N2}q_{N2} & \cdots & q_{MN}q_{MN} \end{pmatrix},$$

$$p_{ij}^2 = \begin{pmatrix} p_{11}p_{11} & p_{12}p_{12} & \cdots & p_{1M}p_{1M} \\ p_{21}p_{21} & p_{22}p_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1}p_{N1} & p_{N2}p_{N2} & \cdots & p_{MN}p_{MN} \end{pmatrix}.$$

Una vez que se conoce el valor de C_0 , C_1 , C_2 se despeja β_1, β_2 y B de la Ec. (3.15) estos valores nos servirán para formar el cilindro elíptico ajustado.

$$\beta_1 = 2 \arctan\left(\frac{2 + C_1}{\sqrt{-(4C_2 - C_1^2)}}\right); \beta_2 = 2 \arccos\left(\frac{C_1}{2\sqrt{-C_2}}\right); \quad (3.21)$$

$$B = \frac{-2\sqrt{-C_0 C_2 (C_1 - C_2 + 1)}}{4C_2 + C_1^2}.$$

Finalmente las ecuaciones paramétricas del cilindro ajustado son:

$$P_{ij} = 2B \sin\left(\frac{\beta_1}{2}\right) \sin\left(\varphi + \frac{\beta_1}{2}\right), \quad (3.22)$$

$$Q_{ij} = 2B \sin\left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right) \sin\left(\varphi + \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right), \quad (3.23)$$

$$R_{ij} = q_{i,1}. \quad (3.24)$$

3.4. Distancia Euclídea y extracción de fase

La distancia que hay entre un punto de intensidad (p, q, r) a un punto de la elipse ajustada (P, Q, R) esta dada por

$$D = \sqrt{(p - P)^2 + (q - Q)^2 + (r - R)^2}, \quad (3.25)$$

sustituyendo a P, Q, R

$$D(\varphi)^2 = (p_{ij} - 2B \sin(\frac{\beta_1}{2}) \sin(\varphi + \frac{\beta_1}{2}))^2 + (q_{ij} - 2B \sin(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}) \sin(\varphi + \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}))^2.$$

Al requerir encontrar el punto en la elipse ajustada que haga que la distancia sea mínima se deriva e iguala a cero a $D(\varphi)^2$

$$d_1 \cos(\varphi) + d_2 \sin(\varphi) + d_3 \sin(2\varphi) + d_4 \cos(2\varphi) = 0, \quad (3.26)$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= p \sin(\frac{\beta_1}{2}) \cos(\frac{\beta_1}{2}) + q \sin(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}) \cos(\frac{\beta_2 + \beta_1}{2}), \\ d_2 &= p \sin(\frac{\beta_1}{2}) \sin(\frac{\beta_1}{2}) + \sin(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}) \sin(\frac{\beta_2 + \beta_1}{2}), \\ d_3 &= 2B(\sin^2(\frac{\beta_1}{2}) \cos(\beta_1) + \sin^2(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}) \cos(\beta_1 + \beta_2)), \\ d_4 &= B(\sin^2(\frac{\beta_1}{2}) \sin(\beta_1) + \sin^2(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}) \sin(\beta_1 + \beta_2)). \end{aligned}$$

Es importante mencionar que se quiere encontrar el punto que haga que la distancia se la mínima pero realmente lo que nos interesa es la fase. De la ecuación (3.26) se encuentran 4 soluciones para el $\cos(\varphi)$, el valor de φ entonces es.

$$\varphi = \pm \arg[\cos \varphi \pm i\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}]. \quad (3.27)$$

Como lo marca la ecuación (3.27) hay 8 valores de φ , pero solo existe un punto que cumple que la distancia sea la mínima. Se evalúa cada valor de φ en la ecuación (3.25) y se toma el valor de fase que tenga la mínima distancia y por lo tanto es el valor de fase que se le asocia al punto de intensidad.

Capítulo 4

Resultados numéricos y experimentales

4.1. Introducción

En esta sección se presenta una verificación numérica para comprobar la teoría expuesta en el capítulo anterior. Se explica la metodología que se siguió para poder realizar la simulación numérica y bajo que condiciones se logró, un diagrama a bloques para ilustrar la metodología de implementación.

4.1.1. Diagrama a bloques

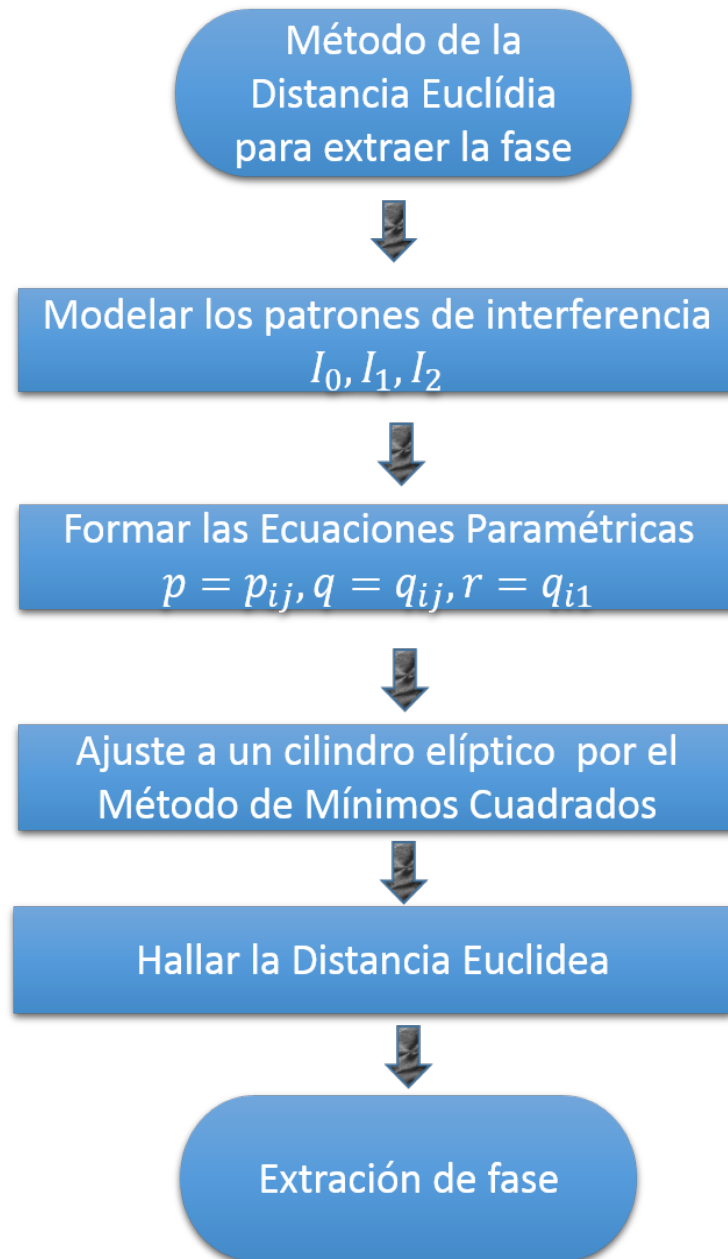


Figura 4.1: Método de la distancia Euclídea utilizando un cilindro de base elíptica

4.2. Implementación numérica

4.2.1. Simulación numérica

Para implementar el método expuesto en el capítulo anterior se escoge primero un lenguaje de programación y para este trabajo el programa se utiliza es Wolfram Mathematica.

Como se muestra en el diagrama a bloques se parte de obtener 3 patrones de interferencia I_0 , I_1 , I_2 con corrimientos de fase arbitrarios (α_1 y α_2). A continuación se explica como se obtienen cada uno de éstos interferogramas.

Definamos las funciones

$$A_1(x, y) = \frac{A_{01}}{2} \exp\left(\frac{-(x - x_1)^2}{\sigma_{x1}} - \frac{(y - y_1)^2}{\sigma_{y1}}\right), \quad (4.1)$$

$$A_2(x, y) = \frac{A_{02}}{2} \exp\left(\frac{-(x - x_2)^2}{\sigma_{x2}} - \frac{(y - y_2)^2}{\sigma_{y2}}\right),$$

donde los valores que se introdujeron para las constantes son: $A_{01} = 1$, $x_1 = 16$, $y_1 = 3$, $\sigma_{x1} = 150000$, $\sigma_{y1} = 250000$, $A_{02} = 1$, $x_2 = 10$, $y_2 = -3$, $\sigma_{x2} = 150000$, $\sigma_{y2} = 250000$.

Con el fin de comprobar la teoría del capítulo 3 se elige que $x \in \left(\frac{-D_x}{2}, \frac{D_x}{2}\right)$ con un paso de $\Delta_x = \frac{D_x}{N_p}$ y $y \in \left(\frac{-D_y}{2}, \frac{D_y}{2}\right)$ con un paso de $\Delta_y = \frac{D_y}{M_p}$ como el dominio de las funciones A_1 y A_2 . Donde $D_x = 10$, $D_y = 10$ y la cantidad de puntos por filas y columnas se denotan por $M_p = 204$, $N_p = 204$ respectivamente.

CAPÍTULO 4 RESULTADOS NUMÉRICOS Y EXPERIMENTALES

Como lo que realmente se necesita es la diferencia de fase de estos 2 campos se hace

$$\phi_1(x, y) = 0; \quad \phi_2(x, y) = \frac{-(x - x_h)^2}{\sigma_x} - \frac{(y - y_h)^2}{\sigma_y}, \quad (4.2)$$

con $x_h = 0$, $y_h = 0$ $\sigma_x=1.5$, $\sigma_y=2.5$. Entonces los patrones de interferencia se consiguen con la superposición de los campos

$$E_1 = A_{1p}e^{i\phi_{1p}}, \quad E_2 = A_{2p}e^{i\phi_{2p}}. \quad (4.3)$$

Para poder obtener los patrones de interferencia que resultan de hacer interferir éstos campos se realizan las siguientes operaciones y lo que se obtiene se muestra en la figura (4.2)

$$I_0 = (E_1 + E_2) * \overline{(E_1 + E_2)}, \quad (4.4)$$

$$I_1 = (E_1e^{i\alpha_1} + E_2) * \overline{(E_1e^{i\alpha_1} + E_2)}, \quad (4.5)$$

$$I_2 = (E_1e^{i\alpha_2} + E_2) * \overline{(E_1e^{i\alpha_1} + E_2)}, \quad (4.6)$$

donde I_0, I_1, I_2 son matrices de tamaño $M_p \times N_p$ y $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ y $\alpha_2 = \pi$.

El segundo paso es formar las ecuaciones paramétricas como en (3.9). Como se conoce a I_0 , I_1 e I_2 se calcula punto a punto a las ecuaciones

$$p = I_0 - I_1; \quad q = I_1 - I_2, \quad (4.7)$$

por lo tanto las ecuaciones paramétricas son:

$$p = p_{ij}; \quad q = q_{ij}; \quad r = q_{i1}, \quad (4.8)$$

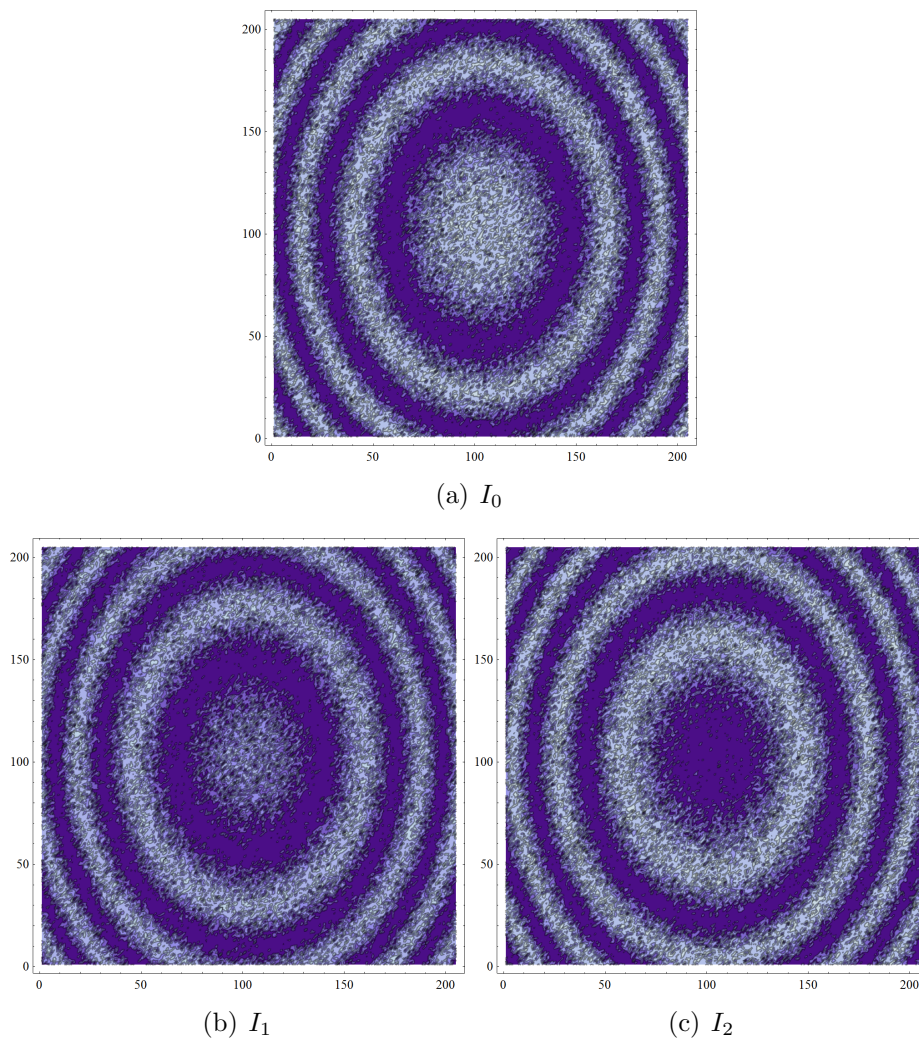


Figura 4.2: Patrones de interferencia en el caso de b) I_1 tiene un corrimiento de fase de $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ y c) I_2 un corrimiento de $\alpha_2 = \pi$

Los puntos (p, q, r) se distribuyen siguiendo a las ecuaciones de un cilindro elíptico porque así se construyeron, pero recordemos que en cada punto el valor de $b_{i,j}$ varía espacialmente por lo tanto cada punto obedece a la ecuación de un cilindro elíptico diferente, como se observa en la gráfica siguiente.

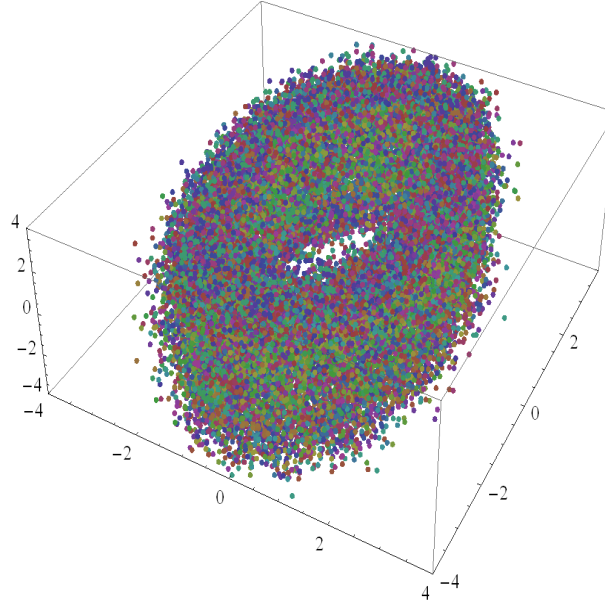


Figura 4.3: Resultado de evaluar a todos los puntos de la forma $p = p_{i,j}$, $q = q_{i,j}$ $r = q_{i,1}$ que se forman con los patrones de interferencia

El ajustar a un cilindro elíptico por mínimos cuadrados es el siguiente paso. De acuerdo a la teoría expuesta en el capítulo 3 se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones para encontrar los valores de C_0 , C_1 , C_2 se elige la forma alternativa por simplicidad la cual es,

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tr[1(1)^T] & Tr[p_{ij}(q_{ij})^T] & Tr[q_{ij}(q_{ij})^T] \\ Tr[p_{ij}(q_{i,j})^T] & Tr[p_{ij}^2(q_{ij}^2)^T] & Tr[q_{i,j}^2(pq_{ij})^T] \\ Tr[q_{ij}(q_{ij})^T] & Tr[q_{ij}^2(pq_{ij})^T] & Tr[q_{ij}^2(q_{ij}^2)^T] \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Tr[p_{ij}(p_{ij})^T] \\ Tr[p_{ij}^2(pq_{ij})^T] \\ Tr[p_{ij}^2(q_{ij}^2)^T] \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

4.2. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Para formar el cilindro elíptico que resulta de hacer el ajuste de acuerdo a la Ecs.(3.22),(3.23),(3.24) se toman las ecuaciones paramétricas.

$$P = 2B \sin\left(\frac{\beta_1}{2}\right) \sin\left(\varphi + \frac{\beta_1}{2}\right) \quad (4.10)$$

$$Q = 2B \sin\left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right) \sin\left(\varphi + \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right) \quad (4.11)$$

$$R = q_{i,1} \quad (4.12)$$

Donde β_1 y β_2 se calcularon como lo indica la ecuación (3.21), φ es sustituida por $\left(\frac{2\pi}{M+1}j\right)$.

El cilindro elíptico ajustado que se obtiene,

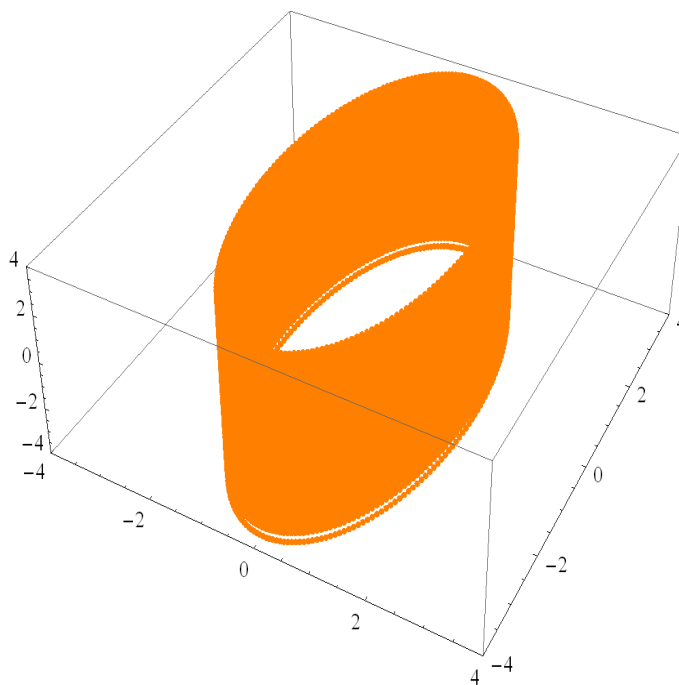


Figura 4.4: Cilindro de base elíptica ajustado por el Método de Mínimos Cuadrados

Lo que hasta ahora se ha realizado se muestra la Fig (4.5).

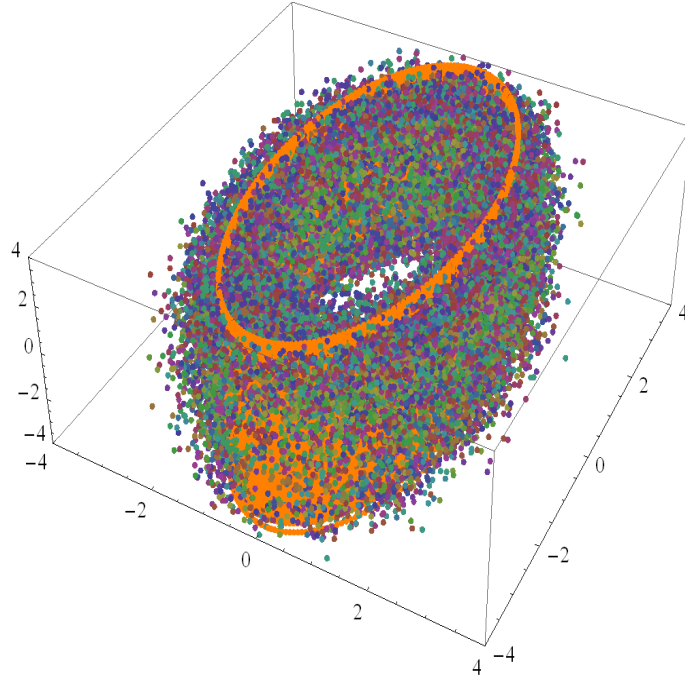


Figura 4.5: Cilindro de base elíptica ajustado y puntos (p, q, r)

El paso que sigue es resolver la Ec (3.26) para extraer la fase, el resultado es el siguiente

$$\cos \phi = \{sol1, sol2, sol3, sol4\}, \quad (4.13)$$

$$\varphi = \pm \arg(\cos(\varphi) \pm i\sqrt{1 - \cos^2(\varphi)}). \quad (4.14)$$

Se toma un punto (p, q, r) y se obtiene la fase del punto que está en el cilindro elíptico ajustado que hace que la distancia al punto que se tomó sea la mínima figura (4.5). Este proceso se hace para todos los puntos del cilindro elíptico.

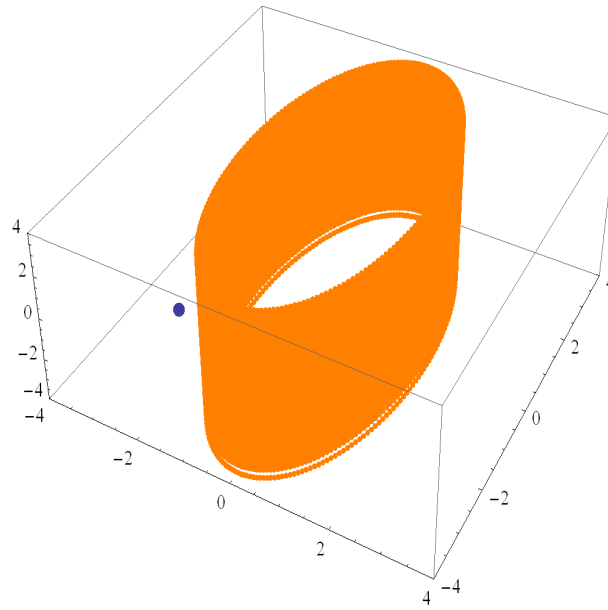


Figura 4.6: Cilindro de base elíptica ajustado y punto (p, q, r) .

4.3. Evaluación de patrones de interferencia experimentales

Como se menciona en la teoría del capítulo 3 se parte de tener 3 patrones de interferencia, en este caso los patrones de interferencia que se capturan se muestran en las siguientes imágenes.

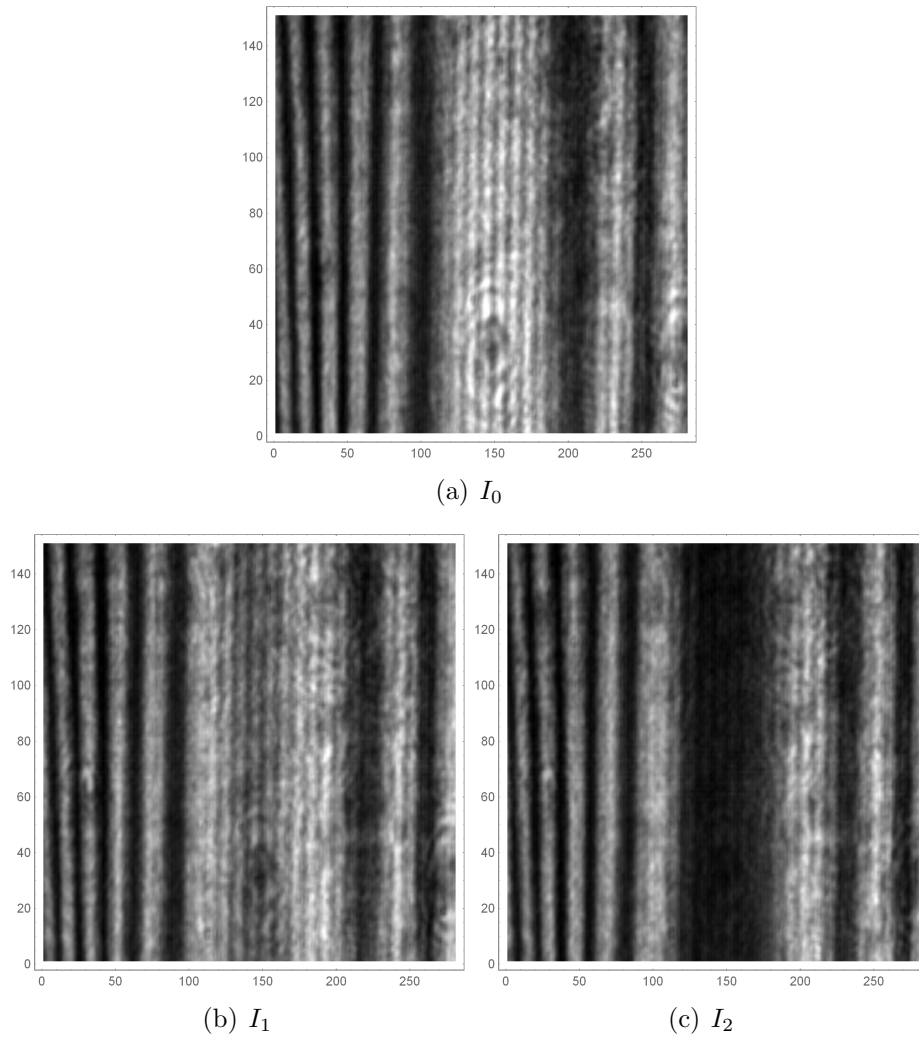


Figura 4.7: Patrones de interferencia I_0, I_1, I_2 .

De la figura (4.7) se observa que la cantidad de datos por filas es de 150 y en columnas de 260. Se obtienen los patrones secundarios a los que llamamos como p y q (Ec. 3.4).

4.3. EVALUACIÓN DE PATRONES DE INTERFERENCIA EXPERIMENTALES

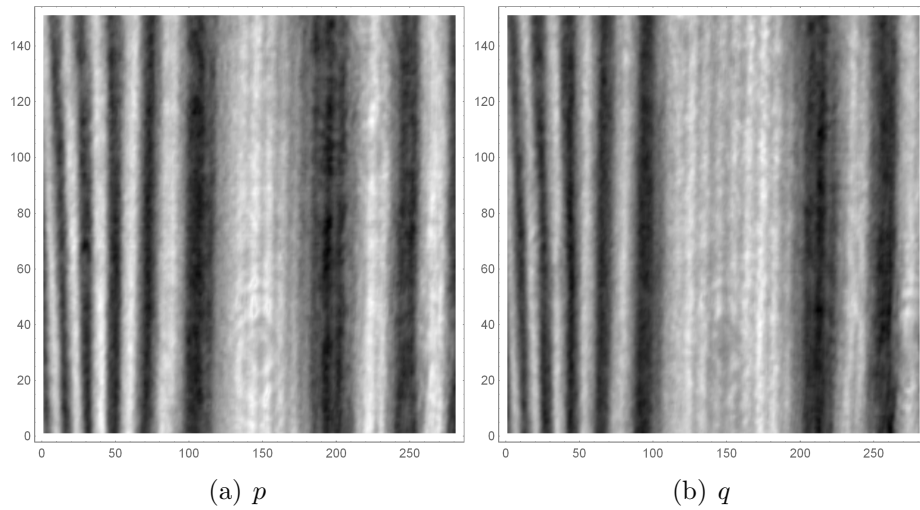


Figura 4.8: Patrones Secundarios a) $p = I_0 - I_1$, b) $q = I_1 - I_2$.

Al formar la triada (p, q, r) donde recordemos que r la obtenemos como q_{i1} se obtiene

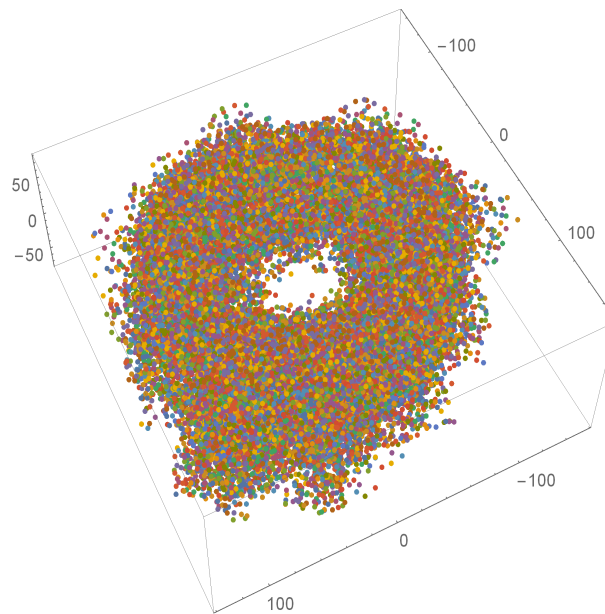


Figura 4.9: Gráfica de todos los puntos (p, q, r) .

Lo siguiente que se realiza es ajustar esta colección de puntos a un cilindro elíptico. Se obtienen las constantes C_0, C_1, C_2 , haciendo los cálculos como lo marca la Ec. (4.9) es fácil de obtenerlos, luego se obtienen a β_1, β_2, B como en la Ec. (3.21) para así formar los puntos (P, Q, R) que estos forman un cilindro elíptico como se muestra.

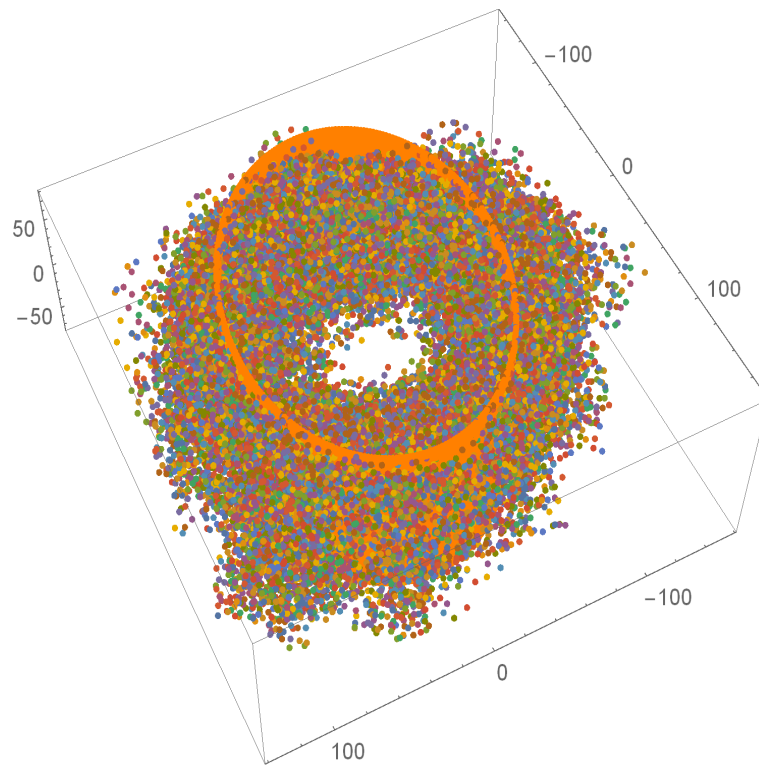


Figura 4.10: Cilindro de base elíptica ajustado y puntos (p, q, r) .

4.3. EVALUACIÓN DE PATRONES DE INTERFERENCIA EXPERIMENTALES

Calculamos la distancia Euclídea de cada punto (p, q, r) al cilindro elíptico.

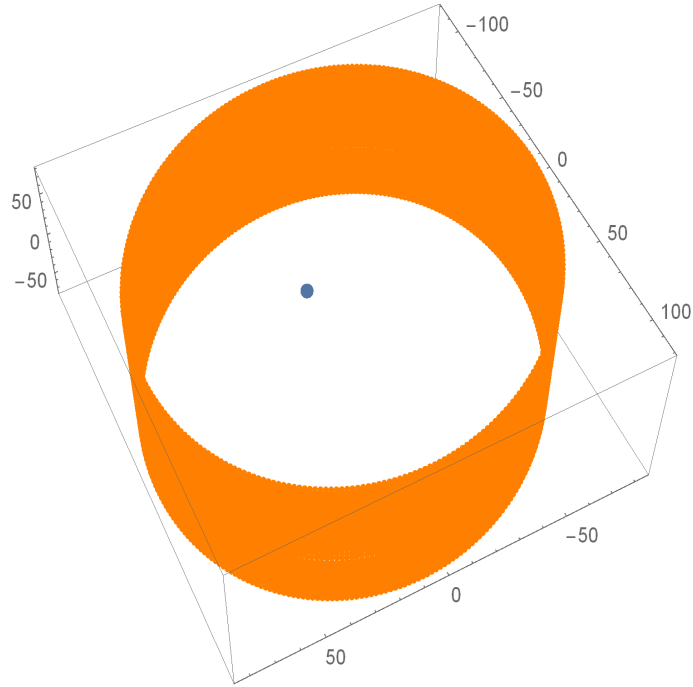
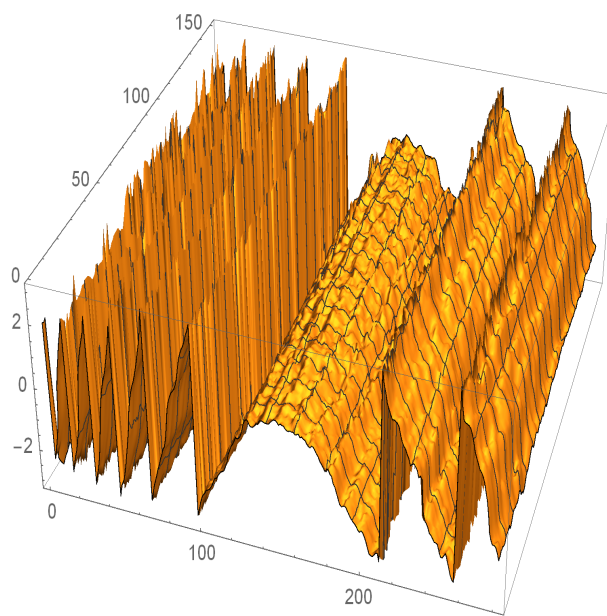
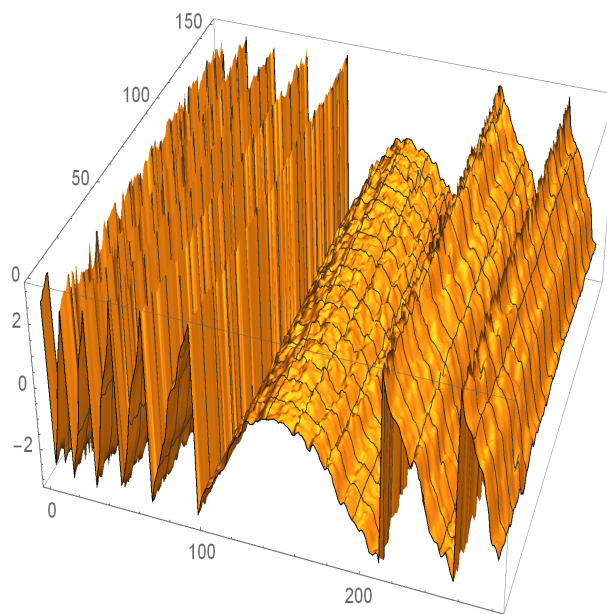


Figura 4.11: Cilindro de base elíptica ajustado y puntos (p, q, r) .

Encontramos la fase como está descrito en la sección (3.4) también se obtiene la fase utilizando la tangente inversa (método PSA) con fines de comparación entonces lo que se tiene es



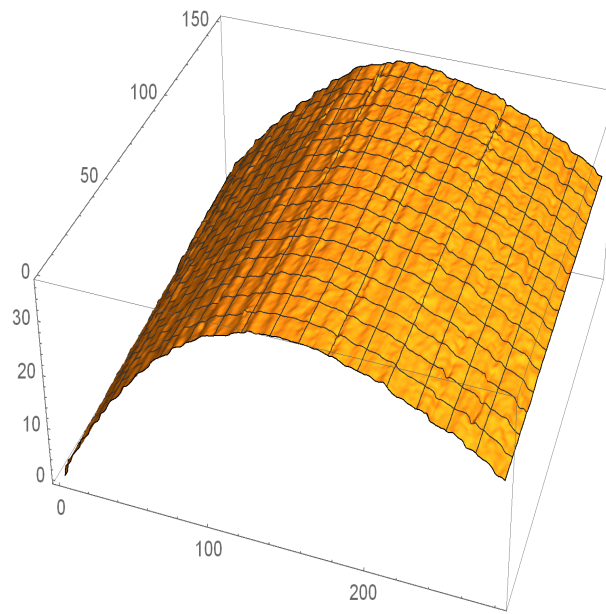
(a)



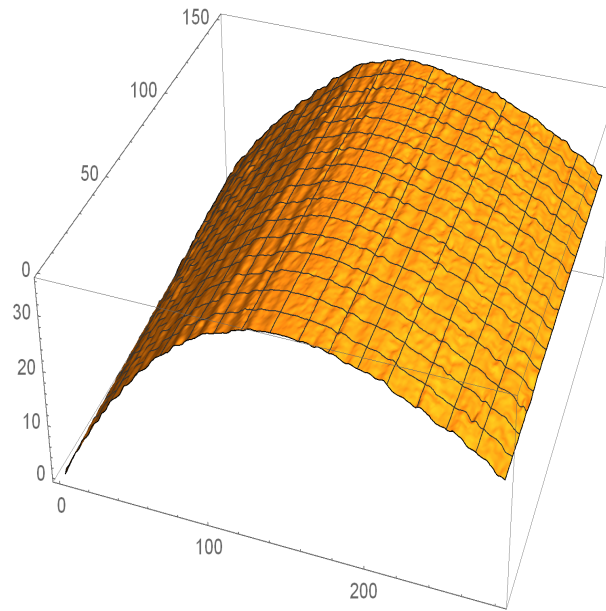
(b)

Figura 4.12: Gráfica de la fase que se recupera con el a) método de la distancia Euclídea y b) método PSA.

4.3. EVALUACIÓN DE PATRONES DE INTERFERENCIA
EXPERIMENTALES



(a)



(b)

Figura 4.13: Fase desenvuelta a) método de la distancia Euclídea b) método PSA.

CAPÍTULO 4 RESULTADOS NUMÉRICOS Y EXPERIMENTALES

Se muestran la evaluación de otros patrones de interferencia para la obtención de fase siguiendo el mismo procedimiento que los patrones de interferencia anteriores.

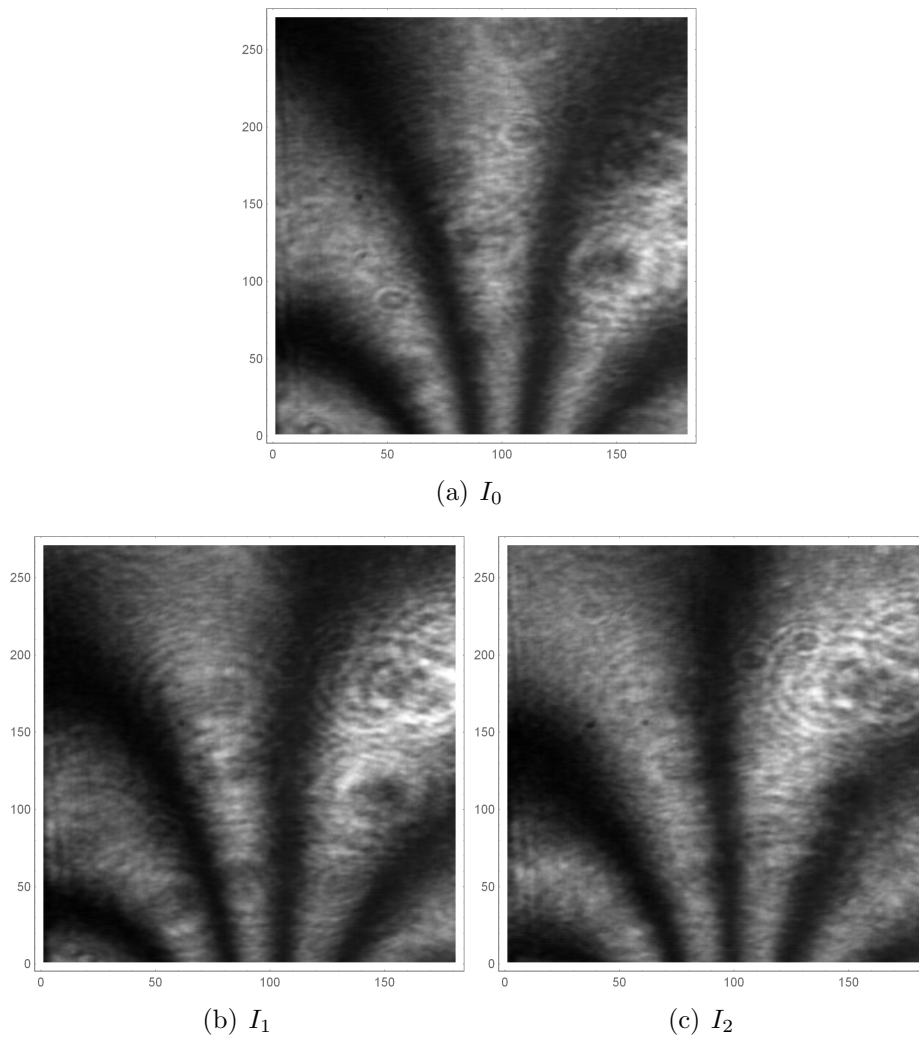
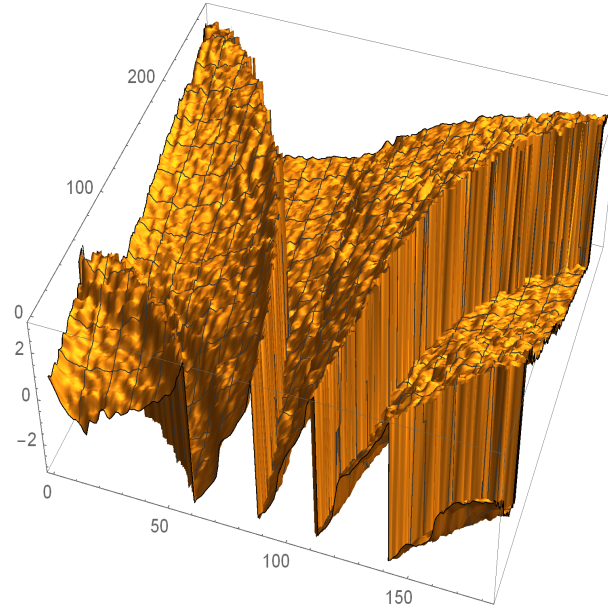
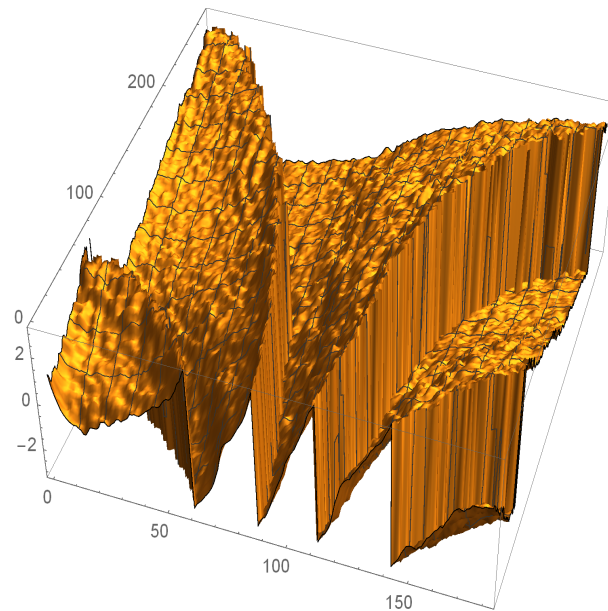


Figura 4.14: Patrones de interferencia I_0 , I_1 , I_2 .

4.3. EVALUACIÓN DE PATRONES DE INTERFERENCIA
EXPERIMENTALES

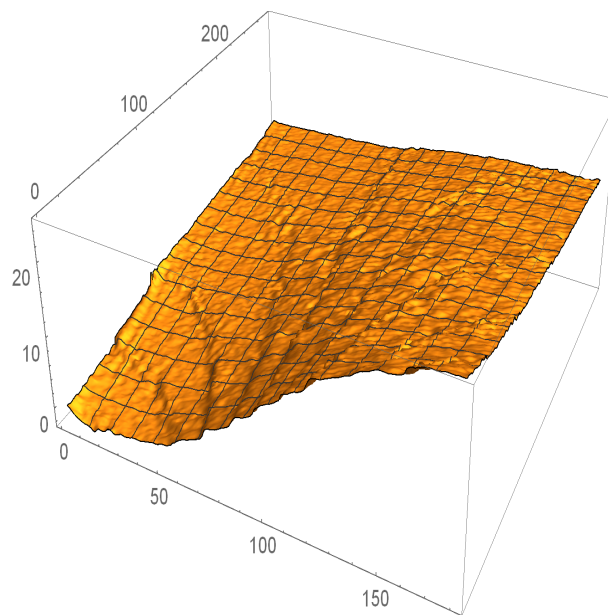


(a)

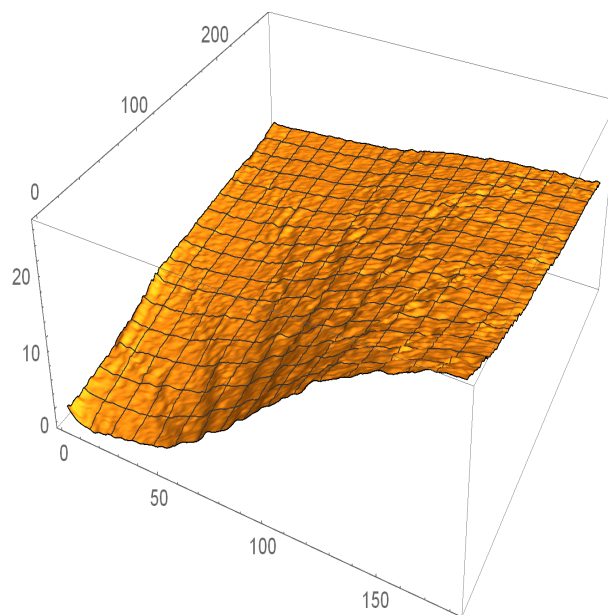


(b)

Figura 4.15: Gráfica de la fase que se recupera con el a) método de la distancia Euclídea y b) método PSA.



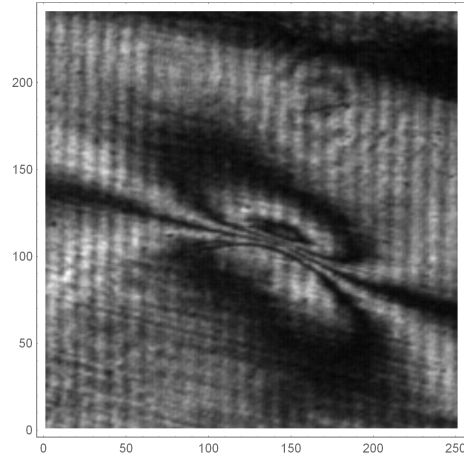
(a)



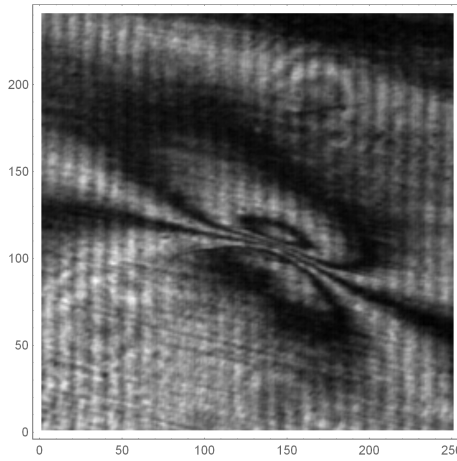
(b)

Figura 4.16: Fase desenvuelta a) Método de la distancia Euclídea b) Método PSA.

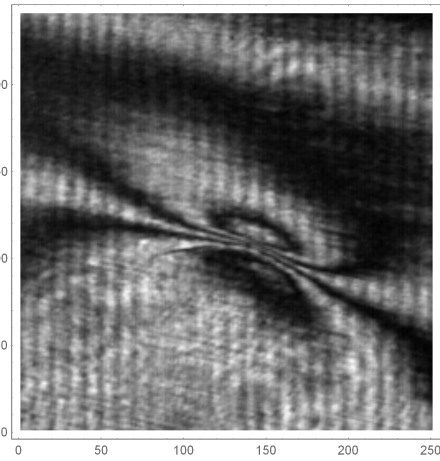
4.3. EVALUACIÓN DE PATRONES DE INTERFERENCIA
EXPERIMENTALES



(a) I_0

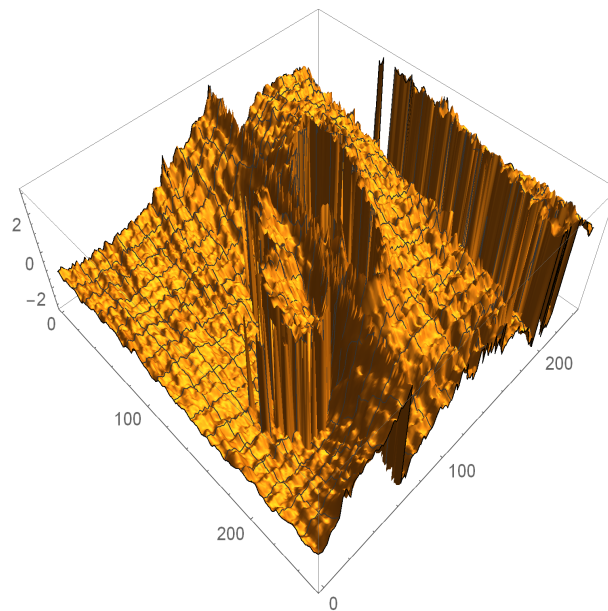


(b) I_1

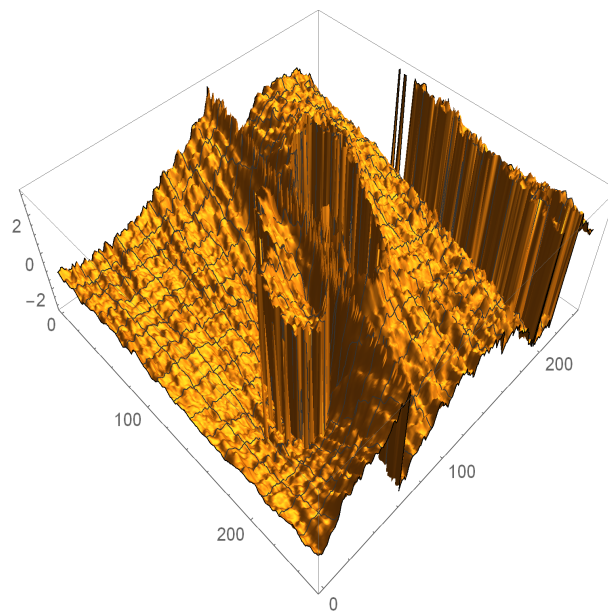


(c) I_2

Figura 4.17: Patrones de interferencia I_0 , I_1 , I_2 .



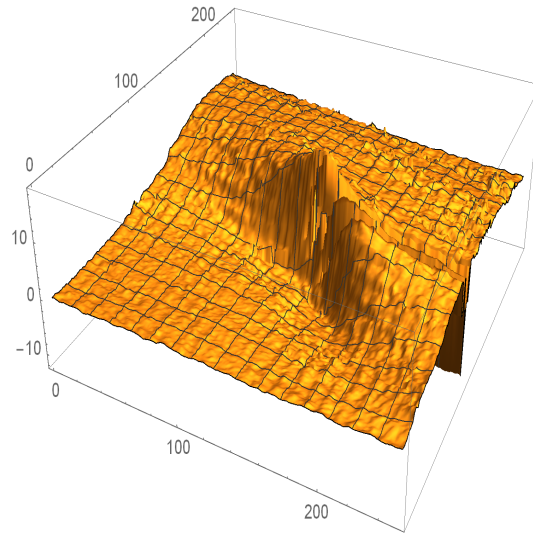
(a)



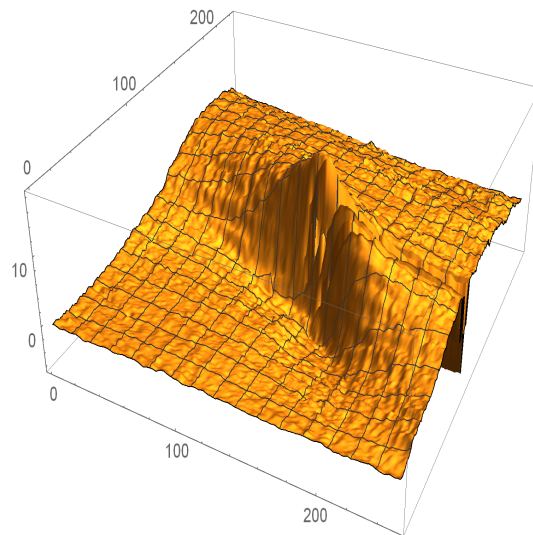
(b)

Figura 4.18: Gráfica de la fase que se recupera con el a) Método de la distancia Euclídea y b) Método PSA.

4.3. EVALUACIÓN DE PATRONES DE INTERFERENCIA
EXPERIMENTALES



(a)



(b)

Figura 4.19: Fase desenvuelta a) Método de la distancia Euclídea b) Método PSA.

CAPÍTULO 4 RESULTADOS NUMÉRICOS Y EXPERIMENTALES

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusiones

5.1.1. Conclusiones Generales

Se logró recuperar la fase mediante el método de la distancia Euclídea de un punto a un cilindro de base elíptica del cuál se desarrolló el modelo teórico, se implementó el Método de Mínimos Cuadrados para ajustar los puntos a un cilindro elíptico y un algoritmo para calcular la distancia Euclídea que ayudaron a implementar la obtención de fase de manera numérica. Se evaluaron patrones de interferencia experimentales para extraer la fase con el algoritmo que se implementó.

5.1.2. Discusión

El algoritmo propuesto en el presente trabajo de tesis fue implementado bajo condiciones controladas en una simulación numérica y también se aplicó en la evaluación de patrones experimentales para 3 distintos objetos de fase. En ambos casos, se verificó de manera plausible que los resultados son aceptables mediante la evaluación de estos mismos interferogramas usando el algoritmo PSA dado en la Ec.(2.27). La verificación cuantitativa del método está fuera del alcance del presente trabajo, así como también determinar el nivel de variación espacial de la luz de modulación b y el nivel de ruido presente en la captura de los datos experimentales para que el método aquí presentado funcione. Como se puede notar, el error en el cálculo de la fase del objeto crece con el nivel de variación espacial de la luz de fondo y con el nivel de ruido, pero determinar un análisis cuantitativo de este problema está fuera del alcance de este trabajo. Otro punto que se debe tomar atención es el método usado para ajustar a un cilindro elíptico el conjunto de datos dispersos dados por el acomodo de los interferogramas, queda abierta la posibilidad de usar otros métodos alternativos y proponer otras geometrías.

5.1.3. Trabajo a futuro

1.- Analizar la influencia que tienen las variaciones de ruido presente en el experimento en el cálculo de la fase usando el método de la distancia Euclídea en un cilindro elíptico.

2.- Analizar la influencia que introducen las variaciones espaciales de la luz de modulación b en el calculo de la fase.

3.- Investigar si existe un rango para el nivel de ruido y para el nivel de variación de b donde el método de la distancia Euclídea sea más aproximado que el método tradicional que usa la función tangente.

4.- Proponer otro método de ajuste y probar el método con otro tipo de geometrías.

Bibliografía

- [1] J. H. Bruning, D. R. Herriot, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White, and D. J. Bragaccio, “Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surfaces and lenses,” *Appl. Opt.* **13**(11), 2693-2703 (1974).
- [2] J. Schwider, “Advanced evaluation techniques in interferometry,” in *Progress in Optics*, Vol. XXVIII, E. Wolf, ed., (Elsevier Science, 1990), pp. 274-276
- [3] R. K. Leach, *Optical measurement of surface topography* (Springer, Berlin Heidelberg, 2011)
- [4] D. Nolte, *Optical interferometry for biology and medicine* (Springer New York, 2012)
- [5] T. Kiire, S. Nakadate and M. Shibuya, “Phase-shifting interferometer based on changing the direction of the linear polarization orthogonally,” *Appl. Opt.* **47**(21), 3784-3788 (2008).
- [6] T. Susuki and R. Hioki, “Translation of light frequency by a moving grating,” *J. Opt. Soc. Am.* **57**(12), 1551-1551 (1967).

- [7] C. Meneses-Fabian, R. Kantun-Montiel, G-P. Lemus-Alonso, and U. Rivera-Ortega, “Double aperture common-path phase-shifting interferometry by translation a ruling at the input plane,” *Opt. Lett.* **38**(11), 1850-1852 (2013).
- [8] C. Tay, C. Quan, and H. Shang, “Shape identification using phase shifting interferometry and liquid-crystal phase modulator,” *Opt. Laser Technol.* **30**(8) 545-550 (1998)
- [9] C. Robledo-Sánchez, R. Juarez-Salazar, C. Meneses-Fabian, F. Guerrero-Sanchez, and L. M. Arevalo-Aguilar, G. Rodriguez-Zurita, and V. Ixba-Santos “Phase-shifting interferometry based on the lateral displacement of the light source,” *Opt. Express.* **21**(14), 17228-17233 (2013)
- [10] U. Rivera-Ortega, C. Meneses-Fabian and G. Rodriguez-Zurita, “Inhomogeneous phase-visibility modulating interferometry by space on-off non-quadrature amplitude modulation,” *Opt. Express.* **21**(15), 17421-17434 (2013)
- [11] U. Rivera-Ortega, C. Meneses-Fabian, G. Rodriguez-Zurita, and C. Robledo-Sanchez, “Phase-visibility modulating interferometry by binary non-quadrature amplitude modulation with neutral density filters,” *Opt. Laser Eng.* **55**, 226-231 (2014)
- [12] C. Meneses-Fabian, U. Rivera-Ortega, and G. Rodriguez-Zurita, “One-shot phase-visibility modulating interferometry by on-off non-quadrature amplitude modulation,” *Opt. Laser Eng.* **58**, 33-38 (2014)
- [13] C. Meneses-Fabian and U. Rivera-Ortega, “Phase-shifting interferometry by the wave amplitude modulation,” *Opt. Lett.* **36**(13), 2417-2419 (2011).
-

- [14] C. Meneses-Fabian and U. Rivera-Ortega, "Phase-shifting interferometry by the wave amplitude modulation: General case," *Opt. Laser Eng.* **50**(7), 905-909 (2012).
- [15] H. Schreiber, J. H. Brunning, and J. E. Greivenkamp, "Phase shifting interferometry," in *Optical Shop Testing*, D. Malacara ed., (John Wiley & Sons, Inc., 2007).
- [16] P. Hariharan, B. F. Oreb, and T. Eiju, "Digital phase-shifting interferometry: a simple error-compensating phase calculation algorithm," *Appl. Opt.* **26**(13), 2504-2506 (1987).
- [17] J. Schmit and K. Creath, "Extended averaging technique for derivation of error-compensating algorithms in phase-shifting interferometry," *Appl. Opt.* **34**(19), 3610-3619 (1995).
- [18] C. J. Morgan, "Least squares estimation in phase-measurement interferometry," *Opt. Lett.* **7**(8), 368-370 (1982).
- [19] J. E. Grievenkamp, "Generalized data reduction for heterodyne interferometry," *Opt. Eng.* **23**(4), 350-352 (1984).
- [20] A. Patil and P. Rastogi, "Approaches in generalized phase shifting interferometry," *Opt. Laser Eng.* **43**(3-5), 475-490 (2005).
- [21] G. Lai and T. Yatagai, "Generalized phase-shifting interferometry," *J. Opt. Soc. Am. A* **8**(5), 822-827 (1991).
- [22] T. Kadona, "Statistical interferometry based on the statistics of speckle phase," *Opt. Lett.* **16**(12), 883-5 (1991).

- [23] L. Z. Cai, Q. Liu, and X. L. Yang, “Generalized phase-shifting interferometry with arbitrary unknown phase steps for diffraction objects,” *Opt. Lett.* **29**(2), 183-185 (2004).
- [24] C. T. Farrell and M. A. Player, “Phase step measurement and variable step algorithms in phase-shifting interferometry,” *Meas. Sci. Technol.* **3**(10), 953-958 (1992).
- [25] C. T. Farrell and M. A. Player, “Phase-step insensitive algorithms for phase-shifting interferometry,” *Meas. Sci. Technol.* **5**(6), 648-652 (1994).
- [26] A. Fitzgibbon, M. Pilu, and R. B. Fisher, “Direct least square fitting of ellipses,” *Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **21**(5) 474-480 (1999).
- [27] F. L. Bookstein, “Fitting conic sections to scattered data,” *Comput. Graphics Image Process.* **9**(1), 56-71 (1979).
- [28] A. Albertazzi, A. V. Fantin, A. F. Maia, D. P. Willemann, M. E. Benedet, and M. Viotti, “Use of generalized N-dimensional Lissajous figures for phase retrieval from sequences of interferometric images with unknown phase shifts,” *Fringe 2013*, 191-196 (2014).
- [29] G.-S. Han and S.-W. Kim, “Numerical correction of reference phases in phase-shifting interferometry by iterative least-squares fitting,” *Appl. Opt.* **33**(31), 7321-7325 (1994).
- [30] K. Hibino, B. F. Oreb, D. I. Farrant, and K. G. Larkin, “Phase-shifting algorithms for nonlinear and spatially nonuniform phase shifts,” *J. Opt. Soc. Am. A* **14**(4), 918-930 (1997).
- [31] B. Raphael, I. F. C. Smith, “A direct stochastic algorithm for global search,” *Appl. Math. Comput.* **146**(2-3), 729-758 (2013).

- [32] P. Carré, “Installation et utilisation du comparateur photoélectrique et interférentiel du Bureau International des Poids et Mesures,” *Metrologia* **2**(1), 13-23 (1966).
- [33] Q. Kemaο, S. Fangjun, and W. Xiaoping, “Determination of the best phase step of the Carré algorithm in phase shifting interferometry,” *Meas. Sci. Technol.* **11**(8), 1220-1223 (2000).
- [34] J. Novak, P. Novak, and A Miks, “Multi-step Phase-shifting Algorithms Insensitive to Linear Phase Shift Errors,” *Opt. Commun.* **281**, 5302-5309 (2008).
- [35] E. Hack, “Measurement uncertainty of Carre'-type phase-stepping algorithms,” *Opt. Laser Eng.* **50**(8), 1023-1025 (2012)
- [36] P. Rastogi and E. Hack, *Phase estimation in optical interferometry*, (CRC Press 2014)
- [37] Z. Wang, and B. Han, “Advanced iterative algorithm for phase extraction of randomly phase-shifted interferograms,” *Opt. Lett.* **29**(14), 1671-1673 (2004).
- [38] I. B. Kong, S.W. Kim, “General algorithm of phase-shifting interferometry by iterative least-squares fitting,” *Opt. Eng.* **34**(1), 183-188 (1995).
- [39] J. Vargas, J. Antonio Quiroga, and T. Belenguer, “Phase-shifting interferometry based on principal component analysis,” *Opt. Lett.* **36**(8), 1326-1328 (2011).

- [40] J. Vargas, J. Antonio Quiroga, and T. Belenguer, “Analysis of the principal component algorithm in phase-shifting interferometry,” *Opt. Lett.* **36**(12), 2215-2217 (2011).
- [41] J. Vargas, C.O.S. Sorzano, J. C. Estrada, and J. M. Carazo, “Generalization of the Principal Component Analysis algorithm for interferometry,” *Opt. Commun.* **286**, 130-134 (2013).
- [42] K. Freischlad, and C. L. Koliopoulos, “Fourier description of digital phase-measuring interferometry,” *J. Opt. Soc. Am. A* **7**(4), 542-551 (1990).
- [43] K. G. Larkin and B. F. Oreb, “Design and assessment of symmetrical phase-shifting algorithms,” *J. Opt. Soc. Am. A* **9**(10), 1740-1748 (1992).
- [44] M. Servin, J. C. Estrada, and J. A. Quiroga, “Spectral analysis of phase shifting algorithms,” *Opt. Express* **17**(19), 16423-16428 (2009).
- [45] M. Servin, J. C. Estrada, and J. A. Quiroga, “The general theory of phase shifting algorithms,” *Opt. Express* **17**(24), 21867-21881 (2009).
- [46] J. F. Mosiño, D. M. Doblado, and D. M. Hernández, “A method to design tunable quadrature filters in phase shifting interferometry,” *Opt. Express* **17**(18), 15772-15777 (2009).
- [47] J. F. Mosiño, J. C. Gutiérrez-García, T. A. Gutiérrez-García, and J. M. Macías-Preza, “Two-frame algorithm to design quadrature filters in phase shifting interferometry,” *Opt. Express* **18**(24), 24405-24411 (2010).
- [48] A. Téllez-Quiñones, and D. Malacara-Doblado, “Inhomogeneous phase shifting: an algorithm for nonconstant phase displacements,” *Appl. Opt.* **49**(32), 6224-6231 (2010).

- [49] K. Qian, S. H. Soon, and A. Asundi, "Phase-shifting windowed Fourier ridges for determination of phase derivatives," *Opt. Lett.* **28**(18), 1657-1659 (2003)
- [50] B. Zielinski, K. Patorski, "Application of the S-transform to the phase-shift extraction in phase shifting interferometry," *Proc. SPIE 7746*, 17th Slovak-Czech-Polish Optical conference on wave and quantum aspects of contemporary optics, 77460J (2010);
- [51] Y. Surrel, "Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping," *Appl. Opt.* **35**(1), 51-60 (1996).
- [52] C. Meneses-Fabian and F. A. Lara-Cortes, "Phase retrieval by Euclidean distance in self-calibrating generalized phase-shifting interferometry of three steps," *Opt. Express* **23**, 13589-13604 (2015)
- [53] S. Chakraborty and K. Bhattacharya, "Real-time edge detection by cyclic-path polarization interferometer," *Appl. Opt.* **53**, 727-730 (2014)
- [54] S. Sarkar, N. Ghosh, S. Chakraborty, and K. Bhattacharya, "Self-referenced rectangular path cyclic interferometer with polarization phase shifting," *Appl. Opt.* **51**, 126-132 (2012)
- [55] Hariharan P. and D. Sen, "Cyclic Shearing Interferometer," *J. Sci. Instrum.*, **37**, 374 (1960).
- [56] Y. P. Kumar and S. Chatterjee, "Measurement of longitudinal displacement using lateral shearing cyclic path optical configuration setup and phase shifting interferometry," *Appl. Opt.* **50**, 1350-1355 (2011)
- [57] D. R. Austin, T. Witting, C. A. Arrell, F. Frank, A. S. Wyatt, J. P. Marangos, J. W.G. Tisch, and I. A. Walmsley, "Lateral shearing in-

- terferometry of high-harmonic wavefronts,” *Opt. Lett.* **36**, 1746-1748 (2011)
- [58] S. Chatterjee and Y. P. Kumar, “Measurement of the surface profile of a curved optical surface with rotation phase-shifting lateral shear cyclic path optical configuration,” *Appl. Opt.* **50**, 2823-2830 (2011)
- [59] Y. P. Kumar and S. Chatterjee, “Opaque optics thickness measurement using a cyclic path optical configuration setup and polarization phase shifting interferometry,” *Appl. Opt.* **51**, 1352-1356 (2012)
- [60] Y. P. Kumar and S. Chatterjee, “Simultaneous determination of refractive index and thickness of moderately thick plane-parallel transparent glass plates using cyclic path optical configuration setup and a lateral shearing interferometer,” *Appl. Opt.* **51**, 3533-3537 (2012)
- [61] D. Liu, Y. Yang, L. Wang, and Y. Zhuo, “Real time diagnosis of transient pulse laser with high repetition by radial shearing interferometer,” *Appl. Opt.* **46**, 8305-8314 (2007)
- [62] N. Gu, L. Huang, Z. Yang, and C. Rao, “A single-shot common-path phase-stepping radial shearing interferometer for wavefront measurements,” *Opt. Express* **19**, 4703-4713 (2011)
- [63] D. N. Naik, G. Pedrini, and W. Osten, “Recording of incoherent-object hologram as complex spatial coherence function using Sagnac radial shearing interferometer and a Pockels cell,” *Opt. Express* **21**, 3990-3995 (2013)

- [64] D. H. Li, H. X. Chen, and Z. P. Chen, “Simple algorithms of wavefront reconstruction for cyclic radial shearing interferometer”, *Opt. Eng.* **41**, 1893 (2002).
- [65] D. Li, F. Wen, Q. Wang, Y. Zhao, F. Li, and B. Bao, “Improved formula of wavefront reconstruction from a radial shearing interferogram,” *Opt. Lett.* **33**, 210-212 (2008)
- [66] D.-H. Li, X.-P. Qi, Q.-H. Wang, X.-Y. Liu, G.-Y. Feng, and S.-H. Zhou, “Accurate retrieval algorithm of amplitude from radial-shearing interferogram,” *Opt. Lett.* **35**, 3054-3056 (2010)
- [67] N. Gu, L. Huang, Z. Yang, Q. Luo, and C. Rao, “Modal wavefront reconstruction for radial shearing interferometer with lateral shear,” *Opt. Lett.* **36**, 3693-3695 (2011)
- [68] T. Ling, D. Liu, Y. Yang, L. Sun, C. Tian, and Y. Shen, “Off-axis cyclic radial shearing interferometer for measurement of centrally blocked transient wavefront,” *Opt. Lett.* **38**, 2493-2495 (2013)
- [69] K. R. Freischlad, “Absolute interferometric testing based on reconstruction of rotational shear,” *Appl. Opt.* **40**, 1637-1648 (2001)
- [70] K. Watanabe and T. Nomura, “Recording spatially incoherent Fourier hologram using dual channel rotational shearing interferometer,” *Appl. Opt.* **54**, A18-A22 (2015)
- [71] K. U. Hii and K. H. Kwek, “Wavefront reversal technique for self-referencing collimation testing,” *Appl. Opt.* **49**, 668-672 (2010)
- [72] C. Meneses-Fabian, G. Rodríguez-Zurita, R. Rodríguez-Vera and J. F. Vazquez-Castillo, “Optical tomography of phase objects with parallel

- projection differences and Electronic Speckle Pattern Interferometry,”
Opt.Commun.**228**, 201-210 (2003)
- [73] D. Malacara, M. Servín, and Z. Malacara, Interferogram Analysis for
Optical Testing, (Optical Engineering (Marcel Dekker, Inc.) New York,
1998).
- [74] D. Malacara, ed., Optical Shop Testing, 2nd ed. (Wiley, 1992).
- [75] K. Creath, “Phase-measurement interferometry techniques”, in Progress
in Optics XXVI, E. Wolf, eds. (ELSEVIER Science Publishers, 1998),
pp. 349-393.
- [76] J. W. Goodman, introduction to Fourier Optics, 2nd ed., (McGraw-Hill,
1996)