



BENEMETIRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIA FÍSICO MATEMÁTICAS

**CONTINUOS CASI ENREJADOS LOCALMENTE CONEXOS
TIENEN TERCER PRODUCTO SIMÉTRICO ÚNICO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

M. EN C. VIANEY CÓRDOVA SALAZAR

DIRECTOR

**DAVID HERRERA CARRASCO
FERNANDO MACÍAS ROMERO**

PUEBLA, PUE.

NOVIEMBRE 2019



BUAP.

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

VIANEY CÓRDOVA SALAZAR

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 14 de octubre de 2019, con la tesis titulada:

***“CONTINUOS CASI ENREJADOS LOCALMENTE CONEXOS
TIENEN TERCER PRODUCTO SIMÉTRICO ÚNICO”***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.

H. Puebla de Z, a 14 de octubre de 2019

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.



DRA.PDS/mtrv

*A mi familia y
a mis amigos Alvaro y Arcadia*

Agradecimientos

A mi familia por todo el apoyo. A Norberto, por ser asesor, amigo, compañero y un gran apoyo en mi vida.

A mis asesores David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, por el tiempo y apoyo que me tuvieron. También agradezco a mis sinodales por sus valiosas observaciones, en especial a la Dra. María de Jesús López Toriz, por el tiempo dedicado en escucharme y revisar este trabajo.

Quiero agradecer también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico otorgado para la realización de esta maestría y al proyecto Estructuras topológicas de hiperespacios de continuos. Sin este apoyo, seguramente no hubiera sido posible realizarla.

Introducción

Un *continuo* X es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío. Dado un continuo X , los *hiperespacios* son familias de subconjuntos de X con alguna característica particular, considerados con la métrica de Hausdorff, [36, Teorema 1.2]. Denotamos por 2^X y $F_n(X)$ a los espacios $\{A \subset X : A \text{ es un conjunto cerrado en } X \text{ y no vacío}\}$ y $\{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$, respectivamente. El hiperespacio $F_n(X)$ es conocido como el *n -ésimo producto simétrico de X* . El hiperespacio $F_1(X)$ es una copia isométrica de X encajada en cada n -ésimo producto simétrico. El concepto del n -ésimo producto simétrico fue introducido por K. Borsuk y S. Ulam en [6].

Una *gráfica finita* es un continuo que se puede expresar como la unión finita de arcos tales que cualesquiera dos de ellos, o son ajenos o se intersectan en uno o en ambos puntos extremos.

Una *dendrita* es un continuo localmente conexo sin curvas cerradas simples.

Dado $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo, diremos que X tiene n -ésimo producto simétrico único si cumple con la siguiente implicación: si para cada continuo Y tal que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

En 2002, Alejandro Illanes retoma el tema de n -ésimo producto simétrico en el artículo *Dendrites with unique hyperspace $F_2(X)$* , [29]; después en 2006, Enrique Castañeda y Alejandro Illanes, mostraron que las gráficas finitas tienen n -ésimo producto simétrico único, [9].

En 2009, G. Acosta, R. Hernández Gutiérrez, V. Martínez de la Vega, publicaron el artículo *Dendrites and symmetric products*, donde prueban que las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es F_n -cerrada, [2, Teorema 5.2]; y en el mismo año D. Herrera Carrasco, M. de J. López, F. Macías Romero mostraron que las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado tienen n -ésimo producto simétrico único [22, Teorema 3.7].

Dado un continuo X , sean

$$\mathcal{G}(X) = \{p \in X : p \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X \text{ la cual es una gráfica finita}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

Un continuo X es *casi enrejado* si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X . Un continuo X es *enrejado* si X es casi enrejado y X tiene una base de vecindades \mathfrak{B} tal que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo, para todo $U \in \mathfrak{B}$, [16].

Un *alambre* en un continuo X es un subconjunto α de X homeomorfo a $(0, 1)$, $[0, 1)$, $[0, 1]$ o S^1 y además α es una componente de algún abierto en X .

Dado un continuo X , sea

$$W(X) = \{\alpha : \alpha \text{ es un alambre n } X\}.$$

Un continuo X es *alambrado* si el conjunto $W(X)$ es denso en X , [18].

En el año 2012, D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, F. Vázquez Juárez, generalizaron el resultado obtenido en [22, Teorema 3.7], ellos mostraron que para $n \in \mathbb{N} - \{2, 3\}$, la clase de los continuos localmente conexos tal que $\mathcal{E}_n(X)$ es denso en $F_n(X)$ tienen n -ésimo producto simétrico único, más aún, mostraron que la clase de los continuos casi enrejado localmente conexos tienen n -ésimo producto simétrico único, para $n \in \mathbb{N} - \{2, 3\}$, [28, Teorema 4.3 y Corolario 4.4].

En el año 2013, se publican los artículos *Continua with unique symmetric product*, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua* y *Rigidity of symmetric products*, cuyos autores son J. G. Anaya, E. Castañeda Alvarado, A. Illanes y R. Hernández Gutiérrez, V. Martínez de la Vega, respectivamente, vea [5], [16] y [18].

En 2015, Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz y Fernando Macías Romero, muestran que los continuos enrejados tienen segundo y tercer producto simétrico único [15], cabe mencionar que en el tema de n -ésimo producto simétrico único, en los casos $n = 2$ y $n = 3$ se usan técnicas distintas a los casos cuando $n \in \mathbb{N} - \{2, 3\}$.

En el año 2016, David Herrera Carrasco, María de Jesús López Toriz y Fernando Macías Romero, muestran que los continuos casi enrejados localmente conexos tienen segundo producto simétrico único, en su artículo *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product*, vea [24].

El tópico de este trabajo está inmerso en el siguiente problema general:

Dado $n \in \mathbb{N}$, ¿qué condiciones necesita tener un continuo X para que se garantice la unicidad del n -ésimo producto simétrico único?

Este trabajo de tesis está dividido en tres capítulos, en el Capítulo 1, presentamos conceptos básicos así como resultados necesarios para las demostraciones del Capítulo 3. En el Capítulo 2, introducimos notación que nos será de gran apoyo en el Capítulo 3 y además citamos resultados necesarios para este trabajo.

Vianey Córdova Salazar
 Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
 19 de noviembre de 2019.

**Continuos casi enrejados localmente
conexos tienen tercer producto
simétrico único**

Vianey Córdova Salazar
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

19 de noviembre de 2019

Índice general

Introducción	I
1. Preliminares	1
1.1. Continuos e hiperespacios	1
1.2. Convergencia en hiperespacios	4
1.3. Topología de Vietoris	5
2. Resultados Generales	9
3. Tercer producto simétrico único	17
Bibliografía	65
Índice alfabético	69

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo exponemos las herramientas necesarias de la teoría de continuos e hiperespacios, como conceptos y resultados importantes, a los cuales haremos referencia, y nos serán de gran apoyo para el desarrollo de este trabajo.

El símbolo \mathbb{N} , representará al conjunto de los enteros positivos y \mathbb{R} al conjunto de los números reales. La *cardinalidad* de un conjunto B la representamos por $|B|$. Denotamos por $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Definición 1.1. *Una familia $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es **localmente finita** es un subconjunto A de X , si para cada punto x de A existe una vecindad V de x en X tal que $V \cap A_\alpha \neq \emptyset$, para a lo más un número finito de índices α .*

Teorema 1.2. [13, Teorema 9.4] Sean X y Y espacios topológicos y $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una cubierta de X que satisface (1) o (2):

- (1) Todos los conjuntos A_α son abiertos en X .
- (2) Todos los conjuntos A_α son cerrados en X y forman una familia localmente finita en X .

Sea $\{f_\alpha : A_\alpha \rightarrow Y\}$ una familia de funciones continuas tal que para cada $(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda$, se cumple que $f_\alpha|_{A_\alpha \cap A_\beta} = f_\beta|_{A_\alpha \cap A_\beta}$. Entonces existe una única función continua $f : X \rightarrow Y$ que es una extensión de cada f_α , es decir, para cada $\alpha \in \Lambda$, se cumple que $f|_{A_\alpha} = f_\alpha$.

1.1. Continuos e hiperespacios

En este capítulo enunciaremos algunos conceptos y resultados relacionados con continuos e hiperespacios, los cuales serán de utilidad en capítulos posteriores.

Definición 1.3. Un *continuo* X es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Si X es un continuo, entonces un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de X recibirá el nombre de *subcontinuo* de X .

Sean X un continuo y $p \in X$, un subconjunto A de X es una *vecindad* de p si existe un abierto U en X tal que $p \in U \subset X$.

Si X es un continuo, Y un subespacio de X y $A \subset Y$, entonces Y° o $\text{int}_X(Y)$, \overline{Y} o $\text{cl}_X(Y)$ y $\text{Bd}_X(Y)$ denotan al *interior*, la *cerradura* y la *frontera* de Y en X ; A° o $\text{int}_Y(A)$, \overline{A} o $\text{cl}_Y(A)$ y $\text{Bd}_Y(A)$ denotaran el interior, la cerradura y la frontera de A en Y , como subespacio de X .

Dado X un continuo con métrica d y un subconjunto no vacío A de X , definimos la *distancia del punto* $p \in X$ al conjunto A como

$$d(p, A) = \inf\{d(p, a) : a \in A\}.$$

También, definimos la *distancia entre dos subconjuntos* no vacíos A y B de X como

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A \text{ y } y \in B\}.$$

Dado un continuo X con métrica d , $p \in X$ y $\varepsilon > 0$, la bola abierta en X con centro en p y radio ε , denotada por $B_{d_X}(p, \varepsilon)$, es el conjunto $\{x \in X : d(x, p) < \varepsilon\}$. Cuando no haya confusión sobre la métrica escribimos simplemente $B(p, \varepsilon)$.

Dado X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ definimos al hiperespacio de subconjuntos cerrados de X y al n -ésimo producto simétrico de X , como

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y no vacío}\} \text{ y}$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Observemos que para $n = 1$, obtenemos a

$$F_1(X) = \{\{x\} \in 2^X : x \in X\}.$$

Este conjunto recibe el nombre de hiperespacio de singulares de X y tiene la propiedad particular de ser isométrico al continuo X .

Para darle una métrica a los hiperespacios de un continuo, basta con definir una métrica para el hiperespacio de subconjuntos cerrados, para definir esta métrica es necesario conocer los siguientes conceptos.

Definición 1.4. Sea X un continuo. Si $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$, la *nube* en X con centro en A y de radio ε , es el conjunto

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(a, x) < \varepsilon\}.$$

Definición 1.5. Sea X un continuo y sean $A, B \in 2^X$, consideremos

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

En [36, Teorema 2.2], se muestra que H es una métrica para 2^X , dicha métrica se llama la *métrica de Hausdorff*. Esto nos dice que 2^X es un espacio métrico y así, también lo son sus subespacios. Por este hecho tenemos que $F_n(X)$ es un espacio métrico con la métrica de Hausdorff.

Los siguientes resultados nos ayudan a entender el comportamiento de la métrica de Hausdorff.

Lema 1.6. [32, Ejercicio 2.3] Si X es un continuo y $A, B \in 2^X$, entonces $H(A, B) < \varepsilon$ si y solo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

El lector puede encontrar una demostración del Lema [1.6] en [11, Teorema 2.10].

Teorema 1.7. Sea X un continuo. Si $A, B \in 2^X$ tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) = \emptyset$.

Demostración. Puesto que $A \cap B = \emptyset$ y A, B son compactos en X , tenemos que $d(A, B) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{d(A, B)}{2}$, notemos que $\varepsilon > 0$. Si $N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) \neq \emptyset$, entonces existe $z \in N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B)$. Así, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(a, z) < \varepsilon$ y $d(b, z) < \varepsilon$. Aplicando la desigualdad del triángulo, $d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b)$. Luego, $d(a, b) < 2\varepsilon = d(A, B)$, de manera que $d(a, b) < d(A, B)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $N(\varepsilon, A) \cap N(\varepsilon, B) = \emptyset$. \square

Teorema 1.8. [32, Lema 2.3] Sea X^n el producto topológico de n copias del continuo X . Entonces la función $g : X^n \rightarrow F_n(X)$ definida por

$$g((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

es uniformemente continua y suprayectiva.

Los siguientes resultados son importantes pues nos dice que los hiperespacios asociados a un continuo pueden seguir siendo continuos.

Teorema 1.9. [40, Corolario 1.8.8] Si X un continuo, entonces el hiperespacio 2^X es un continuo.

Teorema 1.10. [40, Corolario 1.8.9] Si X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces el hiperespacio $F_n(X)$ es un continuo.

La siguiente definición nos será de ayuda para la Sección 1.3, de este trabajo.

Definición 1.11. Sea X un continuo y sea A un subconjunto de X . Consideremos las siguientes subcolecciones del hiperespacio 2^X .

$$\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\},$$

$$\Lambda(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\} \text{ y}$$

$$\Phi(A) = \{B \in 2^X : A \subset B\}.$$

Teorema 1.12. [32, Ejercicio 2.7] Sean X un continuo y A un subconjunto de X . Se tiene lo siguiente

- (1) Si A es abierto en X , entonces $\Gamma(A)$ y $\Lambda(A)$ son abiertos en 2^X .
- (2) Si A es cerrado en X , entonces $\Gamma(A)$, $\Lambda(A)$ y $\Phi(A)$ son cerrados en 2^X .

El lector puede encontrar una demostración del Teorema [1.12] en [11, Teorema 2.15].

1.2. Convergencia en hiperespacios

En esta sección presentamos resultados referentes a la convergencia de sucesiones de subconjuntos cerrados de un continuo. Veamos ahora la definición de límite superior e inferior.

Definición 1.13. Sean X un espacio topológico y $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X , definimos

- (a) El **límite inferior** de la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ como

$$\lim \inf K_n = \{x \in X : \text{para cada abierto } U \text{ en } X \text{ con } x \in U, \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } U \cap K_n \neq \emptyset \text{ para cada } n \geq N\}.$$

- (b) El **límite superior** de la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ como

$$\lim \sup K_n = \{x \in X : \text{para cada abierto } U \text{ en } X \text{ con } x \in U, \text{ existe } F \subset \mathbb{N} \text{ infinito tal que } U \cap K_n \neq \emptyset \text{ para cada } n \in F\}.$$

Una demostración del Lema [1.14] y del Teorema [1.15] se encuentran en [11, Teorema 3.7]

Lema 1.14. [32, Ejercicio 2.13] Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, para algún $A \in 2^X$, entonces $a \in A$ si y solo si existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $a_n \in A_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y además $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Teorema 1.15. [32, Ejercicio 2.13] Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, donde $A, B \in 2^X$. Se cumple lo siguiente

1. Si $A_n \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$.
2. $\lim (A_n \cup B_n) = A \cup B$.
3. Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.
4. No siempre ocurre que $\lim (A_n \cap B_n) = A \cap B$.

1.3. Topología de Vietoris

En esta sección exponemos que todos los hiperespacios de un continuo los podemos considerar ya sea con la *topología de Vietoris* o con la topología inducida por la métrica de Hausdorff, indistintamente.

Veamos que dado un continuo X , la topología inducida por la métrica de Hausdorff en 2^X se puede describir mediante los conjuntos abiertos del continuo X . Para esto necesitamos lo siguiente

Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y U_1, U_2, \dots, U_n subconjuntos no vacíos de X . El *vietórico* de U_1, U_2, \dots, U_n , denotado por $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$, es el conjunto

$$\left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

El siguiente teorema nos muestra una familia de subconjuntos abiertos de 2^X que es una base para 2^X .

Teorema 1.16. [36, Teorema 1.2] *Si X un continuo, entonces*

$$\mathcal{B} = \{ \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, U_2, \dots, U_n \text{ son abiertos en } X \}$$

es una base para la topología de 2^X .

La topología generada por \mathcal{B} se llama *Topología de Vietoris*. En [36, Teorema 3.1], se muestra que la topología de Vietoris y la topología generada por la métrica de Hausdorff son iguales.

Teorema 1.17. [36, Teorema 1.2] *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y U_1, U_2, \dots, U_n subconjuntos de X , no vacíos. Las siguientes afirmaciones se cumplen.*

1. $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \Gamma(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap [\bigcap_{i=1}^n \Lambda(U_i)]$,
2. *para cada $A \subset X$, tenemos que $\Gamma(A) = \langle A \rangle$,*
3. *para cada $A \subset X$, tenemos que $\Lambda(A) = \langle X, A \rangle$.*

Corolario 1.18. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si A_1, \dots, A_n son subconjuntos cerrados de X , entonces $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$ es cerrado.*

Teorema 1.19. [36, Teorema 1.2] *Sean $m, n \in \mathbb{N}$, U_1, U_2, \dots, U_n y V_1, V_2, \dots, V_m subconjuntos de un continuo X . Si $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$, entonces*

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle = \\ \langle V \cap U_1, V \cap U_2, \dots, V \cap U_n, U \cap V_1, U \cap V_2, \dots, U \cap V_m \rangle. \end{aligned}$$

Teorema 1.20. [36, Teorema 1.2] Sean X un continuo, $A \in 2^X$ y U_1, U_2, \dots, U_n conjuntos abiertos en X . Si $A \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$, entonces existen conjuntos abiertos V_1, V_2, \dots, V_n en X tales que

$$A \in \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle \subset \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$$

y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Teorema 1.21. [36, Teorema 1.2] Sea X un continuo. El conjunto $\mathcal{S} = \{\Gamma(U) : U \text{ es un conjunto abierto en } X\} \cup \{\Lambda(U) : U \text{ es un conjunto abierto en } X\}$ es una subbase para la Topología de Vietoris.

Teorema 1.22. [43, Teorema 0.13] Sea X un continuo. La Topología de Vietoris, τ_V , y la topología inducida por la métrica de Hausdorff, τ_H , en 2^X son iguales.

Ahora, si X es un continuo, $m, n \in \mathbb{N}$ y U_1, U_2, \dots, U_m son subconjuntos de X , entonces consideramos la siguiente subcolección de $F_n(X)$:

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle_n = \left\{ A \in F_n(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^m U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, m\} \right\}.$$

En esta sección revisamos los conceptos de gráficas finitas, conexidad local continuos enrejados, casi enrejados y alambrados. Además mencionamos resultados generales relacionados con estos conceptos.

Iniciemos con la noción de gráfica finita y orden, entre otras, así como de resultados relacionados con estos conceptos.

Definición 1.23. Una **gráfica finita** es un continuo que puede escribirse como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos, únicamente.

Definición 1.24. Sean A un subconjunto no vacío de un espacio topológico X y β un número cardinal. Se dice que A es de **orden menor** o **igual** a β en X , denotado por $\text{ord}(A, X) \leq \beta$, si para cualquier conjunto abierto U de X con $A \subset U$ existe un conjunto abierto V de X , tal que $A \subset V \subset U$ y $|\text{Bd}(V)| \leq \beta$. Si $A = \{p\}$ en lugar de escribir $\text{ord}(\{p\}, X) \leq \beta$ solo se escribirá como $\text{ord}(p, X) \leq \beta$. Se dice que A es de **orden** β en X , denotado por $\text{ord}(A, X) = \beta$, si $\text{ord}(A, X) \leq \beta$ y para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$, tenemos que $\text{ord}(A, X) \not\leq \alpha$.

Definición 1.25. Sea X una gráfica finita. Un punto p en X es un punto **ordinario** de X si $\text{ord}(p, X) = 2$. El punto p es un punto de **ramificación** de X si $\text{ord}(p, X) > 2$. Un punto p es un punto **extremo** de X si $\text{ord}(p, X) = 1$.

Dado X un continuo, consideramos:

- (1) $O(X) : \{x \in X : \text{es un punto ordinario}\}$.
- (2) $R(X) : \{x \in X : \text{es un punto de ramificación}\}$.

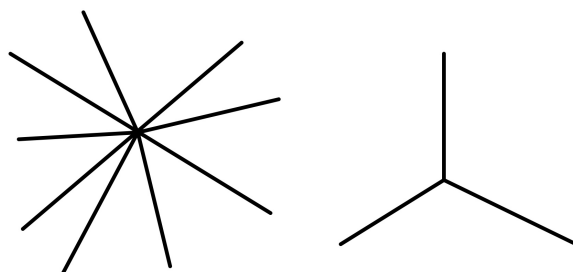


Figura 1.1: Ejemplo de un 9-odo simple y un triodo simple

(3) $E(X) : \{x \in X : \text{es un punto extremo}\}$.

Con la notación anterior, tenemos que para cualquier gráfica finita X , se cumple que $X = E(X) \cup O(X) \cup R(X)$.

Definición 1.26. Sean X una gráfica finita y p un punto en X . El punto p es un **vértice** de X , si el orden de p en X es mayor que 2.

Definición 1.27. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Un **n -odo simple** es un continuo T_n que es una unión de n arcos que se intersectan dos a dos en un punto p el cual es un punto extremo de cada uno de los n arcos. El punto p es llamado el vértice de T_n . En el caso en que $n = 3$, decimos que T_3 es un triodo simple.

Definición 1.28. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $I_i = [0, 1]$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Una n -celda es un espacio topológico homeomorfo a $\prod_{i=1}^n I_i$ con la topología producto.

Teorema 1.29. [44, Teorema 9.2] Si X y Y son gráficas finitas tales que $X \cap Y \neq \emptyset$ y $X \cap Y$ es finita, entonces $X \cup Y$ es una gráfica finita.

Teorema 1.30. [44, Teorema 9.10] Sea X un continuo. Entonces X es una gráfica finita si y solo si se cumple lo siguiente.

- (1) Para todo $p \in X$, tenemos que $\text{ord}(p, X) < \aleph_0$.
- (2) Existe un subconjunto finito M en X tal que para todo punto $p \in X - M$, el $\text{ord}(p, X) \leq 2$.

Teorema 1.31. [44, Teorema 9.10.1] Cada subcontinuo de una gráfica finita es una gráfica finita.

Teorema 1.32. [44, Ejercicio 9.41] Sea X un continuo. Entonces X es una gráfica finita si y solo si cada punto de X tiene una vecindad cerrada la cual es un n -odo simple o un arco.

Definición 1.33. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. El espacio topológico X es **localmente conexo en el punto** x si para cada conjunto abierto U en X tal que $x \in U$ existe un conjunto abierto y conexo V en X tal que $x \in V \subset U$. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos decimos que X es **localmente conexo**.

El siguiente resultado muestra la relación entre el continuo, el producto simétrico y la conexidad local.

Teorema 1.34. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces X es localmente conexo si y solo si $F_n(X)$ es localmente conexo.

Capítulo 2

Resultados Generales

En el este capítulo vamos a presentar la notación que usaremos en el resto de este trabajo y de igual forma vamos a hacer una extracción de diversos teoremas que se encuentran probados en la literatura general (no incluiremos sus demostraciones, dado que son partes extensas de los respectivos artículos) y que serán útiles para mostrar los resultados del capítulo principal de este trabajo.

Definición 2.1. Una *curva cerrada simple* es un espacio homeomorfo a S^1 .

Definición 2.2. Sea X un continuo, un *ciclo* es una curva cerrada simple S contenida en X tal que $|\text{Bd}_X(S)| \leq 1$.

Definición 2.3. Sea X un continuo, un *arco libre* es un arco α con puntos extremos p y q contenido en X tal que $\alpha - \{p, q\}$ es un conjunto abierto en X .

Definición 2.4. Sea X un continuo, un *arco libre maximal* es un arco libre α , que cumple la condición de que si β es un arco libre contenido en X , con $\alpha \subset \beta$, entonces α es igual a β .

Notemos que si α es un arco libre maximal en X con puntos extremos p y q , éste se puede clasificar en dos tipos. Los primeros que vamos a llamar *arcos internos*, son aquellos que cumplen que $|\text{Bd}_X(\alpha) \cap R(X)| = 2$, es decir, $p, q \in R(X)$; y los que llamaremos *arcos externos*, son los que cumplen que $|\text{Bd}_X(\alpha) \cap R(X)| = 1$; en este sentido si $\text{Bd}_X(\alpha) \cap R(X) = \{p\}$, entonces $q \in E(X)$. Los arcos libres maximales externos son los que comúnmente conocemos en la literatura como *pelos*.

Dado X un continuo, consideramos los siguientes conjuntos

$$\mathcal{A}_R(X) = \{J \subset X : J \text{ es un ciclo en } X\},$$

$$\mathcal{A}_E(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal en } X \text{ y } \text{Bd}_X(J) \subsetneq E(J)\},$$

$$\mathcal{A}_I(X) = \{J \subset X : J \text{ es un arco libre maximal en } X \text{ y } \text{Bd}_X(J) = E(J)\} \text{ y}$$

$$\mathcal{A}_S(X) = \mathcal{A}_R(X) \cup \mathcal{A}_E(X) \cup \mathcal{A}_I(X).$$

Observemos que el conjunto $\mathcal{A}_I(X)$ está formado por los arcos libres maximales internos y que el conjunto $\mathcal{A}_E(X)$ está formado por los arcos libres maximales externos. Por tal motivo y para ahorrar notación a los elementos de $\mathcal{A}_I(X)$ y $\mathcal{A}_E(X)$ les llamaremos simplemente arcos internos y arcos externos, respectivamente. De la definición de $\mathcal{A}_S(X)$, podemos observar de manera inmediata que $\mathcal{A}_S(X) \subset C(X)$ y además tenemos lo siguiente:

Observación 2.5. Sean X un continuo y $J, K \in \mathcal{A}_S(X)$. Si $|K \cap J| \geq 2$, entonces $K = J$, más aún, si $K \cap J \neq \emptyset$, entonces $K \cap J \subset \text{Bd}_X(K)$ o $K \cap J \subset \text{Bd}_X(J)$.

Además un resultado importante que se sabe sobre arcos libres es el siguiente.

Lema 2.6. [16, Lema 10] Sea X un continuo localmente conexo. Si J es un arco libre en X , entonces existe $K \in \mathcal{A}_S(X)$ tal que $J \subset K$.

R. Hernández Gutiérrez, A. Illanes y V. Martínez de la Vega en [16], introducen la noción de continuo enrejado y casi enrejado.

Dado un continuo X , denotemos por

- $\mathcal{G}(X) = \{x \in X : x \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X \text{ tal que } G \text{ es una gráfica finita}\}.$
- $\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$

Definición 2.7. Un continuo X es **casi enrejado** si $\mathcal{G}(X)$ es denso en X .

Definición 2.8. Un continuo casi enrejado X es **enrejado** si X tiene una base de vecindades \mathfrak{B} tal que para cada elemento $U \in \mathfrak{B}$, se tiene que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.

Las siguientes proposiciones muestran relaciones interesantes entre el continuo y los conjuntos que definimos anteriormente.

Lema 2.9. [16, Lema 8] Sean X es un continuo localmente conexo y $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos diferentes por pares de $\mathcal{A}_S(X)$ y $x_m \in J_m$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$, para algún $x \in X$, entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} J_m = \{x\}$.

Lema 2.10. Si X es un continuo casi enrejado localmente conexo, entonces $\overline{\mathcal{A}_S(X)}^{C(X)} = \mathcal{A}_S(X) \cup F_1(\mathcal{P}(X)).$

Demostración. Primero mostraremos que $\overline{\mathcal{A}_S(X)}^{C(X)} \subset \mathcal{A}_S(X) \cup F_1(\mathcal{P}(X)).$

Sea $J \in \overline{\mathcal{A}_S(X)}^{C(X)}$ y supongamos que $J \notin \mathcal{A}_S(X)$. Entonces existe una sucesión $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$ en $\mathcal{A}_S(X)$ la cual converge a J . Como $J \notin \mathcal{A}_S(X)$, podemos suponer sin perder generalidad que los elementos de la sucesión $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$ esta formada por elementos diferentes dos a dos. Para todo $m \in \mathbb{N}$, sea $x_m \in J_m$, como X es compacto podemos suponer que $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$, para algún $x \in X$,

así por el Lema 2.9, $\lim_{m \rightarrow \infty} J_m = \{x\}$, de donde $J = \{x\}$. De esta forma también tenemos que J no puede tener una vecindad que sea una gráfica finita. Por lo tanto $J \in F_1(\mathcal{P}(X))$. Con esto hemos mostrado que $\overline{\mathcal{A}_S(X)}^{C(X)} \subset \mathcal{A}_S(X) \cup F_1(\mathcal{P}(X))$.

Ahora mostraremos que $\mathcal{A}_S(X) \cup F_1(\mathcal{P}(X)) \subset \overline{\mathcal{A}_S(X)}^{C(X)}$, para esto es suficiente probar que $F_1(\mathcal{P}(X)) \subset \overline{\mathcal{A}_S(X)}^{C(X)}$.

Sea $\{x\} \in F_1(\mathcal{P}(X))$. Como $x \in \mathcal{P}(X)$, toda vecindad de x en X no es una gráfica finita. Como X es casi enrejado, para $\varepsilon_1 = 1$, existe $x_1 \in B(x, \varepsilon_1) - \{x\}$ tal que $x_1 \in \mathcal{G}(X)$. Notemos que x_1 pertenece a un arco libre, así por el Lema 2.6, existe $\alpha_1 \in \mathcal{A}_S(X)$ tal que $x_1 \in \alpha_1$.

Sea $\varepsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, \frac{d(x, x_1)}{2}\}$. Como $x \in \mathcal{P}(X)$, tenemos que $B(x, \varepsilon_2)$ no es una gráfica finita, así existe $x_2 \in B(x, \varepsilon_2) - \{x\}$ tal que x_2 pertenece a un arco libre con la condición adicional de que si α_2 es el elemento en $\mathcal{A}_S(X)$ tal que $x_2 \in \alpha_2$, entonces $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (observemos que la existencia de α_2 la tenemos gracias al Lema 2.6).

De forma inductiva, podemos construir una sucesión de puntos $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ en $\mathcal{G}(X)$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$, y una sucesión $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$ de elementos en $\mathcal{A}_S(X)$ diferentes dos a dos tal que $x_k \in \alpha_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, por el Lema 2.9, tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \{x_m\} = \{x\}$. Por lo tanto, $\{x\} \in \overline{\mathcal{A}_S(X)}^{C(X)}$.

Con esto mostramos que $\mathcal{A}_S(X) \cup F_1(\mathcal{P}(X)) \subset \overline{\mathcal{A}_S(X)}^{C(X)}$ y terminamos la demostración de este lema. \square

El siguiente lema es una caracterización de las gráficas finitas en términos del conjunto $\mathcal{A}_S(X)$.

Lema 2.11. *Sea X un continuo casi enrejado localmente conexo. Entonces $\mathcal{A}_S(X)$ es cerrado en $C(X)$ si y solo si X es una gráfica finita.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}_S(X)$ es cerrado, vamos a mostrar que X es una gráfica finita. Para esto primero probaremos que $\mathcal{P}(X) = \emptyset$. Supongamos que $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset$, entonces existe $x \in \mathcal{P}(X)$. Así, $\{x\} \in F_1(\mathcal{P}(X))$. Como $F_1(\mathcal{P}(X)) \subset F_1(\mathcal{P}(X)) \cup \mathcal{A}_S(X)$, tenemos que $\{x\} \in F_1(\mathcal{P}(X)) \cup \mathcal{A}_S(X)$, por el Lema 2.10, sabemos que $F_1(\mathcal{P}(X)) \cup \mathcal{A}_S(X) = \overline{\mathcal{A}_S(X)}^{C(X)}$. Como $\mathcal{A}_S(X)$ es cerrado, tenemos que $F_1(\mathcal{P}(X)) \cup \mathcal{A}_S(X) = \mathcal{A}_S(X)$, así $\{x\} \in \mathcal{A}_S(X)$. Lo que es una contradicción ya que los elementos de $\mathcal{A}_S(X)$ son no degenerados. Por lo tanto, $\mathcal{P}(X) = \emptyset$.

Como $\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X)$, tenemos que $\mathcal{G}(X) = X - \mathcal{P}(X)$, dado que $\mathcal{P}(X) = \emptyset$, obtenemos que $\mathcal{G}(X) = X$. De esto podemos concluir que $X = \bigcup_{J \in \mathcal{A}_S(X)} J$. Para concluir esta implicación basta mostrar que $\mathcal{A}_S(X)$ es finito.

Supongamos que $\mathcal{A}_S(X)$ no es finito. Como $C(X)$ es compacto, existen $A \in C(X)$ y una sucesión de elementos diferentes dos a dos $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathcal{A}_S(X)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = A$. Como $\mathcal{A}_S(X)$ es cerrado, tenemos que $A \in \mathcal{A}_S(X)$. Así, por el Lema 2.9, sabemos que $A = \{x\}$ para algún $x \in X$, lo cual es una

contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{A}_S(X)$ es finito y concluimos que X es una gráfica finita.

Mostremos la otra implicación. Supongamos que X es una gráfica finita, entonces para todo $x \in X$, se cumple que x tiene una vecindad que es una gráfica finita, así $\mathcal{P}(X) = \emptyset$. Lo que implica que $F_1(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$ y por el Lema 2.10, tenemos que $\overline{\mathcal{A}_S(X)}^{C(X)} = \mathcal{A}_S(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{A}_S(X)$ es cerrado en $C(X)$. \square

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, denotemos a los siguientes conjuntos:

$$P_n(X) = \langle X, \mathcal{P}(X) \rangle_n,$$

$$R_n(X) = \langle X, R(X) \rangle_n,$$

$$\Lambda_n(X) = \langle \mathcal{G}(X) - R(X) \rangle_n \text{ y}$$

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ la cual es una } n\text{-celda}\}.$$

Para una mejor lectura, de ahora en adelante para $m \in \mathbb{N}$ y $n = 3$, adoptaremos la siguiente notación:

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle_3 = \langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle.$$

Definición 2.12. Sean $x, y \in X$. Diremos que x es **adyacente** a y en X o que x y y son **adyacentes** en X , si existe $J \in \mathcal{A}_S(X) - \mathcal{A}_R(X)$ tal que x y y son puntos extremos de J .

Para entender mejor las definiciones que acabamos de dar consideremos el siguiente ejemplo, en el cual denotaremos conjuntos y puntos específicos para ejemplificar dichas definiciones.

Ejemplo 2.13. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$. En \mathbb{R}^2 consideremos:

$$X_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=0}^{2^n} \left\{ \frac{k}{2^n} \right\} \times \left[0, \frac{1}{n} \right] \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right),$$

$$X_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{5}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right\},$$

$$X_3 = \left\{ t \left(\frac{1}{2}, 1 \right) + (1-t) \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right) : t \in [0, 1] \right\},$$

$$X_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{n} \right\} \times \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right] \cup \left([-1, 0] \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right).$$

Sea

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4.$$

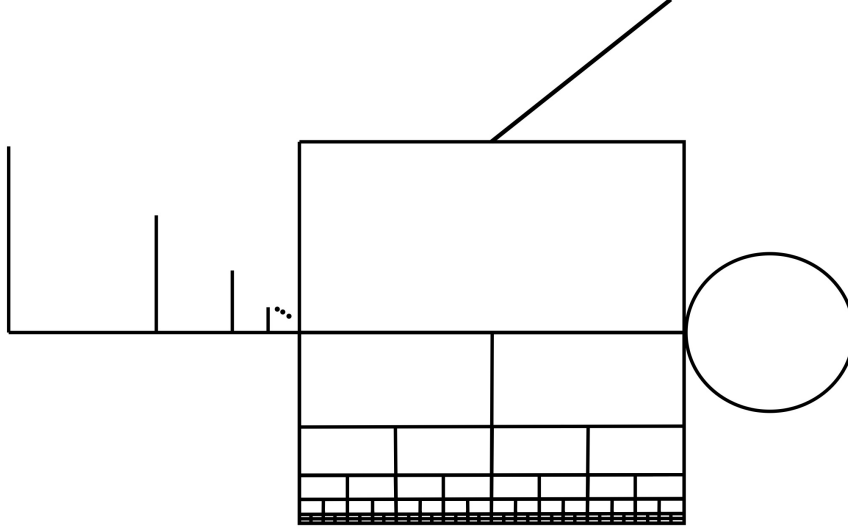


Figura 2.1: $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$.

Notemos que el espacio X definido en el Ejemplo 2.13, es un continuo casi enrejado localmente conexo.

Denotamos por $a = (1, \frac{1}{2})$, $b = (\frac{1}{2}, 1)$, $c = (0, \frac{1}{2})$, $d = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $e = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, $\alpha_1 = \{\frac{1}{2}\} \times [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $\alpha_2 = [\frac{1}{8}, \frac{1}{3}] \times \{\frac{1}{2}\}$, $\alpha_3 = [0, \frac{1}{2}] \times \{\frac{1}{2}\}$ y $Y = [0, 1] \times \{\frac{1}{2}\} \cup \{0\} \times [\frac{1}{2}, 1] \cup [0, 1] \times \{1\} \cup \{1\} \times [\frac{1}{2}, 1]$. Observemos que

- X_2 es un ciclo ya que $|\text{Bd}_X(X_2)| = 1$, así X_2 es un ejemplo de un elemento del conjunto $\mathcal{A}_R(X)$.
- Y es homeomorfo una curva cerrada simple, sin embargo Y no es un ciclo ya que $|\text{Bd}_X(Y)| = 4$ y así $Y \notin \mathcal{A}_R(X)$.
- α_2 es un arco libre, sin embargo α_2 no es un arco libre maximal ya que $\alpha_2 \subset \alpha_3$, $\alpha_2 \neq \alpha_3$ y α_3 es un arco libre.
- α_1 y α_3 son ejemplos de arcos libres maximales. Además α_1 y α_3 son ejemplos de elementos del conjunto $\mathcal{A}_I(X)$.
- X_3 es un ejemplo de un elemento del conjunto $\mathcal{A}_E(X)$.
- $\mathcal{P}(X) = [0, 1] \times \{0\} \cup \{c\}$ y $\mathcal{G}(X) = X - \mathcal{P}(X)$.
- c es adyacente a d en X .

Definición 2.14. Sea $n \in \mathbb{N}$. Un continuo X tiene **hiperespacio único** $F_n(X)$ si para cada continuo Y tal que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

A continuación daremos una lista de resultados existentes en la literatura los cuales los cuales nos serán útiles en el capítulo principal.

Teorema 2.15. [2] Teorema 4.1] Sean X y Y continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si existe $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$ un homeomorfismo, entonces $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$.

Teorema 2.16. [15] Teorema 3.4] Si X es un continuo casi enrejado localmente conexo y $n \in \{2, 3\}$, entonces $\mathcal{E}_n(X) = \Lambda_n(X)$.

Teorema 2.17. [28] Teorema 3.9] Si X un continuo localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$, entonces las componentes de $\Lambda_n(X)$ son subconjuntos no vacíos de la forma $\langle J_1^\circ, \dots, J_m^\circ \rangle_n$, donde $m \leq n$ y $J_i \in \mathcal{A}_S(X)$, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

Teorema 2.18. [15] Teorema 3.2] Sean X un continuo y $x \in X$. Si $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión de puntos diferentes dos a dos en $R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ tal que $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ converge a x , entonces $x \in \mathcal{P}(X)$.

Definición 2.19. Sea \mathcal{C} una clase de continuos y $n \in \mathbb{N}$. Diremos que la clase \mathcal{C} es F_n -cerrada si la siguiente implicación es verdadera: Si para cada $X \in \mathcal{C}$ y para cada continuo Y tal que $F_n(X)$ es homomorfo a $F_n(Y)$, entonces $Y \in \mathcal{C}$.

Teorema 2.20. [24] Teorema 3.1] La clase de los continuos casi enrejados localmente conexo es F_n -cerrada, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.21. [24] Teorema 4.1] Sea X un continuo casi enrejado localmente conexo. Entonces $x \in \mathcal{P}(X)$ si y solo si existe una sucesión de elementos distintos por pares contenida en $\mathcal{A}_S(X)$ la cual converge a $\{x\}$.

Teorema 2.22. [24] Teorema 4.8] Si X es un continuo casi enrejado localmente conexo y $n \in \mathbb{N} - \{3\}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$.

Sean X un continuo y W un subconjunto abierto de X . Para cualquier subconjunto U de X definimos $c(U, W, X)$ como el número de componentes de $U \cap W$, si este número es finito, si no ocurre así definimos $c(U, W, X) = \infty$.

Para cada $x \in \text{cl}_X(W)$, definimos

$$v(x, W, X) = \min(\{m \in \mathbb{N} : \text{existe una base } \mathfrak{B} \text{ de vecindades de } X \text{ tal que} \\ c(U, W, X) = m, \text{ para cada } U \in \mathfrak{B}\} \cup \{\infty\}).$$

Teorema 2.23. [15] Teorema 3.8] Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos y $n \in \{2, 3\}$. Si $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$ es un homeomorfismo, entonces

$$(a) \ h(R_n(X) \cup P_n(X)) = R_n(Y) \cup P_n(Y);$$

$$(b) \ \text{si } A \in F_n(X), \text{ entonces } v(A) = v(h(A));$$

$$(c) \ h(R_n(X) - P_n(X)) = R_n(Y) - P_n(Y);$$

$$(d) \ h(F_1(R(X) \cap \mathcal{G}(X))) = F_1(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y));$$

(e) $h(P_n(X)) = P_n(Y)$;

(f) si X es un continuo enrejado, entonces $h(F_1(\mathcal{P}(X))) \subset F_1(\mathcal{P}(Y))$.

Lema 2.24. [15, Afirmación 1 de la prueba del Teorema 3.8] Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos. Si $h: F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ es un homeomorfismo y $A \in F_3(X) - P_3(X)$, entonces $A \subset R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ si y sólo si existe un subconjunto abierto \mathcal{V} de $F_3(X)$ tal que $v(A_1) \leq v(A)$, para todo $A_1 \in \mathcal{V} - \{A\}$.

Lema 2.25. [15, Teorema 2.11] Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos y $n \in \{2, 3\}$. Si $h: F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$ es un homeomorfismo y A es un elemento de $F_n(X)$ tal que $v_X(A)$ es finito, entonces $v_Y(h(A)) \leq v_X(A)$.

Corolario 2.26. [15, Afirmación 2 de la prueba del Teorema 3.8] Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos. Si $h: F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ es un homeomorfismo y $A \in F_3(X) - P_3(X)$, entonces $A \subset R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ si y sólo si $h(A) \subset R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$.

Capítulo 3

Tercer producto simétrico único

En este capítulo mostraremos el teorema principal de este trabajo, el cual afirma que los continuos casi enrejados localmente conexos tienen tercer producto simétrico único. Para este propósito, primero mostraremos una serie de resultados que nos serán de gran utilidad.

Lema 3.1. *Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos y $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ un homeomorfismo. Si $J \in \mathcal{A}_S(X)$, entonces existen $K, L, M \in \mathcal{A}_S(Y)$, tales que $h(\langle J^\circ \rangle) = \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, más aún tenemos que $h(\langle J \rangle) = \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$.*

Demostración. Primero observemos que por el Teorema 2.16, tenemos que $\mathcal{E}_3(X) = \Lambda_3(X)$ y $\mathcal{E}_3(Y) = \Lambda_3(Y)$. Además, por el Teorema 2.15, tenemos que $h(\mathcal{E}_3(X)) = \mathcal{E}_3(Y)$. Así $h(\Lambda_3(X)) = \Lambda_3(Y)$.

Sea $J \in \mathcal{A}_S(X)$, por el Teorema 2.17, tenemos que $\langle J^\circ \rangle$ es una componente de $\Lambda_3(X)$. Como $\mathcal{E}_3(X) = \Lambda_3(X)$ y $h(\Lambda_3(X)) = \Lambda_3(Y)$, tenemos que $h(\langle J^\circ \rangle)$ es una componente de $\Lambda_3(Y)$. Así, por el Teorema 2.17, existen $K, L, M \in \mathcal{A}_S(Y)$ tales que

$$h(\langle J^\circ \rangle) = \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle. \quad (3.0.1)$$

Además, notemos que $h(\langle J \rangle) = h(\overline{\langle J^\circ \rangle}) = \overline{h(\langle J^\circ \rangle)} = \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$. Por lo tanto, $h(\langle J \rangle) = \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$. \square

Con lo mencionado en el Lema 3.1 cabe preguntarnos cuándo se cumple que

$$\overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} = \langle K, L, M \rangle.$$

Observemos que $\overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \subset \langle K, L, M \rangle$ se cumple para cualesquiera $K, L, M \in \mathcal{A}_S(Y)$, sin embargo, la contención $\langle K, L, M \rangle \subset \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$ no se cumple de manera general como lo muestra el siguiente lema.

Lema 3.2. Sean Y es un continuo casi enrejado localmente conexo y $K, L, M \in \mathcal{A}_S(Y)$. Si $K \cap (L \cup M) = \emptyset$ y $L \cap M = \{z\}$, donde $z \in Y$, entonces $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle \subsetneq \langle K, L, M \rangle$.

Demostración. Sean $x, y \in K$ y $z \in L \cap M$. Como $L^\circ \cap M^\circ = \emptyset$, tenemos que $\{x, y, z\} \in \langle K, L, M \rangle - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$.

Vamos a probar que $\{x, y, z\} \notin \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$. Por el contrario, supongamos que $\{x, y, z\} \in \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$. Así, existe una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ contenida en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = \{x, y, z\}$. Como $K^\circ \cap (L^\circ \cup M^\circ) = \emptyset$, tenemos que, para todo $m \in \mathbb{N}$, existen $x_m, y_m, z_m \in X$ tales que $A_m = \{x_m, y_m, z_m\}$. Como $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = \{x, y, z\}$, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$, $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = y$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = z$. Sean U, V y W abiertos ajenos dos a dos en X que tienen a x, y y z , respectivamente. Además cumplen la condición adicional de que $(U \cup V) \cap (L \cup M) = \emptyset$. Así, $\langle U, V, W \rangle$ es un subconjunto abierto en $F_3(Y)$ tal que $\{x, y, z\} \in \langle U, V, W \rangle$. Como $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$, $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = y$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = z$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in U$, $y_m \in V$ y $z_m \in W$ para todo $m \geq N_1$. Por otro lado, como $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = \{x, y, z\}$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \in \langle U, V, W \rangle$ para toda $m \geq N_2$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Como $x_N \in U$, $y_N \in V$ y $z_N \in W$; y además $(U \cup V) \cap (L \cup M) = \emptyset$, podemos concluir que $\{x_N, y_N, z_N\} \cap L^\circ = \emptyset$ o $\{x_N, y_N, z_N\} \cap M^\circ = \emptyset$, ya que $L^\circ \cap M^\circ = \emptyset$. Esto implica que $A_N \notin \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, lo cual es una contradicción.

Esto muestra que $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle \subsetneq \langle K, L, M \rangle$. \square

Pregunta 3.3. Sea Y un continuo casi enrejado localmente conexo. ¿Bajo qué condiciones de $K, L, M \in \mathcal{A}_S(Y)$, se cumple que $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle = \langle K, L, M \rangle$?

Una respuesta parcial a la Pregunta [3.3](#) es cuando K, L y M son ajenos dos a dos.

Teorema 3.4. Sean X un continuo casi enrejado localmente conexo, $J \in \mathcal{A}_S(X)$ con $p \in J \cap \mathcal{P}(X)$ y $x_1, x_2 \in J^\circ$. Si existe una colección \mathcal{C} de componentes en $\mathcal{E}_3(X) - \langle J \rangle$ tal que $\{p, x_1, x_2\} \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces $\langle \{p\}, J^\circ \rangle \subset \langle J \rangle \cap \bigcup \mathcal{C}$.

Demostración. Sea $A \in \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$. Primero verifiquemos que $A \in \bigcup \mathcal{C}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $B_H(A, \varepsilon) \cap \langle \{p\}, J^\circ \rangle \neq \emptyset$, existe B tal que $B \in B_H(A, \frac{\varepsilon}{2}) \cap \langle \{p\}, J^\circ \rangle$. Dado que $B \in \langle \{p\}, J^\circ \rangle$, podemos suponer que $B = \{p, b', c'\}$, donde $b', c' \in J^\circ$. Notemos que b' y c' pueden ser iguales o distintos. Analicemos ambos casos

Caso 1. $b' \neq c'$.

Sea $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ y que cumpla con las condiciones

- $B_{d_X}(x_1, \delta) \subset J^\circ$,
- $B_{d_X}(x_2, \delta) \subset J^\circ$ y
- $B_{d_X}(x_1, \delta)$ y $B_{d_X}(x_2, \delta)$ sean ajenas a $B_{d_X}(p, \delta)$.

Como $\{p, x_1, x_2\} \in \overline{\bigcup \mathcal{C}}$, existe $C \in B_H(\{p, x_1, x_2\}, \delta) \cap (\bigcup \mathcal{C})$, y denotemos a $C = \{a'', b'', c''\}$. Como $C \in B_H(\{p, x_1, x_2\}, \delta)$, tenemos que $H(C, \{p, x_1, x_2\}) < \delta$, así por la elección de δ y de la condición de que $C \subset N(\delta, \{p, x_1, x_2\})$; podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $d_X(p, a'') < \delta$, $d_X(b'', x_1) < \delta$ y $d_X(c'', x_2) < \delta$.

Como $C \in \bigcup \mathcal{C}$, existen $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{A}_S(X)$ tales que $\langle T_1^\circ, T_2^\circ, T_3^\circ \rangle \in \mathcal{C}$ y $C \in \langle T_1^\circ, T_2^\circ, T_3^\circ \rangle$. Sin perder generalidad, podemos asumir que $a'' \in T_1^\circ$, $b'' \in T_2^\circ$, $c'' \in T_3^\circ$. Como $d_X(b'', x_1) < \delta$, $d_X(c'', x_2) < \delta$, tenemos que $b'' \in B_{d_X}(x_1, \delta)$ y $c'' \in B_{d_X}(x_2, \delta)$, concluimos que $b'', c'' \in J^\circ$. Luego, $b'' \in T_2^\circ \cap J^\circ$ y $c'' \in T_3^\circ \cap J^\circ$ y como $J, T_2, T_3 \in \mathcal{A}_S(X)$, tenemos que $T_2 = T_3 = J$. Así, $\langle T_1^\circ, T_2^\circ, T_3^\circ \rangle = \langle T_1^\circ, J^\circ \rangle$ y por lo tanto, $\langle T_1^\circ, J^\circ \rangle \in \mathcal{C}$.

Consideremos $D = \{a'', b', c'\}$. Notemos que $D \in \langle T_1^\circ, J^\circ \rangle$, lo que implica que $D \in \bigcup \mathcal{C}$. Por otro lado, como $d_X(p, a'') < \delta$, tenemos que $D \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, D)$, lo que implica que $H(D, B) < \delta$.

Por lo tanto, hemos mostrado que existe $D \in \bigcup \mathcal{C}$ tal que $H(D, B) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Caso 2. $b' = c'$.

Como $b' \in J^\circ$, existen $b''', c''' \in J^\circ$ con $b''' \neq c'''$ y que $d_X(b', b''') < \frac{\varepsilon}{4}$ y $d_X(b', c''') < \frac{\varepsilon}{4}$. Aplicando el Caso 1 al punto $E = \{p, b''', c'''\}$, tenemos que existe $D \in \bigcup \mathcal{C}$ tal que $H(D, E) < \frac{\varepsilon}{4}$. Pero como $H(B, E) < \frac{\varepsilon}{4}$, tenemos que $H(B, D) \leq H(B, E) + H(E, D) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por lo tanto, hemos mostrado que existe $D \in \bigcup \mathcal{C}$ tal que $H(D, B) < \frac{\varepsilon}{2}$.

De los Casos 1 y 2, tenemos que existe $D \in \bigcup \mathcal{C}$ tal que $H(D, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $H(A, B) < \frac{\varepsilon}{2}$, obtenemos que $H(A, D) \leq H(A, B) + H(B, D) < \varepsilon$. Esto muestra que $B_H(A, \varepsilon) \cap \bigcup \mathcal{C} \neq \emptyset$ y concluimos que $A \in \bigcup \mathcal{C}$.

Para concluir esta demostración mostraremos que $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle$.

Dado que $p \in J$, tenemos que $\langle \{p\}, J^\circ \rangle \subset \langle J \rangle$, así $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \overline{\langle J \rangle} = \langle J \rangle$. Por lo tanto, $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \bigcup \mathcal{C}$. Esto concluye la demostración de este teorema. \square

Lema 3.5. *Si X es un continuo casi enrejado localmente conexo y $A \in F_3(X)$. Entonces $A \subset \mathcal{P}(X)$ si y solo si para cada vecindad \mathcal{U} de A en $F_3(X)$, se cumple que \mathcal{U} contiene una componente de $\mathcal{E}_3(X)$.*

Demostración. Mostremos primero la implicación necesaria. Sea $A \in F_3(X)$ tal que $A \subset \mathcal{P}(X)$ y supongamos que $A = \{a, b, c\}$ para algunos $a, b, c \in X$. Sea \mathcal{U} una vecindad de A en $F_3(X)$. Consideremos tres casos.

Caso 1. $|A| = 3$.

En este caso a, b y c son diferentes dos a dos. Sean $n \in \mathbb{N}$ y V_1, \dots, V_n subconjuntos abiertos de X tales que $A \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle \subset \mathcal{U}$. Sea $V_a = \bigcap \{V_i : a \in V_i, \text{ donde } i \in \{1, \dots, n\}\}$, $V_b = \bigcap \{V_i : b \in V_i, \text{ con } i \in \{1, \dots, n\}\}$ y $V_c = \bigcap \{V_i : c \in V_i, \text{ donde } i \in \{1, \dots, n\}\}$. Notemos que V_a, V_b y V_c son subconjuntos abiertos de X tales que $a \in V_a$, $b \in V_b$ y $c \in V_c$. Así, $A \in \langle V_a, V_b, V_c \rangle \subset \langle V_1, \dots, V_n \rangle \subset \mathcal{U}$.

Como $A \subset \mathcal{P}(X)$, por el Lema 2.21, existen sucesiones $\{A_m\}_{m=1}^\infty$, $\{B_m\}_{m=1}^\infty$ y $\{C_m\}_{m=1}^\infty$ en $\mathcal{A}_S(X)$ tales que $\lim A_m = \{a\}$, $\lim B_m = \{b\}$ y $\lim C_m = \{c\}$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \subset V_a$, $B_m \subset V_b$ y $C_m \subset V_c$, para cada $m \geq N$.

Así, $\langle A_m^\circ, B_m^\circ, C_m^\circ \rangle \subset \langle V_a, V_b, V_c \rangle$, para cada $m \geq N$. Por los Lemas 2.16 y 2.17, tenemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $\langle A_m^\circ, B_m^\circ, C_m^\circ \rangle$ es una componente de $\mathcal{E}_3(X)$.

Caso 2. $|A| = 2$.

Para este caso, sin perder generalidad, asumamos que $a \neq b$ y $c = a$. Siguiendo la idea del Caso 1, podemos construir subconjuntos abiertos V_a y V_b en X tales que $a \in V_a$, $b \in V_b$ y $A \in \langle V_a, V_b \rangle \subset \mathcal{U}$.

Como $A \subset \mathcal{P}(X)$, por el Lema 2.21, existen sucesiones $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ y $\{B_m\}_{m=1}^\infty$ en $\mathcal{A}_S(X)$ tales que $\lim A_m = \{a\}$ y $\lim B_m = \{b\}$. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \subset V_a$ y $B_m \subset V_b$, para cada $m \geq N$. Así, $\langle A_m^\circ, B_m^\circ \rangle \subset \langle V_a, V_b \rangle$, para cada $m \geq N$. Por los Lemas 2.16 y 2.17, tenemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $\langle A_m^\circ, B_m^\circ \rangle$ es una componente de $\mathcal{E}_3(X)$.

Caso 3. $|A| = 1$.

Para este caso, tenemos que $a = b = c$. Siguiendo la idea del Caso 1, existe un subconjunto abierto V_a en X tal que $a \in V_a$ y $A \in \langle V_a \rangle \subset \mathcal{U}$.

Como $A \subset \mathcal{P}(X)$, por el Lema 2.21, existe una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ en $\mathcal{A}_S(X)$ tal que $\lim A_m = \{a\}$. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \subset V_a$, para cada $m \geq N$. Luego, $\langle A_m^\circ \rangle \subset \langle V_a \rangle$, para cada $m \geq N$. Por los Lemas 2.16 y 2.17, tenemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $\langle A_m^\circ \rangle$ es una componente de $\mathcal{E}_3(X)$.

De los Casos 1, 2 y 3, podemos concluir que existen componentes de $\mathcal{E}_3(X)$ contenidas en \mathcal{U} .

Para mostrar la suficiencia, tomemos $A \in F_3(X)$ y supongamos que $A \not\subset \mathcal{P}(X)$. Así, existe un elemento $a \in A$ tal que $a \in \mathcal{G}(X)$, por definición, existe una gráfica finita G de X tal que $a \in G^\circ$. Como G es una gráfica finita, podemos suponer que $J^\circ \not\subset G^\circ$, para todo $J \in \mathcal{A}_S(X)$.

Notemos que $\langle G^\circ, X \rangle$ es una vecindad de A en $F_3(X)$. Por hipótesis, existe una componente \mathcal{W} de $\mathcal{E}_3(X)$ tal que $\mathcal{W} \subset \langle G^\circ, X \rangle$. Sea $\mathcal{W} = \langle L^\circ, T^\circ, K^\circ \rangle$, donde $L, T, K \in \mathcal{A}_S(X)$. Luego, $L^\circ \not\subset G^\circ$, $T^\circ \not\subset G^\circ$ y $K^\circ \not\subset G^\circ$, así existen $a' \in L^\circ - G^\circ$, $b' \in T^\circ - G^\circ$ y $c' \in K^\circ - G^\circ$ tales que $\{a', b', c'\} \in \langle L^\circ, T^\circ, K^\circ \rangle$ y $\{a', b', c'\} \notin \langle G^\circ, X \rangle$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A \subset \mathcal{P}(X)$. \square

Teorema 3.6. Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos y sea $J \in \mathcal{A}_S(X)$. Si existe $h: F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ un homeomorfismo y $K, L, M \in \mathcal{A}_S(Y)$ son tales que $h(\langle J^\circ \rangle) = \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, entonces

$$(a) \ h(\langle J \rangle \cap \langle R(X) \cap \mathcal{G}(X) \rangle) = \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \rangle.$$

$$(b) \ h(\langle J \rangle \cap \langle \mathcal{P}(X) \rangle) = \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle \mathcal{P}(Y) \rangle.$$

Demostración. Para mostrar la afirmación (a), veamos primero que se cumple la contención $h(\langle J \rangle \cap \langle R(X) \cap \mathcal{G}(X) \rangle) \subset \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \rangle$.

Sea $A_1 \in h(\langle J \rangle \cap \langle R(X) \cap \mathcal{G}(X) \rangle)$, entonces existe $A \in \langle J \rangle \cap \langle R(X) \cap \mathcal{G}(X) \rangle$ tal que $h(A) = A_1$. Como $h(\langle J \rangle) = h(\overline{\langle J^\circ \rangle}) = \overline{h(\langle J^\circ \rangle)}$ y por la hipótesis, tenemos que $h(\langle J \rangle) = \overline{h(\langle J^\circ \rangle)} = \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$. Como $A \in \langle J \rangle$, entonces $h(A) \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$.

Veamos que $A_1 \in \langle R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \rangle$. Como $A \in \langle R(X) \cap \mathcal{G}(X) \rangle$, tenemos que $A \subset R(X) \cap \mathcal{G}(X)$, así por el Corolario 2.26, sabemos que $h(A) \subset R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$. Por lo tanto, $A_1 \in \langle R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \rangle$.

Así, $A_1 \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \rangle$ y hemos mostrado que $h(\langle J \rangle \cap \langle R(X) \cap \mathcal{G}(X) \rangle) \subset \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \rangle$.

Para mostrar la otra contención, tomemos $B \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \rangle$. Por la hipótesis sabemos que $h(\langle J^\circ \rangle) = \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ y como h es homeomorfismo, tenemos que $h^{-1}(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}) = \overline{h^{-1}(\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle)} = \overline{\langle J^\circ \rangle} = \langle J \rangle$, así obtenemos que $h^{-1}(B) \in \langle J \rangle$.

Veamos que $h^{-1}(B) \in \langle R(X) \cap \mathcal{G}(X) \rangle$. Como $B \in \langle R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \rangle$, tenemos que $B \subset R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$. De nuevo por el Corolario 2.26 y por ser h homeomorfismo, tenemos que $h^{-1}(B) \subset R(X) \cap \mathcal{G}(X)$. Así, $B \in h(\langle R(X) \cap \mathcal{G}(X) \rangle)$ y obtenemos que $\overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle \mathcal{P}(Y) \rangle \subset h(\langle J \rangle \cap \langle \mathcal{P}(X) \rangle)$.

Con esto hemos mostrado la afirmación (a).

Veamos que la afirmación (b) es verdadera. Para esto primero veamos que se cumple la contención $h(\langle J \rangle \cap \langle \mathcal{P}(X) \rangle) \subset \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$.

Sea $A_1 \in h(\langle J \rangle \cap \langle \mathcal{P}(X) \rangle)$, entonces existe $A \in \langle J \rangle \cap \langle \mathcal{P}(X) \rangle$ tal que $h(A) = A_1$. Como $A \in \langle J \rangle$ y como $h(\langle J \rangle) = h(\langle J^\circ \rangle) = \overline{h(\langle J^\circ \rangle)}$ y por la hipótesis, tenemos que $h(\langle J \rangle) = \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$, entonces $A_1 = h(A) \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$.

Veamos que $A_1 \in \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$. Como $A \in F_3(X)$, tenemos que $h(A) \in F_3(Y)$. Sea \mathcal{V} una vecindad de $h(A)$ en $F_3(Y)$, así $h^{-1}(\mathcal{V})$ es una vecindad de A en $F_3(X)$. Como $A \in \langle \mathcal{P}(X) \rangle$, tenemos que $A \subset \mathcal{P}(X)$, por Lema 3.5, existe una componente \mathcal{W} in $\mathcal{E}_3(X)$ tal que $\mathcal{W} \subset h^{-1}(\mathcal{V})$. Como h es un homeomorfismo, aplicado el Lema 2.15, sabemos que $h(\mathcal{E}_3(X)) = \mathcal{E}_3(Y)$, así $h(\mathcal{W})$ es una componente de $\mathcal{E}_3(Y)$ y además, tenemos que $h(\mathcal{W}) \subset \mathcal{V}$. Dado que $h(\mathcal{W})$ es una componente en $\mathcal{E}_3(Y)$, por el Lema 3.5, tenemos que $A_1 = h(A) \in \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$, de donde $A_1 \in \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$.

Esto muestra que $h(\langle J \rangle \cap \langle \mathcal{P}(X) \rangle) \subset \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$.

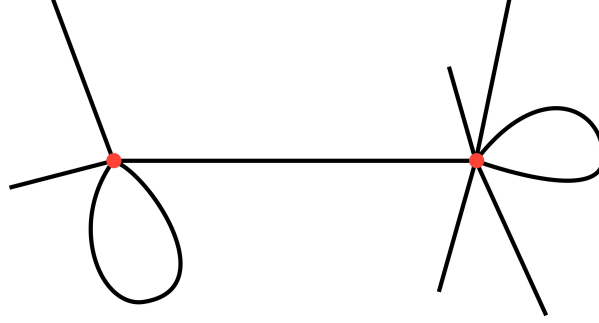
Para mostrar la otra inclusión, sea $B \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$.

Como $B \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$, por la hipótesis y por ser h un homeomorfismo, tenemos que $h^{-1}(B) \in h^{-1}(\overline{h(\langle J^\circ \rangle)}) = \overline{h^{-1}(\langle J^\circ \rangle)} = \langle J \rangle$.

Por otro lado, como h es un homeomorfismo y $B \in F_3(Y)$, tenemos que $h^{-1}(B) \in F_3(X)$. Sea \mathcal{U} una vecindad de $h^{-1}(B)$ en $F_3(X)$, así $h(\mathcal{U})$ es una vecindad de B en $F_3(Y)$. Como $B \in \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$, tenemos que $B \subset \mathcal{P}(Y)$, por Lema 3.5, existe una componente \mathcal{W} in $\mathcal{E}_3(Y)$ tal que $\mathcal{W} \subset h(\mathcal{U})$. Por el Lema 2.15, sabemos que $h(\mathcal{E}_3(X)) = \mathcal{E}_3(Y)$, así $h^{-1}(\mathcal{W})$ es una componente de $\mathcal{E}_3(X)$ y además, tenemos que $h^{-1}(\mathcal{W}) \subset \mathcal{U}$. Dado que $h^{-1}(\mathcal{W})$ es una componente en $\mathcal{E}_3(X)$, por el Lema 3.5, tenemos que $h^{-1}(B) \in \langle \mathcal{P}(X) \rangle$.

De lo anterior tenemos que $h^{-1}(B) \in \langle J \rangle \cap \langle \mathcal{P}(X) \rangle$, lo que garantiza que $B \in h(\langle J \rangle \cap \langle \mathcal{P}(X) \rangle)$.

Con esto hemos mostrado que $h(\langle J \rangle \cap \langle \mathcal{P}(X) \rangle) = \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$. \square



Observación 3.7. Sean X un continuo casi enrejado localmente conexo $J \in \mathcal{A}_I(X)$ con puntos extremos p y t tales que $p, t \in \mathcal{G}(X)$. Supongamos que p y t son vértices de un m_1 -odo y un m_2 -odo simple, respectivamente. Denotemos por T_{m_1} y T_{m_2} a dichos m_1 -odo y m_2 -odo simple, respectivamente. Dado $A \in \langle J \rangle$, se tiene lo siguiente

- (1) Si $A = \{p, x_2, x_3\}$ con $x_2, x_3 \in J^\circ$ y $x_2 \neq x_3$, entonces las vecindades locales de A en $F_3(X)$ son homeomorfas a $T_{m_1} \times [0, 1] \times [0, 1]$.
- (2) Si $A = \{p, x_2\}$ con $x_2 \in J^\circ$, entonces las vecindades locales de A en $F_3(X)$ son homeomorfas a $(F_2(T_{m_1}) \times [0, 1]) \cup (T_{m_1} \times F_2([0, 1]))$.
- (3) Si $A = \{p\}$, entonces las vecindades locales de A en $F_3(X)$ son homeomorfas a $F_3(T_{m_1})$.
- (4) Si $A = \{p, t\}$, entonces las vecindades locales de A en $F_3(X)$ son homeomorfas a $(F_2(T_{m_1}) \times T_{m_2}) \cup (T_{m_1} \times F_2(T_{m_2}))$.
- (5) $A = \{p, x_2, t\}$ con $x_2 \in J^\circ$, entonces las vecindades locales de A en $F_3(X)$ son homeomorfas a $T_{m_1} \times [0, 1] \times T_{m_2}$.

Teorema 3.8. Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos, $h: F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ un homeomorfismo, $J \in \mathcal{A}_S(X)$ y $K, L, M \in \mathcal{A}_S(Y)$ tales que $h(\langle J^\circ \rangle) = \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$. Si existen $p \in X$ y $a \in \overline{K^\circ}$ tales que $\{p\} = J \cap \mathcal{P}(X)$ y $a \in h(\{p\})$, entonces existe una colección de componentes \mathcal{C} de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

- (a) $h^{-1}(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathcal{C}}$.
- (b) $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathcal{C}}$.

Demostración. Supongamos que existen $p \in X$ y $a \in \overline{K^\circ}$ tales que $p \in J \cap \mathcal{P}(X)$ y $a \in h(\{p\})$. Como $\{p\} \in \langle \mathcal{P}(X) \rangle$, por (b) del Teorema 3.6 tenemos que $h(\{p\}) \in \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$, de donde tenemos que $a \in \mathcal{P}(Y)$.

Como $a \in h(\{p\})$ y $h(\{p\}) \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, existe una sucesión $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{k_m, l_m, w_m\} =$

$h(\{p\})$. Dado que $a \in \overline{K^\circ} - K^\circ$, sin perder generalidad, podemos asumir que para toda $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $k_m \in K^\circ$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a$.

Como $a \in \mathcal{P}(Y)$, por el Lema 2.21, existe una sucesión de elementos distintos dos a dos $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ en $\mathcal{A}_S(Y) - \{K, L, M\}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = \{a\}$. Sea

$$\mathfrak{K} = \{\langle K_m^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle : m \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, por los Teoremas 2.16 y 2.17, se cumple que $\langle K_m^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ es una componente de $\mathcal{E}_3(Y)$. Como $\langle K_m^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle \neq \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ para toda $m \in \mathbb{N}$, tenemos que \mathfrak{K} es una colección de componentes en $\mathcal{E}_3(Y) - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$.

Para mostrar la existencia de la colección de componentes \mathfrak{C} deseada, mostremos primero dos afirmaciones que serán de gran utilidad.

Afirmación 1. $\overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \bigcup \mathfrak{K} = \emptyset$.

Demostración. Supongamos lo contrario, entonces existe $\{x, y, z\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \bigcup \mathfrak{K}$. Como $\{x, y, z\} \in \bigcup \mathfrak{K}$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\{k, l, w\} \in \langle K_j^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$. Dado que $K_j^\circ \cap K = \emptyset$, tenemos que $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle \cap \langle K_j^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle = \emptyset$; y así $\{x, y, z\} \notin \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$ lo cual es una contradicción. Así, la Afirmación 1 es verdadera.

Afirmación 2. $\overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \bigcup \mathfrak{K} = \overline{\{a\}, L^\circ, M^\circ}$.

Demostración. Mostremos que $\overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \bigcup \mathfrak{K} \subset \overline{\{a\}, L^\circ, M^\circ}$.

Sea $\{k, l, w\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \bigcup \mathfrak{K}$. Por la Afirmación 1, tenemos que $\{k, l, w\} \in \bigcup \mathfrak{K} - (\bigcup \mathfrak{K})$, así existe una sucesión $\{\{a_m, b_m, c_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\bigcup \mathfrak{K}$ la cual converge a $\{k, l, w\}$. De esta forma, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $l(m) \in \mathbb{N}$ tal que $\{a_m, b_m, c_m\} \in \langle K_{l(m)}^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$. Sin perder generalidad, podemos asumir que $a_m \in K_{l(m)}^\circ$, $b_m \in L^\circ$, $c_m \in M^\circ$, para cada $l(m) \in \mathbb{N}$, y $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = k$, $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = l$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} c_m = w$. Con esto tenemos que $k \in \overline{\bigcup_{m=1}^\infty K_{l(m)}^\circ} - (\bigcup_{m=1}^\infty K_{l(m)}^\circ)$, $l \in L$ y $w \in M$. Como $\lim_{m \rightarrow \infty} K_{l(m)} = \{a\}$, concluimos que $k = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a$.

Con lo anterior tenemos que $\{\{a, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión en $\overline{\{a\}, L^\circ, M^\circ}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{a, l_m, w_m\} = \{a, l, w\} = \{k, l, w\}$. Por lo tanto, $\{k, l, w\} \in \overline{\{a\}, L^\circ, M^\circ}$. Con esto hemos mostrado $\overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \bigcup \mathfrak{K} \subset \overline{\{a\}, L^\circ, M^\circ}$.

Ahora mostremos que $\overline{\{a\}, L^\circ, M^\circ} \subset \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \bigcup \mathfrak{K}$.

Sea $\{k, l, w\} \in \overline{\{a\}, L^\circ, M^\circ}$, entonces existe una sucesión $\{\{a, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\overline{\{a\}, L^\circ, M^\circ}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{a, l_m, w_m\} = \{k, l, w\}$. Sin perder generalidad, podemos asumir que $l_m \in L^\circ$, $w_m \in M^\circ$, para cada $m \in \mathbb{N}$; y que $\lim_{m \rightarrow \infty} a = k$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = l$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = w$. Así, $k = a$ y por tanto, $\{k, l, w\} = \{a, l, w\}$. Veamos que $\{a, l, w\} \in \bigcup \mathfrak{K}$.

Para toda $m \in \mathbb{N}$, sea $k_m \in K_m^\circ$. Como $\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = \{a\}$, tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a$. Como $l_m \in L^\circ$ y $w_m \in M^\circ$, para toda $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $\{k_m, l_m, w_m\} \in \langle K_m^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, así $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión en $\bigcup \langle K_m^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ la cual converge a $\{a, l, w\}$. Así, $\{a, l, w\} \in \bigcup \mathfrak{K}$.

Veamos que $\{a, l, w\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$.

Como $a \in \text{Bd}_Y(K)$, existe una sucesión $\{a_m\}_{m=1}^\infty$ contenida en K° tal que $\lim a_m = a$ y dado que para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $l_m \in L^\circ$ y $w_m \in$

M° , entonces $\{a_m, l_m, w_m\} \in \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$. Así, $\{\{a_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{a_m, l_m, w_m\} = \{a, l, w\}$. Por lo tanto, $\{a, l, w\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$.

Con esto hemos mostrado que $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \subset \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\bigcup \mathfrak{K}}$. En conclusión, hemos demostrado esta afirmación.

De lo anterior obtenemos la siguiente afirmación.

Afirmación 3. Existe una colección de componentes \mathfrak{C} en $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$ tal que $h^{-1}(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}}$.

Demostración. Por los Teoremas 2.16 y 2.17 sabemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, $\langle K_m^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ es una componente de $\mathcal{E}_3(Y)$.

Como h es un homeomorfismo, por los Teoremas 2.15 y 2.16, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $J_{im} \in \mathcal{A}_S(X)$, con $i \in \{1, 2, 3\}$ tales que $h^{-1}(\langle K_m^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle) = \langle J_{1m}^\circ, J_{2m}^\circ, J_{3m}^\circ \rangle$. Dado que para todo $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $\langle K_m^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle \neq \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, tenemos que $\langle J_{1m}^\circ, J_{2m}^\circ, J_{3m}^\circ \rangle \neq \langle J^\circ \rangle$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Sea

$$\mathfrak{C} = \{\langle J_{1m}^\circ, J_{2m}^\circ, J_{3m}^\circ \rangle : m \in \mathbb{N}\}.$$

Observemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $\langle J_{1m}^\circ, J_{2m}^\circ, J_{3m}^\circ \rangle$ es una componente de $\mathcal{E}_3(X)$ y como $\langle J_{1m}^\circ, J_{2m}^\circ, J_{3m}^\circ \rangle \neq \langle J^\circ \rangle$, tenemos que \mathfrak{C} es una colección de componentes en $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$. Y además,

$$h^{-1}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \langle K_m^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle\right) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \langle J_{1m}^\circ, J_{2m}^\circ, J_{3m}^\circ \rangle.$$

Así,

$$h^{-1}\left(\overline{\bigcup \mathfrak{K}}\right) = h^{-1}\left(\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \langle K_m^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}\right) = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \langle J_{1m}^\circ, J_{2m}^\circ, J_{3m}^\circ \rangle} = \overline{\bigcup \mathfrak{C}}.$$

Por lo tanto,

$$h^{-1}\left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\bigcup \mathfrak{K}}\right) = \langle J \rangle \cap h^{-1}\left(\overline{\bigcup \mathfrak{K}}\right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}}. \quad (3.0.2)$$

Por la Afirmación 2, sabemos que $\overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\bigcup \mathfrak{K}} = \overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}$, y por la igualdad en (3.0.2), tenemos que

$$h^{-1}\left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}\right) = h^{-1}\left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\bigcup \mathfrak{K}}\right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}}.$$

Con esto terminamos la demostración de la Afirmación 3.

La Afirmación 3, muestra la existencia de la colección de componentes \mathfrak{C} deseada y también que se cumple (a).

Por último, mostremos que se cumple (b). Para esto debemos mostrar que la colección de componentes \mathfrak{C} en $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$ que obtuvimos de la Afirmación 3, satisface $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}}$.

Para esto, consideremos el siguiente conjunto auxiliar $\mathcal{C} = \{p, t, x\} : x \in J\}$. Observemos que \mathcal{C} es homeomorfo a una curva cerrada simple contenida en $\langle J \rangle$. Además, notemos que $\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle$ contiene una 2-celda, por lo que $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}$ contiene una 2-celda. Dado que $h^{-1}(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}) \subset \langle J \rangle$, tenemos que $h^{-1}(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}) \not\subset (\mathcal{C} \cup \{p\})$. Así, existe $\{k, l, w\} \in \overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}$, tal que $h^{-1}(\{k, l, w\}) \notin (\mathcal{C} \cup \{p\})$. Usando argumentos similares a los de la Afirmación 2, podemos suponer que $a = k$. Sea $A = h^{-1}(\{a, l, w\})$. Dado que $\{a, l, w\} \in \overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}$ y por la Afirmación 3, tenemos que $A \in \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}}$.

Como $\{a, l, w\} \cap \mathcal{P}(Y) \neq \emptyset$, por (e) del Teorema 2.23, tenemos que $A \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Dado que $J \cap \mathcal{P}(X) = \{p\}$, tenemos que $p \in A$ y del hecho que $A \notin (\mathcal{C} \cup \{p\})$, concluimos que A es de la forma $\{p, x_1, x_2\}$ con x_1 y $x_2 \in J^\circ$.

Aplicando el Teorema 3.4, a la colección de componentes \mathfrak{C} y al punto A , podemos concluir que $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}}$.

Con esto concluimos la prueba de (b) y el teorema queda demostrado. \square

Teorema 3.9. Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos, $h: F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ un homeomorfismo, $J \in \mathcal{A}_S(X)$ y $K, L, M \in \mathcal{A}_S(Y)$ tales que $h(\langle J^\circ \rangle) = \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$. Si existen $p, t \in X$ y $a \in \overline{K^\circ}$ tales que $\{p, t\} = J \cap \mathcal{P}(X)$ y $a \in h(A)$, donde $A \in \{\{p\}, \{t\}, \{p, t\}\}$ entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C} de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(a) \quad h^{-1}(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}}.$$

$$(b) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}} \text{ o } \overline{\langle \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}}.$$

$$(c) \quad \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}}.$$

Demostración. Supongamos que existen $p, t \in X$ y $a \in \overline{K^\circ}$ tales que $\{p, t\} = J \cap \mathcal{P}(X)$. Sean $A \in \{\{p\}, \{t\}, \{p, t\}\}$ y $a \in h(A)$. Como $A \in \langle \mathcal{P}(X) \rangle$, por (b) del Teorema 3.6, tenemos que $h(A) \in \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$, de donde tenemos que $a \in \mathcal{P}(Y)$.

Como $a \in h(A)$ y $h(A) \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, existe una sucesión $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{k_m, l_m, w_m\} = h(A)$. Dado que $a \in \overline{K^\circ} - K^\circ$, sin perder generalidad, podemos asumir que para toda $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $k_m \in K^\circ$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a$.

Como $a \in \mathcal{P}(Y)$, por el Lema 2.21, existe una sucesión de elementos distintos dos a dos $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ en $\mathcal{A}_S(Y) - \{K, L, M\}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = \{a\}$. Sea

$$\mathfrak{K} = \{\langle K_m^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle : m \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, por los Teoremas 2.16 y 2.17, se cumple que $\langle K_m^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ es una componente de $\mathcal{E}_3(Y)$. Como $\langle K_m^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle \neq \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ para toda $m \in \mathbb{N}$, tenemos que \mathfrak{K} es una colección de componentes en $\mathcal{E}_3(Y) - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$.

Siguiendo las demostraciones de las Afirmaciones 1, 2, 3 y 4 del Teorema 3.8, podemos mostrar que las siguientes Afirmaciones son verdaderas.

Afirmación 1. $\overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \bigcup \mathfrak{K} = \emptyset$.

Afirmación 2. $\overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \bigcup \mathfrak{K} = \overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}$.

Afirmación 3. Existe una colección de componentes \mathfrak{C} en $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$ tal que $h^{-1}(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}) = \langle J \rangle \cap \bigcup \mathfrak{C}$.

Notemos que la Afirmación 3, muestra la existencia de la colección de componentes \mathfrak{C} deseada y también que se cumple (a).

Mostremos que se cumple (b). Para esto debemos mostrar que la colección de componentes \mathfrak{C} en $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$ que obtuvimos de la Afirmación 3, satisface que $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \bigcup \mathfrak{C}$ o $\overline{\langle \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \bigcup \mathfrak{C}$.

Para esto, consideremos el siguiente conjunto auxiliar $\mathcal{C} = \{\{p, t, x\} : x \in J\}$. Observemos que \mathcal{C} es homeomorfo a una curva cerrada simple contenida en $\langle J \rangle$. Además, notemos que $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}$ contiene una 2-celda, por lo que $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}$ contiene una 2-celda. Dado que $h^{-1}(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}) \subset \langle J \rangle$, tenemos que $h^{-1}(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}) \not\subset (\mathcal{C} \cup \{\{p\}, \{t\}\})$. Así, existe $\{k, l, w\} \in \overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}$, tal que $h^{-1}(\{k, l, w\}) \notin (\mathcal{C} \cup \{\{p\}, \{t\}\})$. Usando argumentos similares a los de la Afirmación 2 del Teorema 3.8, podemos suponer que $a = k$. Sea $A_1 = h^{-1}(\{a, l, w\})$. Dado que $\{a, l, w\} \in \overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}$ y por la Afirmación 3 del Teorema 3.8, tenemos que $A_1 \in \langle J \rangle \cap \bigcup \mathfrak{C}$.

Como $\{a, l, w\} \cap \mathcal{P}(Y) \neq \emptyset$, por (e) del Teorema 2.23, tenemos que $A_1 \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Dado que $J \cap \mathcal{P}(X) = \{p, t\}$, tenemos que $p \in A_1$ o $t \in A_1$ y del hecho que $A \notin (\mathcal{C} \cup \{\{p\}, \{t\}\})$, concluimos que A es de la forma $\{p, x_1, x_2\}$ con $x_1, x_2 \in J^\circ$, o A es de la forma $\{t, x_1, x_2\}$ con $x_1, x_2 \in J^\circ$. Analicemos ambos casos.

Caso (i) $p \in A_1$.

En este caso tenemos que A es de la forma $\{p, x_1, x_2\}$ con $x_1, x_2 \in J^\circ$ y aplicando el Teorema 3.4, a la colección de componentes \mathfrak{C} y al punto A , podemos concluir que $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \bigcup \mathfrak{C}$.

Caso (ii) $t \in A_1$.

En este caso, A es de la forma $\{t, x_1, x_2\}$ con $x_1, x_2 \in J^\circ$ y aplicando el Teorema 3.4, a la colección de componentes \mathfrak{C} y al punto A , podemos concluir que $\overline{\langle \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \bigcup \mathfrak{C}$.

De los Casos (i) y (ii), tenemos que se cumple que $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \bigcup \mathfrak{C}$ o $\overline{\langle \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \bigcup \mathfrak{C}$. Con esto concluimos la prueba de (b).

Por último, mostremos que se cumple el inciso (c) de este teorema, es decir, veamos que se cumple $\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \bigcup \mathfrak{C}$. Por el inciso (b), solo basta mostrar que se cumple $\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$ y $\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \overline{\langle \{t\}, J^\circ \rangle}$.

Sea $\{x, y, z\} \in \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle}$, entonces existe una sucesión $\{\{p, t, z_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{p, t, z_m\} = \{x, y, z\}$. Sin perder generalidad, podemos asumir que $z_m \in J^\circ$, para cada $m \in \mathbb{N}$; y que $\lim_{m \rightarrow \infty} p = x$, $\lim_{m \rightarrow \infty} t = y$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = z$. Así, $x = p$, $y = t$ y por tanto, $\{x, y, z\} = \{p, t, z\}$.

Dado que $p, t \in \text{Bd}_X(J)$, entonces existen sucesiones $\{p_m\}_{m=1}^\infty$ y $\{t_m\}_{m=1}^\infty$ en J° tales que $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = t$. Así, $\{\{p, t_m, z_m\}\}_{m=1}^\infty$ y $\{\{t, p_m, z_m\}\}_{m=1}^\infty$ son sucesiones en $\langle\{p\}, J^\circ\rangle$ y $\langle\{t\}, J^\circ\rangle$, respectivamente, tales que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{p, t_m, z_m\} = \{p, t, z\}$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} \{t, p_m, z_m\} = \{p, t, z\}$. Por lo tanto, $\{p, t, z\} \in \langle\{p\}, J^\circ\rangle$ y $\{p, t, z\} \in \langle\{t\}, J^\circ\rangle$. En conclusión, $\langle\{p\}, \{t\}, J^\circ\rangle \subset \langle\{p\}, J^\circ\rangle$ y $\langle\{p\}, \{t\}, J^\circ\rangle \subset \langle\{t\}, J^\circ\rangle$.

Con esto terminamos la demostración del inciso (c) de este teorema y así la demostración del mismo. \square

Teorema 3.10. Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos, $h: F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ un homeomorfismo. Si $J \in \mathcal{A}_I(X)$, entonces $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$, para algún $K \in \mathcal{A}_I(Y)$.

Demostración. Sea $J \in \mathcal{A}_I(X)$ y denotemos por p y t a los puntos extremos de J . Por el Lema 3.1, sabemos que existen $K, L, M \in \mathcal{A}_S(Y)$ tales que $h(\langle J \rangle) = \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$.

Como $\{p\}, \{t\}, \{p, t\} \in \langle J \rangle$, entonces $h(\{p\}), h(\{t\}), h(\{p, t\}) \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$.

Supongamos que K, L y M no son iguales, así, podemos suponer que al menos $K \neq L$. Como J es un arco interno, se cumple que $p \neq t$ y además estos puntos extremos de J pueden ser de tres tipos. Analicemos estos tres casos

Caso 1. $\{p, t\} \subset R(X) \cap \mathcal{G}(X)$.

En este caso, por (d) del Teorema 2.23, se cumple que $h(\{p\}), h(\{t\}) \in F_1(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y))$. Sean $l, a \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$ tales que $h(\{p\}) = \{a\}$ y $h(\{t\}) = \{l\}$. Adicionalmente, por el Teorema 3.6, tenemos que $h(\{p, t\}) \in \langle R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \rangle$.

Como h es un homeomorfismo, tenemos que $a \neq l$. Dado que $\{l\}, \{a\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$, existen sucesiones $\{\{q_m^1, q_m^2, q_m^3\}\}_{m=1}^\infty$ y $\{\{l_m^1, l_m^2, l_m^3\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ las cuales cumplen que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{q_m^1, q_m^2, q_m^3\} = \{a\}$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} \{l_m^1, l_m^2, l_m^3\} = \{l\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $q_m^1, l_m^1 \in K^\circ$, $q_m^2, l_m^2 \in L^\circ$ y $q_m^3, l_m^3 \in M^\circ$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Con estas suposiciones tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} q_m^1 = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} q_m^2 = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} q_m^3 = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m^1 = l$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m^2 = l$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m^3 = l$, lo que implica que $a, l \in \overline{K^\circ} \cap \overline{L^\circ} \cap \overline{M^\circ}$; y así $a, l \in K \cap L \cap M$. Dado que $a \neq l$ y $a, l \in \mathcal{G}(X)$, podemos concluir que a y l son los puntos extremos de los arcos K, L y M , esto muestra que $K, L, M \in \mathcal{A}_I(Y)$.

Por lo anterior, tenemos que $\{\{a\}, \{l\}, \{a, l\}\} = \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \rangle$, así por (a) del Teorema 3.6, tenemos que $h(\{p, t\}) = \{a, l\}$.

Afirmación 1. $h^{-1}(\{\{a, l, z\} : z \in K\}) = \{\{p, t, x\} : x \in J\}$.

Demostración. Mostremos primero que $h^{-1}(\{\{a, l, z\} : z \in K^\circ\}) \subset \{\{p, t, x\} : x \in J^\circ\}$.

Sea $B \in h^{-1}(\{\{a, l, z\} : z \in K^\circ\})$, entonces existe $k_1 \in K^\circ$ tal que $h^{-1}(\{a, l, k_1\}) = B$. Sean $m_1 = \text{Ord}_X(p)$ y $m_2 = \text{Ord}_X(t)$; y denotemos por T_{m_1} y T_{m_2} a los m_1 -odo y m_2 -odo simples, tales que p y q son vértices de éstos, respectivamente.

Por (5) de la Observación 3.7, tenemos que las vecindades locales de $\{a, l, k_1\}$ en $F_3(Y)$ son homeomorfas a $T_{m_1} \times [0, 1] \times T_{m_2}$. Esto muestra que las vecindades locales de B en $F_3(X)$ son también homeomorfas a $T_{m_1} \times [0, 1] \times T_{m_2}$.

Ahora supongamos que $B \notin \{\{p, t, x\} : x \in J^\circ\}$, entonces tenemos los siguientes casos.

Caso (a). $B = \{p, x_2, x_3\}$ con $x_2, x_3 \in J^\circ$ y $x_2 \neq x_3$.

Por (1) de la Observación 3.7, las vecindades locales de B en $F_3(X)$ son homeomorfas a $T_{m_1} \times [0, 1] \times [0, 1]$, las cuales no son homeomorfas a $T_{m_1} \times [0, 1] \times T_{m_2}$. Lo que muestra que este caso no se puede dar.

Caso (b). $B = \{p, x_2\}$ con $x_2 \in J^\circ$.

Por (2) de la Observación 3.7, las vecindades locales de B en $F_3(X)$ son homeomorfas a $(F_2(T_{m_1}) \times [0, 1]) \cup (T_{m_1} \times F_2([0, 1]))$, las cuales no son homeomorfas a $T_{m_1} \times [0, 1] \times T_{m_2}$. Lo que muestra que este caso no se puede dar.

Caso (c). $B = \{p\}$.

Por (3) de la Observación 3.7, las vecindades locales de B en $F_3(X)$ son homeomorfas a $F_3(T_{m_1})$, las cuales no son homeomorfas a $T_{m_1} \times [0, 1] \times T_{m_2}$. Lo que muestra que este caso no se puede dar.

Caso (d). $B = \{p, t\}$.

Por (4) de la Observación 3.7, las vecindades locales de B en $F_3(X)$ son homeomorfas a $(F_2(T_{m_1}) \times T_{m_2}) \cup (T_{m_1} \times F_3(T_{m_1}))$, las cuales no son homeomorfas a $T_{m_1} \times [0, 1] \times T_{m_2}$. Lo que muestra que este caso no se puede dar.

Caso (e). Si $B = \{t, x_2, x_3\}$ con $x_2, x_3 \in J^\circ$ y $x_2 \neq x_3$ o $B = \{t, x_2\}$ con $x_2 \in J^\circ$ o $B = \{t\}$.

Notemos que este caso es similar a los Casos (a), (b) y (c). Lo que implica que este caso no se puede dar.

Por lo anterior, concluimos que $B \in \{\{p, t, x\} : x \in J^\circ\}$ y obtenemos que $h^{-1}(\{\{a, l, z\} : z \in K^\circ\}) \subset \{\{p, t, x\} : x \in J^\circ\}$.

Ahora, notemos que $\overline{\{\{a, l, z\} : z \in K^\circ\}} = \{\{a, l, z\} : z \in K\}$ y $\overline{\{\{p, t, x\} : x \in J^\circ\}} = \{\{p, t, x\} : x \in J\}$ son ambos homeomorfos a una circunferencia, dado que $h^{-1}(\{\{a, l, z\} : z \in K^\circ\}) = h^{-1}(\{\{a, l, z\} : z \in K^\circ\}) \subset \{\{p, t, x\} : x \in J^\circ\} = \{\{p, t, x\} : x \in J\}$, concluimos que $h^{-1}(\{\{a, l, z\} : z \in K\}) = \{\{p, t, x\} : x \in J\}$ y concluimos la demostración de esta afirmación.

De manera análoga a la Afirmación 1, podemos mostrar que $h^{-1}(\{\{a, l, z\} : z \in L\}) = \{\{p, t, x\} : x \in J\}$ y $h^{-1}(\{\{a, l, z\} : z \in M\}) = \{\{p, t, x\} : x \in J\}$. Lo cual es una contradicción al hecho de que h es inyectiva; dado que esta contradicción viene de suponer que K, L y M no son iguales, concluimos que $K = L = M$, así hemos demostrado que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$. Por último, dado que a y l son los puntos extremos que K y éstos son de $R(X)$, concluimos que $K \in \mathcal{A}_I(X)$ y con esto terminamos la prueba del Caso 1.

Caso 2. $p \in \mathcal{P}(X)$ y $t \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$.

En este caso, por (d) del Teorema 2.23, tenemos que $h(\{t\}) \in F_1(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y))$. Sea $l \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$ tal que $h(\{t\}) = \{l\}$.

Como $\{l\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$, existe una sucesión $\{\{l_m^1, l_m^2, l_m^3\}\}_{m=1}^\infty$ contenida en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ la cual cumple que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{l_m^1, l_m^2, l_m^3\} = \{l\}$. Sin pérdida de

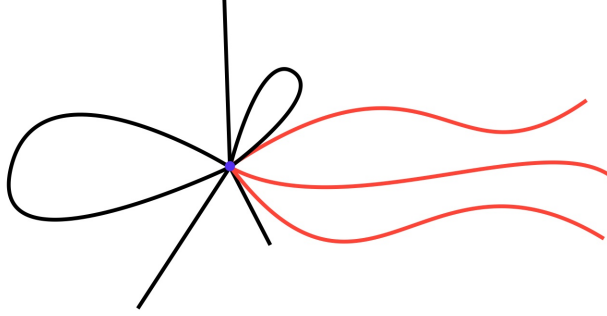
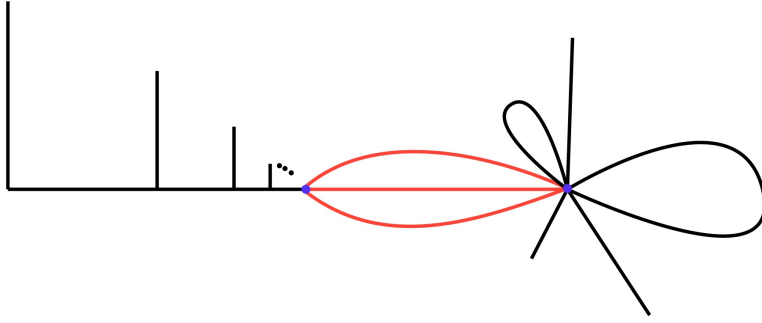
Figura 3.1: Posición de l en Y .

Figura 3.2: Caso 2.1

generalidad, podemos asumir que $l_m^1 \in K^\circ$, $l_m^2 \in L^\circ$ y $l_m^3 \in M^\circ$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Con estas suposiciones tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m^1 = l$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m^2 = l$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m^3 = l$, lo que implica que $l \in \overline{K^\circ} \cap \overline{L^\circ} \cap \overline{M^\circ}$; y así $l \in K \cap L \cap M$. Dado que $l \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$, podemos decir que l es un punto extremo común de K , L y M (para mejor visualización de este caso y que el lector no se pierda en un futuro, en la Figura 3.1 se muestra la posición del punto l en Y).

Como $\{p\} \in \langle \mathcal{P}(X) \rangle$, por (b) del Teorema 3.6, tenemos que $h(\{p\}) \in \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$. Dado que $h(\{p\})$ es un elemento de $F_3(Y)$, debemos analizar tres casos.

Caso 2.1. $|h(\{p\})| = 1$.

En este caso, sea $a \in Y$ tal que $h(\{p\}) = \{a\}$. Como $\{a\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, existe una sucesión $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{k_m, l_m, w_m\} = \{a\}$. Sin perder generalidad, podemos asumir que para toda $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $k_m \in K^\circ$, $l_m \in L^\circ$, $w_m \in M^\circ$. Con estas suposiciones tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = a$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = a$, lo que implica que $a \in \overline{K^\circ} \cap \overline{L^\circ} \cap \overline{M^\circ}$; y así, $a \in K \cap L \cap M$. Dado que $a \in \mathcal{P}(Y)$, obtenemos que a es punto extremo de K , L y M . Vea la Figura 3.2.

Así a y l son los puntos extremos de los arcos K , L y M , esto muestra que $K, L, M \in \mathcal{A}_I(Y)$.

Vamos a aplicar el Teorema 3.8 al punto a de la siguiente manera.

Como $a \in \overline{K^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_1 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(a) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

$$(b) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

Como $a \in \overline{L^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_2 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(c) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

$$(d) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

Como $a \in \overline{M^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_3 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(e) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

$$(f) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

Por los incisos (b), (d) y (f) tenemos que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3} \right).$$

De los incisos (a), (c) y (e), se deduce que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right).$$

Así,

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right).$$

Afirmación 2. El conjunto $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle}$ es finito.

Demostración. Para mostrar esta afirmación, mostremos que $\langle \{a\}, L, M \rangle \cap \langle K, \{a\}, M \rangle \cap \langle K, L, \{a\} \rangle$ es un conjunto finito.

Si $B \in \langle \{a\}, L, M \rangle \cap \langle K, \{a\}, M \rangle \cap \langle K, L, \{a\} \rangle$, entonces por definición se cumple que $B \subset \{a\} \cup L \cup M$, $B \subset K \cup \{a\} \cup M$ y $B \subset K \cup L \cup \{a\}$. Lo que implica que

$$B \subset (\{a\} \cup L \cup M) \cap (K \cup \{a\} \cup M) \cap (K \cup L \cup \{a\}) = \{a\}.$$

Lo que muestra que $B \subset \{a\}$ y obtenemos que $\langle \{a\}, L, M \rangle \cap \langle K, \{a\}, M \rangle \cap \langle K, L, \{a\} \rangle$ es un conjunto finito.

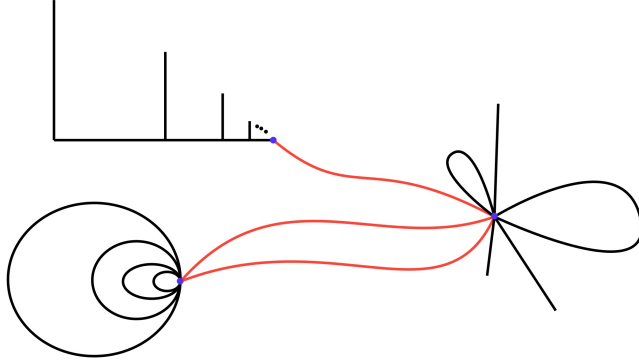


Figura 3.3:

Dado que

$$\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle \cap \langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle \cap \langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle \subset \langle \{a\}, L, M \rangle \cap \langle K, \{a\}, M \rangle \cap \langle K, L, \{a\} \rangle,$$

tenemos que $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \subset \{\{a\}\}$. Por lo que concluimos que $\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle \cap \langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle \cap \langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle$ es un conjunto finito. Esto concluye la prueba de esta afirmación.

De la Afirmación 2, tenemos que $h^{-1}\left(\left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle}\right)\right)$ es un conjunto finito, como $\langle \{p\}, J^\circ \rangle \subset \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$ y $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$ es infinito, obtenemos una contradicción.

Recordando que esta contradicción viene de suponer que K, L y M no son iguales, concluimos que $K = L = M$, así hemos demostrado que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$. Como ya habíamos mostrado al inicio de este subcaso que $K \in \mathcal{A}_I(X)$, hemos terminado la prueba del Caso 2.1.

Caso 2.2. $|h(\{p\})| = 2$.

Sean $a, b \in Y$ tal que $h(\{p\}) = \{a, b\}$. Por la parte (b) del Teorema 3.6, tenemos que $a, b \in \mathcal{P}(Y)$. Como $\{a, b\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, existe una sucesión $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{k_m, l_m, w_m\} = \{a, b\}$. Sin perder generalidad, podemos asumir que para toda $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $k_m \in K^\circ, l_m \in L^\circ, w_m \in M^\circ$; y que $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a, \lim_{m \rightarrow \infty} l_m = b$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = a$. Lo que implica que $a \in \overline{K^\circ} \cap \overline{M^\circ}$ y $b \in \overline{L^\circ}$; así, $a \in K \cap M$ y $b \in L$. Dado que $a, b \in \mathcal{P}(Y)$, obtenemos que a es punto extremo de K y M ; y b es punto extremo de M .

Así, a y l son los puntos extremos de los arcos K y M ; y b y l son los puntos extremos del arco M , esto muestra que $K, L, M \in \mathcal{A}_I(Y)$ (ver Figura 3.3).

Vamos a aplicar el Teorema 3.8 al punto a y al punto b , respectivamente, de la siguiente manera.

Como $a \in \overline{K^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_1 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(a) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

$$(b) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

Como $a \in \overline{M^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_2 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(c) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

$$(d) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

Como $b \in \overline{L^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_3 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(e) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

$$(f) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

Por los incisos (b), (d) y (f) tenemos que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3} \right).$$

De los incisos (a), (c) y (e), se deduce que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right).$$

Así,

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right). \quad (3.0.3)$$

Afirmación 3. El conjunto $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle}$ es finito.

Demostración. Para mostrar esta afirmación, primero mostremos que $\langle \{a\}, L, M \rangle \cap \langle K, \{b\}, M \rangle \cap \langle K, L, \{a\} \rangle$ es un conjunto finito.

Si $B \in \langle \{a\}, L, M \rangle \cap \langle K, \{b\}, M \rangle \cap \langle K, L, \{a\} \rangle$, entonces por definición se cumple que $B \subset \{a\} \cup L \cup M$, $B \subset K \cup \{b\} \cup M$ y $B \subset K \cup L \cup \{a\}$. Lo que implica que

$$B \subset (\{a\} \cup L \cup M) \cap (K \cup \{b\} \cup M) \cap (K \cup L \cup \{a\}) = \{a, b\}.$$

Lo que muestra que $B \subset \{a, b\}$ y obtenemos que $\langle \{a\}, L, M \rangle \cap \langle K, \{b\}, M \rangle \cap \langle K, L, \{a\} \rangle$ es un conjunto finito.

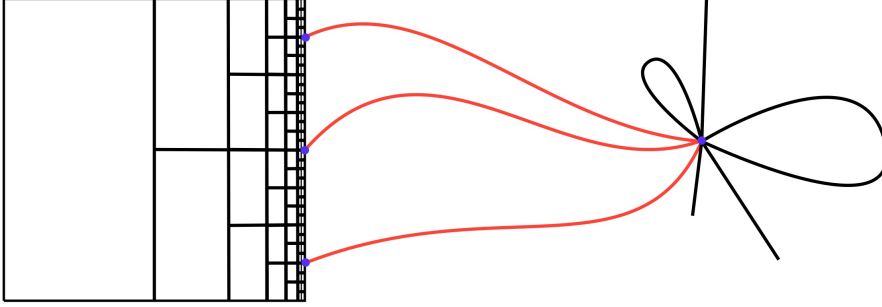


Figura 3.4:

Dado que

$$\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle \cap \langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle \cap \langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle \subset \langle \{a\}, L, M \rangle \cap \langle K, \{b\}, M \rangle \cap \langle K, L, \{a\} \rangle,$$

tenemos que $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \subset \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Por lo que concluimos que $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle}$ es un conjunto finito. Esto concluye la prueba de la Afirmación 3.

De la Afirmación 3, tenemos que $h^{-1}\left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle}\right)$ es un conjunto finito, como $\langle \{p\}, J^\circ \rangle \subset \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$ y $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$ es infinito, obtenemos una contradicción.

Recordando que esta contradicción viene de suponer que K, L y M no son iguales, concluimos que $K = L = M$, así hemos demostrado que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$. Y como ya habíamos mostrado al inicio de este subcaso que $K \in \mathcal{A}_I(X)$, hemos terminado la prueba del Caso 2.2.

Caso 2.3. $|h(\{p\})| = 3$.

Sean $a, b, c \in Y$ tal que $h(\{p\}) = \{a, b, c\}$. Por la parte (b) del Teorema 3.6, tenemos que $a, b, c \in \mathcal{P}(X)$. Como $\{a, b, c\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, existe una sucesión $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{k_m, l_m, w_m\} = \{a, b, c\}$. Sin perder generalidad, podemos asumir que para toda $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $k_m \in K^\circ, l_m \in L^\circ, w_m \in M^\circ$; y que $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a, \lim_{m \rightarrow \infty} l_m = b$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = c$. Lo que implica que $a \in \overline{K^\circ}, b \in \overline{L^\circ}$ y $c \in \overline{M^\circ}$; así, $a \in K, b \in L$ y $c \in M$. Dado que $a, b, c \in \mathcal{P}(Y)$, obtenemos que a, b y c son los puntos extremos de K, L y M , respectivamente.

Así, a y l son los puntos extremos del arco K , b y l son los puntos extremos del arco L y c y l son los puntos extremos del arco M , esto muestra que $K, L, M \in \mathcal{A}_I(Y)$ (ver la Figura 3.4).

Vamos a aplicar el Teorema 3.8, a los puntos a, b y c , respectivamente, de la siguiente manera.

Como $a \in \overline{K^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_1 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(a) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

$$(b) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

Como $b \in \overline{L^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_2 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(c) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

$$(d) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

Como $c \in \overline{M^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_3 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(e) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

$$(f) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

Por los incisos (b), (d) y (f) tenemos que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3} \right).$$

De los incisos (a), (c) y (e), se deduce que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle} \right).$$

Así,

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle} \right).$$

Afirmación 4. El conjunto $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle}$ es finito.

Demostración. Para mostrar esta afirmación, mostremos primero que $\langle \{a\}, L, M \rangle \cap \langle K, \{b\}, M \rangle \cap \langle K, L, \{c\} \rangle$ es un conjunto finito.

Si $B \in \langle \{a\}, L, M \rangle \cap \langle K, \{b\}, M \rangle \cap \langle K, L, \{c\} \rangle$, entonces por definición se cumple que $B \subset \{a\} \cup L \cup M$, $B \subset K \cup \{b\} \cup M$ y $B \subset K \cup L \cup \{c\}$. Lo que implica que

$$B \subset (\{a\} \cup L \cup M) \cap (K \cup \{b\} \cup M) \cap (K \cup L \cup \{c\}) = \{a, b, c\}.$$

Lo que muestra que $B \subset \{a, b, c\}$ y obtenemos que $\langle \{a\}, L, M \rangle \cap \langle K, \{b\}, M \rangle \cap \langle K, L, \{c\} \rangle$ es un conjunto finito.

Dado que $\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle \cap \langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle \cap \langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle \subset \langle \{a\}, L, M \rangle \cap \langle K, \{b\}, M \rangle \cap \langle K, L, \{c\} \rangle$, tenemos que

$$\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle} \subset \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Por lo que concluimos que $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle}$ es un conjunto finito. Esto concluye la prueba de la esta Afirmación 4.

De la Afirmación 4, tenemos que $h^{-1}\left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle}\right)$ es un conjunto finito, como $\langle \{p\}, J^\circ \rangle \subset \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$ y $\langle \{p\}, J^\circ \rangle$ es infinito, obtenemos una contradicción.

Recordando que esta contradicción viene de suponer que K, L y M no son iguales, concluimos que $K = L = M$, así hemos demostrado que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$. Y como ya habíamos mostrado al inicio de este subcaso que $K \in \mathcal{A}_I(X)$, hemos terminado la prueba del Caso 2.3.

Esto concluye el Caso 2.

Caso 3. $p, t \in \mathcal{P}(X)$.

En este caso, por (b) del Teorema 3.6, sabemos que $h(\langle J \rangle \cap \langle \mathcal{P}(X) \rangle) = \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$, como $\langle J \rangle \cap \langle \mathcal{P}(X) \rangle = \{\{p\}, \{t\}, \{p, t\}\}$, obtenemos que $\overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle \mathcal{P}(Y) \rangle = \{h(\{p\}), h(\{t\}), h(\{p, t\})\}$.

Sea $A \in \{\{p\}, \{t\}, \{p, t\}\}$. por lo anterior tenemos que $h(A) \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$. Consideremos tres casos.

Caso 3.1. $|h(A)| = 1$.

Sea $a \in Y$ tal que $h(A) = \{a\}$. Por la parte (b) del Teorema 3.6, tenemos que $a \in \mathcal{P}(X)$. Como $\{a\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, existe una sucesión $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{k_m, l_m, w_m\} = \{a\}$. Sin perder generalidad, podemos asumir que para toda $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $k_m \in K^\circ$, $l_m \in L^\circ$, $w_m \in M^\circ$. Con estas suposiciones tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = a$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = a$, lo que implica que $a \in \overline{K^\circ} \cap \overline{L^\circ} \cap \overline{M^\circ}$; y así, $a \in K \cap L \cap M$. Dado que $a \in \mathcal{P}(Y)$, obtenemos que a es punto extremo de K, L y M .

Vamos a aplicar el Teorema 3.9, al punto a de la siguiente manera.

Como $a \in \overline{K^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_1 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(a) \quad h^{-1}\left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}\right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

$$(b) \quad \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

Como $a \in \overline{L^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_2 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(c) \quad h^{-1}\left(\overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle}\right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

$$(d) \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

Como $a \in \overline{M^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_3 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(e) h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

$$(f) \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

Por los incisos (b), (d) y (f) tenemos que

$$\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3} \right).$$

De los incisos (a), (c) y (e), se deduce que

$$\begin{aligned} \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \right) \\ \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right). \end{aligned}$$

Así,

$$\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right).$$

Usando los mismos argumentos que en la Afirmación 2 del Caso 2.1, podemos probar lo siguiente.

Afirmación 5. El conjunto $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle}$ es finito.

De la Afirmación 5, tenemos que $h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right)$ es un conjunto finito, como $\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle}$, tenemos que $\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle}$ es infinito, así obtenemos una contradicción.

Recordando que esta contradicción viene de suponer que K , L y M no son iguales, concluimos que $K = L = M$, así hemos demostrado que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$.

Caso 3.2. $|h(A)| = 2$.

Sean $a, b \in Y$ tal que $h(A) = \{a, b\}$. Por la parte (b) del Teorema 3.6, tenemos que $a, b \in \mathcal{P}(X)$. Como $\{a, b\} \in \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, existe una sucesión $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{k_m, l_m, w_m\} = \{a, b\}$. Sin perder generalidad, podemos asumir que para toda $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $k_m \in K^\circ$, $l_m \in L^\circ$, $w_m \in M^\circ$; y que $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = b$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = a$. Lo que implica que $a \in \overline{K^\circ} \cap \overline{M^\circ}$ y $b \in \overline{L^\circ}$; así, $a \in K \cap M$ y $b \in L$. Dado que $a, b \in \mathcal{P}(Y)$, obtenemos que a es punto extremo de K y M ; y b es punto extremo de M .

Vamos a aplicar el Teorema 3.9, al punto a y al punto b , respectivamente, de la siguiente manera.

Como $a \in \overline{K^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_1 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(a) \ h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

$$(b) \ \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

Como $a \in \overline{M^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_2 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(c) \ h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

$$(d) \ \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

Como $b \in \overline{L^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_3 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(e) \ h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

$$(f) \ \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

Por los incisos (b), (d) y (f) tenemos que

$$\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3} \right).$$

De los incisos (a), (c) y (e), se deduce que

$$\begin{aligned} \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \\ h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right). \end{aligned}$$

Así,

$$\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right).$$

Usando los mismos argumentos que en la Afirmación 3 del Caso 2.2, podemos probar lo siguiente.

Afirmación 6. El conjunto $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle}$ es finito.

De la Afirmación 6, tenemos que $h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right)$ es un conjunto finito, como $\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle}$, tenemos que $\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle}$ es infinito, así, obtenemos una contradicción.

Recordando que esta contradicción viene de suponer que K , L y M no son iguales, concluimos que $K = L = M$, así hemos demostrado que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$.

Caso 3.3. $|h(A)| = 3$.

Sean $a, b, c \in Y$ tal que $h(\{p\}) = \{a, b, c\}$. Por la parte (b) del Teorema 3.6, tenemos que $a, b, c \in \mathcal{P}(X)$. Como $\{a, b, c\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, existe una sucesión $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{k_m, l_m, w_m\} = \{a, b, c\}$. Sin perder generalidad, podemos asumir que para toda $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $k_m \in K^\circ$, $l_m \in L^\circ$, $w_m \in M^\circ$; y que $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = b$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = c$. Lo que implica que $a \in \overline{K^\circ}$, $b \in \overline{L^\circ}$ y $c \in \overline{M^\circ}$; así, $a \in K$, $b \in L$ y $c \in M$. Dado que $a, b, c \in \mathcal{P}(Y)$, obtenemos que a, b y c son los puntos extremos de K, L y M , respectivamente.

Vamos a aplicar el Teorema 3.9, a los puntos a, b y c , respectivamente, de la siguiente manera.

Como $a \in \overline{K^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_1 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(a) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

$$(b) \quad \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

Como $b \in \overline{L^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_2 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(c) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

$$(d) \quad \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

Como $c \in \overline{M^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_3 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(e) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

$$(f) \quad \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

Por los incisos (b), (d) y (f) tenemos que

$$\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3} \right).$$

De los incisos (a), (c) y (e), se deduce que

$$\begin{aligned} \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) \cap \\ h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle} \right) \right). \end{aligned}$$

Así,

$$\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle} \right).$$

Usando los mismos argumentos que en la Afirmación 4 del Caso 2.3, podemos probar lo siguiente.

Afirmación 7. El conjunto $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle}$ es finito.

De la Afirmación 7, tenemos que $h^{-1}\left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle}\right)$ es un conjunto finito, como $\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle \subset \overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle}$, tenemos que $\overline{\langle \{p\}, \{t\}, J^\circ \rangle}$ es infinito, así, obtenemos una contradicción.

Recordando que esta contradicción viene de suponer que K, L y M no son iguales, concluimos que $K = L = M$, así hemos demostrado que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$.

Para concluir el Caso 3, observemos que $|\langle J \rangle \cap \langle \mathcal{P}(X) \rangle| = 3$, y dado que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$, tenemos que $|\langle K \rangle \cap \langle \mathcal{P}(Y) \rangle| = 3$, así K es un arco interno tal que si a y b son sus puntos extremos, entonces $a, b \in \mathcal{P}(Y)$. Con esto terminamos la demostración de este caso y por consiguiente la de este teorema. \square

Observación 3.11. Sean $J \in \mathcal{A}_E(X)$ con puntos extremos p y e_J tales que $p \in \mathcal{G}(X)$ y $\text{ord}(e_J, X) = 1$, y $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que p es vértice de un m -odo simple. Denotemos por T_m a dicho m -odo simple. Dado $A \in \langle J \rangle$, no es difícil comprobar que

- (1) Si $A = \{p, x_2, x_3\}$ con $x_2, x_3 \in J^\circ - \{e_J\}$ y $x_2 \neq x_3$, entonces las vecindades locales de A en $F_3(X)$ son homeomorfas a $T_m \times (0, 1) \times (0, 1)$.
- (2) Si $A = \{p, x_2\}$ con $x_2 \in J^\circ - \{e_J\}$, entonces las vecindades locales de A en $F_3(X)$ son homeomorfas a $(F_2(T_m) \times (0, 1)) \cup (T_m \times F_2((0, 1)))$.
- (3) Si $A = \{p\}$, entonces las vecindades locales de A en $F_3(X)$ son homeomorfas a $F_3(T_m)$.
- (4) Si $A = \{p, e_J\}$, entonces las vecindades locales de A en $F_3(X)$ son homeomorfas a $(F_2(T_m) \times [0, 1]) \cup (T_m \times F_2([0, 1]))$.
- (5) $A = \{p, x_2, e_J\}$ con $x_2 \in J^\circ - \{e_J\}$, entonces las vecindades locales de A en $F_3(X)$ son homeomorfas a $T_m \times (0, 1) \times [0, 1]$.

Teorema 3.12. Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos, $h: F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ un homeomorfismo. Si $J \in \mathcal{A}_E(X)$, entonces $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$, para algún $K \in \mathcal{A}_E(Y)$.

Demostración. Sea $J \in \mathcal{A}_E(X)$, así $|\text{Bd}_X(J) \cap R(X)| = 1$. Sea $\{p\} = \text{Bd}_X(J) \cap R(X)$. Dado que p es un punto de ramificación, tenemos que p puede ser de dos tipos. Analicemos estos dos casos

Caso 1. $p \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$.

En este caso, dado que $\{p\} \in F_1(R(X) \cap \mathcal{G}(X))$, por (d) del Teorema 2.23 sabemos que $h(\{p\}) \in F_1(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y))$. Sea $a \in Y$ tal que $h(\{p\}) = \{a\}$.

Por la parte (a) del Teorema 3.6 tenemos que $\{a\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$, existe una sucesión $\{\{a_m^1, a_m^2, a_m^3\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ la cual cumple que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{a_m^1, a_m^2, a_m^3\} = \{a\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a_m^1 \in K^\circ$, $a_m^2 \in L^\circ$ y $a_m^3 \in M^\circ$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Con estas suposiciones tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m^1 = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m^2 = a$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m^3 = a$, lo que implica que $a \in \overline{K^\circ \cap L^\circ \cap M^\circ}$; y así $a \in K \cap L \cap M$. Dado que $a \in \mathcal{G}(X)$, podemos concluir que a es un punto extremo de K , L y M .

Sean m_a y m_p el orden de los m_a -odo y m_p -odo los cuales tienen como vértices a a y p , respectivamente. Denotemos por T_{m_a} y T_{m_p} a estos m_a -odo y m_p -odo.

Sean $E_K = \{\{a, z\} : z \in K^\circ\}$, $E_L = \{\{a, z\} : z \in L^\circ\}$ y $E_M = \{\{a, z\} : z \in M^\circ\}$. Notemos que E_K , E_L y E_M están contenidos en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$.

Observemos que las vecindades en $F_3(Y)$ de un elemento de la forma $\{a, z\}$ de E_K son de la forma

- (i) $(F_2(T_{m_a}) \times (0, 1)) \cup (T_{m_a} \times F_2((0, 1)))$, si $K \in \mathcal{A}_R(Y)$ y $z \in K^\circ$.
- (ii) $(F_2(T_{m_a}) \times (0, 1)) \cup (T_{m_a} \times F_2((0, 1)))$, si $K \in \mathcal{A}_E(Y)$ y z no es el otro punto extremo de K .
- (iii) $(F_2(T_{m_a}) \times [0, 1]) \cup (T_{m_a} \times F_2([0, 1]))$, si $K \in \mathcal{A}_E(Y)$ y z es el otro punto extremo de K .

Con lo anterior, tenemos que las vecindades locales de $h^{-1}(\{a, z\})$ en $F_3(X)$ son homeomorfas, respectivamente, a alguna de las listadas en (i), (ii) y (iii).

Afirmación 1. $h^{-1}(E_K) \subset \{\{p, x\} : x \in J\}$.

Demostración. Para mostrar esta afirmación, vamos a probar primero que $h^{-1}(E_K) \subset \{\{p, x\} : x \in J^\circ\}$.

Para esto, supongamos lo contrario. Entonces existe $z \in K^\circ$ tal que $h^{-1}(\{a, z\}) \not\subset \{\{p, x\} : x \in J^\circ\}$. Sea $A = h^{-1}(\{a, z\})$. Dado que $a \in \{a, z\}$, por (c) del Teorema 2.16, tenemos que $p \in A$. Así, podemos escribir a A de las siguientes formas: $A = \{p, x_1, x_2\}$ tal que $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in J^\circ$ y x_1 y x_2 no son el otro extremo de J ; o alguno de x_1 o x_2 es el otro punto extremo de J ; o $A = \{p\}$. Analicemos los tres casos

Caso (a). $A = \{p, x_1, x_2\}$ y x_1 y x_2 no son el otro punto extremo de J .

En este caso, por (1) de la Observación 3.11, tenemos que las vecindades locales de A en $F_3(X)$ son homeomorfas a $T_{m_p} \times (0, 1) \times (0, 1)$, las cuales no son homeomorfas a las vecindades de A en $F_3(X)$. Lo que muestra que este caso no se puede dar.

Caso (b). $A = \{p, x_1, x_2\}$ y alguno de x_1 o x_2 es el otro extremo de J .

En este caso, por (5) de la Observación 3.11, tenemos que las vecindades locales de A en $F_3(X)$ son homeomorfas a $T_{m_p} \times (0, 1) \times [0, 1]$, las cuales no son homeomorfas a las vecindades de A en $F_3(X)$. Lo que muestra que este caso no se puede dar.

Caso (c). $A = \{p\}$.

En este caso, por (3) de la Observación 3.11, tenemos que las vecindades locales de A en $F_3(X)$ son homeomorfas a $F_3(T_{m_p})$, las cuales no son homeomorfas a las vecindades de A en $F_3(X)$. Lo que muestra que este caso no se puede dar.

Por lo anterior, concluimos que $A \in \{\{p, x\} : x \in J^\circ\}$ y obtenemos que $h^{-1}(E_K) \subset \{\{p, x\} : x \in J^\circ\}$. Ahora, notemos que

$$\overline{E_K} = \{\{a, z\} : z \in K\} \cup \overline{\{\{p, x\} : x \in J^\circ\}} = \{\{p, x\} : x \in J\}.$$

Dado que

$$\overline{h^{-1}(E_K)} = h^{-1}(\overline{E_K}) = h^{-1}(\{\{a, z\} : z \in K\} \cup \overline{\{\{p, x\} : x \in J^\circ\}} = \{\{p, x\} : x \in J\},$$

tenemos que $h^{-1}(\{\{a, z\} : z \in K\}) \subset \{\{p, x\} : x \in J\}$, lo cual concluye la demostración de esta Afirmación 1.

De forma análoga a la Afirmación 1, es posible mostrar que $h^{-1}(\overline{E_L}) \subset \{\{p, x\} : x \in J\}$ y $h^{-1}(\overline{E_M}) \subset \{\{p, x\} : x \in J\}$. Notemos que $\{\{p, x\} : x \in J\}$ es un arco.

Si alguno de K , L o M fuera un elemento de $\mathcal{A}_R(Y)$, por ejemplo K , tendríamos que E_K sería homeomorfo a una curva cerrada simple, lo que implicaría que $h^{-1}(E_K)$ sería una curva cerrada simple contenida en un el arco $\{\{p, x\} : x \in J^\circ\}$ lo cual es absurdo. Por lo tanto K , L y M son elementos de $\mathcal{A}_E(Y)$.

Si por ejemplo sucediera que $K \neq L$, tendríamos que $E_K \cap E_L = \{a\}$, lo que implicaría que $h^{-1}(E_K)$ y $h^{-1}(E_L)$ serían dos arcos contenidos en el arco $\{\{p, x\} : x \in J^\circ\}$ tales que $h^{-1}(E_K) \cap h^{-1}(E_L) = \{\{p\}\}$ lo que es una contradicción a la inyectividad de h , ya que $\{p\}$ es un extremo de $\{\{p, x\} : x \in J^\circ\}$.

Con lo anterior hemos mostrado que $K = L = M$ y que además $K \in \mathcal{A}_E(Y)$. Así concluimos con este caso.

Caso 2. $p \in \mathcal{P}(X)$.

En este caso, tenemos que $\{p\} \in \langle \mathcal{P}(X) \rangle$, por (b) del Teorema 3.6, tenemos que $h(\{p\}) \in \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$. Dado que $h(\{p\})$ es un elemento de $F_3(Y)$, debemos analizar tres casos.

Caso 2.1. $|h(\{p\})| = 1$.

En este caso, sea $a \in Y$ tal que $h(\{p\}) = \{a\}$. Nuevamente, por la parte (a), del Teorema 3.6, tenemos que $\{a\} \in \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, existe una sucesión $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{k_m, l_m, w_m\} = \{a\}$. Sin perder generalidad, podemos asumir que para toda $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $k_m \in K^\circ$, $l_m \in L^\circ$, $w_m \in M^\circ$. Con estas suposiciones tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = a$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = a$, lo que implica que $a \in \overline{K^\circ \cap L^\circ \cap M^\circ}$; y así, $a \in K \cap L \cap M$. Dado que $a \in \mathcal{P}(Y)$, obtenemos que a es punto extremo de K , L y M .

Vamos a aplicar el Teorema 3.8 a los puntos a , b y c de la siguiente manera.

Como $a \in \overline{K^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_1 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(a) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

$$(b) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

Como $a \in \overline{L^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_2 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(c) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

$$(d) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

Como $a \in \overline{M^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_3 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(e) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

$$(f) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

Por los incisos (b), (d) y (f) tenemos que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3} \right).$$

De los incisos (a), (c) y (e), se deduce que

$$\begin{aligned} \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \\ h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right) \right). \end{aligned}$$

Así,

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right).$$

Usando los mismos argumentos que en la Afirmación 2 del Caso 2.1 del Teorema 3.10, podemos probar lo siguiente.

Afirmación 2. El conjunto $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle}$ es finito.

De la Afirmación 2, tenemos que $h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right)$ es un conjunto finito, como $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$ y $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$ es infinito, obtenemos una contradicción.

Recordando que esta contradicción viene de suponer que K , L y M no son iguales, concluimos que $K = L = M$, así hemos demostrado que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$.

Caso 2.2. $|h(\{p\})| = 2$.

Sean $a, b \in Y$ tal que $h(\{p\}) = \{a, b\}$. Por la parte (b) del Teorema 3.6 tenemos que $a, b \in \mathcal{P}(X)$. Como $\{a, b\} \in \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, existe una sucesión $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{k_m, l_m, w_m\} = \{a, b\}$. Sin perder generalidad, podemos asumir que, para toda $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $k_m \in K^\circ$, $l_m \in L^\circ$, $w_m \in M^\circ$; y que $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = b$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = a$. Lo que implica que $a \in \overline{K^\circ} \cap \overline{M^\circ}$ y $b \in \overline{L^\circ}$; así, $a \in K \cap M$ y $b \in L$. Dado que $a, b \in \mathcal{P}(Y)$, obtenemos que a es punto extremo de K y M ; y b es punto extremo de M .

Vamos a aplicar el Teorema 3.8 al punto a y al punto b de la siguiente manera.

Como $a \in \overline{K^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_1 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(a) \quad h^{-1}(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

$$(b) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

Como $a \in \overline{M^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_2 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(c) \quad h^{-1}(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle}) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

$$(d) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

Como $b \in \overline{L^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_3 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(e) \quad h^{-1}(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle}) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

$$(f) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

Por los incisos (b), (d) y (f) tenemos que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3} \right).$$

De los incisos (a), (c) y (e), se deduce que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1}(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}) \cap h^{-1}(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle}) \cap h^{-1}(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle}).$$

Así,

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1}(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle}).$$

Usando los mismos argumentos que en la Afirmación 3 del Caso 2.3 del Teorema 3.10, podemos probar lo siguiente.

Afirmación 3. El conjunto $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle}$ es finito.

De la Afirmación 3, tenemos que $h^{-1}\left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle}\right)$ es un conjunto finito, como $\langle \{p\}, J^\circ \rangle \subset \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$ y $\langle \{p\}, J^\circ \rangle$ es infinito, obtenemos una contradicción.

Recordando que esta contradicción viene de suponer que K, L y M no son iguales, concluimos que $K = L = M$, así hemos demostrado que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$.

Caso 2.3. $|h(\{p\})| = 3$.

Sean $a, b, c \in Y$ tales que $h(\{p\}) = \{a, b, c\}$. Por la parte (b) del Teorema 3.6, tenemos que $a, b, c \in \mathcal{P}(Y)$. Además, $\{a, b, c\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, existe una sucesión $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{k_m, l_m, w_m\} = \{a, b, c\}$. Sin perder generalidad, podemos asumir que, para toda $m \in \mathbb{N}$, $k_m \in K^\circ$, $l_m \in L^\circ$, $w_m \in M^\circ$; y que $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = b$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = c$. Lo que implica que $a \in \overline{K^\circ}$, $b \in \overline{L^\circ}$ y $c \in \overline{M^\circ}$; así, $a \in K$, $b \in L$ y $c \in M$. Dado que $a, b, c \in \mathcal{P}(Y)$, obtenemos que a, b y c son los puntos extremos de K, L y M , respectivamente.

Vamos a aplicar el Teorema 3.8, a los puntos a, b y c de la siguiente manera.

Como $a \in \overline{K^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_1 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(a) \quad h^{-1}\left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle}\right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

$$(b) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

Como $b \in \overline{L^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_2 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(c) \quad h^{-1}\left(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle}\right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

$$(d) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

Como $c \in \overline{M^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_3 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(e) \quad h^{-1}\left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle}\right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

$$(f) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

Por los incisos (b), (d) y (f) tenemos que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}\right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}\right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}\right).$$

De los incisos (a), (c) y (e), se deduce que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle} \right).$$

Así,

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle} \right).$$

Usando los mismos argumentos que en la Afirmación 4 del Caso 2.3, podemos probar lo siguiente.

Afirmación 4. El conjunto $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle}$ es finito.

De la Afirmación 4, tenemos que $h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle} \right)$ es un conjunto finito, como $\langle \{p\}, J^\circ \rangle \subset \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$ y $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$ es infinito, obtenemos una contradicción.

Recordando que esta contradicción viene de suponer que K , L y M no son iguales, concluimos que $K = L = M$, así hemos demostrado que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$.

De los Casos 2.1, 2.2 y 2.3, concluimos que si $J \in \mathcal{A}_E(X)$, entonces $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$, donde $K \in \mathcal{A}_S(Y)$. Dado que $|\langle J \rangle \cap \mathcal{P}(X)| = 1$, tenemos que $|\langle K \rangle \cap \mathcal{P}(Y)| = 1$.

Observemos que si $K \in \mathcal{A}_I(Y)$, entonces por el Teorema 3.10 y dado que h es homeomorfismo, tenemos que $J \in \mathcal{A}_I(X)$, lo cual es una contradicción, así $K \notin \mathcal{A}_I(Y)$. Por lo tanto, $K \in \mathcal{A}_E(Y) \cup \mathcal{A}_R(Y)$.

Supongamos $K \in \mathcal{A}_R(Y)$ y por lo anterior sabemos que $|\langle K \rangle \cap \mathcal{P}(Y)| = 1$. Sea $\{\{a\}\} = \langle K \rangle \cap \mathcal{P}(Y)$. Dado que h es un homeomorfismo, tenemos que $h(\langle \{p\}, J \rangle) = \langle \{a\}, K \rangle$. Más aún, sabemos que $\langle \{p\}, J \rangle = \{\{p, x_1, x_2\} : x_1, x_2 \in J\}$, el cual es homeomorfo a $\{\{p\}\} \times F_2(J)$, por 3.5, sabemos que $F_2(J)$ es una 2-celda, donde J es un arco. Y además, $\langle \{a\}, K \rangle = \{\{a, y_1, y_2\} : y_1, y_2 \in K\}$, el cual es homeomorfo a $\{\{a\}\} \times F_2(K)$, por 3.5, sabemos que $F_2(K)$ es homeomorfo a una Banda de Möbius. Como $h(\langle \{p\}, J \rangle) = \langle \{a\}, K \rangle$, obtenemos una contradicción. Por tanto, $K \in \mathcal{A}_E(Y)$ y con esto concluimos la demostración del teorema. \square

Observación 3.13. Sean X un continuo, $J \in \mathcal{A}_R(X)$ y $p \in J$ tal que p es punto de ramificación de J y $p \in \mathcal{G}(X)$. Notemos que $\langle \{p\}, J \rangle = \{\{p, x_1, x_2\} : x_1, x_2 \in J\}$. Consideremos la función $f : \langle \{p\}, J \rangle \rightarrow F_2(J)$, definida como $f(\{p, x_1, x_2\}) = \{x_1, x_2\}$. Notemos que f es un homeomorfismo, y que dicho homeomorfismo construye el modelo de $\langle \{p\}, J \rangle$. Así $\langle \{p\}, J \rangle$ es homeomorfo a $F_2(J)$. Al ser J un elemento de $\mathcal{A}_R(X)$ y por 3.5, tenemos que $F_2(J)$ es una Banda de Möbius. Por lo tanto, $\langle \{p\}, J \rangle$ es homeomorfo a una Banda de Möbius (ver la Figura 3.5).

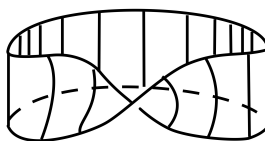


Figura 3.5:

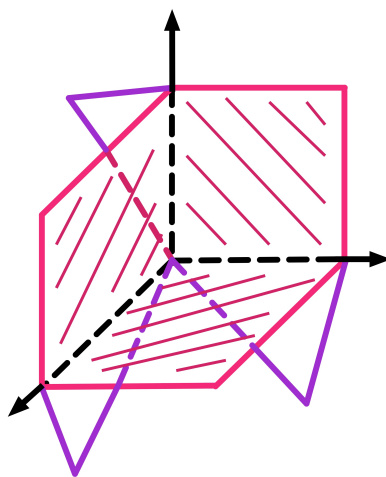


Figura 3.6:

Observación 3.14. Sean X y Y continuos y $K, L, M \in \mathcal{A}_E(Y)$ tales que $K \cap L \cap M = \{a\}$, para algún $a \in Y$. Si denotamos por $T = K \cup L \cup M$, entonces T es un triodo simple con vértice en a . Por [35], sabemos que $F_2(T)$ es homeomorfo a

$$\begin{aligned}
 & ([0, 1] \times [0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\} \times [0, 1]) \cup \\
 & \{(x, y, z) : -1 \leq z \leq 0, 0 \leq x \leq 1, y = 0\} \cup \\
 & \{(x, y, z) : -1 \leq z \leq 0, 0 \leq y \leq 1, x = 0\} \\
 & \cup \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1, y = 0\}, \quad (3.0.4)
 \end{aligned}$$

como se muestra en la Figura 3.6. Al modelo del $F_2(T)$ lo podemos deformar para obtener la Figura 3.7, la cual tiene forma de una mesa con tres patas.

Si $\mathcal{B} = \{C \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} : a \in C\}$, entonces \mathcal{B} es el siguiente conjunto

$$\begin{aligned}
 & \langle \{a\}, K, L \rangle \cup \langle \{a\}, K, M \rangle \cup \langle \{a\}, L, M \rangle \cup \\
 & \{\{a, z\} : z \in K\} \cup \{\{a, z\} : z \in L\} \cup \{\{a, z\} : z \in M\}.
 \end{aligned}$$

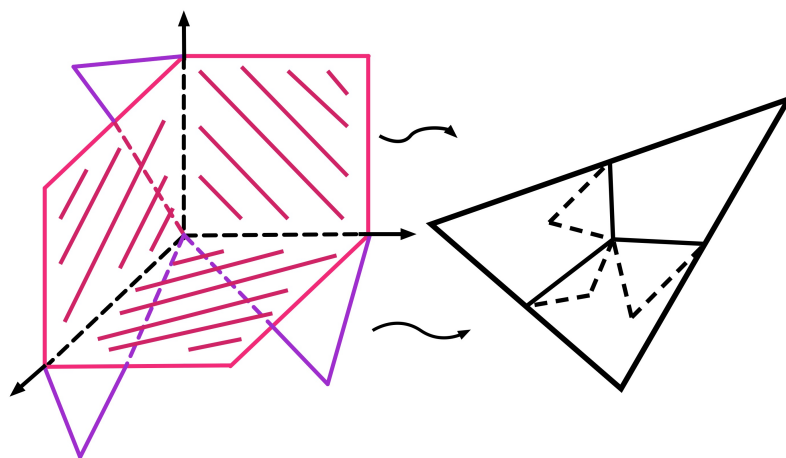


Figura 3.7:

No es difícil convencerse que el conjunto \mathcal{B} en su representación geométrica coincide con

$$([0, 1] \times [0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\} \times [0, 1]) \cup$$

$$\{(1, 0, z) : -1 \leq z \leq 0\} \cup \{(0, 1, z) : -1 \leq z \leq 0\} \cup$$

$$\{(x, 0, 1) : 0 \leq x \leq 1\},$$

como se muestra en la Figura 3.8. Por lo tanto, \mathcal{B} es homeomorfo a una 2-celda con tres pelos, vea la Figura 3.9.

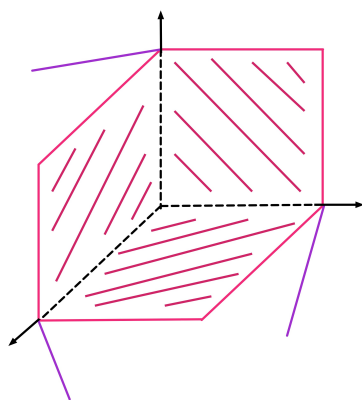


Figura 3.8:

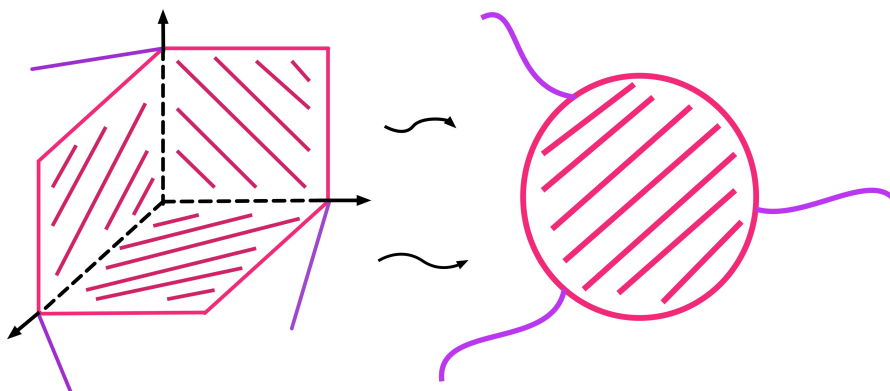


Figura 3.9:

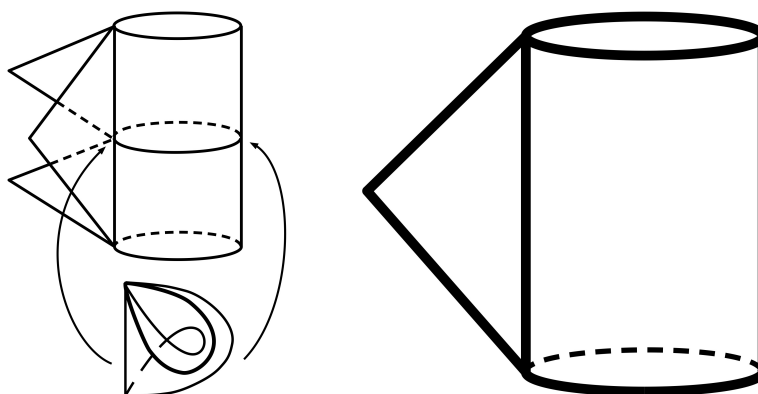


Figura 3.10:

Observación 3.15. Sean X y Y continuos, $K \in \mathcal{A}_R(Y)$ y $L, M \in \mathcal{A}_E(X)$ diferentes por pares tales que $K \cap L \cap M = \{a\}$, con $a \in Y$. Sea $\mathcal{M} = K \cup L \cup M$, notemos que \mathcal{M} es el continuo llamado Medalla. Por [35], sabemos que $F_2(\mathcal{M})$ es un cilindro con tres 2-celdas pegadas a un costado del cilindro y una Banda de Möbius, como se muestra en la Figura 3.10.

Sea $\mathcal{B} = \{C \in \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle : a \in C\}$. Notemos que $\{\{a, z, w\} : z \in K \text{ y } w \in L \cup M\} \cup \{\{a, z, w\} : z \in L \text{ y } w \in M\}$ es un subconjunto de \mathcal{B} ; del modelo, no es difícil convencerse que este conjunto es homeomorfo a un cilindro con una 2-celda pegada a un costado del cilindro, como se ve en la Figura 3.10.

Observación 3.16. Sean X y Y continuos, $K \in \mathcal{A}_R(Y)$ y $L \in \mathcal{A}_E(Y)$ tales que $K \cap L = \{a\}$, con $a \in Y$. Sea $\mathcal{P} = K \cup L$, notemos que \mathcal{P} es el continuo llamado Paleta. Por [35], sabemos que $F_2(\mathcal{P})$ es la unión de un cilindro, con una 2-celda pegada a un costado del cilindro y una Banda de Möbius, como se

muestra en la Figura 3.11.

Sea $\mathcal{B} = \{C \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ \rangle} : a \in C\}$ y notemos que $\mathcal{B} = \langle \{a\}, K \rangle \cup \langle \{a\}, L \rangle \cup \langle \{a\}, K, L \rangle$. Consideremos la función $f : F_2(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{B}$, definida como $f(\{x_1, x_2\}) = \{a, x_1, x_2\}$. No es difícil convencerse que f es un homeomorfismo, y que dicho homeomorfismo construye el modelo de \mathcal{B} (ver Figura 3.11).

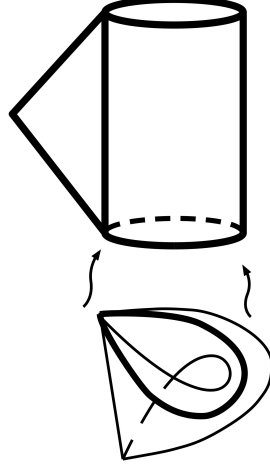


Figura 3.11:

Teorema 3.17. Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos, $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ un homeomorfismo. Si $J \in \mathcal{A}_R(X)$, entonces $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$, para algún $K \in \mathcal{A}_R(Y)$.

Demostración. Sea $J \in \mathcal{A}_R(X)$, así $|\text{Bd}_X(J) \cap R(X)| = 1$. Sea $\{p\} = \text{Bd}_X(J) \cap R(X)$. Dado que p es un punto de ramificación, tenemos que p puede ser de dos tipos. Analicemos estos dos casos

Caso 1. $p \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$.

En este caso, dado que $\{p\} \in F_1(R(X) \cap \mathcal{G}(X))$, por (d) del Teorema 2.23 sabemos que $h(\{p\}) \in F_1(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y))$. Sea $a \in Y$ tal que $h(\{p\}) = \{a\}$.

Por la parte (a) del Teorema 3.6 tenemos que $\{a\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$, existe una sucesión $\{\{a_m^1, a_m^2, a_m^3\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ la cual cumple que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{a_m^1, a_m^2, a_m^3\} = \{a\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a_m^1 \in K^\circ$, $a_m^2 \in L^\circ$ y $a_m^3 \in M^\circ$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Con estas suposiciones tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m^1 = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m^2 = a$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m^3 = a$, lo que implica que $a \in \overline{K^\circ} \cap \overline{L^\circ} \cap \overline{M^\circ}$; y así $a \in K \cap L \cap M$. Dado que $a \in \mathcal{G}(Y)$, podemos concluir que a es un punto extremo de K , L y M .

Afirmación 1. $h(\langle \{p\}, J \rangle) = \{B \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} : a \in B\}$.

Sean $\mathcal{B} = \{B \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} : a \in B\}$ y $B \in \mathcal{B}$. Por (c), del Teorema 2.23 sabemos que $B \in R_n(Y) - P_n(Y)$, y dado que h es un homeomorfismo, tenemos

que $h^{-1}(B) \in R_n(X) - P_n(X)$, así $p \in h^{-1}(B)$, y dado que $B \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle}$, tenemos que $h^{-1}(B) \in \langle J \rangle$, así $p \in h^{-1}(B)$ y $h^{-1}(B) \subset J$, lo que implica que $h^{-1}(B) \in \langle \{p\}, J \rangle$. Dado que $\langle \{p\}, J \rangle \subset \langle J \rangle$, y usando de nuevo (c), del Teorema 2.23, tenemos que $h(A) \in \mathcal{B}$, con $A \in \langle \{p\}, J \rangle$. Por lo tanto, $h(\langle \{p\}, J \rangle) = \{B \in \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle : a \in B\}$.

Afirmación 2. $|\{K, L, M\} \cap \mathcal{A}_R(Y)| < 2$.

Demostración. Supongamos lo contrario, supongamos que K y L son elementos de $\mathcal{A}_R(Y)$. Sea $\mathcal{D} = \{\{a, z, w\} : z \in K \text{ y } w \in L\}$, notemos que $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$. Dado que \mathcal{D} es homeomorfo a $K \times L$, tenemos que \mathcal{D} es homeomorfo a $S^1 \times S^1$, y sabemos que $S^1 \times S^1$ es homeomorfo a un Toro. Dado que $h^{-1}(\mathcal{B}) \subset \langle \{p\}, J \rangle$, tenemos que $h^{-1}(\mathcal{D}) \subset \langle \{p\}, J \rangle$, lo cual no puede ser, ya que $\langle \{p\}, J \rangle$ es homeomorfo a $F_2(J)$ que es una Banda de Möbius, vea [35]. Por lo tanto, no puede haber dos ciclos. Así, la Afirmación 2 está probada.

La Afirmación 2, muestra que no puede haber dos elementos de $\mathcal{A}_R(Y)$ al mismo tiempo. Analicemos los siguientes casos generales, en los cuales usaremos fuertemente la igualdad de la Afirmación 1.

Caso 1. Sean $K, L, M \in \mathcal{A}_E(Y)$ y K, L y M diferentes por pares.

En este caso dado que K, L y M son diferentes por pares y dado que $a \in K \cap L \cap M$, tenemos que $K \cup L \cup M$ es un triodo simple. Observemos que en este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & \{\{a, z, w\} : z \in K \text{ y } w \in L\} \cup \{\{a, z, w\} : z \in K \text{ y } w \in M\} \cup \\ & \{\{a, z, w\} : z \in L \text{ y } w \in M\} \cup \{\{a, z\} : z \in K\} \cup \\ & \{\{a, z\} : z \in L\} \cup \{\{a, z\} : z \in M\}. \end{aligned}$$

Por la Observación 3.14, tenemos que \mathcal{B} es una 2-celda con tres pelos como se ve en la Figura 3.9. Por otro lado, por la Observación 3.13, tenemos que $\langle \{p\}, J \rangle$ es homeomorfo a una Banda de Möbius. Lo cual es una contradicción a la Afirmación 1.

Caso 2. Sean $K, L \in \mathcal{A}_E(Y)$ y $K \neq L$ y $L = M$.

Dado que $a \in K \cap L$, tenemos que $K \cup L$ es un arco, así

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & \{\{a, z, w\} : z \in K \text{ y } w \in L\} \cup \{\{a, z, w\} : z, w \in K\} \cup \\ & \{\{a, z, w\} : z, w \in L\}. \end{aligned}$$

En este caso notemos que \mathcal{B} es homeomorfo al $F_2(K \cup L)$, como $K \cup L$ es un arco, tenemos que \mathcal{B} es homeomorfo a una 2-celda. Por la Observación 3.13, tenemos que $\langle \{p\}, J \rangle$ es una Banda de Möbius, lo cual es una contradicción a la Afirmación 1. Por lo tanto, este caso no se puede dar.

Caso 3. Sean $K = L = M$ y $K \in \mathcal{A}_E(Y)$.

En este caso tenemos que

$$\mathcal{B} = \{\{a, z, w\} : z, w \in K\} \cup \{\{a, z\} : z \in K\}.$$

En este caso notemos que \mathcal{B} es homeomorfo al $F_2(K)$, como K es un arco, tenemos que \mathcal{B} es homeomorfo a una 2-celda. Por la Observación 3.13 tenemos que $\langle \{p\}, J \rangle$ es una Banda de Möbius, lo cual es una contradicción a la Afirmación 1. Por lo tanto, este caso no se puede dar.

Caso 4. Sean $K \in \mathcal{A}_R(Y)$ y $L, M \in \mathcal{A}_E(Y)$.

Como $a \in K \cap L \cap M$, en este caso tenemos que $K \cup L \cup M$ es el continuo llamado Medalla. Observemos que en este caso se tiene que $\{\{a, z, w\} : z \in K \text{ y } w \in L \cup M\} \cup \{\{a, z, w\} : z \in L \text{ y } w \in M\}$ es un subconjunto de \mathcal{B} .

Por la Observación 3.15, tenemos que este conjunto es homeomorfo a un cilindro con una 2-celda pegada a un costado del cilindro, como se ve en la Figura 3.10. Por otro lado, por la Observación 3.13, tenemos que $\langle \{p\}, J \rangle$ es homeomorfo a una Banda de Möbius. Lo cual es una contradicción a la Afirmación 1.

Caso 5. Sean $K \in \mathcal{A}_R(Y)$, $L = M$ y $L \in \mathcal{A}_E(Y)$.

En este caso tenemos que $K \cup L$ es el continuo llamado Paleta. Sea $\mathcal{P} = K \cup L$. Observemos que en este caso tenemos que

$$\mathcal{B} = \langle \{a\}, K \rangle \cup \langle \{a\}, L \rangle \cup \langle \{a\}, K, L \rangle.$$

Por la Observación 3.16, tenemos que \mathcal{B} es $F_2(\mathcal{P})$ como se ve en la Figura 3.11. Por otro lado, por la Observación 3.13, tenemos que $\langle \{p\}, J \rangle$ es homeomorfo a una Banda de Möbius. Lo cual es una contradicción a la Afirmación 1.

Con los casos anteriores hemos mostrado que $K = L = M$ y que además que $K \in \mathcal{A}_R(Y)$. Por lo tanto, $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$. Así, concluimos con este caso.

Caso 2. $p \in \mathcal{P}(X)$.

En este caso, tenemos que $\{p\} \in \langle \mathcal{P}(X) \rangle$, por (b) del Teorema 3.6, tenemos que $h(\{p\}) \in \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$. Dado que $h(\{p\})$ es un elemento de $F_3(Y)$, debemos analizar tres casos.

Caso 2.1. $|h(\{p\})| = 1$.

En este caso, sea $a \in Y$ tal que $h(\{p\}) = \{a\}$. Por la parte (b) del Teorema 3.6, tenemos que $\{a\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, existe una sucesión $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{k_m, l_m, w_m\} = \{a\}$. Sin perder generalidad, podemos asumir que, para toda $m \in \mathbb{N}$, $k_m \in K^\circ$, $l_m \in L^\circ$, $w_m \in M^\circ$. Con estas suposiciones tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = a$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = a$, lo que implica que $a \in \overline{K^\circ} \cap \overline{L^\circ} \cap \overline{M^\circ}$; y así, $a \in K \cap L \cap M$. Dado que $a \in \mathcal{P}(Y)$, obtenemos que a es punto extremo de K , L y M .

Vamos a aplicar el Teorema 3.8, a los puntos a , b y c de la siguiente manera.

Como $a \in \overline{K^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathcal{C}_1 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(a) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathcal{C}_1}.$$

$$(b) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathcal{C}_1}.$$

Como $a \in \overline{L^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_2 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(c) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

$$(d) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

Como $a \in \overline{M^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_3 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(e) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

$$(f) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

Por los incisos (b), (d) y (f) tenemos que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3} \right).$$

De los incisos (a), (c) y (e), se deduce que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right).$$

Así,

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right).$$

Usando los mismos argumentos que en la Afirmación 2 del Caso 2.1 del Teorema 3.10, podemos probar lo siguiente.

Afirmación 1. El conjunto $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle}$ es finito.

De la Afirmación 1, tenemos que $h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{a\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right)$ es un conjunto finito, como $\langle \{p\}, J^\circ \rangle \subset \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$ y $\langle \{p\}, J^\circ \rangle$ es infinito, obtenemos una contradicción.

Recordando que esta contradicción viene de suponer que K , L y M no son iguales, concluimos que $K = L = M$, así hemos demostrado que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$.

Caso 2.2. $|h(\{p\})| = 2$.

Sean $a, b \in Y$ tal que $h(\{p\}) = \{a, b\}$. Por la parte (b) del Teorema 3.6, tenemos que $\{a, b\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, existe una sucesión $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{k_m, l_m, w_m\} = \{a, b\}$. Sin perder generalidad, podemos asumir que para toda $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $k_m \in K^\circ$, $l_m \in L^\circ$, $w_m \in M^\circ$; y que $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = b$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = a$. Lo que implica que $a \in \overline{K^\circ} \cap \overline{M^\circ}$ y $b \in \overline{L^\circ}$; así, $a \in K \cap M$ y $b \in L$. Dado que

$a, b \in \mathcal{P}(Y)$, obtenemos que a es punto extremo de K y M ; y b es punto extremo de M .

Vamos a aplicar el Teorema 3.8 al punto a y al punto b de la siguiente manera.

Como $a \in \overline{K^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_1 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(a) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

$$(b) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

Como $a \in \overline{M^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_2 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(c) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

$$(d) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

Como $b \in \overline{L^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_3 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(e) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

$$(f) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

Por los incisos (b), (d) y (f) tenemos que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3} \right).$$

De los incisos (a), (c) y (e), se deduce que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right).$$

Así,

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right).$$

Usando los mismos argumentos que en la Afirmación 3 del Caso 2.3 del Teorema 3.10, podemos probar lo siguiente.

Afirmación 2. El conjunto $\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle}$ es finito.

De la Afirmación 2, tenemos que $h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{a\} \rangle} \right)$ es un conjunto finito, como $\langle \{p\}, J^\circ \rangle \subset \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$ y $\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle}$ es infinito, obtenemos una contradicción.

Recordando que esta contradicción viene de suponer que K , L y M no son iguales, concluimos que $K = L = M$, así hemos demostrado que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$.

Caso 2.3. $|h(\{p\})| = 3$.

Sean $a, b, c \in Y$ tal que $h(\{p\}) = \{a, b, c\}$. Por la parte (b) del Teorema 3.6, tenemos que $a, b, c \in \mathcal{P}(X)$. Además, $\{a, b, c\} \in \overline{\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle} - \langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$, existe una sucesión $\{\{k_m, l_m, w_m\}\}_{m=1}^\infty$ en $\langle K^\circ, L^\circ, M^\circ \rangle$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \{k_m, l_m, w_m\} = \{a, b, c\}$. Sin perder generalidad, podemos asumir que para toda $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $k_m \in K^\circ$, $l_m \in L^\circ$, $w_m \in M^\circ$; y que $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} l_m = b$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = c$. Lo que implica que $a \in \overline{K^\circ}$, $b \in \overline{L^\circ}$ y $c \in \overline{M^\circ}$; así, $a \in K$, $b \in L$ y $c \in M$. Dado que $a, b, c \in \mathcal{P}(Y)$, obtenemos que a , b y c son los puntos extremos de K , L y M , respectivamente.

Vamos a aplicar el Teorema 3.8 a los puntos a , b y c de la siguiente manera.

Como $a \in \overline{K^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_1 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(a) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

$$(b) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1}.$$

Como $b \in \overline{L^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_2 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(c) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

$$(d) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2}.$$

Como $c \in \overline{M^\circ}$, entonces existe una colección de componentes \mathfrak{C}_3 de $\mathcal{E}_3(X) - \langle J^\circ \rangle$, tal que

$$(e) \quad h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle} \right) = \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

$$(f) \quad \overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3}.$$

Por los incisos (b), (d) y (f) tenemos que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_1} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_2} \right) \cap \left(\langle J \rangle \cap \overline{\bigcup \mathfrak{C}_3} \right).$$

De los incisos (a), (c) y (e), se deduce que

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \right) \cap h^{-1} \left(\overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle} \right).$$

Así,

$$\overline{\langle \{p\}, J^\circ \rangle} \subset h^{-1} \left(\overline{\langle \{a\}, L^\circ, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ \rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\} \rangle} \right).$$

Usando los mismos argumentos que en la Afirmación 4 del Caso 2.3, podemos probar lo siguiente.

Afirmación 3. El conjunto $\overline{\langle\{a\}, L^\circ, M^\circ\rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ\rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\}\rangle}$ es finito.

De la Afirmación 3, tenemos que $h^{-1}\left(\overline{\langle\{a\}, L^\circ, M^\circ\rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, \{b\}, M^\circ\rangle} \cap \overline{\langle K^\circ, L^\circ, \{c\}\rangle}\right)$ es un conjunto finito, como $\langle\{p\}, J^\circ\rangle \subset \overline{\langle\{p\}, J^\circ\rangle}$ y $\langle\{p\}, J^\circ\rangle$ es infinito, obtenemos una contradicción.

Recordando que esta contradicción viene de suponer que K , L y M no son iguales, concluimos que $K = L = M$, así hemos demostrado que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$.

De los Casos 2.1, 2.2 y 2.3, concluimos que si $J \in \mathcal{A}_R(X)$, entonces $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$, donde $K \in \mathcal{A}_S(Y)$. Dado que $|\langle J \rangle \cap \mathcal{P}(X)| = 1$, tenemos que $|\langle K \rangle \cap \mathcal{P}(Y)| = 1$

Observemos que si $K \in \mathcal{A}_I(Y)$, entonces por el Teorema 3.10 y dado que h es homeomorfismo, tenemos que $J \in \mathcal{A}_I(X)$, lo cual es una contradicción, así $K \notin \mathcal{A}_I(Y)$. Por lo tanto, $K \in \mathcal{A}_E(Y) \cup \mathcal{A}_R(Y)$.

Si $K \in \mathcal{A}_E(Y)$, entonces por el Teorema 3.12 y dado que h es homeomorfismo, tenemos que $J \in \mathcal{A}_E(X)$, lo cual es una contradicción, así $K \notin \mathcal{A}_E(Y)$. Por lo que concluimos que $K \in \mathcal{A}_R(Y)$ y con esto concluimos la demostración del teorema. \square

Corolario 3.18. Sean X y Y son continuos casi enrejados localmente conexos, $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ un homeomorfismo. Si $J \in \mathcal{A}_S(X)$, entonces $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$, para algún $K \in \mathcal{A}_S(Y)$. Más aún, se cumple lo siguiente:

- (a) Si J es un arco interno, entonces K es un arco interno.
- (b) Si J es un arco externo, entonces K es un arco externo.
- (c) Si J es un ciclo, entonces K es un ciclo.

Demostración. La demostración de este corolario se sigue inmediatamente de los Teoremas 3.10, 3.12 y 3.17, respectivamente. \square

Teorema 3.19. Sean X y Y son continuos casi enrejados localmente conexos. Si existe $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ un homeomorfismo, entonces $h(F_1(\mathcal{P}(X))) = F_1(\mathcal{P}(Y))$.

Demostración. Como h es un homeomorfismo, es suficiente probar que $h(F_1(\mathcal{P}(X))) \subset F_1(\mathcal{P}(Y))$. Sea $A \in F_1(\mathcal{P}(X))$, luego existe $x \in \mathcal{P}(X)$ tal que $A = \{x\}$. Como $F_1(X) \subset F_3(X)$, sabemos que $A \in F_3(X)$ y como $x \in \mathcal{P}(X)$, entonces $A \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$, así $A \in P_3(X)$. Por la parte (e), del Lema 2.23, tenemos que $h(A) \in P_3(Y)$, es decir, $h(A) \cap \mathcal{P}(Y) \neq \emptyset$.

Como $x \in \mathcal{P}(X)$, Por el Lema 2.21, existe una sucesión $\{J_m\}_{m=1}^\infty$ contenida en $\mathcal{A}_S(X)$, con elementos diferentes dos a dos, tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} J_m = \{x\}$. Como X es un continuo casi enrejado localmente conexo, podemos suponer que existe una subsucesión $\{J'_m\}_{m=1}^\infty$ de la sucesión $\{J_m\}_{m=1}^\infty$ tal que $J'_m \cap (R(X) \cap$

$\mathcal{G}(X) \neq \emptyset$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Para todo $m \in \mathbb{N}$, tomemos $x_m \in J'_m$, tal que $x_m \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{m \rightarrow \infty} J_m = \{x\}$ y $\{J'_m\}_{m=1}^\infty$ es una subsucesión de la sucesión $\{J_m\}_{m=1}^\infty$, entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} J'_m = \{x\}$. Por construcción, la sucesión $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ está contenida en $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} J'_m$ y además, como $\lim_{m \rightarrow \infty} J'_m = \{x\}$, implicamos que $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$. Como h es un homeomorfismo, en particular h es continua, tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} h(x_m) = h(x)$. Más aún, la sucesión $\{\{x_m\}\}_{m=1}^\infty$ está contenida en $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \langle J'_m \rangle$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} \{x_m\} = \{x\}$. Por la continuidad de h inferimos que $\lim_{m \rightarrow \infty} h(\{x_m\}) = h(\{x\})$. Por la parte (d), del Lema 2.23, sabemos que $h(F_1(R(X) \cap \mathcal{G}(X))) = F_1(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y))$, así $h(\{x_m\}) = \{y_m\}$, para toda $m \in \mathbb{N}$, donde $y_m \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{m \rightarrow \infty} \{y_m\} = h(\{x\})$ y el conjunto $F_1(Y)$ es un conjunto cerrado, tenemos que $h(\{x\}) \in F_1(Y)$. Notemos que $\{y_m\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión de elementos distintos por pares en $R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$. Supongamos que la sucesión $\{y_m\}_{m=1}^\infty$ converge a y , para algún $y \in Y$. Por el Lema 2.18, tenemos que $y \in \mathcal{P}(Y)$. Entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} \{y_m\} = \{y\}$, y así $\lim_{m \rightarrow \infty} h(\{x_m\}) = \{y\}$. Por lo tanto, $\{y\} = h(\{x\})$. Por lo que concluimos que $h(\{x\}) \in F_1(\mathcal{P}(Y))$.

Ahora supongamos que $J_m \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Por los Teoremas 3.10, 3.12 y 3.17, existen $K_m \in \mathcal{A}_S(Y)$, con $m \in \mathbb{N}$, tales que $h(\langle J_m \rangle) = \langle K_m \rangle$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Sea $A_m \in \langle J_m \rangle$ tal que $A_m \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$, para toda $m \in \mathbb{N}$. Notemos que $A_m \in P_3(X)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Sea $h(A_m) = B_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Por la parte (e), del Lema 2.23, tenemos que $B_m \in P_3(Y)$, para todo $m \in \mathbb{N}$, es decir, $B_m \cap \mathcal{P}(Y) \neq \emptyset$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Como para todo $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $A_m \in \langle J_m \rangle$ y $h(\langle J_m \rangle) = \langle K_m \rangle$, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $B_m \in \langle K_m \rangle$ y $B_m \cap \mathcal{P}(Y) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $K_m \cap \mathcal{P}(Y) \neq \emptyset$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Sea $y_m \in B_m \cap \mathcal{P}(Y)$. Luego $\{y_m\} \in \langle K_m \rangle$, para todo $m \in \mathbb{N}$, así $\{\{y_m\}\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión contenida en $\bigcup_{m=1}^\infty \langle K_m \rangle$. Como $\lim_{m \rightarrow \infty} J_m = \{x\}$ implicamos que $\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = h(\{x\})$ y por lo tanto, $\lim_{m \rightarrow \infty} \{y_m\} = h(\{x\})$. Como $F_1(Y)$ es cerrado, existe $\{z\} \in F_1(Y)$ tal que $h(\{x\}) = \{z\}$, luego $h(\{x\}) \cap \mathcal{P}(Y) = \{z\} \cap \mathcal{P}(Y)$, inferimos que $z \in \mathcal{P}(Y)$. \square

Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos, si existe $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ un homeomorfismo y $x \in \mathcal{P}(X)$. Por el Teorema 3.19, tenemos que

$$h(\{x\}) = \{y\},$$

para algún $y \in \mathcal{P}(Y)$. Sean

$$\mathcal{A}_x = \{J \in \mathcal{A}_S(X) : x \in J\} \text{ y } \mathcal{A}_y = \{K \in \mathcal{A}_S(Y) : y \in K\}. \quad (3.0.5)$$

De los Teoremas 3.10, 3.12 y 3.17, obtenemos que $|\mathcal{A}_x| = |\mathcal{A}_y|$, además si $J \in \mathcal{A}_x$, entonces $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$, para algún $K \in \mathcal{A}_y$.

Lema 3.20. *Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos. Si existe $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ un homeomorfismo y $x \in \mathcal{P}(X)$, entonces existe $y \in \mathcal{P}(Y)$ tal que $h(\{x\}) = \{y\}$, más aún, podemos encontrar una biyección g_x de \mathcal{A}_x a \mathcal{A}_y .*

Demostración. Sean $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ un homeomorfismo y $x \in \mathcal{P}(X)$. Por el Teorema 3.19, tenemos que $h(\{x\}) = \{y\}$, para algún $y \in \mathcal{P}(Y)$. Sea

$$g_x : \mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{A}_y$$

una función definida, para cada $J \in \mathcal{A}_x$, por $g_x(J) = K$, donde $K \in \mathcal{A}_y$. Sea $J \in \mathcal{A}_x$, por definición $J \in \mathcal{A}_S(X)$ y $x \in J \cap \mathcal{P}(X)$, así $J \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Por los Teoremas 3.10, 3.12 y 3.17, tenemos que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$, para algún $K \in \mathcal{A}_S(Y)$. Como $x \in J$, entonces $\{x\} \in \langle J \rangle$, así $h(\{x\}) \in h(\langle J \rangle)$, luego $\{y\} \in \langle K \rangle$, con $y \in \mathcal{P}(X)$. Por lo tanto, $y \in K$. En conclusión $K \in \mathcal{A}_y$ y así la función g_x está bien definida.

Veamos que g_x es inyectiva. Sean $J_1, J_2 \in \mathcal{A}_x$, tales que $g_x(J_1) = g_x(J_2)$. Sean $g_x(J_1) = K_1$ y $g_x(J_2) = K_2$, donde $K_1, K_2 \in \mathcal{A}_y$. Como $K_1 = K_2$, se tiene que $\langle K_1 \rangle = \langle K_2 \rangle$, así $h(\langle J_1 \rangle) = h(\langle J_2 \rangle)$. Como h es inyectiva, implicamos que $\langle J_1 \rangle = \langle J_2 \rangle$. Por lo tanto, $J_1 = J_2$.

Resta ver que g_x es suprayectiva. Sea $K_y \in \mathcal{A}_y$. Del Corolario 3.18, tenemos que $h^{-1}(\langle K_y \rangle) = \langle J \rangle$, para algún $J \in \mathcal{A}_S(X)$. Note que $J \in \mathcal{A}_x$, luego $h(\langle J \rangle) = \langle K_y \rangle$. □

Lema 3.21. *Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos. Si existe $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ es un homeomorfismo y $x \in (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$, entonces existe un único $y \in (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$ tal que $h(\{x\}) = \{y\}$.*

Demostración. Supongamos que $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$, por la parte (d), del Lema 2.23, existe $y \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$, tal que $h(\{x\}) = \{y\}$. Si $x \in \mathcal{P}(X)$, por el Teorema 3.19, existe $y \in \mathcal{P}(Y)$, tal que $h(\{x\}) = \{y\}$. Para mostrar que y es único, supongamos que existe $y' \in (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$, tal que $h(\{x\}) = \{y'\}$. Luego, en cualquier caso, $\{y\} = \{y'\}$, por lo tanto $y = y'$. □

Teorema 3.22. *Sean X y Y continuos casi enrejados localmente conexos. Si $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ es un homeomorfismo, entonces existe una función continua y biyectiva $f_1 : (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X) \rightarrow (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$.*

Demostración. Sean $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ un homeomorfismo y

$$f_1 : (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X) \rightarrow (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$$

una función definida por $f_1(x) = y$, para cada $x \in (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$, donde y es el único punto de $(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$ tal que $h(\{x\}) = \{y\}$ (vea el Lema 3.21). Por el Lema 3.21, la función f_1 está bien definida.

Veamos que f_1 es biyectiva. Sean $x, w \in (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$, tales que $f_1(x) = f_1(w)$. Por el Lema 3.21, $f_1(x)$ es el único punto tal que $h(\{x\}) = \{f_1(x)\}$ y $f_1(w)$ es el único punto tal que $h(\{w\}) = \{f_1(w)\}$, como $f_1(x) = f_1(w)$, tenemos que $h(\{x\}) = h(\{w\})$, por la inyectividad de h , se tiene que $\{x\} = \{w\}$, así $x = w$.

Veamos que f_1 es suprayectiva. Sea $y \in (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$, notemos que $\{y\} \in F_1(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup F_1(\mathcal{P}(Y))$. Supongamos que $\{y\} \in F_1(R(Y) \cap$

$\mathcal{G}(Y)$), por la parte (d), del Lema 2.23, tenemos que $\{y\} \in h(F_1(R(X) \cap \mathcal{G}(X)))$, así existe $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ tal que $h(\{x\}) = \{y\}$. Supongamos ahora que $\{y\} \in F_1(\mathcal{P}(Y))$, por el Teorema 3.19, sabemos que $h(F_1(\mathcal{P}(X))) = \mathcal{P}(Y)$, como $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ es un homeomorfismo, se cumple que $h^{-1} : F_3(Y) \rightarrow F_3(X)$ es un homeomorfismo, también. Así, $h^{-1}(\{y\}) \in h^{-1}(F_1(\mathcal{P}(Y)))$, es decir, $h^{-1}(\{y\}) \in F_1(\mathcal{P}(X))$. Luego, existe $x \in \mathcal{P}(X)$ tal que $h^{-1}(\{y\}) = \{x\}$. Como $h(h^{-1}(\{y\})) = h(\{x\})$, implicamos que $h(\{x\}) = \{y\}$. Por lo tanto, para todo $y \in (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$, existe $x \in (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$ tal que $h(\{x\}) = \{y\}$. Por el Lema 3.21, tenemos que existe un único $y \in (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$ tal que $h(\{x\}) = \{y\}$. Así, $f_1(x) = y$. Por lo tanto, $y \in f_1((R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X))$ y así la función f_1 es suprayectiva.

Ahora mostremos que la función f_1 es continua. Sea $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$. Por la parte (d) del Lema 2.23, existe $y \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$, tal que $h(\{x\}) = \{y\}$. Luego, $f_1(x) = y$. Por definición, existe una gráfica finita G contenida en X tal que $x \in \text{int}_X(G)$. Sea U un conjunto abierto en X tal que $x \in U \subset \text{int}_X(G)$ y $U \cap R(X) = \{x\}$. Veamos que f_1 es continua en el punto x . Supongamos que $x \in \mathcal{P}(X)$ y consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Sea $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en $R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ la cual converge a x .

Como $x_m \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$, para todo $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $\{x_m\} \in \langle R(X) \cap \mathcal{G}(X) \rangle$, para todo $m \in \mathbb{N}$, así la sucesión $\{\{x_m\}\}_{m=1}^{\infty}$ está contenida en $\langle R(X) \cap \mathcal{G}(X) \rangle$ y es tal que converge a $\{x\}$. Como h es un homeomorfismo, en particular h es continua, y por la parte (d) del Lema 2.23, sabemos que $h(F_1(R(X) \cap \mathcal{G}(X))) = F_1(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y))$, así $h(\{x_m\}) \in \langle R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \rangle$, para todo $m \in \mathbb{N}$, luego, la sucesión $\{h(\{x_m\})\}_{m=1}^{\infty}$ está contenida en $\langle R(Y) \cap \mathcal{G}(Y) \rangle$ y es tal que converge a $h(\{x\})$. Por la parte (d) del Lema 2.23, existe $y_m \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$ tal que $h(\{x_m\}) = \{y_m\}$, para todo $m \in \mathbb{N}$, y por el Teorema 3.19, existe $y \in \mathcal{P}(Y)$ tal que $h(\{x\}) = \{y\}$. Notemos que $f_1(x_m) = y_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$ y $f_1(x) = y$. Por lo tanto, la sucesión $\{f_1(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$ converge a $f_1(x)$.

Caso 2. Sea $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en $\mathcal{P}(X)$ la cual converge a x .

Por la hipótesis de este caso, $x_m \in \mathcal{P}(X)$, para todo $m \in \mathbb{N}$, luego $\{x_m\} \in \langle \mathcal{P}(X) \rangle$, para todo $m \in \mathbb{N}$, así la sucesión $\{\{x_m\}\}_{m=1}^{\infty}$ está contenida en $\langle \mathcal{P}(X) \rangle$ y es tal que converge a $\{x\}$. Como h es un homeomorfismo, en particular h es continua, y por el Teorema 3.19, sabemos que $h(F_1(\mathcal{P}(X))) = F_1(\mathcal{P}(Y))$, así $h(\{x_m\}) \in \langle \mathcal{P}(Y) \rangle$, para todo $m \in \mathbb{N}$, luego, la sucesión $\{h(\{x_m\})\}_{m=1}^{\infty}$ está contenida en $\langle \mathcal{P}(Y) \rangle$ y es tal que converge a $h(\{x\})$. Por el Teorema 3.19, existe $y_m \in \mathcal{G}(Y)$ tal que $h(\{x_m\}) = \{y_m\}$, para todo $m \in \mathbb{N}$, y existe $y \in \mathcal{P}(Y)$ tal que $h(\{x\}) = \{y\}$. Notemos que $f_1(x_m) = y_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$ y $f_1(x) = y$. Por lo tanto, la sucesión $\{f_1(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$ converge a $f_1(x)$.

Caso 3. Sea $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en $(R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$ la cual converge a x .

Para este caso, usamos el Caso 1 y el Caso 2, para obtener que la sucesión $\{f_1(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$ converge a $f_1(x)$.

Caso 4. No existe una sucesión en $R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ la cual converge a x , ni una sucesión en $\mathcal{P}(X)$, la cual converge a x .

Sea U un conjunto abierto en X tal que $x \in U$ y $U \cap ((R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)) = \{x\}$. Así f_1 es continua en x .

Con los casos anteriores concluimos la demostración de este teorema. \square

Teorema 3.23. Sean X y Y continuos casi enrejado localmente conexos y $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$ un homeomorfismo. Si $f_1 : (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X) \rightarrow (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$ es la función definida como en el Teorema [3.22](#), entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- (a) Si $x, z \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ y los puntos x y z son adyacentes en X , si y solo si, $f_1(x)$ y $f_1(z)$ son adyacentes en Y .
- (b) Si $x, z \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ son adyacentes en X , entonces el número de arcos en $\mathcal{A}_S(X)$ que unen x y z coincide con el número de arcos en $\mathcal{A}_S(Y)$ que unen $f_1(x)$ y $f_1(z)$.
- (c) Si $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$, entonces $\text{ord}(x, X) = \text{ord}(f_1(x), Y)$.
- (d) Sea $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$, supongamos que el número de ciclos en X (respectivamente en Y) que contienen a x (respectivamente a $f_1(x)$) es k_1 (respectivamente k'_1); el número de puntos extremos de X (respectivamente en Y) adyacente a x (respectivamente a $f_1(x)$) es k_2 (respectivamente k'_2); y el número de arcos de X (respectivamente en Y) que une x (respectivamente a $f_1(x)$) con otro punto de $R(X) \cup \mathcal{P}(X)$ (respectivamente a $R(Y) \cup \mathcal{P}(Y)$) es k_3 (respectivamente k'_3). Entonces $k_1 = k'_1$, $k_2 = k'_2$ y $k_3 = k'_3$.
- (e) $x \in \mathcal{P}(X)$ y $z \in (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$ son adyacentes en X , si y solo si, $f_1(x)$ y $f_1(z)$ son adyacentes en Y .
- (f) Si $x \in \mathcal{P}(X)$ y $z \in (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$ son adyacentes en X , entonces el número de arcos de $\mathcal{A}_S(X)$ que une a x con z coincide con el número de arcos que $\mathcal{A}_S(Y)$ que une a $f_1(x)$ con $f_1(z)$.
- (g) Sea $x \in \mathcal{P}(X)$, supongamos que el número de ciclos de X (respectivamente de Y) que contiene a x (respectivamente $f_1(x)$) es k_1 (respectivamente k'_1); el número de puntos extremos de X (respectivamente de Y) adyacentes a x (respectivamente $f_1(x)$) es k_2 (respectivamente k'_2); y el número de arcos de X (respectivamente en Y) que une x (respectivamente a $f_1(x)$) con otro punto de $(R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$ (respectivamente a $(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$) es k_3 (respectivamente k'_3). Entonces $k_1 = k'_1$, $k_2 = k'_2$ y $k_3 = k'_3$.
- (h) X es homeomorfo a Y .

Demostración. En la prueba de los enunciados (a)-(d), en [\[15\]](#) Teorema 3.9], las propiedades usadas para las pruebas de dichos enunciados son

- (1) $\mathcal{G}(X)$ y $\mathcal{G}(Y)$ son densos en X y Y , respectivamente.
 (2) X y Y son localmente conexos.

La condición de tener una base de vecindades \mathfrak{K} tal que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo, para cada elemento $U \in \mathfrak{K}$, nunca es usado. Así, las pruebas de las afirmaciones (a)-(d), en [15, Teorema 3.9], son la mismas para los enunciados (a)-(d), en este teorema.

Para mostrar las afirmaciones (e)-(h), tomemos $x \in \mathcal{P}(X)$, $z \in (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$ tal que x y z son adyacentes en X , y $J \in \mathcal{A}_x$ tal que $E(J) = \{x, z\}$. Como $x \in \mathcal{P}(X)$, por el Teorema 3.19, existe $y \in \mathcal{P}(Y)$ tal que $h(\{x\}) = \{y\}$. Además, por el Teorema 3.21, el punto y es único. Si $z \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$, por la parte (d), del Lema 2.23, existe $w \in R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$ tal que $h(\{z\}) = \{w\}$, nuevamente por el Teorema 3.21, el punto w es único; si $z \in \mathcal{P}(X)$, por el Teorema 3.19, existe $w \in \mathcal{P}(Y)$ tal que $h(\{z\}) = \{w\}$. Así, $w \in (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$. Como y y w son los únicos punto en $(R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y)$ tales que $h(\{x\}) = \{y\}$ y $h(\{z\}) = \{w\}$, por los Lemas 3.21 y 3.22, tenemos que $f_1(x) = y$ y $f_1(z) = w$.

Veamos (e). Sean x y z adyacentes en X , así existe J en $\mathcal{A}_S(X) - \mathcal{A}_R(X)$ tal que $E(J) = \{x, z\}$. Notemos que $J \in \mathcal{A}_x$. Como $J \in \mathcal{A}_S(X)$, por los Teoremas 3.10 y 3.12, existe $K \in \mathcal{A}_S(Y) - \mathcal{A}_R(Y)$ tal que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$, como $\{\{x\}, \{z\}\} \subset \langle J \rangle$, entonces $\{\{y\}, \{w\}\} \subset \langle K \rangle$, luego $y, w \in K$, así $K \in \mathcal{A}_y$. Por el Lema 3.20, tenemos que $g_x(J) = K$, donde g_x es biyectiva. Por lo tanto y y w son adyacentes en Y .

Veamos (f). Sea i_1 el número de arcos de \mathcal{A}_x que une x y z , donde x y y son adyacentes. Sea i'_1 el número de arcos de \mathcal{A}_y que une y y w . Por los Teoremas 3.10, 3.12 y 3.17, para cada $J \in \mathcal{A}_x$ tal que $\{x\}, \{z\} \in \langle J \rangle$, existe $K \in \mathcal{A}_y$ tal que $\{y\}, \{w\} \in \langle K \rangle$ y por el Lema 3.20, tenemos que $g_x(J) = K$. Por lo tanto, $i_1 = i'_1$.

Veamos (g). Sean $x \in \mathcal{P}(X)$ y $J \in \mathcal{A}_R(X)$ tales que $x \in J$, por el Teorema 3.17, existe $K \in \mathcal{A}_R(Y)$, tal que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$. Luego $\{x\} \in \langle J \rangle$, así $\{y\} \in \langle K \rangle$, y por consiguiente $y \in K$. Por lo tanto, $k_1 = k'_1$.

Sean $x \in \mathcal{P}(X)$ y $J \in \mathcal{A}_E(X)$ tales que $x \in J$, notemos que $J \in \mathcal{A}_x$. Por el Teorema 3.12, existe $K \in \mathcal{A}_E(Y)$, tal que $h(\langle J \rangle) = \langle K \rangle$. Luego $\{x\} \in \langle J \rangle$, así $\{y\} \in \langle K \rangle$, y por consiguiente $y \in K$. Entonces $g_x(J) = K$. Por lo tanto, $k_2 = k'_2$.

Sea k_3 el número de arcos de \mathcal{A}_x que une x con z y k'_3 el número de arcos de \mathcal{A}_y que une y con w . Por el Teorema 3.10, para cada $J \in \mathcal{A}_x$ tal que $\{x\}, \{z\} \in \langle J \rangle$, existe un único arco $K \in \mathcal{A}_y$ tal que $\{y\}, \{w\} \in \langle K \rangle$ y así $g_x(J) = K$. Por lo tanto, $k_3 = k'_3$.

Veamos (h). Encontramos un homeomorfismo entre X y Y . Para cualesquiera $x, z \in (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)$ tales que x y z son adyacentes en X , definimos

los siguientes conjuntos

$$\mathcal{I}_{x,z} = \{J \in \mathcal{A}_x : J \text{ es un arco que une a } x \text{ y } z\} \text{ y}$$

$$\mathcal{I}_{f_1(x),f_1(z)} = \{K \in \mathcal{A}_y : K \text{ es un arco que une a } f_1(x) \text{ y } f_1(z)\},$$

donde f_1 es la función continua y biyectiva dada en el Teorema [3.22](#). Por la afirmación (f), de este teorema, la función $g_x|_{\mathcal{I}_{x,z}} : \mathcal{I}_{x,z} \rightarrow \mathcal{I}_{f_1(x),f_1(z)}$ es biyectiva.

Veamos que para cada $J \in \mathcal{I}_{x,z}$, existe un homeomorfismo $f_{x,z} : J \rightarrow g_x(J)$, tal que $f_{x,z}(x) = f_1(x)$ y $f_{x,z}(z) = f_1(z)$. Sea $J \in \mathcal{I}_{x,z}$. Como J y $g_x(J)$ son arcos, tenemos que existen homeomorfismos $\varphi_J : J \rightarrow [0, 1]$ y $\psi_{g_x(J)} : [0, 1] \rightarrow g_x(J)$ tales que $\varphi_J(x) = 0$, $\varphi_J(z) = 1$, $\psi_{g_x(J)}(0) = f_1(x)$ y $\psi_{g_x(J)}(1) = f_1(z)$.

Sea $f_{x,z} = \psi_{g_x(J)} \circ \varphi_J$. Como la composición de homeomorfismo es un homeomorfismo, tenemos que $f_{x,z}$ es un homeomorfismo. Observemos que $f_{x,z}(x) = \psi_{g_x(J)} \circ \varphi_J(x) = \psi_{g_x(J)}(\varphi_J(x)) = \psi_{g_x(J)}(0) = f_1(x)$ y $f_{x,z}(z) = \psi_{g_x(J)} \circ \varphi_J(z) = \psi_{g_x(J)}(\varphi_J(z)) = \psi_{g_x(J)}(1) = f_1(z)$.

Dado $x \in \mathcal{P}(X)$, sean

$$\mathcal{E}_x = \{J \in \mathcal{A}_x : J \text{ une a } x \text{ con un punto externo de } X\} \text{ y}$$

$$\mathcal{E}_{f_1(x)} = \{K \in \mathcal{A}_{f_1(x)} : K \text{ une a } f_1(x) \text{ con un punto externo de } Y\}.$$

Por la afirmación (g), de este teorema, la función $g_x|_{\mathcal{E}_x} : \mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{E}_{f_1(x)}$ es biyectiva.

Sea $J \in \mathcal{E}_x$ y supongamos que $\{e_x\} = E(J) - \{x\}$ y $\{e_{f_1(x)}\} = E(g_x(J)) - \{f_1(x)\}$. Veamos que existe un homeomorfismo $f_{x,e_x} : J \rightarrow g_x(J)$, tal que $f_{x,e_x}(x) = f_1(x)$ y $f_{x,e_x}(e_x) = e_{f_1(x)}$. Se tiene que $J \in \mathcal{E}_x$ y $\{e_x\} = E(J) - \{x\}$. Como J y $g_x(J)$ son arcos, tenemos que existen homeomorfismos $\varphi_J : J \rightarrow [0, 1]$ y $\psi_{g_x(J)} : [0, 1] \rightarrow g_x(J)$ tales que $\varphi_J(x) = 0$, $\varphi_J(e_x) = 1$, $\psi_{g_x(J)}(0) = f_1(x)$ y $\psi_{g_x(J)}(1) = e_{f_1(x)}$.

Sea $f_{x,e_x} = \psi_{g_x(J)} \circ \varphi_J$. Como la composición de homeomorfismo es un homeomorfismo, tenemos que f_{x,e_x} es un homeomorfismo. Observemos que $f_{x,e_x}(x) = \psi_{g_x(J)} \circ \varphi_J(x) = \psi_{g_x(J)}(\varphi_J(x)) = \psi_{g_x(J)}(0) = f_1(x)$ y $f_{x,e_x}(e_x) = \psi_{g_x(J)} \circ \varphi_J(e_x) = \psi_{g_x(J)}(\varphi_J(e_x)) = \psi_{g_x(J)}(1) = e_{f_1(x)}$.

Dado $x \in \mathcal{P}(X)$, consideremos los conjuntos

$$\mathcal{C}_x = \mathcal{A}_x \cap \mathcal{A}_R(X) \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_{f_1(x)} = \mathcal{A}_{f_1(x)} \cap \mathcal{A}_R(Y).$$

Por la afirmación (g), de este teorema, la función $g_x|_{\mathcal{C}_x} : \mathcal{C}_x \rightarrow \mathcal{C}_{f_1(x)}$ es biyectiva.

Sea $J \in \mathcal{C}_x$. Veamos que existe un homeomorfismo $f_x : J \rightarrow g_x(J)$, tal que $f_x(x) = f_1(x)$. Sea $J \in \mathcal{C}_x$. Luego, existe un homeomorfismo $\varphi_J : J \rightarrow S^1$. Además $J \cap R(X) = \{x\}$. Como $g_x(J) \in \mathcal{C}_{f_1(x)}$, existe un homeomorfismo $\psi_{g_x(J)} : S^1 \rightarrow g_x(J)$, como $f_1(x) \in g_x(J)$ y $f_1(x) \in R(Y)$, tenemos que $g_x(J) \cap R(Y) = \{f_1(x)\}$.

Sea $f_x = \psi_{g_x(J)} \circ \varphi_J$. Como la composición de homeomorfismo es un homeomorfismo, tenemos que f_x es un homeomorfismo. Observemos que $f_x(x) = f_1(x)$.

Sea

$$\mathcal{Z}_X = \bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \left\{ E(J) : J \text{ es un arco interno en } X \text{ y } J \in \mathcal{A}_x \right\} \text{ y}$$

$$\mathcal{Z}_Y = \bigcup_{y \in \mathcal{P}(Y)} \bigcup \left\{ E(K) : K \text{ es un arco interno en } Y \text{ y } K \in \mathcal{A}_y \right\}.$$

Notemos que $\{J - \mathcal{P}(X) : J \in \mathcal{A}_R \cup \mathcal{A}_E \text{ y } J \subset \bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x\} \cup \{J - E(J) : J \text{ es un arco interno y } J \subset \bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x\}$ es una cubierta abierta de $\bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x - (\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{Z}_X)$. Por el Teorema 1.2 existe una única función,

$$f_2 : \bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x - (\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{Z}_X) \rightarrow \bigcup_{y \in \mathcal{P}(Y)} \bigcup \mathcal{A}_y - (\mathcal{P}(Y) \cup \mathcal{Z}_Y)$$

la cual es una extensión de las funciones $f_{x,z}|_{J-\{x,z\}}$, $f_{x,e_x}|_{J-\{x\}}$ y $f_x|_{J-\{x\}}$, respectivamente. Es decir, para cada $J \in \mathcal{I}_{x,z}$, se cumple que $f_2|_J = f_{x,z}|_{J-\{x,z\}}$. Para cada $J' \in \mathcal{E}_x$, se cumple que $f_2|_{J'-\{x\}} = f_{x,e_x}|_{J'-\{x\}}$. Para cada $J'' \in \mathcal{C}_x$, se cumple que $f_2|_{J''-\{x\}} = f_x|_{J''-\{x\}}$.

Notemos que $\text{cl}_X(\bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x - (\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{Z}_X)) = \bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x - (\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{Z}_X) \cup \{x \in \mathcal{P}(X) : \text{existe } J \in \mathcal{A}_S(X) \text{ tal que } x \in J\} \cup \mathcal{Z}_X$ y además notemos que la función f_2 es biyectiva.

Sea

$$f_3 : \bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x - (\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{Z}_X) \cup \left((R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X) \right) \rightarrow \bigcup_{y \in \mathcal{P}(Y)} \bigcup \mathcal{A}_y - (\mathcal{P}(Y) \cup \mathcal{Z}_Y) \cup \left((R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)) \cup \mathcal{P}(Y) \right), \quad (3.0.6)$$

una función definida por

$$f_3(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{si } x \in \bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x - (\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{Z}_X), \\ f_1(x) & \text{si } x \in (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X). \end{cases}$$

Como f_1 y f_2 son funciones biyectivas, tenemos que la función f_3 es una función biyectiva.

Ahora para cada par de puntos adyacentes x y z en X tales que $x, z \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$, sean

$$\mathcal{J}_{x,z} = \{J \in \mathcal{A}_S(X) : J \text{ es un arco que une a } x \text{ y } z\} \text{ y}$$

$$\mathcal{J}_{f_1(x), f_1(z)} = \{K \in \mathcal{A}_S(Y) : K \text{ es un arco que une a } f_1(x) \text{ y } f_1(z)\}.$$

Por la afirmación (b), de este teorema, podemos elegir una biyección

$$\varphi_{x,z} : \mathcal{J}_{x,z} \rightarrow \mathcal{J}_{f_1(x), f_1(z)}.$$

Veamos que para cada $J \in \mathcal{J}_{x,z}$, existe un homeomorfismo $h_{x,z} : J \rightarrow \varphi_{x,z}(J)$, tal que $h_{x,z}(x) = f_1(x)$ y $h_{x,z}(z) = f_1(z)$. Sea $J \in \mathcal{J}_{x,z}$. Como J y $\varphi_{x,z}(J)$ son arcos, tenemos que existen homeomorfismos $f_J : J \rightarrow [0, 1]$ y $f_{\varphi_{x,z}(J)} : [0, 1] \rightarrow \varphi_{x,z}(J)$ tales que $f_J(x) = 0$, $f_J(z) = 1$, $f_{\varphi_{x,z}(J)}(0) = f_1(x)$ y $f_{\varphi_{x,z}(J)}(1) = f_1(z)$.

Sea $h_{x,z} = f_{\varphi_{x,z}(J)} \circ f_J$. Como la composición de homeomorfismo es un homeomorfismo, tenemos que $h_{x,z}$ es un homeomorfismo. Observemos que $h_{x,z}(x) = f_{\varphi_{x,z}(J)} \circ f_J(x) = f_{\varphi_{x,z}(J)}(f_J(x)) = f_{\varphi_{x,z}(J)}(0) = f_1(x)$ y $h_{x,z}(z) = f_{\varphi_{x,z}(J)} \circ f_J(z) = f_{\varphi_{x,z}(J)}(f_J(z)) = f_{\varphi_{x,z}(J)}(1) = f_1(z)$.

Dado $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$, sean

$$\mathcal{F}_x = \{J \in \mathcal{A}_S(X) : J \text{ es un arco que une a } x \text{ con un punto externo de } X\} \text{ y}$$

$$\mathcal{F}_{f_1(x)} = \{K \in \mathcal{A}_S(Y) : K \text{ es una arco que une a } f_1(x) \text{ con un punto externo de } Y\}.$$

Por la afirmación (d), de este teorema, la función $\varphi_{x,z}|_{\mathcal{F}_x} : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_{f_1(x)}$ es biyectiva.

Sea $J \in \mathcal{F}_x$ y supongamos que $\{e_x\} = E(J) - \{x\}$ y $\{e_{f_1(x)}\} = E(\varphi_{x,z}(J)) - \{f_1(x)\}$. Veamos que existe un homeomorfismo $h_{x,e_x} : J \rightarrow \varphi_{x,z}(J)$, tal que $h_{x,e_x}(x) = f_1(x)$ y $h_{x,e_x}(e_x) = e_{f_1(x)}$. Sea $J \in \mathcal{F}_{x,e_x}$. Como J y $\varphi_{x,z}(J)$ son arcos, tenemos que existen homeomorfismos $h_J : J \rightarrow [0, 1]$ y $h_{\varphi_{x,z}(J)} : [0, 1] \rightarrow \varphi_{x,z}(J)$ tales que $h_J(x) = 0$, $h_J(e_x) = 1$, $h_{\varphi_{x,z}(J)}(0) = f_1(x)$ y $h_{\varphi_{x,z}(J)}(1) = e_{f_1(x)}$.

Sea $f_{x,e_x} = h_{\varphi_{x,z}(J)} \circ h_J$. Como la composición de homeomorfismo es un homeomorfismo, tenemos que f_{x,e_x} es un homeomorfismo. Observemos que $f_{x,e_x}(x) = h_{\varphi_{x,z}(J)} \circ h_J(x) = h_{\varphi_{x,z}(J)}(h_J(x)) = h_{\varphi_{x,z}(J)}(0) = f_1(x)$ y $f_{x,e_x}(e_x) = h_{\varphi_{x,z}(J)} \circ h_J(e_x) = h_{\varphi_{x,z}(J)}(h_J(e_x)) = h_{\varphi_{x,z}(J)}(1) = e_{f_1(x)}$.

Dado $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$, consideremos los conjuntos

$$\mathcal{D}_x = \{J \in \mathcal{A}_S(X) : J \in \mathcal{A}_R(X) \text{ y } x \in J\} \text{ y}$$

$$\mathcal{D}_{f_1(x)} = \{K \in \mathcal{A}_S(Y) : K \in \mathcal{A}_R(Y) \text{ y } f_1(x) \in K\}.$$

Por la afirmación (d), de este teorema, la función $g_x|_{\mathcal{D}_x} : \mathcal{D}_x \rightarrow \mathcal{D}_{f_1(x)}$ es biyectiva.

Sea $J \in \mathcal{D}_x$. Veamos que existe un homeomorfismo $h_x : J \rightarrow g_x(J)$, tal que $h_x(x) = f_1(x)$. Sea $J \in \mathcal{D}_x$. Luego, existe un homeomorfismo $h_J : J \rightarrow S^1$. Además $J \cap R(X) = \{x\}$. Como $g_x(J) \in \mathcal{D}_{f_1(x)}$, existe un homeomorfismo $h_{g_x(J)} : S^1 \rightarrow g_x(J)$, como $f_1(x) \in g_x(J)$ y $f_1(x) \in R(Y)$, tenemos que $g_x(J) \cap R(Y) = \{f_1(x)\}$.

Sea $h_x = h_{g_x(J)} \circ h_J$. Como la composición de homeomorfismo es un homeomorfismo, tenemos que h_x es un homeomorfismo. Observemos que $h_x(x) = f_1(x)$.

Notemos que $\{J \in \mathcal{A}_S(X) : J \not\subset \bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x\}$ es una familia localmente finita en $\left(X - \left(\bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x \cup \mathcal{P}(X)\right)\right) \cup (R(X) \cap \mathcal{G}(X))$, vea la Definición 1.1, ya que para todo $z \in \left(X - \left(\bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x \cup \mathcal{P}(X)\right)\right) \cup (R(X) \cap \mathcal{G}(X))$, existe una gráfica finita G_z contenida en X tal que $z \in \text{int}_X(G_z)$ y para a lo más una cantidad finita de elementos $J \in \{J \in \mathcal{A}_S(X) : J \not\subset \bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x\}$, se cumple que $\text{int}_X(G_z) \cap J \neq \emptyset$.

Luego, por el Teorema [1.2](#) existe una única función

$$f_4 : \left(X - \left(\bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x \cup \mathcal{P}(X) \right) \right) \cup (R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \rightarrow \\ \left(Y - \left(\bigcup_{y \in \mathcal{P}(Y)} \bigcup \mathcal{A}_y \cup \mathcal{P}(Y) \right) \right) \cup (R(Y) \cap \mathcal{G}(Y)), \quad (3.0.7)$$

la cual es una extensión de las funciones $h_{x,z}$, h_{x,e_x} y h_x , respectivamente. Es decir, para cada $J \in \mathcal{J}_{x,z}$, se cumple que $f_4|_J = h_{x,z}$. Para cada $J' \in \mathcal{F}_x$, se cumple que $f_4|_{J'-\{x\}} = h_{x,e_x}$. Para cada $J'' \in \mathcal{D}_x$, se cumple que $f_4|_{J''-\{x\}} = h_x$.

Notemos que para cada $x \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$, se cumple que $f_4(x) = f_1(x)$. Y además, para cada $J \in \mathcal{A}_S(X)$, se cumple que $f_4(J) \in \mathcal{A}_S(Y)$. Más aún, la función f_4 es una función biyectiva.

Ahora, sea

$$f : X \rightarrow Y$$

una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} f_3(x) & \text{si } x \in \bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x - (\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{Z}_X) \cup ((R(X) \cap \mathcal{G}(X)) \cup \mathcal{P}(X)), \\ f_4(x) & \text{si } x \in \left(X - \left(\bigcup_{x \in \mathcal{P}(X)} \bigcup \mathcal{A}_x \cup \mathcal{P}(X) \right) \right) \cup (R(X) \cap \mathcal{G}(X)). \end{cases}$$

Como f_3 y f_4 son funciones biyectivas y como $f_3|_{R(X) \cap \mathcal{G}(X)} = f_4|_{R(X) \cap \mathcal{G}(X)}$ tenemos que la función f es una función biyectiva. Por lo tanto X es homeomorfo a Y . \square

Teorema 3.24. *Si X es un continuo casi enrejado localmente conexo, entonces X tiene tercer producto simétrico único.*

Demostración. Sea Y un continuo tal que $F_3(X)$ es homeomorfo $F_3(Y)$, por el Teorema [2.20](#), sabemos que la clase de los continuos casi enrejados localmente conexos es F_3 -cerrada, así Y es un continuo casi enrejado localmente conexo. Por la parte parte (h), del Teorema [3.23](#), tenemos que X es homeomorfo a Y y por lo tanto, obtenemos que X tiene tercer producto simétrico único. \square

Corolario 3.25. *Si X es un continuo casi enrejado localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$, entonces X tiene n -ésimo producto simétrico único.*

Demostración. Por el Teorema [2.22](#), sabemos que X tiene n -ésimo producto simétrico único, para cada $n \in \mathbb{N} - \{3\}$ y por el Teorema [3.24](#), concluimos este corolario. \square

Problema 3.26. [\[15\]](#) *Pregunta 3.13] Dado X un continuo alambrado y $n \in \{2, 3\}$, ¿tiene X n -ésimo producto simétrico único?*

Bibliografía

- [1] G. Acosta, *Continua with unique hyperspace*, Lecture notes in pure and applied mathematics 230, 33–49, Marcel Dekker, Inc., 2002.
- [2] G. Acosta, R. Hernández Gutiérrez, V. Martínez de la Vega, *Dendrites and symmetric products*, Glas. Math. Ser. III 44 (1) (2009) 195–210.
- [3] G. Acosta, D. Herrera Carrasco, *Dendrites without unique hyperspace*, Houst. J. Math. 35 (2) (2009) 451–467.
- [4] G. Acosta, D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, *Local dendrites with unique hyperspace $C(X)$* , Topol. Appl. 157 (2010) 2069–2085.
- [5] J. G. Anaya, E. Castañeda Alvarado, A. Illanes, *Continua with unique symmetric product*. Comment. Math. Univ. Carolin. 54 (2013) 397–406.
- [6] K. Borsuk, S. Ulam, *On symmetric product of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931) 875–882.
- [7] K. Borsuk, *On the third symmetric potency of the circumference*, Fund. Math. 36 (1949) 235–244.
- [8] J. J. Charatonik, A. Illanes, *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mt. J. Math. 36 (2006) 811–856.
- [9] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topol. Appl. 153 (2006) 1434–1450.
- [10] V. Córdova Salazar, D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique third symmetric product*, preprint, Topol. Appl. (2018) 1–11.
- [11] Vianey Córdova Salazar, *Elementos básicos de hiperespacios de continuos*, Tesis de Licenciatura Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2011.
- [12] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph*, I, Fund. Math. 62 (1968) 265–286.

- [13] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1978. ISBN: 0-205-00271-4
- [14] R. Escobedo, M. de J. López, S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum*, *Topol. Appl.* 138 (2004) 109–124.
- [15] L. A. Guerrero Méndez, D. Herrera Carrasco, M. de J. López, F. Macías Romero, *Meshed continua have unique second and third symmetric products*, *Topol. Appl.* 191 (2015) 16–27.
- [16] R. Hernández Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez de la Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, *Rocky Mt. J. Math.* 43 (5) (2013) 1583–1624.
- [17] R. Hernández Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez de la Vega, *Rigidity of hyperspaces*, *Rocky Mt. J. Math.* 45 (1) (2015) 213–236.
- [18] R. Hernández Gutiérrez, V. Martínez de la Vega, *Rigidity of symmetric products*, *Topol. Appl.* 160 (2013) 1577–1587.
- [19] D. Herrera Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace*, *Houst. J. Math.* 33 (3) (2007) 795–805.
- [20] D. Herrera Carrasco, A. Illanes, M. de J. López, F. Macías Romero, *Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$* , *Topol. Appl.* 156 (2009) 549–557.
- [21] D. Herrera Carrasco, A. Illanes, F. Macías Romero, F. Vázquez Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$* , *Topol. Proc.* 44 (2014) 75–95.
- [22] D. Herrera Carrasco, M. de J. López, F. Macías Romero, *Dendrites with unique symmetric products*, *Topol. Proc.* 34 (2009) 175–190.
- [23] D. Herrera Carrasco, M. de J. López, F. Macías Romero, *Framed continua have unique n -fold hyperspace suspension*, *Topol. Appl.* 196 (2015) 652–667.
- [24] D. Herrera Carrasco, M. de J. López, F. Macías Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product*, *Topol. Appl.* 209 (2016) 1–13.
- [25] D. Herrera Carrasco, M. de J. López, F. Macías Romero, *Almost meshed locally connected continua without unique n -fold hyperspace suspension*, *Houst. J. Math.* 44 (4) (2018) 1335–1365.
- [26] D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, *Dendrites with unique n -fold hyperspace*, *Topol. Proc.* 32 (2008) 321–337.
- [27] D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, *Local dendrites with unique n -fold hyperspace*, *Topol. Appl.* 158 (2011) 244–251.

- [28] D. Herrera Carrasco, F. Macías Romero, F. Vázquez Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*, J. Math. Res. 4 (4) (2012) 1–9.
- [29] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace $F_2(X)$* , JP J. Geom. Topol. 2 (1) (2002) 75–96.
- [30] A. Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique*, Glas. Mat. 37 (57) (2002) 347–363.
- [31] A. Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$* , Topol. Proc. 27 (2003) 179–188.
- [32] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Vol. 28, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.
- [33] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$, II*, Topol. Proc. 34 (2009) 77–96.
- [34] A. Illanes, *Uniqueness of Hyperspaces*, Quest. Answ. Gen. Topol. 30 (2012) 21–44.
- [35] A. Illanes, *Models of Hyperspaces*, Topol. Proc. 41 (2013) 39–64.
- [36] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999. ISBN: 0-8247-1982-4
- [37] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X , II*, Topology Proc. 25 (2000) 255–276.
- [38] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua*, Topol. Appl. 138 (2004) 125–138.
- [39] S. Macías, *On the n -fold hyperspace suspension of continua, II*, Glasnik Mat. 41(61)(2006) 335–343.
- [40] S. Macías, *Topics on Continua*, Second Edition, Springer, 2018, ISBN:978-3-319-90901-1.
- [41] S. Macías, S. B. Nadler Jr., *n -fold hyperspace, cones, and products*, Topology Proc. 26 (2001–2002), 255–270.
- [42] J. M. Martínez Montejano, *Non-confluence of the natural map of products onto symmetric products*, Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, 230, 229–236.
- [43] Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces of sets. A text with research questions*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N. 33, Sociedad Matemática Mexicana, ISBN: 968-36-3594-6, 2006.

-
- [44] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An introduction*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.
- [45] C. Tuffley, *Finite subset spaces of S^1* , *Algebr. Geom. Topol.* 2 (2002) 1119–1145.
- [46] W. Wu, *Note sur les produits essentiels symétriques des espaces topologique, I*, *Comptes Rendus des Séances de l' Académie des Sciences* 16 (1947) 1139–1141.

Índice alfabético

$\Gamma(A)$, [3](#)
 $\Lambda(A)$, [3](#)
 $\Phi(A)$, [3](#)

Adyacente, [12](#)
Alambre, [1](#)
Arco libre, [9](#)
Arco libre maximal, [9](#)

Clase F_n -cerrada, [14](#)
Continuo, [2](#)
Continuo alambrado, [11](#)
Continuo casi enrejado, [10](#)
Continuo enrejado, [10](#)
Ciclo, [9](#)

Dendrita, [1](#)

F_n -cerrada, [14](#)
Familia localmente finita, [1](#)

Gráfica finita, [6](#)

Hiperespacio único, [13](#)

Métrica de Hausdorff, [3](#)

n -celda, [7](#)
 n -ésimo producto simétrico, [2](#)
 n -odo simple, [7](#)
Nube, [2](#)

Límite inferior, [4](#)
Límite superior, [4](#)
Localmente conexo, [8](#)

Orden, [6](#)

Punto adyacente, [12](#)
Punto extremo, [6](#)
Punto ordinario, [6](#)
Punto de ramificación, [6](#)

Vértice, [7](#)