



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Un estudio a la lógica modal con complejos simpliciales

TESIS

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Luis Enrique Aponte Pérez

Directores de Tesis

Dr. Iván Martínez Ruiz
Dr. José Luis León Medina

Puebla, Puebla; Julio de 2025



BUAP

**DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el C:

LUIS ENRIQUE APONTE PÉREZ

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 29 de mayo de 2025, con la tesis titulada:

Un estudio a la lógica modal con complejos simpliciales

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 3 de junio de 2025

**DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.**



*Dedicado con cariño a
Mi familia, mascotas, amigos,
profesores, asesores, sinodales
y a mi psicóloga...
No hubiera llegado adonde estoy sin su apoyo.*

Agradecimientos

A la primera persona que tengo que agradecer es a mi psicóloga Jessica Rabanal, quien hizo que la burbuja de mis problemas reventará y, aunque tenga cicatrices, tengo mucho más espacio para pensar, escribir poesía y sobre todo ser feliz. Muchísimas gracias.

A César Cejudo Castilla e Iván Fernando Vilchis Montalvo, son unos de los mejores matemáticos que he conocido. A César, le agradezco que me haya orientado ese amor al álgebra y a las matemáticas cuando estaba perdido en la vida. Sus enseñanzas me crearon un suelo firme en donde puedo caminar. A Fernando, por su honestidad, enseñarme las matemáticas de verdad y no solo eso... Además, que las matemáticas son creativas. Disculpen si no les dediqué la tesis de licenciatura, pero creo justo darles un lugar en esta tesis.

A mis amigas de la preparatoria, Vianey Monarca Garache y Sheyla Pérez Reyes que a pesar de su ausencia en algunas ocasiones, siempre están en mi corazón, ustedes conocieron la peor versión de mí y vieron más allá de ello, les estoy eternamente agradecido, siempre que las termino de ver siempre lloro de felicidad, me pone muy contento verlas... Son mi luz.

A mis mascotas, adoro mucho su compañía. Cuando me siento solo o estresado, siempre me siento cómodo cuando juego con mis tres gatos y mis seis perros. Especialmente a mi gata, *la perro*, por acompañarme en estos casi diez años, en esas noches de desvelo, tristezas y alegrías.

A mi familia, a mis padres por brindarme todo su apoyo en las buenas y en las malas, ustedes son los brazos que necesito cuando me deaigo. A mi hermano mayor Gustavo, espero que tengas un futuro exitoso en tu trabajo y que consigas tus sueños. A mi hermano menor, Christopher, muchas gracias por brindarme las pala-

VI

bras y tus consejos, adoro comer hamburguesas contigo o cualquier alimento cuando vemos series y animes. A mis abuelos, que siempre me reciben con un buen café con pan y una buena historia. A mis tías, tíos, primas y primos por los buenos momentos.

A mis compañeros de la maestría en ciencias matemáticas. A Cesar Alonzo Moreno Espinoza, eres una de las personas más inteligentes que he conocido, solo que eres tímido y flojo, gracias a tu compañía la maestría fue más llevadera. A Víctor Ortiz Rosas y Andreiv Dominguez Martínez, por escuchar mis tonterías en clase y ser un buen apoyo de estudio... *Hagamos que la montaña vaya a Mahoma.*

A mis amiguitos del bosque, mis compañeros de licenciatura, los he visto crecer y estresarse. Disfruto de su compañía cuando salgo a caminar, los saludo y tenemos pláticas muy amenas.

A mis amigos *los categóricos*, por mostrarme las maravillas de las categorías y que además, con su ayuda pude terminar el tercer capítulo de esta tesis, estoy en deuda con ustedes camaradas.

También no olvido al *Equipo alfa buena maravilla onda dinami-ta escuadrón lobo*, los cuales son Eduardo Cabrera Linares, Abigail Alarcón Valdivia y Patricia González León, gracias por seguir en contacto.

A Lupita, Fernando y Belén, por acompañarme e invitarme a sus reuniones.

A Darío Abundis Mendívil, por hacer que nuestro recorrido por brasil fuera divertido y muy productivo, gracias por la compañía y los consejos.

A Jessica Itzel Flores Guzmán, mi compañera de poesía, por compartirme su tiempo y darme compañía durante la pandemia... Gracias.

A mis alumnos, tanto del diplomado como de la facultad, con ustedes aprendí que puedo seguir aprendiendo y que la curiosidad nunca se acaba, pues puedo aprender la misma cosa de distintas maneras.

A Zaida Adriana Garate Cahuatzi, aunque con altas y bajas, hemos vuelto a hablar, te tengo un cariño inmenso. Espero que cumplas tus sueños y aspiraciones, eres una gran persona nunca dejes de brillar.

A mis compañeros de vida que he conocido en mis viajes por el

país y en Brasil, por expandir mi conocimiento a nuevas fronteras, una disculpa por no poner sus nombres, pero tengo una pésima memoria.

A mis profesores de la maestría, Jorge Bustamante González y Mauricio Esteban Chacón Tirado, por enseñarme análisis y repasar conceptos que había olvidado. Al dúo dinámico, Juan Alberto Escamilla Reyna y Carlos Guillén Galván, por crear ese amor por el análisis matemático. A Sonia Navarro Flores, por mostrarme la teoría de grafos, estoy muy agradecido con ello. Al Alejandro Ramírez Páramo (**Seven**), más que un profesor, es un amigo por su apoyo y sus consejos. A Agustín Contreras Carreto, por sus cursos de licenciatura que me enamoraron de la geometría y ahora uso sus conocimientos en esta tesis de maestría.

A mi jurado, Agustín Contreras Carreto, Oleg G. Okunev, Sonia Navarro Flores y Alejandro Ramírez Páramo, por sus observaciones, sus consejos y sobre todo su tiempo, les estoy demasiado agradecido.

A la *Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI)*, antes *Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT)*, mi sincero agradecimiento por el apoyo económico brindado durante este periodo.

Les agradezco profundamente a mis asesores Iván Martínez Ruiz y José Luis León Medina. A Iván, le tengo una gratitud enorme por enseñarme demasiado, tanto académicamente, como en la vida; estuvo en un momento donde estaba cayendo, pero me mostró la lógica y los fundamentos de la matemática, junto con el apoyo económico por los diplomados y la experiencia que he generado... Gracias. A José Luis León Medina, por ayudarme a terminar esta tesis y sus sugerencias, que me ayudaron a expandir los horizontes y sus conocimientos en topología algebraica, que me ayudaron a entender muchísimas cosas... Muchas gracias.

Y por último, y no menos importante... A mí, que a pesar de no estar en mi mejor momento, ahora tengo más ganas de vivir que nunca, por haberme hecho más valiente, pedir ayuda y motivarme, por haberme permitido tener tantas experiencias que me han hecho madurar de manera emocional, académica y física.

A todas las personas que he mencionado anteriormente, e inclusive que me he tenido la oportunidad de conocer.

VIII

MUCHAS GRACIAS.

Introducción

La lógica modal fue estudiada por primera vez de manera formal por filósofos griegos *Platón* y *Aristóteles* motivados con el fin de dar coherencia a razonamientos lógicos, pensamientos, argumentos e ideas. Con el tiempo distintos personajes históricos como *Avicena*, *Guillermo de Ockham*, *Dun Scotus*, *Gottfried Leibniz*, entre otros más, desarrollaron observaciones del trabajo de *Aristóteles* particularmente de su libro *El Órganon* (ver [4] y [6]). Con el tiempo, *Saul Kripke* motivado por el trabajo de *Gottfried Leibniz* sobre *los mundos posibles*, generó una semántica para la lógica modal (ver [1]).

Por otro lado, los complejos simpliciales son objetos de estudio de la topología algebraica y la topología combinatoria, que nos ayudan a entender ciertos espacios topológicos mediante el pegado de puntos, segmentos de línea, triángulos, tetraedros y otras formas de mayor dimensión.

Nuestro objetivo en esta tesis es estudiar la conexión de los complejos simpliciales como semántica de ciertas lógicas, a saber la lógica epistémica de multi-agentes y la lógica de accesibilidad. Esta tesis está organizada en cuatro capítulos que expondremos en breve.

En el primer capítulo se presentará la definición de complejo simplicial junto con algunos resultados relacionados con este objeto de estudio, además presentaremos la definición de realización geométrica que nos ayudará a entender la semántica de la lógica de accesibilidad y el concepto de complejo simplicial cromático que de igual manera nos dará una semántica para la lógica epistémica.

En el segundo capítulo, se dará un breve estudio de la lógica proposicional clásica, donde hablaremos de su lenguaje, sus símbolos, su sintaxis y reglas de inferencia, para después dar un estudio

semántico a la lógica modal por medio de espacios topológicos. Más aún, se presentarán los sistemas axiomáticos de la lógica proposicional clásica, de la lógica modal mínima o **K**, de la lógica *S4* y la lógica *S5*.

En el tercer capítulo, se estudiará a la lógica epistémica de multi-agentes que, a diferencia de la lógica modal clásica, se agregan nuevos operadores modales por cada agente en nuestro lenguaje. En este capítulo estudiaremos la semántica de ciertos modelos epistémicos, a saber, los modelos locales. Además, estudiaremos la relación de dichos modelos con los complejos simpliciales cromáticos y analizaremos algunos ejemplos. Este capítulo está basado en el trabajo reciente de los investigadores *Sergio Rajsbaum*, *Hans van Ditmarsch*, *Eric Goubault* y *Jeremy Ledent* (ver [8] y [10]).

En el cuarto capítulo, se estudiará a la lógica de accesibilidad, particularmente es una lógica espacial con una semántica topológica, que, a diferencia de la lógica modal usual, se agrega un nuevo operador que llamaremos *operador de accesibilidad* que nos permite conectar puntos en nuestro modelo que tengan ciertas propiedades. Además, veremos la relación semántica de dichos modelos con la realización geométrica de un complejo simplicial. Este capítulo, estará basado en el trabajo reciente de *Nick Bezhanishvili*, *Laura Bussi*, *Vincenzo Ciancia*, *David Fernández-Duque*, *David Gabelaia*, *Gianluca Grilletti* y *Diego Latella* (ver [9] y [14]).

Índice general

Agradecimientos	V
Introducción	IX
1. Complejos simpliciales.	1
1.1. Definición y ejemplos.	1
1.2. Complejos simpliciales cromáticos.	18
2. Un breve estudio de la lógica modal.	23
2.1. Un breve resumen de la lógica clásica.	23
2.1.1. Sintaxis, semántica y reglas de inferencia.	24
2.2. Lógica modal.	27
2.2.1. Sintaxis y semántica.	28
2.2.2. Sistemas lógicos modales.	30
2.2.3. Modelos de Alexandroff.	31
3. Lógica epistémica y modelos de Kripke.	37
3.1. Sintaxis, semántica y ejemplos.	37
3.2. Complejos simpliciales y estructuras de Kripke.	42
3.2.1. Solidez de $S5_n + Loc$	58
3.2.2. Ejemplos.	59
4. Lógica espacial y complejos simpliciales.	67
4.1. Sintaxis y semántica.	67
4.1.1. Modelos de Alexandroff.	71
4.1.2. El acompañante de Kripke.	82
4.2. El nervio de un modelo de Alexandroff.	89
4.2.1. Definición y algunos resultados.	90

4.2.2. Solidez de la lógica de accesibilidad de Alexandroff y de la lógica de accesibilidad poliédrica.	94
Conclusiones	96
A. Un poco de teoría de categorías.	99
A.1. ¿Qué es una categoría?	99
Bibliografía	105

Capítulo 1

Complejos simpliciales.

En este capítulo, daremos definiciones básicas y algunos ejemplos de complejos simpliciales, además de que se darán algunos resultados sobre estos mismos.

Algunos de los resultados de esta sección están basados en el libro *Algebraic Topology* de *Edwin Spanier* (ver [2]).

1.1. Definición y ejemplos.

Dado un conjunto A , definimos el conjunto $[A]^{<\omega} = \{B \subseteq A \mid B \text{ es un conjunto finito}\}$.

Definición 1.1. Un complejo simplicial $K = (V, P)$, es un par ordenado que consiste de dos conjuntos V y P , de tal manera que $P \subseteq [V]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, además el conjunto P cumple las siguientes propiedades:

- a) Para cada $v \in V$, se tiene que $\{v\} \in P$
- b) Para cada $b \in \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$, si $b \subseteq p$ para algún $p \in P$, entonces $b \in P$.

A los elementos del conjunto V les llamaremos *vértices* del complejo simplicial K y a los elementos del conjunto P les llamaremos *simplejos*.

Diremos que un complejo simplicial $K = (V, P)$ es finito, si P es finito. Por la definición anterior, podemos observar que si K es

finito, entonces $\{\{v\} \mid v \in V\} \subseteq P$ nos asegura que el conjunto de vértices V también es finito. Por otro lado, si V es finito, entonces P es finito. En efecto, por definición $P \subseteq [V]^{<\omega}$ y como $[V]^{<\omega}$ es finito, entonces P también lo es.

Dados un complejo simplicial $K = (V, P)$ y S un simplejo de K , si $|S| = q + 1$ (S tiene $q + 1$ vértices), entonces diremos que el conjunto S es un q -simplejo. En este caso, diremos que la dimensión del simplejo S es q y lo denotaremos de la siguiente manera $\dim(S) = q$.

Definición 1.2. Se dice que S' es una *cara* de S , si $S' \subseteq S$ y en caso de que S' es un p -simplejo ($\dim(S') = p$), entonces diremos que S' es una p -*cara* de S .

Sea $K = (V, P)$ es un complejo simplicial. Definimos y denotamos al *esqueleto q -dimensional* como el complejo simplicial $K_q = (V, P_q)$, donde $P_q = \{S \in P \mid \dim(S) \leq q\}$.

Observación 1.3. Podemos observar que si S es un q -simplejo, entonces S es la única q -cara de S . Diremos que una cara S' de S es una *cara propia* sí y sólo sí $\dim(S') < q$. Puesto que, toda *cara* de una *cara* de S , es en sí mismo una cara de S , entonces los simplejos de K forman un orden parcial con la relación de “*ser cara de*” a esta relación la denotaremos como:

$$S' \leq S \text{ sí y sólo sí } S' \text{ una cara de } S$$

En caso de que $S' \leq S$, pero no sucede que $S \leq S'$ escribiremos $S' < S$.

Algunos ejemplos de simplejos son los siguientes:

- El conjunto vacío es un complejo simplicial al cual lo denotaremos como \emptyset .
- $K = (\omega, [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\})$ forma un complejo simplicial.
- Para cada conjunto no vacío A , si consideramos el conjunto

$$\mathcal{A} = [A]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\},$$

entonces (A, \mathcal{A}) es un complejo simplicial.

- Sean X un conjunto y $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Definimos y denotamos al *nervio de \mathcal{W}* , como el complejo simplicial $K(\mathcal{W}) = (\mathcal{W}, P_{\mathcal{W}})$, donde:

$$P_{\mathcal{W}} = \{\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{W}]^{<\omega} \mid \bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset\}.$$

- Dados dos complejos simpliciales no vacíos $K_1 = (V_1, P_1)$ y $K_2 = (V_2, P_2)$, definimos y denotamos la *junta de simplejos* como $K_1 \vee K_2 = (V_1 \sqcup V_2, P_1 \vee P_2)$, donde $V_1 \sqcup V_2 = V_1 \times \{0\} \cup V_2 \times \{1\}$ y:

$$P_1 \vee P_2 := P_1 \sqcup P_2 \cup \{s_1 \sqcup s_2 \mid s_1 \in P_1, s_2 \in P_2\}$$

- Otro ejemplo se da al considerar al conjunto de los números enteros \mathbb{Z} . Formemos al complejo simplicial $K = (\mathbb{Z}, P)$ que tiene como conjunto de vértices a \mathbb{Z} y cuyo conjunto de simplejos está dado por:

$$P = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Definición 1.4. Sea $K = (V, P)$ un complejo simplicial no vacío. Definimos y denotamos su *dimensión* como $\dim(K) = \sup\{\dim(S) \mid S \in P\}$. En caso de que $K = \emptyset$, entonces $\dim(K) = -1$.

Definición 1.5. Dados dos complejos simpliciales $K_1 = (V_1, P_1)$ y $K_2 = (V_2, P_2)$, un *mapeo simplicial* $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ es una función que manda vértices de K_1 a vértices de K_2 y, además, para cada simplejo $S \in P_1$, entonces $\varphi(S) \in P_2$. Denotaremos a la función $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$, cuando φ es un *mapeo simplicial*. Un claro ejemplo de mapeo simplicial es la función identidad $Id : K \rightarrow K$.

Observación 1.6. Si consideramos los complejos simpliciales $K_1 = (V_1, P_1)$, $K_2 = (V_2, P_2)$ y $K_3 = (V_3, P_3)$, junto a los *mapeos simpliciales* $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$ y $\psi : K_2 \rightarrow K_3$, es claro que $\varphi \circ \psi : K_1 \rightarrow K_3$ es también un *mapeo simplicial*.

Definición 1.7. Sea $K = (V, P)$ un complejo simplicial:

- Diremos que $L = (V', P')$ es un subcomplejo del complejo simplicial K lo cual denotaremos por $L \leq K$; si $V' \subseteq V$, $P' \subseteq P$ y además L cumple la *Definición 2.1*.

- Sea $L \leq K$. Diremos que $L = (V', P')$ es *subcomplejo completo*, si para cada $S \in P$ tal que $S \subseteq V'$, entonces $S \in P'$.

Para entender con mayor claridad el concepto de *subcomplejo* expondremos algunos ejemplos.

- Considerando los complejos simpliciales $K = (\omega, [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\})$ y $L = (\omega, [\omega]^{\leq 2} \setminus \{\emptyset\})$, entonces $L \leq K$; sin embargo, L no es completo, pues $\{1, 2, 3\} \in [\omega]^{<\omega}$, pero no es un simplejo de L .
- Por otro lado, para un complejo simplicial K y para cada $q \leq \dim(K)$, el *esqueleto q -dimensional* K_q es un subcomplejo de K y además para cada $p \leq q$, $K_p \leq K_q$.
- Para cada simplejo S de un complejo simplicial $K = (V, P)$, definimos los complejos simpliciales $\dot{\mathbf{S}} = (S, \dot{S})$ y $\mathbf{S} = (S, \bar{S})$, donde $\dot{S} = \mathcal{P}(S) \setminus \{S, \emptyset\}$ y $\bar{S} = \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$. Los complejos simpliciales definidos anteriormente, cumplen $\dot{\mathbf{S}} \leq \mathbf{S} \leq K$ y, además, \mathbf{S} es un subcomplejo completo de K , pero $\dot{\mathbf{S}}$ no es completo en K .
- Consideremos un conjunto X , $A \subseteq X$ y \mathcal{W} una familia de conjuntos no vacíos de X . Sea $\mathcal{W}_A = \{W \in \mathcal{W} \mid W \cap A \neq \emptyset\}$. Definimos el complejo simplicial $K(\mathcal{W})_A = (\mathcal{W}_A, P_{\mathcal{W}_A})$, donde

$$P_{\mathcal{W}_A} = \{\mathcal{B} \subseteq [\mathcal{W}_A]^{<\omega} \mid \bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset\}.$$

Entonces $K(\mathcal{W})_A \leq K(\mathcal{W})$.

Proposición 1.8. Sea $\{L_j = (V_j, P_j)\}_{j \in J}$ una familia de subcomplejos de K , entonces $\bigcup_{j \in J} L_j = (\bigcup_{j \in J} V_j, \bigcup_{j \in J} P_j)$ y $\bigcap_{j \in J} L_j = (\bigcap_{j \in J} V_j, \bigcap_{j \in J} P_j)$ son subcomplejos de K .

Demostración: Primero mostraremos que $\bigcup_{j \in J} L_j = (\bigcup_{j \in J} V_j, \bigcup_{j \in J} P_j)$ es un complejo simplicial. Claramente, $\bigcup_{j \in J} P_j \subseteq [\bigcup_{j \in J} V_j]^{<\omega}$. Para cada $v \in \bigcup_{j \in J} V_j$, entonces existe $j_v \in J$ tal que $v \in V_{j_v}$ con lo cual $\{v\} \in P_{j_v} \subseteq \bigcup_{j \in J} P_j$. Ahora, sea $b \in \mathcal{P}(\bigcup_{j \in J} V_j)$ no vacío y consideremos $p \in \bigcup_{j \in J} P_j$ tal que $b \subseteq p$, ya que

$p \in P_{j'}$ para algún $j' \in J$, entonces $b \in P_{j'} \subseteq \bigcup_{j \in J} P_j$, por lo que $\bigcup_{j \in J} L_j = (\bigcup_{j \in J} V_j, \bigcup_{j \in J} P_j)$ es un complejo simplicial.

Ahora, mostremos que $\bigcap_{j \in J} L_j = (\bigcap V_j, \bigcap P_j)$ es un complejo simplicial. Claramente, $\bigcap_{j \in J} P_j \subseteq [\bigcap_{j \in J} V_j]^{<\omega}$. Si $\bigcap_{j \in J} V_j = \emptyset$, entonces $\bigcap_{j \in J} L_j = \emptyset$ y terminamos. En caso de que $\bigcap_{j \in J} V_j \neq \emptyset$, entonces para cada $v \in \bigcap_{j \in J} V_j$, $\{v\} \in P_j$ para cada $j \in J$ con lo cual $\{v\} \in \bigcap_{j \in J} P_j$, así hemos probado que $\bigcap_{j \in J} L_j$ cumple a) de la *Definición 2.1*. Por otro lado, sea $b \in \mathcal{P}(V)$ no vacío y consideremos $p \in \bigcap_{j \in J} P_j$ tal que $b \subseteq p$, pero $p \in P_j$ para cada $j \in J$, así $b \in P_j$ para cada $j \in J$ y consecuentemente $b \in \bigcap_{j \in J} P_j$. Así hemos demostrado que $\bigcap_{j \in J} L_j = (\bigcap_{j \in J} V_j, \bigcap_{j \in J} P_j)$ es un complejo simplicial. Por lo tanto, $\bigcup_{j \in J} L_j = (\bigcup_{j \in J} V_j, \bigcup_{j \in J} P_j)$ y $\bigcap_{j \in J} L_j = (\bigcap_{j \in J} V_j, \bigcap_{j \in J} P_j)$ son subcomplejos de K \square

Dados $K' = (V', P')$ y $K'' = (V'', P'')$ subcomplejos de un complejo simplicial $K = (V, P)$, diremos que K' y K'' son ajenos si $V' \cap V'' = \emptyset$. Observemos que si $V' \cap V'' = \emptyset$, entonces $P' \cap P'' = \emptyset$.

Lema 1.9. Dados un complejo simplicial $K = (V, P)$ y $L = (V', P')$ un *subcomplejo completo* de K . Existe $N = (V'', P'')$ subcomplejo de K que es ajeno con L y tal que $K \leq L \vee N$

Demostración: En caso de que $V = V'$, tendríamos que $K = L$ y bastaría considerar a $N = \emptyset$.

En caso de que $V \neq V'$, consideremos el conjunto $V'' = V \setminus V'$ y definimos el subcomplejo $Z = (V'', P_Z)$ de K tal que $P_Z = \{\{v\} \mid v \in V''\}$.

Definimos el conjunto $\mathcal{X} = \{Q \subseteq [V'']^{<\omega} \mid P_Z \subseteq Q \text{ y } (V'', Q) \leq K\}$. Dicho conjunto no es vacío y es un conjunto parcialmente ordenado con respecto a la contención.

Ahora, sea \mathcal{C} una \subseteq -cadena en \mathcal{X} , mostraremos que $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{X}$. Puesto que para cada $C \in \mathcal{C}$, se tiene que $C \subseteq [V'']^{<\omega}$, entonces $\bigcup \mathcal{C} \subseteq [V'']^{<\omega}$. También notemos que $P_Z \subseteq C$ para cada $C \in \mathcal{C}$ y, por lo tanto, $P_Z \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Por la proposición anterior, $(V'', \bigcup \mathcal{C}) \leq K$ y, por lo tanto, toda cadena en \mathcal{X} tiene una cota superior. Por el *Lema de Zorn*, \mathcal{X} tiene elemento maximal, sea P'' dicho elemento maximal. Observemos que $N = (V'', P'')$ es un subcomplejo completo. Supongamos lo contrario, entonces existe $S \in P$ tal que $S \subseteq V''$, pero $S \notin P''$. Entonces, $N = (V'', P'') \leq N \vee S = (V'' \cup S, P'' \vee \overline{S}) = (V'', P'' \vee \overline{S})$ y $S \in P'' \vee \overline{S}$, esto contradice la maximalidad de P'' . Por lo tanto, N es completo. Desde

que $V' \cap V'' = \emptyset$, entonces $L = (V', P')$ y $N = (V'', P'')$ son ajenos. Por otro lado, para cada $S \in P$, si $S \subseteq V'$, entonces $S \in P'$, pues, L es un subcomplejo completo de K . Análogamente, si $S \subseteq V''$, entonces $S \in P''$. Ahora, si $S \not\subseteq V'$ y $S \not\subseteq V''$, consideremos los conjuntos $S' = S \setminus V'' \neq \emptyset$ y $S'' = S \setminus V' \neq \emptyset$, con lo cual $S' \in P'$ y $S'' \in P''$, por lo tanto, $S = S' \cup S'' \in P' \vee P''$ \square

En general, si consideramos L y N subcomplejos de K tales que $K \leq L \vee N$, puede suceder que $K < L \vee N$. Pues al considerar a $K = (\{0, 1\}, \{\{0\}, \{1\}\})$, $L = (\{0\}, \{\{0\}\})$ y $N = (\{1\}, \{\{1\}\})$, entonces $K \leq L \vee N$, pero $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} \notin K$. Además, L y N son completos en K .

Definición 1.10. Dado un complejo simplicial no vacío $K = (V, P)$, consideremos el conjunto $|K| \subseteq \{\alpha : V \rightarrow [0, 1] \mid \alpha \text{ es función}\}$ tal que:

1. Para cada $\alpha \in |K|$, $\{v \in K \mid \alpha(v) \neq 0\}$ es un simplejo de K .
2. Para cada $\alpha \in |K|$, $\sum_{v \in K} \alpha(v) = 1$

Podemos observar que cada $\alpha \in |K|$, $\text{sop}(\alpha) = \{v \in K \mid \alpha(v) \neq 0\}$ es finito.

Nota 1.11. Por Proposición 1.8, sabemos que la unión e intersección de subcomplejos simpliciales es un complejo simplicial, con lo cual afirmamos que si consideramos una familia de subcomplejos $\{L_i = (V_i, P_i)\}_{i \in I}$, entonces $\bigcap_{j \in I} |L_j| = |\bigcap_{j \in I} L_j|$ y $\bigcup_{j \in I} |L_j| = |\bigcup_{j \in I} L_j|$.

En efecto, primero mostraremos que $\bigcap_{j \in I} |L_j| = |\bigcap_{j \in I} L_j|$. Sea $\alpha \in \bigcap_{j \in I} |L_j|$, esto equivale a que $\text{sop}(\alpha)$ es un simplejo de L_j para cada $j \in I$, con lo cual $\text{sop}(\alpha)$ es un simplejo de $\bigcap_{j \in I} L_j$ y así $\alpha \in |\bigcap_{j \in I} L_j|$.

Ahora, mostraremos que $\bigcup_{j \in I} |L_j| = |\bigcup_{j \in I} L_j|$. Sea $\alpha \in \bigcup_{j \in I} |L_j|$, esto equivale a que exista $k \in I$ tal que $\alpha \in |L_k|$ con lo cual $\text{sop}(\alpha)$ es un simplejo de $L_k \subseteq \bigcup_{j \in I} L_j$, esto pasa sí y sólo sí $\alpha \in |\bigcup_{j \in I} L_j|$.

Para cada $\alpha \in |K|$, llamaremos a $\alpha(v)$ como la v -ésima coordenada de α . Así generamos la métrica $d : |K| \times |K| \rightarrow \mathbb{R}$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v \in V} [\alpha(v) - \beta(v)]^2}.$$

La topología sobre $|K|$ es la generada por la métrica anteriormente expuesta, la cual llamaremos *topología métrica*. El conjunto $|K|$ con la topología métrica es denotado como $|K|_d$.

Definición 1.12. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Decimos que \mathcal{A} es *coherente con la topología de X* , si cumple que para cada $C \subseteq X$, C es abierto en X sí y sólo sí $C \cap A$ es abierto en A para cada $A \in \mathcal{A}$.

Sea X un espacio topológico y \mathcal{A} una cubierta abierta de X , entonces claramente \mathcal{A} es coherente con la topología de X .

Definición 1.13. Sean X un conjunto, I un conjunto de índices y una familia de funciones $\{f_\alpha : Y_\alpha \rightarrow X\}_{\alpha \in I}$, donde Y_α es un espacio topológico para cada $\alpha \in I$. La *topología final en X respecto a $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$* , es definida como:

$$\tau = \{U \subseteq X \mid f_\alpha^{-1}(U) \in \tau_{Y_\alpha}, \text{ para cada } \alpha \in I\}$$

Notemos que, para cada función $f_\alpha : Y_\alpha \rightarrow X$, se cumple que $f_\alpha^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $f_\alpha^{-1}(X) = Y_\alpha$ son abiertos en Y_α .

Dados τ_1 y τ_2 topologías de X , diremos que τ_1 es más fina que τ_2 , si $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Proposición 1.14. Sean X un conjunto, Y un espacio topológico y $f : Y \rightarrow X$ una función, entonces $\tau = \{U \subseteq X \mid f^{-1}(U) \in \tau_Y\}$ forma una topología para el conjunto X y dicha topología es la más fina que hace continua a la función f .

Demostración: Claramente, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $f^{-1}(X) = Y$ son abiertos en Y . Por otro lado, para cada $U, V \in \tau$, $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \in \tau_Y$. Por último, para cada familia de conjuntos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau$, $f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha) \in \tau_Y$. Esto justifica que $\tau = \{U \subseteq X \mid f^{-1}(U) \in \tau_Y\}$ forma una topología para el conjunto X .

Ahora sea τ' la topología más fina que hace continua a la función f , entonces para cada $U \in \tau'$, $f^{-1}(U) \in \tau_Y$ con lo cual $\tau' \subseteq \tau$,

pero por ser la más fina con esa propiedad, $\tau \subseteq \tau'$, por lo tanto, $\tau = \tau'$. \square

Podemos ver que la topología anteriormente descrita de la Proposición anterior es exactamente la *topología final en X respecto a la función f* .

Por la proposición anterior nos resulta natural establecer la siguiente pregunta: ¿Con qué topología de X cada función f_α es continua para cada $\alpha \in I$? Para ello, veamos el siguiente resultado:

Proposición 1.15. Sean X un conjunto y una familia de funciones $\{f_\alpha : Y_\alpha \rightarrow X\}_{\alpha \in I}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a) τ es la topología final de X con respecto a $\{f_\alpha\}$, es decir,

$$\tau = \{U \subseteq X \mid f_\alpha^{-1}(U) \in \tau_{Y_\alpha}, \text{ para cada } \alpha \in I\};$$

- b) τ es la topología más fina de X tal que cada una de las funciones f_α es continua

Demostración: a) \Rightarrow b) Similar a la proposición anterior, podemos demostrar que τ es una topología para el conjunto X .

Sea τ' la topología más fina de X tal que cada una de las funciones f_α es continua, entonces para cada $U \in \tau'$, $f_\alpha^{-1}(U) \in \tau_{Y_\alpha}$ para cada $\alpha \in I$, esto implica que $\tau' \subseteq \tau$ y puesto que τ' es la topología más fina con dicha propiedad $\tau \subseteq \tau'$. Por lo tanto, $\tau = \tau'$. b) \Rightarrow a) Es análogo. \square

Proposición 1.16. Sean X espacio topológico y $\mathcal{A} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a) El conjunto \mathcal{A} es coherente con X .
- b) τ coincide con la topología final con respecto a las funciones inclusiones $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$, para cada $\alpha \in I$. Esto es:

$$\tau = \{U \subseteq X \mid i_\alpha^{-1}(U) \in \tau_{X_\alpha}, \text{ para cada } \alpha \in I\}$$

- c) Para cada $C \subseteq X$, C es cerrado en X sí y sólo si $C \cap X_\alpha$ es cerrado en X_α para cada $\alpha \in I$.

Demostración:

a) \Rightarrow b) Por definición, C es abierto en X sí y sólo si $i_A^{-1}(C) = C \cap A$ es abierto en A , para cada $A \in \mathcal{A}$.

b) \Rightarrow a) Sea $U \subseteq X$ tal que $U \cap X_\alpha$ es un abierto en X_α para cada $\alpha \in I$, pero U no es abierto en X y sea τ' un conjunto que contiene a τ y U que es cerrado bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas, entonces τ' es más fina que τ y también hace continuas a las funciones $\{i_\alpha : X_\alpha \rightarrow X\}_{\alpha \in I}$. Esto contradice la proposición anterior.

a) \Leftrightarrow c) Sea C es cerrado en X sí y sólo si $X \setminus C$ es abierto en X , esto es equivalente a que $X_\alpha \cap (X \setminus C)$ es abierto en X_α para cada $\alpha \in I$, es decir $X_\alpha \setminus C$ es abierto en X_α para cada $\alpha \in I$. Lo anterior ocurre sí y sólo si $X \cap C$ es cerrado en X_α para cada $\alpha \in I$. \square

Dada una familia \mathcal{B} de subconjuntos de X , diremos que \mathcal{B} es localmente finita si para cada $x \in X$, existe una vecindad abierta U_x de x tal que $\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{B} \mid B \cap U_x \neq \emptyset\}$ es finito.

Notemos que si \mathcal{B} es una familia localmente finita, entonces $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} = \overline{\bigcup \mathcal{B}}$. Claramente, $B \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ para cada $B \in \mathcal{B}$, entonces $\overline{B} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{B}}$ para cada $B \in \mathcal{B}$, esto implica que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{B}}$. Ahora, consideremos $x \in \overline{\bigcup \mathcal{B}}$. Dado que \mathcal{B} es localmente finita, existe U_x tal que $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} \mid B \cap U_x \neq \emptyset\}$ es finito. Desde que $x \in \overline{\bigcup \mathcal{B}}$, entonces para cada vecindad U de x , se tiene que $U_x \cap U$ es vecindad de x y además,

$$\begin{aligned} \emptyset \neq U_x \cap U \cap \bigcup \mathcal{B} &= U_x \cap U \cap (\bigcup \mathcal{B}' \cup \bigcup_{B \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'} B) = \\ &= (U_x \cap U \cap \bigcup \mathcal{B}') \cup (U \cap U_x \cap \bigcup_{B \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'} B), \end{aligned}$$

Pero $U_x \cap \bigcup_{B \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'} B = \emptyset$ y $U_x \cap U \cap \bigcup \mathcal{B}' \subseteq U \cap \bigcup \mathcal{B}'$ para cada U vecindad de x . Como la cerradura de la unión de una familia finita de conjuntos es igual a la unión de sus cerraduras, entonces

$$x \in \overline{\bigcup \mathcal{B}} = \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'} \mathcal{B} \cup \bigcup \mathcal{B}'} = \emptyset \cup \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} \overline{B} \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}.$$

Por lo tanto, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} = \overline{\bigcup \mathcal{B}}$.

Ejemplo 1.17. Dados X un espacio topológico y \mathcal{B} una familia localmente finita de cerrados que es cubierta para X , afirmamos que \mathcal{B} es *coherente* con X .

En efecto, sea C un subconjunto de X , puesto que cada elemento $B \in \mathcal{B}$ es cerrado, como $C \cap B$ es cerrado en B para cada $B \in \mathcal{B}$ esto equivale a que $C \cap B$ es cerrado en X , pero $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} C \cap B$ es cerrado en X (esto, pues $\{C \cap B\}_{B \in \mathcal{B}}$ es una familia de cerrados localmente finita), pero como \mathcal{B} es una cubierta $C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} C \cap B$ es cerrado en X .

Una pequeña observación de la Definición 1.12, es que para demostrar que una familia de conjuntos \mathcal{A} sea coherente con un espacio topológico X , bastaría con demostrar la siguiente implicación:

“Para cada $C \subseteq X$; $C \cap A$ es abierto en A para cada $A \in \mathcal{A}$, entonces C es abierto en X .”

Sean X un espacio topológico y \mathcal{A} un conjunto coherente con X . Afirmamos que el conjunto $\mathcal{A}' = \{A' \supseteq A \mid A \in \mathcal{A}\}$ también es coherente, para ello consideremos $U \subseteq X$ tal que $U \cap A'$ es abierto en A' para cada $A' \in \mathcal{A}'$, entonces $U \cap A = U \cap (A' \cap A) = (U \cap A') \cap A$ es abierto en A para cada $A \in \mathcal{A}$ y por ser \mathcal{A} un conjunto coherente con X , entonces U es abierto en X .

Definición 1.18. Sean X un conjunto y $\{A_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tales que $X = \bigcup_{j \in J} A_j$, y con las siguientes propiedades

- Cada A_j es un espacio topológico.
- Para cada $j, k \in J$, la topología de subespacio del conjunto $A_j \cap A_k$ en A_j , coincide con la topología de subespacio del mismo conjunto $(A_j \cap A_k)$ en A_k .
- Para cada $j, k \in J$, $A_j \cap A_k$ es cerrado en A_j y A_k .

Entonces, la topología débil en X determinada por $\{A_j\}_{j \in J}$ es la topología cuyos conjuntos cerrados $F \subseteq X$ son tales que $F \cap A_j$ es cerrado en A_j para cada $j \in J$. Esta topología es también llamada *topología coherente determinada por $\{A_j\}_{j \in J}$* .

Definición 1.19. Dado un complejo simplicial $K = (V, P)$, para cada $S \in P$, definimos y denotamos al *simplejo cerrado* $|\mathbf{S}|$ como el conjunto:

$$|\mathbf{S}| = \{\alpha \in |K| \mid \text{sop}(\alpha) \subseteq S\}.$$

Observación 1.20. Afirmamos que $|\mathbf{S}|$ es en efecto cerrado en $|K|_d$. Pues al suponer lo contrario, podemos elegir $\psi \in Cl_{|K|_d}(|\mathbf{S}|) \setminus |\mathbf{S}|$, entonces $sop(\psi) \not\subseteq S$ y sea $v' \in sop(\psi) \setminus S$, con lo cual $\psi(v') > 0$. Por lo tanto, para cada $\gamma \in |\mathbf{S}|$, $\gamma(v') = 0$ y por desigualdad del triángulo $0 < \psi(v') \leq d(\gamma, \psi)$, esto es una contradicción. Por lo tanto, $Cl_{|K|_d}(|\mathbf{S}|) \setminus |\mathbf{S}| = \emptyset$ y así concluimos que $Cl_{|K|_d}(|\mathbf{S}|) \subseteq |\mathbf{S}|$.

En caso de que S sea un q -simplejo, hay una función biyectiva entre los conjuntos $|\mathbf{S}|$ y $H = \{x = (x_0, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1 \text{ y } \sum_{i=0}^q x_i = 1\}$. Con esto, podemos demostrar que $|\mathbf{S}|$ es compacto. En efecto, usando una idea similar al párrafo anterior, podemos demostrar que H es cerrado y claramente H es acotado. Por lo tanto, H es compacto. Podemos suponer, que $S = \{v_0, v_1, \dots, v_q\}$, entonces definimos $\varphi : |\mathbf{S}| \rightarrow H$ tal que $\varphi(\gamma) = (\gamma(v_0), \dots, \gamma(v_q))$ esta función es claramente biyectiva, veamos que es continua con la métrica euclidiana d_e . Dado $\epsilon > 0$, entonces para cada $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_q) = f(\psi_{\mathbf{x}})$ para algún $\psi_{\mathbf{x}} \in |\mathbf{S}|$, se tiene que

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_\epsilon(\mathbf{x})) &= \{\alpha \in |\mathbf{S}| \mid f(\alpha) \in B_\epsilon(\mathbf{x})\} = \{\alpha \in \\ &|\mathbf{S}| \mid d_e(f(\alpha), f(\psi_{\mathbf{x}})) < \epsilon\} = \{\alpha \in |\mathbf{S}| \mid |(\gamma(v_0), \dots, \gamma(v_q)) - \\ &(\psi_{\mathbf{x}}(v_0), \dots, \psi_{\mathbf{x}}(v_q))| < \epsilon\} = \{\alpha \in |\mathbf{S}| \mid d(\gamma, \psi_{\mathbf{x}}) < \epsilon\} = B_\epsilon(\psi_{\mathbf{x}}), \end{aligned}$$

por lo que φ es continua. Puesto que H es compacto, entonces $|\mathbf{S}|$ es compacto.

Sean $S_1, S_2 \in P$, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ó bien $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. En caso de que $S_1 \cap S_2$ es vacío $|\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2| = \emptyset$. En el otro caso $S_1 \cap S_2$ es un simplejo, así $|\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2| = |\mathbf{S}_1| \cap |\mathbf{S}_2|$. Para demostrar este hecho, sea $\alpha \in |\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2|$, es equivalente a que $sop(\alpha) \subseteq S_1 \cap S_2$, así $sop(\alpha) \subseteq S_1$ y $sop(\alpha) \subseteq S_2$, lo cual pasa sí y sólo sí $\alpha \in |\mathbf{S}_1| \cap |\mathbf{S}_2|$.

Además, $|\mathbf{S}_1|_d \cap |\mathbf{S}_2|_d$ es cerrado en los subespacios $|\mathbf{S}_1|_d$ y $|\mathbf{S}_2|_d$, además la topología de subespacio del conjunto $|\mathbf{S}_1|_d \cap |\mathbf{S}_2|_d$ en $|\mathbf{S}_1|_d$ coincide con la topología de subespacio en $|\mathbf{S}_2|_d$, lo que cumple las condiciones de la *Definición 2.6*, esto nos garantiza que hay una topología en $|K|$, que es coherente con $\mathcal{S} = \{|\mathbf{S}|_d \mid S \in P\}$. Al espacio topológico que es coherente con \mathcal{S} lo denotaremos como $|K|$, y le llamaremos *realización geométrica del complejo simplicial* K .

Teorema 1.21. Dados un espacio topológico X y un complejo simplicial $K = (V, P)$, una función $f : |K| \rightarrow X$ es continua en la topología coherente, sí y sólo sí $f|_{|s|} : |s|_d \rightarrow X$ es continua para cada $s \in P$.

Demostración:

\Rightarrow] Desde que $\{|s|_d \mid s \in K\}$ es coherente con K , entonces por la *Proposición 2.5* $i_{|s|_d} : |s|_d \rightarrow |K|$ es continua para cada $s \in P$ y consecuentemente $f|_{|s|} := f \circ i_{|s|_d}$ es también continua.

\Leftarrow] Por otro lado, consideremos la función $f : |K| \rightarrow X$. Desde que $f|_{|s|} : |s|_d \rightarrow X$ es continua para cada $s \in K$, entonces para cada $A \subseteq X$ abierto, $f|_{|s|}^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap |s|_d$ es abierto en $|s|_d$ para cada $s \in K$. Pero desde que el conjunto $\mathcal{S} = \{|s|_d \mid s \in P\}$ es coherente en $|K|$, entonces $f : |K| \rightarrow X$ es continua en la topología coherente. \square

Al considerar al complejo simplicial $K = (V, P)$, hemos visto que el esqueleto q -dimensional $K_q = (V, P_q)$ es un subcomplejo de K , entonces para cada $s \in P$, $s_q = \{s' \subseteq V \mid s' \subseteq s \text{ y } \dim(s') \leq q\}$, con lo cual $\mathcal{S}_q = \{|s|_d \mid s \in P_q\} = \{|s|_d \mid s \in P \text{ y } \dim(s) \leq q\}$.

Corolario 1.22. Dados un espacio topológico y $K = (V, P)$ un complejo simplicial, una función $f : |K| \rightarrow X$ es continua en la topología coherente sí y sólo sí $f : |K^q| \rightarrow X$ es continua en la topología coherente para cada $q \geq 0$.

Demostración:

\Rightarrow] Puesto que $f : |K| \rightarrow X$ es continua en la topología coherente, entonces por el teorema anterior $f|_{|s|} : |s|_d \rightarrow X$ es continua para cada $s \in P$. Particularmente, $f|_{|s|} : |s|_d \rightarrow X$ es continua para cada $s \in P_q$, así nuevamente por el teorema anterior $f : |K^q| \rightarrow X$ es continua en la topología coherente para cada $q \geq 0$.

\Leftarrow] Sea $s \in P$, entonces s es finito, podemos suponer sin pérdida de la generalidad que $\dim(s) = q$ con lo cual $s \in K_q$. Por otro lado, sabemos que $f : |K^q| \rightarrow X$ es continua en la topología coherente y, por el teorema anterior, $f|_{|s|}$ es continua. Nuevamente, por el teorema anterior $f : |K| \rightarrow X$ es continua. \square

Teorema 1.23. Para cada complejo simplicial $K = (V, P)$, el espacio (coherente) $|K|$ es Hausdorff.

Demostración: Sean $\psi, \gamma \in |K|$ tales que $\psi \neq \gamma$, entonces existe $v \in V$ tal que $\psi(v) \neq \gamma(v)$, supongamos sin pérdida de la generalidad que $\psi(v) < \gamma(v)$ y sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(v) < r < \gamma(v)$. Consideremos los siguientes conjuntos $\Psi = \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v) < r\}$ y $\Gamma = \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v) > r\}$ claramente son disjuntos. Notemos que Ψ y Γ son abiertos en $|K|_d$, sea $\alpha \in \Psi$, entonces $\alpha(v) < r$. Consideremos $t = r - \alpha(v)$ y $\epsilon = \min\{t\} \cup \{\alpha(v') \mid v' \in \text{sop}(\alpha)\}$, luego $B_\epsilon(\alpha) \subseteq \Psi$, con lo cual Ψ es abierto, de manera similar Γ es un conjunto abierto. Por lo anterior, podemos inferir que $|K|$ es Hausdorff. \square

Definición 1.24. Dado un complejo simplicial $K = (V, P)$, para cada $S \in P$ definimos el *simplejo abierto* $\langle \mathbf{S} \rangle \subseteq |K|$ como el siguiente conjunto

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \{\alpha \in |K| \mid \text{sop}(\alpha) = S\}.$$

Hemos visto anteriormente que el *simplejo cerrado* $|\mathbf{S}|$ es en efecto cerrado en $|K|_d$, pero el *simplejo abierto* $\langle \mathbf{S} \rangle$ no es necesariamente abierto en $|K|_d$. Analicemos el siguiente contraejemplo, supongamos que existe un simplejo S de un complejo simplicial K tal que $S \neq V$ y que $\dim(S) = m - 1$. Sean $w \in V \setminus \langle \mathbf{S} \rangle$ y $\alpha_S \in |K|$ tal que $\alpha_S(v) = \frac{1}{m}$ para cada $v \in S$. Ahora, sea $v' \in S$ fijo y para cada $n \in \mathbb{N}$ con $2n > m$, defínase $\alpha_n \in |K|$ tal que

$$\alpha_n(v) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{si } v \in S \setminus \{v'\} \\ \frac{1}{m} - \frac{1}{2n} & \text{si } v = v' \\ \frac{1}{2n} & \text{si } v = w \end{cases}$$

entonces $\alpha_n \notin \langle \mathbf{S} \rangle$ y además por la propiedad arquimediana para cada $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2n > m$ y $d(\alpha_S, \alpha_n) = \frac{1}{n} < \epsilon$. Por lo tanto, para cada $\epsilon > 0$, se tiene que $B_\epsilon(\alpha_S) \not\subseteq \langle \mathbf{S} \rangle$ y además $\alpha_S \in \langle \mathbf{S} \rangle$. Lo anterior nos garantiza que el *simplejo abierto* $\langle \mathbf{S} \rangle$ no es necesariamente abierto en $|K|_d$. Sin embargo, $\langle \mathbf{S} \rangle$ es abierto en $|\mathbf{S}|$, ya que $\langle \mathbf{S} \rangle = |\mathbf{S}| \setminus |\dot{\mathbf{S}}|$, $\dot{S} = \bigcup_{S' \subsetneq S} S'$ y como S es finito, entonces $|\dot{\mathbf{S}}|$ es cerrado en $|K|_d$ y, por tanto, también es cerrado en $|\mathbf{S}|$, con lo cual $\langle \mathbf{S} \rangle$ es abierto en $|\mathbf{S}|$.

Nota 1.25. Una pequeña observación es que cada $\alpha \in |K|$ pertenece a un único simplejo abierto $\langle \mathbf{S} \rangle$, por lo que el conjunto $\mathcal{C} = \{\langle \mathbf{S} \rangle \mid S \in P\}$ forma una partición del conjunto $|K|$.

Sea $A \subseteq |K|$ no vacío y tal que $A \subseteq |\mathbf{S}|$ para un simplejo S de K , luego podemos considerar el conjunto $\mathbf{S}_A = \bigcap \{S \mid A \subseteq |\mathbf{S}| \text{ y } S \text{ es un simplejo}\}$. Entonces dicho complejo simplicial es el mínimo (con respecto a la contención) tal que $A \subseteq |\mathbf{S}_A|$. Al simplejo S_A lo llamaremos *el transportador* de A en K . Notemos que si $A \subseteq \langle \mathbf{S} \rangle$, entonces *el transportador* de A en K es S . Particularmente, cada $\alpha \in |K|$ tiene como *transportador* al simplejo S tal que $\alpha \in \langle S \rangle$.

Lema 1.26. Si $A \subseteq |K|$, entonces A contiene un conjunto discreto en la *topología coherente*, que consiste de exactamente un punto para cada simplejo abierto cuya intersección con el conjunto A es no vacío.

Demostración: Consideremos el complejo simplicial $K = (V, P)$ y $A \subseteq |K|$, y defínase el conjunto $\mathcal{A} = \{s \in P \mid A \cap \langle s \rangle \neq \emptyset\}$. Consecuentemente, para cada $s \in \mathcal{A}$ tomemos un elemento fijo $\alpha_s \in A \cap \langle s \rangle$. Definamos el conjunto $\mathcal{A}' = \{\alpha_s \mid s \in \mathcal{A}\}$. Afirmamos que para cada $S \in P$, $\mathcal{A}' \cap |\mathbf{S}|$ es finito. Por ser $\mathcal{P} = \{\langle \mathbf{S} \rangle \mid S \in P\}$ una partición de $|K|$, entonces podemos escribir a $|\mathbf{S}| = \bigcup_{S' \subseteq S} \langle \mathbf{S}' \rangle$, así obtenemos que $\mathcal{A}' \cap |\mathbf{S}| = \mathcal{A}' \cap (\bigcup_{S' \subseteq S} \langle \mathbf{S}' \rangle) = \bigcup_{S' \subseteq S} \mathcal{A}' \cap \langle \mathbf{S}' \rangle = \bigcup_{S' \subseteq S} \alpha_{S'}$ y puesto que S es finito, entonces $\bigcup_{S' \subseteq S} \alpha_{S'}$ es finito.

Nuevamente, puesto que \mathcal{C} es una partición de conjuntos abiertos (en la topología coherente) de $|K|$, entonces \mathcal{A}' es discreto. Además, por ser $|K|$ un espacio Hausdorff, entonces $\{\alpha_s\}$ es un conjunto cerrado para cada $s \in P$. Por la finitud del conjunto $\mathcal{A}' \cap |\mathbf{S}|$, entonces dicho conjunto es cerrado.

De lo anterior, obtenemos que $\mathcal{A}' \cap |\mathbf{s}|$ es cerrado para cada $|\mathbf{s}| \in |K|$ sí y sólo sí \mathcal{A}' es cerrado en la topología coherente. Esto finaliza la demostración \square

Corolario 1.27. Cada conjunto compacto de $|K|$ está contenido en la unión de una cantidad finita de simplejos abiertos

Demostración: Sea $A \subseteq |K|$ un conjunto compacto. Por el lema anterior, consideremos los conjuntos $\mathcal{A} = \{s \in P \mid A \cap \langle s \rangle \neq \emptyset\}$

y $\mathcal{A}' = \{\alpha_s \mid s \in \mathcal{A}\}$. Notemos que \mathcal{A}' es discreto en la *topología coherente*. Al ser A compacto y, \mathcal{A}' un subconjunto cerrado y discreto de A , entonces \mathcal{A}' es finito y, por tanto, \mathcal{A} también es finito. Finalmente, obtenemos que $A \subseteq \bigcup_{s \in \mathcal{A}} \langle s \rangle$ \square

Los siguientes resultados son inmediatos del corolario anterior.

Corolario 1.28. Un complejo simplicial $K = (V, P)$ es finito si y sólo si $|K|$ es compacto.

Demostración: \Rightarrow] Puesto que K es finito, $|K| = \bigcup_{s \in P} |s|$ y la unión finita de compactos es compacto, se concluye $|K|$ es compacto.

\Leftarrow] Si $|K|$ es compacto, entonces $|K|$ está contenido en la unión de una cantidad finita de simplejos abiertos. Sea \mathcal{S} la familia de simplejos abiertos que cubre a $|K|$. Lo anterior nos garantiza que $K \subseteq \bigcup_{s \in \mathcal{S}} s$. \square

Corolario 1.29. Dados un complejo simplicial $K = (V, P)$ y A un subconjunto compacto de $|K|$, entonces $A \subseteq |K'|$ donde K' es un subcomplejo finito de K .

Demostración: Sea A un subconjunto compacto de $|K|$. Si consideramos el conjunto $\mathcal{A} = \{s \in P \mid A \cap \langle s \rangle \neq \emptyset\}$, entonces \mathcal{A} es finito y $A \subseteq \bigcup_{s \in \mathcal{A}} \langle s \rangle \subseteq \bigcup_{s \in \mathcal{A}} |s|$. Además, $\bigcup_{s \in \mathcal{A}} |s| \subseteq \bigcup_{s \in \mathcal{A}} s$ y por la *Proposición 2.2* $\bigcup_{s \in \mathcal{A}} s$ es un subcomplejo de K que es finito, esto sucede porque \mathcal{A} es finito. Eligiendo a $K' = \bigcup_{s \in \mathcal{A}} s$ obtenemos lo deseado \square

Diremos que un espacio topológico X es *compactamente generado* si existe una colección de conjuntos compactos $\{K_i\}_{i \in I}$ de X , de tal manera que $\{K_i\}_{i \in I}$ es *coherente con la topología* de X .

Afirmamos que, dados dos espacios topológicos Hausdorff X *compactamente generado* y Y compacto, entonces $X \times Y$ es *compactamente generado*. Para demostrar este hecho, consideremos una colección de conjuntos compactos $\mathcal{K} = \{K_i\}_{i \in I}$ de X que es coherente con X y definimos el conjunto $\mathcal{C} = \{K_i \times Y \mid K_i \in \mathcal{K}\}$. Sea $W \subseteq X \times Y$ tal que $W \cap C$ es abierto en C para cada $C \in \mathcal{C}$, entonces ahora sean $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ tales que $W = U \times V$, luego para cada $i \in I$, $W \cap C = (U \times V) \cap (K_i \times Y) = (U \cap K_i) \times (V \cap Y)$ es abierto en $C = K_i \times Y$, con lo cual $U \cap K_i$ es un abierto en K_i

para cada $i \in I$ y $V \cap Y = V$ es un abierto en Y , y como $\{K_i\}_{i \in I}$ es coherente con X , entonces U es un abierto en X , con lo cual $U \times V$ es un abierto en $X \times Y$.

Teorema 1.30. Dados un complejo simplicial $K = (V, P)$ y X un espacio topológico. Una función $f : |K| \times I \rightarrow X$ es continua sí y sólo sí $f|_{|\mathbf{s}| \times I} : |\mathbf{s}| \times I \rightarrow X$ para cada $s \in P$, donde I es el intervalo $[0, 1]$.

Demostración: Sea $f : |K| \times I \rightarrow X$. Como $|K|$ es compactamente generado y como I es compacto, entonces $|K| \times I$ es compactamente generado, digamos por el conjunto \mathcal{C} . Para cada $C \in \mathcal{C}$, existen compactos $T_C \subseteq |K|$ y $J_C \subseteq I$ tales que $C = T_C \times J_C$. Por el Corolario 2.13, existe $K_C := (V_C, P_C)$ subcomplejo finito de K tal que $T_C \subseteq |K_C|$, entonces $\{|K_C| \times I \mid C \in \mathcal{C}\}$ es coherente con $|K| \times I$ (esto, pues $C = T_C \times J_C \subseteq |K_C| \times I$ para cada $C \in \mathcal{C}$).

Por otro lado, veamos que $\{|\mathbf{s}| \times I \mid s \in P_C\}$ es coherente con $\{|K_C| \times I \mid C \in \mathcal{C}\}$ para cada $C \in \mathcal{C}$. Sea F subconjunto de $|K_C| \times I$, de tal forma que $F \cap (|\mathbf{s}| \times I)$ es cerrado en $|\mathbf{s}| \times I$ para cada $s \in P_C$. Puesto que $|\mathbf{s}|$ y I son compactos Hausdorff, obtenemos que $|\mathbf{s}| \times I$ también lo es. Podemos inferir de lo anterior que $|\mathbf{s}| \times I$ es cerrado en $|K_C| \times I$, con lo cual $F \cap (|\mathbf{s}| \times I)$ también es cerrado en $|K_C| \times I$ y como la unión finita de conjuntos cerrados es cerrado, entonces $F = \bigcup_s F \cap (|\mathbf{s}| \times I)$ es cerrado en $|K_C| \times I$. Por lo tanto, $|K| \times I$ es coherente con $\{|\mathbf{s}| \times I \mid s \in P\}$. Por lo que $f : |K| \times I \rightarrow X$ es continua sí y sólo sí para cada abierto U de X , $f^{-1}(U)$ es abierto en $|K| \times I$ lo cual es equivalente a que $f|_{|\mathbf{s}| \times I} := f^{-1}(U) \cap |\mathbf{s}| \times I$ es abierto en $|\mathbf{s}| \times I$ para cada $s \in P$ \square

Dados dos complejos simpliciales $K_1 = (V, P)$, $K_2 = (V_2, P_2)$ y un mapeo simplicial $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$. Para cada $\alpha \in |K_1|$, sea $K_\alpha = \varphi(\text{sop}(\alpha))$. Ahora, para cada $v' \in K_\alpha$, definimos una función $\alpha' : K_\alpha \rightarrow [0, 1]$ de tal manera que

$$\alpha'(v') = \sum_{\varphi(v)=v'} \alpha(v) \text{ y } v' \in K_\alpha.$$

Desde que φ es un mapeo simplicial y por construcción $\text{sop}(\alpha') = \varphi(\text{sop}(\alpha)) = K_\alpha$ es un simplejo, además que la unión disjunta $\bigcup_{v' \in K_\alpha} \varphi^{-1}(\{v'\}) = \text{sop}(\alpha)$, con lo cual

$$\sum_{v' \in K_2} \alpha'(v') = \sum_{v' \in K_\alpha} \sum_{\varphi(v)=v'} \alpha(v) = 1,$$

entonces $\alpha' \in |K_2|$.

Con lo anterior, podemos definir una función $|\varphi|_d : |K_1|_d \rightarrow |K_2|_d$ tal que $|\varphi|_d(\alpha) = \alpha'$. Notemos que esta función es continua. Sean $\gamma \in |K_1|$ y $\epsilon > 0$, entonces $B_\epsilon(|\varphi|_d(\gamma)) = \{\psi \in K_2 \mid d(\psi, \gamma') < \epsilon\}$. Ahora, supongamos sin pérdida de la generalidad, que $m = \dim(\text{sop}(\gamma))$. Por otro lado, para $\delta = \frac{\epsilon}{m}$ sea $\psi \in |\varphi|_d(B_\delta(\gamma))$, entonces para cada $v' \in \varphi(\text{sop}(\psi) \cup \text{sop}(\gamma))$, tenemos que

$$\sqrt{\sum_{\varphi(v)=v'} |\psi(v) - \gamma(v)|^2} \leq d(\psi', \gamma') < \epsilon$$

y con lo cual $d(\psi, \gamma) \leq \sum_{v' \in K_\alpha} \sqrt{\sum_{\varphi(v)=v'} |\psi(v) - \gamma(v)|^2} \leq md(\psi', \gamma') < m\epsilon = \delta$, esto nos garantiza la continuidad de $|\varphi|_d$.

Definición 1.31. Dado un complejo simplicial $K = (V, P)$, tomemos un vértice fijo $v' \in V$. Definimos *la estrella de v'* como el conjunto: $st(v') = \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v') \neq 0\}$.

Mostremos que $st(v')$ es abierto. Sean $\beta \in st(v')$ y $\epsilon = \beta(v')$. Afirmamos que $B_{\frac{\epsilon}{2}}(\beta) \subseteq st(v')$. Sea $\psi \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(\beta)$, entonces $|\psi(v') - \beta(v')| < d(\psi, \beta) < \frac{\epsilon}{2}$, así $0 < \frac{\beta(v')}{2} < \psi(v')$, esto implica que $\psi \in st(v')$. Así hemos demostrado que $B_{\frac{\epsilon}{2}}(\beta) \subseteq st(v')$ y, con ello, $st(v')$ es un conjunto abierto en $|K|_d$ y, por lo tanto, en $|K|$.

Otra observación del conjunto definido anteriormente, es que $st(v) = \bigcup \{\langle \mathbf{S} \rangle \mid v \in S\}$. En efecto, sea S un simplejo de K tal que $v \in S$. Si $\gamma \in \langle \mathbf{S} \rangle$ entonces $v \in \text{sop}(\gamma)$, con lo cual $v \in st(v)$ y así $\bigcup \{\langle \mathbf{S} \rangle \mid v \in S\} \subseteq st(v)$. Por otro lado, sea $\alpha \in st(v)$ esto es equivalente a que $v \in \text{sop}(\alpha)$, es decir, el *transportador de α* tiene como a elemento al vértice v , con lo cual $\alpha \in \langle \mathbf{S} \rangle$ para algún $S \in P$ de tal manera que $v \in S$. Y por lo tanto, $st(v) = \bigcup \{\langle \mathbf{S} \rangle \mid v \in S\}$.

Teorema 1.32. Sean $L < K$ y v_0, \dots, v_q vértices de K . Entonces, v_0, \dots, v_q son vértices de un simplejo de L si y sólo si

$$\bigcap_{0 \leq i \leq q} st(v_i) \cap |L| \neq \emptyset$$

Demostración: \Rightarrow] Sean v_0, \dots, v_q vértices de un simplejo S de L , entonces $\langle \mathbf{S} \rangle \subseteq st(v_i)$ para cada $i \in \{0, \dots, q\}$ y además $\langle \mathbf{S} \rangle \subseteq |L|$. Por lo tanto,

$$\bigcap_{0 \leq i \leq q} st(v_i) \cap |L| \neq \emptyset.$$

\Leftarrow] Ahora, supongamos que $\bigcap_{0 \leq i \leq q} st(v_i) \cap |L| \neq \emptyset$ y sea $\alpha \in \bigcap_{0 \leq i \leq q} st(v_i) \cap |L|$. Entonces, $v_i \in \text{sop}(\alpha)$ para cada $i \in \{0, \dots, q\}$ y el *transportador de α* es un simplejo S de L , notemos que $\{v_0, \dots, v_q\} \subseteq S$ forma una cara de S y, por lo tanto, un simplejo. Esto termina la demostración \square

Se dice que un complejo simplicial K es localmente finito si cada vértice v de K pertenece solamente a un número finito de simplejos de K .

Corolario 1.33. Si $K = (V, P)$ es un complejo simplicial finito, entonces $Id : |K| \longrightarrow |K|_d$ es un homeomorfismo.

Demostración: Para cada abierto U de $|K|_d$, $Id^{-1}(U) \cap |\mathbf{S}| = U \cap |\mathbf{S}|$ es un abierto en $|\mathbf{S}|$ para cada simplejo S de K , por lo que U es un abierto en la realización geométrica.

Ahora sea C un cerrado en $|K|$, entonces para cada simplejo S de K , $C \cap |\mathbf{S}|$ es un cerrado en $|\mathbf{S}| = |\mathbf{S}|_d$, por lo que es cerrado en $|K|_d$, como K es finito entonces $\{C \cap |\mathbf{S}|\}_{S \in P}$ es una familia finita de cerrados de $|K|_d$ y, por lo tanto, $C = \bigcup_{S \in P} C \cap |\mathbf{S}|$ es un cerrado en $|K|_d$. Por lo tanto, $Id : |K| \longrightarrow |K|_d$ es un homeomorfismo. \square

1.2. Complejos simpliciales cromáticos.

Definición 1.34. Dado un complejo simplicial $K = (V, P)$, diremos que un simplejo c de K es una *faceta*, si este es un simplejo maximal (con respecto a la contención). Es decir, para cada $p \in P$, si $c \subseteq p$ entonces $p = c$.

Podemos observar que $K = (\omega, [\omega]^{<\omega} \setminus \emptyset)$ no tiene facetas, pero $K = (\omega, [\omega]^{\leq 2} \setminus \emptyset)$ sí las tiene.

Definición 1.35. Diremos que un complejo simplicial es *puro* si todas sus facetas tienen la misma dimensión.

Como ejemplo, consideremos el conjunto

$$P' = \{\{n\} \mid n \in \omega\} \cup \{\{p, p+1\} \mid p \text{ es un número primo}\} \\ \cup \mathcal{P}(\{92, 93, 94, 95, 96\}).$$

Si consideramos el complejo simplicial $K = (\omega, P')$, entonces K no es puro, esto porque $\{101, 102\}$ es una faceta de K de dimensión 1; pero $\{92, 93, 94, 95, 96\}$ es una faceta de dimensión 4.

Definición 1.36. Sean $K = (V, P)$ un complejo simplicial y A un conjunto no vacío. Un mapeo cromático es una función $\chi : V \rightarrow A$, que cumple que para cualquier simplejo $S \in P$ y $v, v' \in S$ distintos, $\chi(v) \neq \chi(v')$.

Un complejo simplicial cromático es un triplete $K = (V, P, \chi)$, donde (V, P) es un complejo simplicial y $\chi : V \rightarrow A$ es un mapeo cromático. Diremos que un complejo simplicial cromático $K = (V, P, \chi)$ tiene coloración A ó es A -cromático, si $\text{Rang}(\chi) = A$.

Proposición 1.37. Sea $K = (V, P, \chi)$ un complejo simplicial cromático, donde $K = (V, P)$ es un complejo simplicial puro de dimensión m y $\chi : V \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$. Consideremos el conjunto $\mathcal{F}(K) = \{S \in P \mid S \text{ es una faceta de } K\}$ y elijamos $j \in \{0, 1, \dots, m\}$. Defínase la relación \sim_j en $\mathcal{F}(K)$ como sigue:

$$X \sim_j Y \text{ sí y sólo sí } j \in \chi(X \cap Y).$$

Entonces \sim_j es una relación de equivalencia.

Demostración: La relación \sim_j es reflexiva. Para verificar lo anterior, consideremos $X \in \mathcal{F}(K)$, por definición de mapeo cromático, se tiene que $j \in \{0, 1, \dots, m\} = \chi(X)$. Así obtenemos que para cada $X \in \mathcal{F}(K)$, $X \sim_j X$.

La relación \sim_j es simétrica. Ahora supongamos que $X \sim_j Y$, lo cual pasa sí y sólo sí $j \in \chi(X \cap Y) = \chi(Y \cap X)$, esto equivale a que $Y \sim_j X$.

La relación \sim_j es transitiva. Para verificar este hecho, supongamos que $X \sim_j Y$ y $Y \sim_j Z$, entonces $j \in \chi(X \cap Y)$ y $j \in \chi(Y \cap Z)$, con ello existen $y_1 \in X \cap Y$ y $y_2 \in Y \cap Z$ tales que $\chi(y_1) = j = \chi(y_2)$, pero como χ es un mapeo cromático, $y_1 = y_2$ con ello $j \in \chi(X \cap Z)$.

Con lo mostrado anteriormente, se concluye que \sim_j es una relación de equivalencia. \square

Note que $\bigcap_{i=1}^m \sim_i = Id$, puesto que \sim_j es reflexiva para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, entonces $Id \subseteq \bigcap_{i=1}^m \sim_i$. Por otro lado, sea $(X, Y) \in \bigcap_{i=1}^m \sim_i$, supongamos que X y Y son distintos con ello $\dim(X \cap Y) < \dim(X)$, entonces existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $j \notin \chi(X \cap Y)$, es decir $X \not\sim_j Y$ y así $(X, Y) \notin \bigcap_{i=1}^m \sim_i$. Por lo tanto, $X = Y$ y así concluimos que $\bigcap_{i=1}^m \sim_i = Id$.

Definición 1.38. Dados dos complejos simpliciales $K = (V, P)$ y $K' = (V', P')$, diremos que un *mapeo simplicial* $f : V \rightarrow V'$ es rígido si dicho mapeo preserva dimensión. Esto es, que para cada $X \in P$, X tiene el mismo número de elementos que el conjunto $f(X)$ ($|f(X)| = |X|$).

Dados dos mapeos cromáticos χ de K y χ' de K' , diremos que un *mapeo simplicial* $f : K \rightarrow K'$, es un *morfismo cromático* si este preserva color. Esto es, que para cada $v \in V$, $\chi'(f(v)) = \chi(v)$.

Diremos que un morfismo cromático $f : K \rightarrow K'$ es un isomorfismo, si f^{-1} existe y además preserva el color. En tal caso, diremos que K y K' son isomorfos, lo cual lo denotaremos por $K \cong K'$.

Notemos que si $K = (V, P, \chi)$ y $K' = (V', P', \chi')$ son complejos simpliciales cromáticos, cualquier *morfismo cromático* $f : K \rightarrow K'$ siempre es un *mapeo simplicial rígido*. Para demostrar este hecho, consideremos $X \in P$, entonces $\chi(X) = \chi'(f(X))$. Por otro lado, como χ es un mapeo cromático $|\chi(X)| = \sum_{x \in X} |\chi(\{x\})| = \sum_{x \in X} 1 = |X|$, de manera similar $|\chi'(Y)| = |Y|$ para cada $Y \in P'$, con lo cual $|f(X)| = |\chi'(f(X))| = |\chi(X)| = |X|$.

Corolario 1.39. Sean $K = (V, P, \chi)$, $K' = (V', P', \chi')$ y $K'' = (V'', P'', \chi'')$ complejos simpliciales cromáticos, también sean $f : K \rightarrow K'$ y $g : K' \rightarrow K''$ *morfismos cromáticos*. Entonces, $g \circ f : K \rightarrow K''$ es un *morfismo cromático*.

Demostración: Primero, no es difícil observar que $g \circ f$ es un *mapeo simplicial*. Por otro lado, como $f(v) \in V'$ para cada $v \in V$, entonces $\chi''(g \circ f(v)) = \chi''(g(f(v))) = \chi'(f(v)) = \chi(v)$ \square

Por definición de *complejo simplicial cromático* y por el corolario anterior, podemos considerar la categoría de los complejos simpliciales cromáticos \mathcal{S}_A , donde:

- $ob(\mathcal{S}_A)$ es la clase de los complejos simpliciales puros y cromáticos con coloración A .
- $mor(\mathcal{S}_A)$ es la colección de todos los morfismos cromáticos.
- Para cada $K = (V, P, \chi) \in ob(\mathcal{S}_A)$, definimos $1_K : K \rightarrow K$ de manera natural. Es decir, $1_K(v) = v$ para cada $v \in V$.

Capítulo 2

Un breve estudio de la lógica modal.

Uno de los primeros estudios formales de la lógica fueron generados por los filósofos griegos *Aristóteles* y *Plátón* generando la ahora conocida como lógica aristotélica uno de los precursores de la *lógica clásica*, motivados para dar coherencia a las ideas, argumentos y pensamientos de las conversaciones y discusiones.

El siguiente capítulo está basado en los trabajos de Molina Vázquez (ver [15]) y Roderos Valle (ver [13]).

2.1. Un breve resumen de la lógica clásica.

Para definir una Lógica, se define un lenguaje junto con un alfabeto y reglas gramaticales de formación de fórmulas, y mediante interpretaciones semánticas se atribuye un significado a las expresiones del lenguaje. Por medio de estas interpretaciones, podemos decir que de ciertos conjuntos de fórmulas se infieren otras fórmulas. Es decir, que dichas fórmulas son consecuencia semántica de las hipótesis consideradas.

$$\text{Lógica} = \text{Gramática} + \text{Semántica}$$

Antes que nada, primero presentaremos cómo es la lógica proposicional clásica.

Primero definiremos los elementos básicos del lenguaje, consideremos un conjunto numerable $P = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, a los elementos

de P les llamaremos proposiciones constantes o átomos, un conjunto de conectivos $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ y dos símbolos de agrupación “(” y “)”. Las proposiciones atómicas, los conectivos y los paréntesis formarán el alfabeto del lenguaje de la lógica proposicional clásica. A continuación describiremos cómo se pueden formar fórmulas.

2.1.1. Sintaxis, semántica y reglas de inferencia.

Definición 2.1. El conjunto \mathcal{L} de fórmulas en \mathcal{L} es el conjunto más pequeño que es cerrado mediante las siguientes reglas sintácticas:

- a) Para cada $p_j \in P$, entonces $p_j \in \mathcal{L}$;
- b) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$, entonces $(\varphi) \wedge (\psi), \neg(\varphi) \in \mathcal{L}$.

El uso de paréntesis es necesario, pero en algunas ocasiones resulta engorroso su uso y en algunos casos su lectura. Por ejemplo, la fórmula $\neg(\neg(\neg(\neg(\varphi)) \vee \psi))$ la podemos simplificar de la siguiente manera $\neg\neg(\neg\neg\varphi \vee \psi)$. Por otro lado, la fórmula $\neg((\neg(\varphi)) \vee (\psi))$ no es la misma que la fórmula $(\neg(\neg(\varphi))) \vee (\psi)$.

¿Cuándo podemos omitir el uso de paréntesis? Cuando tenemos una fórmula negada $\neg(\varphi)$, podemos escribirla de la siguiente manera $\neg\varphi$; cada que tenemos un símbolo conectivo distinto de la negación, las fórmulas $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \rightarrow (\psi)$, $(\varphi) \wedge (\psi)$ y $(\varphi) \leftrightarrow (\psi)$ de manera respectiva podemos reescribirlas de la siguiente manera $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \wedge \psi$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$. A partir de este momento omitiremos el uso de paréntesis cuando sea necesario.

A lo hecho en la definición previa se le conoce como sintaxis de la *lógica proposicional clásica*. A las letras proposicionales las denotaremos como p_i y a las fórmulas más complejas con letras griegas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$, etcétera.

A continuación, hablaremos de cómo interpretar dichas fórmulas en un modelo adecuado, a saber, una álgebra booleana.

Definición 2.2. Un modelo es un par $\mathfrak{M} = (M, \|\cdot\|)$ donde M es un conjunto no vacío y $\|\cdot\| : P \rightarrow \mathcal{P}(M)$.

En caso de que el conjunto M sea finito, diremos que el modelo \mathfrak{M} es un modelo finito.

Por la definición previa, podemos interpretar la validez de una fórmula del *cálculo proposicional clásico*.

Definición 2.3. Sea $\mathfrak{M} = (M, \|\cdot\|)$ un modelo. Para cada fórmula φ del lenguaje \mathcal{L} , definimos por inducción sobre la complejidad de la fórmula la relación $\mathfrak{M} \models \varphi$, como sigue:

- Si $\varphi := p_j$ es una fórmula atómica, entonces $\mathfrak{M} \models p_j$ sii $p_j \in \|x\|$;
- Si $\varphi := \gamma \wedge \psi$, entonces $\mathfrak{M} \models (\gamma \wedge \psi)$ sii $\mathfrak{M} \models \gamma$ y $\mathfrak{M} \models \psi$;
- Si $\varphi := \neg\psi$, entonces $\mathfrak{M} \models \neg\psi$ sii no se cumple $\mathfrak{M} \models \psi$.

Diremos que una fórmula φ es verdadera en el modelo \mathfrak{M} , si $\mathfrak{M} \models \varphi$.

Una herramienta muy útil para argumentar razonamientos lógicos, son las denominadas *reglas de inferencia*.

Definición 2.4. Una *regla de inferencia* es una función $\Phi : \mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{L}$ que toma n elementos del lenguaje \mathcal{L} que llamaremos *premisas*, analiza dichas fórmulas y nos devuelve otro elemento en nuestro conjunto de fórmulas \mathcal{L} . Al resultado de valuar dichas premisas en la función, le llamaremos *conclusión*.

Si consideramos una *regla de inferencia* $\Phi : \mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{L}$, podemos representar dicha función de la siguiente manera:

$$\frac{\text{Premisa 1} \quad \text{Premisa 2} \quad \dots \quad \text{Premisa } n}{\text{Conclusión}} \Phi$$

Algunos ejemplos de reglas de inferencia son los siguientes:

- *Modus Ponens*: Si $\varphi \rightarrow \psi$ y φ son ciertas, entonces ψ es cierta.

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi} MP$$

- *Modus Tollens*: Si $\varphi \rightarrow \psi$ y $\neg\psi$ son ciertas, entonces $\neg\varphi$ es cierta.

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi} MT$$

- *Silogismo Hipotético*: Si $\varphi \rightarrow \psi$ y $\psi \rightarrow \gamma$ son ciertas, entonces $\varphi \rightarrow \gamma$ es cierta.

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \psi \rightarrow \gamma}{\varphi \rightarrow \gamma} SH$$

- *Silogismo Disyuntivo*: Si $\varphi \vee \psi$ es cierta, entonces φ es cierta.

$$\frac{\varphi \vee \psi}{\varphi} SD$$

- *Dilema constructivo*: Si $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\gamma \rightarrow \theta)$ y $\psi \vee \gamma$ son ciertas, entonces $\psi \vee \theta$ es cierta.

$$\frac{(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\gamma \rightarrow \theta) \quad \psi \vee \gamma}{\psi \vee \theta} DC$$

Definición 2.5. Un sistema lógico es una estructura que consiste de lo siguiente:

- *Un alfabeto \mathcal{L}* ; que consiste de un conjunto de proposiciones atómicas, conectivos y símbolos de agrupación.
- *Una sintaxis*; que consiste de las reglas para formar fórmulas más complejas con los símbolos del alfabeto.
- Un conjunto de *reglas de inferencia*; que nos permite sacar conclusiones de ciertas fórmulas de nuestro lenguaje.
- Un conjunto de fórmulas que llamaremos *axiomas*; que por medio de este conjunto podemos obtener conclusiones válidas del sistema por medio de los elementos del conjunto de axiomas y aplicando reglas de inferencia.
- *Una semántica*; que consiste de una función que toma elementos de nuestro lenguaje \mathcal{L} y los relaciona en un modelo matemático ya establecido.

Uno de los objetos de estudio más importantes, no solo de la lógica, sino de las matemáticas, son los teoremas, particularmente de fórmulas sintácticamente válidas. Para entender este concepto, veamos lo siguiente.

Definición 2.6. Consideremos φ una fórmula Γ un conjunto de fórmulas, diremos que φ es consecuencia lógica del conjunto Γ , si existe una sucesión de fórmulas $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ tal que $\gamma_k = \varphi$ y para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, $\gamma_i \in \Gamma$ ó bien γ_i es un axioma del sistema axiomático, ó bien es consecuencia de aplicar una regla de inferencia sobre los elementos anteriores a la sucesión. Denotaremos este hecho como $\Gamma \vdash \varphi$.

En caso de que el conjunto $\Gamma = \emptyset$, escribimos $\vdash \varphi$.

Con lo expuesto anteriormente, el sistema lógico del cálculo proposicional clásico, consiste del lenguaje expuesto en la Definición 2.1, su semántica se puede interpretar como las ya conocidas tablas de verdad y su conjunto de axiomas es el siguiente:

- $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$
- $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma))$
- $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Añadiendo, como única regla de inferencia *Modus Ponens*.

2.2. Lógica modal.

Con el tiempo, *Ockham* y *Duns Scotus* desarrollaron algunas observaciones del trabajo de Aristóteles. Posteriormente, el filósofo y catedrático estadounidense *Clarence Irving Lewis* dio un estudio más profundo de la lógica modal, tanto así que es considerado el padre de la lógica modal moderna.

En la década de los 60's, *Saul Kripke* desarrolló una semántica por medio de un conjunto de mundos posibles. A estos objetos se les denominó modelos de Kripke, los cuales nos permitieron un mayor acercamiento a estas lógicas no clásicas.

¿Qué es una lógica modal?

Para entender esta nueva lógica, primero hablemos de la lógica clásica de primer orden. Dicha lógica es la que se obtiene tomando la lógica proposicional clásica añadiendo los cuantificadores universales \forall y existencial \exists . Esta lógica nos permite un estudio de las proposiciones universales o existenciales, como ejemplo:

- *Todos los seres vivos respiran.*

- *Existen tacos sin doble tortilla y que no tienen cebolla.*
- *Todos los gatos tienen pelo, o existe un gato sin pelo.*

El detalle en la lógica clásica de primer orden es que es muy restrictiva, por ejemplo el enunciado “*Todos los días del mes de julio llueve*” no sería cierto en caso de que en uno de esos días no llueva, por otro lado, si lo reescribimos como “*Es necesario que en los días del mes de julio llueva*” es más probable que sea cierto. De otra manera, obtenemos dos razonamientos distintos cuando analizamos los siguientes enunciados “*Existen los tacos con doble tortilla*” y “*Son posibles los tacos con doble tortilla*”, mientras que en la primera proposición es cierta si existe un taco con doble tortilla, pero en la segunda proposición es cierta si son posibles los tacos de doble tortilla. Las situaciones de necesidad y posibilidad son difíciles de representar en la lógica clásica, por esta misma razón es muy útil expresar estas situaciones en una lógica diferente a saber la lógica modal.

Una forma de obtener una lógica modal, es sustituyendo los cuantificadores \forall y \exists , por nuevos símbolos que llamaremos operadores modales de posibilidad \square y necesidad \diamond , que en cierta parte tienen el mismo comportamiento que los cuantificadores. Por ejemplo, la fórmula $\square\varphi$ se lee como “*Es necesario φ* ” ó “*Es necesario que se cumpla φ* ”.

2.2.1. Sintaxis y semántica.

Consideremos un conjunto $P = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a los elementos de P los llamaremos proposiciones constantes ó átomos; en caso de que dicho conjunto sea finito, $P = \{p_0, \dots, p_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. Nos referiremos a las proposiciones constantes como proposiciones *atómicas*. También consideremos dos símbolos \square y \diamond en nuestro lenguaje, a los cuales llamaremos operadores modales, donde los símbolos \square y \diamond expresan respectivamente la necesidad y la posibilidad. Por último, consideremos un conjunto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow\}$ de símbolos conectivos y dos símbolos de agrupación “(” y “)”.

Definición 2.7. El conjunto \mathcal{L} de fórmulas en \mathcal{L} es el conjunto más pequeño tal que:

- a) Para cada $p_j \in P$, entonces $p_j \in \mathcal{L}$;

- b) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$, entonces $(\varphi) \wedge (\psi) \in \mathcal{L}$;
- c) Si $\varphi \in \mathcal{L}_\gamma$, entonces $\Box\varphi, \Diamond\varphi \in \mathcal{L}$.

Cuando tenemos fórmulas de la forma $\Box(\varphi)$ y $\Diamond(\varphi)$, que podemos reescribirlas como $\Box\varphi$ y $\Diamond\varphi$.

Por otro lado, la fórmula $\Box\varphi$ se lee como “*Es necesario φ* ” y la fórmula $\Diamond\varphi$ se lee como “*Es posible φ* ”.

Similar al lenguaje de la lógica proposicional clásica las fórmulas $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$ son abreviaciones de las siguientes fórmulas respectivamente $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, $\neg\varphi \vee \psi$ y $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$. Representaremos al *valor de verdad falso* $\perp = \varphi \wedge \neg\varphi$ y el *valor de verdad verdadero* $\top = \neg\perp$.

Definición 2.8. Un marco $\mathbf{M} = (M, R)$ es un par que consta de un conjunto no vacío M que llamaremos *conjunto de mundos* y una relación binaria R en el conjunto M .

Ahora que tenemos el lenguaje y los marcos, necesitamos una herramienta que nos permita dar una interpretación de a los elementos de nuestro lenguaje. Para ello, vemos lo siguiente.

Definición 2.9. Un modelo relacional es un triplete $\mathfrak{M} = (M, R, \|\cdot\|)$ donde (M, R) es un marco y $\|\cdot\| : P \rightarrow \mathcal{P}(M)$.

En caso de que el conjunto M sea finito, diremos que el modelo relacional \mathfrak{M} es un modelo finito.

La función $\|\cdot\|$ es llamada función de valuación.

Por otro lado, un modelo relacional puntual es un par (\mathfrak{M}, x) donde $\mathfrak{M} = (M, R, \|\cdot\|)$ es un modelo relacional y $x \in M$. También definimos de manera similar el modelo relacional multi-puntual como el par (\mathfrak{M}, M') donde $M' \subseteq M$.

Definición 2.10. Sean $\mathfrak{M} = (M, R, \|\cdot\|)$ un modelo relacional y $x \in M$. Para cada fórmula φ del lenguaje \mathcal{L} , definimos por inducción sobre la complejidad de la fórmula la relación $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$, como sigue:

- Si $\varphi := p_j$ es una fórmula atómica, entonces $(\mathfrak{M}, x) \models p_j$ sii $p_j \in \|x\|$;
- Si $\varphi := \gamma \wedge \psi$, entonces $(\mathfrak{M}, x) \models (\gamma \wedge \psi)$ sii $(\mathfrak{M}, x) \models \gamma$ y $(\mathfrak{M}, x) \models \psi$;

- Si $\varphi := \neg\psi$, entonces $(\mathfrak{M}, x) \models \neg\psi$ sii no se cumple $(\mathfrak{M}, x) \models \psi$;
- Si $\varphi := \Box\psi$, entonces $(\mathfrak{M}, x) \models \Box\psi$ sii $(\mathfrak{M}, y) \models \psi$ para cada $y \in M$ tal que xRy ;
- Si $\varphi := \Diamond\psi$, entonces $(\mathfrak{M}, x) \models \Diamond\psi$ sii $(\mathfrak{M}, y) \models \psi$ para algún $y \in M$ tal que xRy ;

Escribimos $\mathfrak{M} \models \varphi$, si $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$ para cada $x \in M$.

2.2.2. Sistemas lógicos modales.

A continuación expondremos unos de los sistemas lógicos más importantes de la lógica modal, a saber el de la *lógica modal mínima*, $S4$ y $S5$.

El sistema lógico de la *lógica modal mínima* ó *lógica K* tiene como alfabeto el expuesto al principio de la Sección 2.2.1, como sintaxis el descrito en la Definición 2.7 y la semántica son los modelos relacionales. Tomando el mismo conjunto de axiomas del cálculo proposicional clásico, se le agrega el *axioma de distribución* ó *axioma K*:

$$\text{Axioma de distribución: } \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$$

formando así el conjunto de axiomas de la *lógica modal mínima*. Por último, como reglas de inferencia tomaremos a *Modus Ponens* (MP) y *Necesidad* (N), donde la regla de *Necesidad* tiene como regla de correspondencia la siguiente:

$$\frac{\Box\varphi}{\varphi} N$$

La letra K de dicha lógica se da en honor al matemático estadounidense *Saúl Kripke*.

Para obtener el sistema lógico de la *lógica modal S4* basta tomar la *lógica modal mínima* y agregar a su conjunto de axiomas, los siguientes dos axiomas:

- *Axioma de reflexividad*: $\Box\varphi \rightarrow \varphi$.

- *Axioma de transitividad:* $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$

Para obtener el sistema lógico de la *lógica modal S5* basta tomar la *lógica modal S4* y agregar a su conjunto de axiomas, el siguiente axioma:

$$\text{Axioma de simetría: } \Box(\varphi \rightarrow \Diamond\varphi)$$

Una manera de representar lo anterior descrito es tomando un sistema lógico S y un axioma φ , generando la menor lógica que contiene al conjunto $S \cup \{\varphi\}$ denotado como $S + (\varphi)$, así podemos representar lo visto previamente como:

- $S4 = K + (\Box\varphi \rightarrow \varphi) + (\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi)$
- $S5 = S4 + (\Box(\varphi \rightarrow \Diamond\varphi))$

Todo lo hecho en este capítulo lo podemos representar en la Tabla 2.1.

2.2.3. Modelos de Alexandroff.

A continuación presentaremos una semántica adecuada para $S4$ que es sólida y completa para dicho sistema lógico. En este trabajo nos centraremos en el estudio semántico de ciertas lógicas, particularmente solo se trabajará en la solidez de dichos sistemas lógicos. En caso de que el lector quiera verificar la completitud de la lógica $S4$, puede consultar el trabajo de Molina Vázquez (ver [15]).

Definición 2.11. Diremos que un sistema lógico es sólido si para cada fórmula φ , tal que $\vdash \varphi$, entonces $\models \varphi$.

A continuación presentaremos los objetos de estudio de esta sección que nos permiten dar una semántica al sistema lógico $S4$.

Definición 2.12. Un marco de Alexandroff es un marco $\mathbf{M} = (M, \preceq)$, donde M es un conjunto no vacío, \preceq es una relación reflexiva y transitiva sobre M .

Por otro lado, un modelo de Alexandroff es un modelo relacional $\mathfrak{M} = (\mathbf{M}, \|\cdot\|)$, donde \mathbf{M} es un marco de Alexandroff.

Diremos que el marco de Alexandroff $\mathbf{M} = (M, \preceq)$ es finito si M es finito.

Sistema Axiomático	Axiomas	Reglas de Inferencia
Lógica Proposicional Clásica (LPC)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ ▪ $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma))$ ▪ $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ 	<i>Modus Ponens</i> : Si φ y $\varphi \rightarrow \psi$ son ciertos, entonces ψ es cierto
Lógica Modal Mínima (K)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Axiomas de LPC. ▪ Axioma K: $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$ 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ <i>Modus Ponens</i>. ▪ <i>Necesidad</i>: Si φ es verdadero, entonces $\Box\varphi$ también es verdadero.
Lógica S4	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Axiomas de K. ▪ <i>Reflexividad</i>: $\Box\varphi \rightarrow \varphi$. ▪ <i>Transitividad</i>: $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ <i>Modus Ponens</i>. ▪ <i>Necesidad</i>.
Lógica S5	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Axiomas de S4. ▪ <i>Simetría</i>: $\Box(\varphi \rightarrow \Diamond\varphi)$. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ <i>Modus Ponens</i>. ▪ <i>Necesidad</i>.

Tabla 2.1: Sistema Axiomático de la Lógica S5

Proposición 2.13. El sistema de axiomático S4 es sólido en la clase de los modelos de Alexandroff.

Demostración: Mostremos que cada modelo de Alexandroff $\mathfrak{M} = (M, \preceq, \|\cdot\|)$, se satisface $\mathfrak{M} \models \theta$ para cada fórmula θ de S4.

Para $\theta = (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$; supongamos que $\mathfrak{M} \models (\varphi \wedge \psi)$, esto es equivalente a que $\mathfrak{M} \models \varphi$ y $\mathfrak{M} \models \psi$, particularmente $\mathfrak{M} \models \varphi$. Así hemos demostrado que $\mathfrak{M} \models (\varphi \wedge \psi)$ implica que $\mathfrak{M} \models \varphi$ y por lo tanto $\mathfrak{M} \models \theta$.

Para $\theta = ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma))$; Supongamos que $\mathfrak{M} \not\models ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma))$, esto equivale a que $\mathfrak{M} \models (\varphi \rightarrow \psi)$ y $\mathfrak{M} \not\models (\psi \rightarrow \gamma)$, así $\mathfrak{M} \models \psi$, pero $\mathfrak{M} \not\models \gamma$, esto fuerza a que $\mathfrak{M} \models \varphi$, así $\mathfrak{M} \not\models (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$. Por lo tanto, $\mathfrak{M} \models \theta$.

Para $\theta = (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$; Supongamos que $\mathfrak{M} \not\models (\psi \rightarrow \varphi)$, entonces $\mathfrak{M} \models \psi$ y $\mathfrak{M} \not\models \varphi$, lo cual es equivalente a que $\mathfrak{M} \not\models \neg\psi$ y $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$, con lo cual $\mathfrak{M} \not\models (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$. Por lo tanto, $\mathfrak{M} \models \theta$.

Para $\theta = \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$; Supongamos que $\mathfrak{M} \models \Box(\varphi \rightarrow \psi)$, entonces para cada $x \in M$; $(\mathfrak{M}, x) \models \Box(\varphi \rightarrow \psi)$, por definición de modelo relacional, $(\mathfrak{M}, y) \models \varphi \rightarrow \psi$ para cada $y \in M$ tal que xRy , nuevamente por definición de modelo relacional, $(\mathfrak{M}, y) \not\models \varphi$ ó $(\mathfrak{M}, y) \models \psi$ para cada $y \in M$ tal que xRy , implica que $(\mathfrak{M}, x) \not\models \Box\varphi$ ó $(\mathfrak{M}, x) \models \Box\psi$ para cada $x \in M$. Así $(\mathfrak{M}, X) \models \Box\varphi \rightarrow \Box\psi$ para cada $x \in M$. Por lo tanto, $\mathfrak{M} \models \theta$.

(*Reflexividad*) Para $\theta = \Box\varphi \rightarrow \varphi$; Supongamos que $\mathfrak{M} \models \Box\varphi$, entonces para toda $x \in M$; $(\mathfrak{M}, x) \models \Box\varphi$, por definición de modelo relacional, $(\mathfrak{M}, y) \models \varphi$ para cada $y \in M$ tal que xRy , por la reflexividad de la relación R tenemos $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$ y con ello para cada $x \in M$, $(\mathfrak{M}, x) \models \Box\varphi \rightarrow \varphi$. Por lo tanto, $\mathfrak{M} \models \theta$.

(*Transitividad*) Para $\theta = \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$; Supongamos que $\mathfrak{M} \models \Box\varphi$, entonces para toda $x \in M$; $(\mathfrak{M}, X) \models \Box\varphi$, por definición de modelo relacional, $(\mathfrak{M}, y) \models \varphi$ para cada $y \in M$ tal que xRy , por la transitividad de la relación R , para cada $z \in M$ tal que yRz , se tiene que $(\mathfrak{M}, z) \models \varphi$, entonces $(\mathfrak{M}, y) \models \Box\varphi$ para cada faceta y de \mathfrak{M} tal que xRy y así $(\mathfrak{M}, x) \models \Box\Box\varphi$ para cada $x \in M$. Por lo tanto, $\mathfrak{M} \models \theta$.

(*Modus Ponens*) Si se cumplen $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ y $\mathfrak{M} \models \varphi$, entonces $\mathfrak{M} \models \psi$. Supongamos que $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ y $\mathfrak{M} \models \varphi$, entonces cómo se cumple que $\mathfrak{M} \models \varphi$, esto fuerza a que $\mathfrak{M} \models \psi$ sea verdadero.

(*Necesidad*) Vamos a demostrar que si se cumple $\mathfrak{M} \models \varphi$, entonces se cumple $\mathfrak{M} \models \Box\varphi$. Supongamos que se cumple $\mathfrak{M} \models \varphi$, entonces para cada $x \in M$, se tiene que $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$, particularmente para cada $y \in M$ tal que xRy , tenemos que $(\mathfrak{M}, y) \models \varphi$, con lo cual $(\mathfrak{M}, x) \models \Box\varphi$ para cada $x \in M$. Por lo tanto, $\mathfrak{M} \models \Box\varphi$. \square

No es difícil mostrar que si la relación R es simétrica, se cumple $\mathfrak{M} \models \Box(\varphi \rightarrow \Diamond\varphi)$ sea cierto, pero lo observaremos con más detenimiento este razonamiento en el siguiente capítulo.

A continuación presentaremos otra semántica que usa a un cierto tipo de espacios topológicos, que nos permiten ver de manera visual cuando un argumento es cierto de manera semántica.

Definición 2.14. Dado un espacio topológico (X, τ) , diremos que

(X, τ) es un espacio de *Alexandroff* si para cada familia arbitraria de abiertos $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, $\bigcap_{i \in I} A_i \in \tau$

Si consideremos un conjunto X , junto con una relación binaria R , podemos definir un conjunto

$$\tau_R = \{A \subseteq X \mid \text{Si } x \in A, \text{ y } xRy, \text{ entonces } y \in A\}.$$

Cuando la relación R es reflexiva y transitiva, el conjunto τ_R es una topología para el conjunto X y, además dicho espacio es de *Alexandroff*, lo cual analizaremos en el siguiente resultado.

Teorema 2.15. Consideremos un conjunto X y R una relación binaria en X que es reflexiva y transitiva, entonces τ_R es un espacio de Alexandroff.

Demostración: Por vacuidad $\emptyset \in \tau_R$ y por ser R una relación reflexiva $X \in \tau_R$. Ahora, consideremos una familia de conjuntos $\{A_i\} \subseteq \tau_R$. Sea $x \in \bigcup_{i \in I} A_i = A$, si consideremos $y \in X$ tal que xRy , entonces existe $j \in I$ tal que $x \in A_j$ y como $A_j \in \tau_R$, esto implica que $y \in A_j \subseteq A$ y por lo tanto $A \in \tau_R$; Ahora, sea $x \in \bigcap_{i \in I} A_i = B$ y $y \in X$ tal que xRy , entonces para cada $i \in I$, $y \in A_i \subseteq B$, entonces $B \in \tau_R$. \square

Dado un espacio topológico (X, τ) , podemos definir una relación \leq en X , de tal manera que $x \leq y$ si y sólo si existe un abierto $U \in \tau$ tal que $x, y \in U$. No es difícil ver que dicha relación es *reflexiva y transitiva*.

Ahora, sea P un conjunto de proposiciones atómicas. Definimos un *modelo topológico* como un triplete $\mathcal{X} = (X, \tau, \|\cdot\|)$, que consta de un espacio topológico (X, τ) y una función de valuación $\|\cdot\| : P \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

Definición 2.16. Dado un modelo topológico \mathcal{X} y un elemento $x \in X$, para cada fórmula φ del lenguaje \mathcal{L}_γ , definimos por inducción sobre la complejidad de la fórmula la relación $(\mathcal{X}, x) \models \varphi$, como sigue:

- Si $\varphi := p_j$ es una fórmula atómica, entonces $(\mathcal{X}, x) \models p_j$ sii $x \in \|p_j\|$;

- Si $\varphi := \varphi_1 \wedge \varphi_2$, entonces $(\mathcal{X}, x) \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ sii $(\mathcal{X}, x) \models \varphi_1$ y $(\mathcal{X}, x) \models \varphi_2$;
- Si $\varphi := \neg\psi$, entonces $(\mathcal{X}, x) \models \neg\psi$ sii no se cumple $(\mathcal{X}, x) \models \psi$;
- Si $\varphi := \Box\psi$, entonces $(\mathcal{X}, x) \models \Box\psi$ sii existe un abierto $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y para cada $y \in U$, $(\mathcal{X}, y) \models \psi$;
- Si $\varphi := \Diamond\psi$, entonces $(\mathcal{X}, x) \models \Diamond\psi$ sii para cada abierto $U \in \tau$ tal que $x \in U$, existe $y \in U$, tal que $(\mathcal{X}, y) \models \psi$;

Si consideramos el conjunto $\|\varphi\| = \{x \in X \mid (\mathcal{X}, x) \models \varphi\}$, si $\varphi = \Box\psi$ ó bien $\varphi = \Diamond\psi$ podemos observar que $\|\Box\psi\| = \text{Int}\|\psi\|$ y $\|\Diamond\psi\| = \text{Cl}\|\psi\|$. En efecto, si $x \in \|\Box\psi\|$ entonces existe un abierto $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y para cada $y \in U$, $(\mathcal{X}, y) \models \psi$, esto implica que $U \subseteq \|\psi\|$. Ahora, si $x \in \text{Int}\|\psi\|$ entonces existe un abierto U que contiene x tal que $U \subseteq \|\psi\|$ y con ello cada elemento $y \in U$ cumple que $(\mathcal{X}, y) \models \psi$, esto justifica que $(\mathcal{X}, x) \models \Box\psi$ y así $x \in \|\Box\psi\|$. De manera similar se demuestra que $\|\Diamond\psi\| = \text{Cl}\|\psi\|$.

Definición 2.17. Diremos que dos modelos de Alexandroff $\mathfrak{M} = (M, R, \|\cdot\|)$ y $\mathfrak{M}' = (M', R', \|\cdot\|')$ son isomorfos si existe una función $f : M \rightarrow M'$ que cumple lo siguiente:

- Para cualesquiera $u, v \in M$, uRv si y solo si $f(u)R'f(v)$;
- Para cada proposición atómica p , $u \in \|p\|$ si y solo si $f(u) \in \|p\|'$.

Cuando esto sucede diremos que f es un isomorfismo de modelos y escribimos este hecho como $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$. Una pregunta natural a la definición anterior es que si dos modelos de Alexandroff $\mathfrak{M} = (M, R, \|\cdot\|)$ y $\mathfrak{M}' = (M', R', \|\cdot\|')$ son isomorfos, entonces para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ y cada elemento $x \in M$, se tiene que $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$ y $(\mathfrak{M}', f(x)) \models \varphi$. En efecto, para ello veamos el siguiente resultado.

Teorema 2.18. Sean $\mathfrak{M} = (M, R, \|\cdot\|)$ y $\mathfrak{M}' = (M', R', \|\cdot\|')$ dos modelos de Alexandroff, tales que $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$, entonces para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ y cada elemento $x \in M$, se tiene que $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$ y $(\mathfrak{M}', f(x)) \models \varphi$.

Demostración: La prueba procederá por inducción sobre la complejidad de la fórmula.

Para $\varphi = p$ es una fórmula atómica; por Definición 2.10 $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$ equivale a que $x \in \llbracket p \rrbracket$ y por Definición 2.17 $f(x) \in \llbracket p \rrbracket'$, esto equivale a que $(\mathfrak{M}', f(x)) \models \varphi$.

Para $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, por Definición 2.10 $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$ equivale a que $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi_1$ y $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi_2$, por hipótesis inductiva, esto equivale a que $(\mathfrak{M}', f(x)) \models \varphi_1$ y $(\mathfrak{M}', f(x)) \models \varphi_2$, y esto pasa si y solo si $(\mathfrak{M}', f(x)) \models \varphi$.

Para $\varphi = \neg\psi$, por Definición 2.10 $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$ equivale a que $(\mathfrak{M}, x) \not\models \psi$, por hipótesis inductiva esto equivale a que $(\mathfrak{M}', f(x)) \not\models \psi$ y esto pasa si y solo si $(\mathfrak{M}', f(x)) \models \varphi$.

Para $\varphi = \Box\psi$, por Definición 2.10 $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi$ equivale a que $(\mathfrak{M}, y) \models \psi$ para cada $y \in M$ tal que xRy , por hipótesis inductiva y por Definición 2.17 esto equivale a que $(\mathfrak{M}', f(y)) \models \psi$ para cada $f(y) \in M'$ tal que $f(x)R'f(y)$, esto pasa si y solo si $(\mathfrak{M}', f(x)) \models \varphi$. \square

En la siguiente sección usaremos los complejos simpliciales cromáticos para dar un estudio semántico a un tipo de lógica modal, a saber, la lógica epistémica.

Capítulo 3

Lógica epistémica y modelos de Kripke.

La lógica epistémica forma parte de las lógicas no-clásicas, particularmente es una rama de la lógica modal y multimodal. La lógica epistémica estudia formalmente el conocimiento y la creencia. Esta lógica nos permite modelar la interacción de uno o varios agentes y sus interacciones en ciertas situaciones.

Los primeros estudios sobre la lógica del *conocimiento* y la *creencia*, particularmente de la lógica epistémica, se dieron en el texto *Sophistici elenchi* que forma parte del *Órganon*, que fue escrito por el filósofo griego *Aristóteles*. En dicho texto, *Aristóteles* estudió aquellos enunciados que usaban términos como *conocido* y *creencia*.

3.1. Sintaxis, semántica y ejemplos.

En esta sección introduciremos el lenguaje de la lógica epistémica. Consideremos un conjunto $P = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, a los elementos de P los llamaremos proposiciones constantes o átomos; en caso de que dicho conjunto sea finito, $P = \{p_0, \dots, p_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. Nos referiremos a las proposiciones constantes como proposiciones *atómicas*. Sea A un conjunto de m elementos, los elementos del conjunto A los llamaremos “*agentes*” y por cada agente $i \in A$ añadiremos nuevos símbolos M_i y K_i a nuestro lenguaje donde K_i es el operador modal de conocimiento *knowledge* del inglés y M_i

es el dual de K_i es el operador modal de posibilidad. Por último, consideremos un conjunto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow\}$ de símbolos conectivos y dos símbolos de agrupación “(” y “)”.

Definición 3.1. El conjunto $\mathcal{L}_\omega(m)$ de fórmulas epistémicas en $\mathcal{L}_\omega(m)$ es el conjunto más pequeño tal que:

- Para cada $p_j \in P$, entonces $p_j \in \mathcal{L}_\omega(m)$.
- Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\omega(m)$, entonces $\varphi \wedge \psi \in \mathcal{L}_\omega(m)$
- Si $\varphi \in \mathcal{L}_\omega(m)$, entonces $K_i(\varphi), M_i(\varphi) \in \mathcal{L}_\omega(m)$ para cada $i \in A$

Cuando tenemos fórmulas de la forma $M_i(\varphi)$ y $K_i(\varphi)$, que podemos reescribirlas como $M_i\varphi$ y $K_i\varphi$.

La fórmula $M_i\varphi$ se lee como “*el agente i considera que φ es posible*”. Por otro lado, la relación $K_i\varphi$ es la misma fórmula $\neg M_i\neg\varphi$ ($K_i\varphi = \neg M_i\neg\varphi$) y con esto $K_i\varphi$ expresa que “*el agente i no considera posible que la negación de φ sea verdadera*” lo leeremos como “*el agente i conoce φ* ”. Con lo anterior, definimos el conjunto de operadores modales como sigue $Op := \{M_i, K_i \mid i \in A\}$.

Definición 3.2. Definimos y denotamos “la longitud de la fórmula φ ” de manera inductiva, como sigue:

- $|p_i| = 1$, para cada proposición atómica $p_i \in P$;
- $|\varphi| = |\gamma| + 1$, si $\varphi := \neg\gamma$;
- $|\varphi| = |\gamma| + |\alpha| + 1$, si $\varphi := \gamma \wedge \alpha$;
- $|\varphi| = |\gamma| + 1$, si $\varphi := \Box_n\gamma$ donde $\Box_n \in Op$.

Definición 3.3. Definimos y denotamos “la profundidad modal de la fórmula φ ” de manera inductiva, como sigue:

- $d(p_i) = 0$, para cada proposición atómica $p_i \in P$;
- $d(\varphi) = d(\gamma)$, si $\varphi := \neg\gamma$;
- $d(\varphi) = \max\{d(\gamma), d(\alpha)\}$, si $\varphi := \gamma \wedge \alpha$;
- $d(\varphi) = d(\gamma) + 1$, si $\varphi := \Box_n\gamma$ donde $\Box_n \in Op$.

Un marco epistémico es un par $\mathcal{M} := (S, \sim)$ donde S es un conjunto no vacío al cual llamaremos *conjunto de mundos* y \sim una relación de equivalencia en S . Dado un conjunto de agentes A , definimos un marco epistémico de multi-agentes como la tupla $\mathbf{M} = (S, \{\sim_a\}_{a \in A})$, donde cada (S, \sim_a) es un marco epistémico para cada $a \in A$. Sean $s, t \in S$, si $(s, t) \in \sim_a$ para algún $a \in A$, escribiremos este hecho como $s \sim_a t$. Definimos el conjunto $[s]_a = \{t \in S \mid t \sim_a s\}$ que es una clase de equivalencia bajo la relación \sim_a . Diremos que un marco epistémico de multi-agentes $\mathbf{M} = (S, \{\sim_a\}_{a \in A})$ es *propio* si $\bigcap_{a \in A} \sim_a = Id$, donde $Id := \{(s, s) \mid s \in S\}$.

Definición 3.4. Consideremos dos marcos epistémicos de multi-agentes $\mathbf{M}_1 = (S_1, \{\sim_a\}_{a \in A})$ y $\mathbf{M}_2 = (S_2, \{\sim'_a\}_{a \in A})$. Una función $f : S_1 \rightarrow S_2$ es un *morfismo de marcos de Kripke* o simplemente *morfismo de Kripke*, si para cualesquiera $s_1, s_2 \in S_1$ y para cada $a \in A$ que cumplan que $s_1 \sim_a s_2$, implica que $f(s_1) \sim'_a f(s_2)$.

Con lo definido en este capítulo, podemos considerar la siguiente categoría \mathcal{K}_A , donde:

- $ob(\mathcal{K}_A)$ es la clase de todos los *marcos propios de Kripke* con conjunto de agentes A .
- $mor(\mathcal{K}_A)$ es la colección de *morfismos de Kripke*.
- Para un marco de Kripke $\mathbf{M} = (S, \{\sim_a\}_{a \in A})$ definimos de manera natural $1_{\mathbf{M}} : S \rightarrow S$ de tal manera que $1_{\mathbf{M}}(s) = s$ para cada $s \in S$.

Definición 3.5. Dado un conjunto de átomos P y un conjunto de agentes A . Un modelo epistémico de multi-agentes es un par $\mathfrak{M} = (\mathbf{M}, L)$ que consta de un marco epistémico de multi-agentes $\mathbf{M} = (S, \{\sim_a\}_{a \in A})$ y una función de valuación $L : S \rightarrow \mathcal{P}(P)$, donde $\mathcal{P}(P)$ es el conjunto potencia de P . Algunas veces denotaremos a los modelos epistémicos de multi-agentes como el triplete $\mathfrak{M} = (S, \{\sim_a\}_{a \in A}, L)$

Un modelo epistémico puntual es un par (\mathfrak{M}, s) donde \mathfrak{M} es un modelo epistémico de multi-agentes y $s \in S$. También definimos de manera similar el modelo epistémico multi-puntual como el par (\mathfrak{M}, S') donde $S' \subseteq S$.

Definición 3.6. Dado un modelo epistémico puntual (\mathfrak{M}, s) , para cada fórmula epistémica φ del lenguaje $\mathcal{L}_\omega(m)$, definimos por inducción sobre la complejidad de la fórmula la relación $(\mathfrak{M}, s) \models \varphi$, como sigue:

- Si $\varphi := p_j$ es una fórmula atómica, entonces $(\mathfrak{M}, s) \models p_j$ sii $p_j \in L(s)$;
- Si $\varphi := \gamma \wedge \psi$, entonces $(\mathfrak{M}, s) \models (\gamma \wedge \psi)$ sii $(\mathfrak{M}, s) \models \gamma$ y $(\mathfrak{M}, s) \models \psi$;
- Si $\varphi := \neg\psi$, entonces $(\mathfrak{M}, s) \models \neg\psi$ sii no se cumple $(\mathfrak{M}, s) \models \psi$;
- Si $\varphi := K_a\psi$, entonces $(\mathfrak{M}, s) \models K_a\psi$ sii $(\mathfrak{M}, t) \models \psi$ para cada t tal que $s \sim_a t$;
- Si $\varphi := M_a\psi$, entonces $(\mathfrak{M}, s) \models M_a\psi$ sii $(\mathfrak{M}, t) \models \psi$ para algún t tal que $s \sim_a t$;

Escribimos $\mathfrak{M} \models \varphi$, si $(\mathfrak{M}, s) \models \varphi$ para cada $s \in S$.

Para entender mejor los conceptos anteriores, consideremos la siguiente situación:

Supongamos que Ana y Beto son novios y quedan de verse enfrente del edificio Carolino. Entonces Ana independientemente si llega o no a la cita, considera posible que Beto llegue a la cita o la deje plantada, de manera similar sucede lo mismo con Beto.

De la situación mostrada anteriormente, consideremos lo siguiente:

- Un conjunto de agentes $A = \{a, b\}$, donde Ana es representada con la letra “a” y Beto con la letra “b”;
- Un conjunto de átomos $P = \{p_1, p_2\}$, donde p_1 y p_2 representan respectivamente que Ana y Beto llegan a la cita;
- Un conjunto de mundos $S = \{w, v, t, s\}$;
- Dos relaciones de equivalencia \sim_a y \sim_b , donde $\sim_a = \{(w, w), (v, v), (t, t), (s, s), (w, v), (v, w), (s, t), (t, s)\}$ y $\sim_b = \{(w, w), (v, v), (t, t), (s, s), (v, t), (t, v), (w, s), (s, w)\}$;

- Una función de valuación $L : S \rightarrow \mathcal{P}(P)$, tal que: $L(w) = \{p_1, p_2\}$, $L(v) = \{p_1\}$, $L(s) = \{p_2\}$ y $L(t) = \emptyset$.

Denotaremos al modelo anterior como $\mathfrak{C} = (S, \{\sim_c\}_{c \in A}, L)$.

Las relaciones \sim_a y \sim_b describen lo que conoce cada agente dependiendo de en qué mundo están y con qué mundo está relacionado; por ejemplo, en el mundo w , *Ana* relaciona a dicho mundo consigo mismo o con el mundo v , lo cual no es ninguna coincidencia, pues al observar que $L(w) = \{p_1, p_2\}$ y $L(v) = \{p_1\}$, obtenemos que en dichos mundos *Ana* llega a la cita y considera que *Beto* llega a la cita $L(w)$ ó *Beto* la deja plantada $L(v)$.

Todas las situaciones posibles podemos representarlas el siguiente diagrama.

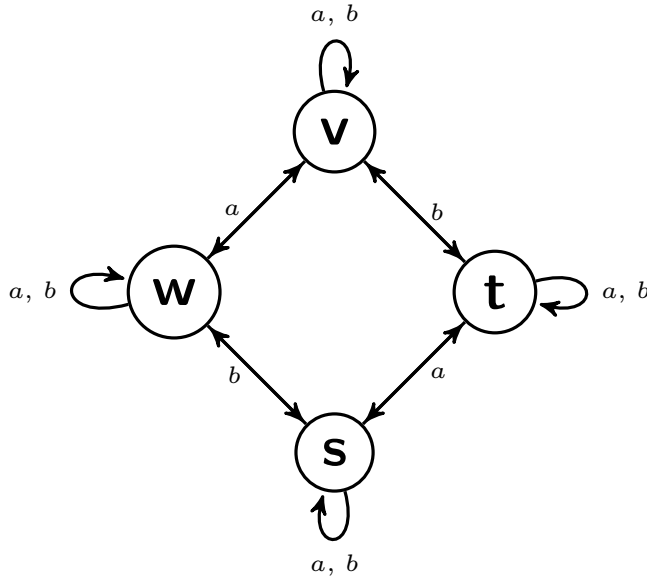


Figura 3.1: Representación grafica del modelo \mathfrak{C}

En el modelo definido anteriormente, se cumple lo siguiente:

- $(\mathfrak{C}, s) \models p_2$; es decir, en el mundo s , *Beto* llega a la cita.
- $(\mathfrak{C}, s) \models (\neg p_1 \wedge K_a \neg p_1 \wedge \neg K_b \neg p_1) \wedge (p_2 \wedge \neg K_a p_2 \wedge K_b p_2)$; es decir, en el mundo s , *Ana* no llega a la cita, *Ana* sabe que no va a llegar a la cita y *Beto* considera posible que *Ana* pueda

llegar a la cita. Por otro lado, en el mundo s ; *Beto* llega a la cita, *Ana* no sabe que *Beto* va a llegar a la cita y *Beto* sabe que va a llegar a la cita.

- $\mathfrak{C} \models K_a(K_b p_2 \vee K_b \neg p_2) \wedge K_b(K_a p_1 \vee K_a \neg p_1)$; es decir, en cada uno de los mundos, *Ana* sabe que: *Beto* conoce que él mismo puede o no llegar a la cita. De manera similar, *Beto* sabe que: *Ana* conoce que ella misma puede o no llegar a la cita.
- $\mathfrak{C} \models K_a(M_b p_2 \wedge M_b \neg p_2) \wedge K_b(M_a p_1 \wedge M_a \neg p_1)$; es decir, en cada uno de los mundos, *Ana* conoce que: *Beto* considera posible que el mismo pueda o no llegar a la cita. De manera análoga, *Beto* sabe que: *Ana* considera posible que ella misma pueda o no llegar a la cita.

3.2. Complejos simpliciales y estructuras de Kripke.

Nuestro siguiente objetivo es ver la relación entre los complejos simpliciales cromáticos puros y la lógica epistémica, particularmente con los modelos de Kripke. Para ver dicha relación, consideremos un conjunto finito y no vacío A y mostraremos que la categoría \mathcal{S}_A de los complejos simpliciales puros con coloración A es equivalente a la categoría \mathcal{K}_A de los marcos de Kripke propios con conjunto de agentes A .

Para demostrar este hecho, construiremos funtores $F : \mathcal{S}_A \rightarrow \mathcal{K}_A$ y $G : \mathcal{K}_A \rightarrow \mathcal{S}_A$ como sigue.

Definamos la asignación de objetos de F . A cada complejo simplicial puro A -cromático $C = (V, P, \chi)$, lo asociamos al par $F(C) = \langle \mathcal{F}(C), \{\sim_a\}_{a \in A} \rangle$, donde

$$\mathcal{F}(C) = \{T \in P \mid T \text{ es una faceta de } C\}$$

y \sim_a es la relación que satisface:

$$\text{Para cada } X, Y \in \mathcal{F}(C), X \sim_a Y \text{ sí y sólo sí } a \in \chi(X \cap Y).$$

Por la Proposición 1.37, tenemos que $F(C)$ es un marco de Kripke y, además, como $\bigcap_{a \in A} \sim_a = Id$, entonces $F(C)$ es un marco propio de Kripke con conjunto de agentes A .

3.2. COMPLEJOS SIMPLICIALES Y ESTRUCTURAS DE KRIPKE.43

Ahora, definamos la asignación de morfismos de F . Sean $C = (V, P, \chi)$ y $D = (V', P', \chi')$ complejos simpliciales puros A -cromáticos, y también $f : C \rightarrow D$ un mapeo cromático. Por ser f un mapeo cromático, cada faceta C de X tiene $|A|$ vértices distintos, entonces $f(X)$ también tiene $|A|$ vértices y, por tanto, $f(X)$ es una faceta de D .

Ahora, al mapeo cromático f lo asociaremos al morfismo de Kripke $F(f) : F(C) \rightarrow F(D)$, de tal manera que para cada $X \in \mathcal{F}(C)$, $F(f)(X) = f(X)$, esto es $F(f)$ que asigna facetas en facetas.

Afirmación 3.7. $F(f)$ es un morfismo de Kripke.

En efecto, sean X y Y facetas de C , y tales que $X \sim_a Y$, entonces $a \in \chi(X \cap Y)$. Entonces, existe un vértice $v \in X \cap Y$ tal que $\chi'(f(v)) = \chi(v) = a$, pero $f(v) \in f(X) \cap f(Y)$, entonces $a = \chi'(f(v)) \in \chi'(f(X) \cap f(Y))$. Por lo tanto, $f(X) \sim_a f(Y)$, así concluimos que $F(f)$ es un morfismo de Kripke.

Definamos la asignación de objetos de G . Al marco *propio* de Kripke $\mathbf{M} = \langle S, \{\sim_a\}_{a \in A} \rangle$ lo asociaremos al triplete $G(\mathbf{M}) = (V, P, \chi)$, donde:

- $V = \{([s]_a, a) \mid s \in S, a \in A\}$;
- $P = \{\{([s]_a, a)\}_{a \in A'} \mid s \in S \text{ y } A' \subseteq A\}$;
- $\chi : V \rightarrow A$ tiene la siguiente relación de correspondencia $\chi(([s]_a, a)) = a$.

No es difícil notar que (V, P) es un complejo simplicial.

Afirmación 3.8. χ es un mapeo cromático.

En efecto, consideremos un simplejo $N \in P$ y dos vértices distintos $([s]_a, a), ([s]_b, b) \in N$, entonces tenemos dos casos $a \neq b$ ó $[s]_a \neq [s]_b$. En el primer caso, $\chi(([s]_a, a)) = a \neq b = \chi(([s]_b, b))$. Ahora, supongamos que $[s]_a \neq [s]_b$, entonces existe $y \in [s]_a$ tal que $y \notin [s]_b$, es decir, $(y, s) \in \sim_a$ y $(y, s) \notin \sim_b$, por lo tanto, $a \neq b$. Así hemos demostrado que $G(\mathbf{M}) = (V, P, \chi)$ es un complejo simplicial cromático.

Desde que $A = \text{Rang}(\chi)$, entonces $G(\mathbf{M})$ es A -cromático. Por la forma en como se definió este complejo simplicial, su conjunto

de facetas es de la forma $\mathcal{F}(G(\mathbf{M})) = \{([s]_a, a)\}_{a \in A} \mid s \in S\}$ y como A es finito, entonces $G(\mathbf{M})$ es un complejo simplicial puro A -cromático.

Ahora, definamos la asignación de morfismos de G . Sean dos marcos propios de Kripke $\mathbf{M} = \langle S, \{\sim_a\}_{a \in A} \rangle$, $\mathbf{M}' = \langle S', \{\sim'_a\}_{a \in A} \rangle$ y también $g : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$ un morfismo de Kripke. Definimos $G(g) : G(\mathbf{M}) \rightarrow G(\mathbf{M}')$ tal que $G(g)(([s]_a, a)) = ([g(s)]_a, a)$, para cada $([s]_a, a) \in V$ y supongamos sin pérdida de la generalidad que $G(\mathbf{M}) = (V, P, \chi)$ y $G(\mathbf{M}') = (V', P', \chi')$.

Afirmación 3.9. $G(g)$ está bien definida.

En efecto, para cada $([s]_a, a), ([t]_b, b) \in V$ tal que $([s]_a, a) = ([t]_b, b)$, entonces $a = b$ y $[s]_a = [t]_b$, lo cual implica que $s \sim_a t$. Dado que g es un morfismo de Kripke, $g(s) \sim_a g(t)$ con lo cual $G(g)([s]_a) = ([g(s)]_a, a) = ([g(t)]_b, b) = G(g)([t]_b)$. Por lo tanto, $G(g)$ está bien definida.

Afirmación 3.10. $G(g)$ es un morfismo cromático.

En efecto, como $G(g)$ es función, para cada $N \in P$ tenemos que $N = \{([s]_a, a)\}_{a \in A'}$ para algún $s \in S$ y $A' \subseteq A$, entonces $G(g)(N) = G(g)(\{([s]_a, a)\}_{a \in A'}) = \{G(g)(([s]_a, a))\}_{a \in A'} = \{([g(s)]_a, a)\}_{a \in A'}$, y como $g(s) \in S'$, $G(g)(N)$ es un simplejo en S' , con lo anterior hemos demostrado que $G(g)$ es un mapeo simplicial. Para demostrar que $G(g)$ es un morfismo cromático, consideremos un vértice $([v]_a, a) \in V$ en $G(\mathbf{M})$, entonces $\chi'(G(g)([v]_a, a)) = \chi'([g(v)]_a, a) = a = \chi([v]_a, a)$. Así hemos demostrado que $G(g)$ es un morfismo cromático.

Ahora, calculemos $F \circ G : \mathcal{K}_A \rightarrow \mathcal{K}_A$ y $G \circ F : \mathcal{S}_A \rightarrow \mathcal{S}_A$.

Primero, calculemos la asignación de objetos de $F \circ G$; Cada marco propio de Kripke $\mathbf{M} = \langle S, \{\sim_a\}_{a \in A} \rangle$ con conjunto de agentes A , es asociado al complejo simplicial $G(\mathbf{M}) = (V, P, \chi)$, donde:

- $V = \{([s]_a, a) \mid s \in S, a \in A\}$;
- $P = \{\{([s]_a, a)\}_{a \in A'} \mid s \in S \text{ y } A' \subseteq A\}$;
- $\chi : V \rightarrow A$ tiene la siguiente relación de correspondencia $\chi([s]_a, a) = a$.

3.2. COMPLEJOS SIMPLICIALES Y ESTRUCTURAS DE KRIPKE.45

Entonces, $F \circ G$ asocia al marco de Kripke $\mathbf{M} = \langle S, \{\sim_a\}_{a \in A} \rangle$ al marco de Kripke $F \circ G(\mathbf{M}) = \langle S', \{\sim'_a\}_{a \in A} \rangle$, donde $S' = \{([s]_a, a) \mid s \in S\}$ y \sim'_a es la relación descrita en 1.37 aplicada a las facetas de $G(\mathbf{M})$ que es S' .

Ahora, calculemos la asignación de morfismos de $F \circ G$; Cada morfismo de Kripke $g : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$, es asociado al mapeo cromático $G(g) : G(\mathbf{M}) \rightarrow G(\mathbf{M}')$ donde $G(g)(([s]_a, a)) = ([g(s)]_a, a)$. Entonces, $F \circ G$ asocia al mapeo cromático $G(g) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$ al morfismo de Kripke $F \circ G(g) : F \circ G(\mathbf{M}) \rightarrow F \circ G(\mathbf{M}')$ que tiene la siguiente relación de correspondencia $F \circ G(g)(\{([s]_a, a)\}_{a \in A}) = F(G(g))(\{([s]_a, a)\}_{a \in A}) = G(g)(\{([s]_a, a)\}_{a \in A}) = \{G(g)([s]_a, a)\}_{a \in A} = \{([g(s)]_a, a)\}_{a \in A}$.

Calculemos la asignación de objetos de $G \circ F$; Cada complejo simplicial puro A -cromático $K = (V, P, \chi)$, es asociado al marco de Kripke $F(\mathbf{M}) = \langle \mathcal{F}(K), \sim_a \rangle$, donde $\mathcal{F}(K)$ es el conjunto de facetas de K y \sim_a es la relación descrita en 1.37. Entonces, $G \circ F$ asocia al complejo simplicial puro A -cromático $K = (V, P, \chi)$ al complejo simplicial $K' = (V', P', \chi')$, donde:

- $V' = \{([X]_a, a) \mid X \in S, a \in A\}$;
- $P' = \{\{([X]_a, a)\}_{a \in A'} \mid A' \subseteq A \text{ y } X \in S\}$;
- $\chi : V' \rightarrow A$ tiene la siguiente regla de correspondencia $\chi([X]_a, a) = a$ para cada $X \in \mathcal{F}(K)$ y $a \in A$.

Por último, calculemos la asignación de morfismos de $G \circ F$; Cada mapeo cromático $f : K_1 \rightarrow K_2$ es asociado al morfismo de Kripke $F(f) : F(K_1) \rightarrow F(K_2)$ tal que $F(f)(X) = f(X)$. Entonces $G \circ F$ asocia al morfismo de Kripke $F(f) : F(K_1) \rightarrow F(K_2)$ al mapeo cromático $G \circ F(f) : G \circ F(K_1) \rightarrow G \circ F(K_2)$ tal que $G \circ F(f)(([X]_a, a)) = G(F(f))([X]_a, a) = ([F(f)(X)]_a, a) = ([f(X)]_a, a)$.

Sin pérdida de la generalidad, denotaremos al conjunto $\{([s]_a, a)\}_{a \in A}$ como \bar{s} . Por lo mostrado anteriormente para cada morfismo de Kripke $g : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$, obtenemos que:

$$F \circ G(g)(\bar{s}) = F \circ G(g)(\{([s]_a, a)\}_{a \in A}) = \{([g(s)]_a, a)\}_{a \in A} = \overline{g(\bar{s})}$$

Proposición 3.11. Los funtores F y G son equivalencias de categorías.

Demostración: Consideremos un marco de Kripke $\mathbf{M} = \langle S, \{\sim_a\}_{a \in A} \rangle$ con conjunto de agentes A . Representaremos al marco de Kripke $FG(\mathbf{M})$ como $\mathbf{N} = \langle T, \{\sim'_a\}_{a \in A} \rangle$ donde T es el conjunto de facetas de $G(\mathbf{M}) = (V, P, \chi)$.

Por lo hecho anteriormente, para cada morfismo de Kripke $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$ tenemos que $FG(f) : FG(\mathbf{M}) \rightarrow FG(\mathbf{M}')$ tiene la siguiente relación de correspondencia $FG(f)(\{([s]_a, a)\}_{a \in A}) = \{([f(s)]_a, a)\}_{a \in A}$.

Consideremos la siguiente asignación $\varphi : T \rightarrow S$ de tal forma que $\varphi(\{([s]_a, a)\}_{a \in A}) = s$ para cada $s \in S$, es decir $\varphi(\bar{s}) = s$. Note que dicha asignación está bien definida. Si $\{([s]_a, a)\}_{a \in A} = \{([t]_a, a)\}_{a \in A}$ entonces para cada $c \in A$, $([s]_c, c) = ([t]_c, c)$.

Mostremos que $s = t$. En caso contrario $s \neq t$, por lo anterior $[s]_c = [t]_c$ para cada $c \in A$, es decir $s \sim_c t$ para cada $c \in A$, entonces $(s, t) \in \bigcap_{a \in A} \sim_a$ lo que contradice que \mathbf{M} es *propio*. Por lo tanto, φ es una función, veamos también que dicha función es una biyección. Claramente es suprayectiva. Para ver que es inyectiva sean $s, t \in S$ tales que $\varphi(\{([s]_a, a)\}_{a \in A}) = s = t = \varphi(\{([t]_a, a)\}_{a \in A})$, entonces para cada $a \in A$, como \sim_a es una relación reflexiva, $s \sim_a t$ es decir $[s]_a = [t]_a$ y así $([s]_a, a) = ([t]_a, a)$ para cada $a \in A$, entonces $\{([s]_a, a)\}_{a \in A} = \{([t]_a, a)\}_{a \in A}$.

Definimos la función $\eta_{\mathbf{M}} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{M}$ tal que $\eta_{\mathbf{M}}(\{([s]_a, a)\}_{a \in A}) = \varphi(\{([s]_a, a)\}_{a \in A})$ para cada elemento $\{([s]_a, a)\}_{a \in A} \in T$. Observemos que $\eta_{\mathbf{M}}$ es un morfismo de Kripke; consideremos dos elementos $X, Y \in T$ y tales que $X \sim'_a Y$ para algún $a \in A$, lo cual es equivalente a que $a \in \chi(X \cap Y)$, entonces existe $([x]_b, b) \in X$ y $([y]_c, c) \in Y$ tales que $\chi((([x]_b, b))) = a = \chi((([y]_c, c)))$ con lo cual $a = b = c$, esto implica que $[x]_a = [x]_b$ y $[y]_c = [y]_a$, pero como χ es una coloración $x \sim_a y$. Por lo tanto, $\eta_{\mathbf{M}}$ es un morfismo de Kripke.

Ahora para cada morfismo $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$ en \mathcal{K}_A , supongamos sin pérdida de la generalidad que $FG(\mathbf{M}) = \langle T, \{\sim_a\}_{a \in A} \rangle$ y $FG(\mathbf{M}') = \langle T', \{\sim'_a\}_{a \in A} \rangle$ entonces para cada $\bar{t} \in T$,

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{M}'} \circ FG(f)(\bar{t}) &= \eta_{\mathbf{M}'}(FG(f)(\bar{t})) = \eta_{\mathbf{M}'}(\overline{f(\bar{t})}) = f(\bar{t}) = \\ &= f(\eta_{\mathbf{M}}(\bar{t})) = Id(f) \circ \eta_{\mathbf{M}}(\bar{t}) \end{aligned}$$

3.2. COMPLEJOS SIMPLICIALES Y ESTRUCTURAS DE KRIPKE.47

es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 FG(\mathbf{M}) & \xrightarrow{FG(f)} & FG(\mathbf{M}') \\
 \eta_{\mathbf{M}} \downarrow & & \downarrow \eta_{\mathbf{M}'} \\
 \mathbf{M} & \xrightarrow{Id(f)} & \mathbf{M}'
 \end{array}$$

Ahora, consideremos un complejo simplicial puro A -cromático $K = (V, P, \chi)$. Representaremos al complejo simplicial $GF(K)$ como $K' = (V', P', \chi')$, donde

- $V' = \{([X]_a, a) \mid a \in A \text{ y } X \text{ es una faceta en } K\}$;
- $P' = \{\{([X]_a, a)\}_{a \in A'} \mid A' \subseteq A\}$;
- $\chi' : V' \rightarrow A$ tiene la siguiente regla de correspondencia $\chi'([X]_a, a) = a$.

Por lo mostrado anteriormente, para cada mapeo cromático $g : K_1 \rightarrow K_2$, $GF(g) : GF(K_1) \rightarrow GF(K_2)$ tiene la siguiente relación de correspondencia $GF(g)(([X]_a, a)) = ([f(X)]_a, a)$.

Observe que $|\chi^{-1}(\{a\}) \cap X| = 1$, en caso contrario existen $x, y \in X$ tales que $\chi(x) = a = \chi(y)$ lo que contradice que χ es un mapeo cromático.

Consideremos la siguiente asignación $\psi : V' \rightarrow V$ de tal forma que $\psi([X]_a, a) = w \in \chi^{-1}(\{a\}) \cap X$. Mostremos que dicha asignación está bien definida, si $([X]_a, a) = ([Y]_b, b)$, entonces $a = b$ y $a \in \chi(X \cap Y)$, con lo cual $(\chi^{-1}(\{a\}) \cap X) \cap (\chi^{-1}(\{a\}) \cap Y) \neq \emptyset$, así supongamos sin pérdida de la generalidad que $(\chi^{-1}(\{a\}) \cap X) = \{x\}$ y $(\chi^{-1}(\{a\}) \cap Y) = \{y\}$, entonces $x = y$ y, por lo tanto, $\psi([X]_a, a) = \psi([Y]_a, a)$. Representaremos al conjunto $\chi^{-1}(\{a\}) \cap X$ con la letra minúscula x .

Afirmación 3.12. ψ es suprayectiva.

En efecto, sea $x \in V$, por ser K un complejo simplicial puro A -cromático, existen $a \in A$ y una faceta X de K , tales que $\chi(x) = a$ y $x \in X$, con ello $\chi([X]_a, a) = x$.

Afirmación 3.13. ψ es inyectiva.

En efecto, $([X]_a, a)$ y $([Y]_b, b)$ tales que $x = \psi(([X]_a, a)) = \psi(([Y]_b, b)) = y$, esto implica que $x = y \in \chi^{-1}(\{b\}) \cap Y$, entonces $a = \chi(x) = b = \chi(y)$ y $x \in X \cap Y$, por lo tanto, $x \in [Y]_b$; Con lo cual, $[X]_a = [X]_b \subseteq [Y]_b$ y de manera similar $[Y]_b = [Y]_a \subseteq [X]_a$ Así hemos demostrado que ψ es inyectivo. Por lo tanto, ψ es una biyección.

Definimos la función $\epsilon_K : K' \longrightarrow K$ tal que $\epsilon_K((([X]_a, a)) = \psi((([X]_a, a))$ para cada elemento $([X]_a, a) \in V'$. Note que ϵ_K es un mapeo simplicial. En efecto, sea $\mathbf{X} = \{([X]_a, a)\}_{a \in A'} \in P$, si $X' = \cup_{a \in A'} \{x \in X \mid \chi(x) = a\}$, entonces $\epsilon_K(\mathbf{X}) = \psi(\mathbf{X}) = \psi(\cup_{a \in A'} \{([X]_a, a)\}) = \cup_{a \in A'} \psi(\{([X]_a, a)\}) = \cup_{a \in A'} \{\psi((([X]_a, a))\} = X' \subseteq X$ y, por lo tanto, ψ es un mapeo simplicial. Claramente, ϵ_K es un mapeo cromático, pues para cada $([X]_a, a)$ vértice de K' , tenemos que $\chi(\psi((([X]_a, a))) = a = \chi'((([X]_a, a))$.

Ahora, para cada morfismo $g : K_1 \longrightarrow K_2$ en \mathcal{S}_A , supongamos sin pérdida de la generalidad que $GF(K_1) = (V'_1, P'_1, \chi'_1)$ y $GF(K_2) = (V'_2, P'_2, \chi'_2)$, entonces si consideremos $([X]_a, a) \in V'_1$ y sea $\{w\} = \chi_1^{-1}(\{a\}) \cap X$, entonces:

$$\begin{aligned} \epsilon_{K_2} \circ GF(g)(([X]_a, a)) &= \epsilon_{K_2}(GF(g)([X]_a, a)) = \\ &\epsilon_{K_2}((g(X))_a, a) \in \chi_2^{-1}(\{a\}) \cap g(X) \end{aligned}$$

Note que si $\{w'\} = \chi_2^{-1}(\{a\}) \cap g(X)$, entonces $\chi_2(w') = a$ y $w' \in g(X)$. Por otro lado, noté que w es el único elemento de X tal que $\chi_1(w) = a$, pues $\chi_1 : V_1 \longrightarrow A$ es un *mapeo cromático*, pero como g es un morfismo, entonces $\chi_1(w) = a = \chi_2(g(w))$, entonces $g(w) \in \chi_2^{-1}(\{a\}) \cap g(X)$ y, por lo tanto, $w' = g(w)$. Por tanto,

$$\epsilon_{K_2} \circ GF(g)(([X]_a, a)) = g(w)$$

Por otro lado,

$$Id(g) \circ \epsilon_{K_1}((([X]_a, a)) = g(\epsilon_{K_1}((([X]_a, a))) \in g(\chi_1^{-1}(\{a\}) \cap X) = g(\{w\})$$

Es decir, $Id(g) \circ \epsilon_{K_1}((([X]_a, a)) = g(w)$, con lo cual el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} GF(K_1) & \xrightarrow{FG(g)} & GF(K_2) \\ \epsilon_{K_1} \downarrow & & \downarrow \epsilon_{K_2} \\ K_1 & \xrightarrow{Id(g)} & K_2 \end{array}$$

3.2. COMPLEJOS SIMPLICIALES Y ESTRUCTURAS DE KRIPKE.49

Así obtenemos que los funtores F y G son equivalencias de categorías. Por lo tanto, \mathcal{K}_A y \mathcal{S}_A son categorías equivalentes. \square

Aplicando el functor G al ejemplo de la Figura 3.1, tenemos lo siguiente:

- $[\mathbf{v}]_a = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}\} = [\mathbf{w}]_a;$
- $[\mathbf{v}]_b = \{\mathbf{v}, \mathbf{t}\} = [\mathbf{t}]_b;$
- $[\mathbf{s}]_a = \{\mathbf{s}, \mathbf{t}\} = [\mathbf{t}]_a;$
- $[\mathbf{s}]_b = \{\mathbf{s}, \mathbf{w}\} = [\mathbf{w}]_b$

Así podemos representar el complejo simplicial mediante el siguiente gráfico, donde dos de sus vértices pertenecen al mismo simplejo sí y sólo sí están conectados por una línea, además el color naranja denota al agente a y el color púrpura denota al agente b :

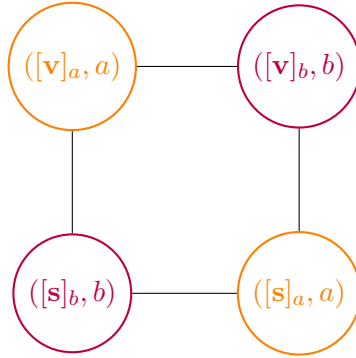


Figura 3.2: Representación grafica del simplejo $G(\mathcal{C})$

La demostración anterior nos permite dar un entendimiento a los marcos epistémicos (de multiagentes) usando los complejos simpliciales cromáticos, pero para dar un mejor estudio a su semántica tenemos que definir nuevos objetos y nuevos morfismos. Particularmente, en los siguientes párrafos de esta sección nos centraremos al estudio semántico de los modelos de Kripke locales.

Consideremos un conjunto numerable P de proposiciones atómicas, y un modelo de Kripke $\mathfrak{M} = (\mathbf{M}, V)$, donde $\mathbf{M} = (S, \{\sim_a$

$\}_{a \in A}$) y sea $L : S \rightarrow \mathcal{P}(P)$. Definimos el conjunto $P_a = \{p \in P \mid \text{para cada } s, t \in S, \text{ tales que } s \sim_a t \text{ entonces, } p \in L(s) \text{ si y sólo si } p \in L(t)\}$.

Definición 3.14. Dado un marco epistémico $\mathbf{M} = (S, \{\sim_a\}_{a \in A})$ y una función de valuación $L : S \rightarrow \mathcal{P}(P)$. Sea $\mathfrak{M} = (\mathbf{M}, L)$ un modelo epistémico, diremos que una variable $p \in P$ es local para un agente $a \in A$ si para cada $s \sim_a t$ implica $p \in L(s)$ si y sólo si $p \in L(t)$.

Una variable $p \in P$ es local si esta es local para un agente $a \in A$. Por otro lado, diremos que \mathfrak{M} es local si todas las variables son locales.

Algo que podemos observar, se obtiene al suponer que \mathfrak{M} es un modelo local con conjunto de variables P y conjunto de agentes A , implica que $P = \bigcup_{a \in A} P_a$. Por otro lado, puesto que cada variable $p \in P$ es local, existe $s_p \in S$ tal que $p \in L(s_p)$, es decir, $\bigcup_{p \in P} L(s_p) = \bigcup_{s \in S} L(s) = P$.

Definición 3.15. Consideremos dos modelos de Kripke $\mathfrak{M} = (\mathbf{M}, L : S \rightarrow \mathcal{P}(P))$ y $\mathfrak{M}' = (\mathbf{M}', L' : S' \rightarrow \mathcal{P}(P))$, diremos que un morfismo de marcos $\mathbf{f} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$ es un morfismo de modelos (de Kripke), si $L'(\mathbf{f}(s)) = L(s)$ para cada $s \in S$.

No es difícil notar que la composición de morfismos de modelos (de Kripke) es un morfismo de modelos (de Kripke).

Con lo definido anteriormente, podemos considerar la siguiente categoría $\mathcal{K}'_{A,P}$, donde:

- $ob(\mathcal{K}'_A)$ es la clase de todos los *modelos locales de Kripke* con conjunto de agentes A , que además son propios y su conjunto de proposiciones atómicas es P .
- $mor(\mathcal{K}'_A)$ es la colección de *morfismos de marcos* junto con los *morfismos de modelos*.
- Para marco de Kripke $\mathbf{M} = (S, \{\sim_a\}_{a \in A})$ definimos de manera natural $1_{\mathbf{M}} : S \rightarrow S$ de tal manera que $1_{\mathbf{M}}(s) = s$ para cada $s \in S$.

Consideremos un conjunto \mathcal{V} que llamaremos conjunto de valores y definamos un nuevo conjunto de proposiciones atómicas

3.2. COMPLEJOS SIMPLICIALES Y ESTRUCTURAS DE KRIPKE.51

$AP = \{p_{a,x} \mid a \in A \text{ y } x \in \mathcal{V}\}$, diremos que $p_{a,x}$ es verdadero si a cumple el valor x . Definimos el conjunto $AP_a = \{p_{a,x} \mid x \in \mathcal{V}\}$ que son las proposiciones atómicas que son relativas al elemento a . Además, no es difícil observar que $\{AP_a\}_{a \in A}$ forma una partición del conjunto P .

Un modelo simplicial $\mathbf{m} = (K, \ell : V(K) \rightarrow \mathcal{P}(AP))$, consiste de un complejo simplicial cromático puro K de dimensión n , junto con una función de etiquetado $\ell : V \rightarrow \mathcal{P}(AP)$, de tal manera que $\ell(v) \subseteq P_{\chi(v)}$ para cada $v \in V(K)$ y que además $\bigcup_{v \in V} \ell(v) = AP$.

Consideremos dos modelos simpliciales $\mathbf{m} = (K, \ell : V(K) \rightarrow \mathcal{P}(AP))$ y $\mathbf{m}' = (K', \ell' : V(K') \rightarrow \mathcal{P}(AP))$ y un morfismo cromático $f' : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}'$, diremos que f' es un morfismo de etiquetado si esta función preserva etiquetado, esto es $\ell'(f(v)) = \ell(v)$ para cada $v \in V(K)$. Entonces, si $f' : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}'$ es un morfismo de etiquetado, $\ell'(f(v)) = \ell(v) \subseteq P_{\chi(v)}$ y $\ell(v) = \ell'(f(v)) \subseteq P_{\chi'(f(v))}$, esto implica que $\chi(v)$ y $\chi'(f(v))$ comparten el mismo color.

Algo que podemos observar es que la composición de morfismos de etiquetado también es un morfismo de etiquetado.

Con lo definido anteriormente (con respecto a los complejos simpliciales), podemos considerar la categoría de los modelos simpliciales cromáticos $\mathcal{S}'_{A,AP}$, donde:

- $ob(\mathcal{S}'_A)$ es la clase de los modelos simpliciales con coloración A .
- $mor(\mathcal{S}'_A)$ es la colección de todos los morfismos cromáticos y morfismos de etiquetado.
- Para cada $K = (V, P, \chi) \in ob(\mathcal{S}'_A)$, definimos $1_K : K \rightarrow K$ de manera natural. Es decir, $1_K(v) = v$ para cada $v \in V$.

Ahora definiremos los funtores $F' : \mathcal{S}'_{A,AP} \rightarrow \mathcal{K}'_{A,AP}$ y $G' : \mathcal{K}'_{A,AP} \rightarrow \mathcal{S}'_{A,AP}$ de la siguiente manera.

Sea $\mathbf{m} = (K, \ell : V \rightarrow \mathcal{P}(AP))$ un modelo simplicial, denotemos por \mathcal{F}_K al conjunto de facetas de K . Al modelo simplicial lo asociaremos al objeto $F'(\mathbf{m}) = (\mathbf{M}, L)$, donde $\mathbf{M} = F(K)$ y $L : \mathcal{F}_K \rightarrow \mathcal{P}(AP)$ cuya regla de correspondencia es $L(X) = \bigcup_{x \in X} \ell(x)$ para cada X faceta de K . Mostremos que $F'(\mathbf{m})$ es un modelo simplicial. Claramente, L es una función de valuación para

\mathbf{M} y $F(K)$ es un marco de Kripke. Notemos que dicho modelo es local, para ello sea $q \in AP = \bigcup_{a \in A} AP_a$, entonces existe $a \in A$ y $w \in \mathcal{V}$ tal que $q = p_{a,w} \in AP_a$. Mostremos que $p_{a,w}$ es local en a . En efecto, sean $X, Y \in \mathcal{F}_K$ y tales que $X \sim_a Y$, tenemos dos casos $p_{a,w} \in L(X)$ ó bien $p_{a,w} \notin L(X)$. Si $p_{a,w} \in L(X) = \bigcup_{x \in X} \ell(x)$, existe $x_p \in X$ tal que $p_{a,w} \in \ell(x_p) \subseteq AP_{\chi(x_p)}$ por ser $\{AP_a\}_{a \in A}$ una partición de AP y a que $p_{a,w} \subseteq AP_a$ entonces $\chi(x_p) = a$; por otro lado, $X \sim_a Y$ lo que es equivalente a que $a \in \chi(X \cap Y)$ y como x_p es el único elemento de X tal que $\chi(x_p) = a$, entonces $x_p \in Y$, entonces $p_{a,w} \in \ell(x_p) \subseteq \bigcup_{y \in Y} \ell(y) = L(Y)$. Ahora suponemos que $p_{a,w} \notin L(X)$, sea $x_a \in X$ tal que $\chi(x_a) = a$, entonces $p_{a,w} \notin \ell(x_a)$; sin embargo, para cada $c \in A$ distinto de a se tiene que $p_{a,w} \notin AP_c$ esto por ser $\{AP_a\}_{a \in A}$ una partición de AP ; puesto que $X \sim_a Y$, $x_a \in Y$ y, por otro lado, para cada $y \in Y \setminus \{x_p\}$ se tiene que $p_{a,w} \notin \ell(y) \subseteq AP_{\chi(y)}$, entonces $p_{a,w} \notin L(Y)$. Por lo tanto, $F'(\mathbf{m})$ es local.

Por otro lado, sean $\mathbf{m} = (K, \ell)$ y $\mathbf{m}' = (K', \ell')$ modelos simpliciales. A cada morfismo cromático $f : K \rightarrow K'$ lo asociaremos al morfismo de marcos $F'(f) = F(f) : F(K) \rightarrow F(K')$. Por otro lado, a cada morfismo de etiquetado $f' : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}'$ lo asociaremos a la siguiente función $F'(f') : (F'(\mathbf{m}), L) \rightarrow (F'(\mathbf{m}'), L')$, con la siguiente regla de correspondencia $F'(f')(X) = f'(X)$ para cada faceta X de K . Desde que f' es un morfismo de marcos, entonces $F'(f')$ es un morfismo cromático. Veamos que es un morfismo de modelos, es claro, pues

$$L'(F'(f')(X)) = L'(f'(X)) = \bigcup_{x \in X} \ell'(f'(x)) = *$$

por ser f' un morfismo de etiquetado $\ell'(f'(x)) = \ell(x)$ y con ello

$$* = \bigcup_{x \in X} \ell(x) = L(X)$$

Por lo tanto, $F'(f')$ es un morfismo de modelos.

Sea $\mathfrak{M} = (\mathbf{M}, L : S \rightarrow \mathcal{P}(AP))$ un modelo local (de Kripke). Asociaremos a dicho modelo al objeto $G'(\mathfrak{M}) = (K, \ell : V \rightarrow \mathcal{P}(AP))$, donde $K = G(\mathbf{M})$ que es un complejo simplicial puro A -cromático y con ello definamos la siguiente asignación $\ell : V \rightarrow \mathcal{P}(AP)$ de tal manera que $\ell([s]_a, a) = L(s) \cap AP_a$ para cada $([s]_a, a) \in V$. Observemos que dicha función está bien

3.2. COMPLEJOS SIMPLICIALES Y ESTRUCTURAS DE KRIPKE.53

definida, sean $([s]_a, a), ([t]_b, b) \in V$, tales que $([s]_a, a) = ([t]_b, b)$, entonces $a = b$ y $[s]_a = [t]_a$; Ahora consideremos $p \in \ell((([s]_a, a)) = L(s) \cap AP_a$, por ser \mathfrak{M} un modelo local, entonces $p \in L(t)$ y con ello $\ell((([s]_a, a)) \subseteq \ell((([t]_a, a))$. De manera similar, podemos inferir que $\ell((([t]_a, a)) \subseteq \ell((([s]_a, a))$. Claramente, desde que \mathfrak{M} es un modelo local, $AP = \bigcup_{s \in S} L(s) = \bigcup_{s \in S} (\bigcup_{a \in A} \ell(s) \cap AP_a)$. Así hemos demostrado que ℓ es una función de etiquetado, con lo cual $G'(\mathfrak{M})$ es un modelo simplicial.

Ahora, sean $\mathfrak{M} = (\mathbf{M}, L : S \rightarrow \mathcal{P}(AP))$ y $\mathfrak{M}' = (\mathbf{M}', L' : S' \rightarrow \mathcal{P}(AP))$ modelos locales. A cada morfismo de marcos $g : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$ lo asociaremos al morfismo de cromático $G'(g) = G(f) : G(\mathbf{M}) \rightarrow G(\mathbf{M}')$.

En la siguiente parte de la prueba, vamos a denotar al vértice $([s]_a, a)$ de $G'(\mathfrak{M})$ como s_a .

Por otro lado, a cada morfismo de modelos $g' : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$ lo asociaremos a la siguiente asignación $G'(g') : (G'(\mathbf{M}), \ell) \rightarrow (G'(\mathbf{M}'), \ell')$, con la siguiente regla de correspondencia $G'(g')(s_a) = g'(s_a)$. Supongamos sin pérdida de la generalidad que $G'(\mathbf{M}) = K$ y $G'(\mathbf{M}') = K'$ Desde que g' es un morfismo de marcos, entonces $G'(g')$ es un morfismo cromático. Ahora, mostremos que $G'(g')$ es un morfismo de etiquetado. Para cada $s_a \in V(G'(\mathfrak{M}))$ tenemos que

$$\ell'(G'(g')(s_a)) = \ell'(g'(s_a)) = L'(g(s)) \cap AP_a$$

Por ser g un morfismo de modelos $L(g(s)) = L(s)$, entonces:

$$\ell(s_a) = L(s) \cap AP_a = L(g(s)) \cap P_K^a.$$

De manera análoga a cuando construimos los funtores F y G se calculan de manera análoga los funtores $F' \circ G'$ y $G' \circ F'$.

Primero calculemos el funtor $F' \circ G'$; El funtor G' , asocia al modelo de Kripke $\mathfrak{M} = (\mathbf{M}, L)$ al modelo simplicial $\mathfrak{m} = (K, \ell)$, donde $K = G(\mathbf{M})$ y $\ell : V \rightarrow \mathcal{P}(AP)$ tiene la siguiente relación de correspondencia $\ell((([s]_a, a)) = L(s)_K \cap P_K^a$. Así, funtor $F' \circ G'$, asocia a cada modelo de Kripke $\mathfrak{M} = (\mathbf{M}, L)$ al siguiente modelo $F' \circ G'(\mathfrak{M}) = (F \circ G(\mathbf{M}), L')$, donde $L' : S' \rightarrow \mathcal{P}(AP)$ tiene la siguiente relación de correspondencia

$$L'(\bar{s}) = \bigcup_{a \in A} \ell(s_a) = \bigcup_{a \in A} (L(s) \cap AP_a) = L(s) \cap P = L(s) \dots (1)$$

El functor $F' \circ G'$, asocia al morfismo de marcos (o de modelos) $g : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}'$ al siguiente morfismo de marcos (modelos) $F' \circ G'(g) : F' \circ G'(\mathbf{M}) \longrightarrow F' \circ G'(\mathbf{M}')$ que tiene la siguiente relación de correspondencia $F' \circ G'(g)(\bar{s}) = \overline{g(s)}$.

Ahora calculemos $G' \circ F'$; El functor F' , asocia al modelo simplicial $\mathbf{m} = (K, \ell)$ al modelo de kripke $\mathfrak{M} = (\mathbf{M}, L)$, donde $\mathbf{M} = F(K)$ y $L : S \longrightarrow \mathcal{P}(AP)$ tiene la siguiente relación de equivalencia $L(T) = \bigcup_{t \in T} \ell(t)$ para cada faceta T de K . Así, el functor $G' \circ F'(\mathbf{m}) = (G \circ F(\mathbf{m}), \ell')$, donde $\ell' : V' \longrightarrow AP$ tiene la siguiente relación de correspondencia

$$\ell'([X]_a, a) = \left(\bigcup_{x \in X} \ell(x) \right) \cap AP_a = (\star).$$

Sea x_a el elemento de X que tiene el color a , entonces $\ell(x_a) \subseteq AP_a$ y, puesto que $G \circ F(\mathbf{m})$ es un complejo simplicial cromático y como AP_a es ajeno a pares, entonces

$$(\star) = \ell(x_a).$$

El functor $G' \circ F'$ asocia al morfismo cromático (o de modelos) $f : K_1 \longrightarrow K_2$ al morfismo cromático (de modelos) $G \circ F(f) : G \circ F(K_1) \longrightarrow G \circ F(K_2)$, tal que $G \circ F(f)([X]_a, a) = ([f(X)]_a, a)$.

Corolario 3.16. Los funtores F' y G' son equivalencias de categorías.

Demostración: Consideremos un modelo $\mathfrak{M} = (\mathbf{M}, L)$ al cual lo asociaremos por medio del functor al modelo $\mathfrak{N} = (FG(\mathfrak{M}), L')$. Simétricamente, a la Proposición 3.11, definimos el functor $\eta_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{M}$ cuya regla de correspondencia es la siguiente $\eta_{\mathfrak{M}}(\bar{s}) = s = \varphi(\bar{s})$ para cada $\bar{s} \in T$. Nuevamente, por la Proposición 3.11, $\eta_{\mathfrak{M}}$ es un morfismo de marcos de Kripke. Además, es sencillo mostrar que $\eta_{\mathfrak{M}}$ es un morfismo de modelos. Usando (1) cuando calculamos $F'G'$, tenemos que:

$$L(\eta_{\mathfrak{M}}(\bar{s})) = L(s) = L'(\bar{s}).$$

Ahora consideremos un modelo simplicial $\mathbf{m} = (K, \ell)$ al cual lo asociaremos por medio del functor al modelo simplicial $\mathbf{n} = (GF(\mathfrak{M}), \ell')$. Simétricamente, a la Proposición 3.11, definimos el functor $\epsilon_{\mathbf{m}} :$

3.2. COMPLEJOS SIMPLICIALES Y ESTRUCTURAS DE KRIPKE.55

$\mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{m}$ cuya regla de correspondencia es la siguiente $\epsilon_{\mathfrak{m}}(\bar{s}) = s = \psi(\bar{s})$ para cada $\bar{s} \in T$. Nuevamente, por la proposición 3.11, $\epsilon_{\mathfrak{m}}$ es un morfismo cromático. Además, usando (1) cuando calculamos $G'F'$, obtenemos que:

$$\ell(\epsilon_{\mathfrak{M}}([X]_a, a)) = \ell(x_a)$$

por otro lado,

$$\ell'([X]_a, a) = \ell(x_a).$$

Así hemos demostrado que $\epsilon_{\mathfrak{M}}$ es un morfismo de modelos simpliciales. Análogamente, usando un argumento similar a lo mostrado en 3.11 podemos demostrar lo deseado \square

Definición 3.17. Dado un modelo simplicial $\mathfrak{M} = (K, \chi, \ell)$, para cada fórmula epistémica φ del lenguaje $\mathcal{L}_{\omega}(AP)$ y para cada faceta X de K , definimos por inducción sobre la complejidad de la fórmula la relación $(\mathfrak{M}, X) \models \varphi$, como sigue:

- Si $\varphi = p$ es una fórmula atómica, entonces $(\mathfrak{M}, X) \models p$ sii $p \in \ell(X)$;
- Si $\varphi = \gamma \wedge \psi$, entonces $(\mathfrak{M}, X) \models (\gamma \wedge \psi)$ sii $(\mathfrak{M}, X) \models \gamma$ y $(\mathfrak{M}, X) \models \psi$;
- Si $\varphi = \neg\psi$, entonces $(\mathfrak{M}, X) \models \neg\psi$ sii $(\mathfrak{M}, X) \not\models \psi$;
- Si $\varphi = K_a\psi$, entonces $(\mathfrak{M}, X) \models K_a\psi$ sii $(\mathfrak{M}, Y) \models \psi$ para cada faceta Y de K tal que $a \in \chi(X \cap Y)$;

Para evitar confusiones escribiremos $\models_{\mathcal{K}}$ cuando es consecuencia lógica con respecto a los modelos epistémicos de Kripke y $\models_{\mathcal{S}}$ cuando es consecuencia lógica con respecto a los modelos simpliciales. Con lo hecho anteriormente, podemos ver el siguiente resultado.

Proposición 3.18. Sean \mathfrak{m} un modelo simplicial, X una faceta en dichos modelos y una fórmula φ , entonces $(\mathfrak{m}, X) \models_{\mathcal{S}} \varphi$ sí y sólo sí $(F'(\mathfrak{m}), X) \models_{\mathcal{K}} \varphi$. De igual manera, para cada modelo propio local de Kripke \mathfrak{M} y cualquier mundo s de \mathfrak{M} , $(\mathfrak{M}, s) \models_{\mathcal{K}} \varphi$ sí y sólo sí $(G'(\mathfrak{M}), \bar{s}) \models_{\mathcal{S}} \varphi$, recuerde que $\bar{s} = \{([s]_a, a)\}_{a \in A}$.

Demostración: Ambas pruebas se harán por inducción sobre la complejidad de la fórmula.

Primero mostraremos que $(\mathbf{m}, X) \models_{\mathcal{S}} \varphi$ sí y sólo sí $(F'(\mathbf{m}), X) \models_{\mathcal{X}} \varphi$;

Supongamos sin pérdida de la generalidad que $\mathbf{m} = (K, \ell)$.

Si φ es una fórmula atómica, es decir que $\varphi = p \in P$, entonces por definición $(\mathbf{m}, X) \models_{\mathcal{S}} \varphi$ sí y sólo sí $p \in \ell(X)$, pero $L(X) = (\bigcup_{x \in X} \ell(x)) = \ell(X)$, así $p \in L(X)$ esto equivale a que $(F'(\mathbf{m}), X) \models_{\mathcal{X}} \varphi$.

En caso de que $\varphi = \psi \wedge \gamma$, entonces $(\mathbf{m}, X) \models_{\mathcal{S}} \varphi$ sí y sólo sí, $(\mathbf{m}, X) \models_{\mathcal{S}} \psi$ y $(\mathbf{m}, X) \models_{\mathcal{S}} \gamma$, por hipótesis inductiva, esto equivale a que $(F'(\mathbf{m}), X) \models_{\mathcal{X}} \psi$ y $(F'(\mathbf{m}), X) \models_{\mathcal{X}} \gamma$, es decir $(F'(\mathbf{m}), X) \models_{\mathcal{X}} \varphi$.

En caso de que $\varphi = \neg\psi$, entonces $(\mathbf{m}, X) \models_{\mathcal{S}} \varphi$ sí y sólo sí, $(\mathbf{m}, X) \not\models_{\mathcal{S}} \psi$, por hipótesis inductiva, esto equivale a que $(F'(\mathbf{m}), X) \not\models_{\mathcal{X}} \psi$, es decir $(F'(\mathbf{m}), X) \models_{\mathcal{X}} \varphi$.

En caso de que $\varphi = K_a\psi$, entonces $(\mathbf{m}, X) \models_{\mathcal{S}} \varphi$ sí y sólo sí, $(\mathbf{m}, Y) \models_{\mathcal{S}} \psi$ para cada faceta Y de K tal que $a \in \chi(X \cap Y)$, por hipótesis inductiva, esto equivale a que $(F'(\mathbf{m}), Y) \models_{\mathcal{X}} \psi$ para cada $Y \sim_a X$, es decir $(F'(\mathbf{m}), X) \models_{\mathcal{X}} \varphi$.

Ahora mostremos que $(\mathfrak{M}, s) \models_{\mathcal{X}} \varphi$ sí y sólo sí $(G(\mathfrak{M}), \bar{s}) \models_{\mathcal{X}} \varphi$;

Supongamos sin pérdida de la generalidad que $\mathfrak{M} = (S, \{\sim_a\}_{a \in A})$

Si φ es una fórmula atómica, es decir que $\varphi = p \in P$, entonces por definición $(\mathfrak{M}, s) \models_{\mathcal{X}} \varphi$ sí y sólo sí $p \in L(s)$, pero $\ell([s]_a, a) = L(s) \cap AP_a$ para cada $a \in A$, entonces $\ell(\bar{s}) = \bigcup_{a \in A} L(s) \cap AP_a$ así $p \in \ell(\bar{s})$ esto equivale a que $(G'(\mathfrak{M}), \bar{s}) \models_{\mathcal{S}} \varphi$.

En caso de que $\varphi = \psi \wedge \gamma$, $\varphi = \neg\psi$ ó $\varphi = K_a\psi$, la prueba es análoga a la primera parte de la demostración. \square

Para aplicar el functor G' al ejemplo de la Figura 3.1, tenemos que modificar el conjunto de proposiciones $P = \{p_1, p_2\}$ del modelo $\mathfrak{C} = (S, \{\sim_c\}_{c \in A}, L)$. A continuación, consideremos los mismos conjuntos de agentes $A = \{a, b\}$, de mundos $S = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ y, de relaciones de equivalencia \sim_a y \sim_b . Ahora, consideremos el conjunto de valores $\mathcal{V} = \{x\}$, y con ello definimos el conjunto $AP = \{p_{a,x}, p_{b,x}\}$ junto con la siguiente función de valuación $L_x : S \rightarrow \mathcal{P}(AP)$ tal que $L_x(w) = \{p_{a,x}, p_{b,x}\}$, $L_x(v) = \{p_{a,x}\}$, $L_x(s) = \{p_{b,x}\}$ y $L_x(t) = \emptyset$. La proposición $p_{c,x}$ expresa que “el

3.2. COMPLEJOS SIMPLICIALES Y ESTRUCTURAS DE KRIPKE.57

agente c llega a la cita". Denotaremos al modelo anterior como $\mathfrak{C}' = (S, \{\sim_c\}_{c \in A}, L_x)$,

Todo lo anterior se puede expresar en la misma Figura 3.1 y también el modelo \mathfrak{C}' demuestra lo siguiente:

- $(\mathfrak{C}, s) \models p_{b,x}$;
- $(\mathfrak{C}, s) \models (\neg p_{a,x} \wedge K_a \neg p_{a,x} \wedge \neg K_b \neg p_{a,x}) \wedge (p_{b,x} \wedge \neg K_a p_{b,x} \wedge K_b p_{b,x})$;
- $\mathfrak{C} \models K_a(K_b p_{b,x} \vee K_b \neg p_{b,x}) \wedge K_b(K_a p_{a,x} \vee K_a \neg p_{a,x})$;
- $\mathfrak{C} \models K_a(M_b p_{b,x} \wedge M_b \neg p_{b,x}) \wedge K_b(M_a p_{a,x} \wedge M_a \neg p_{a,x})$.

Aplicando el funtor G' , al modelo \mathfrak{C} tenemos el modelo simplicial $G'(\mathfrak{C}) = (K, \chi, \ell)$, donde el complejo simplicial cromático $G(\mathfrak{C}) = (K, \chi)$ y $\ell_0 : V \rightarrow \mathcal{P}(AP)$ tiene la siguiente regla de correspondencia:

- $\ell_0([v]_a, a) = L(v) \cap AP_a = \{p_{a,x}\} = L(w) \cap AP_a$;
- $\ell_0([v]_b, b) = L(v) \cap AP_b = \emptyset = L(t) \cap AP_b$;
- $\ell_0([s]_a, a) = L(s) \cap AP_a = \emptyset = L(t) \cap AP_a$;
- $\ell_0([s]_b, b) = L(s) \cap AP_b = \{p_{b,x}\} = L(w) \cap AP_b$.

Por la Definición 3.17, obtenemos el siguiente modelo simplicial $\mathfrak{c} = G'(\mathfrak{C}) = (G(\mathfrak{C}), \ell)$ y por la Proposición 3.18, se cumple lo siguiente:

- $(\mathfrak{c}, \bar{s}) \models p_{b,x}$, pues $p_{b,x} \in \ell(\bar{s}) = \ell([s]_a, a) \cup \ell([s]_b, b) = \{p_{b,x}\}$;
- $(\mathfrak{c}, \bar{s}) \models (\neg p_{a,x} \wedge K_a \neg p_{a,x} \wedge \neg K_b \neg p_{a,x}) \wedge (p_{b,x} \wedge \neg K_a p_{b,x} \wedge K_b p_{b,x})$;
- $\mathfrak{c} \models K_a(K_b p_{b,x} \vee K_b \neg p_{b,x}) \wedge K_b(K_a p_{a,x} \vee K_a \neg p_{a,x})$;
- $\mathfrak{c} \models K_a(M_b p_{b,x} \wedge M_b \neg p_{b,x}) \wedge K_b(M_a p_{a,x} \wedge M_a \neg p_{a,x})$.

3.2.1. Solidez de $S5_n + Loc$.

Modificando lo hecho en la Tabla 2.1, podemos generalizar el sistema axiomático $S5$ a otro sistema axiomático para la lógica epistémica con n agentes que mostraremos en la siguiente tabla.

Sistema Axiomático	Axiomas	Reglas de Inferencia
Lógica $S5_n$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Axiomas de LPC. ▪ Axioma K_n: Para cada agente $a \in A$, $K_a(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_a\varphi \rightarrow K_a\psi)$ es un axioma. ▪ <i>Reflexividad</i>: Para cada agente $a \in A$, $K_a\varphi \rightarrow \varphi$ es un axioma. ▪ <i>Transitividad</i>: Para cada agente $a \in A$, $K_a\varphi \rightarrow K_aK_a\varphi$ es un axioma. ▪ <i>Simetría</i>: Para cada agente $a \in A$, $K_a(\varphi \rightarrow M_a\varphi)$. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ <i>Modus Ponens</i>. ▪ <i>Necesidad</i>: Si φ es verdadero, entonces $K_a\varphi$ también es verdadero para cada agente $a \in A$.

Lo demostrado en esta sección nos permite mostrar la solidez de $S5_n$, más los siguientes axiomas

$$Loc := \{K_a(p_{a,x}) \vee K_a(\neg p_{a,x})\}_{a \in A, x \in \mathcal{V}}$$

Proposición 3.19. El sistema de axiomático $\mathcal{T} = S5_n + Loc$ es sólido en la clase de los modelos simpliciales

Demostración: Mostremos que para cada uno de los modelos simpliciales $\mathfrak{m} = (K, \chi, \ell)$, ocurre que $\mathfrak{m} \models \theta$ para cada $\theta \in \mathcal{T}$.

Usando un razonamiento análogo a lo mostrado en 2.13, la clase de los modelos simpliciales cumplen los axiomas de la *lógica proposicional clásica*, K_n , *reflexividad* y *transitividad* de la Lógica $S5_n$, junto con las reglas de inferencia de *Modus Ponens* y *Necesidad*. Bastaría demostrar que la clase de los modelos simpliciales cumplen el axioma de simetría y el esquema axiomático Loc .

(*Simetría*) Para $\theta = K_a(\varphi \rightarrow M_a\varphi)$; Supongamos que $\mathfrak{m} \models \varphi$, entonces para toda X faceta de \mathfrak{m} ; $(\mathfrak{m}, X) \models \varphi$, por la simetría de

la relación descrita en 1.37, obtenemos la faceta que necesitamos para que se cumpla $(\mathbf{m}, Z) \models M_a\varphi$, pues X está relacionado consigo mismo, así $(\mathbf{m}, X) \models M_a\varphi$. Por lo que para cada X faceta del modelo simplicial \mathbf{m} , $(\mathbf{m}, X) \models \varphi \rightarrow M_a\varphi$ y por la arbitrariedad de la faceta X , entonces para cada Y tal que $a \in \chi(X \cap Y)$ se cumple $(\mathbf{m}, Y) \models \varphi \rightarrow M_a\varphi$, con lo cual $(\mathbf{m}, X) \models K_a(\varphi \rightarrow M_a\varphi)$. Por lo tanto, $\mathbf{m} \models \theta$.

(*Loc*) Ahora supongamos que $\mathbf{m} \not\models K_a(p_{a,x}) \vee K_a(\neg p_{a,x})$, entonces existe una faceta X de \mathbf{m} tal que $(\mathbf{m}, X) \not\models K_a(p_{a,x}) \vee K_a(\neg p_{a,x})$; por definición de modelo simplicial, $(\mathbf{m}, X) \not\models K_a(p_{a,x})$ y $(\mathbf{m}, X) \not\models K_a(\neg p_{a,x})$, entonces existen dos facetas Y_1 y Y_2 de \mathbf{m} tales que $a \in \chi(X \cap Y_1)$, $a \in \chi(X \cap Y_2)$, $(\mathbf{m}, Y_1) \not\models p_{a,x}$ y $(\mathbf{m}, Y_2) \not\models \neg p_{a,x}$, por 3.18 esto es equivalente a que $(F'(\mathbf{m}), Y_1) \not\models_{\mathcal{K}} p_{a,x}$ y $(F'(\mathbf{m}), Y_2) \not\models_{\mathcal{K}} \neg p_{a,x}$, así $p_{a,x} \notin L(Y_1)$ y $p_{a,x} \in L(Y_2)$. Por ser $F'(\mathbf{m})$ un modelo local, $a \in \chi(X \cap Y_1)$, $a \in \chi(X \cap Y_2)$ y a que χ es un morfismo cromático, entonces $a \in \chi(Y_1 \cap Y_2)$ y con lo cual $p_{a,x} \in L(Y_1)$ pero $p_{a,x} \notin L(Y_1)$ una contradicción. Por lo tanto, para cada $x \in \mathcal{V}$ y $a \in A$ se cumple que $\mathbf{m} \models K_a(p_{a,x}) \vee K_a(\neg p_{a,x})$. \square

En caso de que el lector de esta tesis tenga interés en revisar la completitud de $S5_n + Loc$, puede ver el artículo [8].

3.2.2. Ejemplos.

Finalicemos esta sección presentando algunos ejemplos de modelos de Kripke junto con sus representaciones simpliciales.

Las imágenes de esta sección fueron tomadas y adaptados de los artículos *A simplicial complex model for dynamic epistemic logic to study distributed task computability* [8] y *Knowledge and Simplicial Complexes* [10].

Ejemplo 3.20. Consideremos la siguiente situación:

Tenemos una baraja con tres cartas distintas, cada una tiene un número entre el cero y el dos. Por otro lado, tenemos a tres amigos que representaremos con los colores Negro, Blanco y Gris, las cartas se van a repartir a dichos amigos.

De la situación mostrada anteriormente, consideremos los siguientes datos:

- Un conjunto de agentes $A = \{n, b, g\}$, donde Negro es representada con la letra “ n ”, Blanco con la letra “ b ” y Gris con la letra “ g ”;
- Un conjunto de átomos $AP = \{p_{a,x} \mid a \in A \text{ y } x \in \{0, 1, 2\}\}$, donde $p_{a,x}$ representa que el agente “ a ” tiene la carta “ x ”;
- Un conjunto de mundos $S = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$;
- Dos relaciones de equivalencia \sim_n, \sim_b y \sim_g , donde:
 - $\sim_n = \{(w_1, w_1), (w_2, w_2), (w_3, w_3), (w_4, w_4), (w_5, w_5), (w_6, w_6), (w_1, w_6), (w_6, w_1), (w_4, w_5), (w_5, w_4), (w_2, w_3), (w_3, w_2)\}$;
 - $\sim_b = \{(w_1, w_1), (w_2, w_2), (w_3, w_3), (w_4, w_4), (w_5, w_5), (w_6, w_6), (w_1, w_2), (w_2, w_1), (w_3, w_4), (w_4, w_3), (w_5, w_6), (w_6, w_5)\}$;
 - $\sim_g = \{(w_1, w_1), (w_2, w_2), (w_3, w_3), (w_4, w_4), (w_5, w_5), (w_6, w_6), (w_1, w_4), (w_4, w_1), (w_2, w_5), (w_5, w_2), (w_3, w_6), (w_6, w_3)\}$.
- Una función de valuación $L : S \rightarrow \mathcal{P}(AP)$, tal que:
 - $L(w_1) = \{p_{n,0}, p_{b,2}, p_{g,1}\}$;
 - $L(w_2) = \{p_{n,1}, p_{b,2}, p_{g,0}\}$;
 - $L(w_3) = \{p_{n,1}, p_{b,0}, p_{g,2}\}$;
 - $L(w_4) = \{p_{n,2}, p_{b,0}, p_{g,1}\}$;
 - $L(w_5) = \{p_{n,2}, p_{b,1}, p_{g,0}\}$;
 - $L(w_6) = \{p_{n,0}, p_{b,1}, p_{g,2}\}$;

Con la información anterior podemos considerar al modelo epistémico de multiagentes $\mathfrak{T} = (S, \{\sim_a\}_{a \in A}, L)$, que bajo el functor G' tiene la siguiente representación en el siguiente complejo simplicial:

Una pregunta natural al modelo anterior es ver qué pasa si la baraja tiene más de tres cartas. Para analizar esta situación, primero veamos el caso cuando la baraja consiste de cuatro cartas, particularmente que tenga a los números 0, 1, 2 y 3.

Sin cambiar el conjunto de agentes, necesitamos modificar el conjunto de mundos posibles y consecuentemente las relaciones de equivalencia \sim_n, \sim_b y \sim_g , que en virtud de la Proposición 3.18 lo podemos expresar por medio de un complejo simplicial ver Figura

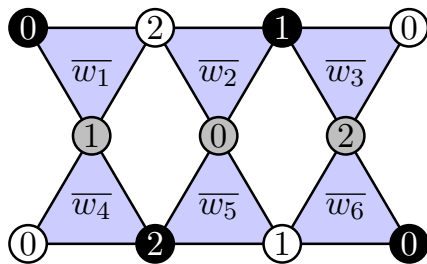


Figura 3.3: $G'(\mathfrak{T})$

Goubault, E., Kniazev, R., & Ledent, J., 2023. *Adaptación de la imagen del modelo simplicial del toro* [Imagen] <https://arxiv.org/abs/1809.03095>

3.4. Donde cada una de las facetas del complejo simplicial representan un mundo posible y si dos facetas comparten un vértice del mismo color, entonces dichas facetas están relacionadas por medio de la relación descrita en la Proposición 1.37.

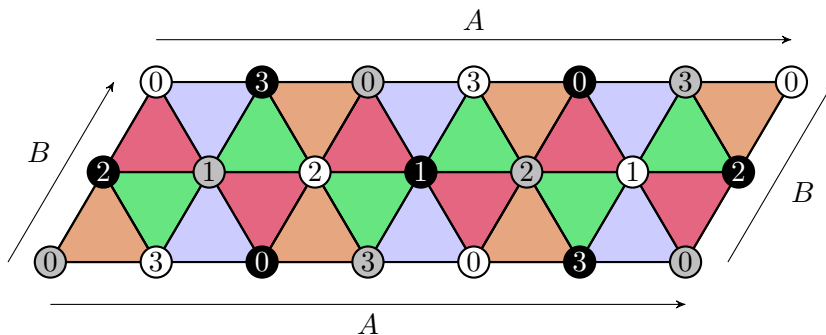


Figura 3.4: Modelo con cuatro cartas

Goubault, E., Kniazev, R., & Ledent, J., 2023. *Adaptación de la imagen del modelo simplicial del toro, señalando submodelos similares al modelo presentado en 3.3* [Imagen] <https://arxiv.org/abs/1809.03095>

El color rojo representa el complejo simplicial descrito en la Figura 3.3; de manera similar el color verde representa la situación cuando solo se toman en cuenta las cartas 2, 3 y 1; el color naranja representa la situación cuando solo se toman en cuenta las cartas 0, 2 y 3; y finalmente el color azul representa la situación cuando solo se toman en cuenta las cartas 0, 1 y 3.

El complejo simplicial de la Figura 3.4 puede ser representado mediante el siguiente toro:

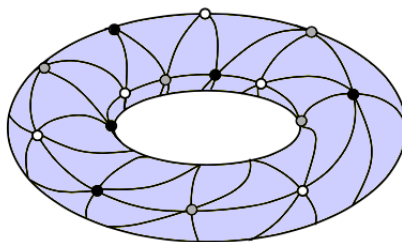


Figura 3.5: Representación del 3.3 en un toro.

Goubault, E., Kniazev, R., & Ledent, J., 2023. *imagen del modelo simplicial del modelo simplicial representado en la Figura 3.4 en un toro* [Imagen] <https://arxiv.org/abs/1809.03095>

Es decir, en la Figura 3.4, cada una de las situaciones representadas en los colores rojo, verde, naranja y azul son toros con agujeros que nos forman una partición de la triangulación del toro.

Ahora, presentaremos cómo se puede ver un modelo simplicial para casos con más de 4 cartas. Consideremos una baraja que tenga n cartas. Si seleccionamos cinco cartas distintas, x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 , con estas cartas podemos formar los siguientes modelos simpliciales:

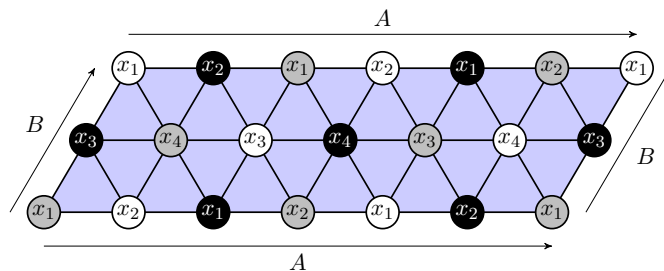


Figura 3.6: Modelo simplicial con las cartas x_1, x_2, x_3 y x_4

Goubault, E., Kniazev, R., & Ledent, J., 2023. *Representación del modelo simplicial con cuatro cartas* [Imagen] <https://arxiv.org/abs/1809.03095>

3.2. COMPLEJOS SIMPLICIALES Y ESTRUCTURAS DE KRIPKE.63

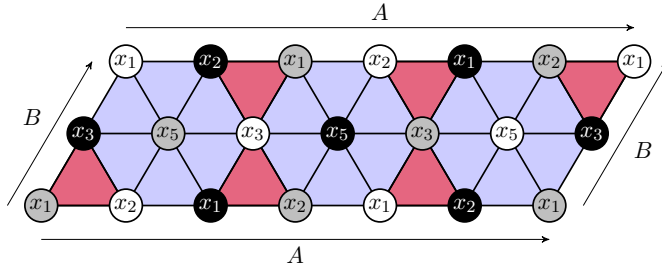


Figura 3.7: Modelo con las cartas x_1, x_2, x_3 y x_5

Goubault, E., Kniazev, R., & Ledent, J., 2023. *Adaptación del modelo en [12] para representar que simplejos coinciden en rojo en ambos modelos cuando hay cinco cartas* [Imagen] <https://arxiv.org/abs/1809.03095>

Podemos observar de los dos modelos simpliciales anteriores (Ver Figuras 3.6 y 3.7), que están pegados en los triángulos que comparten las cartas x_1, x_2 y x_3 marcadas con color rojo, que además lo marcado con color rojo tiene el mismo comportamiento que la Figura 3.3.

Ahora, seleccionando seis cartas distintas x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6 , podemos considerar el siguiente modelo simplicial (Ver Figura 3.8) que va a estar pegado a la Figura 3.6 únicamente en la línea roja.

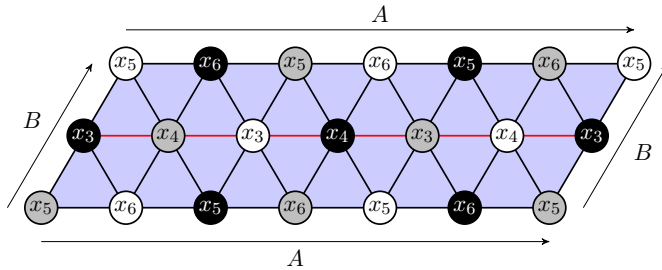


Figura 3.8: Modelo con las cartas x_1, x_2, x_5 y x_6

Goubault, E., Kniazev, R., & Ledent, J., 2023. *Adaptación del modelo en [12] para representar que simplejos coinciden en rojo en ambos modelos cuando hay seis cartas* [Imagen] <https://arxiv.org/abs/1809.03095>

Ahora, seleccionando siete cartas distintas, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ y x_7 , podemos considerar el siguiente modelo simplicial (Ver

Figura 3.9) que va a estar pegado a la Figura 3.6 solamente en tres puntos marcados con rojo.

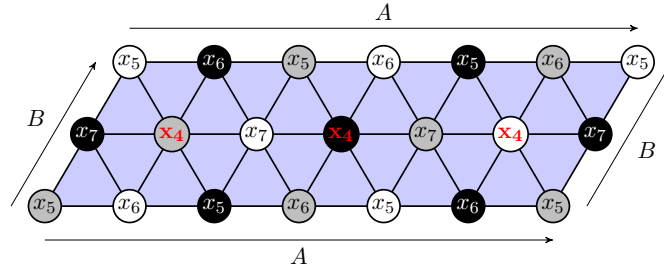


Figura 3.9: Modelo con las cartas x_4 , x_5 , x_6 y x_7

Goubault, E., Kniazev, R., & Ledent, J., 2023. *Adaptación del modelo en [12] para representar que simplejos coinciden en rojo en ambos modelos cuando hay siete cartas* [Imagen] <https://arxiv.org/abs/1809.03095>

Pero si tomamos ocho cartas distintas x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 , x_7 y x_8 , podemos generar dos toros que no están pegados, pero podemos generar una sucesión de modelos simpliciales que conecte ambos toros, usando lo analizado en las Figuras 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9.

Ejemplo 3.21. Consideremos la siguiente situación:

Supongamos que tres amigos Enrique, Vianey y Sheyla quedan de verse enfrente del edificio Carolino. Entonces Enrique, independientemente si llega o no a la reunión considera posible que Vianey y Sheyla puedan llegar a la cita o la dejarlo plantado, de manera similar tanto Vianey como Sheyla pueden considerar posible la misma situación anterior pero con los otros dos amigos.

De la situación mostrada anteriormente, consideremos los siguientes datos:

- Un conjunto de agentes $A = \{k, n, s\}$, donde Enrique es representado con la letra “ k ”, Vianey con la letra “ n ” y Sheyla con la letra “ s ”;
- Un conjunto de átomos $AP = \{p_{a,x} \mid a \in A \text{ y } x \in \{0, 1\}\}$, donde $p_{a,0}$ representa que el agente “ a ” no llega a la cita y $p_{a,1}$ representa que el agente “ a ” llega a la cita;

3.2. COMPLEJOS SIMPLICIALES Y ESTRUCTURAS DE KRIPKE.65

- Un conjunto de mundos $S = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$;
- Dos relaciones de equivalencia \sim_{kn} , \sim_{ns} y \sim_{ks} , donde:
 - $\sim_{kn} = \{(w_1, w_1), (w_2, w_2), (w_3, w_3), (w_4, w_4), (w_5, w_5), (w_6, w_6), (w_7, w_7), (w_8, w_8), (w_1, w_2), (w_2, w_1), (w_3, w_4), (w_4, w_3), (w_5, w_6), (w_6, w_5), (w_7, w_8), (w_8, w_7)\}$;
 - $\sim_{ks} = \{(w_1, w_1), (w_2, w_2), (w_3, w_3), (w_4, w_4), (w_5, w_5), (w_6, w_6), (w_7, w_7), (w_8, w_8), (w_1, w_3), (w_3, w_1), (w_2, w_4), (w_4, w_2), (w_5, w_7), (w_7, w_5), (w_6, w_8), (w_8, w_6)\}$;
 - $\sim_{ns} = \{(w_1, w_1), (w_2, w_2), (w_3, w_3), (w_4, w_4), (w_5, w_5), (w_6, w_6), (w_7, w_7), (w_8, w_8), (w_1, w_5), (w_5, w_1), (w_2, w_6), (w_6, w_2), (w_3, w_7), (w_7, w_3), (w_4, w_8), (w_8, w_4)\}$.
- Una función de valuación $L : S \rightarrow \mathcal{P}(AP)$, tal que:
 - $L(w_1) = \{p_{k,0}, p_{n,1}, p_{s,1}\}$;
 - $L(w_2) = \{p_{k,0}, p_{n,0}, p_{s,0}\}$;
 - $L(w_3) = \{p_{k,0}, p_{n,1}, p_{s,0}\}$;
 - $L(w_4) = \{p_{k,0}, p_{n,0}, p_{s,1}\}$;
 - $L(w_1) = \{p_{k,1}, p_{n,1}, p_{s,1}\}$;
 - $L(w_2) = \{p_{k,1}, p_{n,0}, p_{s,0}\}$;
 - $L(w_3) = \{p_{k,1}, p_{n,1}, p_{s,0}\}$;
 - $L(w_4) = \{p_{k,1}, p_{n,0}, p_{s,1}\}$;

Con la información anterior podemos considerar al modelo epistémico de multiagentes $\Omega = (S, \{\sim_a\}_{a \in A}, L)$, que puede ser representado mediante el siguiente diagrama:

Del modelo Ω , podemos observar que si Enrique no llega a la cita, entonces la situación entre Vianey y Sheyla es similar al del modelo \mathfrak{C} (Ver Figura 3.1) que es representado en el cuadrado formado por los puntos w_1 , w_2 , w_3 y w_4 de la Figura 3.10, es más cada una de las caras de dicho cubo representa una situación similar a lo de la Figura 3.1.

Aplicando el funtor G' , podemos observar que el modelo epistémico de multiagentes Ω se puede representar en el complejo simplicial de la Figura 3.11, donde Enrique es representado con el color

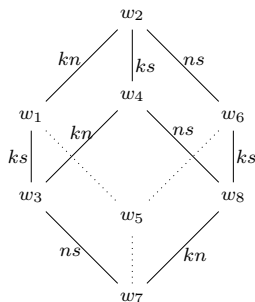


Figura 3.10: Modelo Ω

Goubault, E., Kniazev, R., & Ledent, J., 2023. *imagen del modelo de Kripke Ω representado en el artículo [8]* [Imagen] <https://arxiv.org/abs/1809.03095>

“negro”, Vianey con el color “gris” y Sheyla con el color “blanco”, el número 0 representa que dicha persona no llego a la reunión y el número 1 representa que dicha persona llego a la reunión.

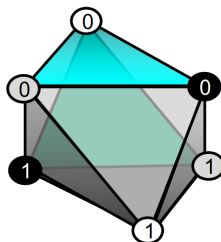


Figura 3.11: $G'(\Omega)$

Goubault, E., Kniazev, R., & Ledent, J., 2023. *imagen del modelo simplicial asociado al modelo de Kripke Ω representado en el artículo [8]* [Imagen] <https://arxiv.org/abs/1809.03095>

Capítulo 4

Lógica espacial y complejos simpliciales.

La lógica espacial es un tipo de lógica modal que es interpretado sobre una clase de estructuras que presentan entidades y relaciones geométricas. Las estructuras sobre las que se interpretan estas lógicas pueden ser espacios topológicos, espacios afines, espacios métricos, entre otros. Estas lógicas nos permiten estudiar ciertas propiedades como: conectividad topológica de regiones, paralelismo de líneas o quizás equidistancia entre dos puntos y un tercero.

Por otro lado, la lógica de accesibilidad se obtiene al tomar el alfabeto de la lógica modal y agregarle un nuevo operador que llamaremos *operador de accesibilidad* que nos permite generar nuevas propiedades semánticas en las lógicas espaciales (ver [7])

4.1. Sintaxis y semántica.

En la siguiente sección introduciremos el lenguaje con el cual vamos a trabajar. Nuevamente, consideremos un conjunto $P = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de proposiciones atómicas. Similar a la sección anterior, agregaremos los mismos símbolos conectivos $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow\}$ y los símbolos de agrupación “(” y “)”. En el nuevo lenguaje añadiremos dos operadores modales de necesidad \square y de posibilidad \diamond , junto con un símbolo relacional γ de aridad 2.

Definición 4.1. El conjunto \mathcal{L}_γ de fórmulas en \mathcal{L}_γ es el conjunto más pequeño tal que:

- a) Para cada $p_j \in P$, entonces $p_j \in \mathcal{L}_\gamma$;
- b) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\gamma$, entonces $(\varphi) \wedge (\psi) \in \mathcal{L}_\gamma$;
- c) Si $\varphi \in \mathcal{L}_\gamma$, entonces $\Box\varphi, \Diamond\varphi \in \mathcal{L}_\gamma$;
- d) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\gamma$, entonces $\gamma(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}_\gamma$.

Similarmente, a la sección anterior, omitiremos el uso de paréntesis cuando sea necesario y las fórmulas $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$ son abreviaciones de las siguientes fórmulas respectivamente $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, $\neg\varphi \vee \psi$ y $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$. Representaremos al *valor de verdad falso* $\perp = \varphi \wedge \neg\varphi$ y el *valor de verdad verdadero* $\top = \neg\perp$.

De manera similar a lo hecho en la lógica epistémica, tenemos que $\Box\varphi = \neg\Diamond\neg\varphi$.

Para entender el símbolo γ es necesario dar el concepto de *camino topológico*.

Definición 4.2. Dado un espacio topológico (X, τ) . Un *camino topológico* en X es una función continua $\pi : [0, 1] \rightarrow X$, donde la topología del intervalo $[0, 1]$ es la euclidiana. Diremos que π es un camino de a al punto b si $\pi(0) = a$ y $\pi(1) = b$.

Definición 4.3. Definimos y denotamos “la longitud de la fórmula φ ” de manera inductiva, como sigue:

- $|p_i| = 1$, para cada proposición atómica $p_i \in P$;
- $|\varphi| = |\psi| + 1$, si $\varphi := \neg\psi$;
- $|\varphi| = |\psi| + |\alpha| + 1$, si $\varphi := \psi \wedge \alpha$;
- $|\varphi| = |\psi| + 1$, si $\varphi := \Box\psi$;
- $|\varphi| = |\psi| + 1$, si $\varphi := \Diamond\psi$;
- $|\varphi| = |\psi| + |\alpha| + 1$, si $\varphi := \gamma(\psi, \alpha)$.

Definición 4.4. Definimos y denotamos “la profundidad modal de la fórmula φ ” de manera inductiva, como sigue:

- $d(p_i) = 0$, para cada proposición atómica $p_i \in P$;
- $d(\varphi) = d(\psi)$, si $\varphi := \neg\psi$;
- $d(\varphi) = \max\{d(\psi), d(\alpha)\}$, si $\varphi := \psi \wedge \alpha$;
- $d(\varphi) = d(\psi) + 1$, si $\varphi := \Box\psi$;
- $d(\varphi) = d(\psi) + 1$, si $\varphi := \Diamond\psi$;
- $d(\varphi) = \max\{d(\psi), d(\alpha)\}$, si $\varphi := \gamma(\psi, \alpha)$.

Consideremos un conjunto P de proposiciones atómicas. Un *modelo topológico* es un triplete $\mathcal{X} = (X, \tau, \|\cdot\|)$, que consta de un espacio topológico (X, τ) y una función de valuación $\|\cdot\| : P \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.

Definición 4.5. Dado un modelo topológico \mathcal{X} y un elemento $x \in X$, para cada fórmula φ del lenguaje \mathcal{L}_γ , definimos por inducción sobre la complejidad de la fórmula la relación $(\mathcal{X}, x) \models \varphi$, como sigue:

- a) Si $\varphi := p_j$ es una fórmula atómica, entonces $(\mathcal{X}, x) \models p_j$ sii $x \in \|p_j\|$;
- b) Si $\varphi := \varphi_1 \wedge \varphi_2$, entonces $(\mathcal{X}, x) \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ sii $(\mathcal{X}, x) \models \varphi_1$ y $(\mathcal{X}, x) \models \varphi_2$;
- c) Si $\varphi := \neg\psi$, entonces $(\mathcal{X}, x) \models \neg\psi$ sii no se cumple $(\mathcal{X}, x) \models \psi$;
- d) Si $\varphi := \Box\psi$, entonces $(\mathcal{X}, x) \models \Box\psi$ sii existe un abierto $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y para cada $y \in U$, $(\mathcal{X}, y) \models \psi$;
- e) Si $\varphi := \Diamond\psi$, entonces $(\mathcal{X}, x) \models \Diamond\psi$ sii para cada abierto $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y existe $y \in U$, $(\mathcal{X}, y) \models \psi$;
- f) Si $\varphi := \gamma(\varphi_1, \varphi_2)$, entonces $(\mathcal{X}, x) \models \gamma(\varphi_1, \varphi_2)$ sii existe un *camino topológico* π tal que $\pi(0) = x$, $\pi(1) \in \|\varphi_2\|$ y $\pi((0, 1)) \subseteq \|\varphi_1\|$

Consideremos una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ definimos el conjunto $\|\varphi\| = \{x \in M \mid (\mathfrak{M}, x) \models \varphi\}$

Un *modelo poliédrico* es un par $\mathcal{K} = (K, \|\cdot\|)$ donde $K = (V, S)$ es un complejo simplicial y $\|\cdot\| : P \rightarrow \mathcal{P}(S)$. Consecuentemente, definimos el modelo topológico $\mathcal{K}_{top} = (|K|, \tau_K, \|\cdot\|_{top})$, donde $(|K|, \tau_K)$ es el espacio topológico descrito en el capítulo anterior y para cada fórmula atómica $p_i \in P$, $\|p_i\|_{top} = \bigcup_{S \in \|p_i\|} \langle S \rangle$.

Una pregunta natural a lo hecho anteriormente con respecto a esta sección, es ver que si dos realizaciones geométricas $|K|$ y $|K'|$ tienen el mismo comportamiento o en su defecto $|K| \cong |K'|$, qué hipótesis son necesarias para que los modelos topológicos $\mathcal{K}_{top} = (|K|, \tau_K, \|\cdot\|_{top})$ y $\mathcal{K}'_{top} = (|K'|, \tau_{K'}, \|\cdot\|_{top})$ satisfagan lo mismo. Una respuesta a esta pregunta, se da con el siguiente resultado.

Proposición 4.6. Sean $\mathcal{X} = (X, \tau_X, \|\cdot\|)$, $\mathcal{X}' = (Y, \tau_{X'}, \|\cdot\|')$ dos modelos topológicos y $\phi : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo tales que $\|p_j\|' = \phi(\|p_j\|)$ para cada fórmula atómica $p_j \in P$, entonces $(\mathcal{X}, x) \models \varphi$ si y sólo si $(\mathcal{X}', \phi(x)) \models \varphi$.

Demostración: La prueba se hará por inducción sobre la complejidad de la fórmula.

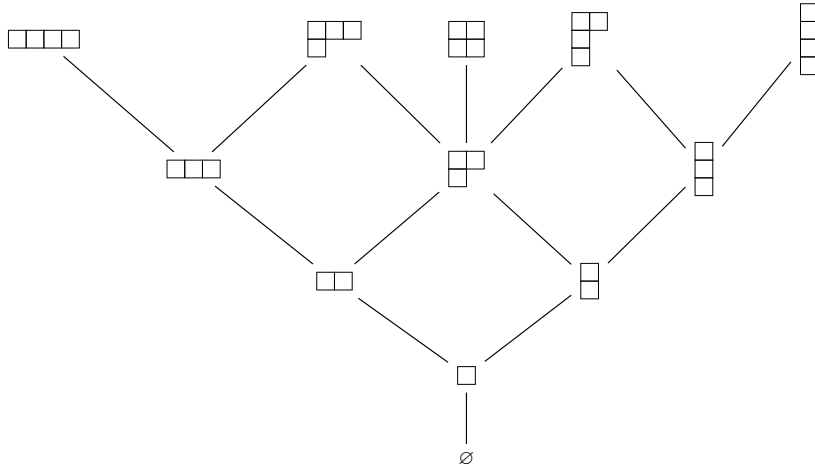
Si $\varphi = p_j \in P$, entonces; $(\mathcal{X}, x) \models p_j$ por Definición 4.5 esto equivale a que $x \in \|p_j\|$ y por hipótesis $\phi(x) \in \|p_j\|'$ esto pasa si y sólo si $(\mathcal{X}', \phi(x)) \models p_j$.

Si $\varphi = \neg\psi$, para alguna fórmula $\psi \in \mathcal{L}_\gamma$, entonces; $(\mathcal{X}, x) \models \neg\psi$ nuevamente por Definición 4.5 esto equivale a que $(\mathcal{X}, x) \not\models \psi$ y por hipótesis inductiva $(\mathcal{X}', \phi(x)) \not\models \psi$, lo cual pasa si y sólo si $(\mathcal{X}', \phi(x)) \models \neg\psi$.

Si $\varphi = \psi \wedge \theta$, para algunas fórmulas $\psi, \theta \in \mathcal{L}_\gamma$, entonces; $(\mathcal{X}, x) \models \psi \wedge \theta$ nuevamente por Definición 4.5 esto equivale a que $(\mathcal{X}, x) \models \psi$ y $(\mathcal{X}, x) \models \theta$, por hipótesis inductiva $(\mathcal{X}', \phi(x)) \models \psi$ y $(\mathcal{X}', \phi(x)) \models \theta$, lo cual pasa si y sólo si $(\mathcal{X}', \phi(x)) \models \psi \wedge \theta$.

Si $\varphi = \Box\psi$, para alguna fórmula $\psi \in \mathcal{L}_\gamma$, entonces; $(\mathcal{X}, x) \models \Box\psi$ nuevamente por Definición 4.5 esto equivale a que $x \in \text{Int}(\|\psi\|)$, por ser ϕ un homeomorfismo y por hipótesis $\phi(x) \in \phi(\text{Int}(\|\psi\|)) = \text{Int}(\phi(\|\psi\|)) = \text{Int}(\|\psi\|')$, lo cual pasa si y sólo si $(\mathcal{X}', \phi(x)) \models \Box\psi$.

Si $\varphi = \gamma(\psi, \theta)$, para algunas fórmulas $\psi, \theta \in \mathcal{L}_\gamma$, entonces; $(\mathcal{X}, x) \models \gamma(\psi, \theta)$ nuevamente por Definición 4.5 esto equivale a que exista un camino topológico π tal que $\pi(0) = x$, $\pi(1) \in \|\theta\|$ y



No es difícil ver que la relación \leq es una relación transitiva y reflexiva. Por lo tanto, el par (T, \leq) es un marco de Alexandroff. El diagrama anterior expone la jerarquía de la relación \leq sobre los elementos de T y además podemos ver qué elementos son comparables o no, por ejemplo:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \not\leq \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} \text{ y } \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} \not\leq \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

Dados un espacio topológico (M, τ_{\preceq}) asociado al marco de Alexandroff (M, \preceq) y $w \in M$, definimos el conjunto

$$[w]^{\preceq} = \{u \in U \mid w \preceq u\}$$

No es difícil observar que el conjunto $[w]^{\preceq}$ es abierto en τ_{\preceq} . Por otro lado, definimos el conjunto:

$$[w]^{\succeq} = \{u \in U \mid u \preceq w\}$$

Que es un conjunto cerrado en τ_{\preceq} .

De los conjuntos anteriormente definidos, tenemos que $[w]^{\prec} = \{u \in U \mid w \prec u\} = [w]^{\preceq} \setminus [w]^{\succeq}$ es un abierto en τ_{\preceq} y $[w]^{\succ} = \{u \in U \mid u \prec w\} = [w]^{\succeq} \setminus [w]^{\preceq}$ es un cerrado en τ_{\preceq} .

Diremos que una sucesión $(w_0, \dots, w_n) \subseteq M$ es un camino si $w_j \preceq w_{j+1}$ ó bien $w_{j+1} \preceq w_j$, para cada $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Por otro lado, diremos que $(v_0, \dots, v_j) \subseteq M$ es un subcamino de (w_0, \dots, w_n) si dicho conjunto es un camino y está contenido en (w_0, \dots, w_n) .

Diremos que un camino (w_0, \dots, w_n) *conecta* a los puntos $u, v \in T$, si $w_0 = u$ y $w_n = v$. Podemos ver que si hay un camino que conecta un punto u a un punto v , dicho camino también conecta a v con u , es decir, que la relación *hay un camino de u a v* es simétrica. Podemos representar a cada camino (w_0, \dots, w_n) mediante un diagrama (ver figura 4.3).

$$w_0 \text{ ————— } w_1 \text{ ————— } w_2 \text{ ————— } \dots \text{ ————— } w_{k-2} \text{ ————— } w_{k-1} \text{ ————— } w_k$$

Figura 4.3: Camino de (w_0, \dots, w_n)

Definición 4.8. Diremos que un marco de Alexandroff $\mathfrak{M} = (M, \preceq)$ *conecta caminos* si para cualesquiera $u, v \in M$, existe un camino $(w_0, \dots, w_n) \subseteq M$ tal que $w_0 = u$ y $w_n = v$.

Un espacio topológico (X, τ) es *disconexo*, si existen dos abiertos ajenos no vacíos U_1 y U_2 en la topología τ que forman una partición para X . Con lo cual, los conjuntos $U_1 = X \setminus U_2$ y $U_2 = X \setminus U_1$ son cerrados, es decir, U_1 y U_2 son cerrados y abiertos (cerrado-abiertos). De lo anteriormente definido, diremos que un espacio es *conexo*, si dicho espacio no es *disconexo*.

En virtud del *Teorema 2.15*, diremos que en el espacio topológico (M, τ_{\preceq}) es *disconexo*, si existen dos cerrado-abiertos U_1 y U_2 ajenos no vacíos tales que $M = U_1 \cup U_2$. En consecuencia de la topología τ_{\preceq} , si tomamos dos elementos $x \in U_j$ (con $j = 1$ ó $j = 2$), y $y \in M$ de tal forma que $x \preceq y$ ó $y \preceq x$, entonces por ser cerrado-abierto en cualquiera de los dos casos $y \in U_j$. Naturalmente, de lo analizado anteriormente, y de la definición 4.8, podemos inferir que si un marco conecta caminos, entonces su espacio topológico asociado es *conexo*. Para responder dicha afirmación, veamos el siguiente enunciado.

Lema 4.9. Sea $\mathbf{M} = (M, \preceq)$ un marco de Alexandroff. Entonces, \mathbf{M} conecta caminos sí y sólo sí el espacio topológico (M, τ_{\preceq}) es *conexo*.

Demostración: \Leftarrow] Supongamos que \mathbf{M} no conecta caminos, entonces existen $u, v \in M$ de tal manera que no existe un camino entre u y v . Consideremos los conjuntos

$$C_u = \{x \in M \mid \text{Existe un camino entre } x \text{ y } u\}$$

y

$$C_v = \{y \in M \mid \text{Existe un camino entre } y \text{ y } u\}.$$

Observe que C_u y C_v son cerrado-abiertos, en efecto, sea $x \in C_u$, y sea $y \in M$ tal que $x \preceq y$, luego (u, x, y) forma un camino que va de u al punto y , por lo tanto $y \in C_u$, de aquí que C_u sea abierto en τ_{\preceq} . De manera similar, si $y \preceq x$, entonces nuevamente tenemos un camino (u, x, y) que nos garantiza que C_u es cerrado. Por lo tanto, C_u es cerrado-abierto. De manera similar, se prueba que C_v es cerrado-abierto. Además, C_u y C_v no son vacíos, esto nos forma una desconexión para M .

\Rightarrow] Ahora, supongamos que el espacio topológico (M, τ_{\preceq}) es desconexo, entonces existen U_1 y U_2 cerrado-abiertos ajenos no vacíos, de tal manera que $U_1 \cup U_2 = X$. Puesto que, U_1 y U_2 son cerrado-abiertos, entonces para cada $x \in U_j$, si $y \preceq x$ ó bien $x \preceq y$ implicaría que $y \in U_j$ ($j = 1$ ó $j = 2$). Ahora, sean $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$; si existe un camino de x_1 a x_2 por ser U_j cerrado-abierto, dicho camino estaría contenido en U_j y, por lo tanto, $x_1, x_2 \in U_j$ lo que contradice que sean ajenos. Por lo tanto, \mathbf{M} no conecta caminos. \square

Definición 4.10. Dado un marco de Alexandroff $\mathfrak{M} = (M, \preceq)$, diremos que una sucesión $(w_0, \dots, w_k) \subseteq W$ es un *zig-zag camino* si $k = 2j$, $w_0 \preceq w_1$, $w_k \preceq w_{k-1}$ y para cada número entero $i \in (0, j)$, $w_{2i-1} \succ w_{2i} \prec w_{2i+1}$.

También, podemos ver que un *zig-zag camino* es un camino (w_0, \dots, w_k) tal que $w_0 \preceq w_1 \succ w_2 \prec \dots \succ w_{k-2} \prec w_{k-1} \succeq w_k$, pero puede suceder que $w_1 = w_0$ y $w_k = w_{k-1}$ teniendo así otra manera de expresar el *zig-zag camino* $w_1 \succ w_2 \prec w_3 \succ \dots \prec w_{k-3} \succ w_{k-2} \prec w_{k-1}$. De igual modo, debido a la definición anterior, los *zig-zag caminos* pueden tener longitud par o impar, ya que puede suceder que $w_0 = w_1$ ó bien $w_k = w_{k-1}$. Por ejemplo:

Cuando k es un número par, el *zig-zag camino* de (w_0, \dots, w_k) tiene longitud impar y sí además $w_0 \succ w_1 \prec w_2 \succ \dots \prec w_{k-2} \succ$

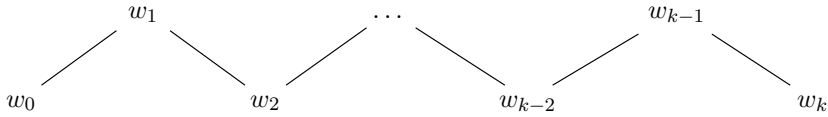


Figura 4.4: Camino de longitud par (primera versión).

$w_{k-1} \prec w_k$, podemos expresar el recorrido de dicho camino como en la figura 4.4 teniendo que ambos puntos w_0 y w_k está por debajo de w_1 y de w_{k-1} respectivamente.

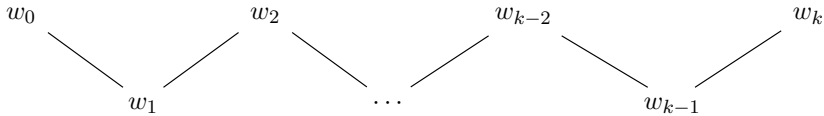


Figura 4.5: Camino de longitud par (segunda versión).

Pero también, el recorrido del camino (w_0, \dots, w_n) puede ser de la forma $w_0 \succ w_1 \prec w_2 \succ \dots \prec w_{k-2} \succ w_{k-1} \prec w_k$, su recorrido puede ser expresado como en la figura 4.5.

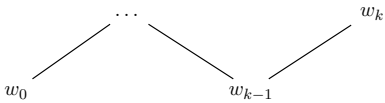


Figura 4.6: Camino de longitud impar (primera versión)

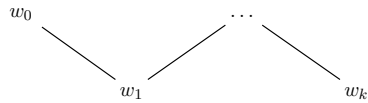


Figura 4.7: Camino de longitud impar (segunda versión)

Ahora, si k es un número impar, el *zig-zag camino* (w_0, \dots, w_k) tiene longitud par y su recorrido se puede expresar como en la figura 4.6 cuando $w_0 \prec w_1 \succ w_2 \prec \dots \prec w_{k-2} \succ w_{k-1} \prec w_k$ ó en la figura 4.7 cuando ocurre $w_0 \succ w_1 \prec w_2 \succ \dots \succ w_{k-2} \prec w_{k-1} \succ w_k$.

Observación 4.11. Sean $\mathbf{M} = (M, \preceq)$ un marco de Alexandroff finito y $W = (w_0, \dots, w_n)$ un camino que conecta los puntos u y v , entonces W tiene un *zig-zag subcamino* que conecta a ambos puntos. En efecto, suponiendo sin pérdida de la generalidad que $u \preceq w_1$ entonces existe $m_1 = \max\{j \in \mathbb{N} \mid w_0 \preceq w_j\}$, si $m_1 = n$ solo basta elegir el camino (w_0, w_n) , en caso contrario, sea $m_2 =$

$\max\{j \in \mathbb{N} \mid w_{m_1} \succeq w_j, j \in (m_1, n]\}$ si $m_2 = n$ bastaría elegir el camino (w_0, w_{m_1}, w_n) ... Continuando el mismo proceso, tenemos que el conjunto $\{w_{m_r}\}_{r \in \mathbb{N}}$ es finito pues el marco de Alexandroff $\mathbf{M} = (M, \preceq)$ es finito. Sea $t = \max\{r \in \mathbb{N} \mid w_{m_r} \in W\}$ y definamos $W' = (w_0, w_{m_1}, \dots, w_{m_t})$, claramente W' es un subcamino de W y además por construcción W' es un *zig-zag camino*, note que $w_{m_t} = w_n$ en caso contrario $w_{m_t} \prec w_{m_t+1}$ ó bien $w_{m_t} \succ w_{m_t+1}$ y podemos repetir la misma construcción lo que contradice la maximalidad de t . Por lo tanto, W' es el *zig-zag camino* deseado.

Nuestro siguiente objetivo es dar una interpretación al símbolo relacional γ , naturalmente por lo estudiado en esta sección, el modelo que nos garantiza esto son los asociados a una realización geométrica de un modelo simplicial. A continuación, presentaremos algunas definiciones y resultados que nos permiten este estudio.

Definición 4.12. Dado un modelo de Alexandroff $\mathfrak{M} = (M, \preceq, \|\cdot\|)$ y una fórmula φ , definimos la relación $R_{\mathfrak{M}}^{\varphi}$ en M , como sigue $wR_{\mathfrak{M}}^{\varphi}v$ si existe $u \in \|\varphi\|$ que cumple lo siguiente:

- A) $w \preceq u \succeq v$, ó bien;
- B) $wR_{\mathfrak{M}}^{\varphi}u, uR_{\mathfrak{M}}^{\varphi}v, u \neq v$ y $u \neq w$.

Además, el número de ocurrencias de la relación $R_{\mathfrak{M}}^{\varphi}$ es mínimo.

A la relación descrita de la definición anterior le llamaremos *relación de accesibilidad*. Dicha relación dependerá fuertemente del modelo \mathfrak{M} .

Denotaremos a la relación $R_{\mathfrak{M}}^{\varphi}$, como R^{φ} cuando nos sea posible.

Además, si tomamos dos elementos $u, v \in M$ tales que $uR^{\varphi}v$, no garantiza que u y v sean elementos de $\|\varphi\|$.

Dado un modelo de Alexandroff $\mathfrak{M} = (M, \preceq, \|\cdot\|)$ y dos elementos $u, v \in M$ tales que $uR_{\mathfrak{M}}^{\varphi}v$, entonces debido a la minimalidad de la relación $R_{\mathfrak{M}}^{\varphi}$ el conjunto de elementos de $\|\varphi\|$ que garantizan la *relación de accesibilidad* aparecen sin repetición.

El siguiente resultado nos garantiza que la relación definida en la Definición 4.12, forma un *zig-zag camino* con ciertas propiedades.

Lema 4.13. Sea φ una fórmula, y $\mathfrak{M} = (M, \preceq, \|\cdot\|)$ un modelo de Alexandroff finito, entonces para cualesquiera $u, v \in M$ los siguientes enunciados son equivalentes:

- a) $uR^\varphi v$
- b) Existe un *zig-zag camino* $W = (w_0, \dots, w_n)$ tal que $w_0 = u$, $w_n = v$ y $w_j \in \|\varphi\|$ para cada número entero $j \in (0, n)$.

Demostración:

a) \Rightarrow b)] Haremos la prueba por inducción sobre el número k de ocurrencias de la relación R .

Para $k = 1$; por Definición 4.12, esto obliga que se cumpla A), con lo cual existe $w \in \|\varphi\|$ tal que $u \preceq w \succeq v$ el *zig-zag camino* deseado.

Si el número de ocurrencias de la relación R es j donde $1 \leq j \leq n$; supongamos que existe un *zig-zag camino* (w_0, \dots, w_l) tal que $w_0 = u$, $w_l = v$ y $w_i \in \|\varphi\|$ para cada número entero $i \in [0, l]$. Por demostrar que para $n + 1$, esto también se cumple.

Para $n + 1$; como $uR^\varphi v$, por la Definición 4.12, existe $w \in \|\varphi\|$ tal que cumple A) ó B), pero $n + 1 > 1$, esto obliga a que se cumpla B), así existe $w \in \|\varphi\|$ tal que $uR^\varphi w$ y $wR^\varphi v$, por la minimalidad de la *relación de accesibilidad* el número de ocurrencias de dicha relación tanto en el caso que $uR^\varphi w$ ó bien $wR^\varphi v$ ocurren a lo más n veces, y por hipótesis inductiva existen *zig-zag caminos* (w_0, \dots, w_{l_1}) y (w'_0, \dots, w'_{l_2}) tales que $w_0 = u$, $w_{l_1} = w$, $w'_0 = w$, $w'_{l_2} = v$ y tales que $w_i, w'_i \in \|\varphi\|$ para cada número entero i . Así obteniendo el camino $(w_0, \dots, w_{l_1}, w'_0, \dots, w'_{l_2})$ y por 4.11 obtenemos el *zig-zag camino* deseado.

b) \Rightarrow a)] Ahora, sean $u, v \in M$ y supongamos que existe un *zig-zag camino* (w_0, \dots, w_k) tal que $w_0 = u$, $w_k = v$ y $w_j \in \|\varphi\|$ para cada número entero $j \in [0, k]$. En caso de que $k = 0$, $k = 1$ y $k = 2$ es claro, tomando el camino $w_0 \preceq w_1 \succeq w_2$ que justifica que $w_0R^\varphi w_2$.

Ahora, supongamos que para cada $j > 2$, todo *zig-zag camino* $W = (w_0, \dots, w_j)$ que cumple b), también cumple que $w_0R^\varphi w_j$.

Para $k = j + 1$; por hipótesis inductiva tenemos que $w_0R^\varphi w_2$, $w_2R^\varphi w_{j+1}$ y además $w_2 \in \|\varphi\|$, por lo tanto, $w_0R^\varphi w_{j+1}$. Esto finaliza la demostración. \square

Por el Lema 4.13, a los *zig-zag caminos* generados por la relación R^φ les llamaremos φ -caminos.

Observación 4.14. *Si consideramos un φ -camino $W = (w_0, \dots, w_n)$ que conecta a los puntos u y v , entonces nuevamente por el Lema 4.13 cada subcamino de W que es un zig-zag camino es nuevamente un φ -camino.*

Los φ -caminos dependen fuertemente de la fórmula φ , también para cada fórmula ψ o θ , obtenemos de manera similar los ψ -caminos y los θ -caminos.

Observación 4.15. Si consideramos un φ -camino $W = (w_0, \dots, w_n)$ de tal forma que $w_0 \succeq w_1$, entonces por la observación anterior $w_0 R^\varphi w_1$, entonces existe $u \in \|\varphi\|$ tal que $w_0 \preceq u \succeq w_1$ por ser w_0 el primer elemento de W , entonces $w_0 = u$ con lo cual $w_0 \in \|\varphi\|$.

De manera similar, se tiene que si $w_{n-1} \preceq w_n$, entonces $w_n \in \|\varphi\|$.

Observación 4.16. Si tomamos un *zig-zag camino* $W = (w_0, \dots, w_{2n})$ que conecta a u con v y que tenga longitud mínima, puede suceder que $w_0 \prec w_1 \succ w_2 \prec w_3 \succ \dots \prec w_{2n-1} \succeq w_{2n}$ (tiene por recorrido la Figura 4.4 o 4.6), ó bien $w_0 \succ w_1 \prec w_2 \succ w_3 \prec \dots \succ w_{2n-1} \preceq w_{2n}$ (tiene por recorrido la Figura 4.5 o 4.7).

En el primer caso, para cada número entero $k \in (0, n)$, $[w_{2k}]^{\preceq} \cap W = (w_{2k-1}, w_{2k}, w_{2k+1})$. Suponiendo lo contrario, existe $w_j \in [w_{2k}]^{\preceq} \cap W$ y tal que $j \notin [k-1, k+1]$; supongamos sin pérdida de la generalidad que $(w_0, w_1, \dots, w_j, \dots, w_{k-1}, w_k, w_{k+1}, \dots, w_{2n})$ pero $w_j \succeq w_k$ con ello podemos acortar el camino W al siguiente camino $(w_0, w_1, \dots, w_j, w_k, w_{k+1}, \dots, w_{2n})$ lo que contradice la minimalidad de la longitud de W . De manera similar podemos ver que $[w_0]^{\preceq} \cap W = (w_0, w_1)$, $[w_{2n}]^{\preceq} \cap W = (w_{n-1}, w_n)$ y $[w_{2k+1}]^{\preceq} \cap W = (w_{2k+1})$ para cada número entero $k \in [0, n-1]$.

En el segundo caso, podemos demostrar de manera análoga que $[w_{2k}]^{\preceq} \cap W = (w_{2k})$ para cada $k \in [0, n]$ y $[w_{2k+1}]^{\preceq} \cap W = (w_{2k}, w_{2k+1}, w_{2k+2})$ para cada número entero $k \in [0, n-1]$.

De la observación anterior, podemos tener un resultado análogo para los conjuntos cerrados $[v]^{\succeq}$, teniendo lo siguiente en el primer caso:

- $[w_{2k}]^{\succeq} \cap W = (w_{2k})$, para cada número positivo $k \in [0, n]$;
- $[w_{2k+1}]^{\succeq} \cap W = (w_{2k}, w_{2k+1}, w_{2k+2})$, para cada número positivo $k \in [0, n)$.

Y en el segundo caso:

- $[w_{2k}]^{\succeq} \cap W = (w_{2k-1}, w_{2k}, w_{2k+1})$, para cada número positivo $k \in (0, n)$;
- $[w_0]^{\succeq} \cap W = (w_0, w_1)$;
- $[w_{2n}]^{\succeq} \cap W = (w_{2n-1}, w_{2n})$;
- $[w_{2k+1}]^{\succeq} \cap W = (w_{2k+1})$, para cada número positivo $k \in [0, n)$.

Ahora, analizaremos un resultado que nos da una conexión con los φ -caminos y los caminos topológicos de un modelo de Alexandroff.

Lema 4.17. Sean $\mathfrak{M} = (M, \preceq, \|\cdot\|)$, $u, v \in M$ y una fórmula φ . Los siguientes enunciados son equivalentes:

- a) Existe un *zig-zag camino* $W = (w_0, \dots, w_n)$ tal que $w_0 = u$, $w_n = v$ y $w_j \in \|\varphi\|$ para cada número entero $j \in (0, n)$.
- b) Hay un camino topológico $\pi : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\pi(0) = u$, $\pi(1) = v$ y $\pi(t) \in \|\varphi\|$ para cada $t \in (0, 1)$.

Demostración: a) \Rightarrow b)] Consideremos un φ -camino $W = (w_0, \dots, w_m)$ que conecta a u con v que tenga longitud mínima.

Tenemos dos casos, cuando m es un número par o cuando m es impar. Si m es impar, entonces $m+1 = 2k$ para algún número $k \geq 0$; para cada número natural k , considere funciones $\pi_k : [0, 1] \rightarrow M$ tales que:

- 1) Si $W = (w_0)$; $\pi_0(x) = w_0$ para cada $x \in [0, 1]$.

II) Si W toma la forma de la Figura 4.5;

$$\pi_k(x) = \begin{cases} w_0 & \text{si} & x \in [0, \frac{1}{k+1}) \\ w_{2j+1} & \text{si} & x = \frac{j}{k+1} \text{ para cada } j \in [1, k-1] \\ w_{2j} & \text{si} & x \in (\frac{j}{k+1}, \frac{j+1}{k+1}) \text{ para cada } j \in [0, k-1] \\ w_{2k} & \text{si} & x \in (\frac{k}{k+1}, 1] \end{cases}$$

III) Si W toma la forma de la Figura 4.4;

$$\pi_k(x) = \begin{cases} w_{2j} & \text{si} & x = \frac{j}{k} \\ w_{2j+1} & \text{si} & x \in (\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}) \text{ para cada } j \in [0, k] \end{cases}$$

Mostremos por inducción sobre k que cada π_k es continua.

Para $k = 0$; entonces $m = 0$ y $W = (w_0)$. Para cada abierto $U \in \tau_{\leq}$, $w_0 \in U$ ($\pi_0(U) = [0, 1]$) ó bien $w_0 \notin U$ ($\pi_0(U) = \emptyset$), en cualquiera de los casos podemos concluir que π_0 es una función continua. Además, como $W = (w_0)$ es un φ -camino, entonces $\pi_0(t) = w_0 \in \|\varphi\|$ para cada $t \in [0, 1]$. Esto concluye el caso base.

Para cada $n > 0$; supongamos que π_n es continua.

Mostremos que sucede este hecho para $k = n + 1$; Supongamos sin pérdida de la generalidad que $W = (w_0, w_1, \dots, w_{2n}, w_{2n+1}, w_{2n+2})$ es de la forma 4.5, entonces $W' = (w_0, w_1, \dots, w_{2n})$ también es de la forma 4.5. Consideremos la función $f : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{n}{n+1}]$ tal que $f(x) = \frac{n}{n+1}x$, claramente f es un homeomorfismo. Sea $\gamma_n = \pi_{n+1}|_{[0, \frac{n}{n+1}]}$ y $g_n = \gamma_n \circ f : [0, 1] \rightarrow M$, entonces para cada $x \in [0, 1]$:

- Si $x = 0$; entonces $g_n(0) = \gamma_n \circ f(0) = \gamma_n(0) = \pi_{n+1}(0) = w_0$.
- Si $x = \frac{j}{n}$; entonces $g_n(\frac{j}{n}) = \gamma_n \circ f(\frac{j}{n}) = \gamma_n(\frac{n}{n+1}(\frac{j}{n})) = \gamma_n(\frac{j}{n+1}) = \pi_{n+1}(\frac{j}{n+1}) = w_{2j+1}$.
- Si $x \in (\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})$, entonces $x \frac{n}{n+1} \in (\frac{j}{n+1}, \frac{j+1}{n+1})$; entonces $g_n(x) = \gamma_n \circ f(x) = \gamma_n(\frac{n}{n+1}x) = \pi_{n+1}(\frac{n}{n+1}x) = w_{2j}$.

- Si $x \in (\frac{n-1}{n}, 1)$, entonces $x \frac{n}{n+1} \in (\frac{n-1}{n+1}, \frac{n}{n+1})$; entonces $g_n(x) = \gamma_n \circ f(x) = \gamma_n(\frac{n}{n+1}x) = \pi_{n+1}(\frac{n}{n+1}x) = w_{2n}$.

Es decir $\pi_n|_{[0,1]} = g_n$, por hipótesis inductiva g_n es continua y, por lo tanto, $\gamma_n = g_n \circ f^{-1}$ es continua. De manera análoga, se puede demostrar que la función $\psi_n = \pi_{n+1}|_{(\frac{1}{n+1}, 1]}$ es continua. Por un lado,

$$\psi_n|_{(\frac{1}{n+1}, 1] \cap [0, \frac{n}{n+1})} = \psi_n|_{(\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1})} = \gamma_n|_{(\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1})} = \psi_n|_{(\frac{1}{n+1}, 1] \cap [0, \frac{n}{n+1})}$$

y como $(\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1})$ es un abierto en $[0, 1]$, entonces $\pi_{n+1} = \gamma_n \cup \psi_n$ es continua. Por lo tanto, π_{n+1} es una función continua. Por otro lado, por 4.14 (w_0, w_1) es un φ -camino, con lo cual $\pi_{n+1}((0, 1)) \subseteq \|\varphi\|$, $\pi_{n+1}(0) = w_0 = u$ y $\pi_{n+1}(1) = w_{2n+2} = v$.

Si (w_0, \dots, w_{2n+2}) es de la forma 4.4, podemos hacer un razonamiento similar a lo hecho anteriormente para demostrar que la función π_{n+1} es continua y además no es difícil ver que $\pi((0, 1)) \subseteq \|\varphi\|$, $\pi(0) = w_0 = u$ y $\pi(1) = w_{2n+2} = v$.

Ahora, supongamos que m es impar, entonces existe un número entero $k \geq 0$ tal que $m = 2k + 1$ y así el camino $W = (w_0, \dots, w_{2k+1})$ puede ser de la forma 4.6 o 4.7.

Si W es de la forma 4.6, tenemos que el camino $W' = (w_0, \dots, w_{2k})$ es también un φ -camino y tiene la forma 4.4. Por lo que hemos hecho previamente, existe un camino topológico $\theta : [0, 1] \rightarrow W'$ que cumple *b*). Si definimos $f_1 : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ tal que $f_1(x) = \frac{1}{2}x$, entonces f_1 es un homeomorfismo y, por lo tanto, $\theta' = \theta \circ f_1 : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow W'$ es una función continua y definamos $\pi : [0, 1] \rightarrow W$ tal que:

$$\pi(x) = \begin{cases} \theta'(x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ w_{2k+1} & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Sea $\pi_* = \pi|_{[0, \frac{1}{2}]}$ y $\pi_{**} = \pi|_{[\frac{1}{2}, 1]}$, entonces

$$\pi_*|_{[0, \frac{1}{2}] \cap [\frac{1}{2}, 1]} = \pi_*|_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} = \pi_{**}|_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} = \pi_{**}|_{[0, \frac{1}{2}] \cap [\frac{1}{2}, 1]}$$

Y como $[0, \frac{1}{2}] \cap [\frac{1}{2}, 1]$ es cerrado en $[0, 1]$, entonces $\pi = \pi_* \cup \pi_{**}$ es continua. Simétricamente, a lo hecho en el caso anterior, $\pi((0, 1)) \subseteq \|\varphi\|$, $\pi(0) = w_0 = u$ y $\pi(1) = w_{2k} = v$.

Por último, si π tiene la forma 4.7 podemos hacer un razonamiento similar al párrafo anterior para construir el camino topológico deseado.

Así hemos demostrado que la existencia de φ -caminos que conectan dos puntos u y v implica la existencia de un camino topológico $\pi : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\pi(0) = u$, $\pi(1) = v$ y $\pi(t) \in \|\varphi\|$ para cada $t \in (0, 1)$.

$b) \Rightarrow a)$] Ahora supongamos la existencia de un camino topológico $\pi : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\pi(0) = u$, $\pi(1) = v$ y $\pi(t) \in \|\varphi\|$ para cada $t \in (0, 1)$. Notemos que $(0, 1)$ es un espacio topológico conexo y por ser π una función continua, entonces $\pi((0, 1))$ es un subespacio conexo de (M, τ_{\leq}) . Nuevamente, por la continuidad de π , $\pi(0) = u$ y $\pi(1) = v$ son puntos de adherencia de $\pi((0, 1))$, luego existen $u_1, v_1 \in \pi((0, 1))$ tales que $u \preceq u_1$ y $v \preceq v_1$. Por el Lema 4.9, como $\pi((0, 1))$ conecta caminos particularmente hay un camino que conecta al punto v_1 con el punto u_1 , así podemos definir un camino $W = (u, u_1, w_1, \dots, w_n, v_1, v)$ que además cumple que $(u_1, w_1, \dots, w_n, v_1) \subseteq \pi((0, 1)) \subseteq \|\varphi\|$, por la Observación 4.11 hay un *zig-zag subcamino* que conecta a los puntos u y v , dicho camino es el requerido para finalizar esta demostración. \square

La prueba anterior, afirma que sí existe un φ -camino que conecta los puntos u y v de tal manera que $v \in \|\theta\|$ equivale a que $(\mathfrak{M}, u) \models \gamma(\varphi, \theta)$.

4.1.2. El acompañante de Kripke.

Dado un modelo poliédrico $\mathcal{K} = (K, \|\cdot\|)$, no es difícil notar que la relación definida en la Observación 1.2 “ \leq ” es reflexiva y transitiva, además por el Teorema 2.15 el par $K_{\leq} = (P, \tau_{\leq})$ forma una topología de Alexandroff.

Ya tenemos las suficientes herramientas para poder interpretar la fórmula γ de nuestro lenguaje \mathcal{L}_{γ} en los modelos de Alexandroff, pero estas mismas ideas las podemos trabajar en la realización geométrica de un complejo simplicial. Para ello, veamos la siguiente definición.

Definición 4.18. Para un modelo poliédrico $\mathcal{K} = (K, \|\cdot\|)$, definimos su *acompañante de Kripke* como el modelo $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) = (K, \tau_{\leq}, \|\cdot\|)$, donde los puntos de dicho modelo son los simplejos

de K , \leq es la relación descrita en 1.2 y $\|\cdot\|$ es la misma función de valuación que la del modelo poliédrico \mathcal{K} .

Definimos la función $\zeta : |K| \rightarrow K$, cuya regla de correspondencia es $\zeta(x) = \sigma_x$, donde σ_x es el simplejo tal que $x \in \langle \sigma_x \rangle$, podemos observar que ζ está bien definida, pues el conjunto $\{\langle \sigma \rangle \mid \sigma \text{ es un simplejo de } K\}$ forma una partición en $|K|$ (ver Nota 1.25).

El siguiente resultado da una relación entre los caminos topológicos sobre el modelo de Alexandroff $\mathcal{K} = (K, \|\cdot\|)$ y los caminos topológicos de su acompañante de Kripke $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$.

Lema 4.19. Sea $\mathcal{K} = (K, \|\cdot\|)$ un modelo poliédrico. Entonces, la función $\zeta : |K| \rightarrow K$ es continua con la topología de Alexandroff τ_{\leq} .

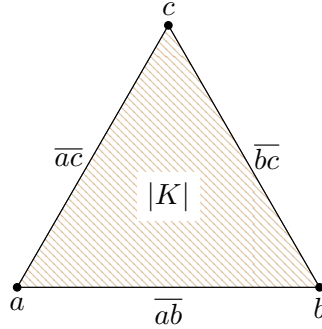
Demostración: Mostremos que ζ es una función continua; sea U un conjunto abierto en τ_{\leq} , entonces $\zeta^{-1}(U) = \bigcup_{\sigma \in U} \langle \sigma \rangle$. Para cada simplejo $\beta \in |K|$, $A = |\beta| \cap \zeta^{-1}(U)$ es un abierto en $|\beta|$. En efecto, si $|\beta| \cap \zeta^{-1}(U) = \emptyset$ terminamos, en caso contrario sea $x \in |\beta| \cap \zeta^{-1}(U)$, luego existe $\sigma_x \in U$ tal que $x \in \langle \sigma_x \rangle$, entonces $x \in |\beta| \cap \langle \sigma_x \rangle$, por las definiciones 1.19 y 1.24, $\text{sop}(x) = \sigma_x$ y $\text{sop}(x) \subseteq \beta$ con lo cual $\sigma_x \subseteq \beta$ y con ello $\langle \sigma_x \rangle \subseteq |\sigma_x| \subseteq |\beta|$, con lo cual $|\beta| \cap \zeta^{-1}(U) = \bigcup_{x \in A} \langle \sigma_x \rangle$ que es un abierto en $|\beta|$. Por lo tanto, $\zeta|_{|\beta|}$ es continua para cada $\beta \in K$ por Teorema 1.21 la función ζ es continua. \square

Ejemplo 4.20. Consideremos el complejo simplicial $K = \mathcal{P}(\{a, b, c\}) \setminus \{\emptyset\}$, entonces podemos representar a la realización geométrica del complejo simplicial K ($|K|$) como sigue:

Donde \overline{xy} denota todos los puntos que están entre los vértices x y y . Examinemos los siguientes casos:

- $\zeta(a) = \{a\}$;
- $\zeta(x) = \{a, b\}$ si x pertenece al interior del segmento \overline{ab} ;
- $\zeta(x) = \{a, b, c\}$ si x pertenece al interior del triángulo $|K|$.

El siguiente resultado da una conexión con los caminos generados por la relación \leq descrita en 1.2 de un complejo simplicial K y los caminos topológicos en la relación geométrica de dicho complejo simplicial $|K|$.

Figura 4.8: $|K|$

Lema 4.21. Sea $\mathcal{K} = (K, \|\cdot\|)$ un modelo poliédrico, donde K es finito, además, sean $x, y \in |K|$ y N un conjunto finito de simplejos de K . Si existe un *zig-zag camino* $(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ que conecta los puntos $\zeta(x)$ y $\zeta(y)$, donde $N = \{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$, entonces hay un camino topológico de x a y que pasa por cada $\langle \sigma \rangle$, de tal manera que $\sigma \in N$.

Demostración: Supongamos que existe un *zig-zag camino* $(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ que conecta los puntos $\zeta(x)$ y $\zeta(y)$, además $N = \{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$. Construiremos de manera recursiva los caminos topológicos $\pi : [0, 1] \rightarrow |K|_d$.

Para $n = 0$; entonces $N = \{\sigma_0\}$, definimos la función $\pi_0 : [0, 1] \rightarrow |K|_d$ tal que $\pi_0(t) = (1-t)x + ty$. No es difícil notar que dicha función es continua con la métrica d . Además, para cada $t \in [0, 1]$, $\pi_0(t) \in \langle \sigma_0 \rangle$ pues

$$\sum_{v \in V} \pi_0(t) = \sum_{v \in V} [(1-t)x + ty] = (1-t) \sum_{v \in V} x + t \sum_{v \in V} y = 1-t+t = 1$$

y, por otro lado, si suponemos que $\text{sop}(x) = \{v_1, \dots, v_m\} = \sigma_0$ y $\text{sop}(y) = \{v'_1, \dots, v'_m\} = \sigma_0$, entonces para cada $t \in (0, 1)$ y cada número entero $k \in [0, m]$, $(1-t)v_k \in (0, 1)$ y $tv'_k \in (0, 1)$, así $\pi_0(t) = (1-t)v_k + tv'_k > 0$, esto implica que $\text{sop}(\pi_0(t)) = \text{sop}(x) = \text{sop}(y)$. Por lo tanto, π_0 es el *camino topológico* deseado.

Para $n = 1$; entonces $N = \{\sigma_0, \sigma_1\}$ donde $x \in \sigma_0$ y $y \in \sigma_2$, definimos la función $\pi_1 : [0, 1] \rightarrow |K|_d$ tal que $\pi_1(t) = (1-t)x + ty$.

También, no es difícil mostrar que π_1 es continua con la métrica d y similar al párrafo anterior $\sum_{v \in V} \pi_1(t) = 1$. Ahora, mostremos que $\pi_1([0, 1]) \subseteq \langle \sigma_0 \rangle \cup \langle \sigma_1 \rangle$. Por hipótesis, (σ_0, σ_1) es un *zig-zag camino*, así podemos suponer sin pérdida de la generalidad que $\text{sop}(x) = \{v_1, \dots, v_{m_0}\} = \sigma_0$ y $\text{sop}(y) = \{v'_1, \dots, v'_{m_1}\} = \sigma_1$. Claramente, $\pi_1(\{0\}) = \sigma_0$ y $\pi_1(\{1\}) = \sigma_1$. Por ser un *zig-zag camino*, $\sigma_0 \subset \sigma_1$ ó bien $\sigma_1 \subseteq \sigma_0$; en el primer caso, para cada $t \in (0, 1)$ y para cada $k \in [0, m_1]$, $(1-t)v_k \in [0, t)$ y $tv'_k \in (0, 1)$, así $\pi_1(t) = (1-t)v_k + tv'_k > 0$, esto implica que $\text{sop}(\pi_1(t)) = \text{sop}(y)$, con lo cual $\pi_1((0, 1)) \subseteq \langle \sigma_1 \rangle$. En el segundo caso, para cada $t \in (0, 1)$ y para cada $k \in [0, m_0]$, $(1-t)v_k \in (0, t)$ y $tv'_k \in [0, 1)$, así $\pi_1(t) = (1-t)v_k + tv'_k > 0$, esto implica que $\text{sop}(\pi_1(t)) = \text{sop}(x)$, es decir $\pi_1((0, 1)) \subseteq \langle \sigma_0 \rangle$.

Para cada $n > 1$; suponga que para cada *zig-zag camino* $(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$, hemos construido caminos topológicos $\pi_n : [0, 1] \rightarrow |K|_d$ que conecta a los puntos x y y , que además pasa por cada $\langle \sigma \rangle$, con $\sigma \in N$. También, cada π_n tiene la siguiente regla de correspondencia:

$$\pi_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi_{n-1}(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2(1-t)x_{n-1} + (2t-1)x_n & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Donde $x_{n-1} \in \sigma_{n-1}$ y $x_n \in \sigma_n$.

Mostremos por inducción sobre k que cada π_k cumple las propiedades requeridas.

Para $k = 0$; ya lo hemos mostrado previamente. Ahora, para cada $k = j$ supongamos que π_j cumple lo requerido.

Para $k = j + 1$; tenemos que π_{j+1} tiene la siguiente regla de correspondencia:

$$\pi_{j+1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi_j(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2(1-t)x_j + (2t-1)x_{j+1} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Por hipótesis inductiva, π_{j+1} es continua en el intervalo $[0, \frac{1}{2})$ y no es difícil notar que π_{j+1} es continua en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, y como:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} \pi_{j+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} \pi_j\left(\frac{1}{2}\right) = x_j = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^+} \pi_{j+1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Entonces π_{j+1} es continua en $|K|_d$. Por construcción para cada $t \in [0, 1]$, $\sum_{v \in V} \pi_1(t) = 1$. Análogo al caso $n = 1$, $\pi_{j+1}([\frac{1}{2}, 1]) = \langle \sigma_j \rangle \cup \langle \sigma_{j+1} \rangle$ y por hipótesis inductiva $\pi_{j+1}([0, \frac{1}{2})) \subseteq \bigcup_{m \leq j} \langle \sigma_m \rangle$, entonces

$$\pi_{j+1}([0, 1]) \subseteq \bigcup_{m \leq j+1} \langle \sigma_m \rangle.$$

Por lo tanto, cada $\pi_n : [0, 1] \rightarrow |K|_d$ es continua y por ser K finito, por Corolario 1.33 la realización geométrica $|K|$ es homeomorfo al espacio inducido por la métrica $|K|_d$. Esto finaliza la demostración. \square

Recordemos que el modelo topológico $\mathcal{K}_{top} = (|K|, \tau_K, \|\cdot\|_{top})$, consta de la realización geométrica $(|K|, \tau_K)$ y para cada fórmula atómica $p_i \in P$, $\|p_i\|_{top} = \bigcup_{S \in \|p_i\|} \langle S \rangle$. El siguiente resultado nos da una relación entre el modelo topológico \mathcal{K}_{top} con el *acompañante de Kripke* $\mathfrak{M}(K)$.

Lema 4.22. Sea $\mathcal{K} = (K, \|\cdot\|)$ un modelo poliédrico con K un complejo simplicial finito y $x \in |K|$. Entonces, para cada fórmula φ , se tiene que $(\mathcal{K}_{top}, x) \models \varphi$ sí y sólo sí $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \varsigma(x)) \models \varphi$.

Demostración: La prueba se hará por inducción sobre la complejidad de la fórmula.

Si $\varphi = p_j \in P$, entonces; $(\mathcal{K}_{top}, x) \models \varphi$ por definición 4.5 esto equivale a que $x \in \|p_j\|_{top} = \bigcup_{S \in \|p_j\|} \langle S \rangle$, por 4.18 esto pasa sí y sólo sí $\varsigma(x) \in \varsigma(\bigcup_{S \in \|p_j\|} \langle S \rangle) = \bigcup_{S \in \|p_j\|} S = \|p_j\|$, nuevamente por definición 4.5 esto equivale a que $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \varsigma(x)) \models \varphi$.

Si $\varphi = \neg\psi$, para alguna fórmula $\psi \in \mathcal{L}_\gamma$, entonces; $(\mathcal{K}_{top}, x) \models \neg\psi$ nuevamente por Definición 4.5 esto equivale a que $(\mathcal{K}_{top}, x) \not\models \psi$ y por hipótesis inductiva $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \varsigma(x)) \not\models \psi$, lo cual pasa sí y sólo sí $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \varsigma(x)) \models \neg\psi$.

Si $\varphi = \psi \wedge \theta$, para algunas fórmulas $\psi, \theta \in \mathcal{L}_\gamma$, entonces; $(\mathcal{K}_{top}, x) \models \psi \wedge \theta$ nuevamente por Definición 4.5 esto equivale a que $(\mathcal{K}_{top}, x) \models \psi$ y $(\mathcal{K}_{top}, x) \models \theta$, por hipótesis inductiva $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \varsigma(x)) \models \psi$ y $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \varsigma(x)) \models \theta$, lo cual pasa sí y sólo sí $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \varsigma(x)) \models \psi \wedge \theta$.

Si $\varphi = \Box\psi$, para alguna fórmula $\psi \in \mathcal{L}_\gamma$, entonces; $(\mathcal{K}_{top}, x) \models \Box\psi$ nuevamente por Definición 4.5 esto equivale a que $x \in \text{Int}(\|\psi\|)$, por la continuidad de ς , $\varsigma(x) \in \varsigma(\text{Int}(\|\psi\|)) = \text{Int}(\varsigma(\|\psi\|))$ esto pasa sí y sólo sí $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \varsigma(x)) \models \Box\psi$.

Si $\varphi = \gamma(\psi, \theta)$, para algunas fórmulas $\psi, \theta \in \mathcal{L}_\gamma$, entonces; $(\mathcal{K}_{top}, x) \models \gamma(\psi, \theta)$ nuevamente por Definición 4.5 existe un camino topológico π tal que $\pi(0) = x$, $\pi(1) \in \|\theta\|$ y $\pi((0, 1)) \subseteq \|\psi\|$, esto lo podemos reescribir como $\pi(0) = x$, $(\mathcal{K}_{top}, \pi(1)) \models \theta$ y para cada $t \in (0, 1)$, $(\mathcal{K}_{top}, \pi(t)) \models \theta$ por hipótesis inductiva $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \varsigma \circ \pi(1)) \models \theta$ y para cada $t \in (0, 1)$, $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \varsigma \circ \pi(t)) \models \theta$, por ser ς una función continua, entonces $\varsigma \circ \pi$ es un camino topológico en K con la topología de Alexandroff τ_{\leq} y tal que $\varsigma \circ \pi(0) = \varsigma(x)$, $\varsigma \circ \pi(1) \in \|\theta\|$ y $\varsigma \circ \pi((0, 1)) \subseteq \|\psi\|$, por Definición 4.5, se cumple que $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \varsigma(x)) \models \gamma(\psi, \theta)$.

Por otro lado, si $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \varsigma(x)) \models \gamma(\psi, \theta)$ por Definición 4.5 existe un camino topológico en la topología de Alexandroff π tal que $\pi(0) = \varsigma(x)$, $\pi(1) \in \|\theta\|$ y $\pi((0, 1)) \subseteq \|\psi\|$, por Lema 4.17 existe un φ -camino $(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ tal que $\sigma_j \in \|\psi\|$ para cada número entero $j \in [1, n-1]$, que además conecta los simplejos $\varsigma(x)$ y $\pi(1) \in \|\theta\|$. Por 4.21, hay un camino topológico π' que conecta a los puntos x y $\pi'(1)$, de tal manera que $\pi'([0, 1]) \subseteq \bigcup_{j \in \{0, \dots, n\}} \langle \sigma_j \rangle$. Afirmamos que $\pi' : [0, 1] \rightarrow |K|$ es el camino topológico que nos garantiza que $(\mathcal{K}_{top}, x) \models \gamma(\psi, \theta)$. En efecto:

- Si el ψ -camino $(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ es de la forma 4.4, entonces $\sigma_0 \leq \sigma_1$ y $\sigma_{n-1} \geq \sigma_n$, por construcción (Ver demostración de teorema 4.21) $\pi'(0) = x \in \sigma_0$, $\pi'((0, \frac{1}{2})) \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq n-1} \langle \sigma_j \rangle$ y $\pi'(\frac{1}{2}) \in \langle \sigma_n \rangle$. Como $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \sigma_j) \models \psi$ para cada número positivo $j \in [1, n-1]$, por construcción para cada $t \in [\frac{1}{2^{j-1}}, \frac{1}{2^j}]$ se tiene que $\pi'(t) \in \langle \sigma_j \rangle$, entonces $\varsigma(\pi'(t)) = \sigma_j$ y por hipótesis inductiva $(\mathcal{K}_{top}, \pi'(t)) \models \psi$ para cada $t \in (0, \frac{1}{2})$, es decir $\pi'(t) \in \|\psi\|$ para cada $t \in (0, \frac{1}{2})$, de forma similar $\pi'(\frac{1}{2}) \in \|\theta\|$, así definimos a $\pi'' : [0, 1] \rightarrow |K|$ tal que $\pi''(t) = \pi'(\frac{1}{2}t)$. Por lo tanto, $\pi''(0) = \pi'(0) = x$, $\pi''((0, 1)) = \pi'((0, \frac{1}{2})) \subseteq \|\psi\|$ y $\pi''(1) \in \|\theta\|$, por Definición 4.5 esto equivale a que $(\mathcal{K}_{top}, x) \models \gamma(\psi, \theta)$.
- Si el ψ -camino $(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ es de la forma 4.5, entonces $\sigma_1 \leq \sigma_0$ y $\sigma_n \geq \sigma_{n-1}$, por construcción (Ver demostración de teorema 4.21) $\pi'(0) = x \in \sigma_0$, $\pi'((0, \frac{1}{2})) \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq n-1} \langle \sigma_j \rangle$ y $\pi'([\frac{1}{2}, 1]) \subseteq \langle \sigma_n \rangle$. Por Observación 4.15, $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \sigma_0) \models \psi$ y $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \sigma_n) \models \psi$. Usando un razonamiento similar al paso anterior $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \sigma_j) \models \psi$ para cada número entero $j \in [0, n]$

y nuevamente por hipótesis inductiva $(\mathcal{K}_{top}, \pi'(t)) \models \psi$ para cada $t \in (0, 1)$, es decir $\pi'(t) \in \|\psi\|$ para cada $t \in (0, 1)$, $(\mathcal{K}_{top}, \pi'(1)) \models \theta$ y $\pi'(0) = x$. Por Definición 4.5 esto equivale a que $(\mathcal{K}_{top}, x) \models \gamma(\psi, \theta)$.

- Si el ψ -camino $(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ es de la forma 4.6 ó bien 4.7, la prueba se hace de manera similar a los otros dos casos.

En conclusión, $(\mathcal{K}_{top}, x) \models \varphi$ equivale a que $(\mathfrak{M}(\mathcal{K}), \varsigma(x)) \models \varphi$. □

Ejemplo 4.23. Del Ejemplo 4.20, si consideramos un modelo topológico $\mathcal{K}_{top} = (|K|, \tau_K, \|\cdot\|)$ y su acompañante de Kripke $\mathfrak{M}(\mathcal{K}_{top}) = (K, \tau_{\leq}, \|\cdot\|)$, podemos representarlos como las siguientes Figuras 4.10 y 4.9:

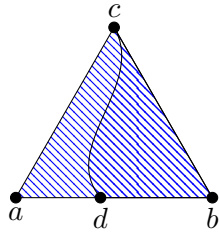


Figura 4.9: Modelo \mathcal{K}_{top}

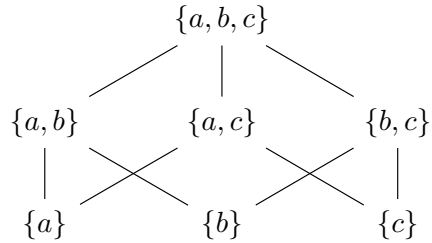
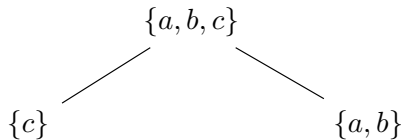


Figura 4.10: Modelo $\mathfrak{M}(\mathcal{K}_{top}) = (K, \tau_{\leq}, \|\cdot\|)$

Si consideramos un punto d' en el interior del conjunto \overline{ab} , $|c| = \{c'\}$ y un camino topológico $\pi : [0, 1] \rightarrow |K|$ tal que $\pi(0) = c'$, $\pi((0, 1)) \subseteq \text{Int}(|K|)$ y $\pi(1) = d'$, entonces $\varsigma \circ \pi : [0, 1] \rightarrow K$ tiene la siguiente relación de correspondencia $\varsigma \circ \pi(0) = \{c\}$, $\varsigma \circ \pi((0, 1)) = \{a, b, c\}$ y $\varsigma \circ \pi(1) = \{a, b\}$, teniendo el siguiente zig-zag camino:



4.2. El nervio de un modelo de Alexandroff.

Algo que podemos notar de lo hecho anteriormente es que existen *conjuntos parcialmente ordenados* que no son isomorfos a un *acompañante de Kripke* de un modelo poliédrico. Para esta afirmación, veamos lo siguiente.

Ejemplo 4.24. Consideramos al conjunto

$$T = \{a, b, c, d\}$$

Definimos la relación binaria \leq sobre el conjunto T como; $a \leq c$, $a \leq d$, $b \leq c$ y $b \leq d$, pero a no es comparable con b y c no es comparable con d .

Esto se puede representar en el siguiente diagrama:

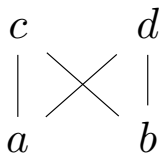


Figura 4.11: $\mathfrak{T} = (T, \leq, \|\cdot\|)$

Si suponemos que existe un modelo poliédrico $\mathcal{K} = (K, \|\cdot\|)$ tal que $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \cong \mathfrak{T}$, entonces existe un isomorfismo de modelos $f : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{K})$. Si $K = (V, P)$, por ser f una función biyectiva, $|S| = 4$. Si $f(x) = \sigma_x$, para cada $x \in T$, entonces $|\sigma_a| = 1$, en efecto tomemos un vértice $v \in \sigma_a$, luego por definición de complejo simplicial $\{v\}$ es un simplejo y además $\{v\} \subseteq \sigma_a = f(a)$ como f es isomorfismo existe $y \in T$ tal que $f(y) = \{v\}$, por Definición 2.17 esto pasa sí y sólo sí yRa como a es elemento \leq -mínimo $y = a$, por lo tanto, $\sigma_a = \{v\}$, análogamente $|\sigma_b| = 1$. Supongamos, sin pérdida de la generalidad, que $\sigma_b = \{w\}$, entonces $\sigma_c = \{v, w\}$. En caso contrario, existe un vértice $z \in \sigma_c$, tal que $v \neq z \neq w$ luego $\{z\}$ es un simplejo que no es comparable con σ_a , ni con σ_b , por lo tanto, T tiene tres elementos \leq -mínimos una contradicción. De igual manera, $\sigma_d = \{v, w\}$, con lo cual $\sigma_d = \sigma_c$, esto contradice

que $|S| = 4$. Por lo tanto, \mathfrak{T} no es isomorfo a algún *acompañante de Kripke* de un modelo poliédrico.

A los modelos de Alexandroff $\mathcal{M} = (M, \preceq, \|\cdot\|)$ donde (M, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado, es decir, \preceq es *reflexiva, transitiva y antisimétrica*, les llamaremos *Modelos parcialmente ordenados*.

4.2.1. Definición y algunos resultados.

Definición 4.25. Sean (W, R) y (W', R') marcos de Alexandroff. Una función $f : W \rightarrow W'$ es llamada *p-morfismo* si:

- wRv implica que $f(w)R'f(v)$;
- $f(w)R'v'$, implica que existe $v \in W$ tal que wRv y $v' = f(v)$.

Dado un conjunto parcialmente ordenado $\mathscr{W} = (W, \preceq)$, definimos el conjunto

$$N(W) = \{\sigma = \{w_0, \dots, w_n\} \mid \sigma \subseteq [x]^\preceq, \text{ para algún } x \in M \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$$

Claramente, $(N(W), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Así, definamos la siguiente función $max : N(W) \rightarrow W$ que asigna a cada $c \in N(W)$ su elemento máximo $max(c)$.

Ahora, si consideramos el marco de Alexandroff $(N(W), \subseteq)$, asociado al modelo parcialmente ordenado $\mathscr{W} = (W, \preceq, \|\cdot\|)$ y consideramos una función $\|p\|^N = \{c \in N(W) \mid max(c) \in \|p\|\}$, podemos definir el *Modelo Nervioso* $N(\mathscr{W}) = (N(W), \subseteq, \|\cdot\|^N)$. En virtud de lo hecho anteriormente, podemos enunciar lo siguiente.

Teorema 4.26. Para cada modelo parcialmente ordenado finito $\mathscr{W} = (W, \preceq, \|\cdot\|)$, existe un modelo poliédrico \mathcal{K} tal que $N(\mathscr{W}) = \mathfrak{M}(\mathcal{K})$.

Demostración: Afirmamos que $K = (W, N(\mathscr{W}))$ es un complejo simplicial. En efecto, para cada $w \in W$, $\{w\} \subseteq [w]^\preceq$ por lo que $\{w\} \in N(\mathscr{W})$. Por otro lado, sea $\sigma \subseteq W$ tal que $\sigma \subseteq \sigma_0$ para algún $\sigma_0 \in N(\mathscr{W})$, entonces existe un $w \in W$ tal que $\sigma \subseteq \sigma_0 \subseteq [w]^\preceq$, por lo que $\sigma \in N(\mathscr{W})$.

Ahora, definamos el modelo poliedro $\mathcal{K} = (K, \|\cdot\|^N)$ y consideremos el acompañante de Kripke $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) = (K, \preceq, \|\cdot\|^N)$. Por lo hecho anteriormente, es claro que $N(\mathscr{W}) = \mathfrak{M}(\mathcal{K})$. \square

Definición 4.27. Sean $\mathcal{M} = (W, \preceq, \|\cdot\|)$ y $\mathcal{M}' = (W', \preceq', \|\cdot\|')$ dos modelos parcialmente ordenados. Una función $f : W \rightarrow W'$ es un *zig-zag morfismo* si cumple lo siguiente:

- Para cada $w \in W$, $w \in \|p\|$ sí y sólo sí $f(w) \in \|p\|'$;
- Si $u \preceq w \succeq v$, entonces $f(u) \preceq f(w) \succeq f(v)$;
- Si $f(w) \preceq u' \succeq v'$, entonces existe un *zig-zag camino* (w_0, \dots, w_n) tal que $w_0 = w$, $f(w_n) = v'$ y para cada número entero $k \in (0, n)$, $f(w_k) = u'$.

Corolario 4.28. Todo *zig-zag morfismo* es un *p-morfismo*

Demostración: Sean $\mathcal{M} = (W, \preceq, \|\cdot\|)$ y $\mathcal{M}' = (W', \preceq', \|\cdot\|')$ dos modelos parcialmente ordenados y $f : W \rightarrow W'$ un *zig-zag morfismo*.

Consideremos $u, v \in M$, tales que $u \preceq v$, con lo cual $u \preceq v \succeq u$, por Definición 4.27 esto pasa sí y sólo sí $f(u) \preceq f(v) \succeq f(u)$, es decir $f(u) \preceq f(v)$.

Ahora sean $w \in W$ y $v' \in W'$, tales que $f(w) \preceq v'$, con lo cual $f(w) \preceq v' \succeq v'$, nuevamente por Definición 4.27, existe un *zig-zag morfismo* (w_0, w_1, \dots, w_n) tales que $w_0 = w$ y $f(w_1) = v'$, esto termina la prueba. \square

Lema 4.29. Sean $\mathcal{M} = (W, \preceq, \|\cdot\|)$ y $\mathcal{M}' = (W', \preceq', \|\cdot\|')$ dos modelos finitos parcialmente ordenados y $f : W \rightarrow W'$ un *zig-zag morfismo*. Entonces, para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_\gamma$, $\|\varphi\| = f^{-1}(\|\varphi\|')$.

Demostración: La prueba procederá por inducción sobre la complejidad la fórmula.

Para $\varphi = p$ es una fórmula atómica; por Definición 4.27 $w \in \|p\|$ sí y sólo sí $f(w) \in \|p\|'$ equivale a que $w \in f^{-1}(\|p\|')$.

Para $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$; entonces $w \in \|\varphi\| = \|\varphi_1 \wedge \varphi_2\| = \|\varphi_1\| \cap \|\varphi_2\|$ y por hipótesis inductiva, $w \in f^{-1}(\|\varphi_1\|') \cap f^{-1}(\|\varphi_2\|') = f^{-1}(\|\varphi_1\|' \cap \|\varphi_2\|') = f^{-1}(\|\varphi\|')$.

Para $\varphi = \neg\psi$; si $w \in \|\varphi\| = \|\neg\psi\|$ lo cual equivale a que $w \notin \|\psi\|'$ y por hipótesis inductiva, $w \notin f^{-1}(\|\psi\|')$, así $w \in f^{-1}((\|\psi\|')^c) = f^{-1}(\|\neg\psi\|') = f^{-1}(\|\varphi\|')$.

Para $\varphi = \Box\psi$; sea $w \in f^{-1}(\|\varphi\|')$, entonces $f(w) \in \|\varphi\|'$, por Definición $(\mathfrak{M}', f(w)) \models \Box\psi$ y esto equivale a que $(\mathfrak{M}', u') \models \psi$ para

cada $u' \succeq' f(w)$ por ser f un *zig-zag morfismo*, para cada $u' \in M'$ tal que $f(w) \preceq' u'$, existe $u \in M$ tal que $w \preceq u$ y $f(u) = u'$, por hipótesis inductiva esto sucede sí y sólo sí $(\mathfrak{M}, v) \models \psi$ para cada $v \in M$ tal que $w \preceq v$ y por Definición 2.10 esto equivale a que $(\mathfrak{M}, w) \models \Box\psi$, es decir $w \in \|\varphi\|$.

Para $\varphi = \gamma(\varphi_1, \varphi_2)$; Si $v \in \|\varphi\|$, es decir $(\mathfrak{M}, v) \models \varphi$, por Definición 4.5 existe un camino topológico $\pi : [0, 1] \rightarrow W$ en τ_{\preceq} tal que $\pi(0) = v$, $\pi((0, 1)) \subseteq \|\varphi_1\|$ y $\pi(1) \in \|\varphi_2\|$ por Lema 4.17 esto equivale a que exista un φ_1 -camino $(v, w_1, \dots, w_{2n-1}, w_{2n})$ donde $w_k \in \|\varphi_1\|$ para cada número entero positivo $k \in (0, 2n)$ y $w_{2n} \in \|\varphi_2\|$, podemos suponer sin pérdida de la generalidad que

$$v \preceq w_1 \succ w_2 \prec \dots \succ w_{2n-2} \prec w_{2n-1} \succeq w_{2n}$$

Luego, como f es un *zig-zag morfismo* tenemos que:

$$f(v) \preceq f(w_1) \succ f(w_2) \prec \dots \succ f(w_{2n-2}) \prec f(w_{2n-1}) \succeq f(w_{2n})$$

Y por hipótesis inductiva $f(w_k) \in \|\varphi_1\|$ para cada número entero positivo $k \in (0, 2n)$ y $w_{2n} \in \|\varphi_2\|$, nuevamente por Lema 4.17 existe un camino topológico $\pi' : [0, 1] \rightarrow W'$ tal que $\pi'(0) = f(v)$, $\pi'((0, 1)) \subseteq \|\varphi_1\|$ y $\pi'(1) \in \|\varphi_2\|$, por Definición 4.5 esto equivale a que $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ \square

Lema 4.30. *Para cada modelo parcialmente ordenado $\mathcal{M} = (M, \preceq, \|\cdot\|)$, la función $\max : N(W) \rightarrow W$ es un zig-zag morfismo.*

Demostración: Sean p una proposición atómica y $\sigma \in N(W)$ tal que $\sigma \in \|p\|^N$, como $\|p\|^N = \{c \in N(W) \mid \max(c) \in \|p\|\}$, esto pasa sí y sólo sí $\max(\sigma) \in \|p\|$.

Sean $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in N(W)$ y tales que $\sigma_1 \leq \sigma_2 \geq \sigma_3$, entonces $\max(\sigma_1) \preceq \max(\sigma_2) \succeq \max(\sigma_3)$.

Ahora, sean $\sigma \in N(W)$, $u', v' \in W$ tales que $f(\sigma) \preceq u' \succeq v'$, supongamos que $f(\sigma) = \{w'\}$ y definamos $\sigma_1 = \{w', u'\}$, $\sigma_2 = \{u'\}$, $\sigma_3 = \{u', v'\}$ y $\sigma_4 = \{v'\}$, entonces $w' = \max(\sigma)$, $u' = \max(\sigma_1) = \max(\sigma_2) = \max(\sigma_3)$, $\max(\sigma_4) = v'$ y $\sigma \leq \sigma_1 \geq \sigma_2 \leq \sigma_3 \geq \sigma_4$.

Por lo tanto, \max es un *zig-zag morfismo* \square

Por lo mostrado anteriormente, podemos inferir que $max : N(W) \rightarrow W$ es un p -morfismo. Además, para cada $w \in W$, $\{w\} \in N(W)$ así $f(\{w\}) = w$, es decir, f es suprayectiva.

El siguiente resultado muestra que los *modelos parcialmente ordenados* muestran lo mismo que los *modelos poliédricos*.

Lema 4.31. Una fórmula φ es satisfacible en la clase de los *modelos parcialmente ordenados* finitos, sí y sólo sí es satisfacible en los *modelos poliédricos*.

Demostración: \Leftarrow] Consideremos un modelo poliédrico $\mathcal{K} = (K, \leq, \|\cdot\|)$, puesto que (K, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado, el modelo parcialmente ordenado deseado es el mismo modelo poliédrico.

\Rightarrow] Ahora sea $\mathcal{M} = (M, \preceq, \|\cdot\|)$ un modelo parcialmente ordenado y supongamos que $(\mathcal{M}, w) \models \varphi$ para algún $w \in M$, luego $w \in \|\varphi\|$, por ser max suprayectiva existe $\sigma \in N(W)$ tal que $max(\sigma) = w$, por ser max un *zig-zag morfismo* y por Lema 4.29, $\sigma \in f^{-1}(\|\varphi\|) = \|\varphi\|^N$, con lo cual $(N(\mathcal{M}), \sigma) \models \varphi$, por Teorema 4.26 existe un complejo simplicial K tal que $(\mathfrak{M}(K), \sigma) \models \varphi$, esto finaliza la demostración. \square

4.2.2. Solidez de la lógica de accesibilidad de Alexandroff y de la lógica de accesibilidad poliédrica.

Sistema Axiomático	Axiomas	Reglas de Inferencia
Lógica de Accesibilidad de Alexandroff. (<i>ALR</i>)	<ul style="list-style-type: none"> ■ Axiomas de <i>S4</i>. ■ Axioma 1: $\psi \vee (\varphi \wedge \gamma(\varphi, \psi)) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \gamma(\varphi, \psi))$ ■ Axioma 2: $\Diamond(\varphi \wedge \gamma(\varphi, \psi)) \rightarrow \gamma(\varphi, \psi)$ 	<ul style="list-style-type: none"> ■ <i>Modus Ponens</i>. ■ <i>Necesidad</i>. ■ <i>Regla 1</i>: Si son verdaderas $\varphi \rightarrow \varphi'$ y $\psi \rightarrow \psi'$, entonces la fórmula $\gamma(\varphi, \psi) \rightarrow \gamma(\varphi', \psi')$ también es verdadera. ■ <i>Regla 2</i>: Si $\psi \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$ y $\varphi \wedge \Diamond(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$ son ambas verdaderas, entonces $\gamma(\varphi, \psi) \rightarrow \Diamond(\varphi \wedge \psi)$ también es verdadera.
Lógica de Accesibilidad Poliédrica (<i>PLR</i>).	<ul style="list-style-type: none"> ■ Axiomas de <i>ALR</i>. ■ Axioma 3: $\Box(\Box(\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$ 	<ul style="list-style-type: none"> ■ <i>Modus Ponens</i>. ■ <i>Necesidad</i>. ■ <i>Regla 1</i>. ■ <i>Regla 2</i>.

Proposición 4.32. El sistema de axiomático *ALR* es sólido en la clase de los modelos de Alexandroff finitos y *PLR* es sólido en la clase de los modelos poliédricos finitos.

Demostración: Por Proposición 2.13, la clase de los modelos de Alexandroff finitos cumplen los axiomas de la *lógica proposicional clásica*, K_n , *reflexividad* y *transitividad* de la Lógica *S4*, junto con las reglas de inferencia de *Modus Ponens* y *Necesidad*.

Consideremos un modelo de Alexandroff $\mathcal{M} = (W, \preceq, \|\cdot\|)$, entonces:

(Axioma 1) Supongamos que $\mathcal{M} \not\models \psi \vee (\varphi \wedge \gamma(\varphi, \psi)) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \gamma(\varphi, \psi))$; esto sucede sí y sólo sí $\mathcal{M} \models \psi \vee (\varphi \wedge \gamma(\varphi, \psi))$, pero $\mathcal{M} \not\models \Box(\varphi \rightarrow \gamma(\varphi, \psi))$. Entonces, existe w tal que $(\mathcal{M}, w) \not\models \Box(\varphi \rightarrow \gamma(\varphi, \psi))$, por Definición 2.10 existe $v \succeq w$ tal que $(\mathcal{M}, v) \not\models \varphi \rightarrow$

$\gamma(\varphi, \psi)$ esto equivale a que $(\mathcal{M}, v) \models \varphi$ pero $(\mathcal{M}, v) \not\models \gamma(\varphi, \psi)$. Como $\mathcal{M} \models \psi \vee (\varphi \wedge \gamma(\varphi, \psi))$, tenemos los siguientes casos:

- $(\mathcal{M}, w) \models \psi$; como $v \preceq v \succeq w$, entonces $uR^\varphi w$, con lo cual $(\mathcal{M}, v) \models \gamma(\varphi, \psi)$ una contradicción.
- $(\mathcal{M}, w) \models \varphi \wedge \gamma(\varphi, \psi)$; nuevamente como $v \preceq v \succeq w$, entonces $vR^\varphi w$. Desde que $(\mathcal{M}, w) \models \gamma(\varphi, \psi)$, $wR^\varphi u$ para algún $u \in \|\psi\|$. También, $(\mathcal{M}, w) \models \varphi$, puesto que $vR^\varphi w$ y $wR^\varphi u$, entonces $vR^\varphi u$. Pero $(\mathcal{M}, u) \models \psi$, entonces por Definición 4.5, $(\mathcal{M}, v) \models \gamma(\varphi, \psi)$ una contradicción.

Por lo tanto, $\mathcal{M} \models \psi \vee (\varphi \wedge \gamma(\varphi, \psi)) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \gamma(\varphi, \psi))$.

(Axioma 2) Supongamos que $\mathcal{M} \not\models \Diamond(\varphi \wedge \gamma(\varphi, \psi)) \rightarrow \gamma(\varphi, \psi)$; luego existe w tal que $(\mathcal{M}, w) \not\models \Diamond(\varphi \wedge \gamma(\varphi, \psi)) \rightarrow \gamma(\varphi, \psi)$, esto es equivalente a que $(\mathcal{M}, w) \models \Diamond(\varphi \wedge \gamma(\varphi, \psi))$ pero $(\mathcal{M}, w) \not\models \gamma(\varphi, \psi)$. Del antecedente, existe $v \succeq w$ tal que $(\mathcal{M}, v) \models \varphi$ y $(\mathcal{M}, v) \models \gamma(\varphi, \psi)$, entonces $wR^\varphi v$ y $vR^\varphi u$ para algún $u \in \|\psi\|$. Así, $wR^\varphi u$ y, por lo tanto, $(\mathcal{M}, w) \models \gamma(\varphi, \psi)$ una contradicción.

Por lo tanto, $\mathcal{M} \models \Diamond(\varphi \wedge \gamma(\varphi, \psi)) \rightarrow \gamma(\varphi, \psi)$.

(Regla 1) Ahora supongamos que $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \varphi'$ y $\mathcal{M} \models \psi \rightarrow \psi'$, vamos a demostrar que $\mathcal{M} \models \gamma(\varphi, \psi) \rightarrow \gamma(\varphi', \psi')$; Supongamos que $\mathcal{M} \models \gamma(\varphi, \psi)$, entonces para cada $v \in W$, existe un *zig-zag camino* $(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, w_n)$ tal que $w_0 = v$, $v_k \in \|\varphi\|$ para cada número entero $k \in (0, n)$ y $w_n \in \|\psi\|$, por hipótesis como $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \varphi'$ y $\mathcal{M} \models \psi \rightarrow \psi'$, entonces $w_0 = v$, $v_k \in \|\varphi'\|$ para cada número entero $k \in (0, n)$ y $w_n \in \|\psi'\|$, por lo que $\mathcal{M} \models \gamma(\varphi', \psi')$. Por lo tanto, $\mathcal{M} \models \gamma(\varphi, \psi) \rightarrow \gamma(\varphi', \psi')$.

(Regla 2:) Ahora supongamos $\mathcal{M} \models \psi \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$ y $\mathcal{M} \models (\varphi \wedge \Diamond(\varphi \wedge \psi)) \rightarrow \psi$ son ambas verdaderas, vamos a demostrar $\mathcal{M} \models \gamma(\varphi, \psi) \rightarrow \Diamond(\varphi \wedge \psi)$ también es verdadera; entonces para cada $w \in W$, $(\mathcal{M}, w) \models \psi \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\mathcal{M}, w) \models (\varphi \wedge \Diamond(\varphi \wedge \psi)) \rightarrow \psi$. Supongamos que $(\mathcal{M}, u) \models \gamma(\varphi, \psi)$, luego existe un *zig-zag camino* $w_0 \preceq w_1 \succ \dots \prec w_{2n-1} \succeq w_{2n}$ tal que $w_0 = v$, $v_k \in \|\varphi\|$ para cada número entero $k \in (0, n)$ y $w_n \in \|\psi\|$. Afirmamos que $(\mathcal{M}, w_1) \models \psi$, en efecto, puesto que;

- $(\mathcal{M}, w_{2n}) \models \psi \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\mathcal{M}, w_{2n}) \models \psi$, entonces $(\mathcal{M}, w) \models \Box(\varphi \rightarrow \psi)$, pero $w_{2n} \preceq w_{2n-1}$ y $(\mathcal{M}, w_{2n-1}) \models \varphi$, por lo anterior esto implica que $(\mathcal{M}, w_{2n-1}) \models \psi$, en caso de

que $n = 1$ terminamos, en otro caso analicemos el siguiente paso;

- Si $n > 1$, tenemos que $(\mathcal{M}, w_{2n-2}) \models \varphi$. Por lo hecho anteriormente, sabemos que $w_{2n-2} \prec w_{2n-1}$ y $(\mathcal{M}, w_{2n-1}) \models \varphi \wedge \psi$, esto implica que $(\mathcal{M}, w_{2n-2}) \models \diamond(\varphi \wedge \psi)$. Pero $(\mathcal{M}, w_{2n-2}) \models (\varphi \wedge \diamond(\varphi \wedge \psi)) \rightarrow \psi$ y, por lo hecho previamente, $(\mathcal{M}, w_{2n-2}) \models \varphi \wedge \diamond(\varphi \wedge \psi)$. Por lo tanto, $(\mathcal{M}, w_{2n-2}) \models \psi$.

Continuando el mismo proceso $2n - 1$ veces, se puede concluir que $(\mathcal{M}, w_1) \models \psi$ y $(\mathcal{M}, w_1) \models \varphi$, por lo tanto, $(\mathcal{M}, w_0) \models \diamond(\varphi \wedge \psi)$.

(Axioma 3:) Ahora, supongamos que $\mathcal{M} \not\models \Box(\Box(\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$ y que $\mathcal{M} = (W, \preceq, \|\cdot\|)$ es un modelo finito parcialmente ordenado; entonces existe $w \in W$, $(\mathcal{M}, w) \not\models \Box(\Box(\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$, esto pasa sí y sólo sí $(\mathcal{M}, w) \models \Box(\Box(\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \varphi)$, pero $(\mathcal{M}, w) \not\models \Box\varphi$, del consecuente existe $v_0 \in W$ tal que $v_0 \succeq w$ y $(\mathcal{M}, v_0) \not\models \varphi$. Del antecedente, sabemos que $(\mathcal{M}, w) \models \Box(\Box(\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \varphi)$, entonces para cada $u \succeq w$ se cumple $(\mathcal{M}, u) \models \Box(\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \varphi$, esto implica que cada $u \succeq w$, tenemos que $(\mathcal{M}, u) \models \neg\Box(\varphi \rightarrow \Box\varphi)$ ó $(\mathcal{M}, w) \models \varphi$, pero $v_0 \succeq w$ y $(\mathcal{M}, v_0) \not\models \varphi$, con lo cual se cumple $(\mathcal{M}, u) \models \neg\Box(\varphi \rightarrow \Box\varphi)$ para cada $u \succeq w$, particularmente $(\mathcal{M}, v_0) \models \neg\Box(\varphi \rightarrow \Box\varphi)$ así existe $v'_0 \succeq v_0$ tal que $(\mathcal{M}, v'_0) \not\models \varphi \rightarrow \Box\varphi$, entonces $(\mathcal{M}, v'_0) \models \varphi$ pero $(\mathcal{M}, v'_0) \not\models \Box\varphi$, con lo cual existe $v_1 \succeq v'_0$ tal que $(\mathcal{M}, v_1) \not\models \varphi$. Note que $v_0 \neq v_1$, en caso contrario $v_0 = v_1$ con lo cual se tiene $(\mathcal{M}, v_1) \models \varphi$ y $(\mathcal{M}, v_1) \not\models \varphi$ una contradicción. Por lo que $v_0 \neq v_1$; sin embargo, para cada $u \succeq w$ se cumple $(\mathcal{M}, u) \models \Box(\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \varphi$ y esto sucede particularmente para v_1 y repitiendo el mismo proceso tenemos un conjunto infinito de puntos $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ lo que contradice la finitud del modelo \mathcal{M} . Por lo tanto, $\mathcal{M} \models \Box(\Box(\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$. \square

En caso de que el lector de esta tesis tenga interés en revisar la completitud de lógica de accesibilidad de Alexandroff o la de la lógica de accesibilidad poliédrica, puede ver el artículo [14].

Conclusiones

Lo logrado en esta tesis se puede resumir en los siguientes puntos:

1. Revisar nociones básicas y algunos resultados en cuanto a los complejos simpliciales, su realización geométrica y a los complejos simpliciales cromáticos.
2. También, se dio un breve resumen de la *lógica proposicional clásica*, la *lógica modal mínima*, la lógica *S4* y *S5*, enfocándonos especialmente en el estudio semántico.
3. Mostramos la solidez de ciertos sistemas lógicos a saber la lógica epistémica de multi-agentes, la lógica *S4*, la lógica de accesibilidad de Alexandroff y la lógica de accesibilidad poliédrica.
4. Analizamos algunos ejemplos de *modelos epistémicos de multi-agentes locales* y su representación en *modelos simpliciales*.
5. Mostramos como podemos expresar a todos los *modelos parcialmente ordenados finitos* como *modelos poliédricos* mediante el *modelo nervioso*.

Más aún, como propuesta a un trabajo futuro podemos analizar con mayor profundidad cómo se pueden ver los modelos simpliciales o inclusive buscar modelos epistémicos que no trabajen con facetas.

Por otro lado, sería interesante ver qué aplicaciones puede tener la lógica de accesibilidad, por ejemplo en el artículo del año 2022 titulado *Geometric model checking of continuous space* (ver [9]) podemos observar una aplicación en procesamiento de imágenes en medicina.

Como última propuesta, proponemos analizar que otros sistemas lógicos modales son completos y sólidos usando complejos simpliciales.

Apéndice A

Un poco de teoría de categorías.

En este apartado presentaremos un pequeño acercamiento a la teoría de categorías que nos permitirá justificar los resultados del capítulo 3.

El contenido del apéndice está basado en el trabajo de fin de grado de Díaz Cabrera (ver [11]) y en el libro *Category Theory using Haskell* de *Shuichi Yukita* (ver [16]).

A.1. ¿Qué es una categoría?

Definición A.1. Una *categoría* \mathcal{C} consiste de:

- Una colección $ob(\mathcal{C})$ que llamaremos objetos.
- Una colección $Mor(\mathcal{C})$ que llamaremos morfismos o flechas.
- Cada morfismo f está asociado a dos objetos $Dom(f)$ y $Cod(f)$, los cuales llamaremos respectivamente *dominio* y *codominio*. Denotaremos a cada morfismo f de la siguiente manera $f : X \rightarrow Y$, donde $X = Dom(f)$ y $Y = Cod(f)$.
- Para cualquier par de morfismos f y g de tal manera que $Cod(f) = Dom(g)$, existe un morfismo composición gf de tal manera que $Dom(gf) = Dom(f)$ y $Cod(gf) = Cod(g)$.

Lo anterior cumple los siguientes dos axiomas:

- Para cada objeto A , existe una flecha $1_A : A \rightarrow A$ de tal manera que, para cualesquiera morfismos $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow A$, se cumple que $f1_A = f$ y $1_Ag = g$.
- Para cualesquiera morfismos f, g y h , se tiene que $f(gh) = (fg)h$.

De la definición anterior, se puede verificar que para cada morfismo $f : A \rightarrow B$, existen morfismos identidad 1_A y 1_B de tal manera que $f1_A = f = 1_Bf$. También noté que el morfismo identidad es único, pues al considerar dos morfismos $1_A : A \rightarrow A$ y $1'_A : A \rightarrow A$, entonces $1'_A = 1_A1'_A = 1_A$.

Definición A.2. Dada una categoría \mathcal{C} y $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, diremos que $f : A \rightarrow B$ es un isomorfismo si existe una función $g : A \rightarrow B$ tales que $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$. Al morfismo g lo denotamos como f^{-1} .

Cuando existe un isomorfismo $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ entre dos objetos $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$, diremos que A y B son isomorfos y lo denotamos como $A \cong B$.

Algunos ejemplos de categorías son los siguientes:

- La categoría **Set** cuyos objetos son los conjuntos, los morfismos son las funciones entre conjuntos, la función identidad y la composición de funciones son las usuales.
- La categoría **Grp** cuyos objetos son los grupos, los morfismos son los morfismos entre los grupos, la función identidad y la composición de funciones son las usuales. De igual manera similar también tenemos la categoría de los anillos **Rng** y la categoría de los espacios vectoriales sobre un campo K , **Vect_K**.
- La categoría **Top** cuyos objetos son los espacios topológicos los morfismos son las funciones continuas, la función identidad y la composición de funciones son las usuales.
- Dada una clase de objetos C , se puede definir la *categoría discreta* con objetos C , como la categoría \mathcal{C} que tiene como objetos los elementos de la clase C y como únicos morfismos son las identidades.

Definición A.3. Dada una categoría \mathcal{C} definimos su categoría dual ó categoría opuesta denotado por \mathcal{C}^{op} como sigue:

- $ob(\mathcal{C}^{op}) = ob(\mathcal{C})$
- $Mor(\mathcal{C}^{op}) = Mor(\mathcal{C})$
- Para cada morfismo $f \in Mor(\mathcal{C}^{op})$, $Dom(f)$ en la categoría opuesta es igual al $Cod(f)$ en la categoría original y $Cod(f)$ en la categoría opuesta es igual al $Dom(f)$ en la categoría original. Esto lo denotaremos como $Dom_{op}(f) = Cod(f)$ y $Cod_{op}(f) = Dom(f)$.
- Dados $A, B, C \in ob(\mathcal{C})$, y $f, g \in Mor(\mathcal{C}^{op})$, entonces $f \circ g$ en la categoría opuesta es igual a $g \circ f$ en la categoría original, que denotaremos como $f \circ^{op} g = g \circ f$.
- La identidad en la categoría opuesta es la misma que la identidad en la categoría original, denotado como $1_A^{op} = 1_A$

De manera informal, la categoría opuesta invierte el sentido de las flechas de la categoría original.

Nuestro siguiente paso es generar flechas entre categorías que se comporten de manera similar a lo que pasa en la teoría de grupos o en los espacios topológicos, conservando cierta estructura en la categoría. Para ello, definimos el concepto de *funtor* en la siguiente definición.

Definición A.4. Dadas dos categorías \mathcal{A} y \mathcal{B} . Un funtor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ consiste de:

- Una *asignación* que asocia a cada objeto de A de \mathcal{A} , un único objeto B en la categoría \mathcal{B} .
- Para cada morfismo $f : A \rightarrow A'$ de la categoría \mathcal{A} , hay una aplicación $F(f) : F(A) \rightarrow F(A')$ en la categoría \mathcal{B} .

Lo anterior satisface que:

- Para cada $f : A \rightarrow B$ y $f' : B \rightarrow C$ morfismos, se tiene que $F(f'f) = F(f')F(f)$.
- Para cada $A \in \mathcal{A}$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Un ejemplo claro de funtor es el siguiente $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $1_{\mathcal{A}}$ deja fijos a los objetos y flechas de \mathcal{A} , claramente cumple las propiedades de funtor, ha dicho funtor lo llamaremos *funtor identidad*.

Otro ejemplo usual de funtor es el llamado *funtor que olvida* denotado por U que manda un objeto de su dominio a un objeto de su codominio, pero que *olvida* ciertas propiedades de dicho objeto. Por ejemplo, si consideramos las categorías **Set** y **Grp**, podemos tomar el *funtor que olvida* $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ que asigna a cada grupo al mismo, pero como conjunto. De manera similar, también tenemos los funtores $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$, $U : \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Grp}$, entre otras más.

Proposición A.5. Sean \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} categorías y, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ funtores. Definimos la asignación $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que para cada $A \in \text{ob}(\mathcal{A})$ y $f \in \text{mor}(\mathcal{A})$, $GF(A) = G(F(A))$ y $GF(f) = G(F(f))$. Entonces GF es un funtor.

Demostración: Claramente, como F y G son funtores, cada objeto A es asignado de manera única a un objeto $F(A)$ de la categoría \mathcal{B} y dicho objeto es asignado de manera única a un objeto $G(F(A))$ de la categoría \mathcal{C} .

Usando un razonamiento análogo al párrafo anterior, tenemos que cada flecha f de la categoría \mathcal{A} es asignada a una flecha $GF(f)$ de la categoría \mathcal{C} .

Ahora, para cualesquiera de las flechas $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ en la categoría \mathcal{A} , tenemos que

$$GF(gf) = G(F(gf)) = G(F(g)F(f)) = G(F(g))G(F(f)).$$

Por último, para cada objeto A en la categoría \mathcal{A} , tenemos que

$$GF(\text{Id}_A) = G(F(\text{Id}_A)) = G(\text{Id}_{F(A)}) = \text{Id}_{G(F(A))} = \text{Id}_{GF(A)}$$

Por lo tanto, GF es un funtor. □

Al funtor GF definido en la proposición anterior, le llamaremos *funtor composición de F con G* .

Definición A.6. Sean $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ dos funtores. Una transformación natural $\alpha : F \Rightarrow G$ consiste en una familia

de morfismos $\{\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)\}_{A \in \mathcal{A}}$ de morfismos de \mathcal{B} de tal manera que cada morfismo $f : A \rightarrow A'$ de \mathcal{A} , el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_{A'} \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(A') \end{array}$$

Es decir, $\alpha_{A'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$.

Cada morfismo $\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$ se denomina componente de α en el objeto A .

Con todo lo expuesto en este apéndice, podemos definir la *categoría de funtores de \mathcal{A} en \mathcal{B}* , denotado por $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ ó por $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, los objetos de esta categoría son los funtores de la categoría \mathcal{A} en \mathcal{B} y como flechas las transformaciones naturales entre ellos dichos funtores.

Definición A.7. Dadas dos categorías \mathcal{A} y \mathcal{B} . Un isomorfismo natural entre funtores F y G , es un isomorfismo en la categoría $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$

Definición A.8. Una equivalencia entre dos categorías \mathcal{A} y \mathcal{B} consiste de dos funtores $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, junto con dos isomorfismos naturales $\eta : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$ y $\epsilon : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$. Diremos que \mathcal{A} y \mathcal{B} son equivalentes si existe dicha equivalencia y denotaremos este hecho por $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, además diremos que F y G son equivalencias de categorías.

No es difícil notar que la relación \simeq es, en efecto, una relación de equivalencia, pues:

- (Reflexividad) Consideremos una categoría \mathcal{A} y el funtor identidad $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, y consideramos la colección $Id = \{Id_A : A \rightarrow A\}_{A \in \mathcal{A}}$, entonces por como se comporta el funtor $1_{\mathcal{A}}$, se tiene que $1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}1_{\mathcal{A}}$ y por lo anterior $Id : 1_{\mathcal{A}}1_{\mathcal{A}} \rightarrow 1_{\mathcal{A}}$ y $Id : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow 1_{\mathcal{A}}1_{\mathcal{A}}$. Por lo tanto, la relación \simeq es reflexiva.

- (Simetría) Por otro lado, si tomamos dos categorías equivalentes \mathcal{A} y \mathcal{B} ($\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$), entonces existen funtores $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, junto con dos transformaciones naturales $\eta : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$ y $\epsilon : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$. Como η y ϵ son isomorfos, existen $\eta^{-1} : 1_{\mathcal{B}} \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}FG$ y $\epsilon^{-1} : GF \Rightarrow 1_{\mathcal{A}}$. Esto justifica que $\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}$.
- (Transitividad) Por último sean \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{C} categorías, entonces existen funtores $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, $F' : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ y $G' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ junto con transformaciones naturales $\eta : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$, $\epsilon : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$, $\eta' : F'G' \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ y $\epsilon' : 1_{\mathcal{B}} \Rightarrow G'F'$. Así consideremos funtores $F'F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, $GG' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, junto a colecciones de morfismos $\{(G\epsilon')(F\epsilon) : Id_{\mathcal{A}} \rightarrow GG'F'F\}$ y $\{(\eta'F')(\eta G') : F'FGG' \rightarrow Id_{\mathcal{C}}\}$, estos funtores y colecciones nos garantizan que $\mathcal{A} \simeq \mathcal{C}$ ¿Por qué? Analicemos lo siguiente:

Como $\epsilon : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$ y por ser $1_{\mathcal{B}}$ el funtor identidad, entonces $\epsilon : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow G1_{\mathcal{B}}F$. Por otro lado, como $\epsilon' : 1_{\mathcal{B}} \Rightarrow G'F'$, entonces $G\epsilon'F : G1_{\mathcal{B}}F \Rightarrow GG'F'F$. Por lo tanto, $G\epsilon'F \circ \epsilon : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GG'F'F$.

Por otro lado, como $\eta' : F'G' \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$, y por ser $1_{\mathcal{B}}$ el funtor identidad, entonces $\eta' : F'1_{\mathcal{B}}G' \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$. Por otro lado, como $\eta : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$, entonces $F'\eta G' : F'FGG' \Rightarrow F'1_{\mathcal{B}}G'$. Por lo anterior, $\eta' \circ F'\eta G' : F'FGG' \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$.

Eligiendo como isomorfismos naturales $\epsilon'' = G\epsilon'F \circ \epsilon$ y $\eta'' = \eta' \circ F'\eta G'$, los funtores $F'F$ y GG' forman una *equivalencia de categorías* entre las categorías \mathcal{A} y \mathcal{C} .

Los anteriores puntos validan que la relación \simeq es de equivalencia.

Bibliografía

- [1] Kripke, Saul (1963). Semantical Considerations on Modal Logic. *Acta Philosophica Fennica* 16, 83-94.
- [2] Spanier, E. H. (1981). *Algebraic Topology*. Springer New York.
- [3] Aiello, M., Pratt-Hartmann, I. E., & Van Benthem, J. F. (2007). Handbook of Spatial Logics. In Springer eBooks. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5587-4>
- [4] Lagerlund, H. (2009). Avicenna and $\bar{u}si$ on Modal Logic. *History and Philosophy of Logic*, 30(3), 227–239. <https://doi.org/10.1080/01445340802518119>
- [5] Bezhanishvili, G., & Gabelaia, D. (2010). Connected modal logics. *Archive for Mathematical Logic*, 50(3-4), 287–317. <https://doi.org/10.1007/s00153-010-0214-7>
- [6] Van Ditmarsch, H., Halpern, J. Y., & Van Der Hoek, W. (2015). *Handbook of Epistemic Logic*.
- [7] Ciancia, V., Latella, D., Loretì, M., & Massink, M. (2016). Spatial Logic and Spatial Model Checking for Closure Spaces. En *Lecture notes in computer science* (pp. 156-201). https://doi.org/10.1007/978-3-319-34096-8_6
- [8] Goubault, É., Ledent, J., & Rajsbaum, S. (2020). A simplicial complex model for dynamic epistemic logic to study distributed task computability. *Information and Computation*, 278, 104597. <https://doi.org/10.1016/j.ic.2020.104597>

- [9] Bezhanishvili, N., Ciancia, V., Gabelaia, D., Grilletti, G., Lattella, D., & Massink, M. (2022). Geometric model checking of continuous space. *Logical Methods in Computer Science*, Volume 18, Issue 4. [https://doi.org/10.46298/lmcs-18\(4:7\)2022](https://doi.org/10.46298/lmcs-18(4:7)2022)
- [10] van Ditmarsch, H., Goubault, É., Ledent, J., & Rajsbaum, S. (2022). Knowledge and Simplicial Complexes. In *Philosophical Studies Series* (pp. 1–50). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-75267-5_1
- [11] Díaz Cabrera, Javier & García Calcines, José Manuel (2023). Una introducción a la Teoría de Categorías y a sus aplicaciones. Universidad de la Laguna. <http://riull.uull.es/xmlui/handle/915/33935>
- [12] Goubault, E., Kniazev, R., & Ledent, J. (2023). A many-sorted epistemic logic for chromatic hypergraphs. arXiv (Cornell University). <https://doi.org/10.48550/arxiv.2308.00477>
- [13] Roderos Valle, D. & Fernández González, S. (2024, July 23). Modelos topológicos para la lógica modal. Universidad De Oviedo. <https://hdl.handle.net/10651/74517>
- [14] Bezhanishvili, N., Bussi, L., Ciancia, V., Fernández-Duque, D., & Gabelaia, D. (2024). Logics of polyhedral reachability. arXiv (Cornell University). <https://doi.org/10.48550/arxiv.2406.16056>
- [15] Molina Vázquez, C. & Martínez Ruiz, I. (2024). Un estudio semántico de lógicas no clásicas con un enfoque topológico <https://repositorioinstitucional.buap.mx/items/1699212d-b2bf-497f-bf4c-563c27af6e94>
- [16] Yukita, S. (2024). Category Theory using Haskell. En *Computer science foundations and applied logic*. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-68538-5>