



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Métodos de amplitudes en QFT supersimétricas

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

por

Jonathan Reyes Pérez

Asesorado por

Dr. Justiniano Lorenzo Díaz Cruz

Puebla Pue.
Diciembre de 2021



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Métodos de amplitudes en QFT supersimétricas

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

por

Jonathan Reyes Pérez

Asesorado por

Dr. Justiniano Lorenzo Díaz Cruz

Puebla Pue.
Diciembre de 2021

Título: Métodos de amplitudes en QFT supersimétricas
Estudiante: JONATHAN REYES PÉREZ

COMITÉ

Dr. Gilberto Tavares Velazco
Presidente

Dr. Oscar M. Martínez Bravo
Secretario

Dra. Olga Félix Beltrán
Vocal

Dr. Jose Enrique Barradas Guevara
Vocal

Dr. Justiniano Lorenzo Díaz Cruz
Asesor

Índice general

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Introducción	XI
1. Teoría Cuántica de Campos y las amplitudes de dispersión	1
1.1. Matriz S	1
1.2. Diagramas de Feynman	3
1.3. Amplitud de dispersión	4
2. Formalismo de los espinores de helicidad	7
2.1. Grupo pequeño de Wigner (<i>Little Group</i>)	7
2.2. Espinores de helicidad	10
3. Amplitudes en QCD con el formalismo de helicidad	15
3.1. Cromodinámica cuántica (<i>QCD</i>)	15
3.2. Amplitud del proceso : $gg \rightarrow gg$	17
3.3. Ordenamiento de color y la fórmula de Parker-Taylor.	21
4. Supersimetría	23
4.1. El problema de la jerarquía	23
4.2. Supersimetría en QCD (<i>SUSY-QCD</i>)	24
4.3. $\mathcal{N} = 1$ Supersimetría: modelo quirral	25
5. Amplitudes en teorías supersimétricas con el formalismo de helicidad	29
5.1. Amplitud del proceso : $gg \rightarrow \lambda\lambda$	29
5.2. Amplitud del proceso: $\lambda\lambda \rightarrow \lambda\lambda$	31
5.3. Amplitud del proceso : $\lambda g \rightarrow \lambda g$	32
5.4. Identidades de Ward para $\mathcal{N} = 1$ Supersimetría	34
Conclusión	38
A. Convenciones y propiedades	41
B. Reglas de Feynman	43
Bibliografía	45

Agradecimientos

Agradezco a mis padres por todo el apoyo incondicional sin el cual no hubiera podido llegar hasta estas instancias de la vida, su formación y su orientación han sido parte fundamental en mi vida.

Agradezco a mi asesor y amigo Dr. J. Lorenzo Díaz Cruz por abrirme las puertas de la física de partículas , por confiar en mi, por su amistad que llevo de conocerlo durante años, y sus consejos que me han guiado durante este tiempo. Agradezco a los doctores Gilberto Tavares Velazco y Oscar M. Martínez Bravo y a la Dra. Olga Félix Beltrán por su paciencia y guía mostrada durante los avances de tesis.

Del mismo modo, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme otorgado una beca durante el periodo **01 de enero de 2020 al 31 de diciembre de 2021** correspondiente a la convocatoria "**Beca Nacional (Tradicional) 2020 - 1**".

Por último pero no menos importante, agradezco a mis amigos y las personas que me acompañaron durante este proceso, por su orientación, por su amistad y paciencia.

Resumen

En esta tesis nos proponemos aprender los métodos de Helicidad, para aplicarlos al cálculo de amplitudes en Teoría Cuántica de Campos. Como un primer caso, vamos a revisar lo que se encuentra en la literatura, el cálculo del proceso de dispersión gluón + gluón \rightarrow gluón + gluón a nivel árbol con el formalismo de Helicidad en la teoría de las interacciones fuertes de quarks y gluones. Posteriormente, vamos a estudiar y extender dichos cálculos para procesos de dispersión en las teorías supersimétricas. En particular, vamos a considerar procesos que involucran a los compañeros supersimétricos del gluón, estos son los llamados gluinos, y en concreto vamos a calcular los procesos: gluón + gluón \rightarrow gluino + gluino, gluino + gluón \rightarrow gluino + gluón y gluino + gluino \rightarrow gluino + gluino. Además del interés fenomenológico de dichos cálculos, nos interesa explorar las relaciones que impone la supersimetría, para relacionar estos procesos a nivel árbol.

Palabras clave: *Formalismo de helicidad, pequeño grupo, Amplitudes, Supersimetría, identidades de Ward.*

Introducción

Los experimentos de procesos de dispersión son cruciales para nuestro entendimiento de la estructura de la naturaleza. La principal observable que se mide es la sección eficaz ; una versión de esta cantidad es la sección eficaz diferencial , la cual describe la dependencia en términos de los ángulos de las partículas dispersadas. Estas cantidades se calculan en la teoría cuántica de campos, que es el lenguaje matemático para describir las partículas elementales y sus interacciones [1]. En esta teoría, la sección eficaz diferencial es proporcional a la norma cuadrada de la amplitud de dispersión, la cual, es una observable física bien definida. Para calcular las amplitudes se han usado por muchos años los diagramas de Feynman y sus respectivas reglas, aunque mucho antes se empleaba la fórmula de reducción LSZ (Lehmann Symanzik Zimmermann) que permite escribir un elemento de matriz S en términos del valor esperado en el vacío de un producto ordenado en el tiempo de campos interactuantes ([2]). En años recientes se ha observado que las amplitudes mismas tienen una estructura matemática muy interesante. Entender esta estructura puede llevar hacia nuevos métodos más eficientes para calcular dichas amplitudes.

Las amplitudes de dispersión son calculadas como una serie en la expansión de un parámetro pequeño sin dimensiones que codifica el acoplamiento de las interacciones entre las partículas. En la década de los 40, Feynman introdujo una manera diagramática de organizar estos cálculos perturbativos [3]. La amplitud se puede expresar como la suma de todos los posibles diagramas de Feynman con n líneas externas; un diagrama de Feynman se puede escribir de forma matemática mediante las reglas de Feynman, estas reglas especifican el tipo de partícula y la teoría que describe las interacciones. En principio, con estas reglas se pueden calcular las amplitudes de dispersión, por ejemplo en Electrodinámica Cuántica (QED, por sus siglas en inglés) se puede calcular la sección eficaz diferencial a nivel árbol de cualquier proceso, el resultado final para la sección eficaz puede ser compacto y muy simple. Sin embargo, los pasos intermedios de los cálculos suelen explotar en una lluvia de índices, contracciones en todas direcciones, proveyendo poca señal de física y simplicidad. Por otro lado, en Teoría Cuántica de Campos rara vez se usan las reglas de Feynman estándares para calcular procesos que involucran más de cuatro o cinco partículas en el estado final, incluso a nivel árbol. Para un proceso de dispersión de gluones a nivel árbol en Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés) el número de diagramas de Feynman tiende a crecer muy rápidamente con el número de partículas involucradas , se tiene que: $g + g \rightarrow g + g$, se necesitan 4 diagramas, para $g + g \rightarrow g + g + g$, se requieren 25 diagramas, para $g + g \rightarrow g + g + g + g$, hacen falta 220 diagramas y para $g + g \rightarrow 8g$ se necesitan más de un millón de diagramas ([4]). Otro punto importante es que las expresiones matemáticas para cada diagrama llegan a ser significativamente muy complicado. Por lo tanto, para calcular procesos que involucran muchos gluones desde los diagramas de Feynman llegan a ser muy laboriosos y en algunos casos hasta imposibles. Existen algunos trucos para simplificar estos cálculos, uno de ellos es usar el formalismo de los espinores de helicidad (ver [4]). Dicho formalismo han sido usados en años recientes, no sólo para facilitar el cálculo de procesos físicos que se han medido en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC, por sus siglas en inglés) sino también para entender la estructura matemática asociada con las amplitudes, así como buscar conexiones entre diferentes teorías. Muy llamativo es, por ejemplo, que sea posible expresar amplitudes que involucran a la gravedad cuántica, como un producto de amplitudes asociadas

con las teorías de Yang-Mills. Por un lado, para practicar e introducirnos en el método del formalismo de los espinores de Helicidad en la teoría de las interacciones fuertes de quarks y gluones, como primer paso se calcula el proceso de dispersión gluón + gluón \rightarrow gluón + gluón, a nivel árbol, el cual se encuentra en la literatura (ver [5]). En este contexto las amplitudes que se calculan son las denominadas **MHV**, los cuales tienen exactamente dos helicidades negativas o dos helicidades positivas, de este modo se obtiene la sección eficaz total estándar presentada en QCD. Por otro lado, para extender dicho método a teorías supersimétricas utilizando estos resultados, se calculan procesos de dispersión que involucren al gluino tal como: gluón + gluón \rightarrow gluino + gluino, gluino + gluón \rightarrow gluino + gluón y gluino + gluino \rightarrow gluino + gluino.

El contenido de la tesis ha sido organizada de la siguiente manera: En el capítulo **1** presentamos un breve resumen de lo que es la matriz S , los diagramas de Feynman y qué define a una amplitud, en el capítulo **2** se presenta el *little group* y como surge la helicidad, después se introduce lo que es el formalismo de los espinores de helicidad, repasando sus propiedades y algunas definiciones, en el capítulo **3** se presenta un breve resumen de QCD y la importancia fenomenológica de los gluones, luego como ejemplo para mostrar cómo funciona el método de los espinores de helicidad se calcula el proceso de dispersión gluón + gluón \rightarrow gluón + gluón, y al final de este capítulo se muestra la fórmula de Parker-Taylor que sirve para calcular, en principio cualquier amplitud de gluones; en el capítulo **4** presentamos un breve resumen de lo que es la supersimetría, su importancia, y en particular usamos el modelo quirral para introducir las bases necesarias para desarrollar el capítulo **5**. Por último, en el capítulo **5** presentamos como se calculan las amplitudes en teorías supersimétricas en el contexto del formalismo de los espinores de helicidad, en particular se calculan las amplitudes de los procesos:

$$\begin{aligned} & \text{gluón} + \text{gluón} \rightarrow \text{gluino} + \text{gluino}, \\ & \text{gluino} + \text{gluino} \rightarrow \text{gluino} + \text{gluino} , \\ & \text{gluino} + \text{gluón} \rightarrow \text{gluino} + \text{gluón} \end{aligned}$$

Finalmente se muestra cómo estas amplitudes están relacionadas mediante lo que se conoce como *Identidades de Ward* y se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Teoría Cuántica de Campos y las amplitudes de dispersión

El modelo estándar de la física de partículas fue desarrollado mediante experimentos de dispersión, incluyendo el descubrimiento de los bosones mediadores de la fuerza débil W^\pm y Z^0 [6], los quarks y gluones, así como el más reciente descubrimiento del bosón de Higgs [7]. La observable clave en la detección de estas partículas es la **sección eficaz** el cual esta en función de la energía y los momentos de las partículas involucradas. Una versión de esta observable es la sección eficaz diferencial que describe la dependencia de la sección eficaz respecto a los ángulos de las partículas dispersadas. La interpretación de los datos que provienen de los experimentos de dispersión recae fuertemente en predicciones teóricas de la sección eficaz. Estas son calculadas en esta Teoría Cuántica de Campos (QFT, por sus siglas en inglés) que es una herramienta poderosa, tiene aplicaciones a muchos campos además de la Física de Partículas tales como Materia Condensada, Cosmología, Teoría de Cuerdas, Mecánica Estadística, incluso en Economía. QFT combina la teoría especial de la relatividad y la mecánica cuántica, describe exitosamente las partículas elementales y las fuerzas fundamentales de la naturaleza. En Mecánica Cuántica, la distribución de probabilidad de una partícula es dada por la norma cuadrada ($|\psi|^2 = \psi^*\psi$) de la función de onda ψ . Análogamente, en QFT la sección eficaz diferencial es proporcional a la norma cuadrada de la amplitud de dispersión \mathcal{M} [8]. Las amplitudes \mathcal{M} son observables físicas bien definidas, estas son las principales protagonistas de esta tesis. Las amplitudes de dispersión (*scattering amplitudes*, en inglés) tienen relevancia física a través de su rol en la sección eficaz. Sin embargo, en años recientes se ha visto que las amplitudes tienen una estructura matemática interesante, lo que induce a explorar sus conexiones con otras ramas de las matemáticas incluyendo combinatoria y geometría ([9], [10]).

1.1. Matriz S

Los procesos de dispersión pueden ser considerados como una operación de mapeo que nos lleva de un estado inicial $|i\rangle$ a un estado final $|f\rangle$, la matriz de dispersión o matriz S , es el operador unitario que mapea estados iniciales a estados finales. En otras palabras, la probabilidad de que un estado inicial $|i\rangle$ evolucione con el tiempo al estado final $|f\rangle$ dado por $|\langle f|S|i\rangle|^2$, este esquema se puede ver en la figura (1.1). Separando la parte trivial del proceso de dispersión donde no ocurre la dispersión, la matriz S se puede escribir como

$$S = 1 + iT. \tag{1.1}$$

Entonces, la amplitud es simplemente escrita como $\mathcal{M} = \langle f|T|i\rangle$, el cual es la cantidad calculada mediante los diagramas de Feynman. Resolver la matriz S para una teoría dada quiere decir que

CAPÍTULO 1. TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS Y LAS AMPLITUDES DE DISPERSIÓN
1.1. MATRIZ S

se tiene una manera de generar todas las amplitudes de dispersión a cualquier orden en la teoría de perturbaciones. En principio, con las reglas de Feynman se puede calcular cualquier amplitud.

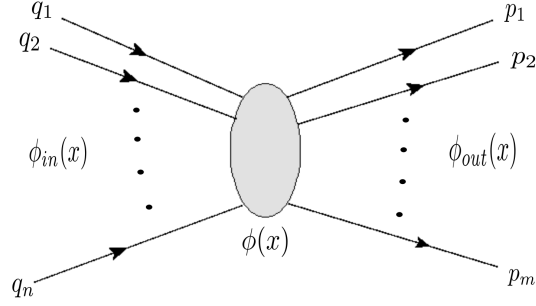


Figura 1.1: Esquema experimental para un proceso de colisión donde n partículas inciden y surgen m partículas producto.

Por lo general los cálculos al principio no son tan complicados y los resultados finales para la sección eficaz diferencial suelen ser compactos y simples. Pero el proceso intermedio suele ser muy complicado ya que aparecen muchos índices con las trazas y su álgebra, el cual es poco intuitivo en cuanto a física sin ninguna señal de simplicidad. Para calcular procesos de dispersión que involucren más de cuatro o cinco partículas, el número de diagramas de Feynman crece considerablemente. Por ejemplo, en el caso de los gluones, la teoría de Yang-Mills tiene vértices cúbicos y cuárticos, entonces las ecuaciones de movimiento de juguete son ([30]):

$$A = J + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!}. \quad (1.2)$$

Escogiendo la raíz $A(0) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} A(J) &= -1 + \frac{3(1 - i\sqrt{3})}{2(\sqrt{9J^2 + 24J - 11} + 3J + 4)^{\frac{3}{2}}} \\ &+ \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{9J^2 + 24J - 11} + 3J + 4)^{\frac{3}{2}} \\ &= J + (1)\frac{J^2}{2!} + (4)\frac{J^3}{3!} + (25)\frac{J^4}{4!} + (220)\frac{J^5}{5!} + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

por lo que para un proceso que involucra 4 gluones, se requieren 4 diagramas de Feynman. Para un proceso que involucra 5 gluones, se requieren 25 diagramas de Feynman. Para un proceso que involucra 6 gluones, se requieren 220 diagramas y así sucesivamente. Entonces para calcular procesos de dispersión multigluónica desde la forma tradicional de los diagramas de Feynman, los cálculos pueden ser imposibles de hacer a mano. De este modo, el formalismo de los espinores de helicidad es muy útil para realizar este tipo de operaciones. Resulta que a pesar de las complicaciones que surgen de los diagramas de Feynman, las amplitudes de capa de masa para procesos tales como la dispersión de gluones o multigluónica

$$g + g \longrightarrow g + g \cdots + g, \quad (1.4)$$

se puede expresar mediante una fórmula muy simple.

1.2. Diagramas de Feynman

Las amplitudes son típicamente calculadas como una serie perturbativa expandida alrededor de un pequeño parámetro sin dimensiones que define la interacción entre las partículas. Por ejemplo para QED, el parámetro se le conoce como **constante de estructura fina** ($\alpha \approx 1/137$). Feynman introdujo una manera diagramática de organizar los cálculos perturbativos para las amplitudes, el cual expresa la amplitud de n -partículas como una suma de todos los posibles diagramas con n -líneas externas:

$$\mathcal{M}_n = \sum (\text{Diagramas de Feynman}) = \mathcal{M}_n^{\text{árbol}} + \mathcal{M}_n^{\text{un lazo}} + \mathcal{M}_n^{\text{dos lazos}} + \dots \quad (1.5)$$

La suma de los diagramas es organizada por el número de lazos cerrados. Dado un número de partículas, los diagramas que involucran lazos son suprimidos por el poder de los acoplamientos. Por ejemplo, en QED un diagrama de L -lazos es del orden de α^{2L} comparado con el diagrama de nivel árbol. Las contribuciones principales provienen de los diagramas a nivel árbol, su suma es llamada la amplitud a nivel árbol $\mathcal{M}_n^{\text{árbol}}$. El siguiente orden es a un lazo, la suma de todos los diagramas se le llama la amplitud a un lazo $\mathcal{M}_n^{\text{un lazo}}$ y así sucesivamente. Por lo que la amplitud completa queda determinada por (1.5). En esta tesis solamente nos enfocaremos en amplitudes a nivel árbol. Un diagrama de Feynman es trasladado a una expresión matemática mediante las reglas de Feynman, estas reglas son específicas con el tipo de partícula involucrada y la teoría que describe sus interacciones. Un diagrama de Feynman, tiene los siguientes ingredientes: - **Líneas externas**: Los diagramas de Feynman tienen una línea externa para cada estado inicial y final de las partículas. Las reglas dependen del tipo de partícula que se trata. Para partículas de espín-1, como los gluones, la línea externa es caracterizada por las polarizaciones. Para fermiones, las líneas externas contienen la información de los estados de espín.

- **Momentos**: Cada línea en los diagramas de Feynman es asociada con un momento. Para las líneas externas, el momento es fijado por los datos externos. La conservación de momento se debe cumplir en cada vértice. Para un diagrama a nivel árbol el momento se encuentra definido en las líneas internas.

- **Vértices**: Los vértices describen las interacciones entre las partículas. En principio, los vértices pueden tener cualquier número de líneas entrantes o salientes, pero en algunas teorías hay solamente vértices cúbicos o cuárticos. Las reglas de Feynman convierten cada vértice en una expresión matemática, en unos casos es simplemente un término multiplicado por una constante. En general, las reglas para los vértices pueden contener el momento asociado con las líneas entrantes o salientes del vértice.

- **Líneas internas**: Las reglas de Feynman convierten cada línea interna en un propagador que depende de los momentos asociados a ella. Un propagador es la transformada de Fourier de una función de Green. La expresión matemática depende del tipo de línea, es decir, las partículas virtuales que son involucradas.

De este modo, se puede convertir un diagrama de Feynman en una expresión matemática. Por ejemplo, vamos a encontrar para el proceso $gg \rightarrow gg$ que hay dos amplitudes que no se anulan, las cuales son:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(1^-2^-3^+4^+) &= \frac{\langle 12 \rangle^2}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle}, \\ \mathcal{M}(1^-2^+3^-4^+) &= \frac{\langle 13 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle}; \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde, los brackets angulados $\langle ij \rangle$ están relacionados con el cuadrimento de la partícula mediante $|\langle ij \rangle|^2 \sim 2p_i \cdot p_j$, el producto punto es $p_i \cdot p_j \equiv p^\mu p_\mu = p_i^0 p_j^0 - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j$. Los cuadrimentos

están asociados con los gluones entrantes. El bracket angulado $\langle ij \rangle$ es parte de la notación del **formalismo de los espinores de helicidad**, el cual es un poderosa herramienta para describir procesos de dispersión de partículas sin masa en el espacio-tiempo cuatridimensional. En el siguiente capítulo vamos a introducir el formalismo de los espinores de helicidad y a derivar con detalle las expresiones (1.6). Es típico que las amplitudes que involucran partículas sin masa sean bastante simples en comparación con las correspondientes partículas masivas. Debido a esta simplicidad, los principales desarrollos en este campo han sido en las amplitudes de dispersión de partículas sin masa.

1.3. Amplitud de dispersión

Algunos ejemplos de procesos de dispersión que involucran partículas tales como electrones, positrones y fotones son: la dispersión de Compton, la dispersión de Moller, la dispersión de Bhabha o la aniquilación electrón-positrón. Estos procesos son descritos en QFT, la teoría se le conoce como electrodinámica cuántica (QED). Cada proceso es caracterizado por el tipo de partículas involucradas en los estados iniciales y finales, así como el momento relativista \vec{p} y la energía E de cada partícula, esta es la información requerida para una amplitud. Esto se resume de la siguiente manera:

$$\mathcal{M} : \{E_i, \vec{p}_i, tipo_i\} \Rightarrow \mathcal{M}(\{E_i, \vec{p}_i, tipo_i\}) \in \mathbb{C}, \quad (1.7)$$

donde la etiqueta $tipo_i$ incluye números cuánticos de los estados iniciales y finales de las partículas involucradas, por ejemplo la polarización de un fotón o el espín de un fermión. En relatividad especial, la energía E y el momento \vec{p} de una partícula debe satisfacer la relación $E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4$ con la masa de la partícula en reposo. Entonces, una de las constricciones en los datos externos para cualquier amplitud n -partículas, es que la condición relativista de capa de masa

$$E_i^2 - |\vec{p}_i|^2 c^2 = m_i^2 c^4, \quad (1.8)$$

se cumple para todas las partículas con $i = 1, \dots, n$. Es conveniente trabajar en unidades naturales, donde la velocidad de la luz c y la constante de Plank $\hbar = h/2\pi$ se toma $c = \hbar = 1$. Se puede combinar la energía y el momento en un cuatrimomento $p_i^\mu = (E_i, \vec{p}_i)$ con $\mu = 0, 1, 2, 3$ y escribimos $p_i^2 = -E_i^2 + |\vec{p}_i|^2$ de tal forma que la condición de capa de masa (1.8) se convierte en

$$p_i^2 = m_i^2. \quad (1.9)$$

Conservación de la energía relativista y momento requiere que la suma de los momentos iniciales sea igual a la suma de los momentos finales. Es conveniente cambiar el signo de todos los momentos entrantes, así que la conservación del cuatrimomento se escribe como:

$$\sum_{i=1}^n p_i^\mu = 0. \quad (1.10)$$

En resumen, la configuración para una amplitud involucra la especificación del cuatrimomento y el tipo de cada partícula externa, $(p_i^\mu, tipo_i)$, sujeta a la restricción (1.9) y a la conservación de momento (1.10). Se dice que una amplitud es de capa de masa cuando satisface tanto (1.9) y (1.10) con sus respectivos vectores de polarizaciones o el espín del fermión. En el capítulo sobre el formalismo de helicidad, se introdujera un nuevo tipo de amplitudes conocidas como **MHV** (*maximum helicity violating*, por sus siglas en inglés), las cuales son las únicas que son diferentes de cero y pueden calcularse de una manera sencilla con ese formalismo. De esto, surgen las siguientes preguntas: ¿Porqué las amplitudes de capa de masa son tan simples? Como se puede apreciar en las Ec.(1.6) y ¿Hay algún mejor modo de calcular estas amplitudes? Dichas preguntas han sido investigadas en años recientes y gran parte del progreso se ha hecho en mejorar las técnicas de

**CAPÍTULO 1. TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS Y LAS AMPLITUDES DE
DISPERSIÓN**
1.3. AMPLITUD DE DISPERSIÓN

cálculo y pistas acerca de la estructura matemática de las amplitudes. La estructura matemática, se refiere a que las amplitudes viven en más espacios abstractos, donde las amplitudes pueden ser interpretadas como volúmenes de objetos geométricos conocidos como **Polytopes**, el cual es la generalización de los polígonos a dimensiones más altas [4]. Es interesante como una observable física que codifica la probabilidad de un proceso de dispersión como una función de energías y momentos tiene una interpretación alternativa matemática como el volumen de un objeto geométrico en un espacio abstracto de altas dimensiones.

El estudio de las amplitudes de capa de masa podría sugerir un nuevo paradigma donde se evita la lagrangiana completa con todas sus ambigüedades de la redefinición de campos y elección de normas en lugar de enfocarse en cómo la cinemática, las simetrías, la unitariedad y la localidad impactan las observables físicas. Una formulación como tal podría hacer el cálculo de amplitudes mucho más eficiente, la elección de partículas sin masa es debido a que sus procesos son los más simples y mejor entendidos. Algunos de los avances en cuestión de amplitudes que actualmente se realizan, incluyen los siguientes tópicos solo por mencionar algunos [9]-[15]:

- 1.- Formalismo de los espinores de helicidad.
- 2.- Relaciones de recursión de capa de masa (BCFW, CSW, ...)
- 3.- Superespacios de capa de masa, superamplitudes, Identidades de Ward.
- 4.- Twistores, twistores de momento.
- 5.- Grasmannian, polytopes, amplituhedron y matemáticas (teoría de números, geometría algebraica, combinatoria, ...)
- 6.- Gravedad = (teoría de norma)², KLT y relaciones BCJ.

Con toda esta información, en los siguientes capítulos se presenta los conceptos y definiciones del formalismo de los espinores de helicidad. Se calculan procesos de dispersión de QCD para mostrar como funciona este método y luego se extenderan a teorías supersimétricas.

Capítulo 2

Formalismo de los espinores de helicidad

En este capítulo se describe una alternativa para construir amplitudes, usando solamente los estados físicos externos de capa de masa (on-shell). Esta aproximación se le conoce como el formalismo de los espinores de helicidad, este método se basa en la simple observación de que los campos de espin-1 se transforman en la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz, de este modo los espinores se pueden representar como biespinores, $\epsilon_{ab} = (\sigma^\mu)_{ab} \epsilon_\mu$ con $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$. Por lo que, la redundancia de empaquetar una partícula sin masa de espin-1 en un campo vectorial $A_\mu(x)$ se puede evitar. A continuación se presentan las bases teóricas del formalismo de helicidad y como surge la helicidad en el contexto del *little group*.

2.1. Grupo pequeño de Wigner (*Little Group*)

Para un estado con momento p^μ , el efecto de una transformación de Lorentz es cambiar p^μ pero dejando $p^\mu p_\mu$ invariante. Un estado $|p\rangle$ con $P^\mu |p\rangle = p^\mu |p\rangle$ es convertido por una transformación (Λ, a) de la siguiente manera

$$U(\Lambda, a)|p\rangle = |\Lambda p\rangle, \quad (2.1)$$

entonces

$$P^\mu |\Lambda p\rangle = (\Lambda p)^\mu |\Lambda p\rangle, \quad (2.2)$$

de este modo se obtiene que una transformación de Lorentz deja invariante $P^\mu P_\mu$, ya que $(\Lambda p)^2 = P^2$. También se debe a que $P^\mu P_\mu$ conmuta con todos los generadores del grupo, por que recibe el nombre de primer invariante de Casimir C_1 , con

$$C_1 = P^\mu P_\mu. \quad (2.3)$$

Como consecuencia de esto, todos los estados obtenidos por una transformación de Lorentz desde un estado inicial, tienen el mismo valor de p^2 . Ya que el signo de p^0 no cambia por una transformación de Lorentz, se tiene un catálogo de estados que forman bases para las representaciones del grupo,

CAPÍTULO 2. FORMALISMO DE LOS ESPINORES DE HELICIDAD
2.1. GRUPO PEQUEÑO DE WIGNER (*LITTLE GROUP*)

se tiene seis clases distintas:

$$\begin{aligned}
 (I) \quad & p^2 = m^2 > 0, \quad p^0 > 0, \\
 (II) \quad & p^2 = m^2 > 0, \quad p^0 < 0, \\
 (III) \quad & p^2 = 0, p^0 > 0, \\
 (IV) \quad & p^2 = 0, \quad p^0 < 0, \\
 (V) \quad & p^\mu = 0, \\
 (VI) \quad & p^2 < 0.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

El primer caso y el tercero, corresponden a partículas físicas masivas y sin masa. El quinto caso es el vacío, y el sexto debería corresponde a partículas virtuales las cuales suelen tener momento espacialoide. Los otros casos son no físicos. Una vez que se escoge un momento particular p^μ , que pertenece al conjunto (p^μ) , una observación que se hace es que el subgrupo del grupo de Poincaré que deja invariante el momento p^μ , el cual se le llama "pequeño grupo" (**little group, en inglés**) del momento p^μ , tiene la misma estructura para todos los momentos en el conjunto (p^μ) . Ahora, al considerar el caso (I) $p^2 = m^2$, un momento particular p^μ es el del marco de referencia en reposo, denotando este momento como k^μ . Entonces

$$k^\mu = (m, 0, 0, 0). \tag{2.5}$$

Es claro que el grupo de las rotaciones deja invariante a k^μ , así el little group para k^μ es el grupo de las rotaciones SU(2). Por lo tanto, para un momento temporaloide, para saber el efecto de una transformación de Lorentz arbitraria se requiere solamente conocer las representaciones del grupo de las rotaciones. Para entender mejor este asunto, considerese un momento arbitrario temporaloide p^μ , entonces existe una transformación de Lorentz que nos lleva de k^μ (momento en el marco de reposo) hacia el momento p^μ . Esta transformación se define como $L(p)$, entonces:

$$p^\mu = L^\mu_\nu(p)k^\nu. \tag{2.6}$$

En general, L puede ser un producto $R^{-1}BR$, donde R es una rotación que lleva a \hat{p} al eje z y B es un Boost. Denotando los estados en el espacio de Hilbert como $|p, \sigma\rangle$ y $|k, \sigma\rangle$, con σ un índice espinorial, por lo que se tiene la siguiente relación en el espacio de Hilbert

$$|p, \sigma\rangle = U(L(p))|k, \sigma\rangle. \tag{2.7}$$

Aquí $U(L(p))$ es un operador unitario que representa a $L(p)$, entonces al considerar una transformación de Lorentz arbitraria Λ y su correspondiente transformación unitaria

$$p^\mu \longrightarrow p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu, \tag{2.8}$$

$$|p, \sigma\rangle \longrightarrow U(\Lambda)|p, \sigma\rangle. \tag{2.9}$$

Se necesita encontrar $U(\Lambda)|p, \sigma\rangle$, al hacer las operaciones correspondientes se obtiene finalmente

$$U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R)|\Lambda p, \sigma'\rangle, \tag{2.10}$$

donde $\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R)$ proviene de la siguiente definición

$$U(R)|k, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R)|k, \sigma'\rangle. \tag{2.11}$$

Con estos resultados, se concluye que para saber las representaciones del grupo de Lorentz para un estado temporaloide, se necesita conocer las representaciones del grupo de las rotaciones. Por

CAPÍTULO 2. FORMALISMO DE LOS ESPINORES DE HELICIDAD
2.1. GRUPO PEQUEÑO DE WIGNER (*LITTLE GROUP*)

lo tanto, el espín es dado por el grupo de las rotaciones y el hecho de que el *little group* para k^μ es el grupo $SU(2)$ aplica para todos los momentos temporaloides. Sin embargo, cuando tratamos el caso (III) $p^2 = 0$ con $p^0 > 0$, es decir, estados con momento luxoides, se tiene que el espín ya no es dado por el grupo de las rotaciones. Por otro lado, el pseudovector de Pauli-Lubanski se define como

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma, \quad (2.12)$$

se cumple que

$$W_\mu P^\mu = 0, \quad (2.13)$$

así que en el marco de una partícula en reposo, W es espacialoide $W_\mu = (0, \vec{W})$, con $W_i = -\frac{m}{2}\epsilon_{ijk0}J^{jk}$. Entonces el segundo invariante de Casimir es

$$C_2 = W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1), \quad (2.14)$$

donde s es el espín de la partícula. Ya que el grupo de Poincaré es de rango 2, solamente hay dos invariantes de Casimir. Finalmente, consideramos el caso de una partícula luxoides $p^2 = 0$. Se elige el marco de referencia

$$k^\mu(k, 0, 0, k), \quad (2.15)$$

el cual describe a una partícula sin masa moviéndose a lo largo del eje z . El método de Wigner consiste en encontrar cuál es la transformación de Lorentz más general que deja invariante k^μ . Resulta ser que esta transformación es una combinación particular de boosts y rotaciones con parámetros θ, u, v , entonces

$$U \equiv 1 + i\theta J_3 + iuL_1 + ivL_2. \quad (2.16)$$

Los generadores L_1, L_2 y J_3 forman un álgebra de Lie la cual es

$$[L_1, L_2] = 0, \quad (2.17)$$

$$[J_3, L_1] = iL_2, \quad (2.18)$$

$$[L_2, J_3] = iL_1. \quad (2.19)$$

Se puede ver que esta álgebra no es la del grupo $SU(2)$ por el cero en la primera relación. Esta álgebra corresponde al grupo de las rotaciones generadas por J_3 y las traslaciones generadas por L_1, L_2 en el plano, el grupo Euclideo $E(2)$. Con $m^2 = 0$ y la Ec.(2.14), se tiene

$$W \cdot W|k\rangle = 0, \quad P \cdot P|k\rangle = 0, \quad (2.20)$$

$$W \cdot P|k\rangle = 0, \quad (2.21)$$

entonces W^μ y P^μ son ortogonales y ambos son luxoides. Esto significa que deben ser proporcionales,

$$(W^\mu - hP^\mu)|k\rangle = 0, \quad (2.22)$$

el resultado de esto es que los estados de las partículas sin masa son caracterizados por la constante h , la cual es el radio de W^μ y P^μ , por lo que tiene las dimensiones de momento angular. Esta constante se le conoce como *la helicidad*. Si paridad es incluida, entonces se tienen dos helicidades, h y $-h$. Los fermiones tienen helicidad semientera $h = \pm\frac{1}{2}$ y los bosones tienen helicidad entera $h = \pm 1$.

2.2. Espinores de helicidad

Cuando $m = 0$, la ecuación de Dirac de 4 componentes en el espacio de momentos se escribe como:

$$\not{p}v_{\pm}(p) = 0, \quad \bar{u}_{\pm} \not{p} = 0. \quad (2.23)$$

Aquí $v_{\pm}(p)$ y $\bar{u}_{\pm}(p)$ son las funciones de onda asociadas con un antifermión y un fermión salientes, respectivamente. En el caso de procesos sin masa, los subíndices \pm denota la **Helicidad** $h = \pm 1/2$, mediante simetría de Crossing las funciones de onda estan relacionadas como $u_{\pm} = v_{\mp}$ y $\bar{v}_{\pm} = \bar{u}_{\mp}$.

Por otro lado, ya que el momento se transforma en la representación de Lorentz $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, de esta manera es mas natural describirlo como bi-espinores, $p_{a\dot{a}}$, en lugar de cuadvectores $p_{\mu}(x)$. Se introduce la notación para espinores de Weyl donde ψ_a significa un espinor izquierdo en la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ y $\tilde{\psi}_{\dot{a}}$ significa un espinor derecho en la representación $(0, \frac{1}{2})$. Estamos interesados en espinores constantes, los cuales se transforman en la representación del grupo de Lorentz dimensionalmente finita. Para aplicaciones de QCD se toman como reales o complejas. Se definen los **espinores de helicidad** como dobles reales o complejos que se transforman en la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ o $(0, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz. El producto interno entre dos espinores se define como

$$\langle \lambda \chi \rangle = \epsilon^{\dot{a}b} \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \tilde{\chi}_b = -\langle \chi \lambda \rangle, \quad [\lambda \chi] = \epsilon_{ab} \lambda^a \chi^b = -[\chi \lambda] \quad (2.24)$$

En particular $\langle \lambda \lambda \rangle = [\lambda \lambda] = 0$. Sí el espinor es izquierdo o derecho se indica con los brackets cuadrados o angulado, respectivamente. Para representar al momento como un biespinor, usamos las σ -matrices de Pauli:

$$p^{\dot{a}b} = (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{a}b} p_{\mu} = \begin{pmatrix} p^0 - p^3 & -p^1 + ip^2 \\ -p^1 - ip^2 & p^0 + p^3 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

En general, tenemos cuatro relaciones importantes:

$$p_{a\dot{b}} \equiv (\sigma_{\mu})_{a\dot{b}} p^{\mu}, \quad p^{\dot{a}b} = (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{a}b} p_{\mu}, \quad p_{\mu} = \frac{1}{2} (\sigma_{\mu})_{a\dot{a}} p^{\dot{a}a}, \quad p^{\mu} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{a}a} p_{a\dot{a}}, \quad (2.26)$$

los momentos biespinoriales $p^{\dot{a}b}$ y $p_{a\dot{b}}$ pueden ser pensado como matrices de 2×2 y su determinante es invariante de Lorentz,

$$\det(p^{\dot{a}b}) = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = m^2. \quad (2.27)$$

Por otro lado, los espinores de Dirac izquierdo y derechos se pueden escribir como:

$$v_+(p) = \begin{pmatrix} |p\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |p\rangle, \quad v_-(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ |p\rangle \end{pmatrix} \equiv |p\rangle, \quad (2.28)$$

$$\bar{u}_-(p) = (0, \langle p|) \equiv \langle p|, \quad \bar{u}_+(p) = (|p|, 0) \equiv |p|, \quad (2.29)$$

la matrice γ en la base de Weyl son

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma_{\mu})_{a\dot{b}} \\ (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

De esto, se obtienen las siguientes propiedades:

$$[p|\gamma^{\mu}|q] = \langle p|\gamma^{\mu}|q\rangle = 0, \quad (2.31)$$

$$\langle p|\gamma^{\mu}|q] = [q|\gamma^{\mu}|p\rangle, \quad (2.32)$$

$$\langle p|\gamma^{\mu}|q]\langle r|\gamma_{\mu}|s\rangle = 2\langle pr\rangle[sq], \quad (2.33)$$

$$\langle p|\not{k}|q] = \langle pk\rangle[kq]. \quad (2.34)$$

CAPÍTULO 2. FORMALISMO DE LOS ESPINORES DE HELICIDAD
2.2. ESPINORES DE HELICIDAD

Los espinores angulados y cuadrados son el nucleo de lo que se conoce como **El formalismo de los espinores de helicidad**.

Ahora bien, el momento como bi-espinor en términos de brackets angulados y cuadrados se expresa de la siguiente manera:

$$p^{\dot{a}b} = |p\rangle[p], \quad p_{\dot{a}b} = |p\rangle[p]. \quad (2.35)$$

La contracción entre momentos se define como:

$$q \cdot p = q^\mu p_\mu = \frac{1}{2} q_{\dot{a}\dot{b}} p^{\dot{a}b} \equiv \frac{1}{2} Tr(|q\rangle\langle qp|p\rangle) = \frac{1}{2} \langle qp\rangle[pq]. \quad (2.36)$$

Tomando todos los momentos entrantes, en términos de espinores de helicidad la conservación de momento se puede escribir como:

$$\sum_j^n \langle ij\rangle[jk] = 0. \quad (2.37)$$

Por simplicidad se toma $|j\rangle$ para $|p_j\rangle$, por ejemplo, si tenemos solamente 4 momentos, se fija $i = 1$ y $k = 2$ entonces se tiene $\langle 13\rangle[32] = -\langle 14\rangle[42]$ Para momentos reales se tiene $|p\rangle = (|p\rangle)^*$ y $\langle p| = (\langle p|)^*$ entonces $\langle pq\rangle^* = [qp]$. Las polarizaciones en este formalismo se definen como:

$$[\epsilon_p^-(r)]^{\dot{a}a} = \sqrt{2} \frac{|p\rangle[r]}{[pr]}, \quad [\epsilon_p^+(r)]^{\dot{a}a} = \sqrt{2} \frac{\langle r\rangle[p]}{\langle rp\rangle}, \quad (2.38)$$

donde r^μ se le conoce como **momento de referencia**

Las contracciones entre estas polarizaciones dan como resultado lo siguiente:

$$\epsilon_1^-(i) \cdot \epsilon_2^-(j) = \frac{\langle 12\rangle[ji]}{[1i][2j]}, \quad (2.39)$$

$$\epsilon_1^-(i) \cdot \epsilon_2^+(j) = \frac{\langle 1j\rangle[2i]}{[1i]\langle j2\rangle}, \quad \epsilon_1^+(i) \cdot \epsilon_2^+(j) = \frac{\langle ij\rangle[21]}{\langle i1\rangle\langle j2\rangle} \quad (2.40)$$

$$\epsilon_1^-(i) \cdot p_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 13\rangle[3i]}{[1i]}, \quad \epsilon_1^+(i) \cdot p_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[13]\langle 3i\rangle}{\langle i1\rangle}. \quad (2.41)$$

Con todo lo visto hasta ahora, podemos ver ahora algunos resultados importantes. Consideremos el proceso de dispersión de gluones $2 \rightarrow 2$ con todos los gluones con helicidad positiva, con momento de referencia r^μ no paralelo a p_i^μ . Entonces de (2.40) :

$$\epsilon_i^+(r) \cdot \epsilon_j^+(r) = \frac{\langle rr\rangle[ji]}{\langle ri\rangle\langle rj\rangle} = 0. \quad (2.42)$$

Cada término de la amplitud asociada al canal-s tiene factores $\epsilon_i \cdot \epsilon_j$. Por lo tanto $\mathcal{M}_s(1^+, 2^+, 3^+, 4^+) = 0$. Del mismo modo para los canales t, u y el vértice de 4 puntos, ya que al menos tienen un par de polarizaciones contraídas. Se concluye que **Las amplitudes con toda las helicidades positivas(o negativas) desaparecen a nivel árbol en QCD**. Ahora se considera un gluón con helicidad negativa de momento p_1^μ y momento de referencia r^μ . Para las polarizaciones donde $p_{i \neq 1}^\mu$ el momento de referencia se toma como $r^\mu = p_1^\mu$ se tiene

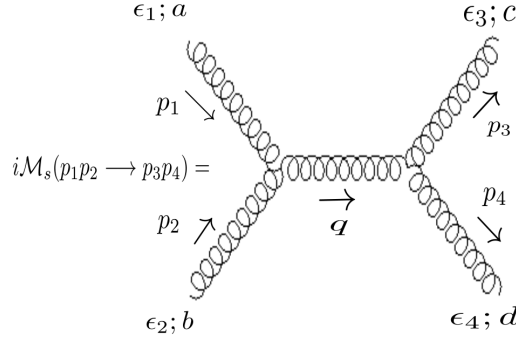
$$\epsilon_i^+ \cdot \epsilon_j^+ = 0, \quad i, j \neq 1 \quad (2.43)$$

$$\epsilon_i^+(1) \cdot \epsilon_1^-(r) = \frac{[ir]\langle 11\rangle}{\langle 1i\rangle[1r]} = 0. \quad (2.44)$$

Por lo tanto se tiene que **Amplitudes con todas excepto una de helicidad positiva o (negativa) desaparecen a nivel árbol**. Se concluye que *Las únicas amplitudes que no desaparecen,*

CAPÍTULO 2. FORMALISMO DE LOS ESPINORES DE HELICIDAD
2.2. ESPINORES DE HELICIDAD

son aquellas con al menos dos helicidades positivas y dos helicidades negativas. Estas amplitudes se les conoce como **Maximum Helicity Violating amplitudes (MHV)**. Para proceso de dispersión en QCD resulta en que la complejidad se incrementa extremadamente rapido. Por ejemplo, si consideramos el proceso $gg \rightarrow gg$ a nivel árbol las contribuciones provienen de los diagramas de Feynman asociados a los canales s,t, u y del diagrama asociado al vertices de 4 puntos. En la norma de Feynman, el diagrama de Feynman asociado al canal s, es dado por:



$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_s(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4) = & -i \frac{g_s^2}{s} f^{abe} f^{cde} [-4\epsilon_1 \cdot \epsilon_3^* \epsilon_2 \cdot p_1 p_3 \cdot \epsilon_4^* + 2\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \\
 & \epsilon_3^* \cdot p_1 \epsilon_4^* \cdot p_3 - 2\epsilon_1 \cdot p_4 \epsilon_2 \cdot p_1 \epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^* + \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 p_4 \cdot \epsilon_2 p_4 \cdot p_1 \epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^* + 4\epsilon_1 \cdot \epsilon_4^* \\
 & \epsilon_2 \cdot p_1 \epsilon_3^* \cdot p_4 - 2\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \epsilon_3^* \cdot p_4 \epsilon_4^* \cdot p_1 - 2\epsilon_1 \cdot p_2 \epsilon_2 \cdot p_3 \epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^* + \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^* \\
 & p_2 \cdot p_3 + 4\epsilon_1 \cdot p_2 \epsilon_2 \cdot \epsilon_3^* \epsilon_4^* \cdot p_3 - 2\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \epsilon_3 \cdot p_2 \epsilon_4^* \cdot p_3 + 2\epsilon_1 \cdot p_2 \epsilon_2 \cdot p_4 \\
 & \epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^* - \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^* p_4 \cdot p_2 - 4\epsilon_1 \cdot p_2 - 4\epsilon_1 \cdot p_2 \epsilon_2 \cdot \epsilon_4^* \epsilon_3^* \cdot p_4 + 2\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \\
 & \epsilon_3^* \cdot p_4 \epsilon_4^* \cdot p_2 + 2\epsilon_1 \cdot p_3 \epsilon_2 \cdot p_1 \epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^* - \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^* p_1 \cdot p_3].
 \end{aligned}$$

ha sido simplificada usando transversalidad. Para obtener la sección eficaz total, se necesitan calcular los diagramas cruzados, junto con el vertice de 4 puntos, cuadradar la amplitud, sumar sobre las polarizaciones y simplificar el factor de color. En este punto se deben manejar alrededor de 1000 términos o más, luego sumando sobre los estados finales y promediando sobre los estados iniciales:

$$\frac{1}{256} \sum_{pols, colors} |\mathcal{M}|^2 = g_s^4 \frac{9}{2} \left(3 - \frac{tu}{s^2} - \frac{su}{t^2} - \frac{st}{u^2} \right), \quad (2.45)$$

el cual es notablemente simple. Por esta razón es que el formalismo de los espinores de helicidad adquieren un valor muy importante como método de cálculo, el funcionamiento de este método se mostrará más adelante. De los resultados anteriores se sabe que las amplitudes **MHV** son las únicas que no desaparecen, para este proceso se procede a calcular una sola amplitud la cual es $\mathcal{M}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+)$, el resto se calculan mediante crossing. Para este cálculo se toman todos los momentos entrantes y se toman las variables de Mandelstan como $t = (p_1 + p_4)^2$, $u = (p_1 + p_3)^2$ y $s = (p_1 + p_2)^2$ de este modo se tiene que $s + t + u = 0$. Notese que estas definiciones son diferentes a las usuales donde se tiene dos momentos entrantes y dos momentos salientes. Ahora se escogen los momentos de referencia para las polarizaciones ϵ_1 y ϵ_2 se elige $r^\mu = p_4^\mu$, para ϵ_3 y ϵ_4 se elige $r^\mu = p_1^\mu$. Entonces, utilizando las definiciones dadas por (2.40) algunas contracciones dan como resultado:

$$\epsilon_2 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_2^-(4) \cdot \epsilon_3^+(1) = \frac{\langle 21 \rangle [34]}{[24] \langle 13 \rangle}, \quad (2.46)$$

CAPÍTULO 2. FORMALISMO DE LOS ESPINORES DE HELICIDAD
2.2. ESPINORES DE HELICIDAD

$$\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = \epsilon_1^-(4) \cdot \epsilon_2^-(4) = \frac{\langle 12 \rangle [44]}{[14][24]} = 0, \quad (2.47)$$

$$\epsilon_1 \cdot p_4 = \epsilon_1^-(4) \cdot p_4 = \frac{\langle 14 \rangle [44]}{\sqrt{2}[14]} = 0, \quad (2.48)$$

$$\epsilon_1 \cdot p_1 = \epsilon_1^-(4) \cdot p_1 = \frac{\langle 11 \rangle [14]}{\sqrt{2}[14]} = 0. \quad (2.49)$$

Del mismo modo se calculan el resto de contracciones y se concluye que la única contracción diferente de cero es $\epsilon_2 \cdot \epsilon_3$, el resto son $\epsilon_1 \cdot p_4 = \epsilon_2 \cdot p_4 = \epsilon_3 \cdot p_1 = \epsilon_4 \cdot p_1 = 0$ y $\epsilon_i \cdot p_i = 0$.

Capítulo 3

Amplitudes en QCD con el formalismo de helicidad

El objetivo de este capítulo es presentar un breve resumen sobre QCD, y mostrar como funciona el formalismo de los espinores de helicidad calculando la amplitud del proceso $gg \rightarrow gg$. Se podrá ver que ocurren algunas simplificaciones considerables quedando solamente dos amplitudes que no se anulan. Al final mostraremos la fórmula de Parker-Taylor que nos permite calcular en principio cualquier amplitud de gluones

3.1. Cromodinámica cuántica (QCD)

La interacción fuerte es descrita por una teoría de norma local no-abeliana de quarks y gluones, SU(3) es el grupo de norma y los gluones son los bosones de norma. Dicha teoría se le conoce como cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés), hay tres quarks de color para cada quark de sabor, estos forman un triplete en la representación fundamental de SU(3) y los ocho gluones forman un octete en la representación adjunta. Por un lado, en física de colisionadores, los gluones son producidos como jets. Ya que los gluones tienen dos etiquetas de color (un color, y un anticolor), los jets de gluones se pueden aproximar reemplazando un gluón inicial por un quark sin masa colineal más un antiquark que lleve estas etiquetas de color con el momento dividiendo a ambos, por ejemplo $g \rightarrow q\bar{q}$. Otra aproximación es el sistema $\bar{q}qg$, el cual podría producirse en colisiones e^+e^- ya que hay evidencia experimental para efectos en $e^+e^- \rightarrow 3$ jets. De acuerdo a QCD, los eventos primordiales son $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ y los jets de gluones debido a que usualmente son los menos energéticos. Antes de fragmentar un estado multipartónico en hadrones, las aproximaciones que se usan, requieren recolectar los quarks y gluones en un conjunto sin color, como el sistema $q\bar{q}g$ es un ejemplo de un conjunto sin color. Otro caso interesante es el sistema de tres gluones, producido por ejemplo en $e^+e^- \rightarrow \gamma(b\bar{b}) \rightarrow ggg$. El aumento en la sección eficaz en colisiones hadrón-hadrón es debido a que los procesos suaves no pueden ser calculados en el presente desde primeros principios. Sin embargo, en regiones cinemáticas seleccionadas, se pueden observar la dispersión de partones duros fundamentales y ser comparados con las predicciones perturbativas de QCD. Los quarks y gluones llevan el (20 %) o menos del momento hadrónico, la energía total del centro de masa es disminuido por este factor en irse desde el sistema hadrón-hadrón hacia el sistema partón-partón. En colisionadores ISR pp con $\sqrt{s} = 63$ GeV se han eventualmente detectado jets. En el colisionador $p\bar{p}$ del CERN con $\sqrt{s} = 540 - 630$ GeV se han encontrado partones a energías de centro de masa de 50 GeV. Los procesos de dispersión de partones de más bajo orden que contribuyen a la producción

**CAPÍTULO 3. AMPLITUDES EN QCD CON EL FORMALISMO DE
HELICIDAD**
3.1. CROMODINÁMICA CUÁNTICA (QCD)

de jets son

$$\begin{aligned}
 qq' &\longrightarrow qq', & (3.1) \\
 q\bar{q}' &\longrightarrow q\bar{q}', \\
 qq &\longrightarrow qq, \\
 q\bar{q} &\longrightarrow \bar{q}'q', \\
 q\bar{q} &\longrightarrow q\bar{q}, \\
 q\bar{q} &\longrightarrow gg, \\
 gg &\longrightarrow q\bar{q}, \\
 qq &\longrightarrow qq, \\
 gg &\longrightarrow gg.
 \end{aligned}$$

Donde q y q' denotan sabores distintos de quarks. Ya que es imposible decir si algún jet en particular viene desde un quark o gluón, todos los subprocesos anteriores contribuyen de la misma manera. Se espera que los jets de gluones sean más suaves que un quark de jets, porque los gluones tienen un acoplamiento de color más fuerte e irradian rápidamente gluones extra. En esta tesis nos interesan solamente los gluones y los procesos de dispersión que involucren solamente gluones. Por otro lado, en QCD los gluones son descritos por la lagrangiana de Yang-Mills:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Tr F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}[A_\mu, A_\nu]$ con $A_\mu = A_\mu^a T^a$. El grupo de norma es $SU(3)$ para QCD. Los campos gluónicos están en la representación adjunta, así que el índice de color corre $a, b, \dots = 1, 2, \dots, N^2 - 1$. Los generadores T^a están normalizados como

$$Tr T^a T^b = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (3.3)$$

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c. \quad (3.4)$$

Para obtener la respuesta completa del proceso de dispersión de gluones se necesita tratar con el color. Las constantes de estructura para $SU(N)$ están relacionadas con los generadores en la representación fundamental mediante:

$$f^{abc} = -2i Tr([T^a, T^b]T^c). \quad (3.5)$$

$$f^{abe} f^{cde} = -2 Tr([T^a, T^b][T^c, T^d]). \quad (3.6)$$

Dos importantes identidades para simplificar los factores de color son las siguientes:

$$Tr(T^a A)Tr(T^a B) = \frac{1}{2}(Tr(AB) - \frac{1}{N}Tr(A)Tr(B)) \quad (3.7)$$

$$Tr(AT^a BT^b) = \frac{1}{2}(Tr(A)Tr(B) - \frac{1}{N}Tr(AB)). \quad (3.8)$$

Reescribiendo $T^a \rightarrow 1$, $T^b \rightarrow 2$, $T^c \rightarrow 3$, $T^d \rightarrow 4$ y tomando $A = B = 1$ en (3.8) se tiene

$$Tr(11) = Tr(T^a T^a) = \frac{N^2 - 1}{2}. \quad (3.9)$$

Tomando $A = B = T^b$ en (3.7) se tiene

$$Tr(T^a T^b)Tr(T^a T^b) = Tr(12)Tr(12) = \frac{N^2 - 1}{4}. \quad (3.10)$$

**CAPÍTULO 3. AMPLITUDES EN QCD CON EL FORMALISMO DE
HELICIDAD**

3.2. AMPLITUD DEL PROCESO : $GG \rightarrow GG$

Similarmente se tiene

$$Tr(123)Tr(123) = \frac{1 - N^2}{4N}, \quad Tr(123123) = \frac{N^4 - 1}{8N^2} \quad (3.11)$$

$$Tr(1234)Tr(1234) = \frac{N^4 + 2N^2 - 3}{16N^2} \quad (3.12)$$

$$Tr(1234)Tr(4321) = \frac{N^6 - 4N^4 + 6N^2 - 3}{16N^2} \quad (3.13)$$

Finalmente con los resultados anteriores se tiene

$$(f^{abe} f^{cde})^2 = N^2(N^2 - 1) \quad (3.14)$$

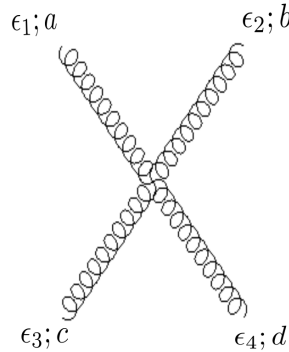
$$(f^{abe} f^{cde})(f^{acg} f^{bdg}) = \frac{1}{2}N^2(N^2 - 1). \quad (3.15)$$

La lagrangiana(3.2) contiene un vértices de tres gluones y también hay un vértices de interacción de cuatro gluones. Las reglas de Feynman de QCD que se utilizan se pueden ver en el Apéndice.

3.2. Amplitud del proceso : $gg \rightarrow gg$

En la sección anterior se vio la importancia fenomenológica de los gluones. El objetivo de este capítulo es mostrar como se calcula un proceso de dispersión mediante el formalismo de los espinores de helicidad. Se escoge el proceso de $gg \rightarrow gg$ porque es el más sencillo proceso para familiarizarse con el método de los espinores de helicidad. Tomando en cuenta los resultados y definiciones del capítulo 2 se procede a calcular las correspondientes amplitudes asociadas a los diagramas de Feynman que se pueden construir utilizando las reglas de Feynman dadas en el (apéndice B).

Primero, se considera el diagrama de 4 puntos.



la amplitud asociada a este diagrama es:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4 = & -ig_s^2(f^{abe} f^{cde})[(\epsilon_1 \cdot \epsilon_3)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_4) - (\epsilon_1 \cdot \epsilon_4)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_3)] + f^{ace} f^{bde}[(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_3 \cdot \epsilon_4) - (\epsilon_1 \cdot \epsilon_4)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_3)] \\ & + f^{ade} f^{bce}[(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_3 \cdot \epsilon_4) - (\epsilon_1 \cdot \epsilon_3)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_4)], \end{aligned} \quad (3.16)$$

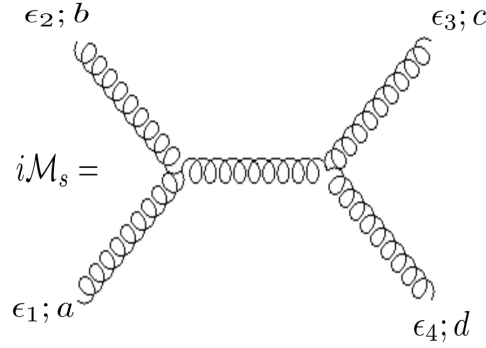
**CAPÍTULO 3. AMPLITUDES EN QCD CON EL FORMALISMO DE
HELICIDAD**

3.2. AMPLITUD DEL PROCESO : GG \rightarrow GG

en este caso no hay factores de momento en el vértice, así que este diagrama puede dar productos de contracciones entre polarizaciones tal como $(\epsilon_2 \cdot \epsilon_3)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_4)$. Ya que solo hay productos de contracciones de polarizaciones, y solamente $\epsilon_2 \cdot \epsilon_3$ es diferente de cero se tiene

$$\mathcal{M}_4(1^-2^-3^+4^+) = 0, \quad (3.17)$$

entonces este diagrama no contribuye en el proceso. Ahora, nos enfocamos en el diagrama de Feynman asociado al canal-s.



Mediante las reglas de Feynman dadas por (B, B) y asumiendo que solamente $\epsilon_i \cdot p_i = 0$ se obtiene la siguiente amplitud

$$i\mathcal{M}_s = \frac{-ig_s^2}{s} f^{abe} f^{cde} [(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(p_1 - p_2)^\mu + 2\epsilon_2^\mu(p_2 \cdot \epsilon_1) - 2\epsilon_1^\mu(p_1 \cdot \epsilon_2) + (\epsilon_3 \cdot \epsilon_4)(p_3 - p_4)^\mu + 2\epsilon_4^\mu(p_4 \cdot \epsilon_3) - 2\epsilon_3^\mu(p_3 \cdot \epsilon_4)], \quad (3.18)$$

Para la helicidad escogida, (-, -, +,+), solamente sobrevive el término correspondiente a la contracción $\epsilon_2 \cdot \epsilon_3$, así que solamente hay un término:

$$\mathcal{M}_s(1^-2^-3^+4^+) = \frac{4g_s^2}{s} f^{abe} f^{cde} (\epsilon_2^- \cdot \epsilon_3^+)(p_2 \cdot \epsilon_1^-)(p_3 \cdot \epsilon_4^+). \quad (3.19)$$

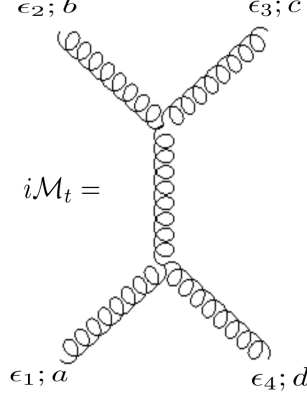
Entonces escribiendo todo en términos de productos de espinores con $s = \langle 12 \rangle [21]$, haciendo las operaciones y simplificando se tiene como resultado:

$$\mathcal{M}_s(1^-2^-3^+4^+) = -2g_s^2 f^{abe} f^{cde} \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle}. \quad (3.20)$$

Ahora, considerando el diagrama de Feynman asociado al canal-t, el cual se obtiene simplemente haciendo el intercambio $2 \leftrightarrow 4$ y $b \leftrightarrow d$ desde el canal-s se tiene:

**CAPÍTULO 3. AMPLITUDES EN QCD CON EL FORMALISMO DE
HELICIDAD**

3.2. AMPLITUD DEL PROCESO : GG \rightarrow GG

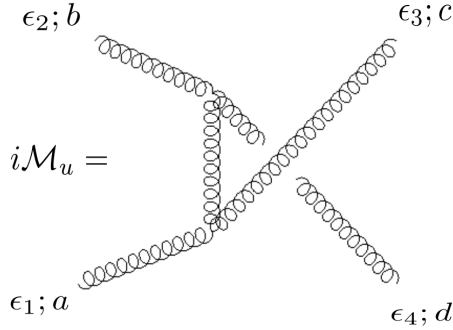


$$i\mathcal{M}_t = \frac{-ig_s^2}{t} f^{ade} f^{cbe} [(\epsilon_1 \cdot \epsilon_4)(p_1 - p_4)^\mu + 2\epsilon_4^\mu(p_4 \cdot \epsilon_1) - 2\epsilon_1^\mu(p_1 \cdot \epsilon_4) + (\epsilon_3 \cdot \epsilon_2)(p_3 - p_2)^\mu + 2\epsilon_2^\mu(p_2 \cdot \epsilon_3) - 2\epsilon_3^\mu(p_3 \cdot \epsilon_2)], \quad (3.21)$$

en este caso, las contracciones que tenemos son $\epsilon_1 \cdot p_4 = \epsilon_4 \cdot p_1 = \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 = 0$ y por lo tanto se tiene

$$\mathcal{M}_t(1^- 2^- 3^+ 4^+) = 0. \quad (3.22)$$

Finalmente, considerando el diagrama de Feynman asociado al canal-u, el cual se obtiene haciendo $2 \leftrightarrow 3$ y $b \leftrightarrow c$ desde el canal-s se tiene :



$$i\mathcal{M}_u = \frac{-ig_s^2}{u} f^{ace} f^{bde} [(\epsilon_1 \cdot \epsilon_3)(p_1 - p_3)^\mu + 2\epsilon_3^\mu(p_3 \cdot \epsilon_1) - 2\epsilon_1^\mu(p_1 \cdot \epsilon_3) + (\epsilon_2 \cdot \epsilon_4)(p_2 - p_4)^\mu + 2\epsilon_4^\mu(p_4 \cdot \epsilon_2) - 2\epsilon_2^\mu(p_2 \cdot \epsilon_4)]. \quad (3.23)$$

Esta expresión no se anula pero da como resultado

$$\mathcal{M}_u(1^- 2^- 3^+ 4^+) = \frac{4g_s^2}{u} f^{ace} f^{bde} (\epsilon_3^+ \cdot \epsilon_2^-)(p_3 \cdot \epsilon_1^-)(p_2 \cdot \epsilon_4^+). \quad (3.24)$$

Después de algunas simplificaciones, esta expresión se reduce a:

$$\mathcal{M}_u(1^- 2^- 3^+ 4^+) = -2g_s^2 f^{ace} f^{bde} \frac{\langle 21 \rangle^4}{\langle 14 \rangle \langle 42 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle}. \quad (3.25)$$

**CAPÍTULO 3. AMPLITUDES EN QCD CON EL FORMALISMO DE
HELICIDAD**

3.2. AMPLITUD DEL PROCESO : GG \rightarrow GG

Por lo tanto, el elemento de matriz total es $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_u$

$$\mathcal{M}(1^-2^-3^+4^+) = -2g_s^2 [f^{abe} f^{cde} \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle} + f^{ace} f^{bde} \frac{\langle 21 \rangle^4}{\langle 14 \rangle \langle 42 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle}]. \quad (3.26)$$

Para obtener la sección eficaz, se suma sobre el color y se cuadra el elemento de matriz. Usando $s = \langle 12 \rangle [21] = \langle 34 \rangle [43]$, $t = \langle 14 \rangle [41] = \langle 23 \rangle [32]$ y $u = \langle 13 \rangle [31] = \langle 24 \rangle [42]$

Se tiene entonces que

$$|\frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle}|^2 = \frac{s^2}{t^2}, \quad |\frac{\langle 21 \rangle^4}{\langle 14 \rangle \langle 42 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle}|^2 = \frac{s^4}{t^2 u^2}. \quad (3.27)$$

$$\frac{[12]^4}{[12][23][34][41]} \frac{\langle 21 \rangle^4}{\langle 14 \rangle \langle 42 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle} = \frac{s^3}{t^2 u}. \quad (3.28)$$

Y también

$$(f^{abe} f^{cde})^2 = N^2(N^2 - 1) \quad (3.29)$$

$$(f^{abe} f^{cde})(f^{acg} f^{bdg}) = \frac{1}{2} N^2(N^2 - 1) \quad (3.30)$$

Con estos resultados se tiene que

$$\sum_{colors} |\mathcal{M}(1^-2^-3^+4^+)|^2 = 4g_s^2 N^2(N^2 - 1) (\frac{s^4}{t^2 u^2} - \frac{s^4}{tu}), \quad (3.31)$$

esta expresión es simétrica en $t \leftrightarrow u$. El resto de las amplitudes se obtiene mediante crossing, esto es cambiando $s \leftrightarrow u$ desde $\mathcal{M}(1^-2^-3^+4^+)$ se tiene las amplitudes $\mathcal{M}(1^-2^+3^-4^+)$ y $\mathcal{M}(1^+2^-3^+4^-)$. Cambiando $s \leftrightarrow t$ se tiene $\mathcal{M}(1^-2^+3^+4^-)$ y $\mathcal{M}(1^+2^-3^-4^+)$. Por lo tanto

$$\mathcal{M}(1^-2^-3^+4^+) = \mathcal{M}(1^+2^+3^-4^-) \quad (3.32)$$

$$\mathcal{M}(1^-2^+3^-4^+) = \mathcal{M}(1^+2^-3^+4^-) \quad (3.33)$$

$$\mathcal{M}(1^-2^+3^+4^-) = \mathcal{M}(1^+2^-3^-4^+) \quad (3.34)$$

Las seis amplitudes que no se anulan corresponden a las seis permutaciones de s, t, u . Sumando todas estas permutaciones se obtiene

$$\sum_{pols, colors} |\mathcal{M}|^2 = 4g_s^4 N^2(N^2 - 1) \frac{(s^2 + t^2 + u^2)(s^4 + t^4 + u^4)}{s^2 u^2 t^2}. \quad (3.35)$$

Promediando sobre el número de estados iniciales, tomando $N = 3$ y usando $s+t+u = 0$ finalmente se tiene

$$\frac{1}{256} \sum_{pols, colors} |\mathcal{M}|^2 = g_s^4 \frac{9}{2} (3 - \frac{tu}{s^2} - \frac{su}{t^2} - \frac{st}{u^2}), \quad (3.36)$$

este resultado final es la forma estandar que se presenta para QCD.

3.3. Ordenamiento de color y la fórmula de Parker-Taylor.

Como ya se vio en la sección anterior, las relaciones de crossing pueden ser extremadamente útiles en procesos de dispersión de gluones. Sin embargo, para amplitudes multigluónica, es decir, con $n > 4$ gluones, las relaciones de crossing pueden ser complicadas, así que vale la pena saber como funcionan en general. Como primer paso se separa el color de la cinemática. Se define la **amplitud CS** (Color-Stripped, por sus siglas en ingles) como la parte de la amplitud con el factor de color despojado. Las reglas de Feynman para computar estas amplitudes son las mismas que las reglas de Feynman para QCD, pero sin el término $\sqrt{2}ig_s f^{abc}$. Por ejemplo para la amplitud de cuatro gluones, la amplitud CS del canal-s es

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_s(1^-2^-3^+4^+) &= \frac{1}{2_s} [(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(p_1 - p_2)^\mu + 2\epsilon_2^\mu(p_2 \cdot \epsilon_1) - 2\epsilon_1^\mu(p_1 \cdot \epsilon_2)] \times [(\epsilon_3 \cdot \epsilon_4)(p_3 - p_4)^\mu \\ &\quad + 2\epsilon_4^\mu(p_4 \cdot \epsilon_3) - 2\epsilon_3^\mu(p_3 \cdot \epsilon_4)]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Notar que $\tilde{\mathcal{M}}_s$ es antisimétrico bajo el intercambio de $1 \leftrightarrow 2$ o $3 \leftrightarrow 4$, entonces se tiene lo siguiente

$$\tilde{\mathcal{M}}_s(1^-2^-3^+4^+) = -\tilde{\mathcal{M}}_s(2^-1^-3^+4^+) = -\tilde{\mathcal{M}}_s(1^-2^-4^+3^+) = \tilde{\mathcal{M}}_s(2^-1^-4^+3^+) \quad (3.38)$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_s(1^-2^-3^+4^+) = \tilde{\mathcal{M}}_s(3^+4^+1^-2^-). \quad (3.39)$$

El factor de color para el diagrama del canal-s puede ser escrito en términos de simples trazas,

$$f^{12a} f^{34a} = -2tr([1, 2][3, 4]) = -2[tr(1234) - tr(2134) - tr(1243) + tr(2143)]. \quad (3.40)$$

Esta expresión es una suma de cuatro términos el cual es antisimétrico bajo $1 \leftrightarrow 2$ o $3 \leftrightarrow 4$. Así, la amplitud completa asociada al canal-s $\mathcal{M}_s(1^-2^-3^+4^+)$ puede ser escrita como una suma de términos donde el orden de los gluones es el mismo tanto en el factor de color como en la amplitud CS:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_s(1^-2^-3^+4^+) &= 4g_s^2 [tr(1234)\tilde{\mathcal{M}}_s(1^-2^-3^+4^+) + tr(2134)\tilde{\mathcal{M}}_s(2^-1^-3^+4^+) \\ &\quad + tr(1243)\tilde{\mathcal{M}}_s(1^-2^-4^+3^+) + tr(2143)\tilde{\mathcal{M}}_s(2^-1^-4^+3^+)]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Donde todos los términos tienen el signo positivo. La amplitud CS para el canal-t resulta del crossing $2 \leftrightarrow 4$ desde el canal-s:

$$\tilde{\mathcal{M}}_t(1^-2^-3^+4^+) = \tilde{\mathcal{M}}_s(1^-4^+3^+2^-). \quad (3.42)$$

Similarmente para el canal-u con $2 \leftrightarrow 3$:

$$\tilde{\mathcal{M}}_u(1^-2^-3^+4^+) = \tilde{\mathcal{M}}_s(1^-3^+2^-4^+). \quad (3.43)$$

Pero $\tilde{\mathcal{M}}_s(1^-2^-3^+4^+) = \tilde{\mathcal{M}}_t(1^-4^+3^+2^-) \neq \tilde{\mathcal{M}}_t(1^-4^-3^+2^+)$. Ambos canales u y t también tienen cuatro términos en la traza de color con los signos apropiados, así la amplitud completa puede ser escrita como una suma del producto entre trazas de color y amplitudes CS con el signo positivo en los términos. El resultado es que la amplitud completa $\mathcal{M}(1^-2^-3^+4^+) = \mathcal{M}_s(1^-2^-3^+4^+) + \mathcal{M}_t(1^-2^-3^+4^+) + \mathcal{M}_u(1^-2^-3^+4^+)$ tiene doce términos, cuatro de los cuales provienen de los canales s, t, u , todos estos pueden ser escritos como $tr(ijkl)\tilde{\mathcal{M}}_s(ijkl)$, donde i es el momento de la partícula 1, j el de la partícula 2, k el de la partícula 3 y l el de la partícula 4. La suma puede ser simplificada aún más, ya que no todos los factores de color son independientes debido a las propiedades cíclicas de la traza $tr(1234) = tr(2341)$. Es muy útil escribirlo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} tr(1234)[\tilde{\mathcal{M}}_s(1^-2^-3^+4^+) + \tilde{\mathcal{M}}_s(1^-4^+3^+2^-)] &= tr(1234)[\tilde{\mathcal{M}}_s(1^-2^-3^+4^+) + \tilde{\mathcal{M}}_t(1^-2^-3^+4^+)] \\ &= tr(1234)\tilde{\mathcal{M}}(1^-2^-3^+4^+) \end{aligned} \quad (3.44)$$

**CAPÍTULO 3. AMPLITUDES EN QCD CON EL FORMALISMO DE
HELICIDAD**
3.3. ORDENAMIENTO DE COLOR Y LA FÓRMULA DE PARKER-TAYLOR.

donde

$$\tilde{\mathcal{M}}(ijkl) \equiv \tilde{\mathcal{M}}_s(ijkl) + \tilde{\mathcal{M}}_t(ijkl) \quad (3.45)$$

es conocido como la **amplitud parcial CO** (color ordered). Entonces podemos escribir la amplitud de dispersión para cuatro gluones como

$$\mathcal{M}(1^-2^-3^+4^+) = 4g_s^2 \sum_{\sigma \in S_3} \text{tr}(\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)) \tilde{\mathcal{M}}(\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)), \quad (3.46)$$

donde S_3 es el grupo de las permutaciones de (2,3,4). A veces este grupo es escrito como $S_3 = S_4/Z_4$ refiriéndose a las permutaciones cíclicas. Los diagramas que contribuyen en las amplitudes parciales CO son las planas. Así, a nivel árbol, siempre es posible expresar la dispersión de gluones en términos de una suma de diagramas planos. De hecho, la descomposición en amplitudes parciales y trazas funciona para cualquier número de gluones, a nivel árbol. La fórmula generalizada es

$$\mathcal{M}(12\dots n) = -2(\sqrt{2}ig_s)^{n-2} \sum_{\sigma \in S_n/Z_n} \text{tr}(\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)) \tilde{\mathcal{M}}(\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)). \quad (3.47)$$

La definición general de $\tilde{\mathcal{M}}(12\dots n)$ es la suma sobre todos los diagramas CS planas con los momentos externos en cierto orden. Aunque no resulta obvio el porque uno querría expresar una amplitud en términos de $\tilde{\mathcal{M}}(12\dots n)$, resulta ser que $\tilde{\mathcal{M}}(12\dots n)$ puede ser muy simple. Por ejemplo al considerar la amplitud parcial MHV $\tilde{\mathcal{M}}(1^-2^-3^+4^+)$ para el proceso $gg \rightarrow gg$. Sustituyendo (3.20) y (3.22) en la Ec.(3.45), la amplitud parcial es

$$\mathcal{M}(1^-2^-3^+4^+) = \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle}, \quad (3.48)$$

ya que $\mathcal{M}_t(1^-2^-3^+4^+) = 0$. También se puede calcular

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(1^-2^+3^-4^+) &= \mathcal{M}_s(1^-2^+3^-4^+) + \mathcal{M}_t(1^-2^+3^-4^+) \\ &= \mathcal{M}_u(1^-3^-2^+4^+) + \mathcal{M}_t(1^-3^-2^+4^+). \end{aligned} \quad (3.49)$$

De nuevo, $\mathcal{M}_t(1^-3^-2^+4^+)$ desaparece, y en la sección anterior se obtuvo $\mathcal{M}_u(1^-2^-3^+4^+)$ en (3.25). Así que se tiene,

$$\mathcal{M}(1^-2^+3^-4^+) = \mathcal{M}_u(1^-3^-2^+4^+) = \frac{\langle 13 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle}, \quad (3.50)$$

el cual es bastante similar a $\mathcal{M}(1^-2^-3^+4^+)$. Un hecho fascinante en la dispersión de gluones es que la amplitud MHV con ordenamiento de color para cualquier número de gluones es

$$\mathcal{M}(1^+2^+ \dots j^- \dots k^- \dots n^+) = \frac{\langle jk \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \dots \langle n1 \rangle}, \quad (3.51)$$

donde j y k son los dos gluones con helicidad negativa. Esta expresión es conocida como **La fórmula de Parker-Taylor** [16], este asombroso resultado nos muestra que las amplitudes de dispersión en QCD tiene mucha mas simetría de lo que se podría pensar con solo observar las reglas de Feynman. Esta fórmula reproduce cualquier amplitud de gluones. Por ejemplo, para cinco gluones, todas las amplitudes desaparecen excepto las MHV, así como en la amplitud para cuatro gluones solamente hay una amplitud independiente para calcular, y es dada por (3.51). Si se intenta dar la amplitud de dispersión para cinco gluones con vectores de polarización y momentos, se obtienen 10 mil términos. Usando el formalismo de los espinores de helicidad, el calculo es posible hacerlo a mano. Dicho resultado es el siguiente:

$$\mathcal{M}_5(1^+2^+3^+4^-5^-) = \frac{\langle 45 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 51 \rangle}. \quad (3.52)$$

Capítulo 4

Supersimetría

En este capítulo se hace un breve resumen de lo que es la supersimetría, su importancia fenomenológica y se presenta el modelo quiral como un ejemplo de un modelo simétrico en el contexto del formalismo de los espinores de helicidad.

4.1. El problema de la jerarquía

Uno de los últimos progresos en física teórica antes de la llegada de la teoría de cuerdas se dio en 1970 bajo el nombre de Supersimetría o SUSY por sus siglas en inglés ([17], [18]). Esta es una simetría que relaciona o mezcla fermiones y bosones, esto es

$$Q|Bosones\rangle = |fermiones\rangle, \quad (4.1)$$

$$Q|fermiones\rangle = |bosones\rangle, \quad (4.2)$$

donde Q es el operador de supercarga, el número de operadores Q caracteriza a la teoría, entonces si solo hay un operador Q entonces se dice que se tiene una teoría $\mathcal{N} = 1$ supersimétrica, si se tienen dos operadores Q entonces se tiene una teoría $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica y así sucesivamente. Los fermiones son partículas con espín $1/2$ mientras que los bosones son partículas con espín entero. La idea de la Supersimetría es que para cada fermión, hay un correspondiente bosón. Las fuerzas de interacción o bosones mediadores pueden tener espín-0 ó espín-1, así que para partículas de espín $1/2$ como quarks y electrones les corresponderían partículas de espín-0 ó espín-1 denotadas como *selectron* y *squarks*. Del mismo modo, para cada partícula de espín-0 ó espín-1 habría partículas de espín $1/2$ correspondientes. Por ejemplo, partículas como *photino*, *wino* y *gluino* los cuales corresponderían al fotón, W y gluón respectivamente.

Hasta el momento no hay evidencia experimental de Supersimetría. Sin embargo, esta simetría es importante en física de partículas porque resuelve muchos problemas relevantes. Tal es el caso del *Problema de las Jerarquías*; en pocas palabras consiste en la creencia de que la masa del Higgs denotada por m_h , es mucho más pequeña que una cantidad fundamental llamada *masa de planck*, el cual se puede calcular desde las constantes fundamentales

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{19} GeV/c^2. \quad (4.3)$$

En teoría cuántica de campos, hay correcciones cuadráticas a la masa del Higgs que causan que su masa diverga. Esto es, las correcciones radiativas a la masa de la partícula deben de calcularse cuando se consideran correcciones al propagador a un lazo. Para ilustrar esto tomemos de ejemplo una teoría de juguete con un solo fermión ψ acoplado a un campo escalar masivo ϕ (modelo de

Wess-Zumino), su lagrangiano es el siguiente:

$$\mathcal{L}_\phi = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + |\partial_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2 - \lambda_f\phi\bar{\psi}\psi, \quad (4.4)$$

donde la simetría se ha roto espontáneamente y la masa del fermión es $m_f = \lambda_f \frac{v}{\sqrt{2}}$ a nivel árbol. Para calcular la corrección a la masa del fermión dentro de esta teoría, se debe considerar la contribución del propagador del fermión a un lazo debido a que hay una partícula escalar. Entonces la masa renormalizada del fermión es

$$\begin{aligned} m_f &= m_f^0 + \delta m_f \\ &= \lambda_f \frac{v}{\sqrt{2}} - \frac{3\lambda_f^2 m_f}{64\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_f^2}\right) + \dots, \end{aligned} \quad (4.5)$$

la corrección a la masa fermiónica depende explícitamente de la masa m_f del fermión. Cuando la masa de los fermiones es muy pequeña, la simetría del lagrangiano (4.4) aumenta, por lo que se suele decir que la masa de los fermiones es protegida por la simetría quiral. Ahora bien, si nos fijamos en la corrección del propagador del campo escalar a un lazo fermiónico, al calcular la masa del escalar se tiene:

$$\delta m_\phi^2 = -\frac{\lambda_f^2}{8\pi} \left(\Lambda^2 - 6m_f^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{m_f}\right) + 2m_f^2 + \dots \right), \quad (4.6)$$

en la Ec.(4.6) se tiene una divergencia cuadrática, entonces si las correcciones a la masa de la partícula son muy grandes se dice que se tiene un problema de no naturalidad. Para resolver este problema, hay que considerar un término que cancele la divergencia cuadrática, o bien ajustar la escala de energía de corte Λ al orden de 1 TeV. Esto se conoce como el problema de jerarquía y es una de las razones por las que se cree que hay nueva física arriba de la escala de TeVs.

4.2. Supersimetría en QCD (*SUSY-QCD*)

En la sección anterior, se vió que, el problema de jerarquías del sector de Higgs se puede resolver, incluso en el contexto de las escalas de altas energías, las cuales son requeridas por teorías de gran unificación, es posible retener la escala fundamental de las partículas con masas bajas. Esto es consecuencia de emparejar bosones con fermiones en multipletes supersimétricos, el cual remueve las divergencias cuadráticas debido a las altas escalas de las fluctuaciones cuánticas. Para masas enormes en el rango experimental de observación, la teoría puede evolucionar desde una fase simétrica en la escala de la gran unificación hacia una fase de una simetría electrodébil rota a bajas energías, mientras la simetría de norma de color electromagnética permanece sin romper. Una fuerte señal de supersimetría es dada por la predicción teórica del ángulo de mezcla electrodébil ($Sen^2\theta_w = 0,2334 \pm 0,0035$). De acuerdo con el espectro de partículas de las teorías de extensiones supersimétricas mínimas del modelo estandar (MSSM, por sus siglas en ingles), esta predicción se acerca bastante al valor medido ($Sen^2\theta_w^{exp} = 0,2317 \pm 0,0004$). Las extensiones supersimétricas ofrecen soluciones a muchos otros problemas que no pueden resolverse dentro del modelo estandar. La teoría de interés en este trabajo es QCD supersimétrica (SUSY-QCD, por sus siglas en ingles), se basa en el espectro de partículas con color: quarks, espín-0 squarks y gluones, espín- $\frac{1}{2}$ gluinos (λ). La magnitud de las interacciones en SUSY-QCD es fijada por la norma y las constantes de acoplamiento de Yukawa g_s y \hat{g}_s , debido a la supersimetría se requiere que las dos constantes sean iguales. Si supersimetría fuese una simetría exacta, los gluinos serían partículas sin masa. Sin embargo, supersimetría es una simetría rota, y las masas de los compañeros supersimétricos deberin exceder las masas de las partículas del modelo estandar consideradas. Aunque el mecanismo para romper supersimetría aun no ha sido identificado a un nivel fundamental, se requiere que las divergencias cuadráticas no sean introducidas en la teoría para romper la simetría. Para no arruinar la solución al problemas de jerarquías, las masas de estas partículas no deben exceder el

límite de $\mathcal{O}(175\text{ GeV})$. La paridad-R es conservada en el sector de QCD de teorías supersimétricas con $\mathcal{N} = 1$, los gluinos se producen siempre en pares, estos decaen principalmente en cascadas de jets más partículas LSP (lightes supersymmetric particle), los cuales escapan sin ser detectados. La producción de gluinos ha sido obtenida en el marco de modelos de supergravedad, en el cual los gluinos no pueden ser más pesados que los squarks. Se cree que el límite más bajo para la masa del gluino es de 175 GeV, independientemente del valor de la masa del squarks, pero si gluinos y squarks tienen la misma masa, entonces el límite más bajo es de 225 GeV. En la literatura, la sección eficaz de la producción de gluinos en colisiones hadrónicas han sido calculadas al nivel de Born. Dichos cálculos se han ido mejorando mediante las correcciones NLO (next to leading order) en colisiones $p\bar{p}$ (protón- antiprotón) [19]. Si los gluinos son descubiertos, esto reduciría el error en las masas, extraído experimentalmente por el tamaño de la sección eficaz de la producción. En esta tesis, solo nos enfocaremos sobre el espectro de gluones y gluinos, donde se toma la masa del gluino como cero.

4.3. $\mathcal{N} = 1$ Supersimetría: modelo quiral

La Lagrangiana para un fermión de weyl ψ y un campo escalar complejo ϕ es:

$$\mathcal{L}_0 = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi, \quad (4.7)$$

la barra en ϕ denota complejo conjugado. Además de la simetría de Poincaré, (4.7) también tiene una simetría que mezcla fermiones y bosones, esta es :

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \phi &= \epsilon \psi, & \delta_\epsilon \epsilon^\dagger \psi^\dagger, \\ \delta_\epsilon \psi_a &= -i\sigma_{ab}^\mu \epsilon^\dagger{}^b \partial_\mu \psi, & \delta_\epsilon \psi_a^\dagger = i\partial_\mu \bar{\psi} \epsilon^b \sigma_{ba}^\mu. \end{aligned} \quad (4.8)$$

la Ec.(4.8) es un ejemplo de una transformación supersimétrica, la lagrangiana \mathcal{L}_0 es invariante bajo esta variación supersimétrica hasta una derivada total. El espinor constante anticonmutador ϵ es el parámetro supersimétrico análogo al ángulo fermiónico infinitesimal θ de una transformación rotacional. Tanto $\epsilon\psi$ como $\epsilon^\dagger\psi^\dagger$ son productos espinoriales de dos componentes.

Las cargas conservadas de Noether asociadas con las transformaciones de supersimetría son las supercargas que anticonmutan Q y Q^\dagger . Las supercargas convierten el álgebra de Poincaré en una super álgebra de Poincaré gradada con generadores bosónicos y fermionicos. Entonces, además de los generadores de rotación y traslación $M_{\mu\nu}$ y P_μ cuya álgebra es

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0, \\ [P^\mu, M^{\rho\sigma}] &= i(\eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho), \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i(\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} + \eta^{\nu\rho} M^{\mu\rho}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

el álgebra de super Poincaré tiene

$$\begin{aligned} [Q_a, P^\mu] &= 0, \\ [Q_a, M^{\mu\nu}] &= \frac{i}{4} \epsilon^{\dot{a}b} (\sigma_{a\dot{a}}^\mu \sigma_{c\dot{c}}^\nu - \sigma_{a\dot{a}}^\nu \sigma_{c\dot{c}}^\mu) Q^c, \\ \{Q_a, Q_b\} &= 0, \\ \{Q_a, Q_b^\dagger\} &= -2\sigma_{ab}^\mu P_\mu, \end{aligned} \quad (4.10)$$

y similarmente para Q^\dagger . Las cargas conmutan con los operadores de traslación pero no con los de rotación/boost, y que el anticonmutador de Q y Q^\dagger es una traslación espaciotemporal. La expansión de los campos libres esta dado de la siguiente manera

$$\phi(x) = \int \widetilde{d}p [a_-(p) e^{ip \cdot x} + a_+^\dagger(p) e^{-ip \cdot x}], \quad (4.11)$$

CAPÍTULO 4. SUPERSIMETRÍA

4.3. $\mathcal{N} = 1$ SUPERSIMETRÍA: MODELO QUIRAL

$$\psi_a(x) = \sum_{s=\pm} \int \widetilde{d}p [b_s(p) P_L u_s(p) e^{ip \cdot x} + b_s^\dagger(p) P_L v_s(p) e^{-ip \cdot x}], \quad (4.12)$$

y similarmente para $\bar{\phi}(x)$ y $\psi^{\dagger\dot{a}}$. La medida de momento $\widetilde{d}p$ es definida por

$$\widetilde{d}p = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}. \quad (4.13)$$

Los coeficientes satisfacen el álgebra de los operadores de creación/aniquilación tanto bosónico como fermiónico

$$[a_\pm(p), a_\pm^\dagger(p')] = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad \{b_\pm(p), b_\pm^\dagger(p')\} = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (4.14)$$

cualquier otra forma desaparece. Para los fermiones, el subíndice \pm en los operadores indica la helicidad $h = \pm \frac{1}{2}$ de los estados de las partículas asociadas. Las transformaciones (4.8) relacionan los campos ψ y ϕ mutuamente, por lo tanto los operadores de creación y aniquilación también están relacionados. Utilizando la simetría dada por (4.8) y las expansiones (4.11) y (4.12), se puede deducir las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon a_-(p) &= [\epsilon p] b_-(p), \\ \delta_\epsilon a_+(p) &= \langle \epsilon p \rangle b_+(p), \\ \delta_\epsilon b_-(p) &= \langle \epsilon p \rangle a_-(p), \\ \delta_\epsilon b_+(p) &= [\epsilon p] a_+(p), \end{aligned} \quad (4.15)$$

y las supercargas en términos de espinores angulados y cuadrados es

$$|Q\rangle_a = \int \widetilde{d}p |p\rangle_a (a_+(p) b_+^\dagger(p) - b_-(p) a_-^\dagger(p)), \quad (4.16)$$

$$|Q^\dagger\rangle^{\dot{a}} = \int \widetilde{d}p |p\rangle^{\dot{a}} (a_-(p) b_-^\dagger(p) - b_+(p) a_+^\dagger(p)), \quad (4.17)$$

de este modo, la acción de las supercargas sobre los operadores de aniquilación es

$$\begin{aligned} [Q, a_-(p)] &= |p\rangle b_-(p), & [Q^\dagger, b_-(p)] &= |p\rangle a_-(p), \\ [Q, b_-(p)] &= 0, & [Q^\dagger, a_-(p)] &= 0, \\ [Q, b_+(p)] &= |p\rangle a_+(p), & [Q^\dagger, a_+(p)] &= |p\rangle b_+(p), \\ [Q, a_+(p)] &= 0, & [Q^\dagger, b_+(p)] &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde $[\cdot, \cdot]$ es un álgebra gradada, el cual es un anticonmutador cuando ambos argumentos son de Grassmann de lo contrario es un conmutador. Hay un conjunto similar de relaciones para operadores de creación. La acción de los generadores de supersimetría sobre los operadores de creación y aniquilación implica que los estados asociados a las partículas bosónicas y fermiónicas están relacionadas, se dice que pertenecen al mismo "supermultiplete". Aquí Q baja la helicidad por $\frac{1}{2}$ y Q^\dagger lo incrementa por $\frac{1}{2}$. Ya que los generadores supersimétricos conmutan con el Hamiltoniano P^0 , y el generador de las traslaciones P^i , por lo que los estados en el mismo supermultiplete deben tener la misma masa.

En el modelo quiral (4.7), la masa de los bosones y fermiones es cero, esto se debe a que el espectro del modelo divide la helicidad en un sector positivo y un sector negativo; la simetría CPT requiere tener ambos. En un supermultiplete, el número de estados bosónicos es igual al número de estados fermiónicos de capa de masa; los dos estados escalares reales dentro del campo escalar complejo son compañeros supersimétricos de los dos estados fermiónicos con helicidad $h = \pm 1/2$.

Hasta ahora se ha visto el caso simple de un supermultiplete quirral, el en cual una partícula de espín-0 es ligada a una partícula de espín- $\frac{1}{2}$. Se puede hacer lo mismo para modelos supersimétricos $\mathcal{N} = 1$ con partículas de espín $(s, s + \frac{1}{2})$. La \mathcal{N} cuenta el número de generadores supersimétricos Q^A y Q_A^\dagger con $A = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$. Cuando $\mathcal{N} > 1$, se dice que se tiene un modelo supersimétrico extendido. El álgebra de superPoincaré con supersimetría extendida es muy similar a (4.10) pero con

$$\{Q_a^A, Q_{Bb}^\dagger\} = -2\sigma_{ab}^\mu P_\mu \delta_B^A. \quad (4.19)$$

En algunos casos de modelos de supersimetría extendida, una carga central Z^{AB} puede aparecer en el anticonmutador $\{Q_a^A, Q_b^B\} = Z^{AB}\epsilon_{ab}$. El álgebra de supersimetría extendida tiene una simetría global que rota las cargas supersimétricas, esta simetría es conocida como **simetría-R**. Una simetría-R se caracteriza por la propiedad de que esta no conmuta con las transformaciones supersimétricas. Como ejemplo de un supermultiplete $\mathcal{N} = 1$ se tiene el modelo super Yang-Mills (SYM) $\mathcal{N} = 1$ con un gluón ($h = \pm 1$) y su compañero fermionico, el gluino ($h = \pm \frac{1}{2}$) el cual será discutido en el siguiente capítulo. En modelos de supersimetría extendida, hay $2^\mathcal{N}$ estados en los supermultipletes sin masa y lo mismo en las CPT conjugadas. Por ejemplo, para $\mathcal{N} = 2$ SYM, un supermultiplete consiste de un gluón con helicidad -1 , dos gluinos con helicidad $-\frac{1}{2}$, y un escalar con helicidad 0. Entonces, el supermultiplete gluonico $\mathcal{N} = 2$, tiene dos estados bosonicos y dos estados fermionicos. El multiplete conjugado CPT contiene el mismo tipo de estados pero con el signo de las helicidades opuestas. Ahora, en el siguiente capítulo se muestra un modelo $\mathcal{N} = 1$ y se estudia las consecuencias que tiene la supersimetría en las amplitudes de dispersión.

Capítulo 5

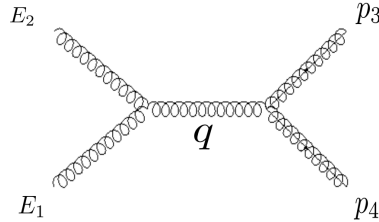
Amplitudes en teorías supersimétricas con el formalismo de helicidad

El objetivo de este capítulo es presentar la supersimetría en el contexto de las amplitudes, se calculan algunas amplitudes que involucran gluones y gluinos en el contexto del formalismo de los espinores de helicidad tales como: $gg \rightarrow \lambda\lambda$ (gluón gluón a gluino gluino), $g\lambda \rightarrow \lambda g$ (gluón gluino a gluino gluón) y $\lambda\lambda \rightarrow \lambda\lambda$ (gluino gluino a gluino gluino), y por último, vemos como se relacionan dichas amplitudes mediante las identidades de Ward supersimétricas.

5.1. Amplitud del proceso : $gg \rightarrow \lambda\lambda$

Se toma la misma configuración de helicidades que se utilizó para el cálculo del proceso gluón-gluón, es decir la amplitud es de la forma $\mathcal{M}(1^-2^-3^+4^+)$, aquí 1 y 2 corresponden a los momentos de los gluones, 3 y 4 a los momentos de los gluinos.

Mediante las reglas de Feynman dadas por B y B se obtiene el siguiente diagrama de Feynman asociado al canal-s :



La amplitud correspondiente asociado al diagrama de Feynman del canal-s, es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_s = & \epsilon_{\delta}^{-}(1, r) \cdot g_s f^{abm} [g^{\delta\tau} (p_1 - p_2)^{\rho} + g^{\tau\rho} (p_2 + q)^{\delta} + g^{\rho\delta} (-q - p_1)^{\tau}] \cdot \epsilon_{\tau}^{-}(2, r) \cdot \left(-\frac{ig_{\sigma\rho}\delta^{em}}{q^2}\right) \cdot \\
 & \cdot [3(-g_s f^{cde}\gamma^{\sigma})|4] \\
 = & 0.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

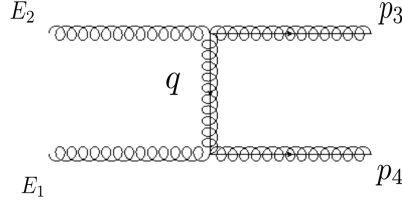
**CAPÍTULO 5. AMPLITUDES EN TEORÍAS SUPERSIMÉTRICAS CON EL
FORMALISMO DE HELICIDAD**

5.1. AMPLITUD DEL PROCESO : $GG \rightarrow \lambda\lambda$

La amplitud resulta nula ya que por las propiedades de los espinores de helicidad se cumple que $[3|\gamma^\sigma|4] = 0$. Por lo tanto, el canal-s no contribuye.

$$\mathcal{M}_s(1^-2^-3^+4^+) = 0. \quad (5.2)$$

Las polarizaciones ϵ_1 y ϵ_2 correspondientes a los gluones, se toma como momento de referencia a $r = p_4 = 4$. El siguiente diagrama de Feynman a considerar es el asociado al canal-t, utilizando las reglas de feynman se tiene que :



La amplitud correspondiente asociada al diagrama de Feynman del canal-t es:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_t &= [3|(-g_s f^{cbm} \gamma^\tau) \cdot \epsilon_\tau^-(2,4) \cdot (i \frac{\not{q} \delta^{em}}{q^2}) \cdot \epsilon_\delta^-(1,4) \cdot (-g_s f^{ade} \gamma^\delta)|4] \quad (5.3) \\ &= i \frac{g_s^2}{t} f^{ade} f^{cbe} [3|\not{\epsilon}^-(2,4) \not{q} \not{\epsilon}^-(1,4)|4], \end{aligned}$$

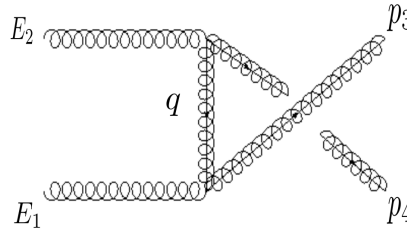
haciendo uso de las identidades correspondientes a las polarizaciones del apendice A, la amplitud en términos de espinores angulados y cuadrados es la siguiente:

$$\mathcal{M}_t = \frac{g_s^2}{t} f^{ade} f^{cbe} \frac{[34]\langle 2|\not{q}|1\rangle[44]}{[42][41]} = 0, \quad (5.4)$$

esta amplitud se anula debido a que tenemos $[44] = 0$, por lo que esta amplitud no contribuye. Por lo tanto,

$$\mathcal{M}_t(1^-2^-3^+4^+) = 0. \quad (5.5)$$

Finalmente, el diagrama de Feynman asociado al canal-u es el siguiente:



La amplitud asociada al diagrama de Feynman del canal-u es:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_u &= [4|(-g_s f^{bdm} \gamma^\tau) \cdot \epsilon_\tau^-(2,4) \cdot (i \frac{\not{q} \delta^{em}}{q^2}) \cdot \epsilon_\delta^-(1,4) \cdot (-g_s f^{ace} \gamma^\delta)|3] \quad (5.6) \\ &= i \frac{g_s^2}{u} f^{ace} f^{bde} [4|\not{\epsilon}^-(2,4) \not{q} \not{\epsilon}^-(1,4)|3], \end{aligned}$$

CAPÍTULO 5. AMPLITUDES EN TEORÍAS SUPERSIMÉTRICAS CON EL FORMALISMO DE HELICIDAD

5.2. AMPLITUD DEL PROCESO: $\lambda\lambda \rightarrow \lambda\lambda$

nuevamente, utilizando las definiciones para las polarizaciones, esta amplitud en términos de espinores cuadrados y angulados es:

$$\mathcal{M}_u = \frac{g_s^2}{u} f^{ace} f^{bde} \frac{[44]\langle 2|\not{q}|1\rangle[43]}{[42][41]}, \quad (5.7)$$

esta amplitud se anula debido al término $[44] = 0$, similar al caso anterior, por lo que:

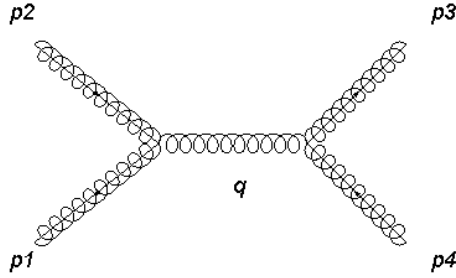
$$\mathcal{M}_u(1^-2^-3^+4^+) = 0. \quad (5.8)$$

Por lo tanto, la amplitud total resulta de la suma de las amplitudes $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_u$:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_4(gg\lambda\lambda) = \mathcal{M}(1^-2^-3^+4^+) = 0. \quad (5.9)$$

5.2. Amplitud del proceso: $\lambda\lambda \rightarrow \lambda\lambda$

El diagrama de Feynman asociado al canal-s es

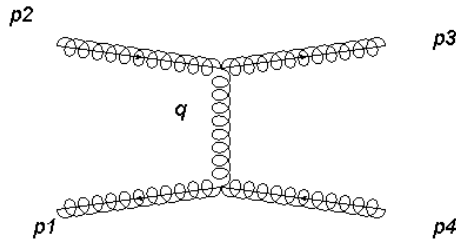


La amplitud correspondiente al diagrama de Feynman del canal-s es el siguiente:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_s &= \langle 1|(-g_s f^{abm} \gamma^\rho)|2\rangle \cdot \left(-i \frac{g_{\sigma\rho} \delta^{em}}{q^2}\right) [3|(-g_s f^{cde} \gamma^\sigma)|4] \\ &= -i \frac{g_s^2}{s} f^{abe} f^{cde} \langle 1|\gamma^\rho|2\rangle [3|\gamma_\rho|4] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

esta amplitud se anula ya que se cumple la siguiente propiedades de los espinores de helicidad $[p|\gamma^\mu|q] = \langle p|\gamma^\mu|q\rangle = 0$.

El diagrama de Feynman asociado al canal-t es



La amplitud correspondiente al diagrama de Feynman del canal-t es:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_t &= \langle 2|(-g_s f^{cbe} \gamma^\sigma)|3\rangle \cdot \left(-i \frac{g_{\rho\sigma} \delta^{em}}{q^2}\right) [4|(-g_s f^{adm} \gamma^\rho)|1] \\ &= -i \frac{g_s^2}{t} f^{ade} f^{cbe} \langle 2|\gamma^\sigma|3\rangle [1|\gamma_\sigma|4]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

**CAPÍTULO 5. AMPLITUDES EN TEORÍAS SUPERSIMÉTRICAS CON EL
FORMALISMO DE HELICIDAD**

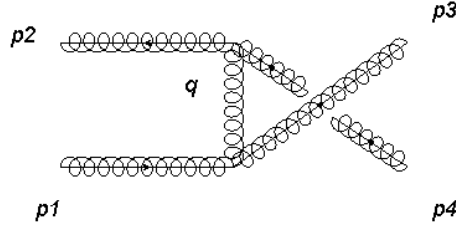
5.3. AMPLITUD DEL PROCESO : $\lambda G \rightarrow \lambda G$

haciendo las operaciones con $t = \langle 23 \rangle [23]$, esta amplitud en términos de espinores angulados y cuadrados queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_t &= -2g_s^2 f^{ade} f^{cbe} \frac{\langle 21 \rangle [34]}{\langle 23 \rangle [23]} \\ &= -2g_s^2 f^{ade} f^{cbe} \frac{\langle 12 \rangle^2}{\langle 23 \rangle \langle 41 \rangle}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde se ha usado conservación del momento para que el resultado quede solo con espinores angulados.

El diagrama de Feynman asociado al canal-u es



La amplitud correspondiente al diagrama de Feynman del canal-u es:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_u &= \langle 2 | (-g_s f^{bde} \gamma^\sigma) | 4 \rangle \cdot (-i \frac{g_{\rho\sigma} \delta^{em}}{q^2}) \cdot | 3 \rangle (-g_s f^{acm} \gamma^\rho) | 1 \rangle \\ &= -i \frac{g_s^2}{u} f^{ace} f^{bde} \langle 2 | \gamma^\sigma | 4 \rangle \langle 1 | \gamma_\sigma | 3 \rangle, \end{aligned} \quad (5.13)$$

nuevamente haciendo las operaciones con $u = \langle 24 \rangle [24]$, la amplitud que queda es:

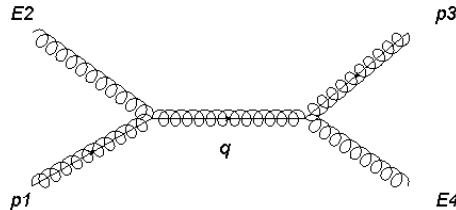
$$\begin{aligned} \mathcal{M}_u &= -2g_s^2 f^{ace} f^{bde} \frac{\langle 21 \rangle [43]}{\langle 24 \rangle [24]} \\ &= -2g_s^2 f^{ace} f^{bde} \frac{\langle 21 \rangle^2}{\langle 42 \rangle \langle 13 \rangle}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

Finalmente, la amplitud total del proceso que involucra solamente gluinos es:

$$\mathcal{M}(1^- 2^- 3^+ 4^+) = \mathcal{M}_4(\lambda\lambda\lambda\lambda) = -2g_s^2 [f^{ade} f^{cbe} \frac{\langle 12 \rangle^2}{\langle 23 \rangle \langle 41 \rangle} + f^{ace} f^{bde} \frac{\langle 21 \rangle^2}{\langle 42 \rangle \langle 13 \rangle}] \quad (5.15)$$

5.3. Amplitud del proceso : $\lambda g \rightarrow \lambda g$

El diagrama de Feynman asociado al canal-s es



CAPÍTULO 5. AMPLITUDES EN TEORÍAS SUPERSIMÉTRICAS CON EL FORMALISMO DE HELICIDAD

5.3. AMPLITUD DEL PROCESO : $\lambda G \rightarrow \lambda G$

La amplitud correspondiente al diagrama de Feynman del canal-s es:

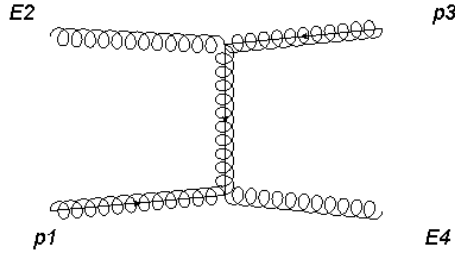
$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_s &= \langle 1 | (-g_s f^{abm} \gamma^\tau) \cdot \epsilon_\tau^-(2, 4) \cdot (i \frac{\not{q} \delta^{me}}{q^2}) \cdot \epsilon_\beta^+(4, 1) \cdot (-g_s f^{cde} \gamma^\beta) | 3 \rangle \\ &= i \frac{g_s^2}{s} f^{abe} f^{cde} \langle 1 | \not{\epsilon}^-(2, 4) \not{q} \not{\epsilon}^+(4, 1) | 3 \rangle, \end{aligned} \quad (5.16)$$

para esta amplitud se toma $q = p_1 + p_2$ con $s = \langle 34 \rangle [34]$, para las polarizaciones ϵ_2 se escoge su momento de referencia como $r = 4$ y ϵ_4 como $r = 1$. Utilizando las definiciones para polarizaciones, haciendo las operaciones se escribe el resultado en términos de espinores angulados y cuadrados, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_s &= 2g_s^2 f^{abe} f^{cde} \frac{\langle 12 \rangle \langle 12 \rangle [42] [34]}{\langle 34 \rangle [34] [42] \langle 14 \rangle} \\ &= -2g_s^2 f^{abe} f^{cde} \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Donde nuevamente el resultado final queda expresado solamente con espinores angulados.

El diagrama de Feynman asociado al canal-t es



La amplitud correspondiente al diagrama de Feynman del canal-t es el siguiente:

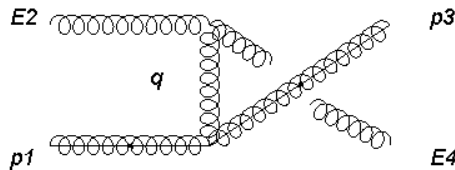
$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_t &= [3 | (-g_s f^{adm} \gamma^\tau) \cdot \epsilon_\tau^-(2, 4) \cdot (i \frac{\not{q} \delta^{me}}{q^2}) \cdot \epsilon_\beta^+(4, 1) \cdot (-g_s f^{cbe} \gamma^\beta) | 1 \rangle \\ &= i \frac{g_s^2}{t} f^{ade} f^{cbe} [3 | \not{\epsilon}^-(2, 4) \not{q} \not{\epsilon}^+(4, 1) | 1 \rangle, \end{aligned} \quad (5.18)$$

haciendo las operaciones y reescribiendo la amplitud en términos de espinores angulados y cuadrados, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_t &= 2g_s^2 f^{ade} f^{cbe} \frac{[34] \langle 2 | \not{q} | 4 \rangle \langle 11 \rangle}{\langle 23 \rangle [23] [42] \langle 14 \rangle} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

esta amplitud se anula debido al término $\langle 11 \rangle = 0$, por lo tanto el canal-t no contribuye.

El diagrama de Feynman asociado al canal-u es



**CAPÍTULO 5. AMPLITUDES EN TEORÍAS SUPERSIMÉTRICAS CON EL
FORMALISMO DE HELICIDAD**

5.4. IDENTIDADES DE WARD PARA $\mathcal{N} = 1$ SUPERSIMETRÍA

La amplitud correspondiente al diagrama de Feynman del canal-u, es el siguiente:

$$i\mathcal{M}_u = \epsilon_\tau^-(2, 4) \cdot (g_s f^{bde} [g^{\tau\beta} (p_2 - p_4)^\sigma + g^{\beta\sigma} (p_4 + q)^\tau + g^{\sigma\tau} (-q - p_2)^\beta]) \cdot \epsilon_\beta^+(4, 1) \quad (5.20)$$

$$\cdot \left(-i \frac{g_{\rho\sigma} \delta^{em}}{q^2}\right) \cdot \langle 1 | (-g_s f^{acm} \gamma^\rho) | 3 \rangle,$$

donde $q = p_2 + p_4$, al hacer los desarrollos la amplitud se simplifica ya que algunos productos entre polarizaciones y polarizaciones con momentos se anulan, estos son $\epsilon^-(2, 4) \cdot \epsilon^+(4, 1) = \epsilon^-(2, 4) \cdot p_4 = \epsilon^-(2, 4) \cdot p_2 = \epsilon^+(4, 1) \cdot p_4 = 0$, el producto que es diferente de cero es:

$$\epsilon^+(4, 1) \cdot p_2 = \frac{\langle 42 \rangle \langle 21 \rangle}{\sqrt{2} \langle 14 \rangle}, \quad (5.21)$$

por lo que la amplitud se reduce a la expresion siguiente

$$\mathcal{M}_u = -2 \frac{g_s^2}{u} f^{ace} f^{bde} (\epsilon^+(4, 1) \cdot p_2 \epsilon_\rho^-(2, 4) \langle 1 | \gamma^\rho | 3 \rangle) \quad (5.22)$$

$$= -2 \frac{g_s^2}{u} f^{ace} f^{bde} (\epsilon^+(4, 1) \cdot p_2 \langle 1 | \not{\epsilon}^-(2, 4) | 3 \rangle),$$

finalmente, realizando las operaciones y reescribiendo en términos de espinores angulados y cuadrados, se tiene:

$$\mathcal{M}_u = -2g_s^2 f^{ace} f^{bde} \frac{\langle 21 \rangle^3}{\langle 14 \rangle \langle 42 \rangle \langle 31 \rangle}. \quad (5.23)$$

Por lo tanto, la amplitud total para este proceso, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_u$, queda de la siguiente forma:

$$\mathcal{M}(1^- 2^- 3^+ 4^+) = \mathcal{M}_4(\lambda g \lambda g) = -2g_s^2 [f^{abe} f^{cde} \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle} + f^{ace} f^{bde} \frac{\langle 21 \rangle^3}{\langle 14 \rangle \langle 42 \rangle \langle 31 \rangle}] \quad (5.24)$$

5.4. Identidades de Ward para $\mathcal{N} = 1$ Supersimetría

En esta sección se presenta como las amplitudes que se calcularon anteriormente estan relacionadas mediante las identidades de Ward, resulta que estas amplitudes estan ligadas una con la otra de forma proporcional.

La lagrangiana para una teoría pura de $\mathcal{N} = 1$ super Yang-Mills es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \text{Tr} \lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda, \quad (5.25)$$

donde todos los campos estan en la adjunta del grupo $SU(N)$ y la derivada covariante es $D_\mu = \partial_\mu \lambda - ig[A_\mu, \lambda]$. El espectro de capa de masa consiste en estados de helicidad $h = \pm 1$ para gluones y $h = \pm \frac{1}{2}$ para gluinos. El operador supercarga \tilde{Q} incrementa la helicidad por $\frac{1}{2}$ y el operador Q baja la helicidad por $\frac{1}{2}$, asi que si c_\pm y b_\pm son los operadores de aniquilación para gluones y gluinos respectivamente, donde los gluones tienen helicidad ± 1 y los gluinos tienen helicidad $\pm \frac{1}{2}$, se tiene entonces que los operadores de supercarga cumplen con la siguiente álgebra para $\mathcal{N} = 1$ SYM:

$$\begin{aligned} [\tilde{Q}, c_+(p)] &= 0, & [Q, c_+(p)] &= [p|b_+(p), \\ [\tilde{Q}, b_+(p)] &= [p|c_+(p), & [Q, b_+(p)] &= 0, \\ [\tilde{Q}, b_-(p)] &= 0, & [Q, b_-(p)] &= [p|c_-(p), \\ [\tilde{Q}, c_-(p)] &= [p|b_-(p), & [Q, c_-(p)] &= 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Una amplitud de n puntos con todas las particulas salientes, se puede pensar como un elemento de matriz S en la forma $\langle 0 | \mathcal{O}_1(p_1) \dots \mathcal{O}_n(p_n) | 0 \rangle$, donde n operadores de aniquilación

**CAPÍTULO 5. AMPLITUDES EN TEORÍAS SUPERSIMÉTRICAS CON EL
FORMALISMO DE HELICIDAD**

5.4. IDENTIDADES DE WARD PARA $\mathcal{N} = 1$ SUPERSIMETRÍA

$\mathcal{O}_i(p_i)$ con $i = 1, \dots, n$ actúan sobre el vacío por la izquierda. Por ejemplo, $\mathcal{M}_4(g^-g^-\lambda^+\lambda^+) = \langle 0|c_-(1)c_-(2)b_+(3)b_+(4)|0\rangle$. Entonces para cualquier configuración de n operadores de aniquilación o creación, se tiene [20]:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0|[Q^\dagger, \mathcal{O}_1(p_1)\dots\mathcal{O}_n(p_n)]|0\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{\sum_j |\mathcal{O}_j|} \langle 0|\mathcal{O}_1(p_1)\dots[Q^\dagger, \mathcal{O}_i(p_i)]\dots\mathcal{O}_n(p_n)|0\rangle, \end{aligned} \quad (5.27)$$

y existe una expresión similar para el operador Q . El signo menos aparece cada vez que intercambiamos el operador Q^\dagger con un operador fermionico, de ese modo $|\mathcal{O}|$ es 0 cuando el operador \mathcal{O} es bosonico y vale 1 si el operador es fermionico. Cuando los generadores supersimetricos actúan sobre los estados libres asintoticos dadas por las ecuaciones (5.26), la expresión (5.27) describe una relación lineal entre amplitudes de dispersión cuyos estados externos están relacionados mediante la supersimetría. Dichas relaciones se les conoce como **Identidades de Ward Supersimetricas** y son validas a cualquier orden en teoría de perturbaciones.

Las identidades de Ward supersimetricas para $\mathcal{N} = 1$ se derivan utilizando las ecuaciones (5.27) donde las supercargas actúan sobre los estados. Ya que \tilde{Q} aniquila $c_+(i)$, la identidad de ward supersimetrica $\langle 0|[\tilde{Q}, b_{1+}c_{2+}\dots c_{n+}]|0\rangle = 0$ nos da la amplitud $\mathcal{M}_n(g^+g^+g^+\dots g^+) = 0$. Esto nos dice que la amplitud de todos los gluones con helicidad positiva desaparece a cualquier orden en teoría de perturbaciones en $\mathcal{N} = 1$ SYM. Del mismo modo se puede ver que la amplitud de gluones con exactamente una helicidad negativa también desaparece, entonces en SYM se tiene:

$$\mathcal{M}_n^{L-lazo}(g^+g^+g^+\dots g^+) = \mathcal{M}_n^{L-lazo}(g^-g^+g^+\dots g^+) = 0, \quad (5.28)$$

la expresión (5.28) es válida a cualquier orden en la expansión de lazos debido a que las supercargas aniquilan el vacío y que solo tenemos un generador supersimetrico. sin embargo, la Ec.(5.28) sin supersimetría no es válida, ya que en teorías de Yang Mills pura las amplitudes cuyas helicidades son todas positivas son generadas al nivel de 1-lazo. En la sección (3) se obtuvo que las amplitudes de gluones a nivel árbol con todas las helicidades positivas desaparecían, así que en una teoría de Yang-Mills no supersimetrica se cumple

$$\mathcal{M}_n^{rbol}(g^+g^+g^+\dots g^+) = (g^-g^+g^+\dots g^+) = 0, \quad (5.29)$$

la Ec.(5.29) es válida a nivel árbol en teorías de Yang-Mills puras debido a que los supercompañeros del gluon se acomodan cuadráticamente con el gluon. Así, una amplitud cuyos estados externos sean todos gluones solamente pueden encontrarse con sus supercompañeros mediante lazos. Entonces, en teorías de Yang-Mills puras las amplitudes de gluones a nivel árbol obedecen la misma identidad de ward supersimetrica, en otras palabras, todas las amplitudes de gluones deben ser exactamente la misma a nivel árbol en Super Yang-Mills así como en Yang-Mills pura.

Ahora se procede a ilustrar como se relacionan nuestras amplitudes de gluones y gluinos calculadas en las secciones anteriores mediante las identidades de Ward supersimetricas, para empezar definimos el operador $T = \mathcal{O}_1(p_1)\mathcal{O}_2(p_2)\mathcal{O}_3(p_3)\mathcal{O}_4(p_4)$, entonces se escribe a T con la siguiente configuración de operadores de aniquilación:

$$T = b_-(1)c_-(2)b_+(3)b_+(4), \quad (5.30)$$

utilizando la definición (5.27) se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0|[Q, T]|0\rangle \\ &= \langle 0|[Q, b_-(1)c_-(2)b_+(3)b_+(4)]|0\rangle \\ &= \langle 0|[Q, b_-(1)]c_-(2)b_+(3)b_+(4)|0\rangle + \langle 0|b_-(1)[Q, c_-(2)]b_+(3)b_+(4)|0\rangle \\ &= -[1]\langle 0|c_-(1)c_-(2)b_+(3)b_+(4)|0\rangle + \langle 0|b_-(1)[Q, c_-(2)]b_+(3)b_+(4)|0\rangle \\ &\quad + \langle 0|b_-(1)c_-(2)[Q, b_+(3)]b_+(4)|0\rangle, \end{aligned} \quad (5.31)$$

**CAPÍTULO 5. AMPLITUDES EN TEORÍAS SUPERSIMÉTRICAS CON EL
FORMALISMO DE HELICIDAD**

5.4. IDENTIDADES DE WARD PARA $\mathcal{N} = 1$ SUPERSIMETRÍA

donde se ha desarrollado los conmutadores y se aplica el álgebra para Q definidas por (5.26), ya que Q aniquila tanto a $c_-(p)$ como a $b_+(p)$ los últimos términos desaparecen. Reescribiendo (5.31) a una amplitud, se tiene:

$$0 = [1|\langle 0|c_-(1)c_-(2)b_+(3)b_+(4)|0\rangle = [1|\mathcal{M}_4(g^-g^-\lambda^+\lambda^+), \quad (5.32)$$

encontramos que la amplitud para dos gluones y dos gluinos desaparece y no se relaciona con ninguna otra amplitud, tal como se vio en la sección anterior donde al calcular la amplitud de este proceso resultaba ser nula. Ahora, se define la siguiente configuración de operadores de aniquilación:

$$T = b_-(1)c_-(2)b_+(3)b_+(4), \quad (5.33)$$

de este modo se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0|[\tilde{Q}, T]|0\rangle \\ &= |2\rangle\langle 0|b_-(1)b_-(2)b_+(3)b_+(4)|0\rangle - |3\rangle\langle 0|b_-(1)c_-(2)c_+(3)b_+(4)|0\rangle \\ &\quad - |4\rangle\langle 0|b_-(1)c_-(2)b_+(3)c_+(4)|0\rangle, \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde se ha usado (5.26) se puede ver que \tilde{Q} aniquila a $b_-(p)$. Trasladando (5.34) en forma de amplitud, se tiene la siguiente identidad de Ward supersimetrica

$$0 = |2\rangle\mathcal{M}_4(\lambda^-\lambda^-\lambda^+\lambda^+) - |3\rangle\mathcal{M}_4(\lambda^-g^-g^+\lambda^+) - |4\rangle\mathcal{M}_4(\lambda^-g^-\lambda^+g^+), \quad (5.35)$$

para obtener una relación con dos amplitudes independentes, se proyecta mediante una debida elección de un espinor bra $\langle r|$. Tomando $\langle r| = \langle 3|$, se tiene

$$0 = \langle 32\rangle\mathcal{M}_4(\lambda^-\lambda^-\lambda^+\lambda^+) - \langle 34\rangle\mathcal{M}_4(\lambda^-g^-\lambda^+g^+), \quad (5.36)$$

y por lo tanto se tiene la siguiente relación entre amplitudes

$$\mathcal{M}_4(\lambda^-g^-\lambda^+g^+) = \frac{\langle 32\rangle}{\langle 34\rangle}\mathcal{M}_4(\lambda^-\lambda^-\lambda^+\lambda^+). \quad (5.37)$$

Finalmente, se define la siguiente configuración de operadores de aniquilación:

$$T = c_-(1)c_-(2)b_+(3)c_+(4), \quad (5.38)$$

entonces utilizando el álgebra para \tilde{Q} dada por (5.26) se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0|[\tilde{Q}, T]|0\rangle \\ &= |1\rangle\langle 0|b_-(1)c_-(2)b_+(3)c_+(4)|0\rangle + |2\rangle\langle 0|c_-(1)b_-(2)b_+(3)c_+(4)|0\rangle \\ &\quad - |3\rangle\langle 0|c_-(1)c_-(2)c_+(3)c_+(4)|0\rangle, \end{aligned} \quad (5.39)$$

donde se ha usado el hecho de que \tilde{Q} aniquila a $c_+(p)$. Trasladando (5.39) en forma de amplitud, se tiene la siguiente identidad de Ward:

$$0 = |1\rangle\mathcal{M}_4(\lambda^-g^-\lambda^+g^+) + |2\rangle\mathcal{M}_4(g^-\lambda^-\lambda^+g^+) - |3\rangle\mathcal{M}_4(g^-g^-g^+g^+), \quad (5.40)$$

luego, se escoge $\langle r| = \langle 2|$ entonces se tiene la siguiente relación entre amplitudes:

$$\mathcal{M}_4(\lambda^-g^-\lambda^+g^+) = \frac{\langle 23\rangle}{\langle 21\rangle}\mathcal{M}_4(g^-g^-g^+g^+), \quad (5.41)$$

por último, igualando las expresiones (5.37) y (5.41) se obtiene que

$$\mathcal{M}_4(g^-g^-g^+g^+) = \frac{\langle 12\rangle}{\langle 34\rangle}\mathcal{M}_4(\lambda^-\lambda^-\lambda^+\lambda^+), \quad (5.42)$$

**CAPÍTULO 5. AMPLITUDES EN TEORÍAS SUPERSIMÉTRICAS CON EL
FORMALISMO DE HELICIDAD**

5.4. IDENTIDADES DE WARD PARA $\mathcal{N} = 1$ SUPERSIMETRÍA

entonces la amplitud que involucra gluones esta relacionada con la amplitud que involucra solamente gluinos mediante un factor, este resultado es sorprendente ya que podemos construir amplitudes de dispersión de teorías supersimétricas como SUSY-QCD utilizando amplitudes conocidas de teorías de norma como QCD de una manera muy sencilla, basta con conocer los momentos y las helicidades de las partículas. Las configuraciones de operadores dadas por (5.33) y (5.38) son las únicas útiles que nos llevan a las identidades de Ward supersimetricas que se obtuvieron y que nos relacionan amplitudes de dos gluones y dos gluinos. Otro tipo de configuración de operadores nos lleva a identidades de Ward supersimetricas que nos relacionan amplitudes que involucran tres gluones y un gluino o tres gluinos y un gluón, los cuales no son útiles para nuestro propósito. Para obtener la identidad de Ward supersimetrica dada por (5.42) se aprovecho las propiedades del operador \tilde{Q} y los operadores (5.33 , 5.38). Se puede obtener (5.42) utilizando las propiedades del operador Q , los operadores T necesarios para esto son:

$$T = c_-(1)b_-(2)c_+(3)c_+(4), \quad (5.43)$$

$$T = b_-(1)b_-(2)c_+(3)c_+(4), \quad (5.44)$$

dando como resultado

$$\mathcal{M}_4(g^-g^-g^+g^+) = -\frac{[43]}{[12]}\mathcal{M}_4(\lambda^-\lambda^-\lambda^+\lambda^+), \quad (5.45)$$

las expresiones (5.42) y (5.45)son equivalentes ya que al aplicar conservación de momento se tiene que

$$-\frac{[43]}{[12]} = \frac{\langle 12 \rangle}{\langle 34 \rangle}. \quad (5.46)$$

Las amplitudes de gluones a nivel árbol no ven a sus compañeras supersimétricas, asi que deben cumplir con las identidades de Ward supersimétricas, en particular las amplitudes a nivel de árbol en teorías de Yang-Mills pura deben obedecer la siguiente relación:

$$\mathcal{M}_n(g^+g^+ \dots g_i^- \dots g_j^- \dots g^+) = \frac{\langle ij \rangle}{\langle 12 \rangle}\mathcal{M}_n(g^-g^-g^+ \dots g^+). \quad (5.47)$$

La relación (5.47) se encuentra en la fórmula de Parker-Taylor para amplitudes MHV de gluones a nivel de árbol. De hecho, la identidad de Ward supersimetrica (5.47) garantiza que Parker-Taylor es válida para una amplitud MHV gluonica a nivel de árbol con dos helicidades negativas de gluones en cualquier posición. Sin embargo, $\mathcal{N} = 1$ no es suficiente para derivar la expresión (5.47) ya que se necesita relacionar las helicidades positivas y negativas de los gluones y esto solo es posible a partir de la teoría $\mathcal{N} = 4$ ya que esta teoría es CPT auto conjugada.

Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones del trabajo realizado en esta tesis y que se llevo acabo a lo largo de la maestría. Los cuales incluyen el entender y dominar el álgebra y conceptos que involucran este formalismo para poder aplicarlo a procesos de dispersión concretos, esto es:

- Al inicio de mi formación en la maestría, se estudió el método de los espinores de helicidad, el cual ya viene en la literatura tal como en [4], una vez entendido las bases se procede a calcular el proceso de dispersión que involucra cuatro gluones, esto es el proceso $gg \rightarrow gg$ a nivel árbol, al desarrollar la amplitud utilizando las reglas de Feynman para QCD se observa que se encuentra en términos de productos de contracciones entre vectores de polarización y de polarizaciones con momentos, si queremos calcular la sección eficaz de la forma tradicional, se encuentra que el desarrollo resulta ser muy complicado para hacerlo a mano. En el formalismo se encuentran definidos los vectores de polarización y momentos en términos de espinores angulados y cuadrados, al reescribir los estas contracciones de esta forma, el cálculo resulta ser muy sencillo y accesible para hacerlo a mano, reproduciendo los resultados de secciones eficaces ya conocidas (ver [34]).

- Utilizando este formalismo, resulta que se puede generalizar para calcular cualquier amplitud gluónica sin importar el número de gluones involucrados y sin tener en cuenta sus diagramas de Feynman, solo basta con conocer sus momentos y las helicidades de cada partícula, este resultado se resume en lo que se conoce como la fórmula de Parker- Taylor. El cual dio inicio al método de los espinores de helicidad.

- Posteriormente, se estudió las bases de la supersimetría en los últimos dos semestres de la maestría, revisando los modelos necesarios para poder extender dicho formalismo a procesos que involucran supersimetría, nos enfocamos en particular en SUSY-QCD, el espectro de esta teoría que nos interesa es el gluino el cual es el compañero supersimétrico del gluón. En la literatura se encuentran las reglas de feynman para la producción de gluinos (ver [19]). El gluino es un fermión, por lo que en este formalismo se describe como un espinor ya sea angulado o cuadrado. Al utilizar las reglas de Feynman para construir los diagramas de Feynman de los procesos $gg \rightarrow \lambda\lambda$, $\lambda g \rightarrow \lambda g$ y $\lambda\lambda \rightarrow \lambda\lambda$ y posteriormente obtener sus amplitudes mediante el método de los espinores de helicidad, se encuentra que la primera de estas resulta ser nula y las siguientes amplitudes tienen una forma muy simple, las cuales tienen una forma similar a la ya mencionada fórmula de Parker-Taylor.

- Finalmente revisamos la teoría $\mathcal{N} = 1$ SUSY, necesaria para introducir las identidades de ward. En esta teoría se puede ver que se requiere definir un operador T de tal modo que su configuración se encuentre en términos de operadores de aniquilación, como resultado de esto obtenemos relaciones lineales que involucran amplitudes de gluones y gluinos. Escogiendo correctamente el momento de referencia, se encuentra que la amplitud de cuatro gluones que calculamos al principio de este trabajo es proporcional a la amplitud de cuatro gluinos y que existe una amplitud común que las relaciona. Por último, vemos que no es posible obtener una fórmula similar a la de Parker-Taylor ya que se requieren de cuatro supercargas para poder relacionar helicidades positivas con

**CAPÍTULO 5. AMPLITUDES EN TEORÍAS SUPERSIMÉTRICAS CON EL
FORMALISMO DE HELICIDAD**
5.4. IDENTIDADES DE WARD PARA $\mathcal{N} = 1$ SUPERSIMETRÍA

negativas. Esto solo es posible a partir de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM.

En la BUAP se han hecho trabajos utilizando el formalismo de los espinores de helicidad (ver [21], [22]). Los resultados obtenidos en esta tesis nos motivan a seguir explorando el nuevo programa de cálculo que existe para obtener las amplitudes, en este trabajo las partículas se tomaron sin masa, pero resulta que muchas de las ventajas que hay en este formalismo se pierden cuando consideramos partículas masivas. Sin embargo, esta situación ha cambiando ya que en trabajos recientes se ha extendido el formalismo de los espinores de helicidad para partículas de cualquier masa y espín haciendo posible , en principio, aplicar estos métodos para cualquier teoría fundamental de partículas. Estos avances son el siguiente objetivo de estudio para hacer un doctorado.

Apéndice A

Convenciones y propiedades

La metrica que se usa en este trabajo es $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Esta convención hace que $p^2 = p_0^2 - (\vec{p})^2 = m^2 > 0$. La otra alternativa, $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$, hace $p^2 < 0$.

Variables de Mandelstam

$$s = \langle 12 \rangle [12] = \langle 34 \rangle [34], \quad (\text{A.1})$$

$$t = \langle 14 \rangle [14] = \langle 23 \rangle [23], \quad (\text{A.2})$$

$$u = \langle 13 \rangle [13] = \langle 24 \rangle [24]. \quad (\text{A.3})$$

Conservación de momento (Formalismo espinores de helicidad)

$$\sum_{j=1}^n \langle ij \rangle [jk] = 0 \quad (\text{A.4})$$

para cualquier vector luxoides i y k . Para $n = 4$ se tienen:

$$\langle 13 \rangle [32] + \langle 14 \rangle [42] = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\langle 12 \rangle [23] + \langle 14 \rangle [43] = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\langle 12 \rangle [24] + \langle 13 \rangle [34] = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\langle 23 \rangle [31] + \langle 24 \rangle [41] = 0. \quad (\text{A.8})$$

$$\langle 21 \rangle [13] + \langle 24 \rangle [43] = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\langle 21 \rangle [14] + \langle 23 \rangle [34] = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\langle 32 \rangle [21] + \langle 34 \rangle [41] = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\langle 31 \rangle [12] + \langle 34 \rangle [42] = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\langle 31 \rangle [14] + \langle 32 \rangle [24] = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\langle 42 \rangle [21] + \langle 43 \rangle [31] = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\langle 41 \rangle [12] + \langle 43 \rangle [32] = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$\langle 41 \rangle [13] + \langle 42 \rangle [23] = 0. \quad (\text{A.16})$$

APÉNDICE A. CONVENCIONES Y PROPIEDADES

Identidades espinores de helicidad

Algunas identidades útiles para el cálculo de amplitudes son las siguientes:

$$[q|\gamma^\mu|p\rangle = \langle p|\gamma^\mu|q], \quad (\text{A.17})$$

$$\langle p|\gamma^\mu|q\rangle\langle r|\gamma_\mu|s\rangle = 2\langle pr\rangle[qs], \quad (\text{A.18})$$

$$\langle p|k|q\rangle = \langle pk\rangle[kq], \quad (\text{A.19})$$

$$[p|\gamma^\mu|q\rangle = \langle p|\gamma^\mu|q\rangle = 0, \quad (\text{A.20})$$

Los espinores cuadrados y angulados están relacionados por conjugación compleja de la forma:

$$[p| = (|p\rangle)^*, \quad \langle p| = (|p\rangle)^*. \quad (\text{A.21})$$

Vectores de Polarización

Las polarizaciones pueden ser escritas en términos de espinores cuadrados y angulados de la siguiente manera:

$$\epsilon_\mu^-(p, r) = -\frac{\langle p|\gamma_\mu|r\rangle}{\sqrt{2}[rp]}, \quad (\text{A.22})$$

$$\epsilon_\mu^+(p, r) = -\frac{\langle r|\gamma_\mu|p\rangle}{\sqrt{2}\langle rp\rangle}, \quad (\text{A.23})$$

$$\not{\epsilon}^-(p, r) = \frac{\sqrt{2}}{[rp]}(|p\rangle\langle r| + |r\rangle\langle p|) \quad (\text{A.24})$$

$$\not{\epsilon}^+(p, r) = \frac{\sqrt{2}}{\langle rp\rangle}(|p\rangle\langle r| + |r\rangle\langle p|) \quad (\text{A.25})$$

Apéndice B

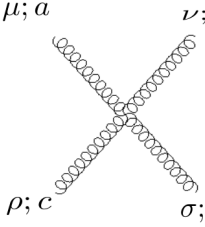
Reglas de Feynman

Las reglas de Feynman que necesitamos de QCD son las siguientes:

$$\begin{array}{c} \nu; b \\ \text{---} \\ \mu; a \end{array} \text{---} = \frac{-ig^{\mu\nu}\delta^{ab}}{p^2+i\epsilon}$$


$$\begin{array}{c} \mu; a \\ \text{---} \\ \nu; b \text{---} \\ \rho; c \end{array} = gf^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$$

APÉNDICE B. REGLAS DE FEYNMAN

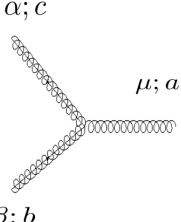


$$\begin{aligned}
 &= -ig^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
 &\quad + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
 &\quad + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]
 \end{aligned}$$

Las reglas de Feynman que se necesitan para calcular procesos en SUSY - QCD son las siguientes:



$$= \frac{i(\not{p} + m_{\bar{g}})_{\beta\alpha} \delta^{ba}}{p^2 - m_{\bar{g}}^2 + i\epsilon}$$



$$= -g_s f^{abc} (\gamma^\mu)_{\beta\alpha}$$

Bibliografía

- [1] S. WEIMBERG, "*The Quantum Theory of Fields*", vol I-III, Cambridge University Press, 2005.
- [2] H. LEHMANN, K. SYMANZIK AND W. ZIMMERMANN, *Nuovo Cimento*, **61** 1425 (1955).
- [3] R. P. FEYNMAN, *Phys. Rev.* **76**, 749-769 (1949).
- [4] HENRIETTE ELVANG AND YU-TIN HUANG, "*Scattering Amplitudes in Gauge Theory and Gravity*", Cambridge University Press (2015) .
- [5] MATTHEW D. SCHWARTZ, "*Quantum Field Theory and the Standard Model*" , Cambridge University Press (2014).
- [6] M. TANABASHI ET AL. (Particle Data Group), *Phys. Rev.* **D 98**, 03001 (2018)
- [7] CMS COLLABORATION, *Phys. Lett.* **B 716** (2012) 30.
- [8] M. SREDNICKI , "*Quantum Field Theory*", Cambridge University Press (2007).
- [9] L.J. DIXON, *J.Phys.* **A44** (2011) 454001, [arXiv:1105.0771 [hep-th]].
- [10] E. WITTEN, *Commun, Math. Phys.* **252**, 189 (2004) [arXiv:hep-th/0312171].
- [11] R.BRITTO, F. CACHAZO, B.FENG AND E.WITTEN , *Phys. Rev. Lett.* **94**, 181602 , (2005) [hep-th/0501052].
- [12] N. ARKANI HAMED AND J. KAPLAN, *JHEP* **0804**, 076 (2008) [arXiv:0801.2385[hep-th]].
- [13] N. ARKANI HAMED, F. CACHAZO, C. CHEUNG AND J. KAPLAN, *JHEP* **1003**, 020 (2010) [arXiv:0907.5418[hep-th]].
- [14] N. ARKANI HAMED, J. L. BOURJAILY, F. CACHAZO, S. CARON HUOT AND J. TRNKA, *JHEP* **1101** 041 (2011) [arXiv:1008.2958 [hep-th]].
- [15] N. ARKANI HAMED, J.L. BOURJAILY, F. CACHAZO, ET AL. [arXiv:1212.5605 [hep-th]].
- [16] S.J. PARKE AND T.R.TAYLOR , *Phys.Rev.Lett.* **56**, 2459 , (1986).
- [17] J. WESS AND B. ZUMINO, *Nucl. Phys.* **B70** (1974) 39.
- [18] J. WESS AND J. BAGGER, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press (1992).
- [19] W. BEENAKKER, R. HOPKER, M. SPIRA AND P. M ZERWAS , "*Squark and Gluino production at Hadron Colliders*" , [arXiv:hep-ph/9610490v1] (1996)
- [20] M.T. GRISARU AND H.N. PENDLETON, "*Some properties of scattering amplitudes in supersymmetric theories* ", *Nuclear Physics*, B124, Pag. 81-92, (1977).

- [21] J.L. DIAZ-CRUZ, B. LARIOS , *J. Phys G: Nuca.Part. Phys.* **45** 015002 , (2018)
- [22] J. LORENZO DÍAZ CRUZ, BRYAN O. LARIOS, O. MEZA ALDAMA AND J. REYES PEREZ, *Rev. Mex. Fis. E* **61** (2) (2015) 104. English version: [arXiv:1511.07477 [physics.gen-ph]] .
- [23] F. ENGLERT AND R. BROUT, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321.
P.W. HIGGS, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132.
T.W.B. KIBBLE, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.
- [24] *Daniel Z. Freedman and Antoine Van Proeyen, "Supergravity"*, Cambridge University Press (2012).
- [25] D. BALIN AND A. LOVE, "*Supersymmetric gauge field theory and String theory*", Taylor and Francis (1994).
- [26] H.KAWAI, D.C LEWELLEN, S.H.H.TYE *Nucl. Phys. B* **269**, 1 , (1986).
- [27] P. BENINCASA AND F. CACHAZO, " *Consistency conditions on the S-matrix of massless particle*", [arXiv:0705.4305v2 [hep-th]] (2008).
- [28] HARALD. J. W. MULLER KIRSTEN, WIEDEMANN. A , "*Supersymmetry: An introduction with conceptual and calculational details*" , World Scientific (1987)
- [29] MICHAEL. PESKIN , "*Simplifying Multi-jet QCD Computation* " , [arXiv:1101.2414v1 [hep-ph]] (2011).
- [30] CLIFFORD CHEUNG, *TASI Lectures on Scattering Amplitudes*, [arXiv:1708.03872v1 [hep-ph]] (2017).
- [31] JURGEN REUTER, "*Supersymmetry of Scattering Amplitudes and Green functions in Perturbation theory*", [arXiv:hep-th/0212154v1] (2002).
- [32] JOHANNES M. HENN AND JAN C. PLEFKA, "*Scattering Amplitudes in gauge theories*", Springer Verlag, (2014).
- [33] T. MUTA, "*Foundations of quantum chromodynamics*", World Scientific Lecture Notes in Physics, (2010).
- [34] VERNON D. BARGER AND ROGER J. N. PHILIPS, *Collider Physics* , Addison Wesley, (1997)
- [35] M.E.PESKIN AND D.V.SCHROEDER, "*An introduction to Quantum Field Theory* ", Addison Wesley (1996).
- [36] D. GRIFFITHS, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley-VCH (2004).
- [37] E. NOETHER, *Narch. d. Konig. Gesellsch. d. Wiss. zu Gottingen*, No. Math-Phys. Klasse, pp. 235 - 257 (1918).
- [38] S. GLASHOW, *Nucl. Phys.* **22** (4), 579 - 588 (1961).
- [39] A. SALAM AND J. WARD, *Phys. Lett.* **13**, (2), 168 - 171 (1964).
- [40] S. WEINBERG, *Phys. Rev. Lett.* **19** (21), 1264 - 1266 (1967).