



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Haces adifraccionales de electrones y sus generalizaciones

Tesis presentada al

Posgrado en Ciencias Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Doctorado en Ciencias
(Física Aplicada)**

por

Ernesto Espíndola Ramos

asesorado por

Dr. Gilberto Silva Ortigoza

Puebla Pue.
Marzo 2021

Título: Haces adifraccionales de electrones y sus generalizaciones
Estudiante: ERNESTO ESPÍNDOLA RAMOS

COMITÉ

Dr. Gerardo Fco. Torres del Castillo
Presidente

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Secretario

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Vocal

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Asesor

Dedicatoria

A mis hijas, Alegría y Barby, y a mi esposa, Brenda, por su amor infinito y por llenar mis días de alegría.

A mis padres, Alejandro y María Cruz, por su amor, esfuerzo, y por estar siempre al pendiente de mi educación.

Agradecimientos

Al Dr. Gilberto Silva Ortigoza, por su amistad, por su paciencia y por permitirme formar parte de su equipo y proyectos de investigación.

Al equipo, formado por quienes me han acompañado desde el principio de este proyecto académico, y por su amistad: Paula Ortega Vidals, Salvador Alejandro Juárez Reyes, Citlalli Teresa Sosa Sánchez, Omar de Jesús Cabrera Rosas, Israel Julián Macías y Adriana González Juárez.

Al Dr. Gerardo Fco. Torres del Castillo, Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco y a la Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada por las evaluaciones de este trabajo a pesar de las actividades que les ocupan.

Capítulo 1

Resumen

Los haces adifraccionales son soluciones de la ecuación escalar de onda en el vacío con la propiedad de que su distribución transversal de intensidad es invariante ante una traslación a lo largo de la dirección de propagación. En el contexto de la mecánica cuántica, las partículas satisfacen una ecuación de onda, por lo tanto existen los haces adifraccionales de partículas, y en particular, los haces adifraccionales de electrones.

En este proyecto de investigación nos centramos en la caracterización geométrica de funciones de onda que se propagan libremente generadas por una función S que satisface la ecuación eikonal y de Laplace, para una solución de la ecuación escalar de onda, o que satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi y Laplace, para una solución de la ecuación paraxial de onda o de la ecuación de Schrödinger. Es decir, a una función de onda le asociamos una familia de frentes de onda, una familia de rayos y una cáustica a través de una función \tilde{S} que se obtiene de aplicar el método de la envolvente a la función S , y que satisface la ecuación eikonal, para el caso de una solución a la ecuación escalar de onda, o que satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi, para el caso de una solución de la ecuación paraxial de onda o de la ecuación de Schrödinger.

En todos los casos estudiados aquí prestamos especial atención a la configuración de la cáustica, ya que esta caracteriza la región de máxima intensidad de un haz, que es una observable física macroscópica, y además su estructura determina su estabilidad.

Analizamos la propagación de haces generados por las catástrofes elementales (cáusticas estables bajo pequeñas perturbaciones) en la aproximación paraxial. La correspondencia matemática entre la ecuación paraxial de onda y la ecuación de Schrödinger nos permite establecer un puente entre la óptica y la mecánica cuántica, es decir, podemos entender la propagación de estos haces como un conjunto de partículas cuyas trayectorias (rayos de luz) están determinadas por una función principal de Hamilton S . Por lo tanto, mientras que la evolución del patrón de intensidad está gobernada por la ecuación paraxial de onda, la cáustica está gobernada por la ecuación de Hamilton-Jacobi. En este sentido decimos que la cáustica representa la región más clásica de un haz.

Uno de los resultados principales del presente proyecto de investigación es la carac-

terización geométrica (o clásica) cualitativa y cuantitativa de todos los máximos de la Función de Densidad de Probabilidad del haz de Airy cuántico, el cual es un haz adifraccional y acelerado con cáustica estable (cáustica tipo fold). Es decir, a cada máximo le corresponde una cáustica que se determina de una función \tilde{S} que satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi con un potencial que depende del orden del máximo. Para este fin, mostramos que la transformación canónica generada por la función S , en forma natural, nos permite asociar a una función de onda una familia biparamétrica de frentes de onda, una familia uniparamétrica de acciones y una familia uniparamétrica de cáusticas.

Por otra parte, la representación de Madelung-de Broglie-Bohm de la ecuación de Schrödinger, en forma análoga a la cáustica, nos permite identificar las regiones más clásicas de una función de onda, definidas por los ceros del potencial de Madelung-Bohm, es decir, sobre el conjunto de puntos (\mathbf{r}, t) sobre los cuales la ecuación de Hamilton-Jacobi-Madelung se reduce a la ecuación de Hamilton-Jacobi. Al analizar cómo se organizan los rayos sobre la cáustica, concluimos que los haces con cáustica tipo fold son los haces más clásicos en el sentido de que los ceros del potencial de Bohm coinciden con la cáustica, y que para otro tipos de haces, el potencial de Madelung-Bohm es distinto de cero sobre la cáustica. Hemos verificado estas afirmaciones para el haz de Airy y Percy, cuyas cáusticas son estables.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Resumen | 5 |
| 2. Introducción | 15 |
| 3. Conceptos básicos de óptica geométrica | 1 |
| 3.1. Deducción de la ecuación eikonal | 2 |
| 3.2. Ondas planas | 3 |
| 3.3. El principio de superposición geométrico | 4 |
| 3.3.1. Superposición de frentes de onda planos en \mathbb{R}^2 | 6 |
| 3.4. La región cóustica | 6 |
| 3.4.1. Cálculo de la cóustica a partir de la forma paramétrica de los frentes de onda geométricos | 7 |
| 4. Haces adifraccionales | 11 |
| 4.1. La ecuación escalar de onda | 12 |
| 4.1.1. Análisis geométrico de la función escalar de onda | 13 |
| 4.2. Haces Bessel | 15 |
| 5. Teoría de catástrofes | 19 |
| 5.1. La ecuación paraxial de onda | 20 |
| 5.2. Soluciones exactas de la ecuación paraxial de onda | 21 |
| 5.3. Caracterización geométrica de las funciones de onda Ψ_1 y Ψ_2 | 22 |
| 5.3.1. Rayos de luz y cóustica | 22 |
| 5.3.2. Link entre los rayos de luz y las soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre | 23 |
| 5.4. Las funciones $S(\mathbf{r}, \sigma)$ determinadas por las catástrofes $\Phi(\mathbf{C}, \sigma)$ | 24 |
| 5.4.1. La catástrofe tipo fold | 25 |
| 5.4.2. La catástrofe tipo cusp | 27 |
| 5.4.3. La catástrofe tipo swallowtail | 30 |
| 5.5. Las funciones $S(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ determinadas por las catástrofes $\Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta)$ | 32 |
| 5.5.1. La catástrofe Elliptic Umbilic | 33 |
| 5.5.2. La catástrofe Hyperbolic Umbilic | 36 |
| 5.5.3. La catástrofe Parabolic Umbilic | 37 |

| | |
|---|-----------|
| 6. Haces adifraccionales de electrones | 45 |
| 6.1. Frentes de onda, acciones y cáusticas determinadas por la densidad de probabilidad de un haz de Airy | 46 |
| 6.1.1. Soluciones de la ecuación de Schrödinger generadas por funciones que satisfacen la ecuación de Hamilton-Jacobi y Laplace simultáneamente | 47 |
| 6.1.2. Caracterización clásica de la nueva solución Ψ | 48 |
| 6.1.3. Caracterización clásica de los máximos de la función de densidad de probabilidad $ \Psi ^2$ | 50 |
| 6.1.4. Caracterización clásica del haz de Airy | 53 |
| 7. Comparación de la cáustica con los ceros del potencial de Madelung-Bohm | 63 |
| 7.1. Caracterización geométrica de una función de onda | 64 |
| 7.2. Una visión general de las ecuaciones de Madelung-de Broglie-Bohm | 64 |
| 7.3. Interacción de ondas planas en el vacío | 65 |
| 7.4. El haz de Airy | 69 |
| 7.5. El haz de Pearcey | 72 |
| 8. Conclusiones | 75 |
| Bibliografía | 79 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 3.1. (a) Curvas de nivel de la ecuación (3.16) para los valores $\mathcal{C}/n = -3, -2, \dots, 2, 3$, donde se ha considerado $g = 0$, y $\varphi = 0$. En (b) se muestran los mismos frentes de onda pero con dirección de propagación $\varphi = \pi/10$ (líneas azul) y $\varphi = -\pi/10$ (líneas café). En (c) se muestra la construcción geométrica de los frentes de onda circulares que resultan de la envolvente de la familia uniparamétrica de frentes de onda de la ecuación (3.26) con $g = 0$, para los casos particulares $\mathcal{C}/n = 1$ (líneas azul) y $\mathcal{C}/n = 2$ (líneas café). | 4 |
| 3.2. Construcción geométrica del frente de onda pseudoelíptico (curva roja) y su evolución en \mathbb{R}^2 | 7 |
| 3.3. (a) Rayos incidentes y reflejados por una superficie circular. (b) Frentes de onda reflejados. (c) Patrón de intensidad. | 8 |
| 3.4. Evolución del frente de onda pseudoelíptico en \mathbb{R}^2 (curva azul) y su cáustica (curva roja). | 9 |
| 4.1. (a) Distribución de intensidad del haz Bessel de orden cero. (b) Perfil de intensidad del haz Bessel de orden cero. El patrón de intensidad transversal permanece invariante ante traslaciones a lo largo del eje z . En estos gráficos hemos considerado $\alpha = 24,05mm^{-1}$, como en el artículo de Durnin. | 15 |
| 4.2. Se ilustran los frentes de onda (azul) y conjunto cáustico (rojo) de los haces Bessel, junto con su perfil de intensidad. | 17 |
| 4.3. Patrón de intensidad del campo escalar (4.26). Hemos considerado $\alpha = 24,05mm^{-1}$. Las unidades correspondientes de los gráficos son milímetros. | 18 |
| 5.1. La función $S(\mathbf{r}, \sigma)$ determinada por la catástrofe tipo fold dada por la ecuación (5.30) tiene asociada una curva cáustica parabólica (roja) dada por la ecuación (5.32) sobre el plano $y = constante$ cuyo vértice, punto azul en $z = 0$ en el inciso (a), coincide con la cáustica de la catástrofe estable correspondiente con $C_1 = x$. La evolución de los rayos a lo largo del eje z resulta en trayectorias tangentes a la cáustica que es el límite de la descripción geométrica, como puede verse en el inciso (b). La cáustica caracteriza cualitativamente el máximo absoluto del patrón de intensidad de la función de onda (5.33) como se muestra en el inciso (c). | 27 |

- 5.2. Distribución de la familia de “partículas” sobre el eje x asociadas con la función de onda (5.33) determinada por la catástrofe tipo fold en $z = 0$ sobre el plano $y = \text{constante}$, acorde con las ecuaciones (5.35) con $Q = 0$. El momento lineal $p_x = \sigma$ se representó con vectores coloreados. Las trayectorias de las partículas coinciden con las de los rayos de luz dadas por la ecuación (5.31). 27
- 5.3. La superficie roja ilustra la cáustica (5.40) asociada con $S(\mathbf{r}, \sigma)$, dada por la ecuación (5.38), determinada por la catástrofe tipo cusp, cuya intersección con el plano $z = 0$ coincide con la cáustica de la catástrofe correspondiente con $C_1 = x$ y $C_2 = y$ como se muestra en el inciso (a). Las líneas que se muestran en el inciso (b) son las intersecciones de los rayos de luz (5.39) sobre los planos $z = 0$ y $z = 3$. En el inciso (c) mostramos la evolución del patrón de intensidad asociado con la función de onda (5.41) a lo largo del eje z 29
- 5.4. (a) Se ilustran algunas trayectorias y (b) el momento de las “partículas” correspondientes (vectores coloreados) asociados con el haz de Pearcey dadas por las ecuaciones (5.42) y (5.43) con $Q = 0$. (c) Las trayectorias están sobre superficies planas dadas por la ecuación de los rayos (5.39). 29
- 5.5. (a) La cáustica tipo Swallowtail. La cáustica asociada a la función de onda (5.49) para la sección transversal $C_3 = 2$ de la cáustica Swallowtail se muestra en el inciso (b) y para $C_3 = -5$ en el inciso (c). Las rectas son las intersecciones de las familias de planos descritas por la ecuación de rayos (5.46) con los planos $z = \text{cte}$. La evolución del patrón de intensidad se muestra en los incisos (c) y (e), respectivamente. 32
- 5.6. Se muestran algunas trayectorias (rectas coloreadas) y momento lineal de las partículas (vectores coloreados en los incisos (b) y (e)) asociados a la función de onda (5.49) determinadas por la catástrofe swallowtail, descritas por las ecuaciones (5.52) y (5.53) con $Q = 0$ al incrementar linealmente el momento $p_x = \sigma$ para valores discretos de la coordenada y para los casos $m = 2$ (incisos (a) a (c)) y $m = -5$ (incisos (d) a (f)). 33
- 5.7. (a) Cáustica elliptic umbilic. (b) Rayos de luz (rectas coloreadas) y superficie cáustica asociados a la función de onda (5.64). En el inciso (c) se muestran las intersecciones de los rayos de luz con los planos $z = 0$ y $z = 4$. La coloración de los puntos tiende del azul al verde conforme el valor $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ se incrementa. (d) Curvas asociadas a las ecuaciones paramétricas (5.58)-(5.60) con $z = 4$ para valores discretos de α como función de β . (e) Se muestra la evolución del patrón de intensidad. 35
- 5.8. (a) Cáustica hyperbolic umbilic. (b) Rayos de luz (rectas coloreadas) y superficie cáustica asociados a la función de onda (5.75). En el inciso (c) se muestran las intersecciones de los rayos de luz con los planos $z = 0$ y $z = 10$. La coloración de los puntos tiende del azul al verde conforme el valor $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ se incrementa. (d) Curvas asociadas a las ecuaciones paramétricas (5.69) a (5.71) con $z = 10$ para valores discretos de α como función de β . (e) Se muestra la evolución del patrón de intensidad. 38

- 5.9. (a) Cáustica parabolic umbilic con $C_4 = 2$. (b) Rayos de luz (rectas coloreadas) y superficie cáustica asociados a la función de onda (5.91). En el inciso (c) se muestran las intersecciones de los rayos de luz con los planos $z = 0$ y $z = 6$. La coloración de los puntos tiende del azul al verde conforme el valor $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ se incrementa. (d) Curvas asociadas a las ecuaciones paramétricas (5.84) a (5.86) con $z = 6$ para valores discretos de α como función de β . (e) Se muestra la evolución del patrón de intensidad. 40
- 5.10. (a) Cáustica parabolic umbilic con $C_4 = 1,5$. (b) Rayos de luz (rectas coloreadas) y superficie cáustica asociados a la función de onda (5.103). En el inciso (c) se muestran las intersecciones de los rayos de luz con los planos $z = 0$ y $z = 1,9$. La coloración de los puntos tiende del azul al verde conforme el valor $\sqrt{\alpha^4 + \beta^2}$ se incrementa. (d) Curvas asociadas a las ecuaciones paramétricas (5.84) a (5.86) con $z = 1,9$ para valores discretos de α como función de β . (e) Se muestra la evolución del patrón de intensidad. 43
- 6.1. Se muestran los frentes de onda descritos por las ecuaciones (6.11) y (6.32), donde hemos usando el cambio de variable $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$, $\mathcal{P} = P/(B\hbar^{1/3})$ y $\mathcal{C} = C/\hbar$; es decir, mostramos las curvas de nivel $\mathcal{X}\mathcal{P} - \mathcal{P}^2\mathcal{T} + \mathcal{P}^3/3 = \mathcal{C}$, para $\mathcal{P} = -1, 1$ 49
- 6.2. Se muestran los frentes de onda (negro) determinados por las ecuaciones (6.11) y (6.32), donde se ha aplicado el cambio de variable $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$, $\mathcal{P} = P/(B\hbar^{1/3})$ y $\mathcal{C} = C/\hbar$; esto es, $\mathcal{X}\mathcal{P} - \mathcal{P}^2\mathcal{T} + \mathcal{P}^3/3 = \mathcal{C}$ con: (a) $\mathcal{C} = -1$, (b) $\mathcal{C} = 0$ y (c) $\mathcal{C} = 1$. Hemos incluido las envolventes (rojo) de estas familias de frentes de onda, las cuales corresponden a los frentes de onda descritos por las ecuaciones (6.33); esto es, $\mathcal{X} = 2\mathcal{C}/\mathcal{P} + \mathcal{P}^2/3$, $\mathcal{T} = 2\mathcal{P}/3 + \mathcal{C}/\mathcal{P}^2$ 50
- 6.3. Se muestran los frentes de onda determinados por las ecuaciones (6.33), con $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$, $\mathcal{P} = P/(B\hbar^{1/3})$ y $\mathcal{C} = C/\hbar$; es decir, $\mathcal{X} = 2\mathcal{C}/\mathcal{P} + \mathcal{P}^2/3$, $\mathcal{T} = 2\mathcal{P}/3 + \mathcal{C}/\mathcal{P}^2$. También se muestra la cáustica (rojo) determinada por la ecuación (6.36); es decir, $\mathcal{X}_c - \mathcal{T}_c^2 = 0$. De estas figuras observamos que los frentes de onda tienen singularidades sobre la curva cáustica. 54
- 6.4. En este gráfico mostramos la relación entre x y p para diferentes instantes de tiempo, determinados por la ecuación (6.40), donde hemos considerado el cambio de variable $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$ y $\mathcal{P} = P/(B\hbar^{1/3})$; esto es, $\mathcal{X} - \mathcal{T}^2 + (\mathcal{P} - \mathcal{T})^2 = 0$ 55
- 6.5. Gráfica de la densidad de probabilidad, $Ai^2(\mathcal{Q})$, de un haz Airy, donde hemos definido $\mathcal{Q} = (BQ)/\hbar^{2/3}$. Los puntos en rojo corresponden a los puntos máximos de la densidad de probabilidad, y el azul es la evaluación de la densidad de probabilidad en la cáustica, para $\mathcal{Q} = 0$. De esta gráfica notamos que el máximo supremo de la densidad de probabilidad no coincide con la cáustica. 56

- 6.6. Grafico de densidad de la densidad de probabilidad de un haz de Airy descrito por la ecuación (6.41), donde hemos considerado el cambio de variable $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$ y $\mathcal{Q} = (BQ)/\hbar^{2/3}$; esto es, $[Ai(\mathcal{X} - \mathcal{T}^2)]^2$. Además se muestran cuatro cáusticas descritas por la ecuación (6.45); es decir por la ecuación $\mathcal{X} - \mathcal{T}^2 = \mathcal{Q}_n$ para los valores particulares $\mathcal{Q}_0 = 0$ (azul), $\mathcal{Q}_1 = -1,0188$ (rojo) determinado por el primer máximo, $\mathcal{Q}_2 = -3,2482$ (rojo) determinado por el segundo máximo, y $\mathcal{Q}_3 = -4,8201$ (rojo) determinado por el tercer máximo. 59
- 6.7. Gráficos de los potenciales determinados por los máximos de la densidad de probabilidad de un haz de Airy (ecuación (6.54)) para los valores particulares (a) $\mathcal{Q}_1 = -1,0188$ (primer máximo), (b) $\mathcal{Q}_2 = -3,2482$ (segundo máximo) y (c) $\mathcal{Q}_3 = -4,8201$ (tercer máximo). 59
- 6.8. Frentes de onda y cáustica (rojo) determinados por el primer máximo de la densidad de probabilidad de un haz de Airy dados por las ecuaciones (6.43), (6.45) y (6.52) con el cambio de variable $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$, $\mathcal{P} = P/(B\hbar^{1/3})$, $\mathcal{C} = C/\hbar$ y $\mathcal{Q} = (BQ)/\hbar^{2/3}$; esto es, los frentes de onda $\mathcal{X} = 2\mathcal{C}/\mathcal{P} + \mathcal{P}^2/3 - \mathcal{Q}_1$, $\mathcal{T} = 2\mathcal{P}/3 - \mathcal{Q}_1/\mathcal{P} + \mathcal{C}/\mathcal{P}^2$ y la cáustica $\mathcal{X} - \mathcal{T}^2 = \mathcal{Q}_1$ con $\mathcal{Q}_1 = -1,0188$. Nótese que estos frente de onda no son singulares sobre la curva cáustica. 60
- 6.9. Frentes de onda (negro) y cáustica (rojo) determinados por los primeros tres máximos de la densidad de probabilidad de un haz de Airy, descritos por las ecuaciones (6.43), (6.45) y (6.52), con $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$, $\mathcal{P} = P/(B\hbar^{1/3})$, $\mathcal{C} = C/\hbar$ y $\mathcal{Q} = (BQ)/\hbar^{2/3}$; esto es, los frentes de onda $\mathcal{X} = 2\mathcal{C}/\mathcal{P} + \mathcal{P}^2/3 - \mathcal{Q}_n$, $\mathcal{T} = 2\mathcal{P}/3 - \mathcal{Q}_n/\mathcal{P} + \mathcal{C}/\mathcal{P}^2$ y las cáusticas $\mathcal{X} - \mathcal{T}^2 = \mathcal{Q}_n$ con: (a) $\mathcal{Q}_1 = -1,0188$ (primer máximo), (b) $\mathcal{Q}_2 = -3,2482$ (segundo máximo) y (c) $\mathcal{Q}_3 = -4,8201$ (tercer máximo). 60
- 6.10. Se muestra la relación entre x y \tilde{p} para diferentes instantes de tiempo, descritos por las ecuaciones (6.49) y (6.52), con $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$, $\mathcal{Q} = (BQ)/\hbar^{2/3}$ y $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{p}/(B\hbar^{1/3})$; esto es, $(\tilde{\mathcal{P}} - \mathcal{T})^2 = (\sqrt{\mathcal{T}^2 + \mathcal{Q}_n} - \mathcal{X} - \mathcal{Q}_n/2\sqrt{\mathcal{T}^2 + \mathcal{Q}_n} - \mathcal{X})^2$ para: (a) $\mathcal{Q}_1 = -1,0188$ (primer máximo), (b) $\mathcal{Q}_2 = -3,2482$ (segundo máximo) y (c) $\mathcal{Q}_3 = -4,8201$ (tercer máximo). 61
- 7.1. (a) Superposición de dos ondas planas con momento $\mathcal{P} = 1$ y $\mathcal{P} = 2$. (b) Superposición de dos ondas idénticas de momento $\mathcal{P} = 1$ con una tercera onda de momento $\mathcal{P} = 3$. (c) Superposición de tres ondas planas con momento $\mathcal{P} = 1$, $\mathcal{P} = -1$ y $\mathcal{P} = 2$. Las líneas punteadas muestran los ceros del potencial de Madelung-Bohm. Para todos los casos, en la ecuación (7.10) se toma $f(P) = 0$. Para estos gráficos hemos definido $\mathcal{X} = Bx/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = B^2t/2m\hbar^{1/3}$ y $\mathcal{P} = P/B\hbar^{1/3}$, donde B es una constante arbitraria positiva de unidades $(kg^2m/s^2)^{1/3}$ 67
- 7.2. (a) Un haz para el cual dos rayos pasan en cada punto de su cáustica en forma tangente. (b) Un haz para el cual existe un tercer rayo (o incluso podrían ser más) en cada punto de la cáustica que lo cruza. Para ambas figuras, la cáustica corresponde a la curva azul. 70

- 7.3. (a) Función de densidad de probabilidad del haz de Airy y sus rayos asociados. (b) Se muestran los ceros del potencial de Madelung-Bohm (línea roja punteada) y la cáustica (curva azul). Para estos gráficos hemos definido $\mathcal{X}_1 = B_1 x / \hbar^{2/3}$, $\mathcal{T}_1 = B_1^2 t / 2m\hbar^{1/3}$ y $\mathcal{P}_1 = P / B_1 \hbar^{1/3}$ 71
- 7.4. (a) La función de densidad de probabilidad del haz de Pearcey y sus rayos asociados. (b) Los ceros del potencial de Madelung-Bohm (líneas rojas punteadas) y la cáustica (curva azul). Para estos gráficos hemos definido $\mathcal{X}_2 = \sqrt{2} B_2 x / \hbar^{3/4}$, $\mathcal{T}_2 = B_2^2 t / m\hbar^{1/2}$ y $\mathcal{P}_2 = P / \sqrt{2} B_2 \hbar^{1/4}$ 74

Capítulo 2

Introducción

Uno de los principales temas de interés en la actualidad es el estudio teórico y experimental de haces estructurados (es decir, haces con intensidad, polarización y fase prediseñada) debido a sus aplicaciones [1]. En efecto, en 2018 Arthur Ashkin, Gérard Mourou (por la aplicación de las pinzas ópticas en sistemas biológicos) y Donna Strickland (por su método de generar pulsos ultracortos de alta intensidad) fueron galardonados con el premio nobel de física, por sus avances en el campo de la física láser.

Los haces adifraccionales son un ejemplo de haces estructurados que tienen la propiedad de no presentar efectos de difracción durante su propagación, es decir, su perfil de intensidad transversal permanece invariante ante traslaciones a lo largo de la dirección de propagación, y además tienen la capacidad de autoreconstruirse al ser obstruidos parcialmente. El estudio teórico y experimental de estos haces es importante debido a sus aplicaciones en diferentes áreas como metrología, microlitografía, óptica no lineal, cirugía médica, así como en comunicaciones inalámbricas y ópticas [1, 2].

El concepto de haz adifraccional fue introducido por J. Durnin en 1987 [3]. Él mostró teóricamente que existe una familia de haces monocromáticos no difractivos que satisfacen la ecuación escalar de onda. Posteriormente, Durnin, Miceli y Eberly presentaron el primer reporte experimental de la generación de un haz adifraccional: el haz Bessel de orden cero [4], el cual es una solución de la ecuación escalar de onda en coordenadas cilíndricas circulares. Posteriormente Gutierrez Vega, Iturbe Castillo y Chávez Cerda reportaron la generación de haces adifraccionales asociados a soluciones de la ecuación escalar de onda en coordenadas cilíndrico elípticas (haces Mathieu) [5], y Bandres, Gutierrez Vega y Chávez Cerda reportaron los haces adifraccionales parabólicos [6].

Los haces adifraccionales más simples y más estudiados teórica y experimentalmente son los haces Bessel. Una cualidad importante del haz Bessel de orden cero es su capacidad de concentración de energía en una región comparable con las dimensiones de la longitud de onda de la luz sin presentar efectos de difracción [4]. Por otra parte, los haces Bessel de orden distinto de cero también son los ejemplos más simples de vórtices ópticos, es decir, el flujo de energía de estos haces son hélices que viven sobre

superficies cilíndricas cuyo eje de simetría coincide con el eje de simetría del haz [7], y por lo tanto son capaces de transmitir momento angular orbital. Por estas propiedades estos haces son ideales para la manipulación de micropartículas, inclusive en distintos planos transversales[8].

Por otra parte, anterior a la publicación de Durnin, Berry y Balazs en 1979 mostraron que la ecuación de Schrödinger para una partícula libre en una dimensión admite una solución única, aparte de la onda plana, en la forma de un haz de Airy, cuya función de densidad de probabilidad se propaga sin distorsionarse y con aceleración constante [9]. Ellos mostraron que estas propiedades tienen un origen clásico: la propiedad no difractiva de este haz se determina de una familia de órbitas representada por una parábola en el espacio fase tal que bajo el movimiento clásico se traslada rígidamente y la aceleración del paquete se relaciona con la curvatura de la cáustica, envolvente de la familia de líneas de mundo en el espacio tiempo. Es decir, estos autores dieron una caracterización clásica del haz de Airy.

La primera observación del haz de Airy fue reportada por Christodoulides y colaboradores en 2007 en el contexto de la óptica. Ellos reconocieron la analogía entre la ecuación de Schrödinger y la ecuación paraxial de onda, y estudiaron la dinámica de este haz tanto teórica como experimentalmente [10, 11, 12].

Posteriormente, Noa Voloch Bloch y colaboradores en 2012 reportaron la primera observación del haz de Airy de electrones, y verificaron las propiedades de estos haces, como su capacidad de acelerarse sin distorsionarse, así como su capacidad de autoreconstrucción [13].

Por otro lado, en 2014 Vincenzo Grillo y colaboradores reportaron la generación de los haces Bessel de electrones y verificaron sus propiedades [14].

Recientemente, hemos mostrado que desde el punto de vista de la óptica geométrica los haces adifraccionales propuestos por Durnin están generados por una familia uniparamétrica de soluciones de las ecuaciones eikonal y de Laplace [15], y por lo tanto pueden caracterizarse geoméricamente a través de una nueva solución de la ecuación eikonal cuyas curvas de nivel corresponden a la envolvente de los frentes de onda de dicha familia de soluciones. Es decir, a un haz adifraccional le asociamos una familia de frentes de onda, una familia de rayos, y una cáustica cuya sección transversal es invariante bajo traslaciones a lo largo de la dirección de propagación del haz.

El objetivo principal del presente proyecto de investigación es caracterizar geoméricamente (o clásicamente) a los haces adifraccionales de electrones que se propagan libremente, esto es, a una solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula libre le asociamos una familia de frentes de onda, una familia de rayos (trayectorias clásicas) y una cáustica. En particular, mostramos que la teoría de Hamilton-Jacobi permite introducir, en forma natural, una generalización de la ecuación de los rayos, y en consecuencia nos permite asociar a una solución de la ecuación de Schrödinger una familia uniparamétrica de acciones, y una familia uniparamétrica de cáusticas,

que para el caso del Haz de Airy, pueden ajustarse a los máximos de la función de densidad de probabilidad. Además, mostramos que el conjunto de haces cuya cáustica asociada es de tipo fold, son los haces con comportamiento más clásico en el sentido de que los ceros del potencial de Madelung-Bohm coinciden con la cáustica, y por lo tanto, la evolución de estas curvas está gobernada por la ecuación de Hamilton-Jacobi. Con este fin hemos organizado el contenido del presente documento de la siguiente manera:

En el capítulo 1 introducimos los conceptos y herramientas matemáticas necesarias para obtener la caracterización geométrica de una solución a la ecuación escalar de onda de la luz, es decir, obtenemos los frentes de onda, los rayos de luz y la cáustica. En particular, mostramos que una familia de soluciones de la ecuación eikonal nos permite generar una nueva solución de la ecuación eikonal a través de lo que llamamos el principio de superposición geométrico. En el capítulo 2 mostramos el procedimiento para obtener la caracterización geométrica de soluciones a la ecuación escalar de onda generados por una familia de soluciones de la ecuación eikonal y de Laplace. Mostramos que el principio de superposición geométrico nos permite generar una nueva función eikonal cuya cáustica caracteriza cualitativamente la distribución de máximos del patrón de intensidad, y aplicamos estos resultados a los haces Bessel. En el capítulo 3 prestamos atención a la propagación de haces con cáusticas estables en la aproximación paraxial. Mostramos que este tipo de haces están generados por una familia uniparamétrica o biparamétrica de soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi y de Laplace, y que dada la correspondencia matemática entre la ecuación de Schrödinger y la ecuación paraxial de onda, podemos visualizar la propagación de estos haces en términos de un conjunto de partículas cuyas trayectorias satisfacen las ecuaciones de Hamilton. En el capítulo 4 mostramos el procedimiento para caracterizar geoméricamente (o clásicamente) a una solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula libre generada por una familia de soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi y Laplace. En particular, mostramos que para el haz de Airy es posible dar una caracterización geométrica de todos los máximos de la Función de Densidad de probabilidad. Finalmente en el capítulo 5 introducimos la formulación de Madelung-Bhom de la mecánica cuántica y comparamos los ceros del potencial de Madelung-Bohm (es decir, las regiones más clásicas de una función de onda) con la cáustica.

Capítulo 3

Conceptos básicos de óptica geométrica

En la actualidad, es bien aceptado que la luz es de naturaleza electromagnética, y que sus propiedades, tales como el fenómeno de reflexión, refracción, interferencia, difracción, polarización y velocidad finita (por nombrar algunos), obedecen las ecuaciones de Maxwell. En su modelo más simple, la luz se representa como una onda armónica, caracterizada por su amplitud A (cuyo módulo al cuadrado es directamente proporcional a la intensidad), frecuencia ν , (rapidez con la que varía la onda en el tiempo) y número de onda k (rapidez de variación espacial). Los dos últimos satisfacen las siguientes expresiones:

$$\omega = 2\pi\nu, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad c = \lambda\nu, \quad (3.1)$$

donde ω es la frecuencia angular, λ la longitud de onda de la luz y c es la velocidad de la luz. La observación del fenómeno de difracción e interferencia ocurre bajo experimentos cuidadosos y controlados, en los cuales es necesario manipular aberturas u obstáculos (o realizar mediciones) en un rango de longitudes comparables a la longitud de onda de la luz. La mayor parte de los fenómenos de la luz a los que estamos expuestos, tales como el fenómeno de reflexión y refracción, así como la formación de imágenes, son fenómenos macroscópicos, y pueden entenderse desde un contexto geométrico.

Se entiende por aproximación geométrica al conjunto de ecuaciones, principios o leyes que describen la propagación de la luz, y que pueden deducirse de las ecuaciones de Maxwell en el límite $\lambda \rightarrow 0$. En la aproximación geométrica, la dirección del flujo de energía es paralela al vector tangente de las trayectorias de los rayos geométricos, y estos a su vez son ortogonales a los frentes de onda geométricos. Los rayos de luz pueden enfocarse dando lugar a regiones de alta intensidad, o cáusticas, las cuales son observables físicas macroscópicas. En un medio isótropo, caracterizado por su índice de refracción $n(\mathbf{r})$, la ecuación eikonal es la ecuación básica de óptica geométrica. Su solución, S , se conoce como función eikonal, y de ella pueden deducirse las leyes de reflexión y refracción. El campo vectorial ∇S determina la dirección del flujo de energía de la luz (dirección de los rayos) y los frentes de onda geométricos se definen como las curvas de nivel de S .

3.1. Deduccion de la ecuación eikonal

Debido a la presencia de cargas eléctricas, en cualquier punto del espacio existe un estado físico descrito por los campos vectoriales complejos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{H} , los cuales pueden transportar energía, y satisfacen las ecuaciones de Maxwell. Estos campos adquieren una expresión matemática simple en el vacío, o en medios materiales isótropos que están libres de cargas y corrientes. Además, es de esperarse que a distancias d muy lejanas a las fuentes de luz ($d \gg \lambda$), las ondas electromagnéticas puedan describirse localmente como una onda plana. Esto motiva a proponer como solución de prueba a los siguientes campos [16]

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}(\mathbf{r})e^{i(kS(\mathbf{r})-wt)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{h}(\mathbf{r})e^{i(kS(\mathbf{r})-wt)}, \quad (3.2)$$

los cuales transforman a las ecuaciones de Maxwell en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\nabla S \times \mathbf{h} + \epsilon \mathbf{e} = -\frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{h}, \quad (3.3)$$

$$\nabla S \times \mathbf{e} - \mu \mathbf{h} = -\frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{e}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{e} \cdot \nabla S = -\frac{1}{ik} (\mathbf{e} \cdot \nabla \ln \epsilon + \nabla \cdot \mathbf{e}), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{h} \cdot \nabla S = -\frac{1}{ik} (\mathbf{h} \cdot \nabla \ln \mu + \nabla \cdot \mathbf{h}). \quad (3.6)$$

Para obtener la aproximación geométrica, requerimos aplicar el límite $\lambda \rightarrow 0$, o equivalentemente el límite $k \rightarrow \infty$, lo cual nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\nabla S \times \mathbf{h} + \epsilon \mathbf{e} = 0, \quad (3.7)$$

$$\nabla S \times \mathbf{e} - \mu \mathbf{h} = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{e} \cdot \nabla S = 0, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{h} \cdot \nabla S = 0. \quad (3.10)$$

Es posible eliminar el campo vectorial \mathbf{h} de la ecuación (3.7) al sustituirlo por el de la expresión (3.8), lo cual resulta en lo siguiente:

$$\frac{1}{\mu} [(\mathbf{e} \cdot \nabla S) \nabla S - \mathbf{e} (\nabla S)^2] + \epsilon \mathbf{e} = 0. \quad (3.11)$$

Como debe satisfacerse la ecuación (3.9), lo anterior se reduce a

$$\mathbf{e} [(\nabla S)^2 - \mu \epsilon] = 0. \quad (3.12)$$

Ya que buscamos soluciones no triviales para los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} (ver (3.2)), es necesario que se satisfaga la siguiente ecuación diferencial para la función S , la cual ya no depende de \mathbf{e} y \mathbf{h} :

$$(\nabla S)^2 = n^2(\mathbf{r}), \quad (3.13)$$

donde $n = \sqrt{\mu \epsilon}$ es el índice de refracción del medio. La expresión anterior se conoce como la ecuación eikonal, y es la ecuación básica de la óptica geométrica. A la función que satisface

CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA

3.2. ONDAS PLANAS

la ecuación (3.13) se le conoce como función eikonal. En forma análoga, si eliminamos el campo vectorial \mathbf{e} de la ecuación (3.8) usando la expresión (3.7), recuperamos la ecuación eikonal. La dirección del flujo de energía electromagnética se determina con el vector de Poynting \mathbf{P} , el cual se calcula como sigue:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (3.14)$$

En la aproximación geométrica, el vector de Poynting es proporcional al gradiente de la función eikonal, el cual es un campo vectorial ortogonal a los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} , como puede observarse de las ecuaciones (3.2), (3.9) y (3.10). Por lo tanto, las curvas integrales del campo vectorial ∇S se definen como los rayos de luz, y las curvas de nivel de la función eikonal:

$$S(\mathbf{r}) = \text{constante}, \quad (3.15)$$

se definen como los frentes de onda geométricos.

3.2. Ondas planas

En el contexto de óptica geométrica, cualquier frente de onda se comporta, localmente, como un frente de onda plano (excepto posiblemente en la cáustica, donde los frentes de onda pueden desarrollar singularidades, como veremos en la sección 1.4). En el espacio bidimensional \mathbb{R}^2 , la función eikonal que representa a toda la familia de ondas planas propagándose en un medio isótropo y homogéneo con índice de refracción n , es

$$S(x, y, \varphi, g) = n(x \cos \varphi + y \sin \varphi) - ng, \quad (3.16)$$

donde φ y g son constantes de integración. El parámetro φ determina la dirección de propagación de la onda plana como se muestra en la siguiente expresión:

$$\frac{\nabla S}{n} = \hat{\mathbf{r}}(\varphi), \quad (3.17)$$

donde $\hat{\mathbf{r}}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ es el vector unitario radial de las coordenadas polares. En las figuras 3.1(a) y 3.1(b) se muestran los frentes de onda planos para valores particulares de φ . De las expresiones (3.2) para los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} , queda claro que el papel de la constante aditiva g es introducir un desplazamiento en la fase de la onda; en la aproximación geométrica, esto se traduce en que la distancia más cercana entre el frente de onda $S = \mathcal{C}(= \text{constante})$ y el origen es proporcional a g .

En el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 , las coordenadas esféricas nos permiten generalizar los resultados (3.16) y (3.17). La función eikonal correspondiente a la familia de ondas planas es

$$S(x, y, z, \theta, \phi, g) = n(x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi + z \cos \theta) - ng, \quad (3.18)$$

CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA
3.3. EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN GEOMÉTRICO

con dirección de propagación dada por

$$\frac{\nabla S}{n} = \hat{\rho}(\theta, \phi), \quad (3.19)$$

donde $\hat{\rho}(\theta, \phi) = (\text{sen } \theta \cos \phi, \text{sen } \theta \text{sen } \phi, \cos \theta)$ es el vector unitario radial de las coordenadas esféricas. El dominio de los parámetros φ y g para una onda que se propaga en \mathbb{R}^2 , y θ, ϕ y g para una onda que se propaga en \mathbb{R}^3 , está en el conjunto de los números reales \mathbb{R} . El rango de valores apropiado para cada parámetro, por lo general, depende de la geometría del medio de propagación. Podemos definir subconjuntos de ondas planas proponiendo a g como una función de las demás constantes de integración ($g = g(\varphi)$ en \mathbb{R}^2 , $g = g(\theta, \phi)$ en \mathbb{R}^3). Si g es una función continua, entonces la distancia más corta entre el origen y el frente de onda $S = C$ varía en forma continua al modificar en forma continua la dirección de propagación de la onda. En la siguiente sección mostraremos que la envolvente de estos subconjuntos de frentes de onda generan nuevos frentes de onda cuya geometría depende de la naturaleza de la función g .

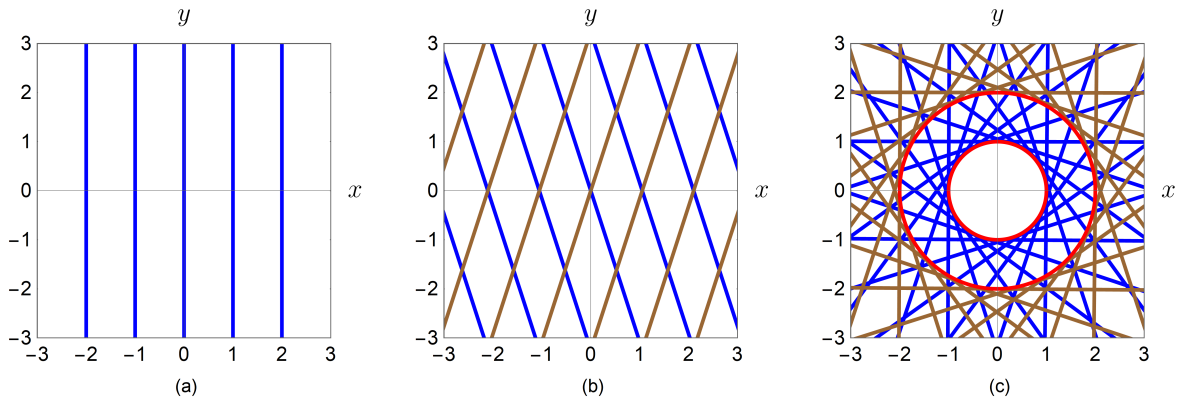


Figura 3.1: (a) Curvas de nivel de la ecuación (3.16) para los valores $C/n = -3, -2, \dots, 2, 3$, donde se ha considerado $g = 0$, y $\varphi = 0$. En (b) se muestran los mismos frentes de onda pero con dirección de propagación $\varphi = \pi/10$ (líneas azul) y $\varphi = -\pi/10$ (líneas café). En (c) se muestra la construcción geométrica de los frentes de onda circulares que resultan de la envolvente de la familia uniparamétrica de frentes de onda de la ecuación (3.26) con $g = 0$, para los casos particulares $C/n = 1$ (líneas azul) y $C/n = 2$ (líneas café).

3.3. El principio de superposición geométrico

La ecuación eikonal es una ecuación de primer grado no lineal en derivadas parciales. Una solución completa de la ecuación (3.13) debe contener tantas constantes arbitrarias (o parámetros) como variables independientes. Cabe señalar que, en un medio isótropo y homogéneo, una de estas constantes siempre será aditiva, y la definiremos como $-ng$. En \mathbb{R}^3 se requieren dos constantes arbitrarias adicionales, que denotaremos por ϑ y φ .

Vamos a definir un subconjunto de familias de frentes de onda S de tal forma que

CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA
3.3. EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN GEOMÉTRICO

la constante g sea una función continua y dos veces derivable con respecto a los parámetros restantes, es decir, $g = g(\vartheta, \varphi)$ y $S = S(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi)$. En estas condiciones, al variar infinitesimalmente los parámetros (ϑ, φ) , los frentes de onda que satisfacen $S(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi) = \mathcal{C}$ son superficies infinitesimalmente adyacentes que generan una nueva superficie, resultado de su envolvente. La superficie envolvente debe satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S = \mathcal{C}, \quad \frac{\partial S}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.20)$$

De las dos últimas ecuaciones de la expresión anterior, podemos despejar a los parámetros (ϑ, φ) en función de las coordenadas espaciales \mathbf{r} . La superficie envolvente entonces debe satisfacer la ecuación $\tilde{S} = \mathcal{C}$, donde hemos definido

$$\tilde{S}(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}, \vartheta(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r})). \quad (3.21)$$

En coordenadas cartesianas, las componentes del gradiente $\nabla \tilde{S}$ son

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x_i} = \frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (3.22)$$

donde $i = 1, 2, 3$, y $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$. De las ecuaciones (3.20), lo anterior se reduce a

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x_i} = \frac{\partial S}{\partial x_i}. \quad (3.23)$$

Como S es solución de la ecuación eikonal, de las ecuaciones (3.13) y (3.23) es claro que \tilde{S} también satisface la ecuación eikonal.

Este procedimiento para construir nuevas soluciones \tilde{S} de la ecuación eikonal es el análogo del principio de superposición en física, cuando las ecuaciones que rigen el problema son lineales. En este sentido llamaremos al método de la envolvente el *principio de superposición geométrico*.

En forma análoga, para un subconjunto de familias de frentes de onda S de \mathbb{R}^2 (o equivalentemente, para una familia uniparamétrica de soluciones S de la ecuación eikonal en \mathbb{R}^3) definida de tal forma que la constante aditiva, g sea función continua y dos veces derivable con respecto al parámetro restante φ , es decir $g = g(\varphi)$, su curva envolvente se obtiene del siguiente sistema de ecuaciones:

$$S = \mathcal{C}, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.24)$$

De la última ecuación de las expresiones (3.24), podemos obtener a la función $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ y, por lo tanto, definimos a la función \tilde{S} como

$$\tilde{S}(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}, \varphi(\mathbf{r})). \quad (3.25)$$

Es claro que la expresión (3.25) también satisface la ecuación eikonal.

3.3.1. Superposición de frentes de onda planos en \mathbb{R}^2

De acuerdo con la ecuación (3.16), la función eikonal que representa una familia uniparamétrica de ondas planas en \mathbb{R}^2 es

$$S(x, y, \varphi) = n(x \cos \varphi + y \sin \varphi) - ng(\varphi). \quad (3.26)$$

donde φ es la coordenada angular de las coordenadas polares. De las ecuaciones (3.24), un cálculo directo muestra que la forma paramétrica de los frentes de onda de \tilde{S} es la siguiente

$$x(\varphi, \mathcal{C}) = (C/n + g) \cos \varphi - \frac{dg}{d\varphi} \sin \varphi, \quad y(\varphi, \mathcal{C}) = (C/n + g) \sin \varphi + \frac{dg}{d\varphi} \cos \varphi. \quad (3.27)$$

Frente de onda circular y pseudoelíptico

Para el caso especial $g(\varphi) = \text{constante}$, las ecuaciones (3.27) satisfacen la siguiente expresión

$$x^2(\varphi, \mathcal{C}) + y^2(\varphi, \mathcal{C}) = (C/n + g)^2. \quad (3.28)$$

Es decir, el principio de superposición geométrico de esta familia de frentes de onda resulta en frentes de onda circulares con centro en el origen de coordenadas. En la figura 3.1 (c) se muestra gráficamente la construcción geométrica de estos nuevos frentes de onda. Por otro lado, si $g(\varphi) \neq \text{constante}$, entonces los nuevos frentes de onda corresponden a deformaciones de círculos. Consideremos, por ejemplo, la función $g(\varphi) = -a \sin^2 \varphi$, donde a es una constante real arbitraria distinta de cero. La forma paramétrica de la envolvente de la familia de frentes de onda es la siguiente

$$x(\varphi, \mathcal{C}) = \cos \varphi (C/n + a \sin^2 \varphi), \quad y(\varphi, \mathcal{C}) = \sin \varphi (C/n + a \sin^2 \varphi - 2a). \quad (3.29)$$

En la figura 3.2 mostramos la construcción geométrica del nuevo frente de onda (pseudoeclipse) y su evolución en \mathbb{R}^2 (variación continua de \mathcal{C}). Es importante señalar que los nuevos frentes de onda pueden contener puntos singulares, los cuales a su vez se encuentran sobre una curva (o superficie en el caso de \mathbb{R}^3) que se conoce como cáustica, como mostraremos en la siguiente sección.

3.4. La región cáustica

La región cáustica es una de las predicciones más importantes de la óptica geométrica: sobre ella se concentran los rayos de luz, y su detección experimental confirma la validez de la aproximación geométrica en un sistema óptico [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]. Su estructura determina la estabilidad de la onda ante pequeñas perturbaciones [34, 35, 36], y su posición en el espacio determina la topología de la imagen detectada por un observador debido a un objeto [37, 38, 39, 40, 41], donde el observador

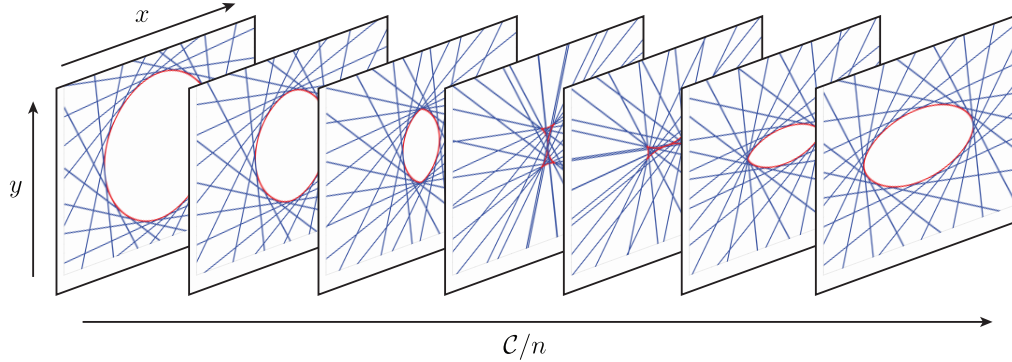


Figura 3.2: Construcción geométrica del frente de onda pseudoelíptico (curva roja) y su evolución en \mathbb{R}^2

se modela como una fuente puntual (virtual) de rayos. En la figura 3.3 mostramos la curva cáustica generada por la reflexión de una onda plana sobre una superficie circular en un medio homogéneo. Como puede observarse de la figura 3.3(a), la cáustica es la curva generada por la envolvente de los rayos. En un medio homogéneo, las singularidades de los frentes de onda geométricos generan esta curva, como podemos observar de la figura 3.3(b). En la figura 3.3(c) se muestra el patrón de intensidad.

3.4.1. Cálculo de la cáustica a partir de la forma paramétrica de los frentes de onda geométricos

En la sección anterior mostramos que las ecuaciones (3.27) representan la forma paramétrica de los frentes de onda que resultan de la superposición geométrica de una familia de frentes de onda planos en \mathbb{R}^2 . Vamos a considerar que g es una función arbitraria, continua y dos veces derivable con respecto al parámetro φ . La curva cáustica puede calcularse a través de la siguiente definición:

Definición: Sea $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un mapeo diferencial, siendo \mathcal{M} y \mathcal{N} variedades diferenciables. El conjunto de puntos en \mathcal{M} donde h no es un mapeo uno a uno localmente se le llama conjunto crítico, y a la imagen del conjunto crítico se le llama conjunto cáustico [42].

Las ecuaciones (3.27) representan un mapeo de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 , donde (φ, \mathcal{C}) son las coordenadas del conjunto dominio, y (x, y) son las coordenadas del conjunto imagen. El conjunto crítico puede obtenerse solicitando que el determinante jacobino del mapeo (3.27) sea igual a cero, es decir

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \mathcal{C})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \mathcal{C}} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \mathcal{C}} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.30)$$

Un cálculo directo muestra que el conjunto crítico satisface la siguiente ecuación

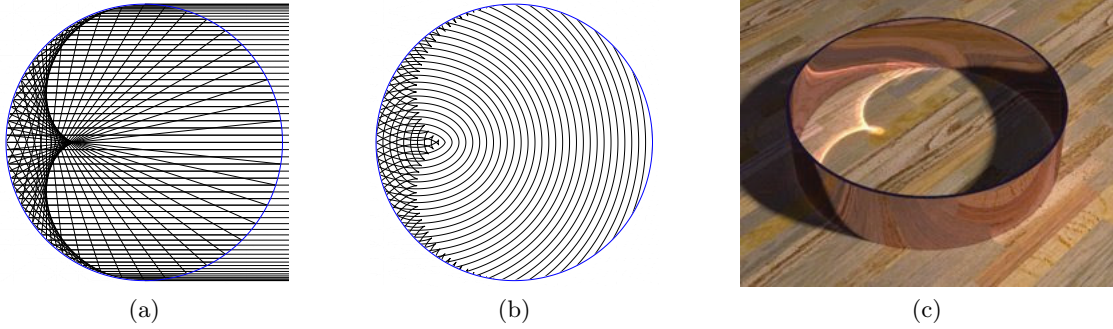


Figura 3.3: (a) Rayos incidentes y reflejados por una superficie circular. (b) Frentes de onda reflejados. (c) Patrón de intensidad.

$$\mathcal{C}(\varphi) = -n \left(\frac{d^2 g}{d\varphi^2} + g \right). \quad (3.31)$$

Por lo tanto, la forma paramétrica de la cáustica se obtiene de sustituir la expresión anterior en las ecuaciones (3.27):

$$x_c(\varphi) = x(\varphi, \mathcal{C}(\varphi)) = - \left(\frac{d^2 g}{d\varphi^2} \cos \varphi + \frac{dg}{d\varphi} \operatorname{sen} \varphi \right), \quad (3.32)$$

$$y_c(\varphi) = y(\varphi, \mathcal{C}(\varphi)) = - \left(\frac{d^2 g}{d\varphi^2} \operatorname{sen} \varphi - \frac{dg}{d\varphi} \cos \varphi \right). \quad (3.33)$$

Frente de onda circular y pseudoelíptico

En la figura 3.1(c) mostramos la construcción geométrica de los frentes de onda circulares a partir de frentes de onda planos en \mathbb{R}^2 , en un medio isótropo y homogéneo. La región de enfocamiento de los rayos (rectas perpendiculares a los frentes de onda) es un punto ubicado en el centro de las circunferencias. En la sección anterior vimos que $g = \text{constante}$ genera los frentes de onda circulares, con centro en el origen de coordenadas. De las ecuaciones (3.32) y (3.33), es claro que el origen de coordenadas coincide con la posición de la cáustica.

Los frentes de onda pseudoelípticos presentados en la sección anterior (ver figura 3.2) fueron generados con la función $g(\varphi) = -a \sin^2 \varphi$. De acuerdo con las ecuaciones (3.32) y (3.33), la forma paramétrica de la cáustica es la siguiente

$$x_c(\varphi) = 2a \cos^3 \varphi, \quad y_c(\varphi) = -2a \sin^3 \varphi. \quad (3.34)$$

En la figura 3.4 se muestra la cáustica y la evolución del frente de onda pseudoelíptico. Como podemos observar, las singularidades del frente de onda generan la cáustica.

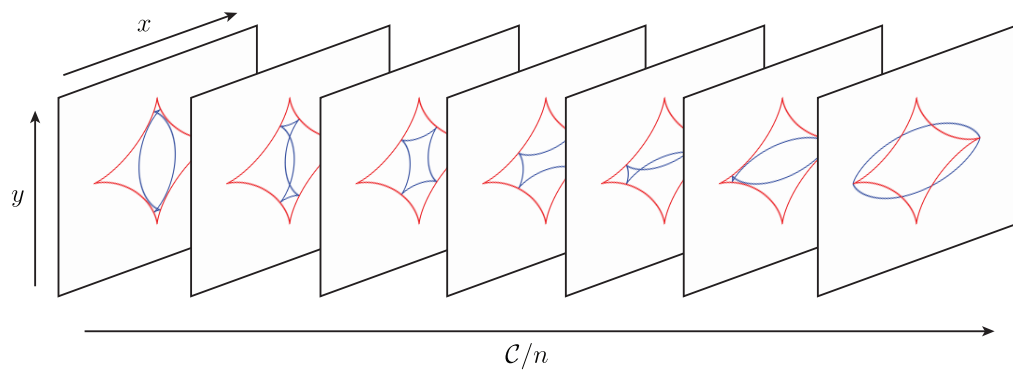


Figura 3.4: Evolución del frente de onda pseudoelíptico en \mathbb{R}^2 (curva azul) y su cóustica (curva roja).

Capítulo 4

Haces adifraccionales

El fenómeno de difracción es una propiedad inherente en la propagación de ondas electromagnéticas. En términos simples, la difracción es cualquier desviación observable de la luz con respecto a los rayos geométricos, o frentes de onda geométricos. Por ejemplo, en la aproximación geométrica es intuitivo trazar la frontera entre la región de luz y sombra sobre una pantalla debido a un orificio circular que permite el paso de luz proveniente de una fuente puntual. Sin embargo, en la región de sombra y cerca de la frontera pueden detectarse una serie de máximos y mínimos de intensidad en forma de anillos (efectos de difracción). De hecho, existe un límite para el diámetro sobre el cual puede confinarse la mayor parte de la luz, descrito por el disco de Airy. El fenómeno de difracción, por lo tanto, restringe el poder de resolución de un sistema óptico.

Los efectos de difracción surgen incluso en haces que se propagan libremente, sin presencia de aperturas u obstáculos, como en el caso de los haces gaussianos, cuyo perfil de intensidad describe la mayoría de los láseres, y cuyo diámetro del haz diverge en función de la distancia en forma significativa después de la región de Rayleigh. Igualmente, es de esperarse que el efecto de difracción sea fuerte si el ancho del haz es comparable con la longitud de onda de la luz.

El concepto de haz adifraccional fue introducido por primera vez por Durnin en 1987 [3]. De acuerdo con su publicación, un haz adifraccional es una onda monocromática que satisface la ecuación escalar de onda cuyo perfil de intensidad transversal permanece invariante durante su propagación. Una propiedad interesante de estos haces es que pueden tener un perfil de intensidad extremadamente estrecho con un ancho comparable con la longitud de onda de la luz sin presentar efectos de difracción [4], además, tienen la capacidad de auto reconstruirse durante su propagación al ser bloqueados por un obstáculo.

La solución a la ecuación escalar de onda que describe la propagación de un haz adifraccional que se propaga a lo largo del eje z debe ser de la forma

$$\psi = u(x, y) \exp [i(\beta z - \omega t)], \quad (4.1)$$

donde $u(x, y)$ es una función compleja que no depende de la coordenada z , y por lo

CAPÍTULO 4. HACES ADIFRACCIONALES

4.1. LA ECUACIÓN ESCALAR DE ONDA

tanto su perfil de intensidad, $I = |\psi|^2/2$, tampoco. Si bien la ecuación escalar de onda es separable en 11 sistemas coordenados, solo 4 satisfacen el requisito de los haces adifraccionales: coordenadas cartesianas, coordenadas cilíndricas circulares, coordenadas cilíndricas parabólicas y coordenadas cilíndricas elípticas.

Los haces adifraccionales más estudiados son los haces Bessel, los cuales también son el caso más simple de un vórtice óptico. Las trayectorias de Poynting para este tipo de haces son hélices que viven sobre superficies cilíndricas [7], cuyo centro coincide con el eje de simetría del haz. Por lo tanto, estos haces tienen asociado un momento angular orbital. Por su capacidad de autoreconstrucción y de transmitir momento angular orbital, este haz es ideal para la manipulación de micro partículas, inclusive en diferentes planos transversales[8].

La forma integral de los haces adifraccionales que se propagan en el vacío es la siguiente [3]

$$\psi(x, y, z, t) = e^{i(\beta z - \omega t)} \int_0^{2\pi} A(\varphi) e^{i\alpha(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} d\varphi, \quad (4.2)$$

donde α y β pertenecen a los números reales y satisfacen $\alpha^2 + \beta^2 = (\omega/c)^2$, y $A(\varphi)$ es una función compleja arbitraria. La expresión (4.2) representa la superposición continua de frentes de onda planos cuyos vectores de propagación forman una superficie cónica. La amplitud y fase relativa de cada onda plana depende de la función $A(\varphi)$, la cual determina el perfil de intensidad del haz adifraccional. Dado que los frentes de onda planos que componen el haz adifraccional son de extensión infinita y de amplitud constante, un haz adifraccional ideal debe transportar una cantidad infinita de energía a través de su sección transversal de propagación, lo cual en la práctica es imposible. Sin embargo, se ha demostrado experimentalmente y numéricamente que es posible reproducir las propiedades de estos haces en regiones finitas del espacio. Dentro de los métodos experimentales más conocidos para generar los haces pseudo-adifraccionales están la difracción de la luz por una apertura anular, refracción de la luz por una lente axicon, y la holografía [43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51].

4.1. La ecuación escalar de onda

A partir de las ecuaciones de Maxwell, puede mostrarse que en un medio homogéneo e isotrópico libre de cargas y corrientes los campos vectoriales complejos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{H} satisfacen en forma separada una ecuación de onda [16]

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}, \quad (4.3)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

CAPÍTULO 4. HACES ADIFRACCIONALES

4.1. LA ECUACIÓN ESCALAR DE ONDA

Si la polarización de la onda electromagnética es lineal, o una de las componentes cartesianas del campo eléctrico es dominante, entonces podemos concentrarnos en estudiar solamente a la ecuación escalar de onda

$$\nabla^2 \psi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (4.5)$$

donde ψ describe la componente dominante de los campos vectoriales, y $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ es el índice de refracción del medio.

4.1.1. Análisis geométrico de la función escalar de onda

Es de esperarse que a distancias lejanas de fuentes o de regiones de enfocamiento de la luz, las ondas electromagnéticas puedan describirse localmente como un frente de onda plano. Por lo tanto proponemos como solución a la ecuación escalar de onda al siguiente campo escalar:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{i(kS(\mathbf{r}) - \omega t)}, \quad (4.6)$$

donde vamos a considerar que S es una función real. Es fácil mostrar que la expresión anterior satisface las siguientes identidades:

$$\nabla^2 \psi = \psi (ik\nabla^2 S - k^2(\nabla S)^2), \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\psi \omega^2. \quad (4.8)$$

En consecuencia, al sustituir la expresión (4.6) en la ecuación escalar de onda, se obtiene lo siguiente:

$$\psi \left[(n^2 - (\nabla S)^2) + i \frac{\nabla^2 S}{k} \right] = 0, \quad (4.9)$$

donde hemos aplicado que $(\omega/c) = k$, como puede mostrarse de las ecuaciones (3.1). Como el campo escalar (4.6) es en general distinto de cero, es necesario que la función S satisfaga la ecuación eikonal y la ecuación de Laplace en forma simultánea, es decir:

$$(\nabla S)^2 = n^2, \quad \nabla^2 S = 0. \quad (4.10)$$

Bajo estas condiciones, decimos que el campo escalar (4.6) está caracterizado geométricamente por la función eikonal S .

El principio de superposición

Una solución completa de la ecuación eikonal, S , que satisface simultáneamente la ecuación de Laplace, genera una solución a la ecuación escalar de onda a través de la expresión

CAPÍTULO 4. HACES ADIFRACCIONALES

4.1. LA ECUACIÓN ESCALAR DE ONDA

(4.6); tal solución debe contener tantas constantes arbitrarias (o parámetros) como variables independientes, siendo una de ellas aditiva. Vamos a definir una familia particular de soluciones a la ecuación eikonal en \mathbb{R}^3 de tal forma que la constante aditiva, g , sea dependiente de las otras dos constantes de integración, (ϑ, φ) , es decir, $g = g(\vartheta, \varphi)$ y por lo tanto $S = S(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi)$. En estas condiciones la función

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathcal{D}} A(\vartheta, \varphi) e^{i(kS(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi) - \omega t)} d\vartheta d\varphi, \quad (4.11)$$

donde \mathcal{D} es una variedad bidimensional, y $A(\vartheta, \varphi)$ es una función compleja y arbitraria, es una solución exacta de la ecuación escalar de onda, ya que la ecuación (4.5) es una ecuación diferencial lineal, y por lo tanto, el principio de superposición es aplicable.

El campo escalar Ψ de la ecuación (4.11) está integrado por una familia biparamétrica de soluciones de la ecuación escalar de onda caracterizadas geoméricamente por la función eikonal $S(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi)$. Para caracterizar geoméricamente a Ψ , vamos a asociarle la función eikonal \tilde{S} que resulta del principio de superposición geométrico estudiado en la sección 1.3. Cabe señalar que, de acuerdo con las ecuaciones (3.20), el nuevo frente de onda geométrico es el resultado de la envolvente de la familia de frentes de onda que tienen la misma fase $S(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi) = \mathcal{C}$, por lo tanto, resulta intuitivo que \tilde{S} caracterice geoméricamente al campo escalar (4.11).

Aspectos importantes de la caracterización geométrica vs la aproximación geométrica

Es bien importante señalar que para obtener la caracterización geométrica de los campos escalares (4.6) y (4.11) no fue necesario aplicar el límite $\lambda \rightarrow 0$. Esto significa que, a diferencia de la aproximación geométrica estudiada en el capítulo 1, la función eikonal \tilde{S} puede depender de la longitud de onda de la luz a través del número de onda k (ver ecuaciones (3.1)), lo cual tiene sentido, ya que es de esperarse que la distribución de energía en el patrón de intensidad dependa de λ . Esta situación ocurre, por ejemplo, cuando la función $A(\vartheta, \varphi)$ es una función compleja, entonces su fase correspondiente puede añadirse a la función $g(\vartheta, \varphi)$ llevándose consigo el coeficiente $1/k$.

Como ya habíamos mencionado en la sección 1.4, la correspondencia cualitativa entre el máximo (o distribución de máximos) del patrón de intensidad con la curva cáustica confirmará la validez de la aproximación geométrica o caracterización geométrica de la luz (ver figura 3.3).

Es claro que el patrón de intensidad del campo escalar (4.11) proyectado sobre una pantalla plana depende de las propiedades de las funciones $A(\vartheta, \varphi)$ y $S(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi)$. Sin embargo, el principio de superposición geométrico a lo más toma en cuenta la fase de la función $A(\vartheta, \varphi)$ e ignora las propiedades de la parte radial de esta función. Sería interesante investigar bajo qué condiciones, si es que existen, podríamos añadir esta información en una descripción geométrica “generalizada” de una función de onda.

Así, es de esperarse que si el campo escalar (4.11) está completamente determinado por la función eikonal S (es decir $|A(\vartheta, \varphi)|^2 = \text{constante}$), entonces la asociación de la función

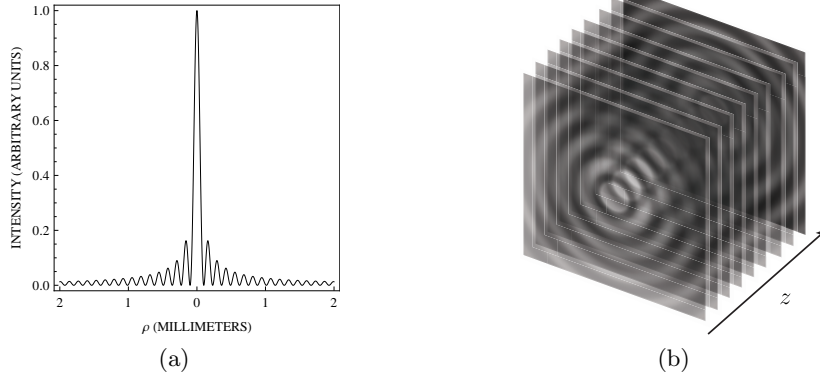


Figura 4.1: (a) Distribución de intensidad del haz Bessel de orden cero. (b) Perfil de intensidad del haz Bessel de orden cero. El patrón de intensidad transversal permanece invariante ante traslaciones a lo largo del eje z . En estos gráficos hemos considerado $\alpha = 24,05\text{mm}^{-1}$, como en el artículo de Durnin.

eikonal \tilde{S} con el campo escalar (4.11) es correcta. Fuera de esta condición, solo podemos confirmar la validez de nuestro modelo geométrico comprobando si existe una correlación cualitativa entre la cáustica y el patrón de intensidad.

4.2. Haces Bessel

Los haces Bessel son de los haces adifraccionales más estudiados teóricamente, numéricamente y experimentalmente, ya que por sus propiedades, como su vorticidad y capacidad de autoreconstrucción, son ideales para la manipulación de micropartículas. La expresión analítica de estos haces en coordenadas cilíndricas circulares es la siguiente:

$$\Psi_m(\mathbf{r}, t) = J_m(\alpha r) e^{i(\beta z + m\theta - \omega t)}, \quad (4.12)$$

donde $J_m(\cdot)$ es la función de Bessel de orden m , y $\alpha^2 + \beta^2 = (\omega/c)^2 = k$. En la figura 4.1 ilustramos la distribución de intensidad transversal de haz Bessel de orden cero, así como su propiedad de invariancia a lo largo del eje z . La descomposición de estos haces en términos de ondas planas que se propagan en el vacío es la siguiente:

$$\Psi_m(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im(\varphi - \pi/2)} e^{i(\mathbf{k}r \cdot \hat{\rho}(\theta_0, \varphi) - \omega t)} d\varphi, \quad (4.13)$$

donde $\hat{\rho}(\theta_0, \varphi) = (\sin \theta_0 \cos \varphi, \sin \theta_0 \sin \varphi, \cos \theta_0)$ es el vector unitario radial de las coordenadas esféricas, y por lo tanto, para recuperar la expresión (4.12), se requiere que $\alpha = k \sin \theta_0$ y $\beta = k \cos \theta_0$. Al comparar la ecuación (4.11) con la expresión anterior, identificamos que la función $A(\varphi)$ es la siguiente

$$A(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{im(\varphi - \pi/2)}. \quad (4.14)$$

CAPÍTULO 4. HACES ADIFRACCIONALES

4.2. HACES BESSEL

Como $|A(\varphi)|^2 = 1/4\pi^2 = \text{constante}$, es de esperarse que \tilde{S} caracterice geoméricamente a estos haces adecuadamente. Al reabsorber la fase de la función $A(\varphi)$ en la fase total del integrando de la expresión (4.13), podemos identificar a la función S como lo siguiente:

$$S(\mathbf{r}, \varphi) = \mathbf{r} \cdot \hat{\rho}(\theta_0, \varphi) + \frac{m}{k} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right). \quad (4.15)$$

Es fácil mostrar que la expresión anterior satisface las ecuaciones (4.10), por lo tanto, $S(\mathbf{r}, \varphi)$ es una función eikonal. Las direcciones de propagación de la familia de frentes de onda planos es

$$\nabla S(\mathbf{r}, \varphi) = \hat{\rho}(\theta_0, \varphi), \quad (4.16)$$

los cuales forman una superficie cónica de apertura θ_0 , característica necesaria y suficiente para la generación de haces adifraccionales.

La función eikonal (4.15) representa a una familia uniparamétrica de frentes de onda planos, por lo tanto, las expresiones que obtuvimos en las subsecciones **1.3.1** y **1.4.1** se aplican a los haces Bessel. Al comparar la expresión (4.15) con la función eikonal (3.26) es claro que antes debemos tomar en cuenta las siguientes correspondencias:

$$x \sin \theta_0 \longleftrightarrow x, \quad (4.17)$$

$$y \sin \theta_0 \longleftrightarrow y, \quad (4.18)$$

$$\mathcal{C} - z \cos \theta_0 \longleftrightarrow \mathcal{C}, \quad (4.19)$$

$$-\frac{m}{k} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \longleftrightarrow g(\varphi). \quad (4.20)$$

En estas condiciones, la forma paramétrica de los frentes de onda de \tilde{S} es (ver ecuaciones (3.27)):

$$\tilde{x}(\varphi, \tilde{\mathcal{C}}) = \left(\tilde{\mathcal{C}} - m(\varphi - \pi/2) - \tilde{z} \right) \cos \varphi + m \sin \varphi, \quad (4.21)$$

$$\tilde{y}(\varphi, \tilde{\mathcal{C}}) = \left(\tilde{\mathcal{C}} - m(\varphi - \pi/2) - \tilde{z} \right) \sin \varphi - m \cos \varphi, \quad (4.22)$$

$$\tilde{z}(\varphi, \tilde{\mathcal{C}}) = \tilde{z}, \quad (4.23)$$

y la cáustica satisface (ver ecuaciones (3.32) y (3.33)):

$$\tilde{\rho} = m, \quad (4.24)$$

donde hemos definido $\tilde{x} = kx \sin \theta_0$, $\tilde{y} = ky \sin \theta_0$, $\tilde{z} = kz \cos \theta_0$, $\tilde{\mathcal{C}} = k\mathcal{C}$, y $\tilde{\rho}^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$. Como podemos observar de la figura 4.2, los frentes de onda del haz Bessel de orden cero son superficies cónicas cuyo vértice se encuentra sobre su cáustica (línea recta sobre el eje z) caracterizando en forma cualitativa y cuantitativa el máximo supremo del patrón de intensidad. Si el haz Bessel es de orden $m > 0$, entonces los frentes de onda geométricos

CAPÍTULO 4. HACES ADIFRACCIONALES

4.2. HACES BESSEL

son deformaciones de superficies cónicas, y la superficie cáustica es una superficie cilíndrica circular de radio m cuyo eje de simetría coincide con el eje z ; para estos haces, la sección transversal de la cáustica caracteriza sólo en forma cualitativa el máximo supremo del patrón de intensidad, que es lo que se esperaba. En contraste, si tomamos en cuenta el límite $\lambda \rightarrow 0$ (o equivalentemente $k \rightarrow \infty$), entonces la expresión (4.15) pierde su dependencia en m . Esto significa que en el límite geométrico todo el conjunto de los haces Bessel comparten los mismos frentes de onda geométricos y cáustica que el haz Bessel de orden cero. Concluimos que el modelo geométrico estudiado en este capítulo es el más adecuado para la caracterización geométrica de estos haces.

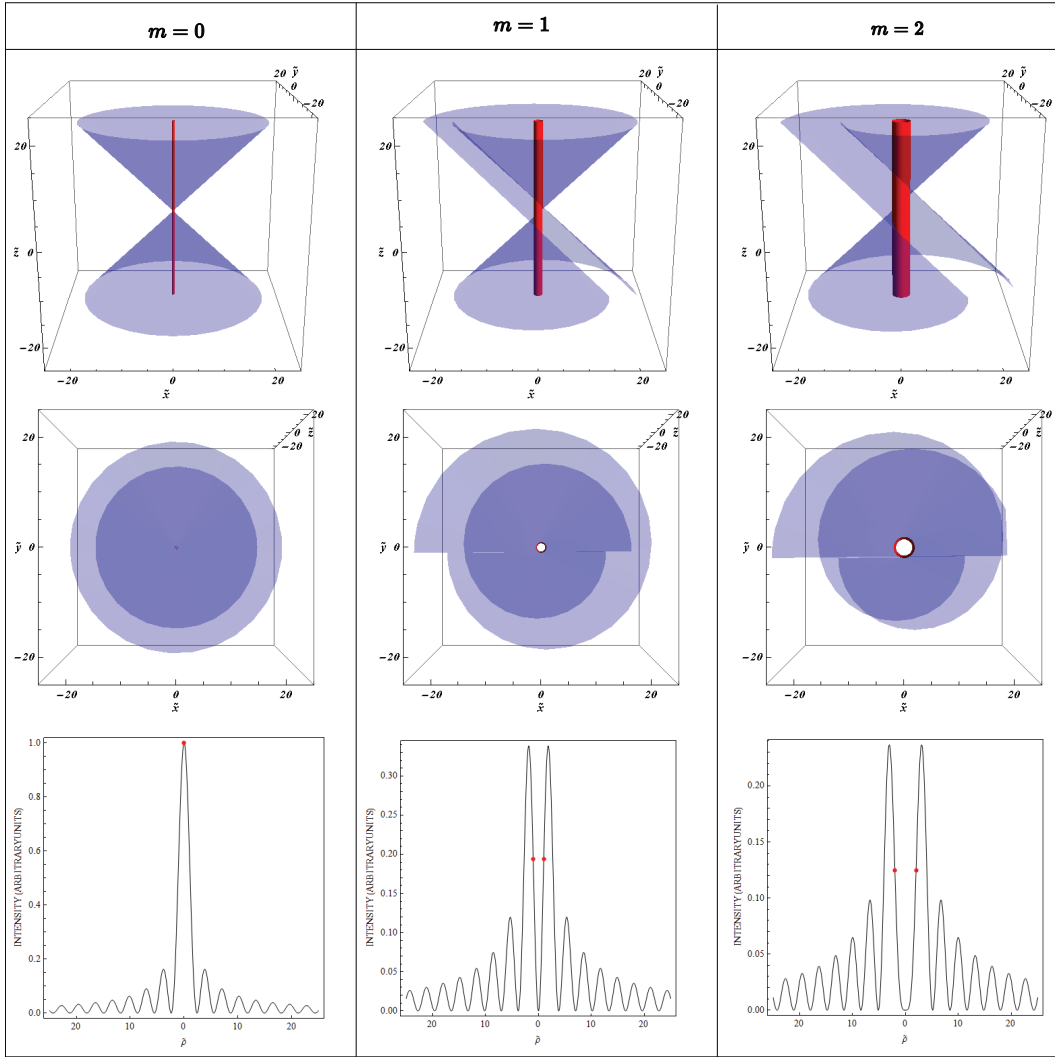


Figura 4.2: Se ilustran los frentes de onda (azul) y conjunto cáustico (rojo) de los haces Bessel, junto con su perfil de intensidad.

Haces Bessel modificados

Para tener una idea del efecto que puede tener la función A (ver ecuaciones (4.2) y (4.11)) sobre el patrón de intensidad, consideremos a las siguientes funciones:

$$S(\mathbf{r}, \varphi) = \mathbf{r} \cdot \hat{\rho}(\theta_0, \varphi) + \frac{m}{k} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right), \quad A(\varphi) = \frac{i}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial x}. \quad (4.25)$$

Es fácil mostrar que la expresión analítica del campo escalar (4.11) puede calcularse de la siguiente manera:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial x} J_m(\alpha \rho) e^{i(\beta z + m\theta - \omega t)}. \quad (4.26)$$

Si bien la caracterización geométrica del campo escalar (4.26) es la misma que la de los haces Bessel (compare (4.15) y (4.25)), la cáustica ya no caracteriza cualitativamente al patrón de intensidad como podemos observar en la figura 4.3. Sería interesante investigar si existe un modelo geométrico para haces cuya amplitud A este determinada por la función eikonal S . Por otro lado, los haces adifraccionales parabólicos y algunos haces Mathieu son ejemplos para los cuales la cáustica caracteriza la distribución de máximos del patrón de intensidad y que no cumplen la condición $|A|^2 = \text{constante}$.

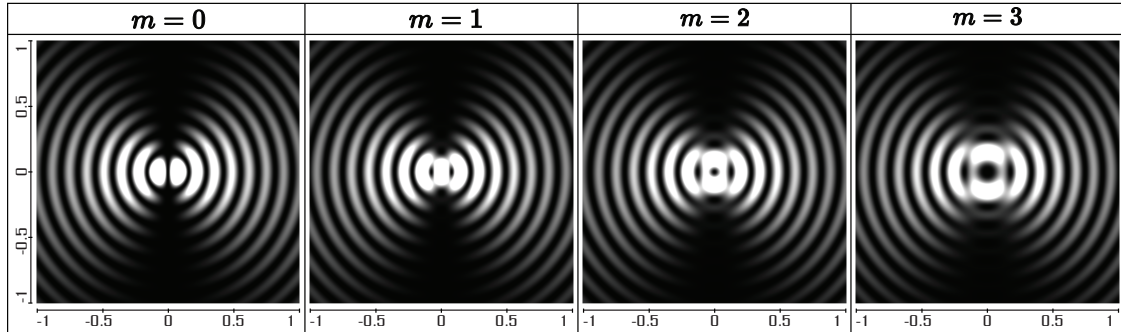


Figura 4.3: Patrón de intensidad del campo escalar (4.26). Hemos considerado $\alpha = 24,05\text{mm}^{-1}$. Las unidades correspondientes de los gráficos son milímetros.

Capítulo 5

Teoría de catástrofes

En la aproximación geométrica, la región cóustica posee realidad física en el sentido de que caracteriza cualitativamente a la región del espacio donde el campo óptico es más brillante. Asimismo, la cóustica es un ejemplo de catástrofe, ya que es la singularidad de una transformación geométrica de un frente de onda inicial, $\Phi = C_i$ (=constante), a un frente de onda final, $\Phi = C_f$ (=constante), donde Φ es una función real que satisface $|\nabla\Phi|^2 = n^2$ [34].

En el lenguaje de teoría de catástrofes, al campo escalar $\Phi(\mathbf{r}; \mathbf{s})$ que satisface una ecuación de la forma $|\nabla\Phi|^2 = n^2$ se le llama función generatriz, a las componentes de $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots)$ se les llama variables de estado y a las componentes de \mathbf{r} se les llama parámetros de control, los cuales también se denotan por $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots)$ y cuyo número de parámetros define la codimensión K , es decir, $\mathbf{r} = \mathbf{C}$. Por lo tanto, la función generatriz se representa como

$$\Phi = \Phi(\mathbf{C}; \mathbf{s}). \quad (5.1)$$

Un resultado importante de la teoría de catástrofes es la clasificación de singularidades estables, elaborada por Thom, y posteriormente extendida por Arnold. Es decir, existe un conjunto de cóusticas cuya estructura no se modifica significativamente ante pequeñas perturbaciones [52]. En la tabla 5.1 se muestra esta clasificación para funciones generatrices de codimensión $K \leq 4$.

Si una cóustica no pertenece a la clasificación de Thom, se dice que la cóustica es no genérica o que es estructuralmente no estable. Este tipo de cóusticas se producen bajo

Cuadro 5.1: Catástrofes elementales de codimension $K \leq 4$

| Nombre | Símbolo | K | $\Phi_c(\mathbf{C}; \mathbf{s})$ |
|--------------------|---------|---|---|
| fold | A_2 | 1 | $s^3/3 + C_s s$ |
| cusp | A_3 | 2 | $s^4 + C_2 s^2 + C_1 s$ |
| swallowtail | A_4 | 3 | $s^5 + C_3 s^3 + C_2 s^2 + C_1 s$ |
| elliptic umbilic | D_4^- | 3 | $s_1^3 - 3s_1 s_2^2 - C_3(s_1^2 + s_2^2) - C_2 s_2 - C_1 s_1$ |
| hyperbolic umbilic | D_4^+ | 3 | $s_1^3 + s_2^3 - C_3 s_1 s_2 - C_2 s_2 - C_1 s_1$ |
| butterfly | A_5 | 4 | $s^6 + C_4 s^4 + C_3 s^3 + C_2 s^2 + C_1 s$ |
| parabolic umbilic | D_5 | 4 | $s_1^4 + s_1 s_2^2 + C_4 s_2^2 + C_3 s_1^2 + C_2 s_2 + C_1 s_1$ |

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.1. LA ECUACIÓN PARAXIAL DE ONDA

ciertas circunstancias especiales (como un conjunto de simetrías) y cuando estas circunstancias desaparecen, la cáustica resultante usualmente puede determinarse identificando a la cáustica original con la sección transversal de una catástrofe de dimensión más alta. Esta capacidad de predicción es lo que hace a la teoría de catástrofes importante [52].

En el contexto de óptica, se dice que un campo óptico es estable si su cáustica pertenece a la clasificación de singularidades estables. Así, la clasificación de Thom nos permite calcular la forma analítica del patrón de intensidad de dicho campo óptico a través de la siguiente integral

$$\Psi_c(\mathbf{C}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Phi_c(\mathbf{C};\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad (5.2)$$

la cual se conoce como la integral canónica de difracción. En otras palabras, la ecuación (5.2) nos permite obtener la estructura fina del patrón de intensidad sobre la cáustica.

El objetivo principal de este capítulo es construir soluciones exactas de la ecuación paraxial de onda en el vacío tal que sus cáusticas asociadas estén determinadas por las catástrofes estables (o por una sección de ellas), y que al mismo tiempo den una descripción cualitativa de los patrones de difracción correspondientes. Es decir, vamos a mostrar un método para estudiar la evolución en el espacio de las cáusticas estables (o una sección de estas) bajo la aproximación paraxial. Para esto, vamos a mostrar que la función (5.2) es una solución exacta a la ecuación paraxial de onda si la función generatriz $\Phi_c(\mathbf{C};\mathbf{s})$ satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi en dos dimensiones para una partícula libre y la ecuación de Laplace, simultáneamente. Además, vamos a mostrar una visualización de la evolución de estos campos ópticos en términos de un conjunto de partículas libres cuyas trayectorias (rayos de luz en la aproximación geométrica) están determinadas por una función principal de Hamilton. Por lo tanto, mientras que la evolución del patrón de intensidad está gobernada por la ecuación paraxial de onda, la evolución de la cáustica está gobernada por la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Es importante señalar que la correspondencia matemática entre la ecuación paraxial de onda en el vacío y la ecuación de Schrödinger para una partícula libre en dos dimensiones establece un puente entre el campo de la óptica y la mecánica cuántica. Christodoulides y colaboradores en 2007 reconocieron esta analogía, e investigaron el haz de Airy óptico [12, 10, 11], el cual es un haz adifraccional y acelerado con cáustica estable, cuya función de onda fue introducida por primera vez en el contexto de mecánica cuántica [9]. Por lo tanto, si existen los haces adifraccionales en el contexto de la óptica, entonces también existen los haces adifraccionales de partículas, como los electrones.

5.1. La ecuación paraxial de onda

La evolución de un campo electromagnético en el vacío con polarización netamente lineal está gobernada por la ecuación escalar de onda

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES
5.2. SOLUCIONES EXACTAS DE LA ECUACIÓN PARAXIAL DE ONDA

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (5.3)$$

donde Ψ representa la componente dominante del campo electromagnético.

Vamos a considerar que la dirección del flujo de energía electromagnética asociado al campo Ψ es cuasi-paralelo al vector $\hat{\mathbf{z}}$, es decir, el campo se propaga preferentemente en esta dirección. En estas condiciones, el vector de onda $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}$ puede aproximarse a $\mathbf{k} \approx k \hat{\mathbf{z}}$, donde $k = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$. Así, proponemos que el campo ψ sea de la siguiente forma

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (5.4)$$

al sustituir la expresión anterior en la ecuación escalar de onda (5.3), esta se transforma en lo siguiente

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.5)$$

Dado que los rayos asociados a el campo (5.4) son trayectorias rectas cuasi paralelas al eje z , y como la intensidad es proporcional a la densidad de rayos (por ejemplo, sobre la cáustica la densidad de rayos es infinita y su forma caracteriza el máximo de la intensidad del campo óptico), entonces es de esperarse que el campo ψ dependa de la coordenada z débilmente, es decir

$$\left| \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r})}{\partial x^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r})}{\partial y^2} \right|, \quad \left| 2k \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r})}{\partial z^2} \right|. \quad (5.6)$$

A la expresión (5.6) se le conoce como la aproximación paraxial, y al aplicarla a la ecuación (5.5) esta se reduce a la bien conocida ecuación paraxial de onda:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.7)$$

5.2. Soluciones exactas de la ecuación paraxial de onda

Con el fin de mostrar expresiones simplificadas a lo largo de este capítulo, vamos a representar a las coordenadas espaciales (X, Y, Z) en unidades de *longitud de onda*/ 2π , en estas condiciones $x = kX$, $y = kY$ y $z = kZ$ son coordenadas adimensionales.

Si la función de onda

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{iS(x,y,z)}, \quad (5.8)$$

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.3. CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS FUNCIONES DE ONDA Ψ_1 Y Ψ_2

con $S(\mathbf{r})$ una función real, se sustituye en la ecuación paraxial de onda

$$-\frac{1}{2}\nabla_T^2\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad (5.9)$$

donde hemos definido $\nabla_T = \hat{x}\partial/\partial x + \hat{y}\partial/\partial y$, se obtiene lo siguiente

$$\psi \left[\frac{1}{2}(\nabla_T S)^2 + \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{i}{2}\nabla_T^2 S \right] = 0. \quad (5.10)$$

Por lo tanto, la función $\psi(\mathbf{r})$ es una solución exacta de la ecuación paraxial de onda solo si $S(\mathbf{r})$ es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi y la ecuación de Laplace, es decir,

$$\frac{1}{2}(\nabla_T S)^2 + \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \quad (5.11)$$

$$\nabla_T^2 S = 0. \quad (5.12)$$

Nótese que la ecuación (5.11) es la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre de masa $m = 1$, donde (x, y) son las coordenadas locales del espacio de configuración, y z toma el rol del tiempo. En estas condiciones, y en forma análoga a la sección 2.1.1, concluimos que el campo escalar (5.8) está caracterizado por una función S que satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi (5.11).

Si las funciones $S(\mathbf{r}, \sigma)$ y $S(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ representan a una familia uniparamétrica y biparamétrica de soluciones a las ecuaciones (5.11) y (5.12), respectivamente, y dado que la ecuación paraxial de onda es una ecuación diferencial lineal, entonces

$$\Psi_1(\mathbf{r}) \equiv \int_{\mathcal{C}} O(\sigma) e^{iS(\mathbf{r}, \sigma)} d\sigma, \quad (5.13)$$

$$\Psi_2(\mathbf{r}) \equiv \int_{\mathcal{D}} O(\alpha, \beta) e^{iS(\mathbf{r}, \alpha, \beta)} d\alpha d\beta, \quad (5.14)$$

donde \mathcal{C} y \mathcal{D} son una variedad unidimensional y bidimensional, respectivamente, y $O(\sigma)$ y $O(\alpha, \beta)$ son funciones reales arbitrarias, son nuevas soluciones exactas de la ecuación paraxial de onda.

Cabe aclarar que a partir de este punto vamos a restringirnos a los casos $\mathcal{C} = \mathbb{R}$, $O(\sigma) = 1$, $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ y $O(\alpha, \beta) = 1$, de esta forma nos aseguramos que la cáustica asociada a los campos (5.13) y (5.14) caracterice cualitativamente la región de máxima intensidad (ver sección 2.1.1), como veremos más adelante.

5.3. Caracterización geométrica de las funciones de onda Ψ_1 y Ψ_2

5.3.1. Rayos de luz y cáustica

Los rayos de luz asociados con el campo escalar (5.13) se definen como aquellas curvas que hacen estacionaria a la familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación de Hamilton-

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.3. CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS FUNCIONES DE ONDA Ψ_1 Y Ψ_2

Jacobi (5.11) y Laplace (6.6), es decir, por el conjunto de puntos \mathbf{r} del espacio que satisfacen

$$\frac{\partial S(\mathbf{r}, \sigma)}{\partial \sigma} = 0. \quad (5.15)$$

La razón por la que definimos a los rayos de luz de esta manera, es porque las curvas que resultan de la envolvente de los frentes de onda $S(\mathbf{r}, \sigma) = C$ son los frentes de onda de una nueva solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi (5.11) (tal como se mostró en la sección 1.3 para la ecuación eikonal). Por otro lado, la cáustica se define por el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación (5.15) y

$$\frac{\partial^2 S(\mathbf{r}, \sigma)}{\partial \sigma^2} = 0. \quad (5.16)$$

En forma análoga, los rayos de luz asociados con el campo escalar (5.14) se definen como el conjunto de puntos \mathbf{r} del espacio que satisfacen

$$\frac{\partial S(\mathbf{r}, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial S(\mathbf{r}, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0, \quad (5.17)$$

y la cáustica como el conjunto de puntos \mathbf{r} que satisfacen la ecuación (5.17) y

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} \right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial \alpha} \right)^2 = 0. \quad (5.18)$$

Cabe señalar que, en el contexto de la aproximación de la fase estacionaria, las ecuaciones (5.15)-(5.18) determinan la región en la que la aproximación asintótica de las integrales (5.13) y (5.14) divergen, por lo tanto la cáustica caracterizará en forma cualitativa la región espacial de máxima contribución al patrón de intensidad.

5.3.2. Link entre los rayos de luz y las soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre

De acuerdo con la teoría de Hamilton-Jacobi, si $S(\mathbf{r}, \alpha, \beta) = S(x, y, z, \alpha, \beta)$ es una integral completa de la ecuación (5.11), donde z toma el rol del tiempo, entonces también es una función generatriz de una transformación canónica de las coordenadas de espacio fase (x, y, p_x, p_y) a las nuevas coordenadas $(Q_1, Q_2, \alpha, \beta)$ dadas por

$$p_x = \frac{\partial S(\mathbf{r}, \alpha, \beta)}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial S(\mathbf{r}, \alpha, \beta)}{\partial y}, \quad (5.19)$$

$$Q_1 = \frac{\partial S(\mathbf{r}, \alpha, \beta)}{\partial \alpha}, \quad Q_2 = \frac{\partial S(\mathbf{r}, \alpha, \beta)}{\partial \beta}. \quad (5.20)$$

De las ecuaciones anteriores, resulta que la solución a las ecuaciones de Hamilton para una partícula libre en dos dimensiones puede expresarse de la siguiente manera

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.4. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{r}, \sigma)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES $\Phi(\mathbf{C}, \sigma)$

$$p_x = p_x(Q_1, Q_2, \alpha, \beta, z), \quad p_y = p_y(Q_1, Q_2, \alpha, \beta, z), \quad (5.21)$$

$$x = x(Q_1, Q_2, \alpha, \beta, z), \quad y = y(Q_1, Q_2, \alpha, \beta, z), \quad (5.22)$$

donde Q_1, Q_2, α, β son constantes de movimiento, que a la vez guardan relación con las condiciones iniciales del sistema x_0, y_0, p_{0x} y p_{0y} .

Si comparamos las ecuaciones (5.17) y (5.20), podemos concluir que los rayos asociados con la función escalar Ψ_2 corresponden a la soluciones de las ecuaciones de Hamilton (5.21) y (5.22) con $Q_1 = 0$ y $Q_2 = 0$.

De forma similar, al ser $S(\mathbf{r}, \sigma)$ una familia uniparamétrica de soluciones a la ecuación de Hamilton-Jacobi (5.11), entonces genera un mapeo (el cual no es una transformación canónica) de las coordenadas del espacio fase (x, y, p_x, p_y) a un subconjunto del espacio fase con coordenadas locales (Q, y, σ) dadas por

$$p_x = \frac{\partial S(\mathbf{r}, \sigma)}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial S(\mathbf{r}, \sigma)}{\partial y}, \quad (5.23)$$

$$Q = \frac{\partial S(\mathbf{r}, \sigma)}{\partial \sigma}, \quad y = y, \quad (5.24)$$

donde Q y σ son constantes de movimiento que pueden expresarse en términos de las condiciones iniciales x_0, y_0, p_{0x} y p_{0y} . De las ecuaciones anteriores, podemos obtener un conjunto particular de soluciones de las ecuaciones de Hamilton para una partícula libre en dos dimensiones, las cuales pueden expresarse de la siguiente manera

$$p_x = p_x(Q, \sigma, y, z), \quad p_y = p_y(Q, \sigma, y, z), \quad (5.25)$$

$$x = x(Q, \sigma, y, z), \quad y = y. \quad (5.26)$$

Al comparar las ecuaciones (5.15) y (5.24), concluimos que los rayos asociados al campo escalar Ψ_1 están dados por las soluciones de las ecuaciones de Hamilton (5.25) y (5.26) con $Q = 0$.

5.4. Las funciones $S(\mathbf{r}, \sigma)$ determinadas por las catástrofes $\Phi(\mathbf{C}, \sigma)$

Una familia uniparamétrica de soluciones a la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre en dos dimensiones (5.11) y la ecuación de Laplace (6.6) es

$$S(\mathbf{r}, \sigma) = xf(\sigma) + yg(\sigma) - \frac{f^2(\sigma) + g^2(\sigma)}{2}z + h(\sigma), \quad (5.27)$$

donde $f(\sigma), g(\sigma)$ y $h(\sigma)$ son funciones reales y arbitrarias que dependen de σ , y z está tomando el rol del tiempo. La cáustica asociada con esta familia de soluciones (el conjunto de puntos \mathbf{r} que satisfacen las ecuaciones (5.15) y (5.16)) en general es una superficie

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.4. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \sigma)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES $\Phi(\mathbf{C}, \sigma)$

bidimensional en el espacio. A las funciones $f(\sigma)$, $g(\sigma)$ y $h(\sigma)$ vamos a determinarlas solicitando que la cáustica asociada con (5.27) en el plano $z = 0$ sea igual a una de las catástrofes estables $\Phi(\mathbf{C}, \sigma)$ de la tabla 5.1, o que sea igual a una sección de estas. Por lo tanto, para determinar las funciones $f(\sigma)$, $g(\sigma)$ y $h(\sigma)$ vamos a imponer dos condiciones. La primera condición es

$$S(x, y, 0, \sigma) = xf(\sigma) + yg(\sigma) + h(\sigma) = \Phi(\mathbf{C}; \sigma), \quad (5.28)$$

lo cual implica que $f(\sigma)$, $g(\sigma)$ y $h(\sigma)$ son funciones polinómicas de σ . La segunda condición es que el grado de la función polinómica $\Phi(\mathbf{C}, \sigma)$ con respecto a la variable σ sea mayor o igual que el grado del polinomio $f^2(\sigma) + g^2(\sigma)$. Esta condición implica que la cáustica, en efecto, para cualquier valor de $z > 0$ está determinada por la catástrofe estable.

5.4.1. La catástrofe tipo fold

Para la catástrofe de tipo fold, la condición (5.28) se reduce a

$$xf(\sigma) + yg(\sigma) + h(\sigma) = C\sigma + \frac{\sigma^3}{3}. \quad (5.29)$$

Sin pérdida de generalidad, la forma más simple de satisfacer esta condición es identificar a C con la coordenada x , por lo tanto $f(\sigma) = \sigma$, $g(\sigma) = 0$ y $h(\sigma) = \sigma^3/3$. Nótese que la segunda condición también se satisface. Bajo estas condiciones, la familia uniparamétrica de soluciones a la ecuación de Hamilton-Jacobi determinada por la catástrofe de tipo fold es

$$S(\mathbf{r}, \sigma) = x\sigma - \frac{\sigma^2}{2}z + \frac{\sigma^3}{3}. \quad (5.30)$$

Aplicando las ecuaciones (5.15) y (5.16) resulta para este caso que los rayos y la cáustica están dados por

$$x - \sigma z + \sigma^2 = 0, \quad (5.31)$$

y

$$x = \frac{z^2}{4}, \quad (5.32)$$

respectivamente. Así, la función de onda (5.13) se reduce a

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = 2\pi e^{\frac{iz}{2}\left(x - \frac{z^2}{6}\right)} Ai\left(x - \frac{z^2}{4}\right), \quad (5.33)$$

donde $Ai(x)$ es la función de Airy. Nótese que en el plano $y = \text{constante}$ este campo escalar es el bien conocido haz de Airy unidimensional introducido por primera vez por Berry y Balazs en el contexto de mecánica cuántica. Este haz tiene asociado una curva cáustica parabólica (5.32) cuyo vértice coincide con la cáustica tipo fold con $C_1 = x$ como se muestra en la figura 5.1(a). La evolución de los rayos (5.31) a lo largo

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.4. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \sigma)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES $\Phi(\mathbf{C}, \sigma)$

del eje z resulta en trayectorias tangentes a la cáustica, que además es el límite de la descripción geométrica en el sentido de que no hay rayos de luz dentro de ella como puede observarse de la figura 5.1(b). Para este ejemplo, la cáustica caracteriza en forma cualitativa el máximo absoluto del patrón de intensidad del haz como se muestra en la figura 5.1(c).

Para la catástrofe tipo fold, las soluciones a las ecuaciones de Hamilton obtenidas de (5.30) son

$$p_x = \sigma, \quad p_y = 0, \quad (5.34)$$

$$x = Q - \sigma^2 + \sigma z, \quad y = y. \quad (5.35)$$

Nótese que los rayos (5.31) asociados con la función de onda (5.33) en el espacio fase con coordenadas (x, y, p_x, p_y) están dadas por las ecuaciones (5.34) y (5.35) con $Q = 0$. Por lo tanto, desde el punto de vista de mecánica clásica, podemos asociarle a esta función de onda una familia de partículas tal que al “tiempo” $z = 0$ sus posiciones están determinadas por $x(0) = -\sigma^2$ y $y(0) = y_0$. En la figura 5.2 mostramos la distribución de la familia de partículas” asociadas con el haz de Airy (5.33) determinada por la catástrofe tipo fold en $z = 0$ en el plano $y = \text{constante}$. Hemos representado el momento lineal $p_x = \sigma$ de cada partícula con vectores coloreados. Las trayectorias de las partículas coinciden con los de los rayos de luz dados por la ecuación (5.31).

Es importante señalar que el haz de Airy es un ejemplo de haz adifraccional acelerado. La intensidad asociada a la función de onda (5.33) es

$$I(\mathbf{r}) = \frac{|\Psi_1(\mathbf{r})|^2}{2} = 2\pi^2 Ai^2 \left(x - \frac{z}{4} \right), \quad (5.36)$$

por lo tanto, su perfil de intensidad transversal ($z = \text{constante}$) mantiene su forma y se traslada junto con la cáustica (ver ecuación (5.32)). Este tipo de haz, al igual que los haces adifraccionales propuestos por Durnin, tiene la capacidad de autoreconstruirse después de ser obstruido parcialmente. Por sus propiedades, este haz ha sido estudiado teóricamente y experimentalmente de forma extensiva, así como sus modificaciones y generalizaciones [9, 12, 10, 11, 53, 13, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60].

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.4. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{r}, \sigma)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES $\Phi(\mathbf{C}, \sigma)$

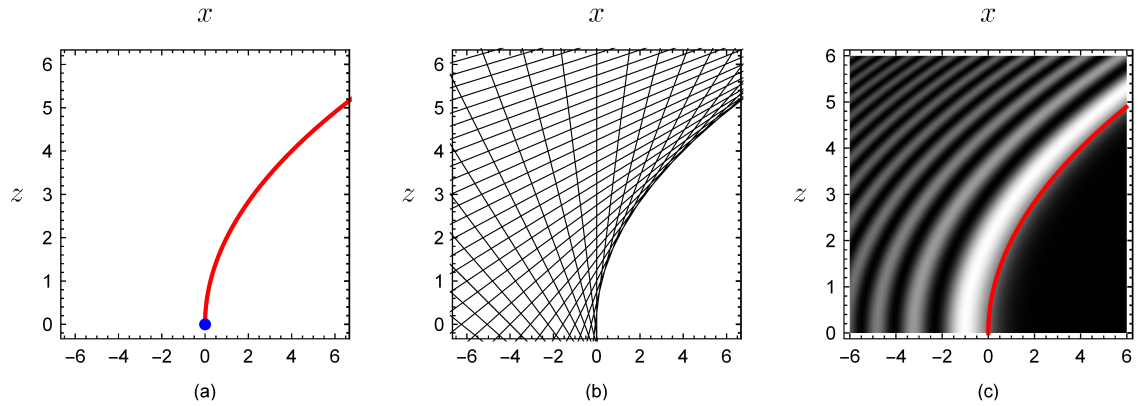


Figura 5.1: La función $S(\mathbf{r}, \sigma)$ determinada por la catástrofe tipo fold dada por la ecuación (5.30) tiene asociada una curva cáustica parabólica (roja) dada por la ecuación (5.32) sobre el plano $y = \text{constante}$ cuyo vértice, punto azul en $z = 0$ en el inciso (a), coincide con la cáustica de la catástrofe estable correspondiente con $C_1 = x$. La evolución de los rayos a lo largo del eje z resulta en trayectorias tangentes a la cáustica que es el límite de la descripción geométrica, como puede verse en el inciso (b). La cáustica caracteriza cualitativamente el máximo absoluto del patrón de intensidad de la función de onda (5.33) como se muestra en el inciso (c).

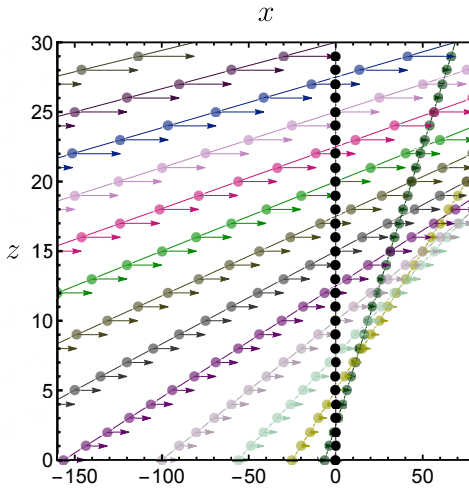


Figura 5.2: Distribución de la familia de “partículas” sobre el eje x asociadas con la función de onda (5.33) determinada por la catástrofe tipo fold en $z = 0$ sobre el plano $y = \text{constante}$, acorde con las ecuaciones (5.35) con $Q = 0$. El momento lineal $p_x = \sigma$ se representó con vectores coloreados. Las trayectorias de las partículas coinciden con las de los rayos de luz dadas por la ecuación (5.31).

5.4.2. La catástrofe tipo cusp

Para la catástrofe tipo cusp, la condición (5.28) se reduce a

$$xf(\sigma) + yg(\sigma) + h(\sigma) = C_1\sigma + C_2\sigma^2 + \sigma^4. \quad (5.37)$$

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.4. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \sigma)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES $\Phi(\mathbf{C}, \sigma)$

En este caso identificaremos a $C_1 = x$ y $C_2 = y$, por lo tanto $f(\sigma) = \sigma$, $g(\sigma) = \sigma^2$ y $h(\sigma) = \sigma^4$. Bajo estas condiciones, la familia uniparamétrica de soluciones a la ecuación de Hamilton-Jacobi determinada por la catástrofe de tipo cusp es

$$S(\mathbf{r}, \sigma) = x\sigma + y\sigma^2 - \left(\frac{\sigma^2 + \sigma^4}{2} \right) z + \sigma^4. \quad (5.38)$$

Aplicando las ecuaciones (5.15) y (5.16) resulta que los rayos y la cáustica están dados por

$$x + (2y - z)\sigma + 2(2 - z)\sigma^3 = 0, \quad (5.39)$$

y

$$x^2 = \frac{16 \left(y - \frac{z}{2} \right)^3}{27(z - 2)}, \quad (5.40)$$

respectivamente. Por otra parte, la función de onda (5.13) se reduce a

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{(1 - \frac{z}{2})^{1/4}} Pe \left(\frac{x}{(1 - \frac{z}{2})^{1/4}}, \frac{y - \frac{z}{2}}{\sqrt{1 - \frac{z}{2}}} \right), \quad (5.41)$$

donde $Pe(x, y)$ es la función de Pearcey. La función de onda (5.41) se conoce como el haz de Pearcey, el cual fue estudiado teóricamente y experimentalmente por Ring et al [61]. Este haz posee propiedades similares al haz de Airy, como su propiedad de auto reconstrucción e invariancia de forma de su patrón de intensidad ante una transformación de similaridad. Además, este haz se auto enfoca sobre el punto singular $z = 2$ y posteriormente el perfil de intensidad se invierte tal como se muestra en la figura 5.3. La superficie (5.40) coincide con la cáustica de la catástrofe tipo cusp en $z = 0$ con $C_1 = x$ y $C_2 = y$ tal como se muestra en la figura 5.3(a). Los rayos de luz dados por la ecuación (5.39) se encuentran sobre superficies planas cuyas intersecciones con el plano $z = \text{constante}$ resultan en líneas tangentes a la cáustica, de tal forma que dentro de la cáustica pasan tres líneas sobre cada punto del plano y solamente una línea pasa fuera de la cáustica como puede verse en la figura 5.3(b). En este ejemplo, la cáustica caracteriza cualitativamente la distribución de máximos del patrón de intensidad como se muestra en la figura 5.3(c). Recientemente, Berry mostró que este haz puede añadirse en una clase más general de haces Pearcey [53], en los cuales la función de Pearcey es modificada por un factor de fase.

Para la catástrofe tipo cusp, las soluciones a las ecuaciones de Hamilton obtenidas de (5.30) son

$$p_x(z) = \sigma, \quad p_y(z) = \sigma^2, \quad (5.42)$$

$$x(z) = Q - 4\sigma^3 - 2\sigma y + (\sigma + 2\sigma^3)z, \quad y(z) = y. \quad (5.43)$$

Como los rayos de luz (5.39) asociados con la función de onda (5.41) en el espacio fase con coordenadas locales (x, y, p_x, p_y) están dados por las ecuaciones (5.42) y (5.43) con $Q = 0$, entonces clásicamente podemos asociarle a esta onda una familia de “partículas”

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.4. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{r}, \sigma)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES $\Phi(\mathbf{C}, \sigma)$

de tal forma que al “tiempo” $z = 0$ sus posiciones están dadas por $x(0) = -2\sigma(2\sigma^2 + y_0)$ y $y(0) = y_0$ cuyas trayectorias están sobre los planos dados por la ecuación (5.39) tal como se muestra en la figura 5.4.

Debido a sus propiedades, el haz de Pearcey ha sido extensivamente estudiado tanto teórica como experimentalmente, así como sus generalizaciones, dentro de la teoría escalar y vectorial del campo electromagnético [62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69].

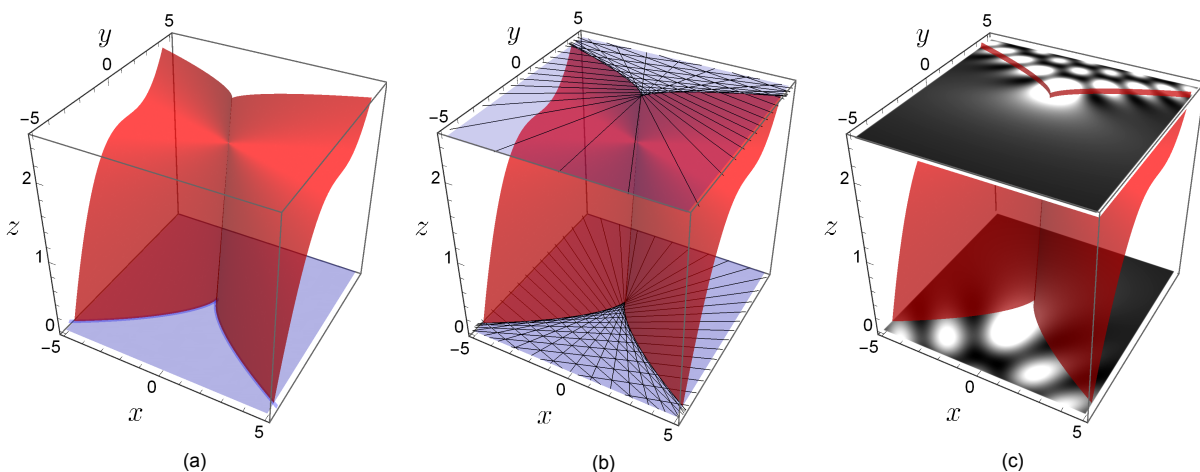


Figura 5.3: La superficie roja ilustra la cáustica (5.40) asociada con $S(\mathbf{r}, \sigma)$, dada por la ecuación (5.38), determinada por la catástrofe tipo cusp, cuya intersección con el plano $z = 0$ coincide con la cáustica de la catástrofe correspondiente con $C_1 = x$ y $C_2 = y$ como se muestra en el inciso (a). Las líneas que se muestran en el inciso (b) son las intersecciones de los rayos de luz (5.39) sobre los planos $z = 0$ y $z = 3$. En el inciso (c) mostramos la evolución del patrón de intensidad asociado con la función de onda (5.41) a lo largo del eje z .

5.4.3. La catástrofe tipo swallowtail

Para la catástrofe tipo Swallowtail, la condición (5.28) se reduce a

$$xf(\sigma) + yg(\sigma) + h(\sigma) = C_1\sigma + C_2\sigma^2 + C_3\sigma^3 + \sigma^5. \quad (5.44)$$

En este caso identificaremos $C_1 = x$, $C_2 = y$ y $C_3 = m$, siendo m un parámetro fijo. Por lo tanto $f(\sigma) = \sigma$, $g(\sigma) = \sigma^2$ y $h(\sigma) = m\sigma^3 + \sigma^5$. Cabe señalar que la segunda condición también se satisface. Bajo estas condiciones, la familia uniparamétrica de soluciones a la ecuación de Hamilton-Jacobi determinada por la catástrofe de tipo Swallowtail es

$$S(\mathbf{r}, \sigma) = x\sigma + y\sigma^2 - \left(\frac{\sigma^2 + \sigma^4}{2}\right)z + m\sigma^3 + \sigma^5. \quad (5.45)$$

Los rayos y la cáustica están dados por

$$x + (2y - z)\sigma + 3m\sigma^2 - 2z\sigma^3 + 5\sigma^4 = 0. \quad (5.46)$$

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.4. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \sigma)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES $\Phi(\mathbf{C}, \sigma)$

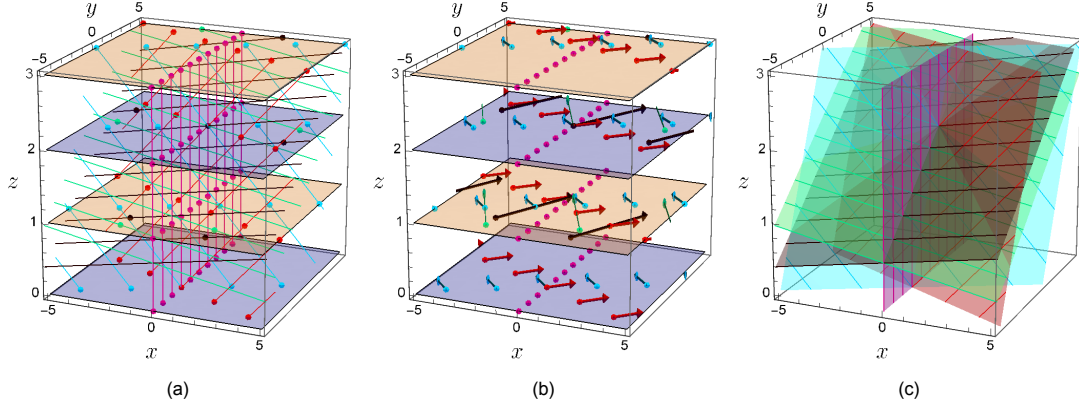


Figura 5.4: (a) Se ilustran algunas trayectorias y (b) el momento de las “partículas” correspondientes (vectores coloreados) asociados con el haz de Pearcey dadas por las ecuaciones (5.42) y (5.43) con $Q = 0$. (c) Las trayectorias están sobre superficies planas dadas por la ecuación de los rayos (5.39).

y

$$x = [3m + (15\sigma - 4z)\sigma]\sigma^2, \quad (5.47)$$

$$y = \frac{z}{2} - 3m\sigma + 3z\sigma^2 - 10\sigma^3, \quad (5.48)$$

respectivamente. Y la función de onda (5.13) se reduce a

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = e^{i\gamma} Sw(\varepsilon, \eta, \zeta), \quad (5.49)$$

donde $Sw(\varepsilon, \eta, \zeta)$ es la función Swallowtail:

$$Sw(\varepsilon, \eta, \zeta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\sigma^5 + \zeta\sigma^3 + \eta\sigma^2 + \varepsilon\sigma]} d\sigma, \quad (5.50)$$

y

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{z}{10} \left(x + \frac{yz}{10} - \frac{z^2}{20} + \frac{mz^2}{100} - \frac{z^4}{2500} \right), \\ \zeta &= m - \frac{z^2}{10}, \\ \eta &= y - \frac{z}{2} \left(1 - \frac{3m}{5} + \frac{z^2}{25} \right), \\ \varepsilon &= x + \frac{z}{5} \left(y - \frac{z}{2} + \frac{3mz}{20} - \frac{3z^3}{400} \right). \end{aligned} \quad (5.51)$$

En la figura (5.5)(a) se ilustra la cáustica tipo Swallowtail en el espacio de control con coordenadas locales C_1 , C_2 y C_3 . De acuerdo con la ecuación (5.45) en $z = 0$ la cáustica en el espacio coordenado xyz asociado con la función de onda (5.49) coincide con la sección transversal $C_3 = m = \text{constante}$ de la cáustica tipo swallowtail, con $C_1 = x$ y $C_2 = y$. Este tipo de haz ha sido estudiado por Zannotti et al [70, 71], teórica y

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.4. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \sigma)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES $\Phi(\mathbf{C}, \sigma)$

experimentalmente, describiendolo como un haz inestable durante su propagación en el sentido de que decae a una catástrofe de menor dimensión como podemos observar de las figuras (5.5)(b) ($m > 0$) y (5.5)(d) ($m < 0$), las cuales tienden a una cáustica tipo cusp. Igualmente al caso de haz de Pearcey, los “rayos de luz” descritos por la ecuación (5.46) se encuentran sobre superficies planas cuya intersección con el plano $z = cte$ resulta en rectas tangentes a la cáustica. Nótese que la cáustica caracteriza cualitativamente el máximo absoluto del patrón de intensidad del haz, como se puede observar de las figuras (5.5)(c) y (5.5)(e).

Para la catástrofe tipo Swallowtail, las soluciones a las ecuaciones de Hamilton obtenidas de (5.38) son

$$p_x(z) = \sigma, \quad p_y(z) = \sigma^2, \quad (5.52)$$

$$x(z) = Q - 5\sigma^4 - 3m\sigma^2 - 2\sigma y + (\sigma + 2\sigma^3)z, \quad y(z) = y. \quad (5.53)$$

Como los rayos de luz (5.46) asociados con la función de onda (5.49) en el espacio fase con coordenadas locales (x, y, p_x, p_y) están dadas por las ecuaciones (5.52) y (5.53) con $Q = 0$, entonces clásicamente podemos asociarle a esta onda una familia de “partículas” tal que al “tiempo” $z = 0$ sus posiciones están determinadas por $x(0) = -5\sigma^4 - 3m\sigma^2 - 2\sigma y_0$ y $y(0) = y_0$, cuyas trayectorias están sobre los planos dados por la ecuación (5.46) tal como se muestra en la figura (5.6). Cabe señalar que se han realizado diversos estudios sobre estos haces en el contexto de la óptica [70, 71].

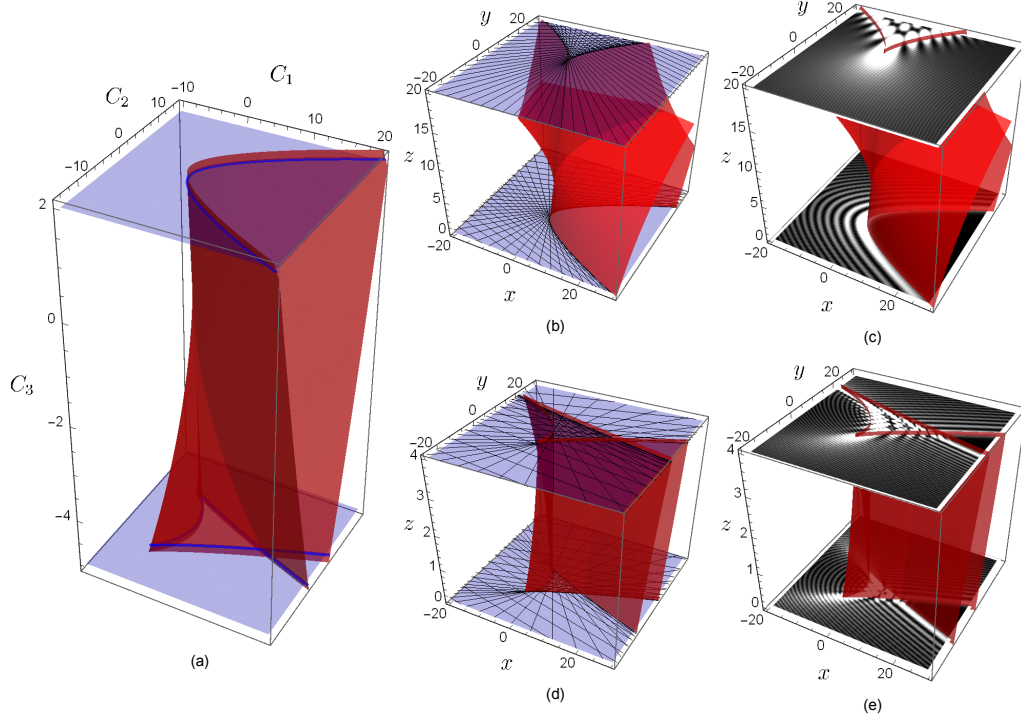


Figura 5.5: (a) La cáustica tipo Swallowtail. La cáustica asociada a la función de onda (5.49) para la sección transversal $C_3 = 2$ de la cáustica Swallowtail se muestra en el inciso (b) y para $C_3 = -5$ en el inciso (c). Las rectas son las intersecciones de las familias de planos descritas por la ecuación de rayos (5.46) con los planos $z = cte$. La evolución del patrón de intensidad se muestra en los incisos (c) y (e), respectivamente.

5.5. Las funciones $S(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ determinadas por las catástrofes $\Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta)$

Una familia biparamétrica de soluciones a la ecuación de Hamilton-Jacobi (5.11) para una partícula libre en dos dimensiones y la ecuación de Laplace (6.6) es

$$S(\mathbf{r}, \alpha, \beta) = xf(\alpha, \beta) + yg(\alpha, \beta) - \frac{f^2(\alpha, \beta) + g^2(\alpha, \beta)}{2}z + h(\alpha, \beta), \quad (5.54)$$

donde $f(\alpha, \beta)$, $g(\alpha, \beta)$ y $h(\alpha, \beta)$ son funciones reales arbitrarias de α y β y z está tomando el rol del tiempo. La cáustica asociada con esta familia de soluciones, que se obtiene a partir de las ecuaciones (5.17) y (5.18), en general está compuesta por superficies bidimensionales en el espacio. En forma análoga a la sección anterior, las funciones $f(\alpha, \beta)$, $g(\alpha, \beta)$ y $h(\alpha, \beta)$ serán determinadas bajo la condición de que la cáustica en el plano $z = 0$ sea igual a una de las cáusticas de la tabla (5.1) o una sección de esta. Para determinar las funciones $f(\alpha, \beta)$, $g(\alpha, \beta)$ y $h(\alpha, \beta)$ impondremos dos condiciones. La primera es

$$S(x, y, 0, \alpha, \beta) = xf(\alpha, \beta) + yg(\alpha, \beta) + h(\alpha, \beta) = \Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta), \quad (5.55)$$

lo que implica que $f(\alpha, \beta)$, $g(\alpha, \beta)$ y $h(\alpha, \beta)$ son funciones polinómicas de α y β . La

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.5. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \alpha, \beta)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES

$$\Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta)$$

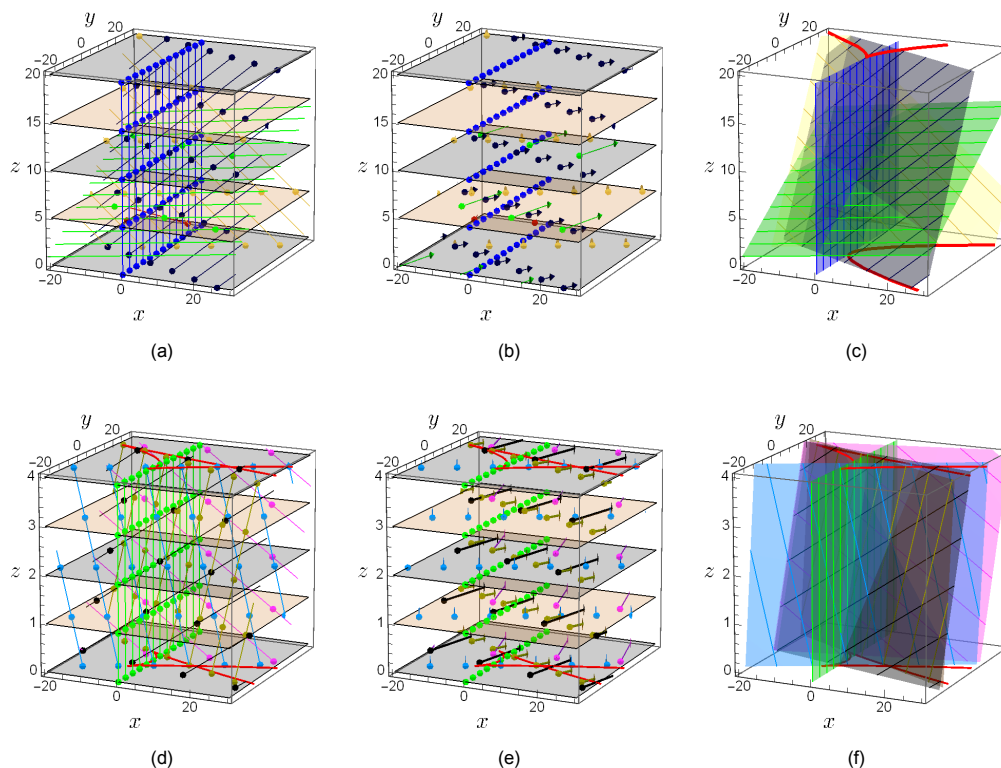


Figura 5.6: Se muestran algunas trayectorias (rectas coloreadas) y momento lineal de las partículas (vectores coloreados en los incisos (b) y (e)) asociados a la función de onda (5.49) determinadas por la catástrofe swallowtail, descritas por las ecuaciones (5.52) y (5.53) con $Q = 0$ al incrementar linealmente el momento $p_x = \sigma$ para valores discretos de la coordenada y para los casos $m = 2$ (incisos (a) a (c)) y $m = -5$ (incisos (d) a (f)).

segunda condición es que el grado del polinomio $\Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta)$ con respecto a las variables α y β sea mayor o igual al grado de la función polinómica $f^2(\alpha, \beta) + g^2(\alpha, \beta)$.

5.5.1. La catástrofe Elliptic Umbilic

Para el caso de la catástrofe Elliptic Umbilic, la condición (5.55) se reduce a

$$xf(\alpha, \beta) + yg(\alpha, \beta) + h(\alpha, \beta) = C_1\alpha + C_2\beta - \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)C_3 + \alpha^3 - 3\alpha\beta^2. \quad (5.56)$$

La única solución que satisface las dos condiciones que hemos impuesto está dada por $C_1 = x$, $C_2 = y$, $C_3 = m$, siendo m un parámetro fijo. Bajo estas condiciones $f(\alpha, \beta) = \alpha$, $g(\alpha, \beta) = \beta$ y $h(\alpha, \beta) = \alpha^3 - 3\alpha\beta^2 - [(\alpha^2 + \beta^2)/2]m$. Por lo tanto, la familia biparamétrica de soluciones a la ecuación de Hamilton-Jacobi está dada por

$$S(\mathbf{r}, \alpha, \beta) = x\alpha + y\beta - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}(z + m) + \alpha^3 - 3\alpha\beta^2. \quad (5.57)$$

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.5. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \alpha, \beta)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES

$$\Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta)$$

Los rayos y cáustica están dados por

$$x = (z + m - 3\alpha)\alpha + 3\beta^2, \quad (5.58)$$

$$y = (z + m + 6\alpha)\beta, \quad (5.59)$$

$$z = z. \quad (5.60)$$

y

$$x_{\pm} = 3(\beta^2 - \alpha^2 \pm 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}), \quad (5.61)$$

$$y_{\pm} = 6\beta(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}), \quad (5.62)$$

$$z_{\pm} = -m \pm 6\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (5.63)$$

respectivamente. Para este ejemplo, la función de onda (5.14) se reduce a

$$\Psi_2(\mathbf{r}) = \Psi_{EU}(x, y, z + m) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[x\alpha + y\beta - \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)(z+m) + \alpha^3 - 3\alpha\beta^2]} d\alpha d\beta. \quad (5.64)$$

En la figura 5.7(a) se muestra la cáustica asociada a la catástrofe elliptic umbilic en el espacio de control con coordenadas locales C_1 , C_2 y C_3 , junto con la sección transversal $C_3 = m = cte$, la cual determina la cáustica del haz (5.64) en $z = 0$. Es importante hacer notar que la propagación de este haz obedece la forma canónica de la catástrofe correspondiente, es decir, la función de onda (5.64) es una integral canónica de difracción. Esto implica que este haz mantiene su estructura cáustica en el espacio. En la figura 5.7(b) se ilustran los rayos asociados a este haz y en la figura 5.7(c) se muestran los puntos iniciales y finales de los rayos sobre los planos $z = 0$ y $z = cte > 0$ para valores discretos e igualmente espaciados de α y β . En estas gráficas se puede observar que la densidad de rayos se incrementa conforme nos aproximamos a la cáustica hasta atravesarla. En la figura 5.7(d) se muestran las curvas asociadas a las ecuaciones paramétricas (5.58)-(5.60) para valores discretos de α como función de β ; esto revela que fuera de la región cáustica dos rayos se intersecan en cada punto del espacio (intersección de las curvas azules y negras a la derecha, e intersección de curvas azules y verdes a la izquierda) mientras que dentro de la cáustica se intersecan cuatro (intersección de dos curvas negras junto con las curvas azul y verde). Al igual que en los casos anteriores, en la figura 5.7(e) se muestra que la cáustica caracteriza cualitativamente el máximo absoluto del haz.

Para la catástrofe Elliptic Umbilic, las soluciones a las ecuaciones de Hamilton (5.21) y (5.22) obtenidas de la ecuación (5.57) están dadas por

$$p_x(z) = \alpha, \quad p_y(z) = \beta, \quad (5.65)$$

$$x(z) = Q_1 + 3(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha(z + m), \quad y(z) = Q_2 + 6\alpha\beta + \beta(z + m). \quad (5.66)$$

Como los rayos de luz dados por las ecuaciones (5.58) a (5.60) asociados con la función de onda (5.64) en el espacio fase con coordenadas locales (x, y, p_x, p_y) están dadas por las ecuaciones (5.65) y (5.66) con $Q_1 = 0$ y $Q_2 = 0$, entonces clásicamente podemos asociar

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.5. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \alpha, \beta)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES

$$\Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta)$$

a esta onda una familia de “partículas” tal que al “tiempo” $z = 0$ sus posiciones están determinadas por $x(0) = 3(\beta^2 - \alpha^2) + m\alpha$ y $y(0) = 6\alpha\beta + m\beta$.

En las figuras 5.7(b) y 5.7(c) se representan algunas trayectorias de las “partículas” (rayos) y su distribución (puntos coloreados) al tiempo $z = cte$ para valores discretos del momento lineal al incrementar en forma lineal a α y β . Nótese que las partículas de bajo momento lineal (puntos azules) se encuentran cercanos y dentro de la cústica. Algunos trabajos relacionados con la catástrofe elíptico umbilic, como sus dislocaciones y su generación experimental pueden encontrarse en [53, 72, 35, 73, 74, 75].

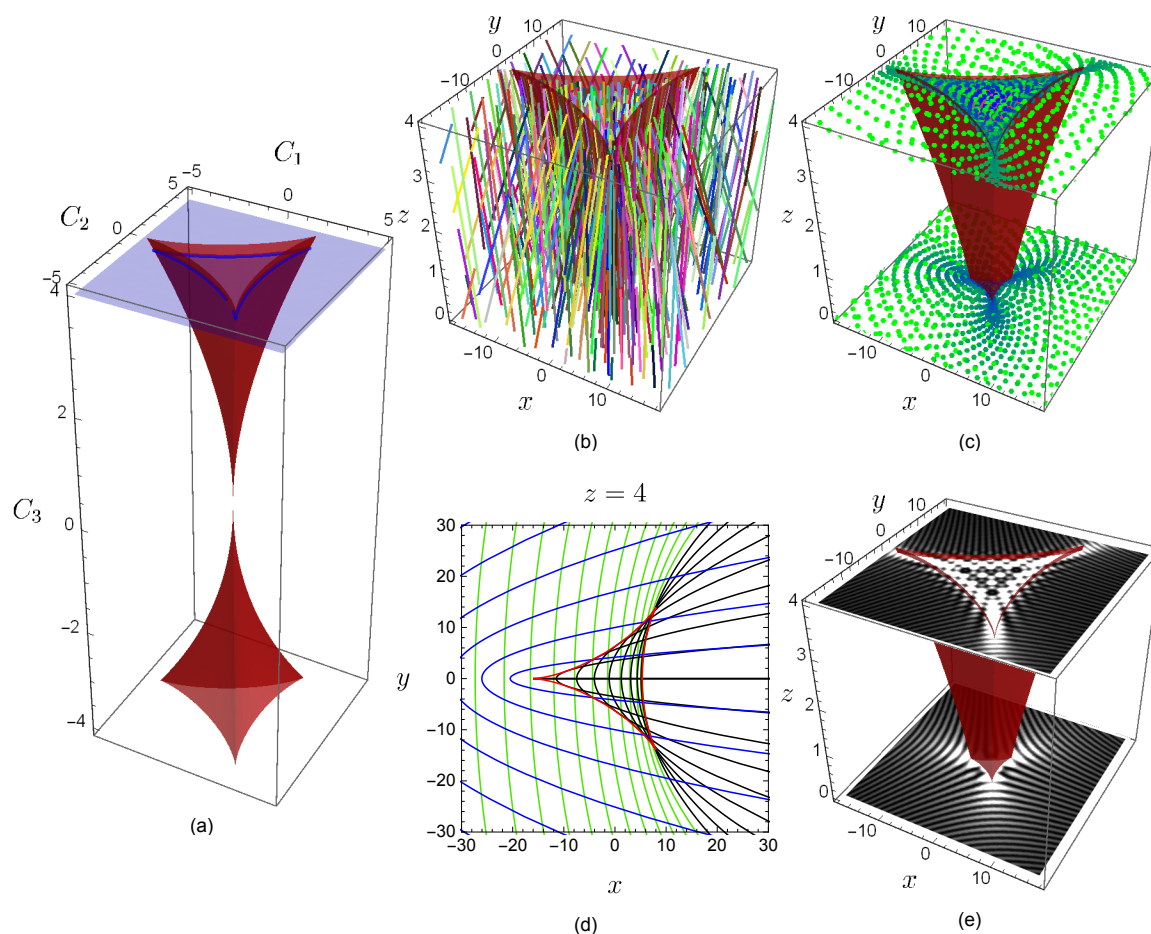


Figura 5.7: (a) Cústica elíptica umbilic. (b) Rayos de luz (rectas coloreadas) y superficie cústica asociados a la función de onda (5.64). En el inciso (c) se muestran las intersecciones de los rayos de luz con los planos $z = 0$ y $z = 4$. La coloración de los puntos tiende del azul al verde conforme el valor $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ se incrementa. (d) Curvas asociadas a las ecuaciones paramétricas (5.58)-(5.60) con $z = 4$ para valores discretos de α como función de β . (e) Se muestra la evolución del patrón de intensidad.

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.5. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \alpha, \beta)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES

$$\Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta)$$

5.5.2. La catástrofe Hyperbolic Umbilic

Para el caso de la catástrofe Hyperbolic Umbilic, la condición (5.55) se reduce a

$$xf(\alpha, \beta) + yg(\alpha, \beta) + h(\alpha, \beta) = C_1\alpha + C_2\beta + C_3\alpha\beta + \alpha^3 + \beta^3. \quad (5.67)$$

La única solución que satisface las dos condiciones que hemos impuesto está dada por

$$S_n(\mathbf{r}, \alpha, \beta) = x\alpha + y\beta - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}z + n\alpha\beta + \alpha^3 + \beta^3, \quad (5.68)$$

siendo n un parámetro fijo. Los rayos y cáustica asociados a $S_n(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ son

$$x = z\alpha - 3\alpha^2 - n\beta, \quad (5.69)$$

$$y = z\beta - 3\beta^2 - n\alpha, \quad (5.70)$$

$$z = z. \quad (5.71)$$

y

$$x_{\pm} = \beta(3\alpha - n) \pm \alpha\sqrt{n^2 + 9(\alpha - \beta)^2}, \quad (5.72)$$

$$y_{\pm} = \alpha(3\beta - n) \pm \beta\sqrt{n^2 + 9(\alpha - \beta)^2}, \quad (5.73)$$

$$z_{\pm} = 3(\alpha + \beta) \pm \sqrt{n^2 + 9(\alpha - \beta)^2}, \quad (5.74)$$

respectivamente. Para este caso, la función de onda (5.14) se reduce a

$$\Psi_n(\mathbf{r}) = e^{i\gamma}\Psi_{HU}(\xi, \eta, \zeta), \quad (5.75)$$

donde

$$\Psi_{HU}(\xi, \eta, \zeta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\alpha^3 + \beta^3 + \zeta\alpha\beta + \xi\alpha + \eta\beta]} d\alpha d\beta. \quad (5.76)$$

y

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{z}{6} \left(x + y + \frac{nz}{6} - \frac{z^2}{9} \right), \\ \zeta &= n, \\ \eta &= y + \frac{z}{6} \left(n - \frac{z}{2} \right), \\ \xi &= x + \frac{z}{6} \left(n - \frac{z}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.77)$$

En la figura 5.8(a) se muestra la cáustica asociada a la catástrofe elemental hyperbolic umbilic en el espacio de control con coordenadas locales C_1 , C_2 y C_3 junto con la sección transversal $C_3 = n = cte$, la cual determina la cáustica del haz (5.75) en $z = 0$. En la figura 5.8(b) se ilustran los rayos dados por las ecuaciones (5.69) a (5.71) y en la figura 5.8(c) se muestran los puntos iniciales y finales de los rayos sobre los planos $z = 0$ y $z = cte > 0$ para valores discretos e igualmente espaciados de α y β . En estos gráficos se observa que la densidad de rayos se incrementa conforme nos acercamos a la cáustica.

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.5. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \alpha, \beta)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES

$\Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta)$

En la figura 5.8(d) se muestran las curvas asociadas a las ecuaciones paramétricas (5.69)-(5.71) para valores discretos de α como función de β , lo cual revela que cuatro rayos se intersectan sobre cada punto dentro de la cáustica tipo cusp (intersección de dos curvas azules con dos curvas verdes), dos rayos se intersectan sobre cada punto entre las cáusticas tipo fold y cusp (intersección de dos curvas verdes o de dos curvas azules), y que no existen rayos fuera de la cáustica tipo fold. Por lo tanto, la cáustica tipo fold es el límite de la descripción geométrica del haz. Al igual que en los casos anteriores, la figura 5.8(e) muestra que la cáustica caracteriza cualitativamente el máximo absoluto del patrón de intensidad. Cabe resaltar que la función de onda (5.75) pertenece a un subconjunto de haces con la propiedad de ser no difractivos y acelerados. En efecto, para el caso especial $n = 0$ este haz se reduce al bien conocido haz de Airy bidimensional [76, 77]

$$\Psi_0(\mathbf{r}) = \frac{(2\pi)^2}{3^{2/3}} e^{\frac{iz}{6}(x+y-\frac{z^2}{9})} Ai\left(\frac{x-z^2/12}{3^{1/3}}\right) Ai\left(\frac{y-z^2/12}{3^{1/3}}\right). \quad (5.78)$$

Las soluciones a las ecuaciones de Hamilton (5.21) y (5.22) obtenidas de la ecuación (5.68) están dadas por

$$p_x(z) = \alpha, \quad p_y(z) = \beta, \quad (5.79)$$

$$x(z) = Q_1 - 3\alpha^2 - n\beta + z\alpha, \quad y(z) = Q_2 - 3\beta^2 - n\alpha + z\beta. \quad (5.80)$$

Como los rayos de luz dados por las ecuaciones (5.69) a (5.71) asociados con la función de onda (5.75) en el espacio fase con coordenadas locales (x, y, p_x, p_y) están dadas por las ecuaciones (5.79) y (5.80) con $Q_1 = 0$ y $Q_2 = 0$, entonces clásicamente podemos asociar con esta onda una familia de “partículas” tal que al “tiempo” $z = 0$ sus posiciones están determinadas por $x(0) = -3\alpha^2 - n\beta$ y $y(0) = -3\beta^2 - n\alpha$.

En las figuras 5.8(b) y 5.8(c) se muestran algunas trayectorias de las “partículas” (rayos) y su distribución (puntos coloreados) al tiempo $z = cte$ para valores discretos de su momento lineal al incrementar linealmente α y β . Algunos trabajos relacionados con el haz Huperbolic Umbilic, como sus dislocaciones, su patrón de difracción y su generación experimental, pueden consultarse en [76, 78, 79].

5.5.3. La catástrofe Parabolic Umbilic

Para la catástrofe Parabolic Umbilic, la condición (5.55) se reduce a

$$xf(\alpha, \beta) + yg(\alpha, \beta) + h(\alpha, \beta) = C_1\alpha + C_2\beta + C_3\alpha^2 + C_4\beta^2 + \alpha\beta^2 + \alpha^4. \quad (5.81)$$

Para este ejemplo en particular tenemos dos formas de satisfacer las dos condiciones que impusimos al principio de la sección, dadas por

$$S_{nt}(\mathbf{r}, \alpha, \beta) = x\alpha + y\beta - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}z + n\alpha^2 + t\beta^2 + \alpha\beta^2 + \alpha^4, \quad (5.82)$$

$$S_{mt}(\mathbf{r}, \alpha, \beta) = x\alpha^2 + y\beta - \frac{\alpha^4 + \beta^2}{2}z + m\alpha + t\beta^2 + \alpha\beta^2 + \alpha^4, \quad (5.83)$$

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.5. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \alpha, \beta)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES

$$\Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta)$$

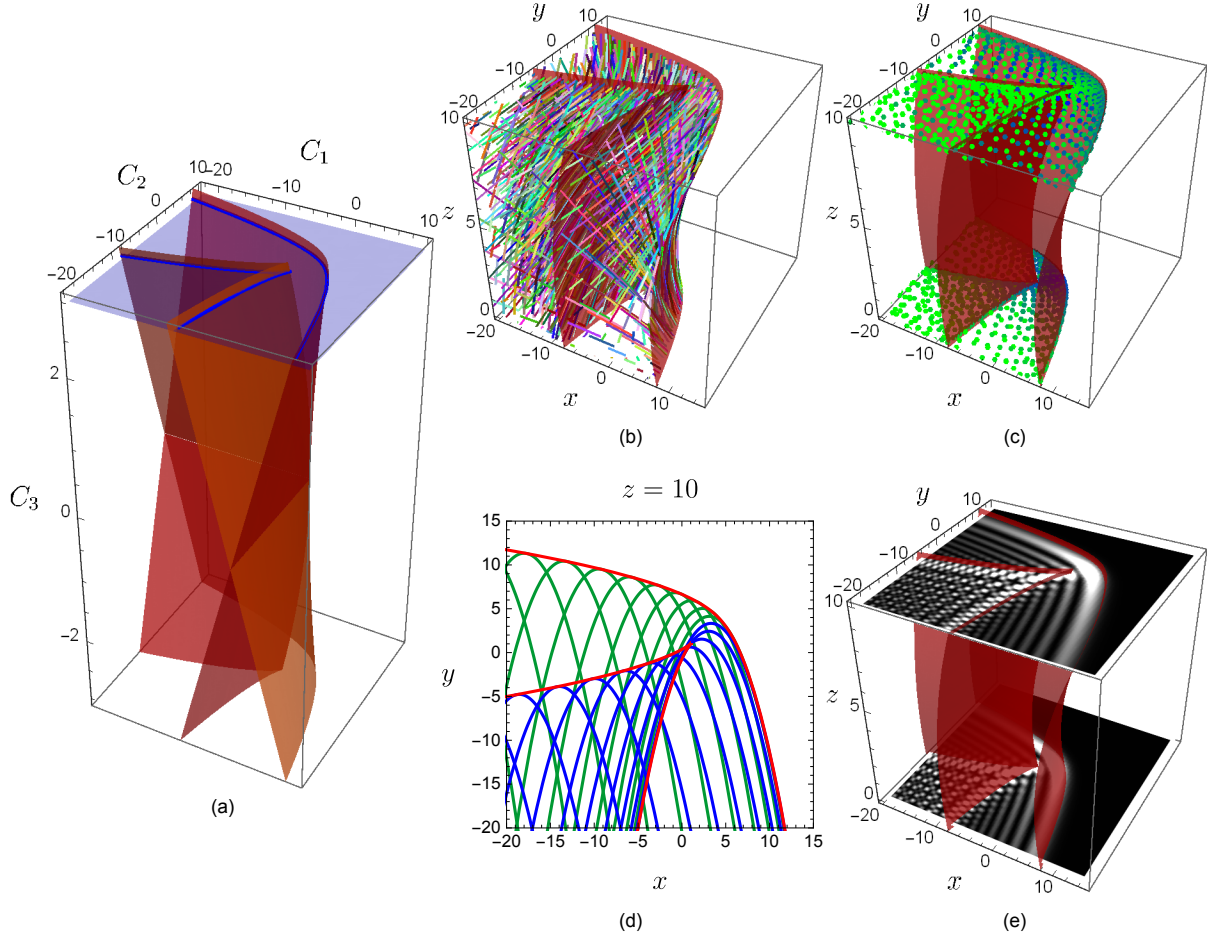


Figura 5.8: (a) Cáustica hiperbólica umbilic. (b) Rayos de luz (rectas coloreadas) y superficie cáustica asociados a la función de onda (5.75). En el inciso (c) se muestran las intersecciones de los rayos de luz con los planos $z = 0$ y $z = 10$. La coloración de los puntos tiende del azul al verde conforme el valor $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ se incrementa. (d) Curvas asociadas a las ecuaciones paramétricas (5.69) a (5.71) con $z = 10$ para valores discretos de α como función de β . (e) Se muestra la evolución del patrón de intensidad.

donde m , n y t son parámetros fijos.

Los rayos y cáustica asociados con $S_{nt}(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ están dados por

$$x = z\alpha - 4\alpha^3 - \beta^2 - 2n\alpha, \quad (5.84)$$

$$y = z\beta - 2\alpha\beta - 2t\beta, \quad (5.85)$$

$$z = z. \quad (5.86)$$

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.5. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES

$\Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta)$

y

$$x_{\pm} = 2\alpha^3 + \alpha^2 - \beta^2 + \alpha(t - n) \pm \alpha\sqrt{\Delta}, \quad (5.87)$$

$$y_{\pm} = \beta(n - t + 6\alpha^2 - \alpha \pm \sqrt{\Delta}), \quad (5.88)$$

$$z_{\pm} = n + t + 6\alpha^2 + \alpha \pm \sqrt{\Delta}, \quad (5.89)$$

respectivamente, donde

$$\Delta = [n - t + \alpha(6\alpha - 1)]^2 + 4\beta^2. \quad (5.90)$$

En este caso, la función de onda (5.14) asociada con $S_{nt}(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ se reduce a

$$\Psi_{nt}(\mathbf{r}) = \Psi_{PU}(\xi, \eta, \zeta, \lambda), \quad (5.91)$$

donde

$$\Psi_{PU}(\xi, \eta, \zeta, \lambda) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\alpha^4 + \alpha\beta^2 + \lambda\alpha^2 + \zeta\beta^2 + \xi\alpha + \eta\beta]} d\alpha d\beta \quad (5.92)$$

y

$$\begin{aligned} \lambda &= n - \frac{z}{2}, \\ \zeta &= t - \frac{z}{2}, \\ \eta &= y, \\ \xi &= x. \end{aligned} \quad (5.93)$$

En la figura 5.9(a) se muestra la cáustica asociada a la catástrofe parabolic umbilic en el espacio de control con coordenadas locales C_1, C_2 y C_3 con $C_4 = 2$, junto con la sección transversal $C_3 = cte$ (curva azul) la cual determina la cáustica del haz (5.91) en $z = 0$. En la figura 5.9(b) se ilustran los rayos dados por las ecuaciones (5.84) a (5.86) y en la figura 5.9(c) se muestran los puntos iniciales y finales de los rayos en los planos $z = 0$ y $z = cte > 0$ para valores discretos e igualmente espaciados de α y β . En la figura 5.9(d) se muestran las curvas cuya forma paramétrica está dada por las ecuaciones (5.84) a (5.86) para valores discretos de α como función de β . Esto revela que cinco rayos se intersectan en cada punto dentro de la cáustica (intersección de dos curvas azules junto con dos curvas verdes y una negra), tres rayos se intersectan en cada punto entre las regiones cáusticas (intersección de una curva negra con dos curvas verdes) y solo un rayo pasa sobre cada punto fuera de la región cáustica (curva negra). Al igual que en los casos anteriores, la figura 5.9(e) muestra que la cáustica caracteriza cualitativamente el máximo absoluto del patrón de intensidad.

Para la integral completa $S_{nt}(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ las soluciones a las ecuaciones de Hamilton (5.21) y (5.22) están dadas por

$$p_x(z) = \alpha, \quad p_y(z) = \beta, \quad (5.94)$$

$$x(z) = Q_1 - 4\alpha^3 - \beta^2 + \alpha(z - 2n), \quad y(z) = Q_2 + \beta(z - 2(\alpha + t)). \quad (5.95)$$

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.5. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \alpha, \beta)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES

$$\Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta)$$

Como los rayos de luz dados por las ecuaciones (5.84) a (5.86) asociados con la función de onda (5.91) en el espacio fase con coordenadas locales (x, y, p_x, p_y) están dadas por las ecuaciones (5.94) y (5.95) con $Q_1 = 0$ y $Q_2 = 0$, entonces clásicamente podemos asociar a esta onda una familia de “partículas” tal que al “tiempo” $z = 0$ sus posiciones están determinadas por $x(0) = -4\alpha^3 - \beta^2 - 2n\alpha$ y $y(0) = -2\beta(\alpha + t)$.

En las figuras 5.9(b) y 5.9(c) se representan algunas trayectorias de las “partículas”(rayos) y su distribución (puntos coloreados) al tiempo $z = 0$ para valores discretos del momento lineal al incrementar linealmente α y β .

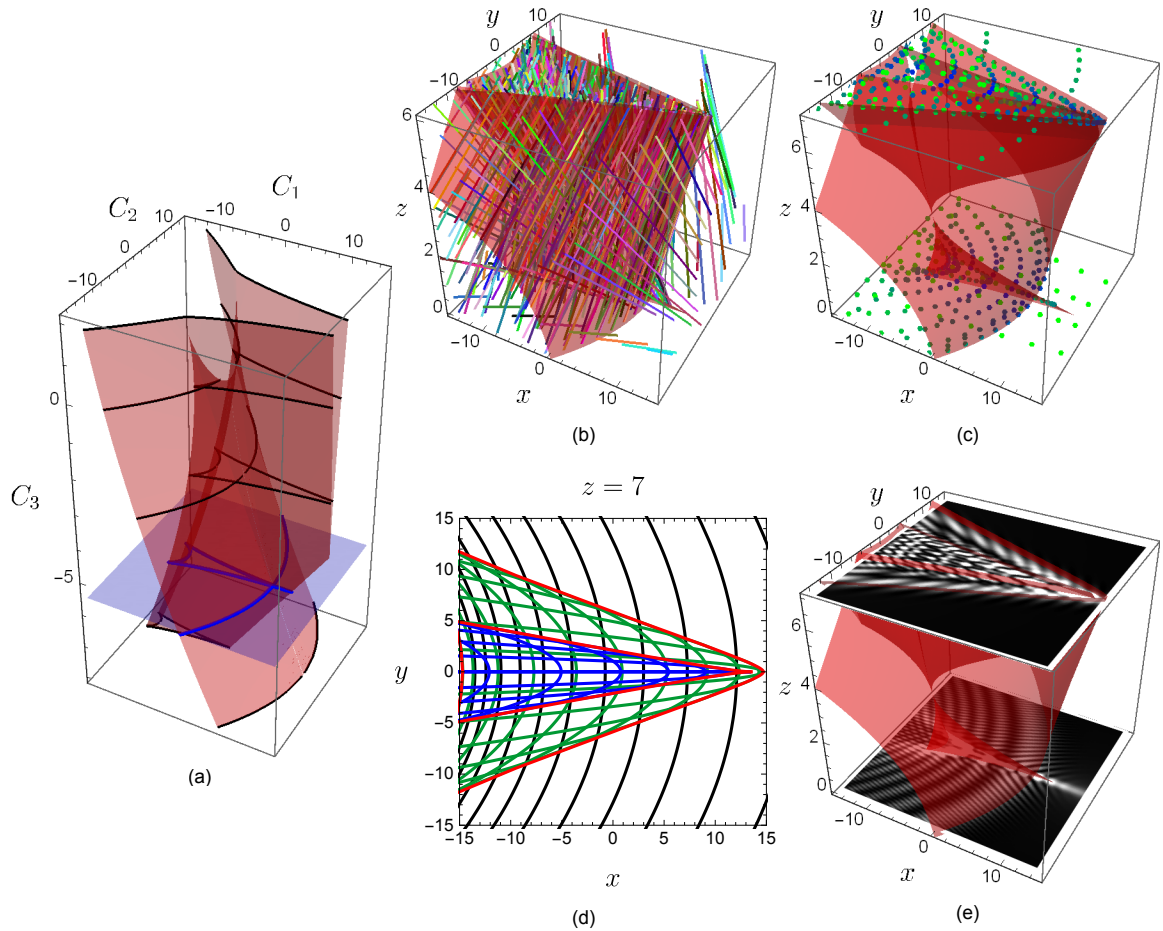


Figura 5.9: (a) Cáustica parabolic umbilic con $C_4 = 2$. (b) Rayos de luz (rectas coloreadas) y superficie cáustica asociados a la función de onda (5.91). En el inciso (c) se muestran las intersecciones de los rayos de luz con los planos $z = 0$ y $z = 6$. La coloración de los puntos tiende del azul al verde conforme el valor $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ se incrementa. (d) Curvas asociadas a las ecuaciones paramétricas (5.84) a (5.86) con $z = 6$ para valores discretos de α como función de β . (e) Se muestra la evolución del patrón de intensidad.

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.5. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \alpha, \beta)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES

$\Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta)$

Por otra parte, los rayos y cáustica asociados con $S_{mt}(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ están dados por

$$x = \frac{\alpha^3(2z - 4) - \beta^2 - m}{2\alpha}, \quad (5.96)$$

$$y = \beta(z - 2(\alpha + t)), \quad (5.97)$$

$$z = z. \quad (5.98)$$

y

$$x_{\pm} = \frac{8\alpha^3(\alpha + t - 1) - 5(\beta^2 + m) \pm \sqrt{\Delta}}{8\alpha}, \quad (5.99)$$

$$y_{\pm} = \frac{-\beta \left(8\alpha^3(\alpha + t - 1) + \beta^2 + m \mp \sqrt{\Delta} \right)}{8\alpha^3}, \quad (5.100)$$

$$z_{\pm} = \frac{8\alpha^3(\alpha + t + 1) - \beta^2 - m \pm \sqrt{\Delta}}{8\alpha^3}, \quad (5.101)$$

respectivamente, donde

$$\Delta = [m + 8\alpha^3(\alpha + t - 1)]^2 + 2[m + 8\alpha^3(5\alpha + t - 1)]\beta^2 + \beta^4. \quad (5.102)$$

Para este caso, la función de onda (5.14) se reduce a

$$\Psi_{mt}(\mathbf{r}) = (1 - z/2)^{-1/8} \Psi_{PU}(\xi, \eta, \zeta, \lambda), \quad (5.103)$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda &= x(1 - z/2)^{-1/2}, \\ \zeta &= (1 - z/2)^{1/4}(t - z/2), \\ \eta &= y(1 - z/2)^{1/8}, \\ \xi &= m(1 - z/2)^{-1/4}. \end{aligned} \quad (5.104)$$

En la figura 5.10(a) se muestra la cáustica asociada a la catástrofe parabolic umbilic en el espacio de control con coordenadas locales C_1 , C_2 y C_3 con $C_4 = 1,5$ junto con la sección transversal $C_1 = cte$ (curva azul), la cual determina la cáustica del haz (5.103) en $z = 0$. En la figura 5.10(b) se ilustran los rayos dados por las ecuaciones (5.96) a (5.98) y en la figura 5.10(c) se muestran los puntos iniciales y finales de los rayos sobre los planos $z = 0$ y $z = cte > 0$ para valores discretos e igualmente espaciados de α y β . En la figura 5.10(d) se muestran las curvas cuya expresión paramétrica está dada por las ecuaciones (5.96) a (5.98) para valores discretos de α como función de β . Esto revela que cinco rayos se intersectan en cada punto dentro de las cáusticas (intersección de dos curvas azules con las curvas verde, negra y morada), tres rayos se intersectan en cada punto entre las cáusticas (intersección de dos curvas negras con una azul o verde) y solo un rayo pasa en cada punto fuera de las cáusticas (curva azul). La figura 5.10(e) muestra que la cáustica caracteriza cualitativamente el máximo absoluto del patrón de intensidad.

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.5. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \alpha, \beta)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES

$\Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta)$

Para la integral completa $S_{mt}(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ las soluciones a las ecuaciones de Hamilton (5.21) y (5.22) están dadas por

$$p_x(z) = \alpha^2, \quad p_y(z) = \beta, \quad (5.105)$$

$$x(z) = \frac{Q_1 - 4\alpha^3(1 - z/2) - \beta^2 - m}{2\alpha}, \quad y(z) = Q_2 + \beta(z - 2(\alpha + t)). \quad (5.106)$$

Como los rayos de luz dados por las ecuaciones (5.96) a (5.98) asociados con la función de onda (5.103) en el espacio fase con coordenadas locales (x, y, p_x, p_y) están dadas por las ecuaciones (5.105) y (5.106) con $Q_1 = 0$ y $Q_2 = 0$, entonces clásicamente podemos asociar a esta onda una familia de “partículas” tal que al “tiempo” $z = 0$ sus posiciones están determinadas por $x(0) = (-4\alpha^3 - \beta^2 - m)/2\alpha$ y $y(0) = -2\beta(\alpha + t)$.

En las figuras 5.10(b) y 5.10(c) se muestran las trayectorias de las partículas (rayos) y su distribución (puntos coloreados) al tiempo $z = cte$ para valores discretos del momento lineal al incrementar en forma lineal α y β . Algunos trabajos sobre la observación de la catástrofe parabolic umbilic y sus propiedades matemáticas pueden consultarse en [80, 81, 82].

CAPÍTULO 5. TEORÍA DE CATÁSTROFES

5.5. LAS FUNCIONES $S(\mathbf{R}, \alpha, \beta)$ DETERMINADAS POR LAS CATÁSTROFES

$\Phi(\mathbf{C}, \alpha, \beta)$

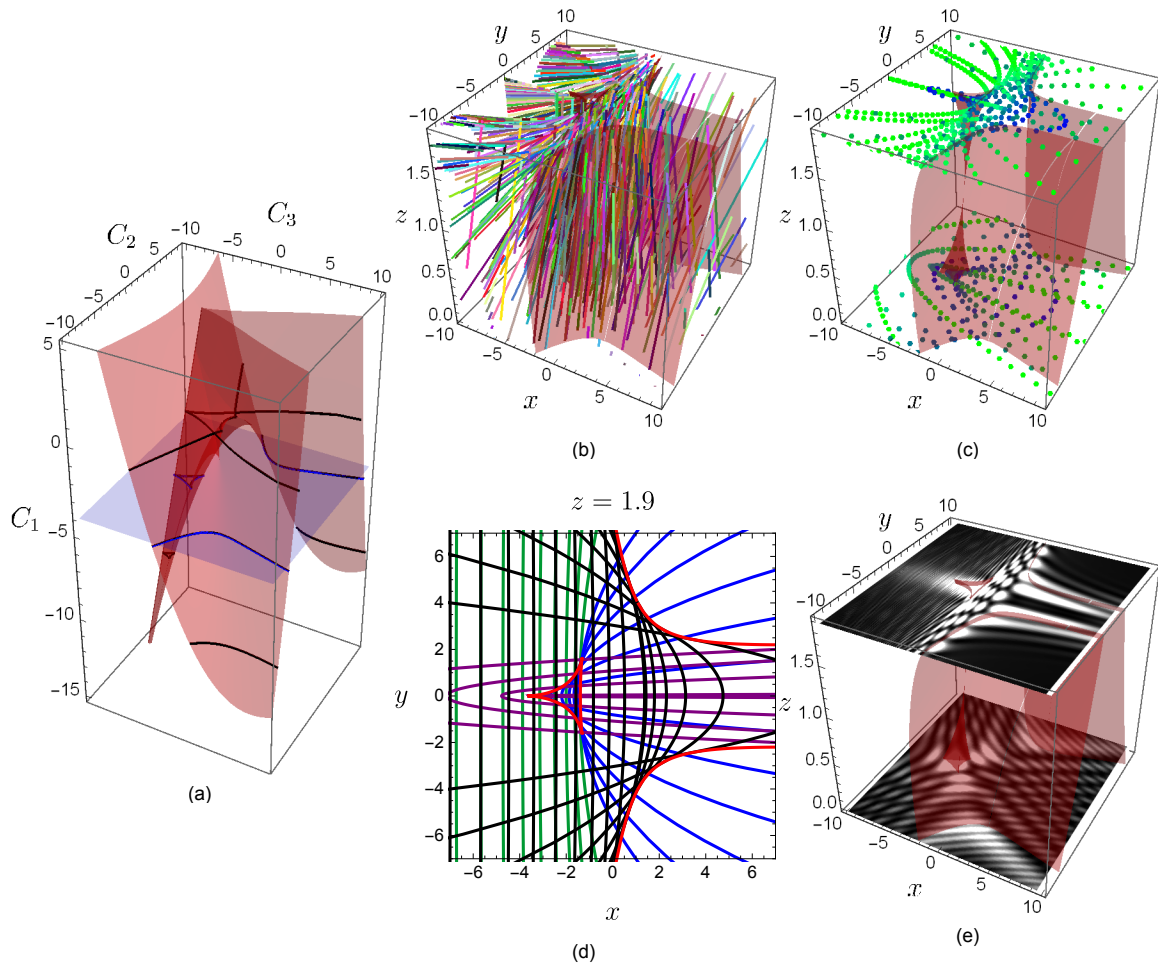


Figura 5.10: (a) Cáustica parabolic umbilic con $C_4 = 1,5$. (b) Rayos de luz (rectas coloreadas) y superficie cáustica asociados a la función de onda (5.103). En el inciso (c) se muestran las intersecciones de los rayos de luz con los planos $z = 0$ y $z = 1,9$. La coloración de los puntos tiende del azul al verde conforme el valor $\sqrt{\alpha^4 + \beta^2}$ se incrementa. (d) Curvas asociadas a las ecuaciones paramétricas (5.84) a (5.86) con $z = 1,9$ para valores discretos de α como función de β . (e) Se muestra la evolución del patrón de intensidad.

Capítulo 6

Haces adifraccionales de electrones

La existencia de ondas de materia fue propuesta por primera vez por de Broglie en 1924 [83, 84]. Basándose en la descripción matemática del efecto fotoeléctrico de Albert Einstein, el físico francés relacionó la longitud de onda λ_{dB} de una partícula con su momento lineal p mediante la fórmula

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p}, \quad (6.1)$$

donde $h \approx 6,626 \times 10^{-34} Js$ es la constante de Planck. Esta hipótesis fue confirmada experimentalmente tres años después con la observación del fenómeno de difracción de electrones [85, 86].

La evolución temporal de una partícula está gobernada por la ecuación de Schrödinger, formulación desarrollada por el físico austriaco Erwin Schrödinger en 1927 [87]. El estado de una partícula se representa por una función escalar, Ψ , la cual determina la probabilidad de detectar a una partícula en una posición \mathbf{r} en un tiempo particular t . Para un electrón en el vacío, esta ecuación se reduce a

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (6.2)$$

donde $\hbar = h/2\pi$ es la constante de Planck reducida, y $m_e \approx 9,109 \times 10^{-31} kg$ es la masa del electrón. Como los electrones deben satisfacer una ecuación de onda, entonces los haces adifraccionales existen para los haces de electrones. Los ejemplos más estudiados de haces de electrones teórica y experimentalmente son el haz de Airy y los haces Bessel [14, 13]. En 2014, Vincenzo Grillo et al. generaron los haces Bessel de electrones usando un holograma de fase. Comprobaron las propiedades básicas de este haz, como son la invariancia de su perfil de densidad de probabilidad en un plano transversal ante traslaciones a lo largo de la dirección de propagación del haz, así como su capacidad de autoreconstrucción al obstruirlo parcialmente. La función de onda de los haces Bessel de electrones es la siguiente

$$\Phi(r, \theta, z, t) = J_m(k_r r) e^{i(k_z z + m\theta - \omega t)}, \quad (6.3)$$

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTES DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

donde $J_m(\cdot)$ es la función de Bessel de orden m , (r, θ, z) corresponden a las coordenadas cilíndricas circulares, y $k^2 = k_r^2 + k_z^2$ es el número de onda. Análogamente a la sección **2.2**, podemos dar una caracterización geométrica (o semiclassical) de estos haces a través de una función \tilde{S} que satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi en el vacío. Los frentes de onda (superficies de nivel de \tilde{S}) y cáustica de los haces Bessel de electrones son equivalentes a los de la figura 4.2.

En el contexto de óptica geométrica, un campo óptico está caracterizado por una familia uniparamétrica de frentes de onda, o equivalentemente por una familia de rayos de luz y la cáustica. Los frentes de onda son superficies de nivel de una solución particular de la ecuación eikonal en el medio donde el campo óptico está evolucionando y la cáustica da una caracterización cualitativa del máximo de intensidad determinada por el campo óptico. De las investigaciones sobre las aplicaciones de los frentes de onda, rayos de luz y cáusticas, concluimos que la caracterización geométrica de un campo óptico dado es un modelo aceptable si la cáustica da una descripción cualitativa del máximo de intensidad de dicho campo óptico [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33].

En 1979, Berry y Balazs mostraron que la ecuación de Schrödinger unidimensional para una partícula de masa m en el vacío admite una solución única, aparte de la onda plana, en la forma de una función de Airy cuya densidad de probabilidad se propaga en el vacío sin distorsión y con aceleración constante. Subrayaron que ambas propiedades tienen un origen clásico; es decir, la propiedad de no dispersión del paquete de Airy está determinada por una familia de órbitas representadas por una parábola en el espacio fase que se traslada rígidamente de acuerdo con las ecuaciones de Hamilton, y la aceleración del paquete está determinada por la curvatura de la cáustica, envolvente de la familia de líneas de mundo en el espacio-tiempo. Es decir, estos autores dieron una caracterización mecánica clásica del haz de Airy [9].

En 2013 fue reportada la generación del haz de Airy de electrones, comprobándose su resistencia a la difracción, su aceleración durante su propagación en el espacio libre, y su capacidad de auto reconstrucción [13].

Es importante remarcar que la cáustica da una descripción cualitativa del máximo de la función de densidad de probabilidad de un haz de Airy. Sin embargo no lo determina cuantitativamente. Es decir, la densidad de probabilidad evaluada sobre la cáustica no toma el máximo valor.

6.1. Frentes de onda, acciones y cáusticas determinadas por la densidad de probabilidad de un haz de Airy

El objetivo de esta sección es dar una descripción clásica (geométrica) y cuantitativa del haz de Airy unidimensional. Es decir, vamos a usar a la Función de Densidad de Probabilidad de un haz de Airy para identificar sus máximos con un conjunto discreto de cáusticas que están asociadas con un conjunto discreto de acciones \tilde{S} de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Para este fin, vamos a partir de una solución Ψ de la ecuación de Schrödinger

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTES DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

unidimensional para una partícula de masa m en el vacío que fue construida como la superposición de una familia de ondas planas determinadas por una integral completa particular $S(x, t, P)$ de la ecuación de Hamilton-Jacobi y Laplace en el vacío. Vamos a señalar que la transformación canónica generada por la integral completa S , de manera natural, permite asociar a la solución Ψ : una familia biparamétrica de frentes de onda (C, Q) , una familia uniparamétrica Q de acciones $\tilde{S}(x, t, Q)$ y una familia uniparamétrica Q de cáusticas. Cuando el parámetro Q es cero, para el caso del haz de Airy se recuperan los resultados obtenidos por Berry y Balazs. Sin embargo, si Q es distinto cero, las acciones $\tilde{S}(x, t, Q)$ ya no son soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi en el vacío sino que son soluciones a la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula sujeta a un potencial de interacción $U(x, t, Q)$. Los resultados generales son aplicados al haz de Airy, y los frentes de onda, acciones, cáusticas y potenciales son explícitamente determinados.

6.1.1. Soluciones de la ecuación de Schrödinger generadas por funciones que satisfacen la ecuación de Hamilton-Jacobi y Laplace simultáneamente

Siguiendo el trabajo de Torres del Castillo y Sosa Sánchez [88], y en forma análoga a los capítulos anteriores, una función de la forma $\psi = \exp(iS/\hbar)$ es una solución exacta de la ecuación de Schrödinger unidimensional para una partícula libre de masa m

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (6.4)$$

si y solo si S es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi y Laplace en el vacío, es decir:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0. \quad (6.6)$$

Una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre que también satisface la ecuación de Laplace es

$$S(x, t, P) = xP - \frac{P^2}{2m}t + g(P), \quad (6.7)$$

donde P es un parámetro real, y $g(P)$ es una función arbitraria de P . En estas condiciones la función

$$\psi(x, t, P) = O(P) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(xP - \frac{P^2}{2m}t + g(P) \right) \right], \quad (6.8)$$

donde $O(P)$ es una función real arbitraria, es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación de Schrödinger unidimensional para una partícula libre de masa m . Aplicando el principio de superposición, vamos a definir una nueva solución Ψ de la siguiente manera

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTE DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

$$\Psi(x, t) \equiv \int_{\mathcal{D}} O(P) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(xP - \frac{P^2}{2m}t + g(P) \right) \right] dP, \quad (6.9)$$

donde \mathcal{D} es una variedad unidimensional. Nótese que la solución (6.9) consta de la superposición de ondas planas de amplitud $O(P)$ y fase

$$\Lambda(x, t, P) = \frac{1}{\hbar} \left(xP - \frac{P^2}{2m}t + g(P) \right). \quad (6.10)$$

6.1.2. Caracterización clásica de la nueva solución Ψ

Frentes de onda y la acción \tilde{S}

Siguiendo las ideas del capítulo 1 y 2, vamos a asociar a la familia uniparamétrica de soluciones (6.8) una familia biparamétrica de frentes de onda en el espacio-tiempo (x, t) definida por todos los puntos del espacio que satisfacen

$$S(x, t, P) = xP - \frac{P^2}{2m}t + g(P) = C, \quad (6.11)$$

donde C es un parámetro real. De la ecuación (6.11), concluimos que los frentes de onda asociados con la familia de soluciones (6.8) son líneas rectas y que en cada punto del espacio pasan tantas líneas como diferentes valores puede tomar el parámetro P (ver figura 6.1 para el haz de Airy). Vamos a asociarle a la nueva solución Ψ (ver ecuación (6.9) una nueva familia de frentes de onda en el espacio-tiempo generada por la envolvente de los frentes de onda (6.11), es decir, por todo el conjunto de puntos (x, t) que en adición con la condición (6.11) también satisfacen

$$\frac{\partial S(x, t, P)}{\partial P} = x - \frac{P}{m}t + g' = 0, \quad (6.12)$$

donde $g' = dg/dP$. En estas condiciones, la forma paramétrica de la familia de frentes de onda asociados con la solución (6.9) es

$$\begin{aligned} x &= \frac{2(C - g) + g'P}{P}, \\ t &= \frac{2m[C - g + g'P]}{P^2}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

(Ver figura 6.2 para el haz de Airy) Es importante remarcar que la envolvente de los frentes de onda (6.11), cuya forma paramétrica está descrita por las ecuaciones (6.13), es una nueva familia de frentes de onda ya que son las curvas de nivel de una nueva solución, \tilde{S} , de la ecuación de Hamilton-Jacobi (6.5). Para obtener explícitamente a la función \tilde{S} , de la condición (6.12) debemos obtener P como función de (x, t) , es decir

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTES DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

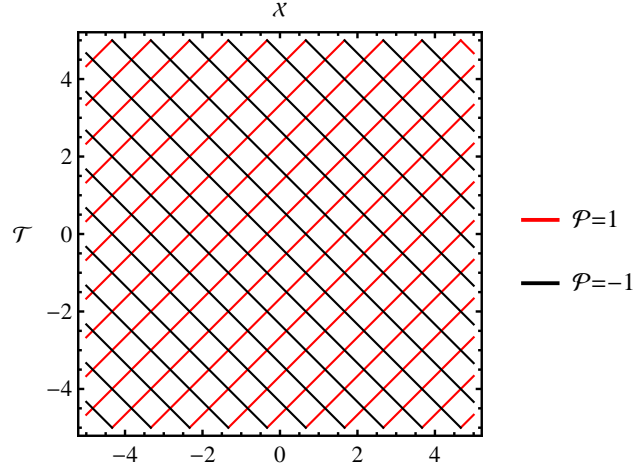


Figura 6.1: Se muestran los frentes de onda descritos por las ecuaciones (6.11) y (6.32), donde hemos usando el cambio de variable $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$, $\mathcal{P} = P/(B\hbar^{1/3})$ y $\mathcal{C} = C/\hbar$; es decir, mostramos las curvas de nivel $\mathcal{X}\mathcal{P} - \mathcal{P}^2\mathcal{T} + \mathcal{P}^3/3 = \mathcal{C}$, para $\mathcal{P} = -1, 1$.

$$P = \Gamma(x, t), \tag{6.14}$$

al sustituir este resultado en la ecuación (6.7), encontramos que la nueva solución \tilde{S} se define como

$$\tilde{S}(x, t) \equiv S(x, t, \Gamma(x, t)) = x\Gamma(x, t) - \frac{\Gamma^2(x, t)}{2m}t + g(\Gamma(x, t)). \tag{6.15}$$

Aplicando la ecuación (6.12), es fácil comprobar que, en efecto, la ecuación (6.15) es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi (6.5) con curvas de nivel (frentes de onda) descritas por las ecuaciones (6.13). Esto significa que clásicamente la función de onda (6.9) está caracterizada por la acción (6.15).

La cáustica asociada con Ψ

Desde un punto de vista matemático, los frentes de onda (6.13) están descritos por un mapeo entre dos subconjuntos de \mathbb{R}^2 , donde (C, P) son las coordenadas locales del espacio dominio y (x, t) son las coordenadas locales del espacio imagen. La cáustica asociada con este mapeo vamos a calcularla de acuerdo con la siguiente definición (ver sección 1.4.1):

Definición: Sea $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un mapeo diferencial, siendo \mathcal{M} y \mathcal{N} variedades diferenciables. El conjunto de puntos en \mathcal{M} donde h no es un mapeo uno a uno localmente se le llama conjunto crítico, y a la imagen del conjunto crítico se le llama conjunto cáustico [42].

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTES DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

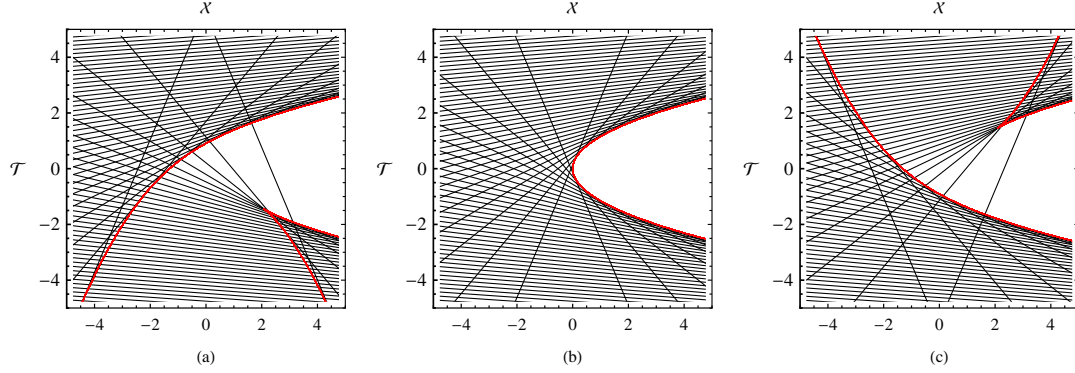


Figura 6.2: Se muestran los frentes de onda (negro) determinados por las ecuaciones (6.11) y (6.32), donde se ha aplicado el cambio de variable $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$, $\mathcal{P} = P/(B\hbar^{1/3})$ y $\mathcal{C} = C/\hbar$; esto es, $\mathcal{X}\mathcal{P} - \mathcal{P}^2\mathcal{T} + \mathcal{P}^3/3 = \mathcal{C}$ con: (a) $\mathcal{C} = -1$, (b) $\mathcal{C} = 0$ y (c) $\mathcal{C} = 1$. Hemos incluido las envolventes (rojo) de estas familias de frentes de onda, las cuales corresponden a los frentes de onda descritos por las ecuaciones (6.33); esto es, $\mathcal{X} = 2\mathcal{C}/\mathcal{P} + \mathcal{P}^2/3$, $\mathcal{T} = 2\mathcal{P}/3 + \mathcal{C}/\mathcal{P}^2$.

Por lo tanto, el conjunto crítico del mapeo (6.13), es decir, el conjunto de puntos del espacio dominio con coordenadas locales (C, P) tales que el mapeo no es localmente uno a uno, está dado por

$$C = g - Pg' + \frac{P^2}{2}g'', \quad (6.16)$$

y el conjunto cáustico, el cual es la imagen del conjunto crítico bajo el mapeo (6.13), es

$$\begin{aligned} x_c &= Pg'' - g', \\ t_c &= mg'', \end{aligned} \quad (6.17)$$

Hasta este punto, hemos presentado un método para caracterizar clásicamente a la función de onda Ψ dada por la ecuación (6.9), es decir, hemos obtenido su acción asociada \tilde{S} , sus frentes de onda y cáustica. Por lo tanto, a partir de un procedimiento diferente al de Berry y Balazs, obtendremos la caracterización clásica del haz de Airy, como veremos más adelante.

6.1.3. Caracterización clásica de los máximos de la función de densidad de probabilidad $|\Psi|^2$

Al igual que en los capítulos anteriores para los haces ópticos, es de esperarse que si $O(P) = \text{constante}$, entonces la cáustica asociada con la función de onda (6.9) nos dará una caracterización cualitativa del máximo de la función de densidad de probabilidad. Sin embargo, la cáustica no necesariamente determina en forma cuantitativa al máximo supremo de la función de densidad de probabilidad. Además, la función de densidad de probabilidad no necesariamente tiene un máximo sino una serie de máximos, como puede

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTES DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

observarse de la figura 6.5 para el haz de Airy. En esta subsección, a partir de la transformación canónica generada por la integral completa (6.7) de la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre de masa m , vamos a introducir una generalización de los resultados de la subsección anterior. Es decir, a la función de onda (6.9) le vamos a asociar una familia biparamétrica de frentes de onda (las cuales son las curvas de nivel de una familia uniparamétrica de acciones) y una familia uniparamétrica de cáusticas que, para el caso del haz de Airy, permitirán caracterizar en forma cualitativa y cuantitativa a todos los máximos de la función de densidad de probabilidad, como mostraremos más adelante. Veremos que cuando el parámetro Q que etiqueta frentes de ondas, acciones y cáusticas es cero, los resultados obtenidos se reducen a los de la subsección anterior. Sin embargo, si éste parámetro es diferente de cero, las acciones ya no satisfacen la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre sino que satisfacen la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula sujeta a un potencial, que en general, depende de la posición, del tiempo y del parámetro Q .

Familia de frentes de onda y acciones

En el contexto de mecánica clásica, la integral completa (6.7) genera una transformación canónica del espacio fase con coordenadas locales (x, p) a un nuevo espacio fase con coordenadas locales (Q, P) dada por

$$Q = \frac{\partial S(x, t, P)}{\partial P} = x - \frac{P}{m}t + g', \quad (6.18)$$

$$p = \frac{\partial S(x, t, P)}{\partial x} = P. \quad (6.19)$$

donde Q y P son constantes de movimiento para el problema de una partícula libre. Como la ecuación (6.12) es un caso especial de la ecuación (6.18), entonces la transformación canónica, en forma natural, nos permite asociarle a la función de onda Ψ , una familia biparamétrica de frentes de onda en el espacio-tiempo que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$S(x, t, P) = xP - \frac{P^2}{2m}t + g(P) = C, \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial S(x, t, P)}{\partial P} = x - \frac{P}{m}t + g' = Q. \quad (6.21)$$

De las ecuaciones (6.20) y (6.21), es fácil mostrar que la forma paramétrica de la familia biparamétrica de frentes de onda asociada con la solución (6.9) está dada por

$$\begin{aligned} x &= \frac{2(C - g) + (g' - Q)P}{P}, \\ t &= \frac{2m[C - g + (g' - Q)P]}{P^2}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Es importante señalar que los frentes de onda (6.22) ya no son frentes de onda en el espacio libre sino que son las curvas de nivel de soluciones a la ecuación de Hamilton-Jacobi con

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTES DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

un potencial dado. Por lo tanto, estos frentes de onda pueden estar ligados con efectos cuánticos del haz, es decir, pueden contener información acerca de los demás máximos de la función de densidad de probabilidad. Para obtener dichos potenciales, vamos a obtener la forma explícita de la familia uniparamétrica de acciones $\tilde{S}(x, t, Q)$:

De la ecuación (6.21), puede obtenerse localmente

$$P = \Gamma(x, t, Q). \quad (6.23)$$

Al sustituir este resultado en la ecuación (6.7) hallamos que la familia uniparamétrica de acciones $\tilde{S}(x, t, P)$ se define como

$$\tilde{S}(x, t, Q) \equiv S(x, t, \Gamma(x, t, Q)) = x\Gamma(x, t, Q) - \frac{\Gamma^2(x, t, Q)}{2m}t + g(\Gamma(x, t, Q)). \quad (6.24)$$

Por sustitución directa, es fácil comprobar que $\tilde{S}(x, t, P)$ es solución de la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} \right)^2 + U(x, t, Q) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0, \quad (6.25)$$

donde

$$U(x, t, Q) \equiv -\frac{Q}{2m} \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial x} \left(2\Gamma + Q \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) + 2m \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right]. \quad (6.26)$$

Esto significa que, clásicamente, la función de onda (6.9) está caracterizada por una familia de acciones (6.24) que contienen información clásica del comportamiento de los máximos de la densidad de probabilidad.

Nótese que los frentes de onda (6.22) son las curvas de nivel de las acciones (6.24).

La familia de cáusticas

Es claro de la ecuaciones (6.22) que para un valor dado de Q obtenemos una familia uniparamétrica de frentes de onda descritos por un mapeo entre dos subconjuntos de \mathbb{R}^2 , donde (C, P) son las coordenadas locales del conjunto dominio y (x, t) son las coordenadas locales del conjunto imagen. Por lo tanto, el conjunto crítico del mapeo (6.22), es decir, el conjunto de puntos del espacio dominio con coordenadas locales (C, P) tales que el mapeo (6.22) no es uno a uno localmente, está dado por

$$C = g + P(Q - g') + \frac{P^2}{2}g''. \quad (6.27)$$

Por lo tanto, el conjunto cáustico, que es la imagen del conjunto crítico bajo el mapeo (6.22), resulta ser

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTES DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

$$\begin{aligned}x_c &= Q - g' + Pg'', \\t_c &= mg''.\end{aligned}\tag{6.28}$$

En esta subsección, hemos mostrado que la transformación canónica dada por las ecuaciones (6.18) y (6.19), generada por la integral completa (6.7), permite asociarle a la función de onda (6.9) una familia biparamétrica de frentes de onda (6.22), que son las curvas de nivel de la familia uniparamétrica de acciones (6.24), que satisfacen la ecuación de Hamilton-Jacobi (6.25) para una partícula de masa m sujeta a un potencial (6.26) que se reduce a cero si $Q = 0$. Es importante señalar que el parámetro Q , que surge de la teoría de Hamilton-Jacobi, es una coordenada del espacio fase, y por lo tanto puede tomar valores en forma continua. Nótese que para el caso particular $Q = 0$, todos los resultados de esta subsección se reducen a los resultados de la subsección anterior.

6.1.4. Caracterización clásica del haz de Airy

En esta subsección vamos a aplicar los resultados obtenidos en la sección **3.1.2** al haz de Airy. Es decir, vamos a obtener la familia uniparamétrica de frentes de onda, la acción y la cáustica que obtuvieron Berry y Balazs usando la aproximación asintótica de la función de Airy. Para este fin, vamos a partir de la solución que hallaron estos autores [9]

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= Ai \left[\frac{B}{\hbar^{2/3}} \left(x - \frac{B^3 t^2}{4m^2} \right) \right] \exp \left[i \left(\frac{B^3 t x}{2m\hbar} - \frac{B^6 t^3}{12m^3\hbar} \right) \right] \\ &= \frac{\hbar^{2/3}}{2\pi B} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(kx - \frac{\hbar k^2 t}{2m} + \frac{\hbar^2 k^3}{3B^3} \right) \right] dk,\end{aligned}\tag{6.29}$$

donde B es una constante positiva, y $Ai(\cdot)$ es la función de Airy. Al usar la fórmula de De Broglie, $k = P/\hbar$, en la expresión anterior, obtenemos lo siguiente

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\hbar^{1/3}B} e^{i \left(xP - \frac{P^2}{2m}t + \frac{P^3}{3B^3} \right)} dP.\tag{6.30}$$

Por lo tanto, al comparar la expresión anterior con la ecuación (6.9) resulta que para el haz de Airy se debe satisfacer que

$$O(P) = \frac{1}{2\pi\hbar^{1/3}B},\tag{6.31}$$

$$g(P) = \frac{P^3}{3B^3}.\tag{6.32}$$

De las ecuaciones (6.13) y (6.32), resulta que la familia uniparamétrica de frentes de onda asociada al haz de Airy está dada por

$$\begin{aligned}x &= \frac{2C}{P} + \frac{P^2}{3B^3}, \\t &= 2m \left(\frac{2P}{3B^3} + \frac{C}{P^2} \right).\end{aligned}\tag{6.33}$$

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTES DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

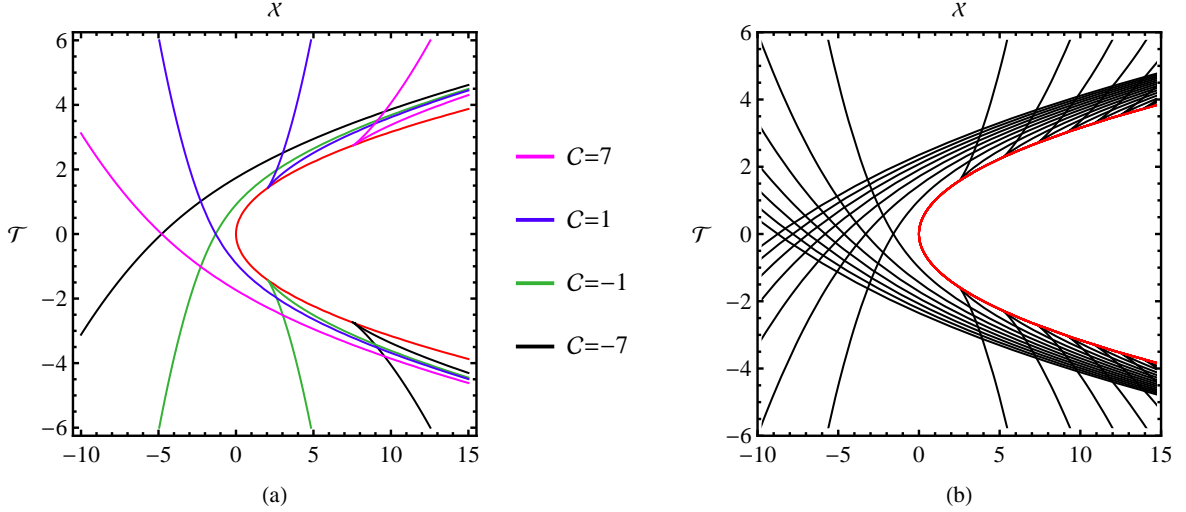


Figura 6.3: Se muestran los frentes de onda determinados por las ecuaciones (6.33), con $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$, $\mathcal{P} = P/(B\hbar^{1/3})$ y $\mathcal{C} = C/\hbar$; es decir, $\mathcal{X} = 2\mathcal{C}/\mathcal{P} + \mathcal{P}^2/3$, $\mathcal{T} = 2\mathcal{P}/3 + \mathcal{C}/\mathcal{P}^2$. También se muestra la cáustica (rojo) determinada por la ecuación (6.36); es decir, $\mathcal{X}_c - \mathcal{T}_c^2 = 0$. De estas figuras observamos que los frentes de onda tienen singularidades sobre la curva cáustica.

Por otra parte, de las ecuaciones (6.16), (6.17) y (6.32), resulta que el conjunto crítico y cáustico asociado al haz de Airy es

$$C = \frac{P^3}{3B^3}, \quad (6.34)$$

y

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{P^2}{B^3}, \\ t_c &= \frac{2mP}{B^3}, \end{aligned} \quad (6.35)$$

respectivamente. Es decir, la cáustica es una parábola en el espacio tiempo descrita por

$$x_c - \frac{B^3 t_c^2}{4m^2} = 0. \quad (6.36)$$

En la figura 6.3 presentamos los frentes de onda (6.33) y la cáustica (6.36) asociados al haz de Airy. De esta figura resulta claro que los frentes de onda tiene singularidades sobre la cáustica, exactamente de la misma manera que en el contexto de óptica geométrica (ver sección 1.4).

Por otra parte, la ecuación (6.14) resulta ser

$$P = \frac{B^3 t \pm \sqrt{B^6 t^2 - 4B^3 m^2 x}}{2m}, \quad (6.37)$$

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTE DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

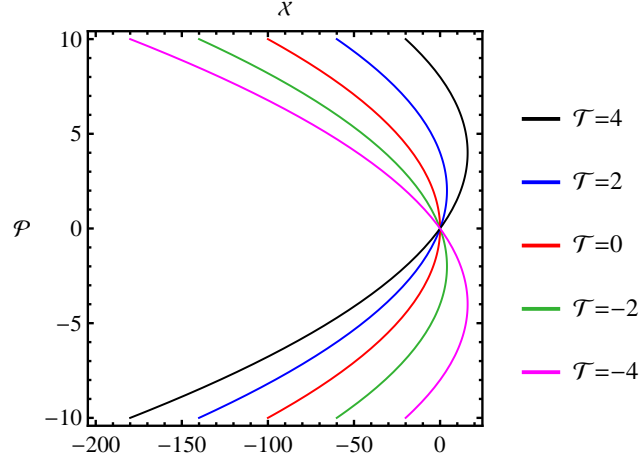


Figura 6.4: En este gráfico mostramos la relación entre x y p para diferentes instantes de tiempo, determinados por la ecuación (6.40), donde hemos considerado el cambio de variable $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$ y $\mathcal{P} = P/(B\hbar^{1/3})$; esto es, $\mathcal{X} - \mathcal{T}^2 + (\mathcal{P} - \mathcal{T})^2 = 0$.

y, por lo tanto, la acción asociada al haz de Airy es

$$\tilde{S}(x, t) = \frac{-1}{12m^3} [B^3t(B^3t^2 - 6m^2x) \pm B^{3/2}(B^3t^2 - 4m^2x)^{3/2}]. \quad (6.38)$$

De esta acción se obtiene lo siguiente

$$p = \frac{\partial \tilde{S}_{\pm}(x, t)}{\partial x} = \frac{B^3t}{2m} \pm \frac{B^{3/2}}{2m} \sqrt{B^3t^2 - 4m^2x}, \quad (6.39)$$

lo cual es equivalente a (ver figura 6.4)

$$x - \frac{B^3t^2}{4m^2} + \frac{1}{B^3} \left(p - \frac{B^3t}{2m} \right)^2 = 0. \quad (6.40)$$

Es decir, el haz de Airy está asociado con una familia de órbitas parabólicas en el espacio fase que se trasladan rígidamente de acuerdo con las ecuaciones de Hamilton-Jacobi para una partícula libre. Precisamente esta propiedad es lo que hace del haz de Airy una solución única, ya que la parábola es la única curva que se traslada rígidamente, condición necesaria para que una función de onda evolucione sin distorsionarse.

Es importante señalar que Berry y Balazs, usando la aproximación asintótica del haz de Airy, mostraron que el haz de Airy al tiempo $t = 0$ está caracterizado por la acción $\tilde{S}(x, 0)$ dada por la ecuación (6.38) evaluada en $t = 0$, luego, usando este resultado y la solución de las ecuaciones de Hamilton para una partícula libre obtuvieron la ecuación (6.40) y la cáustica (6.36). Por otro lado, en esta subsección, usando el procedimiento

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTES DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

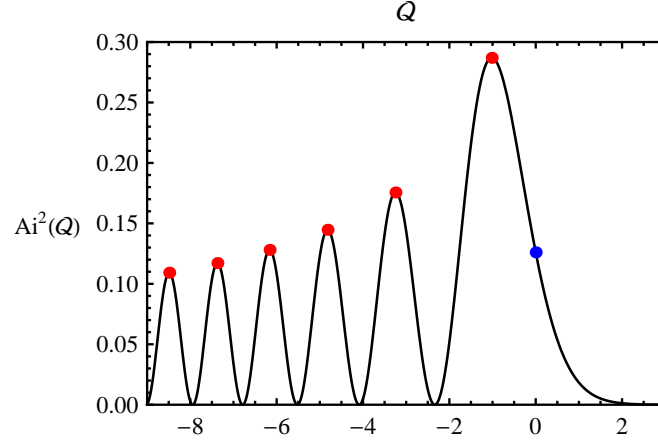


Figura 6.5: Gráfica de la densidad de probabilidad, $Ai^2(Q)$, de un haz Airy, donde hemos definido $Q = (BQ)/\hbar^{2/3}$. Los puntos en rojo corresponden a los puntos máximos de la densidad de probabilidad, y el azul es la evaluación de la densidad de probabilidad en la cáustica, para $Q = 0$. De esta gráfica notamos que el máximo supremo de la densidad de probabilidad no coincide con la cáustica.

descrito en la sección **3.1.2**, hemos obtenido la acción $\tilde{S}(x, t)$ dada por la ecuación (6.38) la cual es válida para cualquier tiempo, sin necesidad de recurrir a la aproximación asintótica del haz de Airy.

La función de densidad de probabilidad del haz de Airy está dada por

$$|\Psi(x, t)|^2 = \left(Ai \left[\frac{B}{\hbar^{2/3}} \left(x - \frac{B^3 t^2}{4m^2} \right) \right] \right)^2, \quad (6.41)$$

al evaluarla sobre la cáustica, la expresión anterior se reduce a

$$|\Psi(x_c, t_c)|^2 = \left(Ai \left[\frac{B}{\hbar^{2/3}} \left(x_c - \frac{B^3 t_c^2}{4m^2} \right) \right] \right)^2 = (Ai[0])^2 = 0,1260, \quad (6.42)$$

lo cual no corresponde con el máximo valor de la función de densidad de probabilidad, que es 0,2869 (ver figura 6.5), por lo tanto, la cáustica caracteriza solo en forma cualitativa al máximo de la función de densidad de probabilidad.

Caracterización clásica de los máximos de la densidad de probabilidad de un haz de Airy

De las ecuaciones (6.22), (6.27), (6.28) y (6.32), resulta que la familia biparamétrica de frentes de onda, y la familia uniparamétrica del conjunto crítico y cáustico asociados con un haz de Airy son

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES
6.1. FRENTES DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

$$\begin{aligned} x &= \frac{2C}{P} + \frac{P^2}{3B^3} - Q, \\ t &= 2m \left(\frac{2P}{3B^3} - \frac{Q}{P} + \frac{C}{P^2} \right), \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$C = \frac{P^3}{3B^3} + PQ, \quad (6.44)$$

y

$$x_c - \frac{B^3 t_c^2}{4m^2} = Q, \quad (6.45)$$

respectivamente. Por otra parte, la ecuación (6.23) resulta ser

$$P(x, t, Q) = \frac{B^3 t \pm \sqrt{B^6 t^2 + 4B^3 m^2 (Q - x)}}{2m}, \quad (6.46)$$

y, por lo tanto, la familia uniparamétrica de acciones (6.24) asociada al haz de Airy es

$$\tilde{S}(x, t, Q) = \frac{-1}{12m^3} \left[B^3 t (B^3 t^2 - 6m^2 x) \pm [B^3 t^2 - 2m^2 (Q + 2x)] \sqrt{B^6 t^2 + 4B^3 m^2 (Q - x)} \right]. \quad (6.47)$$

De esta ecuación, se obtiene lo siguiente

$$\tilde{p} = \frac{\partial \tilde{S}_{\pm}(x, t)}{\partial x} = \frac{B^3 t}{2m} \pm \frac{B^{3/2} [B^3 t^2 + 2m^2 (Q - 2x)]}{2m \sqrt{B^3 t^2 + 4m^2 (Q - x)}}, \quad (6.48)$$

lo cual es equivalente a

$$\left(\tilde{p} - \frac{B^3 t}{2m} \right)^2 = \frac{B^3}{4m^2} \left(\sqrt{B^3 t^2 + 4m^2 (Q - x)} - \frac{2m^2 Q}{\sqrt{B^3 t^2 + 4m^2 (Q - x)}} \right)^2. \quad (6.49)$$

De las ecuaciones (6.23), (6.26) y (6.46), puede mostarse que la familia uniparamétrica de potenciales asociados con el haz de Airy está dada por

$$U(x, t, Q) = \frac{B^3 Q^2}{8m \left(x - \frac{B^3 t^2}{4m^2} - Q \right)}. \quad (6.50)$$

El resultado principal de esta sección consiste en mostrar que la densidad de probabilidad del haz de Airy dada por la ecuación (6.41), en forma natural, determina un conjunto

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTES DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

discreto de valores Q_n del parámetro Q . Es decir, vamos a pedir que la densidad de probabilidad del haz de Airy evaluada sobre la familia uniparamétrica de cáusticas,

$$\begin{aligned} |\Psi(x_c, t_c)|^2 &= \left(Ai \left[\frac{B}{\hbar^{2/3}} \left(x_c - \frac{B^3 t_c^2}{4m^2} \right) \right] \right)^2 \\ &= \left(Ai \left[\frac{BQ_n}{\hbar^{2/3}} \right] \right)^2, \end{aligned} \quad (6.51)$$

sea igual a los máximos de la función $|\Psi(x, t)|^2$. Por lo tanto, si la función de Airy $[Ai(Q)]^2$ tiene un máximo en Q_n , entonces

$$Q_n \equiv \frac{\hbar^{2/3} Q_n}{B}. \quad (6.52)$$

Es decir, en forma natural, hemos asociado a los máximos de la función de densidad de probabilidad del haz de Airy un conjunto de sistemas Hamiltonianos descritos por las siguientes funciones de Hamilton

$$H_n(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{B^3 Q_n^2}{8m \left(x - \frac{B^3 t^2}{4m^2} - Q_n \right)}. \quad (6.53)$$

Con el fin de mostrar de forma conveniente los resultados obtenidos para el haz de Airy, vamos a introducir los siguientes parámetros adimensionales: $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2 t)/(2m\hbar^{1/3})$, $\mathcal{P} = P/(B\hbar^{1/3})$, $\mathcal{C} = C/\hbar$, $\mathcal{Q} = (BQ)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{U} = (8mU)/(B^2\hbar^{2/3})$ y $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{p}/(B\hbar^{1/3})$. Por ejemplo, usando estos nuevos parámetros, de las ecuaciones (6.50) y (6.52) resulta que los potenciales determinados por los máximos de la función de densidad de probabilidad de un haz de Airy pueden reescribirse de la siguiente manera

$$\mathcal{U}_n = \frac{\mathcal{Q}_n^2}{\mathcal{X} - \mathcal{T}^2 - \mathcal{Q}_n}. \quad (6.54)$$

En la figura 6.6, se muestra la función de densidad de probabilidad del haz de Airy (6.41) y cuatro cáusticas que satisfacen la ecuación (6.45). En la figura 6.7, presentamos los potenciales determinados por los primeros tres máximos del haz de Airy. En la figura 6.8 presentamos los frentes de onda y la cáustica determinados por el primer máximo de la densidad de probabilidad del haz de Airy dados por las ecuaciones (6.43), (6.45) y (6.52). Cabe señalar que los frentes de onda asociados con los máximos de la función de densidad de probabilidad del haz de Airy no tienen singularidades sobre la cáustica, como se observa de las figuras 6.8 y 6.9. En la figura 6.10 presentamos la familia de orbitas determinada por la ecuación (6.49) para los tres primeros máximos de la función de densidad de probabilidad y para algunos valores discretos de tiempo t .

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTES DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

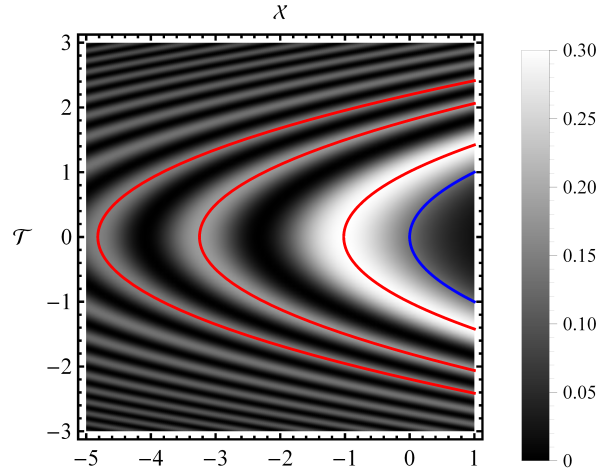


Figura 6.6: Grafico de densidad de la densidad de probabilidad de un haz de Airy descrito por la ecuación (6.41), donde hemos considerado el cambio de variable $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$ y $\mathcal{Q} = (BQ)/\hbar^{2/3}$; esto es, $[Ai(\mathcal{X} - \mathcal{T}^2)]^2$. Además se muestran cuatro cáusticas descritas por la ecuación (6.45); es decir por la ecuación $\mathcal{X} - \mathcal{T}^2 = \mathcal{Q}_n$ para los valores particulares $\mathcal{Q}_0 = 0$ (azul), $\mathcal{Q}_1 = -1,0188$ (rojo) determinado por el primer máximo, $\mathcal{Q}_2 = -3,2482$ (rojo) determinado por el segundo máximo, y $\mathcal{Q}_3 = -4,8201$ (rojo) determinado por el tercer máximo.

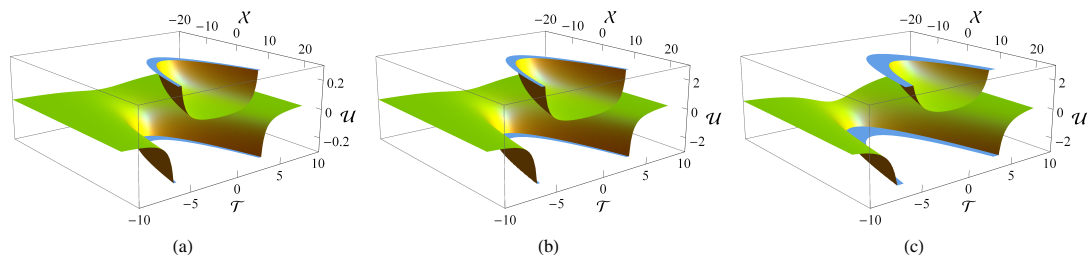


Figura 6.7: Gráficos de los potenciales determinados por los máximos de la densidad de probabilidad de un haz de Airy (ecuación (6.54)) para los valores particulares (a) $\mathcal{Q}_1 = -1,0188$ (primer máximo), (b) $\mathcal{Q}_2 = -3,2482$ (segundo máximo) y (c) $\mathcal{Q}_3 = -4,8201$ (tercer máximo).

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTE DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

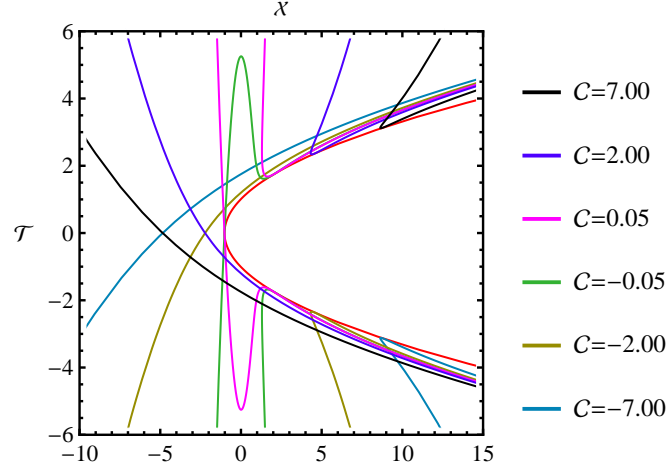


Figura 6.8: Frentes de onda y cáustica (rojo) determinados por el primer máximo de la densidad de probabilidad de un haz de Airy dados por las ecuaciones (6.43), (6.45) y (6.52) con el cambio de variable $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$, $\mathcal{P} = P/(B\hbar^{1/3})$, $\mathcal{C} = C/\hbar$ y $\mathcal{Q} = (BQ)/\hbar^{2/3}$; esto es, los frentes de onda $\mathcal{X} = 2\mathcal{C}/\mathcal{P} + \mathcal{P}^2/3 - \mathcal{Q}_1$, $\mathcal{T} = 2\mathcal{P}/3 - \mathcal{Q}_1/\mathcal{P} + \mathcal{C}/\mathcal{P}^2$ y la cáustica $\mathcal{X} - \mathcal{T}^2 = \mathcal{Q}_1$ con $\mathcal{Q}_1 = -1,0188$. Nótese que estos frentes de onda no son singulares sobre la curva cáustica.

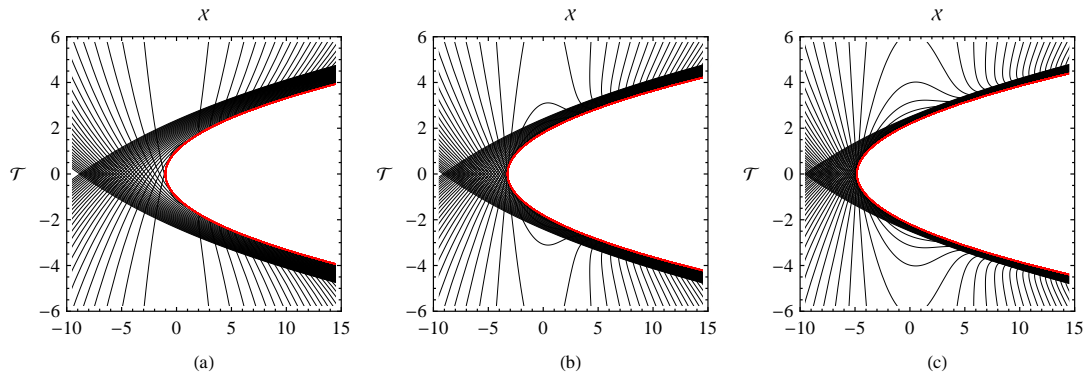


Figura 6.9: Frentes de onda (negro) y cáustica (rojo) determinados por los primeros tres máximos de la densidad de probabilidad de un haz de Airy, descritos por las ecuaciones (6.43), (6.45) y (6.52), con $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$, $\mathcal{P} = P/(B\hbar^{1/3})$, $\mathcal{C} = C/\hbar$ y $\mathcal{Q} = (BQ)/\hbar^{2/3}$; esto es, los frentes de onda $\mathcal{X} = 2\mathcal{C}/\mathcal{P} + \mathcal{P}^2/3 - \mathcal{Q}_n$, $\mathcal{T} = 2\mathcal{P}/3 - \mathcal{Q}_n/\mathcal{P} + \mathcal{C}/\mathcal{P}^2$ y las cáusticas $\mathcal{X} - \mathcal{T}^2 = \mathcal{Q}_n$ con: (a) $\mathcal{Q}_1 = -1,0188$ (primer máximo), (b) $\mathcal{Q}_2 = -3,2482$ (segundo máximo) y (c) $\mathcal{Q}_3 = -4,8201$ (tercer máximo).

CAPÍTULO 6. HACES ADIFRACCIONALES DE ELECTRONES

6.1. FRENTES DE ONDA, ACCIONES Y CÁUSTICAS DETERMINADAS POR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UN HAZ DE AIRY

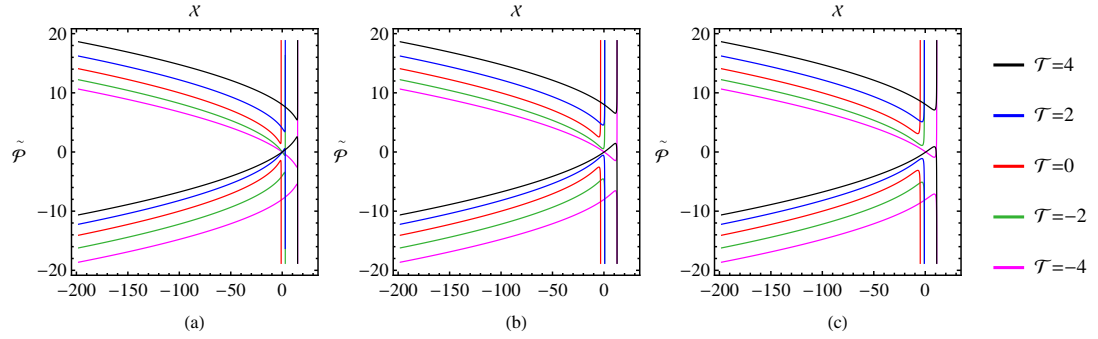


Figura 6.10: Se muestra la relación entre x y \tilde{p} para diferentes instantes de tiempo, descritos por las ecuaciones (6.49) y (6.52), con $\mathcal{X} = (Bx)/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = (B^2t)/(2m\hbar^{1/3})$, $\mathcal{Q} = (BQ)/\hbar^{2/3}$ y $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{p}/(B\hbar^{1/3})$; esto es, $(\tilde{\mathcal{P}} - \mathcal{T})^2 = (\sqrt{\mathcal{T}^2 + \mathcal{Q}_n - \mathcal{X}} - \mathcal{Q}_n/2\sqrt{\mathcal{T}^2 + \mathcal{Q}_n - \mathcal{X}})^2$ para: (a) $\mathcal{Q}_1 = -1,0188$ (primer máximo), (b) $\mathcal{Q}_2 = -3,2482$ (segundo máximo) y (c) $\mathcal{Q}_3 = -4,8201$ (tercer máximo).

Capítulo 7

Comparación de la cáustica con los ceros del potencial de Madelung-Bohm

La descripción geométrica de una función de onda es una herramienta útil para el estudio de la propagación de ondas en óptica y mecánica cuántica, e incluso en el contexto de la relatividad general. En todos estos campos de estudio, la cáustica juega un papel importante en la propagación de los rayos ya que no solo caracteriza la región de máxima contribución de la intensidad sino que también determina la estabilidad de un haz [89] y además describe la parte más clásica de una onda en el sentido de que su evolución está gobernada por la ecuación de Hamilton-Jacobi, como lo hemos mostrado en el capítulo 3. Por otro lado, las ecuaciones de Madelung-de Broglie-Bohm de la mecánica cuántica también nos permiten asociarle a una onda una descripción clásica a través de una ecuación de Hamilton-Jacobi modificada, la cual contiene un término adicional (en comparación con la bien conocida ecuación de Hamilton-Jacobi) que llamaremos el potencial de Madelung-Bohm [90, 91]. Si los valores que toma el potencial de Madelung-Bohm son insignificantes en comparación con la “energía clásica” del sistema físico, entonces la ecuación de Hamilton-Jacobi gobierna el sistema (sistema macroscópico). Sin embargo, a nivel cuántico, la ecuación de Hamilton-Jacobi también se recupera sobre puntos del espacio-tiempo donde el potencial de Madelung-Bohm es cero. En este sentido, decimos que los ceros del potencial de Madelung-Bohm corresponden a la contraparte más clásica de una función de onda.

El objetivo principal de este capítulo es comparar las descripciones clásicas determinadas por la aproximación geométrica, la cáustica, con respecto a las ecuaciones de Madelung- de Broglie-Bohm, los ceros del potencial de Madelung-Bohm, asociados con una solución de la ecuación de Schrödinger. Vamos a mostrar que las funciones de onda que tienen asociada una cáustica tipo fold son los haces más “clásicos” ya que los ceros del potencial de Madelung-Bohm coinciden con la cáustica. Para otro tipo de haces, el potencial de Madelung-Bohm es en general distinto de cero sobre la cáustica. Vamos a verificar estos resultados para el haz de Airy y Pearcey, los cuales de acuerdo con la teoría de catástrofes, tienen una cáustica estable.

**CAPÍTULO 7. COMPARACIÓN DE LA CÁUSTICA CON LOS CEROS
DEL POTENCIAL DE MADELUNG-BOHM**
7.1. CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA DE UNA FUNCIÓN DE ONDA

7.1. Caracterización geométrica de una función de onda

En los capítulos anteriores hemos descrito el procedimiento para obtener la descripción geométrica de una función de onda de la forma

$$\Phi(x, t) = \int_{\mathbb{R}} O(P) e^{iS(x, P, t)/\hbar} dP. \quad (7.1)$$

Si $S(x, P, t)$ es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi y la ecuación de Laplace, entonces $\Phi(x, t)$ satisface la ecuación de Schrödinger, donde $O(P)$ es una función real y arbitraria. Bajo estas condiciones, los rayos asociados con la función de onda (7.1) corresponden al conjunto de puntos que hacen estacionaria a la función $S(x, P, t)$, es decir,

$$\frac{\partial S}{\partial P} = 0, \quad (7.2)$$

y la cáustica corresponde al conjunto de puntos que satisfacen la ecuación anterior y

$$\frac{\partial^2 S}{\partial P^2} = 0. \quad (7.3)$$

La función principal de Hamilton asociada con la función de onda Φ , que denotaremos por \tilde{S} , se obtiene como sigue. De la ecuación (7.2) se obtiene localmente que

$$P = P(x, t), \quad (7.4)$$

luego definimos

$$\tilde{S}(x, t) \equiv S(x, P(x, t), t). \quad (7.5)$$

Bajo estas condiciones, \tilde{S} y S satisfacen la misma ecuación de Hamilton-Jacobi. Por esta razón definimos los frentes de onda geométricos de Φ como las curvas de nivel de \tilde{S} . Si la función de onda se propaga en el vacío, entonces el conjunto de puntos singulares de los frentes de onda geométricos se encuentran sobre la cáustica, la cual caracteriza la región de máxima contribución a la función de densidad de probabilidad, y su estructura determina la estabilidad del haz [89]. Del capítulo 3 sabemos que la cáustica representa la descripción más clásica del haz Φ ya que su evolución está gobernada por la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Vale la pena resaltar que la cáustica representa la región de transición en la que el número de rayos que se intersectan en un mismo punto del espacio-tiempo, cambia. Esto puede deducirse de las ecuaciones (7.2) y (7.3) ya que la cáustica es la envolvente de los rayos.

7.2. Una visión general de las ecuaciones de Madelung-de Broglie-Bohm

Cualquier función de onda puede representarse en su forma polar como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r}, t) e^{iS_{MB}(\mathbf{r}, t)/\hbar}, \quad (7.6)$$

**CAPÍTULO 7. COMPARACIÓN DE LA CÁUSTICA CON LOS CEROS
DEL POTENCIAL DE MADELUNG-BOHM**
7.3. INTERACCIÓN DE ONDAS PLANAS EN EL VACÍO

donde R y S_{MB} son funciones reales dos veces diferenciables. En consecuencia, la ecuación de Schrödinger equivale a un sistema de dos ecuaciones las cuales se obtienen de su parte real e imaginaria:

$$\nabla \cdot \left(R^2(\mathbf{r}, t) \frac{\nabla S_{MB}(\mathbf{r}, t)}{m} \right) = \frac{\partial R^2(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (7.7)$$

$$\frac{1}{2m} (\nabla S_{MB}(\mathbf{r}, t))^2 + V(\mathbf{r}) + \frac{\partial S_{MB}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R(\mathbf{r}, t)}{R(\mathbf{r}, t)} = 0. \quad (7.8)$$

La ecuación (7.7) es la ecuación de continuidad de la función de densidad de probabilidad $R^2(\mathbf{r}, t)$, con densidad de corriente de probabilidad dada por $\mathbf{J} = R^2(\mathbf{r}, t) \nabla S_{MB}(\mathbf{r}, t) / m$, mientras que la ecuación (7.8) a veces se denomina como la ecuación de Hamilton-Jacobi-Madelung. Esta formulación matemática fue introducida por primera vez por Madelung en su interpretación hidrodinámica de la mecánica cuántica [90], y después fue redescubierta por David Bohm en su interpretación alternativa de la mecánica cuántica en términos de variables ocultas [91], en la cual la idea de una onda piloto que controla el movimiento de una partícula en forma determinista, propuesta por De Broglie en 1917, fue retomada. En este capítulo, definiremos el “termino cuántico” adicional de la ecuación (7.8) como el potencial de Madelung-Bohm $Q(\mathbf{r}, t)$:

$$Q(\mathbf{r}, t) \equiv - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R(\mathbf{r}, t)}{R(\mathbf{r}, t)}. \quad (7.9)$$

De la ecuación (7.8) resulta claro que la ecuación de Hamilton-Jacobi “macroscópica” se recupera si el potencial de Madelung-Bohm es insignificante en comparación con la “energía clásica” de la partícula (un valor suficientemente grande de la masa de la partícula puede dar lugar a esta aproximación, como puede apreciarse de la ecuación (7.9)). Sin embargo, a nivel cuántico, sobre los puntos del espacio tiempo, (\mathbf{r}, t) , donde el potencial de Madelung-Bohm es cero, la ecuación de Hamilton-Jacobi usual se recupera. En este sentido, decimos que los ceros del potencial de Madelung-Bohm corresponden a la contraparte clásica de una función de onda, de aquí la importancia de compararla con la región cáustica. Por otro lado, de la ecuación (7.9) deducimos que los ceros del potencial de Madelung-Bohm son puntos de curvatura cero de la raíz cuadrada de la función de densidad de probabilidad (pero no necesariamente todos los puntos de curvatura cero debido a la presencia de la función $R(\mathbf{r}, t)$ en el denominador) para cada valor particular de t . Esto sugiere que, en forma análoga a la cáustica, las curvas generadas por los ceros del potencial de Madelung-Bohm dan una caracterización cualitativa de la función de densidad de probabilidad.

7.3. Interacción de ondas planas en el vacío

La función de onda asociada con una partícula en una dimensión con momento clásico P está dada por

$$\psi_{(P)}(x, t) = e^{iS_f(x, P, t)/\hbar}, \quad (7.10)$$

**CAPÍTULO 7. COMPARACIÓN DE LA CÁUSTICA CON LOS CEROS
DEL POTENCIAL DE MADELUNG-BOHM**
7.3. INTERACCIÓN DE ONDAS PLANAS EN EL VACÍO

donde

$$S_f(x, P, t) = xP - \frac{P^2}{2m}t + f(P), \quad (7.11)$$

satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre y la ecuación de Laplace, y $f(P)$ es una función real arbitraria dos veces diferenciable. De las ecuaciones (7.9) y (7.10), resulta claro que el potencial de Madelung-Bohm asociado con una onda plana es cero. Por otra parte, la función de onda asociada con la superposición de dos ondas planas con momento P y $P + \Delta P$ esta dada por

$$\psi_{(P)}(x, t) + \psi_{(P+\Delta P)}(x, t) = \psi_{(P)}(x, t) \left(1 + e^{iS_{\Delta P}(x, P, t)/\hbar} \right), \quad (7.12)$$

donde hemos definido $S_{\Delta P}$ como

$$S_{\Delta P}(x, P, t) \equiv x\Delta P - \left(\frac{(\Delta P)^2}{2m} + \frac{P\Delta P}{m} \right) t + f(P + \Delta P) - f(P). \quad (7.13)$$

De acuerdo con la ecuación (7.9) el potencial de Madelung-Bohm asociado con la ecuación (7.12) es

$$Q_I(x, t) = \frac{(\Delta P)^2}{8m}, \quad (7.14)$$

el cual tiene un valor constante. Vamos a definir el resultado anterior como el potencial de interacción Q_I asociado a la superposición de dos ondas planas. Si ambas ondas tienen el mismo momento (esto es, $\Delta P = 0$) entonces $Q_I(x, t) = 0$, lo que equivale a tener solo una onda plana, por lo tanto no hay auto interacciones.

Para el caso de la superposición de tres ondas planas con momento P , $P + \Delta P$ y $P + \Delta P'$, la función de onda es

$$\psi_3(x, t) = \psi_{(P)}(x, t) + \psi_{(P+\Delta P)}(x, t) + \psi_{(P+\Delta P')}(x, t). \quad (7.15)$$

Puede mostrarse que el potencial de interacción (potencial de Madelung-Bohm) asociada a la función de onda anterior es

$$Q_I(x, t) = \frac{A(x, t)R^2(x, t) - B(x, t)^2}{2mR^4(x, t)}, \quad (7.16)$$

donde $A(x, t)$, $B(x, t)$ y $R^2(x, t) = |\psi_3(x, t)|^2$ están dados por

$$\begin{aligned} A(x, t) &= (\Delta P)^2 \cos\left(\frac{S_{\Delta P}(x, P, t)}{\hbar}\right) \\ &+ (\Delta P')^2 \cos\left(\frac{S_{\Delta P'}(x, P, t)}{\hbar}\right) + (\Delta P - \Delta P')^2 \cos\left(\frac{\Delta'(x, P, t)}{\hbar}\right), \end{aligned} \quad (7.17)$$

**CAPÍTULO 7. COMPARACIÓN DE LA CÁUSTICA CON LOS CEROS
DEL POTENCIAL DE MADELUNG-BOHM**
7.3. INTERACCIÓN DE ONDAS PLANAS EN EL VACÍO

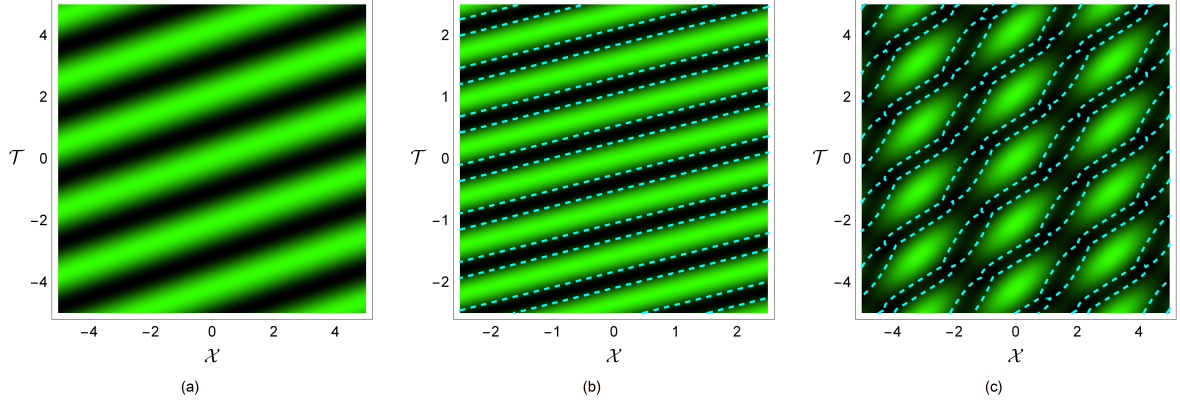


Figura 7.1: (a) Superposición de dos ondas planas con momento $\mathcal{P} = 1$ y $\mathcal{P} = 2$. (b) Superposición de dos ondas idénticas de momento $\mathcal{P} = 1$ con una tercera onda de momento $\mathcal{P} = 3$. (c) Superposición de tres ondas planas con momento $\mathcal{P} = 1$, $\mathcal{P} = -1$ y $\mathcal{P} = 2$. Las líneas punteadas muestran los ceros del potencial de Madelung-Bohm. Para todos los casos, en la ecuación (7.10) se toma $f(P) = 0$. Para estos gráficos hemos definido $\mathcal{X} = Bx/\hbar^{2/3}$, $\mathcal{T} = B^2t/2m\hbar^{1/3}$ y $\mathcal{P} = P/B\hbar^{1/3}$, donde B es una constante arbitraria positiva de unidades $(kg^2m/s^2)^{1/3}$.

$$B(x, t) = (\Delta P) \sin\left(\frac{S_{\Delta P}(x, P, t)}{\hbar}\right) + (\Delta P') \sin\left(\frac{S_{\Delta P'}(x, P, t)}{\hbar}\right) + (\Delta P - \Delta P') \sin\left(\frac{\Delta'(x, P, t)}{\hbar}\right), \quad (7.18)$$

y

$$R^2(x, t) = 1 + 8 \cos\left(\frac{S_{\Delta P}}{2\hbar}\right) \cos\left(\frac{S_{\Delta P'}}{2\hbar}\right) \cos\left(\frac{S_{\Delta P} - S_{\Delta P'}}{2\hbar}\right). \quad (7.19)$$

respectivamente, donde hemos definido $\Delta'(x, P, t)$ como

$$\Delta'(x, P, t) = S_{\Delta P}(x, P, t) - S_{\Delta P'}(x, P, t). \quad (7.20)$$

En este caso, los ceros del potencial (7.16) resultan en curvas uno-dimensionales que rodean los máximos de la función de densidad de probabilidad como se muestra en las figuras 7.1(b) y 7.1(c). Es decir, el potencial de interacción Q_I asociado a la superposición de tres ondas depende de las coordenadas (x, t) .

Ahora consideremos una función de onda Φ construida como una superposición infinita de ondas planas como sigue

$$\Phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iS_f(x, P', t)/\hbar} dP' = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \Delta P \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_{(P+k\Delta P)}(x, t), \quad (7.21)$$

**CAPÍTULO 7. COMPARACIÓN DE LA CÁUSTICA CON LOS CEROS
DEL POTENCIAL DE MADELUNG-BOHM**
7.3. INTERACCIÓN DE ONDAS PLANAS EN EL VACÍO

donde P toma un valor real constante arbitrario. Si aplicamos la propiedad de la ecuación (7.12), la sumatoria de la ecuación anterior puede reescribirse de la siguiente forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_{(P+k\Delta P)}(x, t) = \lim_{k \rightarrow -\infty} \psi_{(P+k\Delta P)}(x, t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_{(P+k\Delta P)}(x, t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\Delta P}(x, P+k\Delta P, t)\right). \quad (7.22)$$

Esto es, cada elemento de la sumatoria corresponde a la superposición de dos ondas planas “cercanas” con momento $P+k\Delta P$ y $P+(k+1)\Delta P$. Suponiendo que $\Delta P \ll 1$ (con el fin de obtener una buena aproximación de la ecuación (7.21)), la ecuación (7.13) se reduce a lo siguiente

$$S_{\Delta P}(x, P+k\Delta P, t) = \Delta P \left(\frac{\partial S_1(x, \mathcal{P}, t)}{\partial \mathcal{P}} \right)_{\mathcal{P}=P+k\Delta P}. \quad (7.23)$$

Por lo tanto, podemos aproximar a la función de onda Φ a

$$\Phi \approx \Delta P \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_{(P+k\Delta P)}(x, t) e^{i\Delta P \left(\frac{\partial S_1(x, \mathcal{P}, t)}{\partial \mathcal{P}} \right)_{\mathcal{P}=P+\Delta P}}, \quad (7.24)$$

donde el primer término del lado derecho de la ecuación (7.22) puede despreciarse en comparación con la sumatoria, ya que su valor se encuentra sobre una circunferencia unitaria en el plano complejo (ver ecuación (7.10)), y la igualdad se satisface en el límite $\Delta P \rightarrow 0$. De los capítulos anteriores ya sabemos que para la función de onda $\Phi(x, t)$ la condición $\partial S_f(x, P, t)/\partial P = 0$ determina los rayos o las trayectorias semiclásicas asociadas con el haz. Las dos últimas ecuaciones sugieren que la noción de rayos emerge cuando los frentes de onda planos se encuentran muy cerca uno del otro con respecto a su momento. Así, en el límite $\Delta P \rightarrow 0$ dos rayos cercanos pasan a ser infinitesimalmente adyacentes, y su punto de intersección (si existe) pasa a formar la cáustica del haz. En lo que sigue, nos vamos a restringir al estudio de haces con cáustica.

En este punto es importante hacer notar las dos formas fundamentales en las que los rayos pueden organizarse sobre la cáustica durante su propagación. En el primer caso, sobre cada punto de la cáustica pasan solamente dos rayos tangentes como se muestra en la figura 7.2(a); es claro que esta condición la satisface la catástrofe tipo fold (ver sección 3.4.1). Para el segundo caso, existe un tercer rayo (o incluso más) que cruza la cáustica en cada punto sobre esta. Es decir, en cada punto sobre la cáustica pasan dos rayos tangentes y uno adicional (o más) que cruza a la cáustica en ese mismo punto, como se muestra en la figura 7.2(b).

Es importante señalar que desde el punto de vista ondulatorio, las cáusticas son regiones donde la función de onda cambia de un comportamiento oscilatorio, debido a un efecto fuerte de interferencia, a un decaimiento exponencial sobre la región de “sombra” de la función de densidad de probabilidad, debido a un campo evanescente. Desde el punto de vista geométrico, las cáusticas son las regiones en las que los rayos se enfocan,

CAPÍTULO 7. COMPARACIÓN DE LA CÁUSTICA CON LOS CEROS DEL POTENCIAL DE MADELUNG-BOHM

7.4. EL HAZ DE AIRY

y por lo tanto caracterizan la región de máxima contribución de la función de densidad de probabilidad [92, 93, 94]. Entonces un análisis sobre la distribución de los rayos cerca de la región cáustica podría permitirnos deducir algunas propiedades sobre la función de densidad de probabilidad, como veremos a continuación.

En el primer caso, sobre cada punto de la cáustica pasan dos rayos paralelos asociados con dos ondas planas paralelas. Entonces, de acuerdo con la ecuación (7.14), el potencial de Madelung-Bohm es cero sobre la cáustica, y por lo tanto, la ecuación de Hamilton-Jacobi se recupera sobre estos puntos. Por lo tanto, las funciones de onda con este tipo de cáustica son los “haces más clásicos”, porque la evolución de la cáustica y de los ceros del potencial de Madelung-Bohm está gobernada por la ecuación de Hamilton-Jacobi (ver capítulo 3). Además, la evolución en el tiempo de los puntos máximos y mínimos de la función de densidad de probabilidad viajan junto con la cáustica, dando lugar a un patrón de interferencia uniforme sobre el espacio (x, t) (ver, por ejemplo, la figura 7.3). En efecto, la función de densidad de probabilidad en la vecindad de un máximo global siempre tiene forma de una función de Airy, ya que esta es la manifestación de la catástrofe tipo fold [95].

Para el segundo caso, debido a la existencia de un tercer rayo (o incluso más), el potencial de Madelung-Bohm es en general distinto de cero sobre la cáustica, y a diferencia del primer caso, la función de densidad de probabilidad tiene un patrón de interferencia no uniforme en el sentido de que los puntos máximos y mínimos no viajan junto con la cáustica durante su evolución en el tiempo (ver, por ejemplo, la figura 7.4). Por lo tanto, estrictamente hablando, no hay una descripción clásica para un patrón de interferencia no uniforme.

En las secciones siguientes, vamos a analizar un ejemplo para cada uno de los casos estudiados en esta sección: el haz de Airy y Pearcey unidimensional, cuya cáustica, de acuerdo con la teoría de catástrofes, es estable.

7.4. El haz de Airy

La función de onda asociada al haz de Airy en una dimensión está dada por [9]

$$\Phi_A(x, t) = Ai \left[\frac{B_1}{\hbar^{2/3}} \left(x - \frac{B_1^3 t^2}{4m^2} \right) \right] e^{i \left(\frac{B_1^3 t x}{2m\hbar} - \frac{B_1^6 t^3}{12m^3\hbar} \right)}, \quad (7.25)$$

donde $Ai(\cdot)$ es la función de Airy, y B_1 es una constante arbitraria positiva de unidades $(Kg \times m^{1/2} \times s^{-1})^{2/3}$. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (7.9), el potencial de Madelung-Bohm es

$$Q(x, t) = \frac{B_1^6 t^2 - 4B_1^3 m^2 x}{8m^3}. \quad (7.26)$$

Por otro lado, el haz de Airy puede descomponerse en términos de ondas planas como sigue

$$\Phi_A(x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar^{1/3}B_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \left(xP - \frac{P^2}{2m}t + \frac{P^3}{3B_1^3} \right)} dP. \quad (7.27)$$

**CAPÍTULO 7. COMPARACIÓN DE LA CÁUSTICA CON LOS CEROS
DEL POTENCIAL DE MADELUNG-BOHM**
7.4. EL HAZ DE AIRY

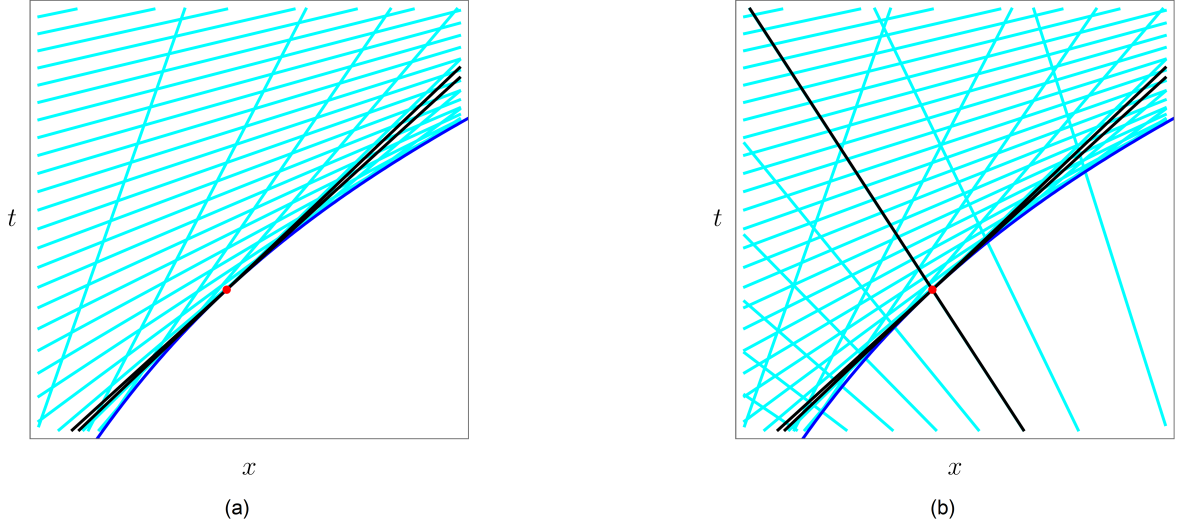


Figura 7.2: (a) Un haz para el cual dos rayos pasan en cada punto de su cáustica en forma tangente. (b) Un haz para el cual existe un tercer rayo (o incluso podrían ser más) en cada punto de la cáustica que lo cruza. Para ambas figuras, la cáustica corresponde a la curva azul.

Por lo tanto, para este haz

$$S_f(x, P, t) = xP - \frac{P^2}{2m}t + \frac{P^3}{3B_1^3}, \quad (7.28)$$

y de los puntos estacionarios de S_f obtenemos

$$P(x, t) = \frac{B_1^3 t}{2m} \pm \frac{\sqrt{B_1^6 t^2 - 4B_1^3 m^2 x}}{2m}, \quad (7.29)$$

por lo que la descripción semiclásica de este haz está dada por

$$\tilde{S}_f(x, t) = S_f(x, P(x, t), t) = \left(\frac{B_1^3 t x}{2m} - \frac{B_1^6 t^3}{12m^3} \right) \mp \frac{B_1^{3/2}}{12m^3} (B_1^3 t^2 - 4m^2 x)^{3/2}. \quad (7.30)$$

La ecuación de la cáustica está dada por

$$B_1^6 t^2 - 4B_1^3 m^2 x = 0, \quad (7.31)$$

la cual se deduce directamente de la ecuación (7.29), ya que la cáustica es la región de transición de cero a dos rayos. De las ecuaciones (7.26) y (7.31) es fácil verificar que el potencial de Madelung-Bohm es cero sobre la cáustica. En la figura 7.3 se ilustran la función de densidad de probabilidad, los rayos, la cáustica y los ceros del potencial de Bohm asociados al haz de Airy.

**CAPÍTULO 7. COMPARACIÓN DE LA CÁUSTICA CON LOS CEROS
DEL POTENCIAL DE MADELUNG-BOHM**
7.4. EL HAZ DE AIRY

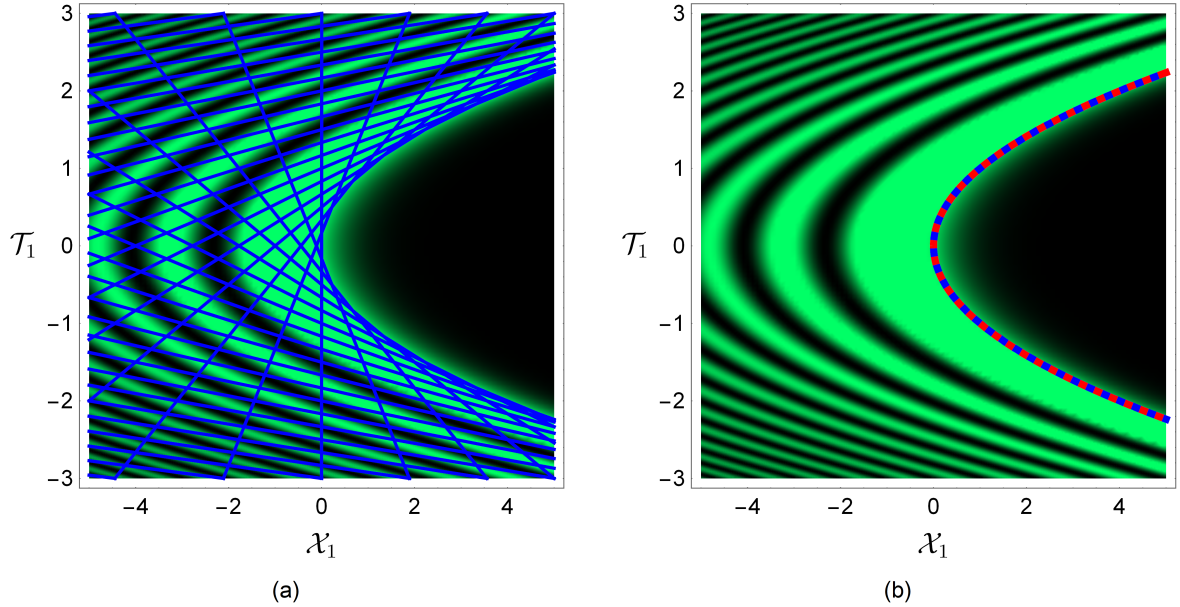


Figura 7.3: (a) Función de densidad de probabilidad del haz de Airy y sus rayos asociados. (b) Se muestran los ceros del potencial de Madlung-Bohm (línea roja punteada) y la cáustica (curva azul). Para estos gráficos hemos definido $\mathcal{X}_1 = B_1 x / \hbar^{2/3}$, $\mathcal{T}_1 = B_1^2 t / 2m\hbar^{1/3}$ y $\mathcal{P}_1 = P / B_1 \hbar^{1/3}$.

En este punto es importante poner atención en el contenido de la descripción semiclásica del haz de Airy. Nótese que el primer término de la ecuación (7.30) corresponde a la fase física del haz multiplicado por \hbar , mientras que el segundo término de la ecuación (7.30) es cero sobre la cáustica. Es decir, los frentes de onda físicos y geométricos coinciden en la cáustica. Por lo tanto, la fase física del haz de Airy puede generarse desde una perspectiva geométrica. Este hecho tiene su origen en las características de la integral (7.27) ya que el cambio de variable

$$U = P - \frac{B_1^3 t}{2m}, \quad (7.32)$$

donde el último término puede deducirse del primer término de la ecuación (7.29), ya que $P(x, t)$ es una función univaluada sobre la cáustica, permite transformar la representación integral de este haz en su forma polar como se muestra en la ecuación (7.25). En estas condiciones, la fase física del haz puede calcularse mediante

$$\frac{S_f(x, P - U, t)}{\hbar} = \frac{B_1^3 t x}{2m\hbar} - \frac{B_1^6 t^3}{12m^3\hbar}. \quad (7.33)$$

Es bien sabido que cerca de una cáustica tipo fold la función de onda puede aproximarse a una función de Airy, la cual es una función real. Por lo tanto, deben existir haces tales que su fase pueda determinarse mediante una ecuación del tipo (7.33). En efecto, todos los resultados mostrados en esta sección también pueden verificarse para los haces Bessel, los cuales tienen una cáustica tipo fold. Un cálculo directo muestra que para los haces

**CAPÍTULO 7. COMPARACIÓN DE LA CÁUSTICA CON LOS CEROS
DEL POTENCIAL DE MADELUNG-BOHM
7.5. EL HAZ DE PEARCEY**

Bessel la cáustica (circunferencias de radio m como se mostró en el capítulo 2, donde m es un número entero que denota el orden del haz Bessel) y los ceros del potencial de Madelung-Bohm coinciden, curiosamente separando la región donde el fenómeno de superoscilación ocurre de donde no [15, 96, 97].

En el capítulo 4 hemos mostrado que es posible asociar una descripción geométrica (o semiclassical) a todos los máximos y mínimos de la función de densidad de probabilidad de los haces de Airy. Recientemente Adrinana González Juárez y Gilberto Silva Ortigoza [98] mostraron que esto también es posible para los haces Bessel, a través de una generalización de la ecuación de los rayos que surge de forma natural en la teoría de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S}{\partial P} = \mathcal{L}, \quad (7.34)$$

donde \mathcal{L} es un parámetro real que permite generar una familia de cáusticas que permiten caracterizar todos los máximos y mínimos de la función de densidad de probabilidad. Este resultado podría estar íntimamente relacionado con el resultado de la ecuación (7.33): el hecho de que los frentes de onda físicos y geométricos coinciden sobre la cáustica podría permitir construir una descripción completa de este tipo de haces.

7.5. El haz de Pearcey

El haz de Pearcey unidimensional se define como la superposición infinita de ondas planas de la siguiente manera

$$\Phi_{Pe}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(xP - \frac{P^2}{2m}t + \frac{P^4}{4B_2^4} \right) \right] dP, \quad (7.35)$$

donde B_2 es una constante positiva arbitraria de unidades $(kg^3m^2/s^3)^{1/4}$. De la expresión anterior, podemos identificar a la función $S_f(x, P, t)$ como

$$S_f(x, P, t) = xP - \frac{P^2}{2m}t + \frac{P^4}{4B_2^4}, \quad (7.36)$$

por lo tanto, los puntos estacionarios de $S_f(x, P, t)$ deben satisfacer la siguiente ecuación:

$$\mathcal{P}_2^3 - \frac{\mathcal{P}_2^2 \mathcal{T}_2}{2} + \frac{\mathcal{X}_2}{4} = 0, \quad (7.37)$$

donde hemos definido:

$$\mathcal{X}_2 = \frac{\sqrt{2}B_2x}{\hbar^{3/4}}, \quad \mathcal{T}_2 = \frac{B_2^2t}{m\hbar^{1/2}}, \quad \mathcal{P}_2 = \frac{P}{\sqrt{2}B_2\hbar^{1/4}}. \quad (7.38)$$

De acuerdo con la fórmula de Cardano para obtener las raíces de una ecuación cúbica, el signo de $\Delta(\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2)$ dado por

**CAPÍTULO 7. COMPARACIÓN DE LA CÁUSTICA CON LOS CEROS
DEL POTENCIAL DE MADELUNG-BOHM
7.5. EL HAZ DE PEARCEY**

$$\Delta(\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2) = \frac{1}{1728} (27\mathcal{X}_2^2 - 8\mathcal{T}_2^3), \quad (7.39)$$

determina el número y la multiplicidad de las raíces reales de $\mathcal{P}_2(\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2)$ que satisfacen la ecuación (7.37). En estas condiciones, es claro que la cáustica puede determinarse de la condición $\Delta(\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2) = 0$, lo que equivale a

$$27\mathcal{X}_2^2 - 8\mathcal{T}_2^3 = 0. \quad (7.40)$$

Si $\Delta(\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2) > 0$, entonces solo existe una solución real dada por

$$\mathcal{P}_2(\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2) = \sum_{n=0}^1 \left(-\frac{\mathcal{X}_2}{8} - (-1)^n \sqrt{\Delta(\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2)} \right)^{1/3}. \quad (7.41)$$

Por lo tanto, en cada punto fuera de la cáustica, pasa sólo un rayo como se observa de la figura 7.4(a) (del lado inferior de la envolvente de los rayos).

Si $\Delta(\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2) < 0$, entonces existen tres raíces reales dadas por

$$\mathcal{P}_2(\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2) = 2\sqrt{\frac{\mathcal{T}_2}{6}} \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right), \quad (7.42)$$

donde $k = 0, 1, 2$ y $0 < \theta < \pi$ debe satisfacer que

$$\cos\theta = -\frac{\mathcal{X}_2}{8\sqrt{(\mathcal{T}_2/6)^3}}. \quad (7.43)$$

Es decir, en cada punto dentro de la cáustica pasan tres rayos como se observa de la figura 7.4(a).

Si $\Delta(\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2) = 0$, en la singularidad de la cáustica, $(\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2) = (0, 0)$, existe una raíz real de multiplicidad tres dada por

$$\mathcal{P}_2(0, 0) = 0. \quad (7.44)$$

Por otro lado, sobre la cáustica existen tres raíces reales. Una de ellas tiene multiplicidad 2 y está dada por

$$\mathcal{P}_2(\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2) = \frac{3\mathcal{X}_2}{4\mathcal{T}_2}, \quad (7.45)$$

y la raíz restante está dada por

$$\mathcal{P}_2(\mathcal{X}_2, \mathcal{T}_2) = -\frac{4\mathcal{T}_2^2}{9\mathcal{X}_2}. \quad (7.46)$$

**CAPÍTULO 7. COMPARACIÓN DE LA CÁUSTICA CON LOS CEROS
DEL POTENCIAL DE MADELUNG-BOHM**
7.5. EL HAZ DE PEARCEY

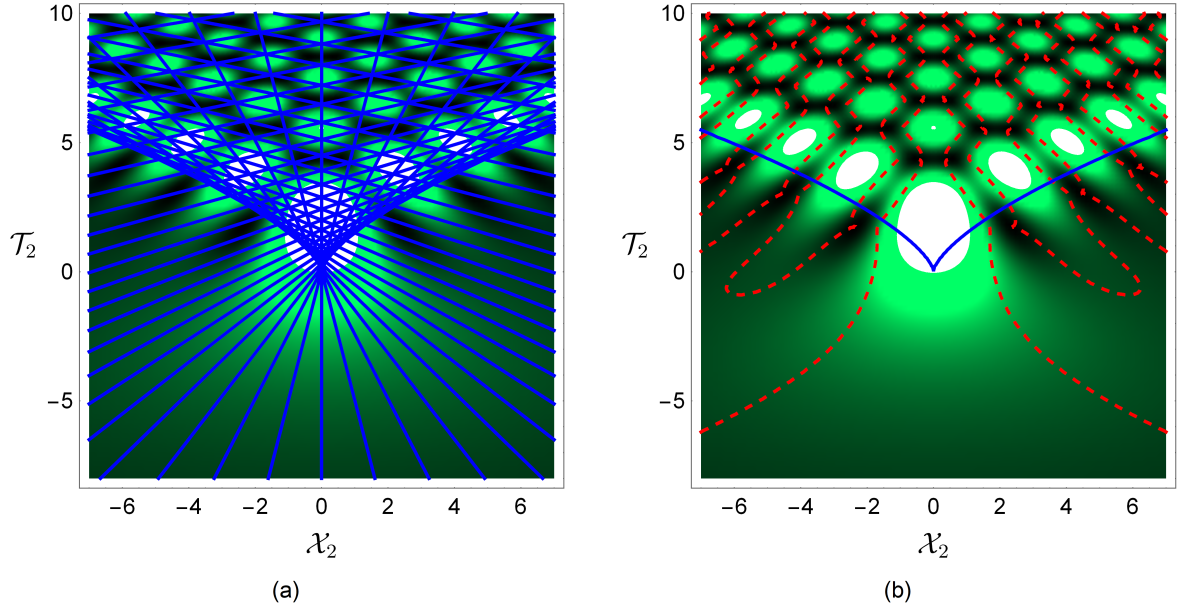


Figura 7.4: (a) La función de densidad de probabilidad del haz de Pearcey y sus rayos asociados. (b) Los ceros del potencial de Madelung-Bohm (líneas rojas punteadas) y la cáustica (curva azul). Para estos gráficos hemos definido $\mathcal{X}_2 = \sqrt{2}B_2x/\hbar^{3/4}$, $\mathcal{T}_2 = B_2^2t/m\hbar^{1/2}$ y $P_2 = P/\sqrt{2}B_2\hbar^{1/4}$.

Es decir, sobre cada punto que pertenece a la cáustica (excepto en su singularidad), pasan dos rayos paralelos que se intersectan con un tercer rayo que cruza la cáustica.

Nótese que la existencia de un tercer rayo que cruza la cáustica en forma no tangente es lo que da lugar a un patrón de interferencia no uniforme en la Función de Densidad de Probabilidad, como puede observarse de la figura 7.4(a). En la figura 7.4(b) se ilustra la cáustica y los ceros del potencial de Madelung-Bohm, los cuales han sido calculados numéricamente. A diferencia del haz de Airy, la geometría de la cáustica es completamente diferente de la geometría de los ceros del potencial de Madelung-Bohm. Mientras que la cáustica caracteriza la distribución de los lóbulos que contribuyen en mayor parte a la función de densidad de probabilidad, los ceros del potencial de Madelung-Bohm rodean los máximos del patrón de interferencia, dándonos una mejor idea sobre la estructura de la función de densidad de probabilidad, posiblemente este pueda ser un factor a tomar en cuenta en el diseño de haces estructurados. Por lo tanto, estrictamente hablando, el patrón de interferencia del haz de Pearcey cerca de la cáustica no tiene contraparte en mecánica clásica.

Después de terminar el trabajo del presente capítulo, M. V. Berry nos señaló que los ceros del potencial de Madelung-Bohm separan las regiones donde una onda presenta el fenómeno de superoscilación (es decir, donde la variación de la onda es más rápida que la variación de cualquiera de las ondas planas que la compone), de donde no, creando así un puente entre la larga literatura sobre superoscilaciones con la literatura referente a Madelung-Bohm. En un artículo reciente él presentó esta relación [97].

Capítulo 8

Conclusiones

En el presente proyecto de investigación nos centramos en la caracterización geométrica de soluciones a la ecuación de onda. En particular, nos interesamos en la caracterización geométrica (o clásica) de soluciones de la ecuación de Schrödinger con cáustica estable, como por ejemplo el haz de Airy, que es un haz adifraccional y acelerado.

Para este fin, primeramente nos enfocamos en estudiar las propiedades de una familia de soluciones S de la ecuación eikonal, la ecuación básica de la óptica geométrica. Es decir, mostramos que la función vectorial ∇S determina la dirección del flujo de energía (dirección de los rayos), y por lo tanto definimos los frentes de onda como las curvas de nivel de S . Además, a partir de la función S podemos generar una nueva solución \tilde{S} de la ecuación eikonal, cuyas curvas de nivel resultan de la envolvente de los frentes de onda $S = C$, por esta razón, a este procedimiento le hemos llamado el principio de superposición geométrico. Por otro lado, los puntos singulares de los frentes de onda geométricos generan una superficie (o curva, en un espacio de dos dimensiones) que se conoce como cáustica, y su importancia radica en el hecho de que caracteriza la región de máxima intensidad de un campo óptico. En estas condiciones, diremos que un modelo geométrico de un campo óptico es válido sólo si la cáustica caracteriza cualitativamente la distribución de máximos de la intensidad.

Es importante señalar que en las regiones libres de fuentes o de cáusticas, los frentes de onda geométricos se comportan localmente como un frente de onda plano, por esta razón hemos puesto particular atención a la aplicación del principio de superposición geométrico sobre una familia biparamétrica (C, φ) de frentes de onda planos en \mathbb{R}^2 . La función $g(\varphi)$, la cual es una constante aditiva de la función S y que depende del parámetro φ juega un papel relevante en la generación de la nueva solución \tilde{S} a través del principio de superposición geométrico: su naturaleza determina la forma de los nuevos frentes de onda, y por lo tanto determinará la estructura de la cáustica. Así que una elección adecuada de la función $g(\varphi)$ permitiría modelar la propagación de una onda en un sistema óptico. Como ejemplo, hemos generado frentes de onda circulares y pseudoelípticos.

Mientras que en la aproximación geométrica la ecuación eikonal se deduce a partir de las ecuaciones de Maxwell en el límite $k \rightarrow \infty$, donde k es el número de onda que se

define como $k = 2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda de la luz, también hemos mostrado que una función de la forma $\psi = \exp[ikS]$, donde S es una familia de soluciones de las ecuaciones eikonal y de Laplace, es una familia de soluciones exactas de la ecuación escalar de onda, y por lo tanto decimos que S da una caracterización geométrica de ψ . Cabe señalar que bajo estas condiciones, no es necesario recurrir al límite $k \rightarrow \infty$ para asociarle a la funciones de onda ψ una descripción geométrica. Además, por la naturaleza lineal de la ecuación escalar de onda, la superposición continua de la familia de soluciones ψ permite generar una nueva solución Ψ de la ecuación escalar de onda, cuya descripción geométrica está dada por una función \tilde{S} que resulta del principio de superposición geométrico aplicado a la función S . Como caso particular, hemos mostrado que los haces adifraccionales propuestos por Durnin pueden caracterizarse geoméricamente a través de una función \tilde{S} , ya que surgen de la superposición continua de una familia de frentes de onda planos cuyos vectores de dirección de propagación generan una superficie cónica. Como ejemplo, hemos calculado los frentes de onda y cáustica asociados a los haces Bessel, los cuales son los haces adifraccionales más simples. Los frentes de onda del haz Bessel de orden cero son superficies cónicas que se trasladan a lo largo de la dirección de propagación cuyo eje de simetría coincide con el eje de simetría del patrón de intensidad, que en un plano transversal consiste de una serie de anillos concéntricos con una región de alta intensidad en su centro. Para este haz la cáustica es una línea recta paralela a la dirección de propagación del haz que caracteriza cualitativamente y cuantitativamente el máximo supremo del patrón de intensidad. Para los haces Bessel de orden distinto de cero, los frentes de onda son deformaciones de conos, y la cáustica es una superficie circular cilíndrica cuyo radio es proporcional al orden del haz. Para estos haces, la cáustica sólo caracteriza cualitativamente al máximo supremo del patrón de intensidad.

Otro aspecto importante de la cáustica es que su estructura determina la estabilidad de un haz. De acuerdo con la teoría de catástrofes, existe un número finito de estructuras estables que depende del número de parámetros de control \mathbf{C} de la función generatriz $\Phi_c(\mathbf{C}, \mathbf{s})$, la cual satisface una ecuación tipo Hamilton-Jacobi o eikonal. En el contexto de la aproximación paraxial, hemos desarrollado un método para estudiar la evolución de las catástrofes estables, y en particular hemos analizado a las tipo fold, cusp, swallowtail, elliptic umbilic, hyperbolic umbilic y parabolic umbilic. Para esto, primero hemos mostrado que $\psi = \exp[ikS]$ es una familia de soluciones de la ecuación paraxial de onda sólo si S es una familia de soluciones de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi y Laplace. Así, y por la naturaleza lineal de la ecuación paraxial de onda, la superposición continua de la familia de soluciones ψ genera una nueva solución de la ecuación paraxial de onda, Ψ , cuya descripción geométrica puede obtenerse de la función S . Para obtener funciones de onda Ψ cuya cáustica sea una de las catástrofes elementales, hemos impuesto dos condiciones. La primera es solicitar que la familia uniparamétrica de acciones S sea igual a una de la catástrofes elementales, o a una sección transversal de estas sobre el plano $z = 0$, es decir, $S(x, y, 0) = \Phi_c(\mathbf{C}, \mathbf{s})$, donde los parámetros de control se identifican con las coordenadas x, y . La segunda condición establece que el grado del polinomio S con respecto a las variables de estado \mathbf{s} sea menor o igual que el grado del polinomio de la función generatriz $\Phi_c(\mathbf{C}, \mathbf{s})$ correspondiente. Es decir, a cada catástrofe le hemos asociado una familia de acciones. Esta asociación permite dar una visualización de la evolución de las catástrofes estables en términos de un sistema de partículas cuyo momento y

CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES

trayectorias (rayos de luz) están determinadas por las ecuaciones de Hamilton. Para cada una de las catástrofes estudiadas en este documento hemos mostrado que la cáustica caracteriza cualitativamente la distribución de máximos de la intensidad. Por lo tanto, mientras que la evolución del patrón de intensidad está gobernado por la ecuación paraxial de onda, la cáustica está gobernada por la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Vale la pena señalar que los haces con catástrofe tipo fold y hyperbolic umbilic son ejemplos de haces adifraccionales acelerados. De hecho, bajo una elección de parámetros adecuada, la catástrofe hyperbolic umbilic se reduce al haz de Airy bidimensional.

El estudio de la propagación paraxial de haces de luz es importante en parte por la correspondencia matemática entre la ecuación de Schrödinger y la ecuación paraxial de onda. Por lo tanto, la forma en que caracterizamos geoméricamente a los haces paraxiales es igualmente aplicable a los haces cuánticos. En efecto, en el contexto de la mecánica cuántica, una Función Principal de Hamilton $S(x, t, P)$ que satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre y también la ecuación de Laplace, determina una solución a la ecuación de Schrödinger para una partícula en el vacío de la forma $\psi = \exp[iS/\hbar]$. En analogía con la óptica geométrica, las curvas de nivel de S corresponden a los frentes de onda geométricos. Podemos construir nuevas soluciones a la ecuación de Schrödinger mediante el principio de superposición: $\Psi = \int \exp[iS/\hbar] dP$. La caracterización geométrica de esta nueva función de onda está dada por una función $\tilde{S}(x, t)$ que se obtiene de aplicar el principio de superposición geométrico a $S(x, t, P)$. Es decir, puede mostrarse que \tilde{S} satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi, y por lo tanto los frentes de onda geométricos de Ψ corresponden a las curvas de nivel de \tilde{S} . Además, las singularidades de los frentes de onda geométricos determinan la cáustica del haz Ψ , y caracterizan cualitativamente los máximos principales de la función de densidad de probabilidad. La ecuación de los rayos asociados con la nueva función de onda Ψ se obtiene solicitando que la fase S sea estacionaria, es decir, $\partial S/\partial P = 0$. Esta relación inmediatamente nos sugiere una generalización de la ecuación de los rayos. De acuerdo con la teoría de Hamilton-Jacobi, la función S es una función generatriz de una transformación canónica de las coordenadas del espacio fase (x, p) a nuevas coordenadas del espacio fase (Q, P) mediante $Q = \partial S/\partial P$, $p = \partial S/\partial x$. Por lo tanto, los rayos geométricos se obtienen del caso particular $Q = 0$. Bajo estas condiciones podemos asociar a un haz Ψ una familia uniparamétrica de acciones $\tilde{S}(x, t, Q)$ y por lo tanto una familia uniparamétrica de cáusticas etiquetadas por el parámetro Q . El estudio exhaustivo del haz de Airy unidimensional, revela que la introducción del parámetro Q permite obtener un conjunto discreto de acciones y cáusticas que caracterizan geoméricamente a cada máximo de la función de densidad de probabilidad del haz. Esto es, el conjunto discreto de cáusticas se ajustan a todos los máximos de la función de densidad de probabilidad cuantitativamente y cualitativamente. Este resultado podría ser de importancia ya que, como habíamos visto en el contexto de la óptica geométrica, la correspondencia cualitativa entre la cáustica y la distribución de máximos confirma la validez de un modelo geométrico de la propagación de ondas. Por lo tanto, creemos que la aplicación de estas nuevas familias de rayos, frentes de onda y cáusticas permitirían mejorar el diseño y calidad de los sistemas ópticos.

Vale la pena señalar que Berry y Balazs reportaron la caracterización clásica del haz de Airy. Analizando la forma asintótica de la función de onda, ellos le asociaron a este haz una acción y dieron una interpretación clásica sobre el origen de la cáustica

CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES

así como de la aceleración de este haz durante su propagación sin la necesidad de un potencial externo. Con nuestra metodología, hemos reproducido y generalizado los resultados de estos autores sin necesidad de hacer un análisis asintótico de la función de onda.

Hasta este punto hemos mostrado que desde el punto de vista geométrico, la cáustica tiene un papel fundamental en la estructura de un haz ya que no solo caracteriza la distribución de máximos de la función de densidad de probabilidad, sino que su estructura determina la estabilidad de un haz, y además su evolución está gobernada por la ecuación de Hamilton-Jacobi. Por lo tanto, la estructura cáustica es la región más clásica de un haz. Por otro lado, la formulación de Madelung-Bohm de la mecánica cuántica, nos permite definir las regiones más clásicas de una función de onda definidas por aquellos puntos que hacen al potencial de Madelung-Bohm idénticamente cero, ya que sobre estas regiones la ecuación de Madelung-Hamilton-Jacobi se reduce a la ecuación de Hamilton-Jacobi. Mediante un análisis sobre la distribución de los rayos en la región cáustica, hemos mostrado que el conjunto de haces con cáustica tipo fold son los haces más clásicos ya que la cáustica y los ceros del potencial de Madelung-Bohm coinciden, y por lo tanto su evolución también está gobernada por la ecuación de Hamilton-Jacobi. Esto ocurre debido a que para este tipo de cáustica, solamente dos rayos se intersectan de forma tangente sobre cada punto de la cáustica, y por lo tanto, la contribución local del potencial de Madelung-Bohm sobre la cáustica es cero. Una característica importante de estos haces es que su patrón de interferencia es uniforme, es decir, durante la propagación del haz, los máximos de la función de densidad de probabilidad viajan junto con la cáustica. Además, la cáustica representa el límite de la descripción geométrica de estos haces, ya que dentro de esta región no hay presencia de rayos. Por otro lado, hemos mostrado que para haces con cáustica no tipo fold, el potencial de Madelung-Bohm en general es distinto de cero sobre la cáustica. Esto ocurre debido a la existencia de rayos que cruzan en forma no tangente a la cáustica, dando origen a un patrón de interferencia no uniforme. Hemos verificado estas propiedades para los haces de Airy y Pearcey los cuales, de acuerdo con el teorema de Withney, tienen una cáustica estable en el espacio (x, t) . Es decir, cualquier haz inestable ante una pequeña perturbación posteriormente se desarrollará en uno de estos casos.

Después de terminar este análisis, M. V. Berry nos señaló que los ceros del potencial de Madelung-Bohm separan las regiones donde una onda presenta el fenómeno de superoscilación (es decir, donde la variación de la onda es más rápida que la variación de cualquiera de las ondas planas que la compone), de donde no, creando así un puente entre la larga literatura sobre superoscilaciones con la literatura referente a Madelung-Bohm. En un artículo reciente él presentó esta relación [97].

Bibliografía

- [1] Halina Rubinsztein-Dunlop, Andrew Forbes, M V Berry, M R Dennis, David L Andrews, Masud Mansuripur, Cornelia Denz, Christina Alpmann, Peter Banzer, Thomas Bauer, Ebrahim Karimi, Lorenzo Marrucci, Miles Padgett, Monika Ritsch-Marte, Natalia M Litchinitser, Nicholas P Bigelow, C Rosales-Guzmán, A Belmonte, J P Torres, Tyler W Neely, Mark Baker, Reuven Gordon, Alexander B Stilgoe, Jacqueline Romero, Andrew G White, Robert Fickler, Alan E Willner, Guodong Xie, Benjamin McMorrán, and Andrew M Weiner. Roadmap on structured light. *Journal of Optics*, 19(1):013001, 2016.
- [2] Zdeněk Bouchal. Nondiffracting optical beams: physical properties, experiments, and applications. *Czechoslovak journal of physics*, 53(7):537–578, 2003.
- [3] J. Durnin. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory. *Journal of the Optical Society of America A*, 4(4):651, 1987.
- [4] J. Durnin, J. J. Miceli, and J. H. Eberly. Diffraction-free beams. *Physical Review Letters*, 58(15):1499–1501, 1987.
- [5] J.C. Gutiérrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo, G.A. Ramírez, E. Tepichín, R.M. Rodríguez-Dagnino, S. Chávez-Cerda, and G.H.C. New. Experimental demonstration of optical Mathieu beams. *Optics Communications*, 195(1-4):35–40, 2001.
- [6] Miguel A. Bandres, Julio C. Gutiérrez-Vega, and Sabino Chávez-Cerda. Parabolic nondiffracting optical wave fields. *Optics Letters*, 29(1):44, 2004.
- [7] Michael V Berry and KT McDonald. Exact and geometrical optics energy trajectories in twisted beams. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 10(3):035005, 2008.
- [8] V Garcés-Chávez, David McGloin, H Melville, Wilson Sibbett, and Kishan Dholakia. Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam. *Nature*, 419(6903):145–147, 2002.
- [9] M. V. Berry and N. L. Balazs. Nonspreading wave packets. *American Journal of Physics*, 47(3):264–267, 1979.
- [10] G. A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu, and D. N. Christodoulides. Observation of accelerating Airy beams. *Physical Review Letters*, 99(21), 2007.
- [11] John Broky, Georgios A. Siviloglou, Aristide Dogariu, and Demetrios N. Christodoulides. Self-healing properties of optical Airy beams. *Optics Express*, 16(17):12880, 2008.

- [12] Georgios A. Siviloglou and Demetrios N. Christodoulides. Accelerating finite energy Airy beams. *Optics Letters*, 32(8):979, 2007.
- [13] Noa Voloch-Bloch, Yossi Lereah, Yigal Lilach, Avraham Gover, and Ady Arie. Generation of electron Airy beams. *Nature*, 494(7437):331–335, 2013.
- [14] Vincenzo Grillo, Ebrahim Karimi, Gian Carlo Gazzadi, Stefano Frabboni, Mark R. Dennis, and Robert W. Boyd. Generation of nondiffracting electron Bessel beams. *Physical Review X*, 4(1), 2014.
- [15] Omar de Jesús Cabrera-Rosas, Ernesto Espíndola-Ramos, Salvador Alejandro Juárez-Reyes, Israel Julián-Macías, Paula Ortega-Vidals, Gilberto Silva-Ortigoza, Ramón Silva-Ortigoza, and Citlalli Teresa Sosa-Sánchez. Wavefronts and caustic associated with Durnin’s beams. *Journal of Optics*, 19(1):015603, 2016.
- [16] Max Born and Emil Wolf. Foundations of geometrical optics. In *Principles of Optics*, pages 109–132. Elsevier, 1980.
- [17] Daniel Malacara, editor. *Optical Shop Testing*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [18] Orestes Stavroudis. *The optics of rays, wavefronts, and caustics*, volume 38. Elsevier, 2012.
- [19] Orestes N Stavroudis. *The Mathematics of Geometrical and Physical Optics: the k-function and its Ramifications*. John Wiley & Sons, 2006.
- [20] Issam H Al-Ahdali and David L Shealy. Optimization of three-and four-element lens systems by minimizing the caustic surfaces. *Applied optics*, 29(31):4551–4559, 1990.
- [21] Abd M Kassim and David L Shealy. Wave front equation, caustics, and wave aberration function of simple lenses and mirrors. *Applied optics*, 27(3):516–522, 1988.
- [22] David L Shealy. Analytical illuminance and caustic surface calculations in geometrical optics. *Applied optics*, 15(10):2588–2596, 1976.
- [23] David L Shealy and Donald G Burkhard. Flux density for ray propagation in discrete index media expressed in terms of the intrinsic geometry of the deflecting surface. *Optica Acta: International Journal of Optics*, 20(4):287–301, 1973.
- [24] Donald G Burkhard and David L Shealy. Flux density for ray propagation in geometrical optics. *JOSA*, 63(3):299–304, 1973.
- [25] David L Shealy and Donald G Burkhard. Caustic surfaces and irradiance for reflection and refraction from an ellipsoid, elliptic paraboloid, and elliptic cone. *Applied Optics*, 12(12):2955–2959, 1973.
- [26] David L Shealy and Donald G Burkhard. Analytical illuminance calculation in a multi-interface optical system. *Optica Acta: International Journal of Optics*, 22(6):485–501, 1975.
- [27] Donald G Burkhard and David L Shealy. Simplified formula for the illuminance in an optical system. *Applied Optics*, 20(5):897–909, 1981.

- [28] David L Shealy and John A Hoffnagle. Wavefront and caustics of a plane wave refracted by an arbitrary surface. *JOSA A*, 25(9):2370–2382, 2008.
- [29] M Avendaño-Alejo and R Díaz-Uribe. Testing a fast off-axis parabolic mirror by using tilted null screens. *Applied optics*, 45(12):2607–2614, 2006.
- [30] Maximino Avendaño-Alejo, Dulce González-Utrera, and Luis Castañeda. Caustics in a meridional plane produced by plano-convex conic lenses. *JOSA A*, 28(12):2619–2628, 2011.
- [31] Jorge Castro-Ramos, Oscar de Ita Prieto, and Gilberto Silva-Ortigoza. Computation of the disk of least confusion for conic mirrors. *Applied optics*, 43(33):6080–6089, 2004.
- [32] Edwin Román-Hernández, José Guadalupe Santiago-Santiago, Gilberto Silva-Ortigoza, Ramón Silva-Ortigoza, and Jorge Velázquez-Castro. Describing the structure of ronchigrams when the grating is placed at the caustic region: the parabolical mirror. *JOSA A*, 27(4):832–845, 2010.
- [33] Gabriel Castillo-Santiago, Diana Castán-Ricaño, Maximino Avendaño-Alejo, Luis Castañeda, and Rufino Díaz-Uribe. Design of hartmann type null screens for testing a plano-convex aspheric lens with a ccd sensor inside the caustic. *Optics express*, 24(17):19405–19416, 2016.
- [34] C Upstill and MV Berry. Catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns. *Progress In Optics*, 1980.
- [35] John Frederick Nye. The catastrophe optics of liquid drop lenses. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 403(1824):1–26, 1986.
- [36] M.V. Berry and C. Upstill. IV catastrophe optics: Morphologies of caustics and their diffraction patterns. In *Progress in Optics*, pages 257–346. Elsevier, 1980.
- [37] M. V. Berry. Disruption of images: the caustic-touching theorem. *Journal of the Optical Society of America A*, 4(3):561, 1987.
- [38] Nora Bretón, Omar de Jesús Cabrera-Rosas, Ernesto Espíndola-Ramos, Salvador Alejandro Juárez-Reyes, Israel Julián-Macías, Ariadna Montiel, Paula Ortega-Vidals, Edwin Román-Hernández, Gilberto Silva-Ortigoza, Ramón Silva-Ortigoza, Citlalli Teresa Sosa-Sánchez, and Román Suárez-Xique. Towards the Ronchi test for gravitational lenses: the gravitoronchigram. *Journal of Optics*, 19(6):065602, 2017.
- [39] Salvador Alejandro Juárez-Reyes, Citlalli Teresa Sosa-Sánchez, Gilberto Silva-Ortigoza, Omar de Jesús Cabrera-Rosas, Ernesto Espíndola-Ramos, and Paula Ortega-Vidals. The wire optical test: a thorough analytical study in and out of caustic surface, and advantages of a dynamical adaptation. *Journal of Optics*, 20(3):035602, 2018.

- [40] Salvador Alejandro Juárez-Reyes, Citlalli Teresa Sosa-Sánchez, Gilberto Silva-Ortigoza, Omar de Jesús Cabrera-Rosas, Ernesto Espíndola-Ramos, and Israel Julián-Macías. Approaching all the configurations for the analytical ronchigram in relation to the caustic region for an arbitrary plano-convex lens. *Journal of Optics*, 20(7):075611, 2018.
- [41] Salvador Alejandro Juárez-Reyes, Magdalena Marciano-Melchor, Mariana Marcelino-Aranda, Paula Ortega-Vidals, Edwin Román-Hernández, Gilberto Silva-Ortigoza, Ramón Silva-Ortigoza, Román Suárez-Xique, Gerardo Francisco Torres Del Castillo, and Mercedes Velázquez-Quesada. Wavefronts, caustic, ronchigram, and null ronchigrating of a plane wave refracted by an axicon lens. *JOSA A*, 31(2):448–459, 2014.
- [42] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade, and A.N. Varchenko. *Singularities of Differentiable Maps, Volume 1*. Birkhäuser Boston, 2012.
- [43] RM Herman and TA Wiggins. Production and uses of diffractionless beams. *JOSA A*, 8(6):932–942, 1991.
- [44] Graeme Scott and Neil McArdle. Efficient generation of nearly diffraction-free beams using an axicon. *Optical Engineering*, 31(12):2640–2644, 1992.
- [45] Jeffrey A Davis, E Carcole, and Don M Cottrell. Nondiffracting interference patterns generated with programmable spatial light modulators. *Applied optics*, 35(4):599–602, 1996.
- [46] Khan M Iftekharuddin, Abdul AS Awwal, and Mohammad A Karim. Gaussian-to-bessel beam transformation using a split refracting system. *Applied optics*, 32(13):2252–2256, 1993.
- [47] Jari Turunen, Antti Vasara, and Ari T Friberg. Holographic generation of diffraction-free beams. *Applied optics*, 27(19):3959–3962, 1988.
- [48] Antti Vasara, Jari Turunen, and Ari T Friberg. Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms. *JOSA A*, 6(11):1748–1754, 1989.
- [49] Hee S Lee, BW Stewart, D Will, and Henry Fenichel. Holographic bessel beam amplification. *Applied physics letters*, 59(24):3096–3098, 1991.
- [50] Carl Paterson and Robin Smith. Higher-order bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms. *Optics Communications*, 124(1-2):121–130, 1996.
- [51] Hee S Lee, BW Stewart, K Choi, and H Fenichel. Holographic nondiverging hollow beam. *Physical Review A*, 49(6):4922, 1994.
- [52] Michael V Berry. Waves and thom’s theorem. *Advances in Physics*, 25(1):1–26, 1976.
- [53] M V Berry. Stable and unstable Airy-related caustics and beams. *Journal of Optics*, 19(5):055601, 2017.

- [54] Y. Kaganovsky and E. Heyman. Wave analysis of Airy beams. *Optics Express*, 18(8):8440, 2010.
- [55] Sophie Vo, Kyle Fuerschbach, Kevin P. Thompson, Miguel A. Alonso, and Jannick P. Rolland. Airy beams: a geometric optics perspective. *Journal of the Optical Society of America A*, 27(12):2574, 2010.
- [56] D. Deng and H. Li. Propagation properties of Airy–Gaussian beams. *Applied Physics B*, 106(3):677–681, 2011.
- [57] S. N. Khonina and A. V. Ustinov. Fractional Airy beams. *Journal of the Optical Society of America A*, 34(11):1991, 2017.
- [58] D. Deng. Propagation of Airy beams through a hard-edged aperture. *Applied Physics B*, 107(1):195–200, 2012.
- [59] Svetlana N. Khonina. Specular and vortical Airy beams. *Optics Communications*, 284(19):4263–4271, 2011.
- [60] Abdelmajid Belafhal, Lahcen Ez-Zariy, Salima Hennani, and Hamid Nebdi. Theoretical introduction and generation method of a novel nondiffracting waves: Olver beams. *Optics and Photonics Journal*, 05(07):234–246, 2015.
- [61] James D. Ring, Jari Lindberg, Areti Mourka, Michael Mazilu, Kishan Dholakia, and Mark R. Dennis. Auto-focusing and self-healing of Pearcey beams. *Optics Express*, 20(17):18955, 2012.
- [62] Ren Zhijun, Ying Chaofu, Jin Hongzhen, and Chen Bo. Generation of a family of Pearcey beams based on Fresnel diffraction catastrophes. *Journal of Optics*, 17(10):105608, 2015.
- [63] Ren Zhijun, Ying Chaofu, Chen Bo, and Yang Zhaoqing. Optical morphogenesis of Pearcey beams and its mathematical mechanism. *Chinese Journal of Lasers*, 43(9):0905001, 2016.
- [64] F Boufalah, L Dalil-Essakali, H Nebdi, and A Belafhal. Effect of turbulent atmosphere on the on-axis average intensity of Pearcey–Gaussian beam. *Chinese Physics B*, 25(6):064208, 2016.
- [65] V. V. Kotlyar, A. A. Kovalev, and A. P. Porfirev. Generation of half-Pearcey laser beams by a spatial light modulator. *Computer Optics*, 38(4):658–662, 2014.
- [66] A. A. Kovalev, V. V. Kotlyar, and S. G. Zaskanov. Structurally stable three-dimensional and two-dimensional laser half Pearcey beams. *Computer Optics*, 38(2):193–197, 2014.
- [67] A.A. Kovalev and V.V. Kotlyar. Pearcey beams carrying orbital angular momentum. *Computer Optics*, 39(4):453–458, 2015.
- [68] Zhijun Ren, Changjiang Fan, Yile Shi, and Bo Chen. Symmetric form-invariant dual Pearcey beams. *Journal of the Optical Society of America A*, 33(8):1523, 2016.

- [69] K Cheng, G Lu, and X Zhong. Energy flux density and angular momentum density of Pearcey-Gauss vortex beams in the far field. *Applied Physics B*, 123(2):60, 2017.
- [70] A Zannotti, F Diebel, M Boguslawski, and C Denz. Caustic diffraction catastrophes: optical swallowtail and butterfly beams. In *Nonlinear Photonics*, pages NW2A–2. Optical Society of America, 2016.
- [71] Alessandro Zannotti, Falko Diebel, and Cornelia Denz. Dynamics of the optical swallowtail catastrophe. *Optica*, 4(10):1157–1162, 2017.
- [72] John Frederick Nye. Optical caustics in the near field from liquid drops. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 361(1704):21–41, 1978.
- [73] JF Nye. From Airy rings to the elliptic umbilic diffraction catastrophe. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 5(5):503, 2003.
- [74] Michael Victor Berry, John Frederick Nye, and FJ Wright. The elliptic umbilic diffraction catastrophe. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 291(1382):453–484, 1979.
- [75] MV Berry and FJ Wright. Phase-space projection identities for diffraction catastrophes. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 13(1):149, 1980.
- [76] JF Nye. Dislocation lines in the hyperbolic umbilic diffraction catastrophe. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 462(2072):2299–2313, 2006.
- [77] Riccardo Borghi. On the numerical evaluation of umbilic diffraction catastrophes. *JOSA A*, 27(7):1661–1670, 2010.
- [78] C. Mamsch, A. Zannotti, and C. Denz. Embedding umbilic catastrophes in artificially designed caustic beams. In *2017 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe & European Quantum Electronics Conference (CLEO/Europe-EQEC)*. IEEE, jun 2017.
- [79] Philip L Marston and Eugene H Trinh. Hyperbolic umbilic diffraction catastrophe and rainbow scattering from spheroidal drops. *Nature*, 312(5994):529–531, 1984.
- [80] John Frederick Nye. Optical caustics from liquid drops under gravity: observations of the parabolic and symbolic umbilics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 292(1387):25–44, 1979.
- [81] AN Godwin. Three dimensional pictures for Thom’s parabolic umbilic. *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, 40(1):117–138, 1971.
- [82] EA Feldman. On parabolic and umbilic points of immersed hypersurfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 127(1):1–28, 1967.
- [83] L de Broglie. Une tentative interprétation causale et nonlinéaire de la mécanique ondulatoire (gauthier-villars, paris, 1956); english translation non-linear wave mechanics, 1960.

- [84] Louis De Broglie. The wave nature of the electron. *Nobel lecture*, 12:244–256, 1929.
- [85] George Paget Thomson. Experiments on the diffraction of cathode rays. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, containing papers of a mathematical and physical character*, 117(778):600–609, 1928.
- [86] Clinton Davisson and Lester H Germer. Diffraction of electrons by a crystal of nickel. *Physical review*, 30(6):705, 1927.
- [87] Erwin Schrödinger. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Physical review*, 28(6):1049, 1926.
- [88] GF Torres del Castillo and C Sosa Sánchez. Solutions of the Schrödinger equation given by solutions of the Hamilton-Jacobi equation. *Revista mexicana de física*, 62(6):534–537, 2016.
- [89] J. F. Nye. Optical caustics and diffraction catastrophes. In *Structural Stability in Physics*, pages 54–60. Springer Berlin Heidelberg, 1979.
- [90] Erwin Madelung. Quantentheorie in hydrodynamischer Form. *Zeitschrift für Physik*, 40(3-4):322–326, 1927.
- [91] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. I. *Physical review*, 85(2):166, 1952.
- [92] John Nye and Francis J. Wright. Natural focusing and fine structure of light: Caustics and wave dislocations. *American Journal of Physics*, 68(8):776–776, 2000.
- [93] Yu. A. Kravtsov and Yu. I. Orlov. *Caustics, Catastrophes and Wave Fields*. Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [94] Pablo Vaveliuk, Alberto Lencina, José A. Rodrigo, and Oscar Martínez Matos. Caustics, catastrophes, and symmetries in curved beams. *Physical Review A*, 92(3), 2015.
- [95] Elad Greenfield, Mordechai Segev, Wiktor Walasik, and Oren Raz. Accelerating light beams along arbitrary convex trajectories. *Physical Review Letters*, 106(21), 2011.
- [96] MV Berry. A note on superoscillations associated with bessel beams. *Journal of Optics*, 15(4):044006, 2013.
- [97] Michael V Berry. Superoscillations and the quantum potential. *European Journal of Physics*, 2020.
- [98] Adriana González-Juárez and Gilberto Silva-Ortigoza. Curves, wavefronts and caustics determined by the intensity pattern of an adiffractive beam. *Physica Scripta*, 94(5):055505, 2019.