



# **BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

## **TAREAS QUE PROMUEVEN HABILIDADES VISUALES ESPACIALES EN LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA HIPÉRBOLA**

**TESIS**  
PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

PRESENTA  
**DEYSI FLORES SÁNCHEZ**

DIRECTOR DE TESIS  
**DRA. ESTELA DE LOURDES JUÁREZ RUIZ**

PUEBLA, PUE

10, FEBRERO, 2023

“Nos encontramos (...), constantemente en presencia de la Divinidad; no podemos sustraer a su mirada ninguna de nuestras acciones: nuestro pensamiento está en contacto incesante con su pensamiento, de modo que es lógico que se diga que Dios ve hasta los más recónditos pliegues de nuestro corazón”

Allan Kardec

## **AGRADECIMIENTOS**

A mi directora de tesis Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz quien siempre me motivó a salir adelante a pesar de las adversidades, que dedicó su valioso tiempo para retroalimentar este trabajo de investigación.

A los docentes por compartirme sus conocimientos rigurosos y precisos, donde quiera que vaya, los llevaré conmigo en mi transitar profesional. Su semilla de conocimientos germinó en el alma y el espíritu. Gracias por su paciencia, por compartir sus conocimientos de manera profesional e invaluable, por dedicación, perseverancia y tolerancia.

A mis hermanos, mamá y a Liz por el apoyo incondicional. Siempre han sido mis mejores guías de vida.

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO 1 .....	5
PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN.....	5
1.1 Planteamiento del problema .....	5
1.2 Pregunta de investigación .....	5
1.3 Objetivos de investigación .....	5
1.3.1 Objetivo general .....	5
1.3.2 Objetivos específicos.....	6
1.4 Justificación .....	6
CAPÍTULO 2.....	7
MARCO TEÓRICO.....	7
2.1. Representaciones semióticas.....	7
2.2. La visualización .....	8
2.3. La aprehensión cognitiva .....	8
2.4. Definición de las habilidades visuales espaciales .....	9
CAPÍTULO 3.....	11
MÉTODO .....	11
RESULTADOS .....	17
4.1. Análisis de los resultados.....	17
CONCLUSIONES .....	31
REFERENCIAS.....	34

## TABLAS

Tabla 1. Habilidades visuales y sus descriptores.....	12
Tabla 2. Valoración del estudiante E1 al resolver las tareas .....	18
Tabla 3. Preguntas de retroalimentación del E1 con sus respectivas respuestas .....	19
Tabla 4. Valoración del estudiante E2 al resolver las tareas .....	20
Tabla 5. Preguntas de retroalimentación del E2 con sus respectivas respuestas .....	22
Tabla 6. Valoración del estudiante E3 al resolver las tareas .....	23
Tabla 7. Preguntas de retroalimentación del E3 con sus respectivas respuestas .....	24
Tabla 8. Valoración del estudiante E4 al resolver las tareas .....	26
Tabla 9. Preguntas de retroalimentación del E4 con sus respectivas respuestas .....	27
Tabla 10. Valoración del estudiante E1 al resolver las tareas .....	28
Tabla 11. Preguntas de retroalimentación del E5 con sus respectivas respuestas .....	29

## INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Tarea 1 organización visual y preguntas de retroalimentación .....	13
Figura 2. Tarea 2 escaneo visual 1 y 2 con sus preguntas de retroalimentación .....	14
Figura 3. Tarea 3 generación de la imagen y preguntas de retroalimentación .....	15
Figura 4. Tarea 4 reconstrucción visual y preguntas de retroalimentación .....	15
Figura 5. Tarea 5 manipulación de la imagen y preguntas de retroalimentación .....	16
Figura 6. Respuesta de E1 a organización visual .....	18
Figura 7. Respuesta del E1 a escaneo visual .....	18
Figura 8. Respuesta del E1 a manipulación de la imagen .....	19
Figura 9. Respuesta de E2 a organización visual .....	21
Figura 10. Respuesta de E2 a escaneo visual 2 .....	21
Figura 11. Respuesta de E2 a generación de la imagen.....	21
Figura 12. Respuesta de E3 a manipulación de la imagen .....	24
Figura 13. Respuesta de E3 a escaneo visual 1 .....	26
Figura 14. Respuesta de E4 a manipulación de la imagen .....	26
Figura 15. Respuesta de E5 a escaneo visual 2 .....	28

## **Resumen**

El presente trabajo tuvo como propósito diseñar y revisar el desempeño de un conjunto de tareas asistidas por GeoGebra enfocadas en el aprendizaje de la representación gráfica de la hipérbola, las cuales están dirigidas a los alumnos que cursan la materia de geometría analítica a nivel universitario. Se pretende con estas tareas promover el desarrollo de habilidades visuales espaciales en las representaciones gráficas de la hipérbola. Las tareas propuestas se diseñaron y se implementaron con cinco estudiantes que habían cursado la materia de geometría analítica en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, con conocimientos básicos de la aplicación de GeoGebra, por medio de una entrevista clínica, para observar sus procesos de resolución y si se comprendieron las tareas y su nivel de comprensión de las representaciones gráficas de la hipérbola.

**Palabras clave:** Hipérbola, habilidades visuales, representación gráfica, tareas.

## **Abstract**

The purpose of this paper was to design and review the performance of a set of tasks assisted by GeoGebra which are focused on learning the graphical representation of the hyperbola aimed at students who take the Analytical Geometry subject at a college degree. These tasks are intended to promote the development of spatial visual skills in the graphic representations of the hyperbola. The proposed tasks were designed and implemented with five students who have studied Analytical Geometry at the Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (Faculty of Physical and Mathematical Sciences of the Meritorious Autonomous University of Puebla) and who have basic knowledge of the application of GeoGebra, a clinical interview will be applied in order to observe their resolution processes and to detect if the tasks were understood and to understand their comprehension level of the graphic representations of the hyperbole.

**Keywords:** hyperbole, visual skills, graphic representation, tasks.

## INTRODUCCIÓN

Las matemáticas se encuentran en continua evolución, se definen como una expresión que tiene la propia mente humana, en dónde la lógica y la razón juegan un papel fundamental. Se componen además de otros elementos que la hacen una ciencia exacta y completa; estos elementos son el análisis, la intuición, la construcción, lo general, lo particular, y, uno que será importante a lo largo del siguiente trabajo, la visualización. Como parte de las matemáticas, la enseñanza juega un papel importante. Hacia los años 1970, las investigaciones en la didáctica de las matemáticas tuvieron una evolución considerable, el interés crece y los trabajos e investigaciones acerca de didáctica han ido en aumento. Entre los trabajos que han servido como base de la enseñanza matemática podemos mencionar los de Puig Adam et al., (1955).

La enseñanza de las matemáticas engloba diversos aspectos, e inmersos en ellos se encuentran diferentes técnicas, procedimientos y uso de materiales. Actualmente el empleo de recursos digitales en un ambiente enriquecido coadyuva a este proceso de la enseñanza, despertando a la vez el interés por el aprendizaje de las matemáticas, facilitando y haciendo que el proceso sea más sencillo y práctico, tanto para aquellos que enseñan como para los que se encuentran en el proceso de aprendizaje.

Es importante señalar, que existen diferentes formas de aprendizaje en cada individuo, esto nos refiere que es útil conocer cuál de todas ellas se lleva a cabo y de qué manera. A lo largo del trabajo, nos enfocaremos en la visualización espacial como herramienta de aprendizaje. El proceso de enseñar y aprender matemáticas podemos encontrarlo en todos lados, pero, existen lugares en donde existe un contexto que favorece y agiliza dicho proceso: las aulas, los espacios visuales, los espacios en dónde la tecnología rige como herramienta, y otras áreas en común. En general, el contexto necesario para la actividad matemática es el de representación, siendo un auxiliar relevante para la visualización.

Las habilidades visuales como método de aprendizaje son vistas primordialmente en el campo de la psicología como capacidades visuoespaciales. Una capacidad es aquella

cualidad que un individuo posee para lograr un fin determinado, Boaler (2014) asocia esta capacidad con la cantidad de inteligencia que desarrolla dicho individuo. Las habilidades visuales tienen la característica de ser sujetas a medirse, por medio de distintos instrumentos que logran identificar si los sujetos son capaces de llevarlas a cabo plenamente y a qué nivel.

Por su parte, en la educación matemática, Bishop (1980), pionero en el estudio de las habilidades visuales espaciales en este campo, estableció las marcadas diferencias entre las preocupaciones del psicólogo y las preocupaciones del educador. Estableció que el primero está esencialmente interesado en el desarrollo “natural” del niño, mientras que el segundo, debido a su papel intervencionista, está esencialmente interesado en su desarrollo “antinatural”. Es decir, en su progreso, razón por la cual en este documento se les llamará habilidades visuales, pues se busca promover su desarrollo en los estudiantes. Bishop (1983) hizo dos preguntas con respecto al procesamiento visual, una de ellas es si es enseñable. En un artículo de revisión de Hawes y Ansari (2020), los autores mostraron evidencias de que las habilidades de visualización espacial son maleables y transferibles. Que juegan un papel en el razonamiento matemático.

A su vez, hay una gran cantidad de evidencia, como son la resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. (Sepúlveda López, A., Medina García, C., & Sepúlveda Jáuregui, D. I. 2009) o bien, las habilidades perceptuales visuales son las encargadas de la organización y el procesamiento de la información a nivel visual formando parte de la percepción visual y colaborando en el desarrollo cognitivo (Merchan, M. S., Henao J. L. 2011) que indican que estas habilidades pueden ser entrenadas y trabajadas mediante tareas, herramientas, tecnología, y otras actividades didácticas visuales para conseguir una mejoría, y, por ende, un aprendizaje completo. Aunado a la visualización, tenemos también el pensamiento matemático, que es aquel proceso de llevar a cabo actividades de manera precisa, apegado a sus bases numéricas, estructurales o lógicas, y de analizar los patrones que subyacen.

Tanto la visualización como el pensamiento funcionan como ayuda en la comprensión y entendimiento de un tema importante en las matemáticas, las figuras

cónicas. La hipérbola pertenece a la categoría de estas figuras y se define como un lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos. La capacidad de tener una comprensión amplia sobre la hipérbola, reconociendo sus partes, elementos, puntos, entre otros, mediante los procesos que se mencionaron anteriormente, tomando en cuenta criterios que mejoran la calidad del aprendizaje y comprensión, nos dará una herramienta importante.

El presente trabajo de investigación se basa en el diseño y pruebas de un conjunto de tareas asistidas por applets de GeoGebra, enfocadas en el aprendizaje de las representaciones gráficas de las figuras cónicas, principalmente de la hipérbola, las cuales están dirigidas a estudiantes de nivel superior. Se pretende con estas tareas promover en escolares universitarios el desarrollo de habilidades visuales espaciales en las representaciones gráficas de la hipérbola. Dichas tareas propuestas se diseñaron y se implementaron en cinco estudiantes que ya habían cursado la materia de geometría analítica de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y que tuvieran conocimientos básicos de GeoGebra, por medio de una entrevista clínica, para observar el desarrollo de sus habilidades visuales espaciales y si estas Applets les ayudaron a comprender mejor las representaciones gráficas de las figuras cónicas, específicamente de la hipérbola.

A continuación, se desglosa el contenido de este trabajo.

En el Capítulo 1 se incluye el planteamiento del problema, y la pregunta de investigación, así como el objetivo general de investigación y los objetivos específicos y finalmente, la justificación de este trabajo.

En el Capítulo 2 se presenta el sustento teórico de esta investigación que lo conforman la teoría de representaciones semióticas de Duval (1999; 2004) y la conceptualización de visualización y de las habilidades de visualización espacial descritas por Miragliotta et al. (2017).

En el Capítulo 3 se describe el método de investigación, conformado por el tipo de estudio, los informantes, la descripción de cada una de las seis tareas que se diseñaron y distribuyeron con respecto a las habilidades visuales espaciales de la siguiente manera: una de organización visual, dos de escaneo visual, una de generación de la imagen, una de reconstrucción visual y una de manipulación de la imagen. Se finaliza con el procedimiento de recolección y análisis de los datos.

En el Capítulo 4 explicaremos cómo fue el desempeño de los estudiantes en la prueba realizada, con sus tareas correspondientes, las que evaluaron sus habilidades visuales espaciales alcanzadas en el tema. El análisis se realiza para cada estudiante y en él también se desglosan los temas aplicados en cada tarea, se explica el desempeño del estudiante y la manera en la que resolvió cada una de ellas, resumiendo la información en una tabla.

Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo y recomendaciones a los docentes que imparten esta asignatura.

# **CAPÍTULO 1**

## **PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.1 Planteamiento del problema**

El aprendizaje efectivo de las matemáticas conlleva diferentes procesos y habilidades, uno de los procesos consta de la visualización espacial con el final de lograr la comprensión de distintos temas, el tema que abordaremos en el siguiente trabajo es la representación gráfica de las figuras cónicas, con un enfoque especial en la hipérbola; además de cómo los estudiantes desarrollan esta habilidad visual espacial y su capacidad de resolver tareas en las cuales nos asistimos de GeoGebra.

### **1.2 Pregunta de investigación**

¿Qué procesos de visualización para la comprensión de representaciones gráficas son capaces de llevar a cabo estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas al resolver tareas, algunas asistidas por Applets de GeoGebra, del tema de la hipérbola?

### **1.3 Objetivos de investigación**

#### **1.3.1 Objetivo general**

Analizar el desempeño de las habilidades visuales espaciales que poseen los estudiantes seleccionados para este trabajo pertenecientes a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas frente a las figuras cónicas, haciendo énfasis en la hipérbola, asistidas por GeoGebra. Lo anterior se llevó a cabo mediante instrucciones enunciadas, gráficas previas y características que tiene cada figura.

### 1.3.2 Objetivos específicos

- Diseñar un conjunto de tareas, algunas asistidas por GeoGebra, enfocadas en la comprensión de la representación gráfica de la hipérbola.
- Revisar las tareas contestadas por estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- Analizar habilidades visuales espaciales para la comprensión del concepto de hipérbola que evidencian estudiantes de nivel superior al resolver las tareas.

### 1.4 Justificación

El presente trabajo pretende conocer la habilidad que poseen estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas en la visualización espacial que tienen frente a figuras cónicas, especialmente la hipérbola, mediante instrucciones enunciadas, gráficas previas y características que tiene cada figura.

Esta investigación se basa en la teoría de representaciones semióticas de Duval (1999), donde se establece que en la visualización y las representaciones semióticas está el corazón de la comprensión de conceptos matemáticos. Por esta razón se hace una propuesta que se pretende, coadyuve al docente de geometría analítica en el desarrollo de la visualización y representaciones gráficas de sus estudiantes, a través de la realización de tareas de visualización y representación gráfica para la comprensión de la hipérbola.

## CAPÍTULO 2

### MARCO TEÓRICO

Los fundamentos teóricos de la presente investigación provienen de la teoría de representaciones semióticas de Duval (1999) y la conceptualización de visualización y de las habilidades de visualización espacial descritas por Miragliotta et al. (2017). Existe un vínculo estrecho entre ellas, pues “la representación y la visualización son fundamentales para la comprensión de las matemáticas” (Duval, 1999, p. 3).

#### 2.1. Representaciones semióticas

Para tener acceso al conocimiento matemático es necesario que los objetos sean representados de diferentes formas. Los objetos matemáticos se representan en diferentes registros semióticos tales como: verbal, tabular, gráfico, algebraico, simbólico y figural (Hernández-Moreno et al., 2017). Se llama *registro de representación* a cada sistema semiótico que proporciona un procesamiento específico para el pensamiento matemático (Duval, 1999).

De acuerdo con Duval (2004), los registros de representación semióticos deben permitir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: construir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado; transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales; y convertir las representaciones producidas en un sistema de representación en otro sistema, de modo que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

El uso de sistemas de representación semiótica para el pensamiento matemático es fundamental porque, a diferencia de otros campos del conocimiento, no hay otras formas de acceder a los objetos matemáticos que la de producir representaciones semióticas (Duval, 1999).

## 2.2. La visualización

El vínculo entre la visualización y la representación de un objeto matemático lo proporciona Duval (1999) al describir que “la visualización está basada en la producción de una representación semiótica” (p. 13). La visualización, afirma, es una organización de relaciones entre algunos tipos de unidades figurales que permiten comprender sinópticamente cualquier organización como una configuración, haciendo visible lo que no es accesible a la visión, así como aprehender globalmente cualquier organización de relaciones.

El concepto de *visualización* que adoptaremos en esta investigación es la propuesta por Arcavi (2003), quien combinó las definiciones dadas por Hershkowitz et al. (1990) y Zimmermann y Cunningham (1991) para establecer que: “es la habilidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión de imágenes y diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y entendimientos avanzados” (p. 217).

Con respecto a los objetos geométricos, estos pueden ser llamados conceptos figurales, ya que poseen propiedades tanto conceptuales como figurales. La *componente conceptual* se refiere a sus cualidades como idealidad, abstracción, generalidad, perfección. La *componente figural* corresponde a sus propiedades espaciales como forma, posición y tamaño (Fischbein, 1993). Esta descripción permite a los estudiantes discriminar entre lo que es la concepción de un objeto geométrico como un objeto matemático ideal, y la componente figural, que plasma en una representación y que, por ende, tiene dimensiones y está ubicado de alguna forma en el plano o en el espacio.

## 2.3. La aprehensión cognitiva

Por otro lado, se establece el proceso de aprehensión cognitiva, como aquel que se produce cuando el sujeto realiza una acción sobre un dibujo o cualquier otro estímulo

visual. Se definen cuatro formas de aprehensión cognitiva: la *perceptiva*, que consiste en la identificación de configuraciones en dos y tres dimensiones, sin asociarle ninguna afirmación matemática; la *secuencial*, que es la construcción o descripción de una configuración en un orden que está en relación con sus propiedades matemáticas; la *discursiva*, que consiste en la asociación de configuraciones con afirmaciones matemáticas (definiciones y propiedades, entre otras); y la *operativa*, que es la realización de modificaciones a una configuración inicial, añadiendo o suprimiendo elementos o reorganizándolos (Duval, 1995).

Tomando como fundamento la noción de concepto figural y las formas de aprehensión cognitiva, Miragliotta et al. (2017) establecieron las habilidades visuales espaciales: organización visual, escaneo visual, generación de la imagen, reconstrucción visual y manipulación de la imagen. A continuación, se presentan las definiciones y su interpretación para la hipérbola.

## 2.4. Definición de las habilidades visuales espaciales

La *organización visual*, es definida como la habilidad para identificar conceptos figurales cónicos, a partir de representaciones gráficas incompletas o no perfectamente visibles. En relación con las figuras cónicas, se espera que el estudiante identifique conceptos figurales planos y tridimensionales, a partir de representaciones gráficas.

El *escaneo visual*, es definido como la habilidad para reconocer y describir las propiedades de una figura cónica a partir de su representación gráfica. En el caso del tema que nos ocupa, se espera que el estudiante pueda reconocer y describir las propiedades de la hipérbola a partir de su representación.

La *generación de la imagen* es la habilidad para reproducir en la mente el componente figural de un concepto figural, recuperándolo de la memoria o generándolo de nuevo. Para reconocer esta habilidad en el tema de las figuras cónicas, se espera que los estudiantes puedan generar el componente figural de estos, a partir de gráficos.

La *reconstrucción visual*, es la habilidad para reconstruir el componente figural de un concepto figural en una representación dada, de forma autónoma o a partir de indicaciones escritas o representaciones parciales. Esta habilidad se reconoce en el estudiante si construye representaciones gráficas de un concepto figural a partir de indicaciones escritas. La diferencia esencial entre esta habilidad y la anterior está en la acción realizada por el estudiante, la cual está determinada por el verbo; en la generación de la imagen es la de *reproducir* en la mente el componente figural, mientras que en esta es la de *reconstruirlo* porque no es explícitamente visible.

La *manipulación de la imagen* es la habilidad para usar las propiedades de un concepto figural o de manipular los aspectos figurales de un concepto figural, teniendo en cuenta las relaciones teóricas entre las unidades figurales elementales de las que está compuesta. Esta habilidad está involucrada en tareas que requieren la manipulación mental de una figura para transformarla en una nueva. Con respecto a la hipérbola, esta habilidad se reconoce en el estudiante si logra construir representaciones gráficas que evidencien su manipulación dinámica en las applets de GeoGebra, la manipulación se lleva a cabo en el momento en el que los estudiantes mueven la gráfica conforme a las características que se solicitan.

## CAPÍTULO 3

### MÉTODO

El estudio es de corte cualitativo, debido a que como lo afirman Hernández-Sampieri et al. (2014), “la investigación cualitativa se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los humanos y sus instituciones” (p. 9). El diseño de la investigación se basa en un estudio de caso, considerando que posibilita identificar y describir de forma detallada algunos fenómenos que se presentan en un caso particular. Para Stake (1998), un caso puede ser una persona, un programa, un maestro, un estudiante, es decir, todas aquellas situaciones o grupos sociales que merecen la atención en la investigación. Además, el caso será del tipo intrínseco. Los estudios de casos intrínsecos son aquellas investigaciones donde el interés se encuentra en el caso particular y no se pretende obtener información sobre otros casos o sobre algún problema general, es decir, se tiene un interés intrínseco del caso (Stake, 1998).

El caso consistió en cinco estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y con un manejo básico de la aplicación de GeoGebra, que ya habían cursado la asignatura de geometría analítica, con edades 19 a 20 años, de las carreras de Actuaría y Física Aplicada.

La técnica de recolección de datos consistió en entrevistas clínicas aplicadas por medio de videoconferencia a través de Zoom, dada la contingencia por la pandemia SARS-COV-2 (COVID 19), las cuales fueron realizadas a cada estudiante de manera individual, con una duración aproximada entre 35 a 40 minutos, las cuales fueron grabadas para su posterior análisis. Asimismo, el investigador principal que realizó las entrevistas clínicas anotó el tiempo que cada estudiante ocupó para resolver cada una de las tareas.

Durante la entrevista clínica, los estudiantes resolvieron seis tareas, las cuales consideraron descriptores para cada una de las habilidades visuales espaciales propuestas por Miragliotta et al. (2017) como se muestra en la Tabla 1.

*Tabla 1. Habilidades visuales y sus descriptores*

<b>Habilidad visual</b>	<b>Descriptores</b>
Organización visual	– Identifica conceptos figurales cónicos, a partir de representaciones gráficas incompletas o no perfectamente visibles.
Escaneo visual	– Reconoce las propiedades de una figura cónica a partir de su representación gráfica. – Describe las propiedades de una hipérbola a partir de su representación gráfica.
Generación de la imagen	– Genera el componente figural de un concepto figural cónico a partir de un enunciado escrito describiéndolo a través de representaciones escritas o gráficas
Reconstrucción visual	– Construye representaciones gráficas de un concepto figural cónico a partir de indicaciones escritas.
Manipulación de la imagen	– Construye representaciones gráficas de una hipérbola teniendo en cuenta las relaciones teóricas entre las unidades figurales elementales de las que está compuesta.

Las tareas se distribuyeron con respecto a las habilidades visuales espaciales de la siguiente manera: una de organización visual, dos de escaneo visual, una de generación de la imagen, una de reconstrucción visual y una de manipulación de la imagen

La primera tarea, de organización visual, consistió en identificar figuras cónicas en una serie de cuatro imágenes, las figuras cónicas se encuentran dentro de cada imagen y debe reconocerlas dentro de otras figuras más. En la Figura 1, se muestra la tarea asignada.

Figura 1. Tarea 1 organización visual y preguntas de retroalimentación

## 1-. Organización Visual

Identificar y escribir qué figuras cónicas observas en cada imagen.

Respuesta

Imagen 1: \_\_\_\_\_

Imagen 2: \_\_\_\_\_

Imagen 3: \_\_\_\_\_

Imagen 4: \_\_\_\_\_



- 1.- En una escala del 1 al 10, en donde 1 es poco y 10 mucho, ¿Qué nivel de dificultad le da a este ejercicio?
- 2.- ¿Qué conocimientos utilizó para llegar a la respuesta de este ejercicio?
- 3.- ¿Qué conocimientos crees necesarios para llegar a la respuesta?
- 4.- ¿Cuál fue tu estrategia para hallar la solución?
- 5.- ¿Qué tiempo promedio te hiciste para llegar a la respuesta?

La segunda tarea de escaneo visual se dividió en dos partes. Con esta tarea se pretende que el alumno reconozca las propiedades de las figuras partiendo de su representación gráfica. Además, específicamente, debe ser capaz de describir las propiedades propiamente de la hipérbola, así como su representación gráfica y todo lo que conlleva su análisis. En ambos ejercicios de este apartado, se trabajó con GeoGebra, la primera parte proporciona una serie de datos clave, en donde el alumno debe identificar a qué representación geométrica corresponde analizando los datos, y ayudándose de la gráfica proporcionada. La segunda parte de escaneo visual le pide al estudiante describir de forma precisa la representación

gráfica de la figura que le aparece, la cual pertenece propiamente a la hipérbola. La tarea se muestra en la Figura 2.

*Figura 2. Tarea 2 escaneo visual 1 y 2 con sus preguntas de retroalimentación*

## **2.- Escaneo visual 1**

En el siguiente URL, encontrarás indicaciones las cuales se deberán seguir adecuadamente, posteriormente anotar los resultados de GeoGebra en el apartado respuesta y las preguntas presentadas en la parte de abajo.

<https://www.geogebra.org/m/psjwkj5j>

Respuesta: \_\_\_\_\_

- 1.- ¿Qué nivel de dificultad le da a este ejercicio del 1 al 10? (Donde 1 es poco y 10 mucho)
- 2.- ¿Qué conocimientos utilizó para llegar a esta respuesta?
- 3.- ¿Qué conocimientos crees necesarios para llegar a la respuesta?
- 4.- ¿Cuál fue tu estrategia para hallar la solución?
- 5.- ¿Qué tiempo promedio te hiciste para llegar a la respuesta?

## **3.- Escaneo visual 2**

En el siguiente URL, encontrarás indicaciones las cuales se deberán seguir adecuadamente, posteriormente anotar los resultados de GeoGebra en el apartado respuesta y las preguntas presentadas en la parte de abajo.

<https://www.geogebra.org/m/zcgny3we>

Respuesta: \_\_\_\_\_

- 1.- ¿Qué nivel de dificultad le da a esta pregunta del 1 al 10? (Donde 1 es poco y 10 mucho)
- 2.- ¿Qué conocimientos utilizó para llegar a esta respuesta?
- 3.- ¿Qué conocimientos crees necesarios para llegar a la respuesta?
- 4.- ¿Cuál fue tu estrategia para hallar la solución?
- 5.- ¿Qué tiempo promedio te hiciste para llegar a la respuesta?

En la tercera tarea, generación de la imagen, el alumno debe ser capaz de poseer la habilidad de reproducir en la mente el componente de una figura, ya sea mediante el uso de su memoria o generándolo desde un inicio. Se le pide al alumno generar dicho concepto de figura cónica a partir de un cono al cual se le ha realizado un corte, en total son cuatro conos y cada uno de ellos pertenece a una representación visual diferente. En la Figura 3, se muestra la tarea asignada.

Figura 3. Tarea 3 generación de la imagen y preguntas de retroalimentación

**4.- Generación de la imagen**

Escribir que figura cónica se produce en cada cono al realizar el corte.

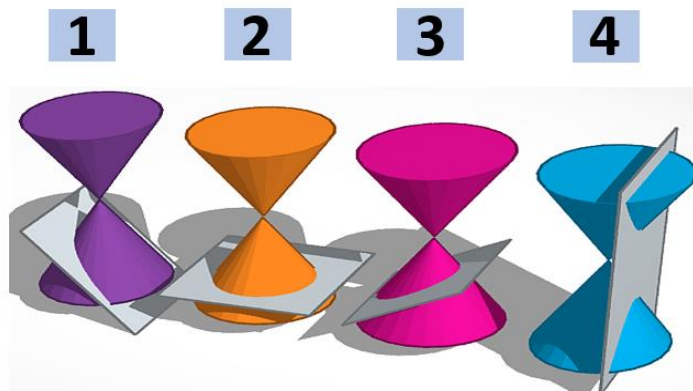
Respuesta

Cono 1: \_\_\_\_\_

Cono 2: \_\_\_\_\_

Cono 3: \_\_\_\_\_

Cono 4: \_\_\_\_\_



1.- ¿Qué nivel de dificultad le da a este ejercicio del 1 al 5? (Donde 1 es poco y 5 mucho)

2.- ¿Qué conocimientos utilizó para llegar a esta respuesta?

3.- ¿Qué conocimientos crees que te faltaron para llegar a la respuesta?

4.- ¿Cuál fue tu estrategia para llegar a la solución?

La cuarta tarea de reconstrucción visual mide la habilidad de la reconstrucción de un concepto figural en una representación dada, la representación puede estar dada por indicaciones escritas o verbales, en este caso fueron escritas. Se le pide construir la representación gráfica dando la ecuación de la figura, el vértice y el foco. En la Figura 4, se muestra la tarea asignada.

Figura 4. Tarea 4 reconstrucción visual y preguntas de retroalimentación

**5.- Reconstrucción visual**

En el siguiente URL, encontrarás indicaciones las cuales se deberán seguir adecuadamente, posteriormente capturar los resultados y colocarlos en el apartado respuesta a manera de captura de pantalla.

<https://www.geogebra.org/m/9e6dmkdy>

Respuesta:

(Captura de pantalla)

1.- ¿Qué nivel de dificultad le da a ejercicio del 1 al 10? (Donde 1 es poco y 10 mucho)

2.- ¿Qué conocimientos utilizó para llegar a esta respuesta?

3.- ¿Qué conocimientos crees necesarios para llegar a la respuesta?

4.- ¿Cuál fue tu estrategia para hallar la solución?

5.- ¿Qué tiempo promedio te hiciste para llegar a la respuesta?

Por último, en la de manipulación de imagen el estudiante debe ser capaz de usar las propiedades de un concepto figural, en relación con la teoría. Los alumnos deberán construir en GeoGebra la representación gráfica, considerando las relaciones teóricas entre las unidades figurales elementales de las que se encuentra formada, se les proporciona la ecuación, vértices y asíntotas (se puede ver cada una de las tareas en el Anexo). En la Figura 5, se muestra la tarea asignada.

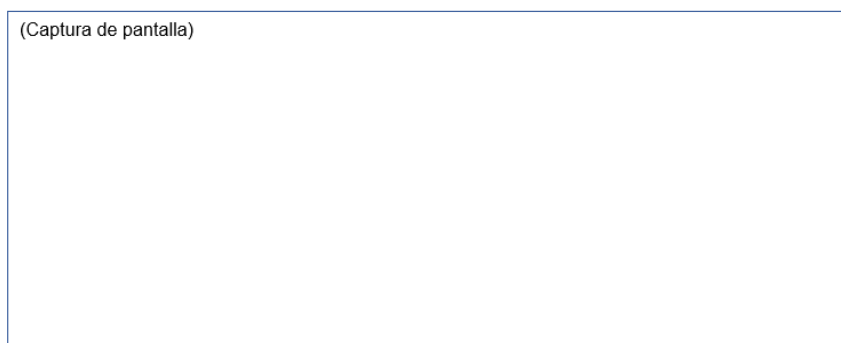
Figura 5. Tarea 5 manipulación de la imagen y preguntas de retroalimentación

#### 6.- Manipulación de la imagen

En el siguiente URL, encontrarás indicaciones las cuales se deberán seguir adecuadamente, posteriormente capturar los resultados y colocarlos en el apartado respuesta a manera de captura de pantalla.

<https://www.geogebra.org/m/tb9wvsjq>

Respuesta:



1.- En

una escala del 1 al 10, en donde 1 es poco y 10 mucho, ¿Qué nivel de dificultad le da a este ejercicio?

2.- ¿Qué conocimientos utilizó para llegar a esta respuesta?

3.- ¿Qué conocimientos crees necesarios para llegar a la respuesta?

4.- ¿Cuál fue tu estrategia para hallar la solución?

5.- ¿Qué tiempo promedio te hiciste para llegar a la respuesta?

Cada tarea; tiene una retroalimentación para el investigador con un cuestionario de cuatro preguntas, en donde se le cuestiona al alumno el nivel de dificultad que tuvo en cada tarea. La primera es una pregunta que pondera la dificultad de la tarea, en una escala del 1 al 10, en donde 1 es poca dificultad y 10 mucha, la segunda pregunta cuestiona el conocimiento empleado para resolver la tarea, la tercera pregunta qué conocimiento cree que le hace falta además del que ya posee para resolverla, finalmente, la cuarta pregunta, cuestiona qué estrategia es la que empleó en la resolución. El investigador aplicador de la entrevista además consideró contabilizar el tiempo que cada estudiante tardó en responder cada tarea.

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS

En este capítulo explicaremos cómo fue el proceso de resolución de la tarea en cada uno de los informantes y si hay evidencia o no de la habilidad visual espacial para la comprensión del concepto de la hipérbola.

#### 4.1. Análisis de los resultados

El análisis se realiza por cada estudiante y en él también se desglosan los temas aplicados en cada tarea, se explica el proceso de resolución del estudiante y la manera en la que resolvió cada una de ellas, resumiendo la información en una tabla. Finalmente haremos una conclusión que tome en cuenta los aspectos más relevantes

En lo sucesivo se clasificarán las respuestas de los alumnos como evidencia (E) o no evidencia (NE).

##### *Análisis estudiante 1 (E1)*

E1 tiene 20 años, cursa el tercer semestre de la licenciatura en actuaría, analizaremos las respuestas de su prueba con seis tareas respectivamente, en la Tabla 2 se presenta un resumen de la valoración de cada tarea. Se observa que el estudiante mostró deficiencias en las habilidades espaciales de organización visual, escaneo visual 2 y manipulación de la imagen. En la resolución de las tareas que la prueba tiene se muestra la ponderación que se le otorgó a cada una, el estudiante cumplió tres tareas de seis.

Tabla 2. Valoración del estudiante E1 al resolver las tareas

	<b>1. Organización Visual</b>	<b>2. Escaneo visual 1</b>	<b>3. Escaneo visual 2</b>	<b>4. Generación de la imagen</b>	<b>5. Reconstrucción visual</b>	<b>6. Manipulación de la imagen</b>
<b>E1</b>	NE	E	NE	E	E	NE

A continuación, analizaremos las tareas de E1 valoradas como NE.

En la Figura 6 se muestra la respuesta del estudiante a la tarea 1 de organización visual. Como se puede observar no hubo evidencia en la identificación de las figuras cónicas, sobre todo de la hipérbola, ya que en ciertas imágenes confunde ésta con la parábola; por ello podemos deducir que no tiene esta habilidad espacial en el tema de las figuras cónicas, específicamente, no pudo reconocer la hipérbola.

Figura 6. Respuesta de E1 a organización visual

Respuesta

Imagen 1: cúspides\_\_\_\_\_

Imagen 2: \_\_\_\_la punta de la cúpula\_\_\_\_\_

Imagen 3: \_\_\_\_sombras\_\_\_\_\_

Imagen 4: \_\_\_\_lámparas \_\_\_\_\_

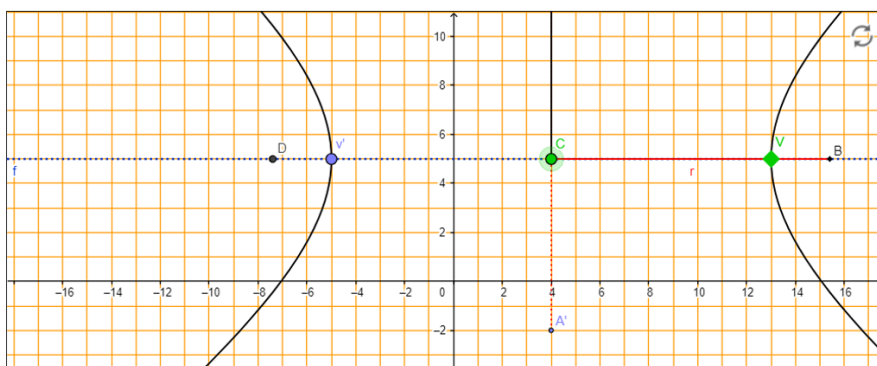
Con respecto a la tarea 3 de escaneo visual 2, en la Figura 7 se muestra la respuesta del estudiante. Como se observa no describe las propiedades de una hipérbola a partir de su representación gráfica. Con esto podemos ver que no posee esta habilidad espacial en el tema de la hipérbola.

Figura 7. Respuesta del E1 a escaneo visual

Respuesta: \_\_\_\_\_hipérbola \_\_\_\_\_

Finalmente, en la Figura 8 de la tarea 5 no construyó la representación gráfica de la hipérbola correctamente, ya que la abertura no es correcta, por tanto, la manipulación de la imagen no se logró llevar a cabo.

Figura 8. Respuesta del E1 a manipulación de la imagen



La retroalimentación de E1 se resume en la Tabla 3, donde se observan las respuestas que dio en las diferentes tareas para dar a conocer cómo fue su experiencia al realizar la prueba.

Como se puede observar, el estudiante E1 tiene mayormente el tiempo empleado en la habilidad visual de manipulación de la imagen, también observamos que el estudiante percibe a las figuras cónicas como objetos mayormente geométricos, más que algebraicos.

Tabla 3. Preguntas de retroalimentación del E1 con sus respectivas respuestas

Habilidad	Dificultad (1-10)	Conocimientos empleados	Conocimientos faltantes	Estrategias utilizadas	Tiempo empleado
Organización visual	2	Definición de cuerpo cónico	Geometría	Buscar puntas del cono	4 minutos
Escaneo visual 1	7	Parábolas y elementos	Coordenadas y partes de la parábola	Guiarse de la ecuación y vértice	6 minutos
Escaneo visual 2	8	Geometría	Geometría	Identificar asíntotas	6 minutos

Generación de la imagen	3	Geometría		Fijar los cortes	5 minutos
Reconstrucción visual	8	Intersección de puntos	Álgebra y Geometría	Basarse en intersecciones y eje, con el vértice y foco	5 minutos
Manipulación de la imagen	10	Vértice	No llegó a la solución, faltó conocer cómo obtener las asíntotas	No encontró estrategias	9 minutos

#### *Análisis estudiante 2 (E2)*

El estudiante 2, tiene 19 años, cursa el tercer semestre de la carrera de actuaría, analizaremos las respuestas de su prueba con seis tareas respectivamente. En la Tabla 4 se presenta un resumen de la valoración de cada tarea. Se observa que el estudiante mostró deficiencias en las habilidades espaciales de organización visual, escaneo visual 2 y generación de la imagen, en la resolución de las tareas que la prueba tiene se muestra la ponderación que se le otorgaron a cada una, el estudiante cumplió con tres tareas de seis.

*Tabla 4. Valoración del estudiante E2 al resolver las tareas*

	<b>1. Organización Visual</b>	<b>2. Escaneo visual 1</b>	<b>3. Escaneo visual 2</b>	<b>4. Generación de la imagen</b>	<b>5. Reconstrucción visual</b>	<b>6. Manipulación de la imagen</b>
<b>E2</b>	NE	E	NE	NE	E	E

A continuación, analizaremos las tareas de E2 valoradas como NE.

En la Figura 9 se muestra la respuesta del estudiante a la primera tarea, organización visual. Como se puede observar no hay evidencia en la identificación de las figuras cónicas, sobre todo de la circunferencia, ya que en ciertas imágenes

confunde ésta con el círculo; por ello podemos deducir que no tiene esta habilidad espacial en el tema de las figuras cónicas.

*Figura 9. Respuesta de E2 a organización visual*

Identificar y escribir qué figuras cónicas observas en cada imagen.

Respuesta

Imagen 1: Parábolas e hipérbolas.

Imagen 2: Círculos, elipses y parábolas.

Imagen 3: Parábolas e hipérbolas.

Imagen 4: Círculos, elipses e Hipeérbolas.

Con respecto a la tarea de escaneo visual 2 en la Figura 10 se muestra la respuesta del estudiante. Como se observa no describe las propiedades de la hipérbola a partir de su representación gráfica. Con esto podemos ver que no posee la habilidad espacial en el tema de la hipérbola.

*Figura 10. Respuesta de E2 a escaneo visual 2*

Respuesta: Hipérbola con cantro en el origen.

Ahora con la tarea de generación de la imagen, en la Figura 11 vemos que no genera el componente figural a través de una representación, pues se observa que no tiene claro los conceptos de las figuras cónicas en especial el de la circunferencia.

*Figura 11. Respuesta de E2 a generación de la imagen*

Respuesta

Cono 1: \_parábola.

Cono 2: circulo.

Cono 3: elipse.

Cono 4: hipérbola.

La retroalimentación de E2 se resume en la Tabla 5, donde se observan las respuestas que dio en las diferentes tareas para conocer cómo fue su experiencia al realizar la prueba.

Como se puede observar el estudiante E2 tiene mayormente el tiempo empleado en la habilidad de manipulación de la imagen y los conocimientos faltantes se centran en los conceptos de figuras cónicas.

Tabla 5. Preguntas de retroalimentación del E2 con sus respectivas respuestas

Habilidad	Dificultad (1-10)	Conocimientos empleados	Conocimientos faltantes	Estrategias utilizadas	Tiempo empleado
Organización visual	2	Geometría analítica	Conocer figuras cónicas, características y perspectivas	Obtener más perspectivas	4 minutos
Escaneo visual 1	3	Características de la parábola y sus partes	Partes de una parábola y tipos de apertura	Identificar la dirección y orientación de la parábola con la información dada	5 minutos
Escaneo visual 2	1	Elementos y características de la hipérbola	Elementos y características de la hipérbola	Identificar su apertura, vértice y focos	3 minutos
Generación de la imagen	1	Cortes de un cono para sección cónica		Ver ángulos de inclinación donde corta el plano al cono	5 minutos
Reconstrucción visual	5	Partes de una parábola	Geometría analítica	Identificar el vértice y emplearlo en	5 minutos

Manipulación de la imagen	8	Partes de una Geometría hipérbola analítica	función en GeoGebra	Encontrar el centro de la hipérbola, vértices y graficar su función en GeoGebra para secciones cónicas	6 minutos
---------------------------	---	---	---------------------	--	-----------

---

### *Análisis estudiante 3 (E3)*

El estudiante 3, tiene 20 años, cursa el tercer semestre de la carrera de física aplicada. Analizaremos las respuestas de su prueba con seis tareas respectivamente, en la Tabla 6 se presenta un resumen de la valoración de cada tarea. Se observa que el estudiante mostró deficiencia en la habilidad espacial de manipulación de la imagen, en la resolución de las tareas que la prueba tiene se muestra la ponderación que se le otorgaron a cada una, el estudiante cumplió cinco tareas de seis.

*Tabla 6. Valoración del estudiante E3 al resolver las tareas*

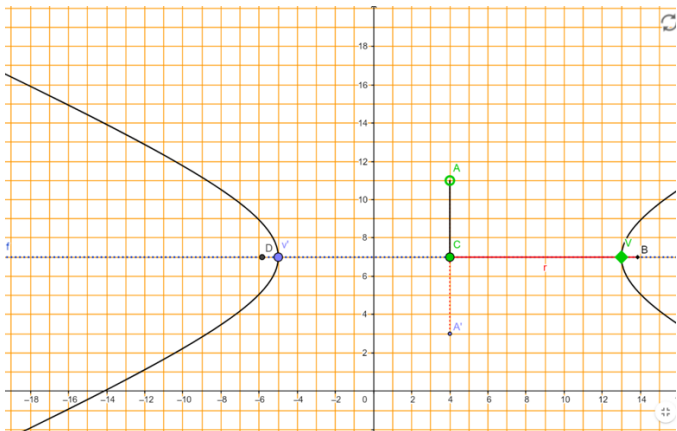
	<b>1. Organización Visual</b>	<b>2. Escaneo visual 1</b>	<b>3. Escaneo visual 2</b>	<b>4. Generación de la imagen</b>	<b>5. Reconstrucción visual</b>	<b>6. Manipulación de la imagen</b>
<b>E3</b>	E	E	E	E	E	NE

A continuación, analizaremos la tarea de E3 valorada como NE.

En la Figura 12 se muestra la respuesta del estudiante a la sexta tarea, manipulación de la imagen. Como se puede observar no manipuló la representación gráfica correctamente, notamos deficiencias en las unidades figurales elementales de

las que está compuesta, por lo tanto, la manipulación de la imagen no fue llevada a cabo.

Figura 12. Respuesta de E3 a manipulación de la imagen



La retroalimentación de E3 se resume en la Tabla 7, donde se observan las respuestas que dio en las diferentes tareas para conocer cómo fue su experiencia al realizar la prueba.

Como se puede observar el estudiante E3 ocupa un mayor tiempo en realizar la tarea 1 correspondiente a la habilidad de organización visual, pero en general, se observa que las estrategias que utilizó las lleva a cabo como corresponde. Por otro lado, el estudiante menciona dificultades con los procesos de representación gráfica de las figuras cónicas, no en los procesos algebraicos. Por ello es importante comprender que ambos, tanto la representación gráfica como los procesos algebraicos son importantes para la comprensión del concepto.

Tabla 7. Preguntas de retroalimentación del E3 con sus respectivas respuestas

Habilidad	Dificultad (1-10)	Conocimientos empleados	Conocimientos faltantes	Estrategias utilizadas	Tiempo empleado
Organización visual	6	Definición de figuras cónicas	Figuras cónicas	Leer indicaciones, definir figuras cónicas, identificar en	5 minutos

---

				cada imagen las figuras	
Escaneo visual 1	1	Partes de una parábola, identificar puntos en el plano	Conocimientos de la parábola	Descarte, ubicar puntos importantes	3 minutos
Escaneo visual 2	3	Puntos en el plano y ecuación de la recta	Geometría analítica	Identificar puntos en el plano, y trabajar con las ecuaciones	4 minutos
Generación de la imagen	1	Definición de figuras cónicas	Entendimiento de gráficos, mayor imaginación	Recordar definiciones	2 minutos
Reconstrucción visual	2	Identificar el plano la coordenada de los puntos, despejar variables	Plano, puntos en el plano, cómo graficar las funciones	Identificar coordenadas, despejar funciones, y sustituir	4 minutos
Manipulación de la imagen	4	Cómo graficar una hipérbola	Conceptos de asíntotas e hipérbola	Usar la ecuación y fijar puntos en la grafica	4 minutos

---

#### *Análisis estudiante 4 (E4)*

El estudiante 4, tiene 19 años, cursa el tercer semestre de la carrera de Actuaría, analizaremos las respuestas de seis tareas respectivamente, en la Tabla 8 se presenta un resumen de la valoración de cada tarea. Se observa que el estudiante mostró



La retroalimentación de E4 se resume en la Tabla 9, donde se pueden leer las respuestas que dio en las diferentes tareas para conocer cómo fue su experiencia al realizar la prueba.

Como se puede observar el estudiante E4 tiene mayormente el tiempo empleado en la habilidad de reconstrucción visual y menciona que tiene dificultades en recordar tanto conocimientos algebraicos como representaciones gráficas de los cortes del cono. Por otro lado, se observa que este estudiante requirió más tiempo para desarrollar las tareas propuestas.

Tabla 9. Preguntas de retroalimentación del E4 con sus respectivas respuestas

Habilidad	Dificultad (1-10)	Conocimientos empleados	Conocimientos faltantes	Estrategias utilizadas	Tiempo empleado
Organización visual	2	Secciones cónicas de nivel medio-superior	Conocimientos básicos sobre los cortes de un cono	Aplicar conocimientos de secciones cónicas	5 minutos
Escaneo visual 1	2	Geometría analítica	Fórmulas y razonamiento para resolver una cónica	Usar la forma estándar de una sección cónica	6 minutos
Escaneo visual 2	3	Conocimientos de Geometría analítica	Geometría	Analizar la gráfica y buscar la ecuación canónica las ecuaciones	7 minutos
Generación de la imagen	1	Conocimientos de secciones cónicas de nivel medio-superior	Conocimientos básicos sobre los cortes de un cono	Analizar los cortes del cono	5 minutos

Reconstrucción visual	4	Traslación de parábolas y su representación gráfica	Efectos de la traslación y la representación gráfica de una parábola	Trazar la gráfica e identificar ciertos puntos	10 minutos
Manipulación de la imagen	4	Geometría analítica	Solución de hipérbolas	Graficar hipérbola	9 minutos

### *Análisis estudiante 5 (E5)*

E1 estudiante E5 tiene 19 años, cursa el tercer semestre de la licenciatura de Actuaría. Analizaremos las respuestas de su prueba con seis tareas respectivamente, en la Tabla 10 se presenta un resumen de la valoración de cada tarea. Se observa que el estudiante mostró deficiencias en las habilidades espaciales de escaneo visual 2 y manipulación de la imagen, en la resolución de las tareas que la prueba tiene se muestra la ponderación que se le otorgaron a cada una, el estudiante cumplió cinco tareas de seis.

*Tabla 10. Valoración del estudiante E1 al resolver las tareas*

	<b>1. Organización Visual</b>	<b>2. Escaneo visual 1</b>	<b>3. Escaneo visual 2</b>	<b>4. Generación de la imagen</b>	<b>5. Reconstrucción visual</b>	<b>6. Manipulación de la imagen</b>
<b>E5</b>	E	E	NE	E	E	E

A continuación, analizaremos las tareas de E5 valoradas NE.

En la Figura 15 se muestra la respuesta del estudiante a la tercera tarea, escaneo visual 2. Como se observa no describe las propiedades de una hipérbola a partir de su representación gráfica. Con esto podemos ver que no posee esta habilidad espacial en el tema de la hipérbola.

*Figura 15. Respuesta de E5 a escaneo visual 2*

Respuesta: **Al ver la imagen percibí que se trata de una HIPÉRBOLA con centro en el origen.**

La retroalimentación de E5 se resume en la Tabla 11, donde se leen las respuestas que dio en las diferentes tareas para conocer cómo fue su experiencia al realizar la prueba.

Como se puede observar el estudiante E5 tiene mayormente el tiempo empleado en la habilidad de manipulación de la imagen, y podemos observar que los conocimientos faltantes que el estudiante manifiesta se refieren a los conceptos geométricos de las figuras cónicas.

Tabla 11. Preguntas de retroalimentación del E5 con sus respectivas respuestas

Habilidad	Dificultad (1-10)	Conocimientos empleados	Conocimientos faltantes	Estrategias utilizadas	Tiempo empleado
Organización visual	2	Geometría secciones cónicas	Conocimientos en geometría, en específico en las curvas y figuras canónicas; saber su clasificación, características y forma	Identificar qué figuras percibía en las imágenes que se parecían a las secciones cónicas.	5 minutos
Escaneo visual 1	4	Geometría secciones cónicas	Cuáles son las secciones cónicas y las propiedades de cada una.	Identificar la ecuación dada y en qué dirección abría, después con el lado recto, el foco y la directriz supe que se trataba del gráfico 3	5 minutos
Escaneo visual 2	6	Secciones cónicas, sus propiedades y elementos	Geometría, las propiedades de la hipérbola y sus fórmulas	Identificar hacia donde abre, sus	7 minutos

para obtener focos y sus elementos. vértices.

Generación de la imagen	3	La intersección de un plano con un cono	La diferencia del corte de una hipérbola y una parábola.	Identificar cual es la figura del círculo, después de la elipse y con la hipérbola recordar cómo era su forma	4 minutos
Reconstrucción visual	6	Geometría analítica (Parábola).	Geometría analítica, figuras canónicas, sus propiedades y formulas.	Identificar el vértice y después evaluar la ecuación con ciertos puntos.	5 minutos
Manipulación de la imagen	7	Geometría analítica (Hipérbola).	Geometría analítica, figuras canónicas, sus propiedades y formulas	Encontrar donde está el centro, identificar sus vértices y de ahí evaluar la ecuación con algunos puntos	8 minutos

---

## CONCLUSIONES

Mediante un análisis y la realización de pruebas, se estudió el desarrollo de habilidades visuales espaciales, enfocadas en las representaciones gráficas de la hipérbola, que poseen algunos estudiantes que han cursado la materia de geometría analítica de la facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. El objetivo fue propiamente analizar los resultados de la implementación de un conjunto de tareas algunas asistidas por GeoGebra, basadas en habilidades visuales espaciales, para la comprensión de representaciones gráficas de la hipérbola, en estudiantes que ya cursaron la materia de geometría analítica y que tienen un manejo elemental de GeoGebra.

Los resultados obtenidos a partir de las pruebas realizadas a los cinco estudiantes universitarios de tercer semestre de Actuaría y Física mostraron más dificultades en las habilidades de escaneo visual 2 y manipulación de la imagen, ya que tres de los cinco estudiantes no mostraron evidencia de esta habilidad visual. Además, la habilidad que menos dificultad tuvo para los estudiantes fue la reconstrucción visual ya que ningún estudiante se equivocó en la tarea que evalúa esta habilidad.

Con respecto a la habilidad de escaneo visual 2, analizando detalladamente los errores de los estudiantes se puede decir que el problema radica en que tuvieron un manejo teórico de los temas insuficiente, ya que el no lograr la identificación de las figuras cónicas, les confería más dificultad a los estudiantes; respecto a seguir las indicaciones del ejercicio logró cumplirse sin ningún problema.

Con respecto a la tarea 6 de manipulación de la imagen, los estudiantes que tuvieron error en esta tarea fueron porque no lograron identificar la hipérbola correcta. Esto nos permite observar que los estudiantes trabajan mejor las representaciones algebraicas de la hipérbola y menos las geométricas.

Finalmente, en la habilidad de reconstrucción visual ningún estudiante se equivocó, lo cual indica que los estudiantes conocen y dominan el tema de geometría analítica, específicamente la hipérbola, este dominio los llevó a realizar el ejercicio

de identificación y análisis de fórmulas, una complementación perfecta, en dónde a partir de la visual pueden comprender e interpretar una fórmula.

Las preguntas que se les hicieron con respecto a la dificultad de la tarea se pueden concluir que la tarea que más se les dificultó fue manipulación de la imagen, teniendo un puntaje de 7, mayor al resto de las demás tareas. Esto se debe a una falla en la integración de lo que implica la geometría analítica, haciendo énfasis en la hipérbola, ya que hasta este punto, la tarea consistía en integrar todas las propiedades con las que cuenta la hipérbola, pero además de la identificación teórica, la importancia fue el llevarlo a la práctica mediante la gráfica, considerando así lo visual; agregando además distintas fórmulas propias de la hipérbola, y una ecuación que proporcione la información de la localización de los puntos exactos.

Las deficiencias que mencionan con más frecuencia los estudiantes son la falta de comprensión teórica de cada tema visto, y esto es el pilar de todo lo demás, ya que, al no tener total dominio del tema, al momento de llevarlo a lo visual, es difícil poder hacerlo correctamente; por otra parte, el que se hayan apoyado de las diferentes gráficas les dio cierta ayuda, y una mejora en la comprensión teórica a partir de la visual.

El tiempo de resolución más largo de las tareas fue Manipulación de la imagen, con un tiempo de 8 minutos, siendo el más alto del resto de tareas. De igual manera, se correlaciona la tarea que tuvo mayor tiempo de resolución con la de mayor dificultad, siendo la tarea de Manipulación de la imagen. Al tener una cierta dificultad para los estudiantes, hizo que el tiempo que se hayan tomado para resolverlo haya sido mayor, pues intentaron comprender la indicación dada, analizar lo que se les pide y luego resolverlo.

Es importante mencionar que se logró evidenciar que las tareas asistidas por GeoGebra fueron de utilidad en el estudio, ya que, es relevante tener la imagen de lo que se está analizando, que en este caso en particular fueron las figuras cónicas, con un enfoque especial en la hipérbola. Los alumnos participantes llevaron a cabo algunas actividades positivamente en el desarrollo de su visualización y análisis, específicamente de la hipérbola y sus componentes, al representarla gráficamente y

en las pruebas que se llevaron a cabo, tomando en cuenta los criterios considerados importantes para el análisis de su habilidad visual.

Se puede concluir que el desarrollo de habilidades visuales espaciales en figuras cónicas como la hipérbola, requiere de habilidades de visualización como las que se estudiaron en este trabajo: las habilidades de nivel elemental como la organización, el escaneo y la reconstrucción visual, que permiten desarrollar los elementos básicos de la conceptualización las figuras cónicas al describir sus componentes conceptuales correctamente; y las habilidades de alto nivel como son la generación y la manipulación de la imagen, que les permiten visualizar y representar gráficamente su componente figural, un análisis completo y complejo de las figuras a partir de lo visual.

Se mostró también que los estudiantes logran visualizar más fácilmente mediante el uso de gráficos en GeoGebra, apoyados de las fórmulas propiamente, creando así una relación con los conocimientos que poseen. Finalmente, se mostró evidencia de que lograr visualizar y realizar una representación gráfica correcta de las figuras cónicas, nuevamente enfocados en la hipérbola no significa que la parte teórica de estos temas la tengan de forma correcta, ya que en el aprendizaje que han adquirido pudieron haber existido conocimientos diferidos. Esto significa que tomando en cuenta que los estudiantes logren la adecuada visualización y representación, es posible que al momento de identificar los diversos enfoques en su uso cotidiano pueda haber errores. Es importante entender que llevar a cabo la habilidad verbal, mediante gráficos, símbolos y álgebra, todo en un conjunto otorga mejores resultados y una enseñanza más significativa en los alumnos.

## REFERENCIAS

Arcavi, A. (2003). *The role of visual representations in the learning of mathematics*. *Educational Studies in Mathematics*, 52 (3), 215 – 241. <https://doi.org/10.1023>

Bishop, A., (1980). *Spatial abilities and mathematics education*. *Space and geometry*, 11 (3), 257 – 269. <https://doi.org/10.1007/BF00697739>

Bishop, A., J. (1983). *Space and Geometry: In the Light of Physiological, Psychological, and Physical Inquiry* (3ra ed.). Open Court Publishing Company. [https://ia802308.us.archive.org/3/items/spacegeometryinl0000mach\\_j6h8/spacegeometryinl0000mach\\_j6h8.pdf](https://ia802308.us.archive.org/3/items/spacegeometryinl0000mach_j6h8/spacegeometryinl0000mach_j6h8.pdf)

Boaler, J. (2014). *Ability grouping in mathematics classrooms*. *Encyclopedia of Mathematics Education*, (1), 1–5. [https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-94-007-4978-8\\_145](https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-94-007-4978-8_145)

Duval, R. (1995). *Imágenes Geométricas: Tipos de representación y procesamientos específicos*. En: Sutherland, R., Mason, J. (eds) *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Springer Science and Business Media, 138, 142 – 157. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0>

Duval, R. (1999). *Representation, vision, and visualization: cognitive functions in mathematical thinking*. Basic issues for learning. Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3–26. ED466379.pdf

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales* (2da ed.). Universidad del Valle. DUVAL, R. 2004 Semiosis y Pensamiento Humano | PDF (scribd.com)

Fischbein, E. (1993). *The theory of figural concepts*. *Educ Stud Math*, 24 (2), 139 – 162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>

Hawes, Z., Ansari, D. (2020). *What explains the relationship between spatial and mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior*. *Psychon Bull Rev*, 27, 465–482. <https://doi.org/10.3758/s13423-019-01694-7>

Hernández, A., Cervantes, J. A., Ordoñez, J. S., y García M. D. S. (2017). *Teoría de registros de representaciones semióticas*, 4 – 5. [https://www.researchgate.net/publication/315814323\\_TEORIA\\_DE\\_REGISTROS\\_DE\\_PRESENTACIONES\\_SEMIOTICA](https://www.researchgate.net/publication/315814323_TEORIA_DE_REGISTROS_DE_PRESENTACIONES_SEMIOTICA)

Hernández, S., Becerra, J. J., Sánchez, M., Castro C. G. (2017). *Programa de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la educación media superior*. Campo disciplinar de humanidades, (1), 4 -5. [https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/12615/5/images/6\\_Temas\\_de\\_Filosofia.pdf](https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/12615/5/images/6_Temas_de_Filosofia.pdf)

Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., y Vinner, S. (1990). *Psychological aspects of learning geometry*. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A research Synthesis by the international group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge University Press, 70–95. [https://www.researchgate.net/publication/233477361\\_Reflections\\_on\\_the\\_status\\_and\\_nature\\_of\\_visual\\_reasoning\\_-\\_the\\_case\\_of\\_the\\_matches](https://www.researchgate.net/publication/233477361_Reflections_on_the_status_and_nature_of_visual_reasoning_-_the_case_of_the_matches)

Merchán M. S., Henao J. L. (2011). *Influencia de la percepción visual en el aprendizaje*. Dialnet, 24 (1), 94 – 95. <https://dialnet.unirioja.es>

Miragliotta, E., Baccaglini-Frank, A., y Tomasi, L. (2017). *Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali: un possibile quadro teorico e un'esperienza didattica*. *L'Insegnamento Della Matematica e Delle Scienze Integrate*, (40), 4 – 22. [https://arpi.unipi.it/bitstream/11568/863925/1/IMSMiragliottaP1\\_postprint.pdf](https://arpi.unipi.it/bitstream/11568/863925/1/IMSMiragliottaP1_postprint.pdf)

*Puig Adam: un legado para la formación de profesores de matemática*. *Revista Universidad y Sociedad*, 13(2), 347-356. [http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2218-36202021000200347&lng=es&tlng=es](http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2218-36202021000200347&lng=es&tlng=es).

Sepúlveda López, A., Medina García, C., & Sepúlveda Jáuregui, D. I. (2009). *La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas*. *Educación matemática*, 21(2), 79-115.

Stake, R., (1920). *Investigación con estudios de caso*. *La naturaleza de la investigación cualitativa*, (2), 42 – 47. <https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Investigacion-con-estudios-de-caso.pdf>

Valdés A., Eloy, J. L., y Medina, J. F. (2021). *Decálogo de didáctica de la matemática de Zimmermann, W., y Cunningham S. (1991). Editors' Introduction: What Is Mathematical Visualization?. Visualization and the Nature of Mathematics*, (19) 2 – 7. [http://www.hitt.uqam.ca/mat7191\\_fich/Zimmermann\\_Cunningham\\_1991.pdf](http://www.hitt.uqam.ca/mat7191_fich/Zimmermann_Cunningham_1991.pdf)