



Benemérita Universidad Autónoma de  
Puebla

---

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Postgrado en Ciencias Matemáticas

Modelación de patrones con interacciones  
sinápticas espacialmente inhomogéneas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestría en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

Daniela Torres Ramírez

Directores:

Dra. Laura Rocío González Ramírez

Dr. Jorge Velázquez Castro

Puebla, Puebla. 8 de agosto de 2025







**BUAP**

**DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE**  
**SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que la C:


**DANIELA TORRES RAMÍREZ**

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 10 de junio de 2025, con la tesis titulada:

*Modelación de patrones con interacciones sinápticas  
espacialmente inhomogéneas*

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.  
H. Puebla de Z. a 17 de junio de 2025

  
**DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE**  
**COORDINADOR DEL POSGRADO**  
**EN MATEMÁTICAS.**



D\*REC/mtrv



---

*A Mary y Migue, mis padres.  
Quienes me han apoyado incondicionalmente.*



## Resumen

En este trabajo se analiza el modelo matemático de Amari (Amari 1977) que permite describir la propagación de un impulso en forma de protuberancia viajera en campos neuronales no homogéneos. El enfoque se basa en estudiar el comportamiento linealmente estable o inestable de las soluciones estacionarias del modelo de Amari a partir de las condiciones de existencia de soluciones de tipo protuberancia viajera con pesos asimétricos.

- De acuerdo con la tesis de Licenciatura (Ramírez 2023) se obtuvieron dos pares de condiciones (ancho y velocidad de onda) de existencia de las soluciones de tipo protuberancia viajera con pesos asimétricos, las cuales se retomaron para estudiar la estabilidad lineal de las mismas.
- Se estudia la estabilidad lineal de las soluciones de tipo protuberancia viajera del modelo de Amari con respecto a los dos pares de condiciones de existencia de protuberancia viajera.
- Se relacionan los resultados de estabilidad lineal de soluciones con simulaciones numéricas del modelo.



---

# Agradecimientos

Expreso mi sincera gratitud a mis directores de tesis, al Dr. Jorge Velázquez Castro y a la Dra. Laura Rocío González Ramírez, por su guía, paciencia, ofrecer aliento y por sus valiosas aportaciones que enriquecieron esta investigación. También agradezco a los miembros del jurado, por su interés en mi trabajo de investigación, apoyo constante y aportes constructivos.

Agradezco a los profesores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, quienes me apoyaron en mi formación científica y a los miembros de la Secretaría y de la Coordinación del Posgrado en Matemáticas por su apoyo en actividades académicas.

A mis amigos de generación, Luis Antonio y María Cristina, gracias por su apoyo constante. Compartimos aprendizajes, retos y logros académicos, además momentos que trascendieron lo académico. Su amistad fue un pilar fundamental en este camino, y me llevo no solo conocimientos, sino también vínculos que valoro profundamente.

Expreso mi gratitud a mis padres, por ser impulso en cada caída y por enseñarme la importancia del esfuerzo. A Raúl Vidal, mi más grande motivación, este logro también es tuyo por tu acompañamiento durante el desarrollo de la investigación. Agradezco a Víctor Mario, tu presencia me ayudó a mantener el equilibrio entre la exigencia académica y la vida personal. Reconozco con aprecio a Daniela, Giselle y Judith, por acompañarme con amor y recordarme que no estaba sola.

Finalmente, comparto mi reconocimiento al programa nacional de becas del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), a cargo de la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SE-CIHTI) cuyo generoso apoyo hizo posible mi desarrollo académico y profesional. Gracias por invertir en la educación y en el futuro de estudiantes como yo.

---

# Introducción

La presencia de ondas viajeras (o protuberancias viajeras) ha sido de interés debido a que modulan transitoriamente la excitabilidad neuronal (Takahashi et al. 2015). Viajan a lo largo de las redes cerebrales en diversas capas corticales expandiéndose progresivamente. Se han observado durante grandes ritmos de baja frecuencia del sueño y en el estado relativamente desincronizado de la corteza cerebral despierta. La función de las ondas viajeras es la consolidación de la memoria a largo plazo y el procesamiento de estímulos visuales dinámicos. La evidencia experimental sugiere que la sincronización de las oscilaciones influye en la conectividad efectiva de las poblaciones en la corteza (Aertsen et al. 1989; Sohal et al. 2009), da forma a la plasticidad cerebral entre las neuronas (Huerta y Lisman 1995) e impulsa el procesamiento de las características del estímulo entre las áreas V1 y V4 de la corteza visual (Ni et al. 2016).

El modelo de Amari es una ecuación de campo neuronal continuo que describe cómo la actividad neuronal se propaga o estabiliza en el espacio, lo que permite capturar patrones de forma natural. Esta ecuación modela cómo la actividad neuronal puede propagarse en el cerebro, como ocurre en la percepción, atención, sueño y procesos motores. Por ejemplo, en la corteza motora o visual, hay vías que favorecen una dirección de procesamiento (de atrás hacia adelante, o de izquierda a derecha).

## Descripción del estado del arte

Los neurocientíficos computacionales y teóricos estudian la dinámica cortical con una variedad de técnicas (Muller y Destexhe 2012; G. B. Ermentrout y Kleinfeld 2001; B. Ermentrout 1998), que abarcan desde la aproximación matemática del continuo de Wilson y Cowan (Wilson y Cowan 1972) hasta la simulación de millones de neuronas y miles de millones de sinapsis en computadoras multinúcleo y paralelas (Helias et al. 2012).

En *Interdisciplinary Applied Mathematics Mathematical Foundations of Neuroscience* (G. Ermentrout y Terman 2010a) se ha estudiado la estabilidad de soluciones estacionarias de una derivación de las ecuaciones de Wilson y Cowan con respecto a una onda estacionaria. Estas ecuaciones permiten estudiar ritmos cerebrales, toma de decisiones y percepción global.

---

En *Spatiotemporal dynamics of continuum neural fields* (Bressloff 2011) se ha analizado la estabilidad de soluciones estacionarias de la ecuación del campo neuronal de Amari.

En este trabajo, utilizaremos el modelo de Amari con una función de conectividad no simétrica y una función de activación neuronal no lineal para describir la actividad sináptica promedio entre poblaciones de neuronas excitatorias e inhibitorias con interacciones asimétricas e inhomogeneidad espacial.

Introducir pesos asimétricos en el modelo de Amari modifica la forma en que una región cortical influye a otras regiones de manera direccional, y eso rompe la simetría espacial, por lo que es posible preguntarnos acerca de la existencia de ondas viajeras.

La literatura mencionada (Bressloff 2011; G. Ermentrout y Terman 2010a) es de utilidad para estudiar la estabilidad lineal de soluciones estacionarias del modelo Amari con las condiciones de existencia de onda viajera (velocidad y ancho de onda) obtenidas numéricamente en la tesis de Licenciatura (Ramírez 2023).

## Justificación

El modelo neuronal de Amari permite describir la evolución temporal y espacial de la actividad cortical mediante ecuaciones integro-diferenciales. Permite generar ondas viajeras influidas por la forma no lineal de la conectividad sináptica, la existencia de asimetrías en los pesos y la presencia de los parámetros de la función de activación.

Comprender cómo influyen las condiciones de existencia de ondas viajeras en el estudio de la estabilidad lineal de soluciones estacionarias posibilita el identificar qué propiedades del sistema permiten que una señal se propague, como la propagación de información sensorial o motora a través de la corteza.

Como continuación de la tesis de Licenciatura, se desea analizar la estabilidad lineal de las soluciones estacionarias del modelo de Amari con el fin de identificar que par de condiciones que permiten la formación de ondas viajeras están asociadas al comportamiento linealmente estable o inestable del sistema.

## Objetivos

### Objetivo general

Estudiar la estabilidad lineal de las soluciones estacionarias del modelo de Amari que describe una onda viajera con pesos asimétricos entre neuronas excitatorias e inhibitorias en un medio inhomogeneo.

---

## Objetivos específicos

- Estudiar los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales parciales.
- Examinar las propiedades que tienen los operadores lineales y funcionales lineales que se encuentran en los espacios de Banach.
- Conocer el modelo de Amari y las ecuaciones de Wilson y Cowan para entender la modelación matemática de actividad sináptica neuronal.
- Reconocer la influencia de la teoría de distribuciones en el estudio de estabilidad lineal de soluciones estacionarias de ecuaciones diferenciales parciales.
- Recurrir a la solución estacionaria y a las condiciones de existencia de ondas viajeras (velocidad y ancho de la onda) obtenidas en el trabajo de Licenciatura para determinar de qué manera las condiciones que garantizan la existencia de soluciones tipo onda viajera en el modelo de Amari se relacionan con la estabilidad e inestabilidad lineal de los estados estacionarios.

---

# ÍNDICE

Resumen	I
Agradecimientos	III
Introducción	1
Descripción del estado del arte	1
Justificación	2
Objetivos	2
Objetivo general	2
Objetivos específicos	3
1 Fundamentos matemáticos	6
1.1 ¿Qué es una ecuación diferencial parcial?	6
1.2 Condiciones iniciales y de frontera	11
1.3 Tipos de ecuaciones de segundo orden	14
1.4 Problema de Valor Inicial	16
1.5 Espacios de Banach	18
1.5.1 Espacios normados de dimensión finita	18
1.5.2 Compacidad y dimensión finita	22
1.5.3 Operadores lineales	23
1.5.4 Operadores lineales acotados y continuos	24
1.5.5 Funcionales lineales	28
1.5.6 Operadores lineales y funcionales en espacios de dimen- sión finita	32
1.5.7 Espacios Normados de Operadores. Espacio Dual	34
1.6 Teoremas fundamentales para espacios normados y espacios de Banach	36
1.6.1 Teorema de Hahn-Banach	37
1.6.1.1 Aplicación de funcionales lineales acotados en $C[a, b]$	38
1.6.2 Teorema de aplicación abierta	40
1.6.3 Teorema del punto fijo	40
1.6.3.1 Aplicación del teorema de Banach a las ecua- ciones diferenciales ordinarias	41
1.6.4 Aplicación del teorema de Banach a las ecuaciones inte- grales	42

1.7	Distribuciones . . . . .	44
1.8	Teoría de la estabilidad lineal para soluciones estacionarias de ecuaciones diferenciales parciales . . . . .	52
1.8.1	Linealización de ecuaciones diferenciales parciales . . . . .	52
1.8.2	Estabilidad lineal en dimensiones infinitas . . . . .	54
2	Fundamentos biológicos . . . . .	61
2.1	Existencia de ondas viajeras . . . . .	61
2.2	Linealización en soluciones estacionarias . . . . .	62
2.3	Modelo de Amari . . . . .	66
3	Estabilidad de soluciones de tipo onda viajera en modelos neuronales con interacciones espaciales inhomogéneas . . . . .	71
3.1	Estabilidad del modelo de Amari . . . . .	71
3.2	Simulaciones numéricas . . . . .	75
4	Conclusiones . . . . .	78

# Capítulo 1

---

## Fundamentos matemáticos

En las primeras 4 secciones mencionaremos algunos conceptos básicos sobre las ecuaciones diferenciales parciales. Los detalles se encuentran en la literatura: *Partial Differential Equations* (Evans 2010; Strauss 2008).

### 1.1. ¿Qué es una ecuación diferencial parcial?

En la siguiente definición mostraremos la forma más general de una **ecuación diferencial parcial (EDP)**.

**Definición 1.1.1.** Sea  $k \geq 1$  y sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Una expresión de la forma:

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad x \in U \quad (1.1.1)$$

es llamado un **sistema de ecuaciones diferenciales parciales de orden  $k$** ,  $k = k_1, \dots, k_m$  donde

$$F : \mathbb{R}^{m \cdot n^k} \times \mathbb{R}^{m \cdot n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{m \cdot n} \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

es dada y

$$u : U \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad u = (u_1, \dots, u_m)$$

es desconocido.

A menudo denotamos sus derivadas con subíndices, por ejemplo,

$$\partial u / \partial x = u_x,$$

$$\partial^2 u / \partial x^2 = u_{xx}$$

y así sucesivamente. Entonces, la ecuación con subíndices se representa

$$F(u_{x^k}(x), u_{x^{k-1}}(x), \dots, u_x(x), u(x), x) = 0 \quad x \in U \quad (1.1.2)$$

donde  $u_{x^k}$  denota la derivada de orden  $k$ .

Aquí suponemos que el sistema comprende el mismo número de  $m$  ecuaciones escalares como incógnitas  $(u^1, \dots, u^m)$ , aunque otros sistemas pueden tener

más o menos ecuaciones que incógnitas.

Una **solución** de una EDP es una función  $u(x)$  que satisface la ecuación (1.1.1). Idealmente, deseamos obtener soluciones explícitas; pero a veces sólo podemos deducir su existencia y otras propiedades de soluciones.

**Definición 1.1.2.** ■ *La ecuación diferencial parcial (1.1.1) es llamada **lineal** si tiene la forma*

$$\sum_{|i| \leq k} a_i(x) D^i u = 0,$$

para funciones dadas  $a_i$  ( $|i| \leq k$ ),  $f$ . Esta EDP es **homogénea** si  $f = 0$ .

■ La EDP (1.1.1) es **semilineal** si es de la forma

$$\sum_{|i|=k} a_i(x) D^i u + i_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0.$$

■ La EDP (1.1.1) es totalmente **no lineal** si no dependen linealmente las derivadas de orden superior.

Podemos definir la linealidad en términos del operador lineal  $L$ .

**Definición 1.1.3.** *Un sistema de EDP es lineal si existe un **operador lineal**  $L : C^k(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$  de manera que el sistema pueda expresarse de la forma*

$$L(u) = f(x), \tag{1.1.3}$$

y cumple que

$$L(au + bv) = aL(u) + bL(v), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

donde  $u = (u_1, \dots, u_m)$  y  $v = (v_1, \dots, v_m)$  son los vectores de funciones incógnitas, y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  es el vector de funciones dadas.

Mostramos algunos ejemplos de EDPs lineales en la física teniendo en cuenta que  $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$  y  $Du = D_x u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$  es el gradiente de  $u$  con respecto a la variable espacial  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

**Ejemplo 1.1.1.** ■ **Ecuación de Laplace**

$$\Delta u = 0,$$

donde el operador de Laplace es

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

El operador es  $L = \Delta$  indicando cómo cambia  $u$  en todas las direcciones del espacio.

- **Ecuación de onda** Explica cómo las perturbaciones se propagan en un medio con velocidad  $c$ .

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0,$$

en  $U \times (0, T)$ . El operador es  $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta$  donde  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  representa la aceleración temporal de la onda,  $\Delta$  representa la curvatura espacial de la onda y  $c$  es la velocidad de propagación de la onda.

- **Ecuación de calor** Describe la difusión del calor en un medio.

$$u_{tt} - \alpha \Delta u = 0,$$

en  $U \times (0, T)$ . El operador es  $L = \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \Delta$ , donde  $\frac{\partial}{\partial t}$  representa el cambio temporal de la temperatura,  $\Delta$  mide la dispersión del calor en el espacio y  $\alpha$  es la difusividad térmica, que indica qué tan rápido se difunde el calor.

- **Ecuación de Helmholtz (o eigenvalor)** Modela modos de vibración, estados estacionarios en mecánica cuántica y resonancia en estructuras.

$$-\Delta u = \lambda u,$$

donde  $u$  es la eigenfunción y  $\lambda$  es el eigenvalor, que representa el escalar asociado a la eigenfunción. El operador es  $L = \Delta$ .

- **Ecuación de transporte** Modela transporte de masas, flujo de calor y dinámica de fluidos.

$$u_t + v \nabla u = 0,$$

donde  $\nabla$  es el vector gradiente en el espacio de las variables espaciales,  $u$  es la cantidad transportada (densidad, temperatura, concentración),  $v = (v^1, \dots, v^n)$  es el campo de velocidad que transporta  $u$ . El operador es  $L = \frac{\partial}{\partial t} - v \nabla$ .

- **Ecuación de Schrödinger** Modela la evolución temporal de la función de onda  $u(x, t)$  en mecánica cuántica:

$$i\hbar u_t + H u = 0,$$

donde el **operador Hamiltoniano** que describe la energía total del sistema es

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + v(x),$$

$\hbar$  la constante de Planck,  $v$  es el potencial en el que se mueve la partícula y  $m$  representa la masa de la partícula cuántica que está siendo descrita por la ecuación de Schrödinger. El operador es  $L = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H$ .

### Ventaja de la linealidad para la ecuación $L(u) = 0$

Una de las consecuencias más importantes de la linealidad es que si  $u_1, u_2, \dots, u_n$  son soluciones de la ecuación homogénea  $L(u) = 0$ , entonces cualquier combinación lineal de estas soluciones:

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n, \tag{1.1.4}$$

también es una solución. Esto se conoce como el **principio de superposición**. La EDP lineal permite generar soluciones más complejas a partir de varias soluciones simples.

Si tenemos una EDP inhomogénea de la forma:

$$L(u) = g(x), \quad (1.1.5)$$

donde  $g(x)$  es una función dada, y si  $u_p(x)$  es una **solución particular** de esta ecuación, entonces la solución general de la EDP inhomogénea se puede escribir como la suma de la solución particular  $u_p(x)$  y la solución general de la EDP homogénea  $L(u) = 0$ . Es decir, la **solución general** es:

$$u(x) = u_p(x) + u_h(x), \quad (1.1.6)$$

donde  $u_h(x)$  es la solución general de la ecuación homogénea  $L(u_h) = 0$ . Esta propiedad es otra ventaja de la linealidad, ya que permite reducir el problema de encontrar una solución inhomogénea a la combinación de una solución particular y las soluciones homogéneas (debido a la superposición de la solución particular con la solución homogénea).

**Ejemplo 1.1.2. Resolver la EDP lineal de primer orden**

$$u_x + 9x^3y^2 u_y = 0.$$

Aplicamos el método de las características, obteniendo el sistema:

$$\frac{dx}{ds} = 1, \quad \frac{dy}{ds} = 9x^3y^2, \quad \frac{du}{ds} = 0.$$

De la primera ecuación se tiene:

$$x(s) = s + x_0,$$

y se puede tomar, sin pérdida de generalidad,  $s = x$ .

Para relacionar  $y$  con  $x$ , escribimos y suponemos  $y \neq 0$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/ds}{dx/ds} = 9x^3y^2.$$

Esta ecuación es separable:

$$\frac{dy}{y^2} = 9x^3 dx.$$

Integrando ambos lados:

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C_1, \quad \int 9x^3 dx = \frac{9}{4}x^4 + C_2.$$

Combinando las constantes de integración:

$$\frac{1}{y} + \frac{9}{4}x^4 = K,$$

donde  $K$  es constante a lo largo de cada característica.

Dado que la ecuación para  $u$  es

$$\frac{du}{ds} = 0,$$

$u$  es constante a lo largo de las curvas características. Por lo tanto, la solución general es:

$$u(x, y) = F\left(\frac{1}{y} + \frac{9}{4}x^4\right),$$

donde  $F$  es una función arbitraria determinada por las condiciones iniciales o de contorno.

A continuación se muestran algunos ejemplos de EDPs no lineales.

**Ejemplo 1.1.3.**    ■ **Ecuación No Lineal de Poisson** Modela fenómenos como flujo no lineal de calor o medios con conductividad dependiente del estado.

$$-\Delta u = f(u),$$

donde  $f$  término fuente no lineal.

■ **Ecuación de Monge-Ampère** Modela la teoría de transporte óptimo y superficies convexas.

$$\det(D^2u) = f(x, u, \nabla u),$$

donde  $\det(D^2u)$  determinante de la matriz hessiana de  $u$ , describe curvatura.

■ **Ecuación de Hamilton-Jacobi** Modela la mecánica clásica y ecuaciones de control óptimo.

$$u_t + H(Du, x) = 0,$$

donde el Hamiltoniano describe energía total del sistema.

■ **Ecuación de Inviscid Burgers** Modela el flujo de fluidos y tráfico vehicular.

$$u_t + uu_x = 0,$$

donde  $uu_t$  es el término convectivo, responsable de la formación de choques.

■ **Ecuación de Onda No Lineal** Modela ondas en medios elásticos no lineales y propagación de señales en fibras ópticas.

$$u_{tt} - c^2\Delta u = f(u),$$

donde  $f$  presenta la no linealidad en la respuesta del medio (puede modelar elasticidad no lineal).

- **Ecuación de Reacción-Difusión Escalar** Modela patrones combustión y química de reacción-difusión.

$$u_t - D\Delta u = f(u),$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión, una constante positiva que mide la tasa a la cual la cantidad  $u$  se dispersa en el espacio,  $D\Delta u$  es la difusión del estado  $u$  y  $f$  hace referencia a la reacción química o biológica.

## 1.2. Condiciones iniciales y de frontera

Dado que las EDP tienen muchas soluciones, necesitamos condiciones auxiliares para seleccionar una solución única. Estas pueden ser condiciones iniciales o de frontera. Por ejemplo,

$$u(x, t_0) = \phi(x). \quad (1.2.1)$$

Para una sustancia que se difunde,  $\phi(x)$  es la concentración inicial, para el flujo de calor,  $\phi(x)$  es la temperatura inicial, para la ecuación de Schrödinger,  $\phi(x)$  es la condición inicial habitual y para la ecuación de onda hay una par de condiciones iniciales :

$$u(x, t_0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = \psi(x), \quad (1.2.2)$$

donde  $\phi(x)$  es la posición inicial y  $\psi(x)$  es la velocidad inicial.

Además, es necesario determinar condiciones límite en los extremos del dominio de la solución. Mostramos algunas **condiciones de contorno** en los contextos de física con dominio espacial  $(0, L)$ :

- **Condición de Dirichlet:** Se especifica la temperatura en los extremos del dominio espacial:

$$u(0, t) = u_0, \quad u(L, t) = u_L, \quad (1.2.3)$$

donde  $u_0$  y  $u_L$  son constantes o funciones del tiempo.

- **Condición de Neumann:** Se especifica el flujo de calor en los extremos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = g_2(t), \quad (1.2.4)$$

donde  $g_1(t)$  y  $g_2(t)$  describen el flujo en los extremos.

- **Condición de Robin:** Se especifica una combinación lineal de la temperatura y su derivada en los extremos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \beta u(0, t) = h(t), \quad (1.2.5)$$

donde  $\beta$  es una función de  $x$  y  $t$ .

Por ejemplo, para la ecuación de difusión, la condición inicial es:

$$u(x, t_0) = \phi(x), \quad (1.2.6)$$

donde  $\phi(x)$  es una función dada.

**Ejemplo 1.2.1.** *La ecuación de Laplace en una dimensión es:*

$$u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L.$$

*con las condiciones de frontera de Dirichlet:*

$$u(0) = A, \quad u(L) = B.$$

*La ecuación  $u_{xx} = 0$  significa que la segunda derivada de  $u(x)$  es cero, lo que implica que la primera derivada es constante:*

$$\frac{du}{dx} = C_1.$$

*Integrando nuevamente:*

$$u(x) = C_1x + C_2.$$

*Aplicamos las condiciones de frontera:*

- *En  $x = 0$ , tenemos  $u(0) = A$ , por lo que:*

$$A = C_1(0) + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = A.$$

- *En  $x = L$ , tenemos  $u(L) = B$ , por lo que:*

$$B = C_1L + A.$$

*Despejando  $C_1$ :*

$$C_1 = \frac{B - A}{L}.$$

*Sustituyendo los valores de  $C_1$  y  $C_2$ , la solución general es:*

$$u(x) = A + \frac{B - A}{L}x.$$

**Ejemplo 1.2.2.** *Consideremos la ecuación del calor en una barra de longitud  $L$ :*

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

*con las condiciones de frontera de Neumann:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$$

*y la condición inicial:*

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Por Separación de Variables, buscamos una solución de la forma:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Esto conduce a la ecuación:

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Resolviendo la ecuación espacial:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Aplicando  $X'(0) = 0$ , se obtiene  $B = 0$ , y con  $X'(L) = 0$ , se deduce:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

La ecuación para  $T_n(t)$  es:

$$T_n'(t) + \alpha^2 \lambda_n T_n(t) = 0,$$

con solución:

$$T_n(t) = C_n e^{-\alpha^2 \lambda_n t}.$$

La solución es una serie infinita:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 \lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

donde los coeficientes  $C_n$  se determinan mediante la condición inicial:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Donde los coeficientes de Fourier son:

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

La solución general es:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) e^{-\alpha^2 \lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

**Ejemplo 1.2.3.** Consideramos la ecuación de Laplace en una dimensión:

$$u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L.$$

con condiciones de frontera de Robin:

$$\frac{du}{dx}(0) + \alpha u(0) = g, \quad \frac{du}{dx}(L) + \beta u(L) = h.$$

Sabemos que:

$$\frac{du}{dx} = C_1,$$

$$u(x) = C_1x + C_2.$$

En  $x = 0$ :

$$C_1 + \alpha C_2 = g.$$

En  $x = L$ :

$$C_1 + \beta(C_1L + C_2) = h.$$

Reescribiendo el sistema:

$$\begin{aligned} C_1 + \alpha C_2 &= g, \\ (1 + \beta L)C_1 + \beta C_2 &= h. \end{aligned}$$

Resolviendo para  $C_1$  y  $C_2$ :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\alpha h - \beta g}{\alpha(1 + \beta(L - 1)) - \beta(1 - \alpha)}. \\ C_2 &= \frac{g - C_1}{\alpha}. \end{aligned}$$

La solución es:

$$u(x) = \frac{\alpha h - \beta g}{\alpha(1 + \beta(L - 1)) - \beta(1 - \alpha)}x + \frac{g - C_1}{\alpha}.$$

### 1.3. Tipos de ecuaciones de segundo orden

Consideremos una ecuación de segundo orden en  $n$  variables independientes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \text{términos de primer orden} = 0. \quad (1.3.1)$$

El tipo de esta ecuación se determina examinando la **matriz de coeficientes**  $A = [A_{ij}]$  por lo que la clasificación depende de los **valores propios**

de esta matriz.

**Definición 1.3.1.** ■ La ecuación es **hiperbólica** si los  $n$  valores propios no se anulan y uno de ellos tiene el signo opuesto. Si ninguno se anula, pero al menos dos de ellos son positivos y al menos dos son negativos, se denomina **ultrahiperbólico**.

- La ecuación es **parabólica** si al menos un valor propio es cero y todos los demás tienen el mismo signo.
- La ecuación es **elíptica** si todos los valores propios tienen el mismo signo (positivos o negativos).

Este análisis es crucial para estudiar ecuaciones como la ecuación de Laplace o la ecuación de calor en múltiples dimensiones.

**Ejemplo 1.3.1.** Encontraremos las regiones en el plano  $xy$  donde la ecuación

$$(1 + x)u_{xx} + 4xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0,$$

es *elíptica, hiperbólica o parabólica*.

Tenemos que:

$$A(x, y) = 1 + x, \quad B(x, y) = 2xy, \quad C(x, y) = -y^2.$$

El discriminante  $\Delta$  es:

$$\Delta = B^2 - AC = (2xy)^2 - (1 + x)(-y^2) = 4x^2y^2 + (1 + x)y^2.$$

Factorizamos  $y^2$ :

$$\Delta = y^2 (4x^2 + x + 1).$$

La ecuación es:

- *Elíptica:* Si  $\Delta < 0$ , es decir, cuando  $y^2 (4x^2 + x + 1) < 0$ . Como  $4x^2 + x + 1 > 0$  para todos  $x$ , no existe ninguna región elíptica.
- *Hiperbólica:* Si  $\Delta > 0$ , es decir, cuando  $y^2 (4x^2 + x + 1) > 0$ , lo que es cierto para todo el plano  $xy$ .
- *Parabólica:* Si  $\Delta = 0$ , es decir, cuando  $y = 0$ , la ecuación es parabólica solo sobre el eje  $y = 0$ .

## 1.4. Problema de Valor Inicial

Introducimos el problema de valor inicial (PVI) con la ecuación de onda.

Recordemos que la ecuación de onda en una dimensión espacial tiene la forma general:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.4.1)$$

El operador se factoriza bien:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0. \quad (1.4.2)$$

Esto significa que, a partir de una función  $u(x, t)$ , se puede calcular  $u_t + cu_x$ , llamando al resultado  $v$ , para luego calcular  $v_t - cv_x$ , y obtener la función cero.

La solución general es:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (1.4.3)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones arbitrarias dos veces diferenciables que describen las ondas que viajan en las direcciones positiva y negativa.

*Demostración.* Introducimos las coordenadas características:

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct.$$

Por la regla de la cadena,

$$\partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta, \quad \partial_t = c\partial_\xi - c\partial_\eta.$$

Por lo que  $\partial_t - c\partial_x = -2c\partial_\eta$  y  $\partial_t + c\partial_x = 2c\partial_\xi$ . Así, (1.4.1) toma la forma:

$$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = (-2c\partial_\eta)(2c\partial_\xi)u = 0,$$

significa que  $u_{\xi\eta} = 0$  pues  $c \neq 0$ .

La solución de esta ecuación transformada es

$$y = f(\xi) + g(\eta).$$

□

Aplicamos el PVI a la ecuación de onda (1.4.1)

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (1.4.4)$$

donde  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$  son funciones arbitrarias de  $x$ . Para encontrar la solución de (1.4.1) y (1.4.4) de la fórmula general (1.4.3). Tomamos  $t = 0$  en (1.4.3), y tenemos

$$\phi(x) = f(x) + g(x). \quad (1.4.5)$$

Usando la regla de la cadena, derivamos (1.4.3) con respecto a  $t$  y consideramos  $t = 0$  para tener

$$\psi(x) = cf'(x) - cg'(x). \quad (1.4.6)$$

Consideremos (1.4.5) y (1.4.6) como dos ecuaciones para las dos funciones desconocidas  $f$  y  $g$  y renombramos  $x$  a  $s$ . Derivamos (1.4.5) y dividimos (1.4.6) por  $c$  para obtener

$$\psi' = f' + g' \quad \text{y} \quad \frac{1}{c}\psi = f' - g'.$$

Sumando tenemos

$$f' = \frac{1}{2} \left( \phi' + \frac{\psi}{c} \right) \quad \text{y} \quad g' = \frac{1}{2} \left( \phi' - \frac{\psi}{c} \right).$$

Integrando, tenemos

$$f(s) = \frac{1}{2}\phi(s) + \frac{1}{2c} \int_0^s \psi + A \quad \text{y} \quad g(s) = \frac{1}{2}\phi(s) - \frac{1}{2c} \int_0^s \psi + B.$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes. Por (1.4.5),  $A + B = 0$ . Sustituyendo  $s = x + ct$  en la fórmula de  $f$  y  $s = x - ct$  en la de  $g$ , obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\phi(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \psi + \frac{1}{2}\phi(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} \psi.$$

Simplificando

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds. \quad (1.4.7)$$

Asumiendo que  $\phi \in C^2$ ,  $\psi \in C^1$ . Vemos de (1.4.7)  $u$  en sí tiene derivadas parciales segundas continuas en  $x$  y  $t$ ,  $u \in C^2$ .

**Ejemplo 1.4.1.** Dada la ecuación de onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

y las condiciones iniciales:

$$\phi(x) = 0, \quad \psi(x) = \cos(x),$$

la solución general es

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} [\sin(x + ct) - \sin(x - ct)] = \frac{1}{c} \cos(x) \sin(ct).$$

Evaluamos la solución en  $t = 0$ :

$$u(x, 0) = \frac{1}{c} \cos(x) \sin(0) = \frac{1}{c} \cos(x) \cdot 0 = 0.$$

Por lo tanto, se cumple  $u(x, 0) = 0$ .

Derivamos  $u(x, t)$  con respecto a  $t$ :

$$u_t(x, t) = \frac{1}{c} \cos(x) \cdot c \cos(ct) = \cos(x) \cos(ct).$$

Evaluamos en  $t = 0$ :

$$u_t(x, 0) = \cos(x) \cos(0) = \cos(x) \cdot 1 = \cos(x).$$

Por lo tanto, se cumple  $u_t(x, 0) = \cos(x)$ .

Hasta aquí mostramos algunos conceptos básicos sobre EDPs. A continuación, en las siguientes dos secciones, abordaremos el tema de Espacios de Banach, debido a que estos espacios ofrecen una estructura matemática adecuada para abordar y entender diversos problemas en análisis funcional, especialmente en el contexto de la existencia y unicidad de soluciones.

## 1.5. Espacios de Banach

Los detalles para estas secciones se encuentran en la literatura: *Introductory Functional Analysis with Applications* (Kreyszig 1978).

Utilizaremos los espacios de Banach para las siguientes situaciones que se presentarán al resolver las EDPs a lo largo de este trabajo.

- **Existencia de soluciones en casos especiales):** Los espacios de Banach proporcionan un marco para aplicar el **teorema de Banach (o teorema del punto fijo)** que es útil en la demostración de la existencia de soluciones en función de condiciones iniciales y de frontera. Esto es posible al convertir un problema de EDP en el problema de demostrar la existencia de un punto fijo del operador correspondiente definido en este espacio.
- **Estudio de ecuaciones lineales:** Las EDPs que involucran operadores lineales pueden ser estudiados como mapeos entre espacios de Banach que permiten el análisis de la continuidad y la convergencia de estos operadores.

Los espacios de Banach también son de utilidad en la aplicación de métodos numéricos para aproximar las soluciones de EDPs en estos espacios, la teoría de regularidad de soluciones de EDPs y planteamiento del problema de Cauchy y de frontera a EDPs no lineales.

### 1.5.1. Espacios normados de dimensión finita

Los espacios normados de dimensión finita influyen en algunas prácticas del área de EDP:

- Ayudan en la aplicación del Teorema 1.6.5 de Riesz y la **representación de soluciones mediante funcionales**.

- Permiten aplicar resultados como el **Teorema de existencia y unicidad de soluciones** a través de subespacios bien elegidos.
- Permiten la **descomposición y aproximación de soluciones** a través de funciones base.

Recordemos algunas definiciones.

**Definición 1.5.1.** Un **espacio métrico** es un par  $(X, d)$ , donde:

- $X$  es un conjunto no vacío.
- $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función llamada **métrica**, que satisface las siguientes propiedades para todos  $x, y, z \in X$ :

1.

$$d(x, y) \geq 0.$$

2.

$$d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

3.

$$d(x, y) = d(y, x).$$

4.

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Cuando una función  $d$  cumple estas propiedades, se dice que es una **métrica** y que  $X$  es un **espacio métrico**.

**Definición 1.5.2.** Sea  $(X, d)$  un **espacio métrico**, donde  $X$  es un conjunto y  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  es una métrica.

- Una **sucesión**  $\{x_n\} \subset X$  es de **Cauchy** si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todos  $m, n \geq N$ ,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

- El espacio  $X$  es **completo** si para toda sucesión de Cauchy  $\{x_n\}$ , existe un **límite**  $x \in X$  tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

**Definición 1.5.3.** Un **espacio normado**  $X$   $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio vectorial con una norma definida en él. Aquí una norma en un espacio vectorial  $X$  (real o complejo) es una función de valor real en  $X$  cuyo valor en  $x \in X$  se denota por

$$\|x\|,$$

y tiene las siguientes propiedades

1.

$$\|x\| \geq 0,$$

2.

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

3.

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

4.

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Una norma en  $X$  define una métrica  $d$  en  $x$  dado por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad (x, y \in X), \quad (1.5.1)$$

llamada **métrica inducida por la norma**.

**Definición 1.5.4.** Un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  es un **espacio de Banach** si es **completo**.

**Lema 1.5.1. (Combinaciones lineales)**

Sea  $\{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio normado  $X$  (de cualquier dimensión). Entonces existe un número  $c > 0$  tal que para cada elección de escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tenemos

$$\|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|). \quad (1.5.2)$$

Como aplicación del lema anterior tenemos lo siguiente.

**Teorema 1.5.1. Completación**

Cada subespacio de dimensión finita  $Y$  de un espacio normado  $X$  es completo. En particular, cada **espacio normado de dimensión finita es completo**.

**Teorema 1.5.2. Cerradura**

Cada subespacio de dimensión finita  $Y$  de un espacio normado  $X$  es cerrado en  $X$ .

**Observación 1.5.1.** Téngase en cuenta que los subespacios de dimensión infinita no necesitan estar cerrados.

Ahora, veamos que un espacio métrico es un espacio topológico. Para ello, recordemos el concepto de topología.

**Definición 1.5.5.** Dado un conjunto no vacío  $X$ , se dice que la familia  $\tau$  formada por subconjuntos de  $X$  es una **topología** si verifica las siguientes propiedades:

1. El conjunto vacío y el conjunto  $X$  pertenecen a la familia  $\tau$ .
2. La unión finita o infinita de elementos de  $\tau$  está en  $\tau$ .
3. La intersección finita de elementos de  $\tau$  está en  $\tau$ .

*Demostración.* Queremos demostrar que la métrica  $d$  induce una topología en  $X$ .

En un espacio métrico  $(X, d)$ , definimos una bola abierta de radio  $\epsilon > 0$  y centro  $x \in X$  como el conjunto:

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Llamamos a un conjunto  $U \subset X$  **abierto** si, para cada punto  $x \in U$ , existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset U$ . Es decir, los conjuntos abiertos en  $X$  son aquellos que pueden escribirse como una unión de bolas abiertas.

### 1. El conjunto vacío y $X$ son abiertos.

- El conjunto vacío es abierto por vacuidad.
- El conjunto  $X$  es abierto porque para cada punto  $x \in X$ , la bola  $B(x, \epsilon) = X$  es contenida en  $X$  para  $\epsilon > 0$ .

2. **La intersección finita de conjuntos abiertos es abierta.** Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  una colección finita de conjuntos abiertos en  $X$ . La intersección  $\bigcap_{i \in I} U_i$  es abierta. Esto se sigue de que, dado un punto  $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ , existe  $\epsilon_i > 0$  tal que  $B(x, \epsilon_i) \subset U_i$  para cada  $i$ . Tomando  $\epsilon = \min\{\epsilon_i\}$ , tenemos que  $B(x, \epsilon) \subset \bigcap_{i \in I} U_i$ , lo que demuestra que la intersección es abierta.

3. **La unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierta.** Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  una colección de conjuntos abiertos en  $X$ . La unión  $\bigcup_{i \in I} U_i$  es abierta. Esto se sigue de que, dado un punto  $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ , existe algún  $j \in I$  tal que  $x \in U_j$ . Como  $U_j$  es abierto, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ , lo que demuestra que la unión es abierta.

Por lo tanto,  $(X, d)$  es un espacio topológico. □

Otra propiedad interesante de un espacio vectorial de dimensión finita  $X$  es que **todas las normas sobre  $X$  conducen a la misma topología para  $X$** , es decir, los subconjuntos abiertos de  $X$  son los mismos, independientemente de la elección particular de una norma sobre  $X$ .

### Definición 1.5.6. Normas equivalentes

Una norma  $\|\cdot\|$  en un espacio vectorial  $X$  se dice que es **equivalente** a la norma  $\|\cdot\|_0$  en  $X$  si existen números positivos  $a$  y  $b$  tales que para cada  $x \in X$  tenemos

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0. \quad (1.5.3)$$

### Teorema 1.5.3. Normas equivalentes

En un espacio vectorial de dimensión finita  $X$ , cualquier norma  $\|\cdot\|$  es equivalente a cualquier otra norma  $\|\cdot\|_0$ .

## 1.5.2. Compacidad y dimensión finita

### Definición 1.5.7. *Compacidad*

Se dice que un espacio métrico  $X$  es **compacto** si cada sucesión en  $X$  tiene una subsucesión convergente. Se dice que un subconjunto  $M$  de  $X$  es compacto si  $M$  es compacto considerado como un subespacio de  $X$ , es decir, si cada sucesión en  $M$  tiene una subsucesión convergente cuyo límite es un elemento de  $M$ .

### Definición 1.5.8. *Compacidad compacta*

Un espacio métrico  $X$  es llamado **localmente compacto** si cada punto de  $X$  tiene una vecindad compacta.

Una propiedad general de conjuntos compactos se expresa en el siguiente lema.

### Lema 1.5.2. *Compacidad*

Un subconjunto compacto  $M$  de un espacio métrico es cerrado y acotado.

El opuesto de este lema es falso.

*Demostración.* Consideremos la sucesión  $(e_n)$  en  $l^2$ , donde  $e_n = (\delta_{nj})$  tiene el  $n$ -ésimo término 1 y los demás términos son 0. Esta sucesión es acotada debido a que  $\|e_n\| = 1$ . Sus términos constituyen un conjunto de puntos que es cerrado porque no tiene punto de acumulación. Por la misma razón, ese conjunto de puntos no es compacto.  $\square$

### Teorema 1.5.4. *Compacidad*

En un espacio normado de dimensión finita  $X$ , cualquier subconjunto  $M \subset X$  es compacto si y sólo si  $M$  es cerrado y acotado.

### Lema 1.5.3. *F. Riesz*

Sean  $Y$  y  $Z$  subespacios de un espacio normado  $X$  (de cualquier dimensión), suponga que  $Y$  es cerrado y es un subconjunto propio de  $Z$ . Entonces para cada número real  $\theta$  en el intervalo  $(0, 1)$  hay un  $z \in Z$  tal que

$$\|z\| = 1, \quad \|z - y\| \geq \theta \text{ para todo } y \in Y.$$

En un espacio normado de dimensión finita, la esfera unitaria cerrada es compacta según el Teorema 1.5.4. Por el contrario, el lema de Riesz proporciona las siguientes conclusiones útiles y notables:

### Teorema 1.5.5. *Dimensión finita*

Si un espacio normado  $X$  tiene la propiedad de que la bola unitaria cerrada  $M = \{x : \|x\| \leq 1\}$  es compacta, entonces  $X$  es dimensionalmente finito.

### Teorema 1.5.6. *Mapeo continuo*

Sea  $X$  y  $Y$  espacios métricos y  $T : X \rightarrow Y$  un mapeo continuo. Entonces la imagen de un subconjunto compacto  $M$  de  $X$  bajo  $T$  es compacto.

### Corolario 1.5.1. *Máximo y mínimo*

Un mapeo continuo  $T$  de un subconjunto compacto  $M$  de un espacio métrico  $X$  en  $\mathbb{R}$  asume un máximo y un mínimo en algunos puntos de  $M$ .

### 1.5.3. Operadores lineales

#### Definición 1.5.9. *Operador lineal*

Un operador lineal  $T$  es un operador tal que

1. el **dominio**  $D(T)$  de  $T$  es un espacio vectorial y el **rango**  $R(T)$  se encuentra en un espacio vectorial sobre el mismo campo,
2. para todo  $x, y \in D(T)$  y escalar  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} T(x + y) &= Tx + Ty, \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx. \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

El **espacio nulo** o **kernel** de  $T$  es el conjunto de todos los  $x \in D(T)$  tal que  $Tx = 0$ .

La fórmula anterior expresa el hecho de que el operador lineal  $T$  es un **homomorfismo** de un espacio vectorial en otro espacio vectorial.

#### Teorema 1.5.7. *Rango y espacio nulo*

Sea  $T$  un operador lineal, entonces:

1. El rango  $R(T)$  es un espacio vectorial.
2. Si  $\dim D(T) = n < \infty$ , entonces  $\dim R(T) \leq n$ .
3. El espacio nulo  $N(T)$  es un espacio vectorial.

#### Observación 1.5.2. *Operadores lineales preservan dependencia lineal*

Recordemos que  $T : D(T) \rightarrow Y$  se llama **inyectiva** si diferentes puntos en el dominio tienen imágenes diferentes, esto es, si para cualquier  $x_1, x_2 \in D(T)$ ,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2. \tag{1.5.5}$$

En este caso existe el mapeo

$$\begin{aligned} T^{-1} : R(T) &\rightarrow D(T) \\ y_0 &\longmapsto x_0, \quad (y_0 = Tx_0) \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

$T^{-1}$  se llama la **inversa** de  $T$ .

#### Teorema 1.5.8. *Operador inverso*

Sea  $X$  y  $Y$  espacios vectoriales, ambos reales o ambos complejos. Sea  $T : D(T) \rightarrow Y$  un operador lineal con dominio  $D(T) \subset X$  y rango  $R(T) \subset Y$ . Entonces:

1. La inversa  $T^{-1} : R(T) \rightarrow D(T)$  existe si y sólo si

$$Tx = 0 \Rightarrow x = 0.$$

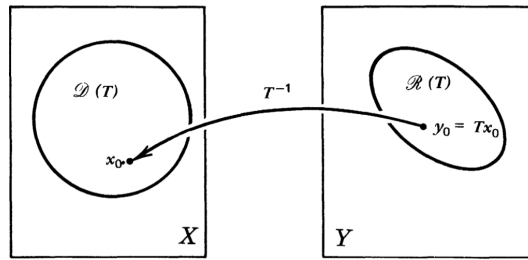


Figura 1.5.1: Notaciones en relación con la inversa de un operador (Kreyszig 1978).

2. Si  $T^{-1}$  existe, es un operador lineal.

3. Si  $\dim D(T) = n < \infty$  y  $T^{-1}$  existe, entonces  $\dim D(T) = \dim R(T)$ .

**Lema 1.5.4. Producto inverso**

Sean  $T : X \rightarrow Y$  y  $S : Y \rightarrow Z$  operadores lineales biyectivos donde  $X, Y, Z$  son espacios vectoriales. Entonces la inversa  $(ST)^{-1} : Z \rightarrow X$  del producto (la composición)  $ST$  existe y

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}. \tag{1.5.7}$$

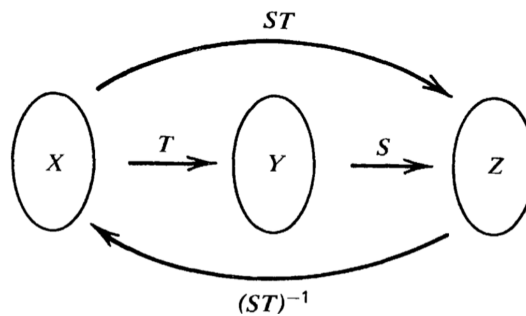


Figura 1.5.2: Notaciones del Lema 1.5.4 (Kreyszig 1978).

### 1.5.4. Operadores lineales acotados y continuos

**Definición 1.5.10. Operador lineal acotado**

Sean  $X$  y  $Y$  espacios normados y  $T : D(T) \rightarrow Y$  un operador lineal, donde  $D(T) \subset X$ . El operador  $T$  es llamado **acotado** si existe un número real  $c$  tal que para todo  $x \in D(T)$ ,

$$\|Tx\| \leq c\|x\|. \tag{1.5.8}$$

La desigualdad anterior nos indica que el operador lineal acotado mapea conjuntos acotados en  $D(T)$  en conjuntos acotados en  $Y$ .

**Observación 1.5.3.** *En este estudio la palabra acotado es diferente al significado en cálculo: una función acotada es aquella cuyo rango es un conjunto acotado.*

¿Cuál es la  $c$  más pequeña posible tal que (1.5.8) se cumple para todos los  $x \in D(T)$ ?

Por división

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c$$

(Omitimos  $x = 0$  pues  $Tx = 0$  para toda  $x = 0$ ). Esto muestra que  $c$  debe ser al menos tan grande como el supremo de la expresión de la derecha tomada sobre  $D(T) - \{0\}$ . Esta cantidad se denota por  $\|T\|$ ; por lo tanto:

$$\|T\| = \sup_{x \in D(T), x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad (1.5.9)$$

$\|T\|$  es llamada **norma del operador  $T$** . Si  $D(T) = \{0\}$  definimos  $\|T\| = 0$ . Notemos que (1.5.8) con  $c = \|T\|$  es

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \quad (1.5.10)$$

Veamos algunos ejemplos de operadores lineales.

**Ejemplo 1.5.1.** 1. **Operador identidad**  $I : X \rightarrow X$  definido por  $I_x x = x$  para todo  $x \in X$ , en un espacio normado  $X \neq \{0\}$  es acotado y tiene norma  $\|I\| = 1$ .

2. **Operador cero**  $0 : X \rightarrow Y$  definido por  $0x = 0$  para todo  $x \in X$ , en un espacio normado  $X$  es acotado con la norma  $\|0\| = 0$ .

3. **Operador diferenciación** Sea  $X$  un espacio normado de todos los polinomios en  $J = [0, 1]$  con la norma dada por  $\|x\| = \max |x(t)|$ ,  $t \in J$ . Un operador diferenciación  $T$  es definido en  $X$  por

$$Tx(t) = x'(t),$$

la diferenciación con respecto a  $t$ . Este operador es lineal pero no acotado. En efecto, sea  $x_n(t) = t^n$ , donde  $n \in \mathbb{N}$ . entonces  $\|x_n\| = 1$  y

$$Tx_n(t) = x'_n(t) = nt^{n-1},$$

así que  $\|Tx_n\| = n$  y  $\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} = n$ . Debido a que  $n$  es arbitrario, esto demuestra que no existe un número fijo  $c$  tal que  $\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} \leq c$ .

4. **Operador integral** Definimos a  $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  por

$$y = Tx \quad \text{donde} \quad y(t) = \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau.$$

Aquí  $k$  es una función dada, llamada **kernel de  $T$**  y se asume como continuo en el cuadrado cerrado  $G = J \times J$  en el  $t\tau$ -plano donde  $J = [0, 1]$ . El operador es lineal,  $T$  es acotado.

Para probarlo, primero notemos que la continuidad de  $k$  en el cuadrado cerrado implica que  $k$  es acotado, digamos  $|k(t, \tau)| \leq k_0$  para todo  $(t, \tau) \in G$  donde  $k_0$  es un número real. Además

$$|x(t)| \leq \max_{t \in J} |x(t)| = \|x\|.$$

Por eso

$$\begin{aligned} \|y\| = \|Tx\| &= \max_{t \in J} \left| \int_0^1 k(t, \tau)x(\tau)d\tau \right| \\ &\leq \max_{t \in J} \int_0^1 |k(t, \tau)||x(\tau)|d\tau \\ &\leq k_0 \|x\|. \end{aligned}$$

Este resultado es  $\|Tx\| \leq k_0 \|x\|$ .

**Lema 1.5.5. Norma**

Sea  $T$  un operador lineal acotado. Entonces

1. Una fórmula alternativa para la norma de  $T$  es

$$\|T\| = \sup_{x \in D(T) \quad \|x\|=1} \|Tx\|. \tag{1.5.11}$$

2. La norma definida en (1.5.9) satisface 1 a 4.

**Teorema 1.5.9. Dimensión finita**

Si un espacio normado  $X$  es dimensionalmente finito, entonces cada operador lineal en  $X$  es acotado.

**Observación 1.5.4.** Los operadores son funciones, por lo que se les aplica la definición de continuidad. Es un hecho fundamental que para que los conceptos de operador lineal, continuidad y acotación sean equivalentes.

**Definición 1.5.11.** Sea  $T : D(T) \rightarrow Y$  cualquier operador, no necesariamente lineal, donde  $D(T) \subset X$  y  $X$  y  $Y$  son espacios normados. El operador  $T$  es **continuo** en un  $x_0 \in D(T)$  si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|Tx - Tx_0\| < \epsilon \text{ para todo } x \in D(T) \text{ satisface que } \|x - x_0\| < \delta.$$

$T$  es continuo si  $T$  es continuo en cada  $x \in D(T)$ . Ahora, si  $T$  es lineal, es acotado.

**Teorema 1.5.10. Continuidad y acotación**

Sea  $T : D(T) \rightarrow Y$  un operador lineal, donde  $D(T) \subset X$  y  $X$  y  $Y$  son espacios normados. Entonces:

1.  $T$  es continuo si y sólo si  $T$  es acotado.
2. Si  $T$  es continuo en un solo punto, es continuo.

**Corolario 1.5.2. Continuidad, espacio nulo**

Sea  $T$  un operador lineal acotado. Entonces:

1.  $x_n \rightarrow x$  (donde  $x_n, x \in D(T)$ ) implica que  $Tx_n \rightarrow Tx$ .
2. El espacio nulo  $N(T)$  es cerrado.

**Observación 1.5.5.** Vale la pena señalar que el rango de un operador lineal acotado puede no ser cerrado.

Otra fórmula útil es

$$\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|, \quad \|T^n\| \leq \|T\|^n, \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (1.5.12)$$

es válido para los operadores lineales acotados  $T_2 : X \rightarrow Y$ ,  $T_1 : Y \rightarrow Z$  y  $T : X \rightarrow X$ , donde  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son espacios normados.

**Definición 1.5.12.** Dos operadores  $T_1$  y  $T_2$  son definidos como **iguales**

$$T_1 = T_2,$$

si ellos tienen el mismo dominio  $D(T_1) = D(T_2)$  y si  $T_1 x = T_2 x$  para todo  $x \in D(T_1) = D(T_2)$ .

La **restricción** de un operador  $T : D(T) \rightarrow Y$  a un subconjunto  $B \subset D(T)$  denotado por

$$T|_B$$

y su operador es definido por

$$T|_B : B \rightarrow Y, \quad T|_x = Tx \text{ para todo } x \in B.$$

Una **extensión** de  $T$  al conjunto  $D(T) \subset M$  es un operador

$$\tilde{T} : M \rightarrow Y, \text{ tal que } T|_{D(T)} = Tx,$$

esto es,  $\tilde{T}x = Tx$  para todo  $x \in D(T)$ .

Si  $D(T)$  es subconjunto propio de  $M$ , entonces dado un  $T$ , se tienen muchas extensiones. Es de interés conocer aquellas **extensiones que conservan alguna propiedad básica**, por ejemplo, la linealidad (si resulta que  $T$  es lineal) o la acotación (si  $D(T)$  se encuentra en un espacio normado y  $T$  está acotado).

El siguiente teorema se refiere a una extensión de un operador lineal acotado  $T$  a la clausura  $D(T)$  del dominio de modo que el operador extendido es a su vez acotado y lineal, e incluso tiene la misma norma; de tal manera que ciertas propiedades básicas del objeto sigan siendo válidas para el objeto extendido. Esto incluye el caso de una extensión desde un conjunto denso en un espacio normado  $X$  a todo  $X$ . También incluye el caso de una extensión desde un espacio normado  $X$  hasta su completitud.

**Teorema 1.5.11. Extensión lineal acotada**

Sea

$$T : D(T) \rightarrow Y,$$

un operador lineal acotado, donde  $D(T)$  se encuentra en un espacio normado  $X$  y  $Y$  es un espacio de Banach. Entonces  $T$  tiene una extensión

$$\tilde{T} : X \rightarrow Y,$$

donde  $\tilde{T}$  es un operador lineal acotado tal que

$$\tilde{T}|_{D(T)} = T,$$

de norma

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|.$$

Como hemos visto hasta ahora, un operador actúa entre espacios vectoriales. A continuación veremos el concepto de funcional lineal como un operador lineal que mapea un espacio vectorial a su campo subyacente ( $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ).

### 1.5.5. Funcionales lineales

Un **funcional** es un operador cuyo rango se encuentra en la línea real o en el plano complejo. Denotamos los funcionales con letras minúsculas  $f, g, h, \dots$ , el dominio de  $f$  por  $D(f)$ , el rango por  $R(f)$  y el valor de  $f$  en un  $x \in D(f)$  por  $f(x)$ . Los funcionales son operadores, por lo que se aplican las definiciones anteriores. La mayoría de los funcionales serán lineales y acotados.

**Definición 1.5.13. Funcional lineal**

Un funcional lineal  $f$  es un operador lineal con dominio en un espacio vectorial  $X$  y rango un campo escalar  $K$  de  $X$ ; esto es:

$$f : D(f) \rightarrow K,$$

donde  $K = \mathbb{R}$  si  $X$  es real o  $K = \mathbb{C}$  si  $X$  es complejo.

**Definición 1.5.14. Funcional lineal acotado**

Un funcional lineal acotado  $f$  es un operador lineal acotado con rango en el campo escalar en el espacio normado  $X$  en el que se encuentra el dominio  $D(f)$ . Por lo tanto, existe un número real  $c$  tal que para todo  $x \in D(f)$ ,

$$|f(x)| \leq c\|x\|. \tag{1.5.13}$$

Además, la norma de  $f$  es

$$\|f\| = \sup_{x \in D(f), x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad (1.5.14)$$

o

$$\|f\| = \sup_{x \in D(f), \|x\|=1} |f(x)|. \quad (1.5.15)$$

La fórmula (1.5.9) en la sección anterior implica

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|, \quad (1.5.16)$$

y un caso especial del Teorema 1.5.10 es:

**Teorema 1.5.12. Continuidad y acotación**

Un funcional lineal  $f$  con dominio  $D(f)$  en un espacio normado es continuo si y sólo si  $f$  es acotado.

**Ejemplo 1.5.2.** 1. La **norma**  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  en un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  es un funcional en  $X$  que no es lineal.

2. **Producto punto** El conocido producto escalar con un factor que se mantiene fijo define un funcional  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$f(x) = x \cdot a = \xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \alpha_2 + \dots + \xi_n \alpha_n,$$

donde  $a = (\alpha_j) \in \mathbb{R}^n$  es fijo.

$f$  es lineal y acotado. En efecto,

$$|f(x)| = |x \cdot a| \leq \|x\| \|a\|,$$

así,  $\|f\| \leq \|a\|$  se sigue de (1.5.15) si tomamos el supremo sobre todas las  $x$  de norma uno. Por otro lado, tomando  $x = a$  y usando (1.5.16) obtenemos

$$\|f\| \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|.$$

Por lo tanto, la norma de  $f$  es  $\|f\| = \|a\|$ .

3. **Integral definida** para todas las funciones en un determinado espacio de funciones. La integral se convierte en un funcional en el espacio  $C[a, b]$ . Entonces  $f$  es definido por

$$f(x) = \int_a^b x(t) dt, \quad x \in C[a, b].$$

$f$  es lineal. Probemos que  $f$  es acotado y tiene norma  $\|f\| = b - a$ .

En efecto, escribimos  $J = [a, b]$  y recordamos la norma en  $C[a, b]$ , obtenemos

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t) dt \right| \leq (b - a) \max_{t \in J} |x(t)| = (b - a) \|x\|.$$

Tomando el supremo sobre todos los  $x$  con norma 1, obtenemos  $\|f\| \leq b - a$ . Para obtener  $\|f\| \geq b - a$ , elegimos en particular  $x = x_0 = 1$ , notamos que  $\|x_0\| = 1$  y usando (1.5.16):

$$\|f\| \geq \frac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|} = |f(x_0)| = \int_a^b dt = b - a.$$

Es de importancia que el conjunto de todos los funcionales lineales definidos en un espacio vectorial de dimensión finita  $X$  pueda a su vez convertirse en un espacio vectorial. Este espacio se denota por  $X^*$  y se denomina **espacio dual algebraico de  $X$** . Sus operaciones algebraicas del espacio vectorial se definen de manera natural. La suma  $f_1 + f_2$  de dos funcionales  $f_1$  y  $f_2$  es el funcional  $s$  cuyo valor en cada  $x \in X$  es

$$s(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x);$$

el producto de  $\alpha f$  de un escalar  $\alpha$  y un funcional  $f$  es el funcional  $p$  cuyo valor en  $x \in X$  es

$$p(x) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Podemos ir un paso más allá y considerar el dual algebraico  $(X^*)^* = X^{**}$  de  $X^*$  o también llamado el **segundo espacio dual de  $X$** , cuyos elementos son los funcionales lineales definidos en  $X^*$ . Consideramos  $X^{**}$  ya que podemos obtener una relación interesante e importante entre  $X$  y  $X^{**}$ .

Espacio	Elemento general	Valor en un punto
$X$	$x$	-
$X^*$	$f$	$f(x)$
$X^{**}$	$g$	$g(f)$

Podemos obtener  $g \in X^{**}$ , el cual es un funcional lineal definido en  $X^*$ , eligiendo un  $x \in X$  fijo y seleccionando

$$g(f) = g_x(f) = f(x), \quad (x \in X \text{ fijo}, f \in X^* \text{ variable}). \quad (1.5.17)$$

El subíndice  $x$  indica que obtuvimos  $g$  mediante el uso de un cierto  $x \in X$ .  $f$  es la variable mientras  $x$  es fijo.  $g_x$  definido en (1.5.17) es lineal. Esto se puede ver de

$$g_x(\alpha f_1 + \beta f_2) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \alpha g_x(f_1) + \beta g_x(f_2).$$

Debido a que  $g_x$  es un elemento de  $X^{**}$ , por definición de  $X^{**}$ . Para cada  $x \in X$  le corresponde un  $g_x \in X^{**}$ . Esto define un mapeo

$$C : X \rightarrow X^{**} \\ x \mapsto g_x.$$

$C$  es llamado el **mapeo canónico** de  $X$  en  $X^{**}$ .  $C$  es lineal debido a que su dominio es un espacio vectorial y tenemos

$$\begin{aligned} (C(\alpha x + \beta y))(f) &= g_{\alpha x + \beta y}(f) \\ &= f(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha g_x(f) + \beta g_y(f) \\ &= \alpha(Cx)(f) + \beta(Cy)(f). \end{aligned}$$

Decimos que las operaciones de suma y producto en  $X$  se *reflejan adecuadamente* en  $X^{**}$ .

Como trabajamos en espacios vectoriales de dimensión finita, el mapeo canónico  $C$  es inyectivo por lo que  $X$  está *bien representado* en  $X^{**}$ . También  $C$  es sobreyectiva (por lo tanto biyectiva) de modo que  $R(C) = X^{**}$ , entonces  $X$  se dice que es **algebraicamente reflexivo**.

El isomorfismo por definición, es un mapeo biyectivo de  $X$  sobre que preserva la estructura. En consecuencia, un isomorfismo  $T$  de un espacio métrico  $X = (X, d)$  en el espacio métrico  $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{d})$  es un mapeo biyectivo que preserva distancias, es decir, para todo  $x, y \in X$ ,

$$\tilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y).$$

$\tilde{X}$  es llamado **isomorfo** con  $X$ . Los isomorfismos para espacios normados son isomorfismos de espacios vectoriales que preservan las normas.

Desde que  $C$  es lineal, es un isomorfismo de  $X$  en el rango de  $R(C) \subset X^{**}$ . Si  $X$  es isomorfo con un subespacio de un espacio vectorial  $Y$ , decimos que  $X$  es **incrustable** en  $Y$ . Por lo tanto  $X$  es incrustable en  $X^{**}$  y  $C$  también es llamada **incrustación canónica**  $X$  en  $X^{**}$ .

Si  $X$  es un espacio normado, puede no ser reflexivo (es decir,  $X$  no es isomorfo a  $X^{**}$ , pero siempre existe una relación natural a través de esta incrustación, así podemos saber cómo se comporta  $X$  dentro de su segundo dual  $X^{**}$ .

Si  $X$  es un espacio de Banach (un espacio normado completo), la incrustación canónica  $C$  es continua, lo que significa que la topología de  $X$  se refleja en  $X^{**}$  *de manera adecuada* y tiene aplicaciones en análisis funcional, como la teoría de operadores y la resolución de ecuaciones diferenciales, de manera que la correspondencia entre  $X$  y  $X^{**}$  proporciona una forma de analizar la estabilidad y la convergencia de soluciones de ecuaciones diferenciales mediante operadores lineales. Además, los operadores lineales continuos en espacios reflexivos tienen propiedades que permiten usar herramientas como el teorema del punto fijo, que es útil en la resolución de ecuaciones diferenciales y en el estudio de su existencia y unicidad.

### 1.5.6. Operadores lineales y funcionales en espacios de dimensión finita

Los operadores lineales en espacios vectoriales de dimensión finita pueden ser representados en términos de matrices; es así como pueden convertirse en las herramientas más importantes para el estudio de operadores lineales en el caso de dimensión finita.

Sean  $X$  y  $Y$  espacios vectoriales dimensionalmente finitos sobre el mismo campo y  $T : X \rightarrow Y$  un operador lineal. Elegimos una base  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  para  $X$  y una base  $B = \{b_1, \dots, b_r\}$  para  $Y$  con los vectores dispuestos en un orden definido que mantenemos fijo. Entonces cada  $x \in X$  tiene una representación única

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n. \quad (1.5.18)$$

Debido a que  $T$  es lineal,  $x$  tiene la imagen

$$y = Tx = T \left( \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right) = \sum_{k=1}^n \xi_k T e_k. \quad (1.5.19)$$

Debido a que la representación (1.5.18) es única, tenemos el siguiente resultado:

*$T$  se determina únicamente si las imágenes  $y_k = T e_k$  de los  $n$  vectores base  $e_1, \dots, e_k$  están prescritos.*

Debido a que  $y$  y  $y_k = T e_k$  están en  $Y$ , existen representaciones únicas de la forma

$$y = \sum_{j=1}^r \eta_j b_j,$$

$$T e_k = \sum_{j=1}^r \tau_{jk} b_j.$$

Sustituyendo en (1.5.19) tenemos

$$y = \sum_{j=1}^r \eta_j b_j = \sum_{k=1}^n \xi_k T e_k = \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{j=1}^r \tau_{jk} b_j = \sum_{j=1}^r \left( \sum_{k=1}^n \tau_{jk} \xi_k \right) b_j.$$

Debido a que los  $b_j$ 's son l.i., los coeficientes de cada  $b_j$  a la izquierda y a la derecha debe ser los mismos, es decir,

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n \tau_{jk} \xi_k, \quad j = 1, \dots, r. \quad (1.5.20)$$

Por lo que tenemos el siguiente resultado:

La imagen  $y = Tx = \sum \eta_j b_j$  de  $x = \sum \xi_k e_k$  puede ser obtenido de la forma (1.5.20).

Los coeficientes en (1.5.20) forman una matriz

$$T_{EB} = (\tau_{jk})$$

con  $r$  filas y  $n$  columnas. Si se da una base  $E$  para  $X$  y una base  $B$  para  $Y$ , con los elementos de  $E$  y  $B$  dispuestos en un orden definido (que es arbitrario pero fijo), entonces la matriz  $T_{EB}$  está determinada de manera única por el operador lineal  $T$ . Decimos que la matriz  $T_{EB}$  **representa** al operador  $T$  con respecto a esas bases.

Introduciendo las columna de vectores  $\tilde{x} = (\xi_k)$  y  $\tilde{y} = (\eta_j)$  podemos escribir (1.5.20) en notación matricial:

$$\tilde{y} = T_{EB} \tilde{x}. \tag{1.5.21}$$

Y también tenemos

$$Te = T_{EB}^T b$$

donde  $Te$  es el vector columna con componentes  $Te_1, \dots, Te_n$  (que son en sí mismos vectores) y  $b$  es el vector columna con componentes  $b_1, \dots, b_n$  y tenemos que usar la transpuesta  $T_{EB}^T$  de  $T_{EB}$ .

Ahora, para funcionales lineales en  $X$ , donde  $\dim X = n$  y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es una base para  $X$ . Estos funcionales constituyen el espacio dual algebraico  $X^*$  de  $X$ . Para cada funcional  $f$  y cada  $x = \sum \xi_j e_j \in X$  tenemos

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \xi_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n \xi_j \alpha_j, \tag{1.5.22}$$

donde

$$\alpha_j = f(e_j), \quad j = 1, \dots, n, \tag{1.5.23}$$

y  $f$  es determinado únicamente por sus valores de  $\alpha_j$  en los  $n$  vectores base de  $X$ . Inversamente, cada  $n$ -tupla de escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  determina un funcional lineal en  $X$  por las ecuaciones anteriores. En particular, tomemos las  $n$ -tuplas

$$(1, 0, 0, \dots, 0, 0)$$

$$(0, 1, 0, \dots, 0, 0)$$

$$(\dots\dots\dots)$$

$$(0, 0, 0, \dots, 0, 1).$$

Nos da  $n$  funcionales denotados por  $f_1, \dots, f_n$  con valores

$$f_k(e_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ 1 & \text{si } j = k; \end{cases} \tag{1.5.24}$$

es decir;  $f_k$  tiene valor 1 en la  $k$ -ésimo vector base y 0 en los otros  $n - 1$  vectores base.  $\delta_{jk}$  es llamado la **delta de Kronecker**.  $\{f_1, \dots, f_n\}$  es llamada la **base dual** de la base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  para  $X$ .

**Teorema 1.5.13. Dimensión de  $X^*$**

Sea  $X$  un espacio vectorial  $n$ -dimensional y  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  una base para  $X$ . Entonces  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$  dado por (1.5.24) es una base para el dual algebraico  $X^*$  de  $X$  y  $\dim X^* = \dim X = n$ .

Para prepararnos para una aplicación interesante de este teorema, primero mostramos el siguiente lema.

**Lema 1.5.6. Vector cero**

Sea  $X$  un espacio vectorial dimensionalmente finito. Si  $x_0 \in X$  tiene la propiedad de que  $f(x_0) = 0$  para todo  $f \in X^*$ , entonces  $x_0 = 0$ .

**Teorema 1.5.14. Reflexividad algebraica**

Un espacio vectorial dimensionalmente finito es algebraicamente reflexivo.

### 1.5.7. Espacios Normados de Operadores. Espacio Dual

Tomemos cualesquiera dos espacios normados  $X$  y  $Y$  (ambos reales o ambos complejos) y consideremos el conjunto  $B(X, Y)$  que consta de todos los operadores lineales acotados de  $X$  a  $Y$ . Queremos mostrar que  $B(X, Y)$  puede convertirse en un espacio normado.

En primer lugar  $B(X, Y)$  se convierte en un espacio vectorial si definimos la suma  $T_1 + T_2$  de dos operadores  $T_1, T_2 \in B(X, Y)$  de forma natural mediante

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$$

y el producto  $\alpha T$  de  $T \in B(X, Y)$  y escalar  $\alpha$  por

$$(\alpha T)x = \alpha Tx.$$

**Teorema 1.5.15. Espacio  $B(X, Y)$**

El espacio vectorial  $B(X, Y)$  de todos los operadores lineales acotados de un espacio normado  $X$  a un espacio normado  $Y$  es en sí mismo un espacio normado con norma definida por

$$\|T\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Tx\|. \tag{1.5.25}$$

¿En qué caso  $B(X, Y)$  será un espacio de Banach?

**Teorema 1.5.16. Completación**

Si  $Y$  es un espacio de Banach, entonces  $B(X, Y)$  es un espacio de Banach.

Este teorema tiene una consecuencia importante con respecto al espacio dual  $X^*$  de  $X$ , que se define de la siguiente manera.

**Definición 1.5.15. Espacio dual  $X^*$**

Sea  $X$  un espacio normado. Entonces el conjunto de todos los funcionales lineales acotados en  $X$  constituye un espacio normado con norma definida por

$$\|f\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|f(x)\|. \quad (1.5.26)$$

el cual es llamado **espacio dual** de  $X$  denotado por  $X^*$

Puesto que una función lineal sobre  $X$  mapea  $X$  en  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  que con la métrica habitual, son completos, vemos que  $X^*$  es  $B(X, Y)$  con el espacio completo  $Y = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 1.5.17. Espacio dual**

El espacio dual  $X^*$  de un espacio normado  $X$  es un espacio de Banach (sea  $X$  o no).

A continuación, se muestran algunos de los espacios que aparecen con más frecuencia y averiguar cómo son sus duales.

**Ejemplo 1.5.3.** 1. El espacio dual de  $R^n$  es  $R^n$ .

2. El espacio dual de  $l^1$  es  $l^\infty$ .

*Demostración.* Una base para  $l^1$  es  $(e_k)$  donde  $e_k = (\delta_{ij})$ . Entonces cada  $x \in l^1$  tiene representación única

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k. \quad (1.5.27)$$

Si consideramos cualquier  $f \in l^{1*}$ , donde  $l^{1*}$  es el espacio dual de  $l^1$ . Debido a que  $f$  es lineal y acotado,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k, \quad \gamma_k = f(e_k) \quad (1.5.28)$$

donde los números  $\gamma_k = f(e_k)$  están determinados únicamente por  $f$ . También  $\|e_k\| = 1$  y

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leq \|f\| \|e_k\| = \|f\|, \quad \sup_k |\gamma_k| \leq \|f\|. \quad (1.5.29)$$

Por lo tanto,  $(\gamma_k) \in l^\infty$ .

Por otro lado, para cada  $b = (\beta_k) \in l^\infty$  podemos un funcional lineal acotado correspondiente  $g$  en  $l^1$ . En efecto, podemos definir  $g$  en  $l^1$  por

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k,$$

donde  $x = (\xi_k) \in l^1$ . Entonces  $g$  es lineal y acotado se sigue de

$$|g(x)| \leq \sum |\xi_k \beta_k| \leq \sup_j |\beta_j| \sum |\xi_k| = \|x\| \sup_j |\beta_j|,$$

(suma de 1 a  $\infty$ ). Por lo tanto  $g \in l^{1*}$ .

Finalmente, mostraremos que la norma de  $f$  es la norma en el espacio  $l^\infty$ . De (1.5.28) tenemos

$$|f(x)| = \left| \sum \xi_k \gamma_k \right| \leq \sup_j |\gamma_j| \sum |\xi_k| = \|x\| \sup_j |\gamma_j|.$$

Tomando el supremo sobre todos los  $x$  con norma 1, vemos que

$$\|f\| \leq \sup_j |\gamma_j|.$$

De esto y (1.5.29),

$$\|f\| = \sup_j |\gamma_j|, \tag{1.5.30}$$

que es la norma en  $l^\infty$ . Por lo tanto esta fórmula puede ser escrita  $\|f\| = \|c\|_\infty$ , donde  $c = (\gamma_j) \in l^\infty$ . Esto muestra que el mapeo lineal biyectivo de  $l^{1*}$  en  $l^\infty$  definido por  $f \mapsto c = (\gamma_j)$  es un isomorfismo.  $\square$

3. *El espacio dual de  $l^p$  es  $l^q$ ; aquí  $1 < p < +\infty$  y  $q$  es el conjugado de  $p$ , es decir,  $1/p + 1/q = 1$ .*

## 1.6. Teoremas fundamentales para espacios normados y espacios de Banach

### 1. Teorema de Hahn-Banach

Este es un teorema de extensión para funcionales lineales en espacios vectoriales. Garantiza que un espacio normado tenga suficientes funcionales lineales, de modo que se puede obtener una teoría adecuada de espacios duales.

### 2. Teorema de aplicación abierta

Este teorema establece que un operador lineal acotado  $T$  de un espacio de Banach sobre un espacio de Banach es una aplicación abierta, es decir, aplica conjuntos abiertos sobre conjuntos abiertos. Por lo tanto, si  $T$  es biyectiva,  $T^{-1}$  es continua *Teorema inverso acotado*.

3. **Teorema del punto fijo de Banach** es un teorema de existencia y unicidad para puntos fijos de ciertas aplicaciones, y también proporciona un procedimiento constructivo para obtener aproximaciones cada vez mejores al punto fijo (la solución del problema práctico).

### 1.6.1. Teorema de Hahn-Banach

El teorema de Hahn-Banach caracteriza el grado en el que los valores de un funcional lineal pueden ser preasignados. El teorema fue descubierto por H. Hahn (1927), redescubierto en su forma actual más general (Teorema 1.6.1) por S. Banach (1929) y generalizado a espacios vectoriales complejos (Teorema 1.6.2) por H. F. Bohnenblust y A. Sobczyk (1938).

En el teorema de Hahn-Banach, se va a extender un funcional lineal  $f$  que está definido en un subespacio  $Z$  de un espacio vectorial  $X$  y tiene una cierta propiedad de acotación que se formulará en términos de un **funcional sublineal**. Por definición, se trata de un funcional de valor real  $p$  en un espacio vectorial  $X$  que es **subaditivo**, es decir,

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \text{para todo } x, y \in X, \quad (1.6.1)$$

y positiva-homogénea, es decir,

$$p(ax) = ap(x), \quad \text{para todo } a \geq 0 \in \mathbb{R} \text{ y } x \in X \quad (1.6.2)$$

Supondremos que el funcional  $f$  que se va a extender está mayorizado en  $Z$  por un funcional  $p$  definido en  $X$ , y extenderemos  $f$  de  $Z$  a  $X$  sin perder la linealidad ni la mayorización, de modo que el funcional  $\tilde{f}$  extendido en  $X$  siga siendo lineal y mayorizado por  $p$ .

#### **Teorema 1.6.1. Teorema de Hahn-Banach**

*Sea  $X$  un espacio vectorial real y  $p$  un subfuncional lineal en  $X$ . Además, sea  $f$  un funcional lineal que está definido en un subespacio  $Z$  de  $X$  y satisface*

$$f(x) \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in Z. \quad (1.6.3)$$

*Entonces  $f$  tiene una extensión lineal  $\tilde{f}$  de  $Z$  a  $X$  que satisface*

$$f(\tilde{x}) \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in X, \quad (1.6.4)$$

*esto es,  $\tilde{f}$  es un funcional lineal en  $X$  que satisface (1.6.4) en  $X$  y  $\tilde{f}(x) = f(x)$  para cada  $x \in Z$ .*

A continuación, se muestra el Teorema de Hahn-Banach para espacios vectoriales complejos y espacios normados.

#### **Teorema 1.6.2. Teorema de Hahn-Banach (Generalizado)**

*Sea  $X$  un espacio vectorial real o complejo y  $p$  un funcional de valor real en  $X$  el cual es subaditivo, es decir,*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \text{para todo } x, y \in X, \quad (1.6.5)$$

*y para cada escalar  $\alpha$ ,*

$$p(\alpha x) = |\alpha|p(x) \quad (1.6.6)$$

Además, sea  $f$  una función lineal que está definida en un subespacio  $Z$  de  $X$  y satisfice

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in Z. \quad (1.6.7)$$

Entonces  $f$  tiene una extensión lineal  $\tilde{f}$  de  $Z$  a  $X$  que satisfice

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in X. \quad (1.6.8)$$

**Teorema 1.6.3. Teorema de Hahn-Banach para espacios normados**

Sea  $f$  una función lineal acotada en un subespacio  $Z$  de un espacio normado  $X$ . Entonces existe una función lineal acotada en  $X$  que es una extensión de  $f$  a  $X$  y tiene la misma norma,

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z \quad (1.6.9)$$

donde

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |\tilde{f}(x)|, \quad \|f\|_Z = \sup_{x \in Z, \|x\|=1} |f(x)| \quad (1.6.10)$$

(y  $\|f\|_Z = 0$  en el caso trivial  $Z = \{0\}$ ).

**Teorema 1.6.4. Teorema (Funcionales lineales acotados)**

Sea  $X$  un espacio normado y sea  $x_0 \neq 0$  cualquier elemento de  $X$ . Entonces existe un funcional lineal acotado  $\tilde{f}$  en  $X$  tal que

$$\|\tilde{f}\| = 1, \quad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

**Corolario 1.6.1. Norma, vector cero**

Para cada  $x$  en un espacio normado  $X$  tenemos

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*, f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}. \quad (1.6.11)$$

Por lo tanto, si  $x_0$  es tal que  $f(x_0) = 0$  para todo  $f \in X^*$ , entonces  $x_0 = 0$ .

**1.6.1.1. Aplicación de funcionales lineales acotados en  $C[a, b]$**

Utilizaremos el Teorema 1.6.3 para obtener una fórmula de representación general para funcionales lineales acotados en  $C[a, b]$ , donde  $[a, b]$  es un intervalo compacto fijo. En el presente caso, la representación será en términos de una **integral de Riemann-Stieltjes**. Así que recordemos algunas propiedades de esta integral, que es una generalización de la familiar integral de Riemann.

**Definición 1.6.1.** Se dice que una función  $w$  definida en  $[a, b]$  es de **variación acotada** en  $[a, b]$  si su variación total  $Var(w)$  en  $[a, b]$  es finita, donde

$$Var(w) = \sup \sum_{j=1}^n |w(t_j) - w(t_{j-1})|, \quad (1.6.12)$$

El supremo se hace cargo de todas las particiones

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.6.13)$$

**Observación 1.6.1.** *Todas las funciones de variación acotada en  $[a, b]$  forman un espacio vectorial.*

Una norma en este espacio está dada por:

$$\|w\| = |w(a)| + \text{Var}(w). \quad (1.6.14)$$

El espacio normado así definido se denota por  $BV[a, b]$ .

**Definición 1.6.2.** *Sea  $x \in C[a, b]$  y  $w \in BV[a, b]$ . Sea  $P_n$  cualquier partición de  $[a, b]$  dada por (1.6.13) y denotemos por  $\eta(P_n)$  la longitud de un intervalo más grande  $[t_j - t_{j-1}]$ . Para cada partición  $P_n$  de  $[a, b]$  consideramos la suma*

$$s(P_n) = \sum_{j=1}^n x(t_j)[w(t_j) - w(t_{j-1})]. \quad (1.6.15)$$

*Entonces existe un número  $\mathcal{J}$  con la propiedad de que para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que*

$$\eta(P_n) < \delta, \quad (1.6.16)$$

*implica*

$$|\mathcal{J} - s(P_n)| < \epsilon. \quad (1.6.17)$$

$\mathcal{J}$  es llamada la **integral de Riemann-Stieltjes** de  $x$  sobre  $[a, b]$  con respecto a  $w$  y es denotada por

$$\int_a^b x(t)dw(t). \quad (1.6.18)$$

Si  $x$  es continua en  $[a, b]$  y  $w$  tiene derivada que es integrable en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b x(t)dw(t) = \int_a^b x(t)w'(t)dt. \quad (1.6.19)$$

La integral depende linealmente de  $x \in [a, b]$  y de  $w \in BV[a, b]$ . También necesitaremos la desigualdad

$$\left| \int_a^b x(t)dw(t) \right| \leq \max_{j \in J} |x(t)| \text{Var}(w), \quad (1.6.20)$$

donde  $J = [a, b]$ . Si  $w(t) = t$ , entonces  $\text{Var}(w) = b - a$ , entonces la desigualdad anterior toma la forma

$$\left| \int_a^b x(t)dw(t) \right| \leq \max_{j \in J} |x(t)|(b - a). \quad (1.6.21)$$

**Teorema 1.6.5. Teorema de Riesz (Funcionales en  $C[a, b]$ )**

*Toda función lineal acotada  $f$  en  $C[a, b]$  puede representarse mediante una integral de Riemann-Stieltjes*

$$f(x) = \int_a^b x(t)dw(t), \quad (1.6.22)$$

*donde  $w$  tiene una variación acotada en  $[a, b]$  y tiene la variación total*

$$\text{Var}(w) = \|f\|. \quad (1.6.23)$$

## 1.6.2. Teorema de aplicación abierta

### Definición 1.6.3. *Aplicación abierta*

Sean  $X$  e  $Y$  espacios métricos. Entonces  $T : D(T) \rightarrow Y$  con dominio  $D(T) \subset X$  se denomina **aplicación abierta** si para cada conjunto abierto en  $D(T)$  la imagen es un conjunto abierto en  $Y$ .

### Teorema 1.6.6. *Teorema de aplicación abierta, teorema inverso acotado.*

Un operador lineal acotado  $T$  de un espacio de Banach  $X$  a un espacio de Banach  $Y$  es una aplicación abierta. Por lo tanto, si  $T$  es biyectiva,  $T^{-1}$  es continua y, por lo tanto, acotada.

## 1.6.3. Teorema del punto fijo

Un **punto fijo** de una aplicación  $T : X \rightarrow X$  de un conjunto  $X$  en sí mismo es un  $x \in X$  que se aplica sobre sí mismo (se *mantiene fijo* por  $T$ ), es decir,

$$Tx = x.$$

El teorema de Banach proporciona condiciones suficientes para la existencia (y unicidad) de un punto fijo para una clase de aplicaciones, llamadas contracciones.

### Definición 1.6.4. *Contracción*

Sea  $X = (X, d)$  un espacio métrico. Una aplicación  $T : X \rightarrow X$  se denomina **contracción** sobre  $X$  si existe un número real positivo  $\alpha < 1$  tal que para todo  $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y). \tag{1.6.24}$$

### Teorema 1.6.7. *Teorema de punto fijo de Banach (Teorema de contracción)*

Consideremos un espacio métrico  $X = (X, d)$ , donde  $X \neq \emptyset$ . Supongamos que  $X$  es completo y sea  $T : X \rightarrow X$  una contracción de  $X$ . Entonces  $T$  tiene precisamente un punto fijo.

### Teorema 1.6.8. *Contracción en una bola*

Sea  $T$  una aplicación de un espacio métrico completo  $X = (X, d)$  en sí mismo. Supóngase que  $T$  es una contracción en una bola cerrada  $Y = \{x | d(x, x_0) \leq r\}$ , es decir,  $T$  satisface (1.6.24) para todo  $x, y \in Y$ . Además, supóngase que

$$d(x_0, Tx_0) < (1 - \alpha)r.$$

Entonces la secuencia iterativa converge a una  $x \in Y$ . Esta  $x$  es un punto fijo de  $T$  y es el único punto fijo de  $T$  en  $Y$ .

### 1.6.3.1. Aplicación del teorema de Banach a las ecuaciones diferenciales ordinarias

Una aplicación del teorema del punto fijo de Banach surgen en relación con los espacios funcionales. El teorema produce teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias e integrales.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria explícita de primer orden

$$x' = f(t, x). \quad (1.6.25)$$

Un **problema de valor inicial** para tal ecuación consiste en la ecuación y condición inicial

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0, x_0 \in \mathbb{R}. \quad (1.6.26)$$

La idea de este enfoque es bastante simple: (1.6.25, 1.6.26) se convertirá en una ecuación integral, que define una aplicación  $T$ , y las condiciones del teorema implicarán que  $T$  es una contracción tal que su punto fijo se convierte en la solución de nuestro problema.

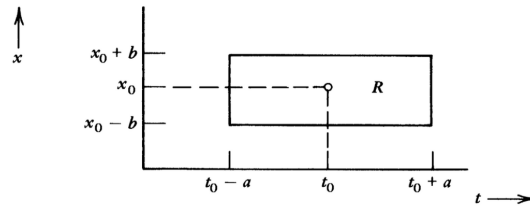


Figura 1.6.1: Rectángulo  $R$  (Kreyszig 1978).

#### **Teorema 1.6.9. Teorema de existencia y unicidad de Picard (ecuaciones diferenciales ordinarias)**

Sea  $f$  continua en un rectángulo

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\},$$

y por tanto acotado en  $R$ , digamos

$$|f(t, x)| \leq c, \quad \text{para todo } (t, x) \in R.$$

Suponga que  $f$  satisface una **condición de Lipschitz** en  $R$  con respecto a este segundo argumento, es decir, existe una constante  $k$  (constante de Lipschitz) tal que para  $(t, x), (t, v) \in R$

$$|f(t, x) - f(t, v)| \leq k|x - v|. \quad (1.6.27)$$

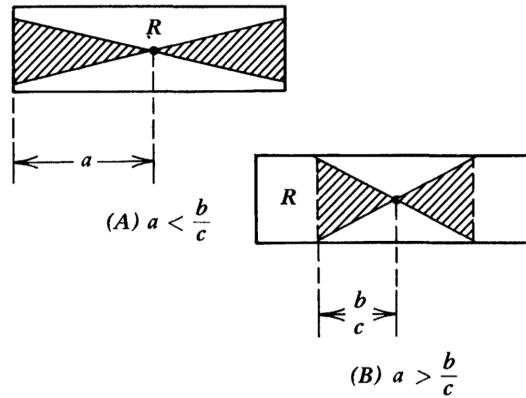


Figura 1.6.2: Ilustración geométrica de la desigualdad para (A)  $c$  relativamente pequeña, (B)  $c$  relativamente grande. La curva solución debe permanecer en la región sombreada delimitada por líneas rectas con pendientes  $\pm c$  (Kreyszig 1978).

Entonces el problema de valor inicial tiene única solución. Esta solución existe en el intervalo  $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ , donde

$$\beta < \min \left\{ a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k} \right\}. \quad (1.6.28)$$

El teorema de Banach también implica que la solución  $x$  del problema de valor inicial es el límite de la secuencia  $(x_0, X_1, \dots)$  obtenida por la iteración de Picard

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_n(\tau)) d\tau. \quad (1.6.29)$$

#### 1.6.4. Aplicación del teorema de Banach a las ecuaciones integrales

Consideramos el teorema del punto fijo de Banach como fuente de teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones integrales.

Una ecuación integral de la forma

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau) d\tau = v(t), \quad (1.6.30)$$

se llama **ecuación de Fredholm** de segundo tipo. Donde  $J = [a, b]$  es un intervalo dado,  $x$  es una función en  $J$  que es desconocida,  $\mu$  es un parámetro, el **núcleo, kernel**  $k$  de la ecuación es una función dada en el cuadrado  $G = J \times J$ , y  $v$  es una función dada en  $J$ . Consideramos (1.6.30) en  $C[a, b]$ , el espacio de todas las funciones continuas definidas en el intervalo  $J$  con métrica  $d$  dada por

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|. \quad (1.6.31)$$

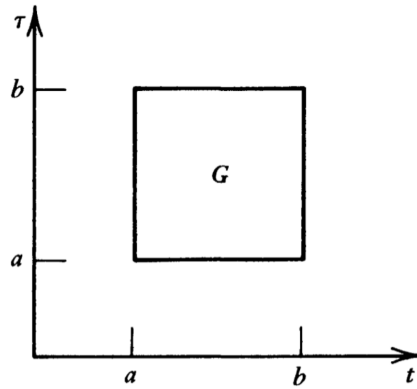


Figura 1.6.3: Dominio de definición  $G$  del núcleo  $k$  en la ecuación integral (1.6.30) en el caso de  $a$  y  $b$  positivos (Kreyszig 1978).

Para la aplicación propuesta del teorema de Banach es importante notar que  $C[a, b]$  es completo. Suponemos que  $v \in C[a, b]$  y  $k$  es continua en  $G$ . Entonces  $k$  es una función acotada en  $G$ , digamos,

$$|k(t, \tau)| \leq c, \quad \text{para todo } (t, \tau) \in G. \quad (1.6.32)$$

(1.6.30) se puede escribir  $x = Tx$ , donde

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau)d\tau. \quad (1.6.33)$$

Debido a que  $v$  y  $k$  son continuos, (1.6.33) define un operador  $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ . Ahora imponemos una restricción a  $\mu$  tal que  $T$  se convierte en una contracción.

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{t \in J} |Tx(t) - Ty(t)| \\ &= |\mu| \max_{t \in J} \left| \int_a^b k(t, \tau)[x(\tau) - y(\tau)]d\tau \right| \\ &\leq |\mu| \max_{t \in J} \int_a^b |k(t, \tau)||x(\tau) - y(\tau)|d\tau \\ &\leq |\mu|c \max_{\sigma \in J} |x(\sigma) - y(\sigma)| \int_a^b d\tau \\ &= |\mu|cd(x, y)(b - a). \end{aligned}$$

Esto es  $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ , donde  $\alpha = |\mu|c(b - a)$ .  $T$  se convierte en una contracción ( $\alpha < 1$ ) si

$$|\mu| < \frac{1}{c(b - a)}. \quad (1.6.34)$$

**Teorema 1.6.10. Ecuación integral de Fredholm**

Supóngase que  $k$  y  $v$  en (1.6.30) son continuas en  $J \times J$  y  $J$ , respectivamente, y supóngase que  $\mu$  satisface (1.6.34) con  $c$  definida en (1.6.32). Entonces (1.6.30) tiene una solución única  $x$  en  $J$ . Esta función  $x$  es el límite de la sucesión

iterativa  $(x_0, x_1, \dots)$ , donde  $x_0$  es cualquier función continua en  $J$  y para  $n = 0, 1, \dots$ ,

$$x_{n+1}(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)x_n(\tau)d\tau. \quad (1.6.35)$$

Ahora consideramos la **Ecuación integral de Volterra**

$$x(t) - \mu \int_a^t k(t, \tau)x(\tau) = v(t). \quad (1.6.36)$$

sin ninguna restricción en  $\mu$  obtenemos el siguiente teorema de existencia y unicidad.

**Teorema 1.6.11. Ecuación integral de Volterra**

Supóngase que  $v$  en (1.6.36) es continua en  $[a, b]$  y el núcleo  $k$  es continuo en la región triangular  $R$  en el plano  $\tau t$  dado por  $a \leq T \leq t$ ,  $a \leq t \leq b$ . Entonces (1.6.36) tiene una solución única  $x$  en  $[a, b]$  para cada  $\mu$ .

**Lema 1.6.1. Punto fijo**

Sea  $T : X \rightarrow X$  una función continua en un espacio métrico completo  $X = (X, d)$ , y supongamos que  $T^m$  es una contracción en  $X$  para algún entero positivo  $m$ . Entonces  $T$  tiene un único punto fijo.

## 1.7. Distribuciones

Mostraremos algunos conceptos sobre **distribuciones**, también conocidas como **funciones generalizadas** con apoyo de la bibliografía: *Principles of Applied Mathematics transformation and Approximation* (Keener 2018). Estas permiten extender el concepto de solución a EDPs que no admiten soluciones clásicas, por lo que se añade el concepto de una **solución débil** que es una función que satisface la ecuación cuando se interpreta en el marco de las distribuciones. Esto se presenta debido a que en el análisis clásico, la derivada de una función  $f(x)$  se define solo si  $f$  es diferenciable. Sin embargo, muchas soluciones de EDPs no son diferenciables en el sentido clásico por lo que, con las distribuciones, podemos definir derivadas débilmente, permitiendo trabajar con funciones que tienen discontinuidades o singularidades, como la función escalón de Heaviside o la función delta de Dirac.

Comenzamos por definir una función de prueba que son infinitamente diferenciables y tienen soporte compacto (es decir, son cero fuera de un intervalo finito). Se usan para definir distribuciones, como la delta de Dirac.

**Definición 1.7.1.** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que una función  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una **función de prueba** si cumple las siguientes condiciones:

- **Suavidad:**  $\phi$  es infinitamente diferenciable en  $\Omega$ , es decir,

$$\phi \in C^\infty(\Omega).$$

- **Soporte compacto:** Existe un conjunto compacto  $K \subset \Omega$  tal que

$$\phi(x) = 0, \quad \forall x \notin K.$$

La clausura del conjunto de  $x$  para el cual  $\phi(x) \neq 0$  se llama **soporte** de  $\phi$ .

El **conjunto de funciones de prueba** forma un espacio vectorial lineal infinito dimensional, al que llamaremos  $D$ .

Un ejemplo de función de prueba es

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1, \end{cases}$$

por lo tanto, el conjunto de funciones de prueba no está vacío.

Las funciones de prueba son fundamentales en la teoría de distribuciones, ya que permiten definir distribuciones como funcionales lineales sobre ellas.

A continuación, definiremos la función Delta de Dirac que no es una función en el sentido clásico, sino una distribución o funcional lineal definido sobre el espacio de funciones de prueba.

**Definición 1.7.2.** La **función delta de Dirac**, denotada como  $\delta(x)$  está definida sobre el espacio de funciones de prueba  $D$ . Se caracteriza por las siguientes propiedades:

- *Propiedad de soporte:*

$$\delta(x) = 0, \quad \text{para todo } x \neq 0.$$

- 

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Es decir, la delta de Dirac tiene integral unidad.

- *Para una función de prueba  $\phi(x)$ , se cumple:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x) dx = \phi(0).$$

Esta propiedad indica que  $\delta(x)$  extrae el valor de la función en  $x = 0$ .

Recordemos la definición de un espacio de medida para poder definir una sucesión delta como una familia de funciones que aproximan a la delta de Dirac en el sentido de distribuciones:

**Definición 1.7.3.** Un **espacio de medida** es una terna  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ , donde:

1.  $X$  es un conjunto.

2.  $\mathcal{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$ , es decir, una colección de subconjuntos de  $X$  que satisface:

- a)  $X \in \mathcal{M}$ .
- b) Si  $A \in \mathcal{M}$ , entonces su complemento  $A^c = X \setminus A \in \mathcal{M}$ .
- c) Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de conjuntos en  $\mathcal{M}$ , entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}.$$

3.  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  es una función llamada **medida**, que satisface:

- a) **Medida del vacío:**

$$\mu(\emptyset) = 0.$$

- b)  **$\sigma$ -aditividad:** Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos en  $\mathcal{M}$ , entonces:

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

**Definición 1.7.4.** Sea  $\{\varphi_n\}$  una sucesión de funciones en un espacio de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Decimos que  $\{\varphi_n\}$  es una **sucesión delta** si satisface las siguientes propiedades:

- 1. **Convergencia débil a la delta de Dirac:** Para toda función de prueba  $\phi$  en el espacio de funciones de prueba  $D$ , se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) \phi(x) dx = \phi(0).$$

Es decir, la sucesión  $\varphi_n$  actúa como una aproximación a la delta de Dirac en el sentido de distribuciones.

- 2. **Normalización:** La integral de cada función  $\varphi_n$  debe ser igual a 1 para todo  $n$ :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) dx = 1.$$

- 3. **Concentración alrededor del origen:** A medida que  $n \rightarrow \infty$ , la función  $\varphi_n(x)$  se concentra cada vez más cerca de  $x = 0$ , es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \neq 0} |\varphi_n(x)| = 0.$$

**Ejemplo 1.7.1. Sucesiones delta**

- 1.

$$S_k(x) = \begin{cases} k & -1/2k \leq x \leq 1/2k, \\ 0 & |x| > 1/2k, \end{cases}$$

es una sucesión delta, ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_k(x)\phi(t)dt = k \int_{-1/2k}^{1/2k} \phi(t)dt \rightarrow \phi(0) \text{ cuando } k \rightarrow \infty,$$

debido al teorema del valor medio, siempre que  $\phi(x)$  sea continuo cerca de  $x = 0$ .

2. Sea

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi} \frac{k}{1 + k^2x^2},$$

y  $f(x)$  no negativa con  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$ , entonces se afirma que la sucesión de funciones  $\{S_k\}$  con  $S_k(x) = kf(kx)$  es una sucesión delta.

Para probarlo, supongamos que  $\phi(x)$  es una función acotada continua en el intervalo infinito  $(-\infty, \infty)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} S_k(x)\phi(x)dx &= k \int_{-\infty}^{\infty} f(kx)\phi(x)dx \\ &= \phi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\eta\left(\frac{x}{k}\right)dx, \end{aligned}$$

donde  $\eta(x) = \phi(x) - \phi(0)$ . Ahora,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\eta\left(\frac{x}{k}\right)dx \right| &\leq \sup |\eta(x)| \left[ \int_{-\infty}^A f(x)dx \right. \\ &\quad \left. + \int_A^{\infty} f(x)dx \right] + \left| \int_{-A}^A f(x)\eta\left(\frac{x}{k}\right)dx \right|. \end{aligned}$$

Podemos elegir  $A$  lo suficientemente grande para que  $\int_A^{\infty} f(x)dx$  y  $\int_{-\infty}^{-A} f(x)dx$  sean arbitrariamente pequeñas. Para un  $A$  fijo y grande, podemos elegir  $k$  lo suficientemente grande para que  $|\eta(x/k)|$  sea arbitrariamente pequeño en el intervalo  $-A \leq x \leq A$ . Entonces, eligiendo  $A$  y  $k$  grandes,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\eta\left(\frac{x}{k}\right)dx \right|,$$

es arbitrariamente pequeña, así

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_k(x)\phi(x)dx = \phi(0).$$

Las sucesiones delta resultan complicadas de utilizar, de lo contrario si se pudiera implementar, sería resolver la sucesión de problemas

$$L_{g_k}(x, t) = S_k(x - t),$$

para encontrar una sucesión de operadores inversos aproximados. Entonces tomando el límite  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x, t) = g(x, t)$  podríamos producir la inversa ideal

para el operador  $L$ . Pero no sólo necesitamos encontrar  $g_k(x, t)$ , sino también demostrar que el límite existe independientemente de la elección particular de la sucesión delta.

Una forma mucho más útil de estudiar las funciones delta es a través de la **teoría de distribuciones** que hemos estado mencionando y definiremos a continuación, ésta técnica proporciona una generalización de funciones y productos internos.

**Definición 1.7.5.** Un **funcional lineal**  $t$  en  $D$  es un número real  $t(\phi)$  el cual es definido para todo  $\phi \in D$  y es lineal en  $\phi$ .

La representación notacional de  $t$  se ve como un producto interno entre las funciones  $t$  y  $\phi$ , sin embargo,  $t$  no necesita ser representable como un verdadero producto interno.

Los ejemplos más simples de funcionales lineales son productos internos. Supongamos que  $f(x)$  es integrable localmente, es decir, la integral de Lebesgue  $\int_I |f(x)| dx$  está definida y acotada para cada intervalo finito  $I$ . Entonces el producto interno

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx,$$

es un funcional lineal si  $\phi$  está en  $D$ .

**Definición 1.7.6.** El conjunto  $\{\phi_n\}$  de funciones prueba es llamado **sucesión cero** si

1.  $\cup_n \{\text{soporte}(\phi_n)\}$  es acotado.
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \max_x \left| \frac{\partial^k \phi_n}{\partial x^k} \right| \right) = 0$  para cada  $k = 0, 1, 2, \dots$

**Definición 1.7.7.** Un **funcional lineal es continuo** en  $D$  si y sólo si  $\langle t, \phi_n \rangle \rightarrow 0$  para todas las sucesiones cero  $\{\phi_n\}$ . Un funcional lineal continuo es llamado **distribución**.

**Observación 1.7.1.** Cada función  $f$  localmente integrable induce una distribución a través del producto interno habitual.

Si  $\langle f, \phi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_n(x)dx$ , entonces

$$|\langle f, \phi_n \rangle| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f| |\phi_n| dx \leq M_n \int_I |f(x)| dx \rightarrow 0,$$

donde  $M_n = \max_x |\phi_n(x)|$  e  $I = \cup_n \{\text{soporte}(\phi_n)\}$ .

**Observación 1.7.2.** De lo anterior se deduce que dos funciones localmente integrables que son las mismas casi en todas partes, inducen la misma distribución.

Una distribución importante es la **distribución Heaviside**.

$$\langle H, \phi \rangle = \int_0^{\infty} \phi(x) dx,$$

que es equivalente al producto interno de  $\phi$  con la conocida **función de Heaviside**

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Para cualquier función  $f$  que sea localmente integrable podemos referirnos indistintamente a sus valores de función  $f(x)$  o a sus valores distribucionales (la acción).

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx.$$

**Observación 1.7.3.** *Existen numerosas distribuciones que no se pueden representar como un producto interno.*

Veamos que la siguiente distribución no se puede representar como un producto interno

$$\phi_a(x) = \exp\left(\frac{a^2}{x^2 - a^2}\right), \quad \phi_a(x) = 0, \\ |x| < a, \quad \text{en otro lugar.}$$

$\phi_a(0) = \max_x |\phi_a(x)| = 1/e$  que es independiente de  $a$ . Para cualquier función localmente integrable  $f(x)$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_a(x)dx \right| \leq \frac{1}{e} \int_{-a}^a |f(x)|dx \rightarrow 0 \text{ cuando } a \rightarrow 0,$$

la cual no es  $\phi_a(0)$ . Por lo tanto, no existe una función localmente integrable  $f(x)$  para la cual  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx = \phi(0)$  para cada función de prueba  $\phi(x)$ .

**Definición 1.7.8.** *Decimos que una distribución es **regular** si puede representarse como un producto interno con alguna función localmente integrable  $f$ , y es **singular** si no existe tal función.*

Algunas distribuciones singulares son

1.  $\langle \delta_x, \phi \rangle = \phi(x)$  **Distribución delta.**
2.  $\langle \Delta, \phi \rangle = \phi'(0)$  **Distribución dipolo.**

La distribución dipolo es frecuentemente representado como  $\Delta = -\delta'$  debido a que  $\phi'(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)}{2\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} (\langle \delta_{-\epsilon}, \phi \rangle - \langle \delta_{\epsilon}, \phi \rangle)$  pero como  $\delta_x$  no es una función, ciertamente no es diferenciable en el sentido habitual.

Suele usarse la notación  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-t)\phi(t)dt = \phi(x)$  para representar la distribución  $\langle \delta_x, \phi \rangle$  que no pretende representar una integral real. La notación  $\delta(x-t)$  es una **función simbólica** para la distribución delta. La forma correcta de ver  $\delta_x$  es como un **operador en el conjunto de funciones de prueba**.

Otro operador que tiene valores de operador pero no de valor puntual es el operador  $L = d/dx$ . Sabemos que  $d/dx$  no se puede evaluar en el punto  $x = 2.5$ , por ejemplo, pero  $d/dx$  se puede evaluar puntualmente solo después de que haya actuado primero sobre una función diferenciable  $u(x)$ . Por lo tanto,  $du/dx = (x)$  se puede evaluar en  $x = 2.5$ , solo después de que se conozca el operando  $u(x)$ . De manera similar,  $\langle \delta_x, \phi \rangle$  se puede evaluar solo después de que se conozca  $\phi$ .

Aunque las distribuciones no siempre se pueden representar como integrales, sus propiedades se definen siempre para que sean coherentes con la propiedad correspondiente de los productos internos.

### Propiedades de las distribuciones

1. Si  $t$  es una distribución y  $f \in C^\infty$  entonces  $ft$  es una distribución cuya acción es definida por  $\langle ft, \phi \rangle = \langle t, f\phi \rangle$ . Por ejemplo, si  $f$  es continua  $f(x)\delta = f(0)\delta$ . Si  $f$  es continuamente diferenciable en 0,  $f\delta' = f'(0)\delta + f(0)\delta'$ . Esto se deduce de que

$$\langle f\delta', \phi \rangle = \langle f\delta', \phi \rangle = (f\phi)'|_{x=0} = -f'(0)\phi(0) - f(0)\phi'(0)$$

2. **Dos distribuciones  $t_1$  y  $t_2$  se dicen iguales** en un intervalo  $a < x < b$  si para todas las funciones de prueba  $\phi$  con soporte en  $[a, b]$ ,  $\langle t_1, \phi \rangle = \langle t_2, \phi \rangle$ .
3. Siempre se supone que **se cumplen las reglas habituales de integración**. Por ejemplo, por cambio de escala  $t(\alpha x)$ , queremos decir

$$\langle t(\alpha x), \phi \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \left\langle t, \phi \left( \frac{x}{\alpha} \right) \right\rangle$$

y el desplazamiento de los ejes  $t(x|\zeta)$  se toma como

$$\langle t(x - \xi), \phi \rangle = \langle t, \phi(x + \xi) \rangle,$$

aunque los valores puntuales de  $t$  pueden no tener significado, se deduce, por ejemplo, que  $\delta(x - \xi) = \delta_\xi$  y  $\delta(\alpha x) = \delta(x)/|\alpha|$ .

4. **La derivada  $t'$  de una distribución  $t$**  se define por  $\langle t', \phi \rangle = -\langle t, \phi' \rangle$  para todas las funciones  $\phi \in D$ , pues para funciones diferenciables

$$\langle f', \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)dx = -\langle f, \phi' \rangle.$$

Como  $\phi(x)$  tiene soporte compacto, la integración por partes no tiene contribuciones en el borde en  $x = \pm\infty$ .

**Observación 1.7.4.** Si  $t$  es una distribución, entonces  $t'$  también es una distribución. Si  $\{\phi_n\}$  es una sucesión cero en  $D$ , entonces  $\{\phi'_n\}$  también es una sucesión cero, de modo que

$$\langle t', \phi_n \rangle = -\langle t, \phi_n \rangle \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

De ello se deduce que para cualquier distribución  $t$ , la derivada distribucional  $n$ -ésima  $t^{(n)}$  existe y su acción es

$$\langle t^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n \langle t, \phi^{(n)} \rangle.$$

Por lo tanto, **cualquier función  $L^2$  tiene derivadas distribucionales de todos los órdenes.**

**Ejemplo 1.7.2. Derivada distribucional:**

1. La distribución Heaviside  $\langle H, \phi \rangle = \int_0^\infty \phi(x) dx$  tiene derivada

$$\langle H', \phi \rangle = - \int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0),$$

ya que  $\phi$  tiene soporte compacto, por lo que  $H' = \delta_0$ .

2. La derivada de la distribución  $\delta$  es

$$\langle \delta', \phi \rangle = -\langle \delta, \phi' \rangle = -\phi(0),$$

que es el negativo de la distribución dipolar.

3. Para  $f(x) = |x|$ , la derivada distribucional de  $f$  tiene acción

$$\begin{aligned} \langle f', \phi \rangle &= -\langle f, \phi' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} |x| \phi'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x \phi'(x) dx - \int_0^{\infty} x \phi'(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^0 \phi(x) dx + \int_0^{\infty} \phi(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx + 2 \int_0^{\infty} \phi(x) dx, \end{aligned}$$

de modo que  $f' = -1 + 2H(x)$ , y  $f'' = 2\delta_0$ .

La teoría de distribuciones permite generalizar y extender los conceptos tradicionales de soluciones en problemas de EDPs, incluso en casos donde las soluciones clásicas no existen o son difíciles de manejar.

## 1.8. Teoría de la estabilidad lineal para soluciones estacionarias de ecuaciones diferenciales parciales

A continuación, se mostrarán las técnicas utilizadas para determinar la estabilidad lineal de soluciones estacionarias. La notación y detalles de esta sección se encuentran en la Tesis de doctorado: *Topics in stability theory for partial differential equations* (Beck 2006) y en las notas: *A brief introduction to stability theory for linear PDEs* (Beck 2012).

### 1.8.1. Linealización de ecuaciones diferenciales parciales

Consideremos la siguiente EDP no lineal:

$$u_t = Lu + N(u), \quad (1.8.1)$$

donde  $u = u(x, t) \in X$ ,  $X$  es un espacio de Banach,  $L : X \rightarrow X$  es un operador lineal diferencial no necesariamente acotado y  $N : X \rightarrow X$  un operador no lineal en  $X$ .

#### Ejemplo 1.8.1. Ecuación de reacción difusión.

Son una clase de EDPs parabólicas cuya dinámica resulta interesante, ya que es posible centrarse en el comportamiento resultante de las soluciones a medida que evoluciona el tiempo y obtener información. Consideremos

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + N(u). & L &= \partial_{xx} = \partial^2 && \text{operador lineal.} \\ u_t &= \Delta u + N(u). & \Delta &= \partial^2_{x_1} + \dots + \partial^2_{x_n} && \text{operador lineal: Laplaciano.} \end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \Delta 0 \\ 0 \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1(u) \\ N_2(u) \end{bmatrix} = LU + \bar{N}(U).$$

Otro ejemplo interesante es el siguiente:

#### Ejemplo 1.8.2. Ecuación de onda

Es una EDP hiperbólica que modela fenómenos donde la propagación de ondas se ve afectada por efectos no lineales, lo que introduce comportamientos más complejos que los de la ecuación de onda lineal.

$$u_{tt} = \Delta u + N(u).$$

O bien,

$$U_t := \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 1 \\ \Delta 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N 0 \\ N(u) \end{bmatrix} = LU + \bar{N}(U).$$

Tenemos la ecuación

$$U_t = LU + \bar{N}(U). \quad (1.8.2)$$

De forma general, tenemos la ecuación no lineal (1.8.2) como

$$u_t = F(u), \quad (1.8.3)$$

que tiene una solución particular estacionaria de interés

$$u(x, t) = u_*(x), \quad (1.8.4)$$

es decir, soluciones tales que  $u_t = 0$ , o bien,  $F(u_*) = 0$ .

Podemos escribir la solución como

$$u(x, t) = u_*(x) + v(x, t)$$

y derivar una ecuación la dinámica de la perturbación  $v$ :

$$\begin{aligned} v_t &= (u_* + v)_t = F(u_* + v) = F(u_*) + DF(u_*)v \\ &\quad - DF(u_*)v + F(u_*) - F(u_*) \\ v_t &= F(u_*) + DF(u_*)v + \mathcal{O}(v^2) \\ v_t &= DF(u_*)v. \end{aligned}$$

Si  $v$  es suficientemente pequeño, corresponde a que la solución original  $u$  está cerca de la solución particular  $u_*$ , los términos de  $\mathcal{O}$  son suficientemente pequeños comparados con el término lineal  $DF(u_*)$ . Por lo tanto, una aproximación a la evolución de  $u_t = F(u)$  cerca de la solución  $u_*$  es

$$v_t = DF(u_*)v =: Lv,$$

que hace referencia a la **linealización de la EDP a la solución  $u_*$** .

Nos interesa conocer acerca de la estabilidad de soluciones

$$v_t = Lv, \quad v \in X, \quad (1.8.5)$$

donde  $L$  es un operador lineal en un espacio de Banach  $X$ .

**Observación 1.8.1.** *En general, no siempre ayudará la linealización para conocer la estabilidad de la solución estacionaria.*

Por ahora, asumimos que las soluciones de esta ecuación existen para toda condición inicial  $v_0 \in X$ .

**Estabilidad** generalmente se refiere a la estabilidad de la solución  $v \equiv 0$  de la ecuación (1.8.5) debido a que consideramos que esta ecuación lineal describe, aproximadamente, la evolución de una perturbación hacia una solución de interés particular. Por lo que, si dicha perturbación se mantiene cerca de

cero, la solución particular es estable.

**Definición 1.8.1.** La solución  $v_t \equiv 0$  de (1.8.5) es **estable** si para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que para todo  $v_0 \in X$  con  $\|v_0\| < \delta$ , la solución correspondiente a (1.8.5) satisface que  $\|v(t)\|_X \leq \epsilon$  para todo  $t \geq 0$ .

Si además, existe  $\delta^*$  tal que para todas las condiciones iniciales con  $\|v_0\|_X < \delta^*$ , la solución correspondiente satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t)\|_X = 0,$$

entonces la solución cero es **asintóticamente estable**.

Se puede establecer como objetivo el construir soluciones de la ecuación (1.8.5) usando el **semigrupo asociado al operador lineal**  $L$  que es una familia de operadores  $\{e^{Lt}\}_{t \geq 0}$ , que es para cada  $t \geq 0$  un operador lineal acotado en el espacio de Banach  $X$ .

De esta manera, se tiene el siguiente enfoque: para cualquier condición inicial  $v_0$ , la solución a (1.8.5) estará dada por  $v(t) = e^{Lt}v_0$ .

Este enfoque es de utilidad pues una vez que se puede demostrar la existencia del semigrupo, se obtiene inmediatamente la existencia y unicidad de las soluciones de la EDP lineal. Además, en algunos casos, las propiedades de  $L$  pueden utilizarse para determinar el comportamiento asintótico de las soluciones de la EDP lineal.

## 1.8.2. Estabilidad lineal en dimensiones infinitas

¿Podemos utilizar el enfoque anterior y relacionarlo con el comportamiento asintótico de las soluciones con las propiedades espectrales del operador  $L$ ?

Para dar respuesta a la pregunta anterior, veamos algunos conceptos de la teoría espectral para operadores lineales en un espacio de Banach.

**Definición 1.8.2.** Dado un operador lineal  $L$  en un espacio de Banach  $X$ , el **espectro** de  $L$ , denotado por  $\sum(L)$ , es el conjunto de todos los  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que el operador  $(L - \lambda I) : D(L) \rightarrow X$  no tiene inversa acotada definida en todo  $X$ .

**Definición 1.8.3.** El conjunto **resolvente** es

$$\rho(L) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (L - \lambda I) \text{ es biyectivo}\}.$$

Equivalentemente,

$$\rho(L) = \mathbb{C} / \sum(L).$$

Además,

- $(L - \lambda I)$  es sobreyectivo.

- $(L - \lambda I)^{-1}$  es el **operador resolvente**. El conjunto resolvente es equivalente al conjunto de todos los números complejos para los cuales el operador resolvente es un operador lineal acotado en  $X$ .
- Si  $f \in X$ , entonces existe  $g \in X$  tal que  $(L - \lambda I)g = f$ .

**Definición 1.8.4.** Un número complejo  $\lambda$  es llamado un **eigenvalor de  $L$**  si el operador  $(L - \lambda I)$  tiene un espacio nulo no trivial en  $X$ . En otras palabras, existe un  $u \in X$ ,  $u \neq 0$ , tal que  $Lu = \lambda u$ . Equivalentemente,  $(L - \lambda I)$  es no inyectivo.

En infinitas dimensiones, si  $\lambda \in \Sigma(L)$  (si  $\lambda$  es un eigenvalor),  $(L - \lambda I)$  no tiene inversa acotada en todo  $\mathbb{R}^n$  (no es biyectivo). Además, se puede dar el caso en que su rango podría no ser denso o no ser cerrado.

**Definición 1.8.5.** La **multiplicidad** de  $\lambda$  es la dimensión del conjunto

$$M(\lambda) := \{v \in X \mid (L - \lambda I)^k v = 0, \text{ para algún } k\}.$$

**Definición 1.8.6.** El **espectro puntual**  $\Sigma_{pt}(L)$  es el conjunto de eigenvalores aislados que tienen multiplicidad finita.

**Definición 1.8.7.** El **espectro esencial (continuo)**

$\Sigma_{ess}(L) = \Sigma(L) / \Sigma_{pt}(L)$  es el conjunto de los eigenvalores con multiplicidad infinita.

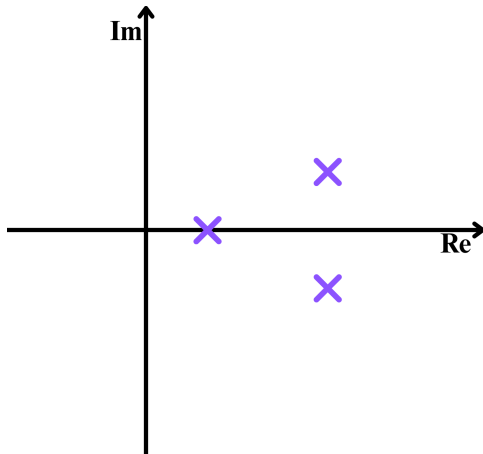


Figura 1.8.1: Gráfico que representa al espectro puntual.

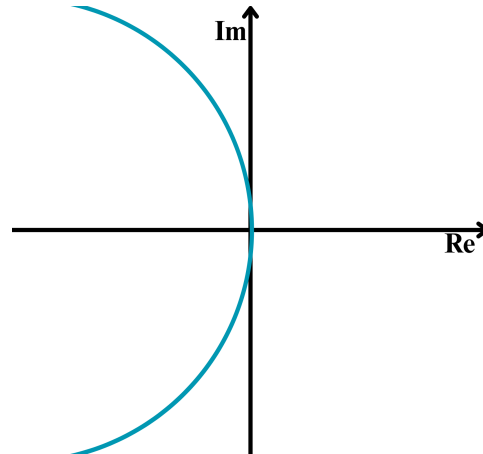


Figura 1.8.2: Gráfico que representa al espectro esencial.

En esta formulación, el espectro puntual no es equivalente al conjunto de valores propios. Esto se debe a que los valores propios pueden integrarse en el espectro esencial.

**Definición 1.8.8.** El **espectro puntual aproximado** es el conjunto de todos aquellos  $\lambda$  tales que  $(L - \lambda I)$  tiene un rango que no es cerrado en  $X$ . Se denotará por  $\Sigma_{app} \subset \Sigma_{ess}$ .

**Definición 1.8.9.** El *espectro residual*  $\Sigma_{res}$  es el conjunto de todos los  $\lambda$  para los que el rango de  $(L - \lambda I)$  no es denso en  $X$ .

El espectro residual puede ser calculado basándose en el hecho de que coincide con el conjunto de todos los valores propios del adjunto del espacio de Banach de  $L$ .

**Observación 1.8.2.** Potencialmente puede darse el caso de que no exista brecha entre eigenvalores (no hay un primer valor propio aislado del resto). La razón por la que los operadores de EDPs lineales pueden carecer de brecha espectral es que su espectro suele contener un número infinito de elementos (Ver Figura 1.8.3). Como resultado, no es posible separar las soluciones que decaen exponencialmente de las que no. En otras palabras, no se puede utilizar el espectro para descomponer el espacio de fases de la EDP en conjuntos invariantes con crecimiento y decaimiento exponencial bien separados. Por lo que no hay un método general para determinar la estabilidad.

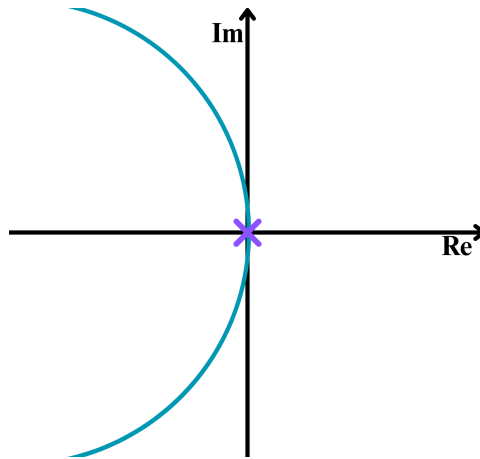


Figura 1.8.3: Los eigenvalores críticos se encuentran en el eje imaginario sin brecha espectral. No existe un método general para determinar la estabilidad (Beck 2006).

En la Figura 1.8.4 se muestran los eigenvalores que dan paso a la estabilidad y en la Figura 1.8.5 se muestran los eigenvalores que dan paso a la inestabilidad.

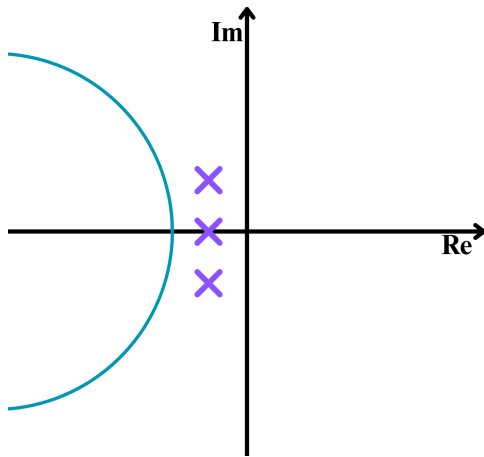


Figura 1.8.4: Todo el espectro se encuentra en el semiplano izquierdo abierto, lo que indica estabilidad (Beck 2006).

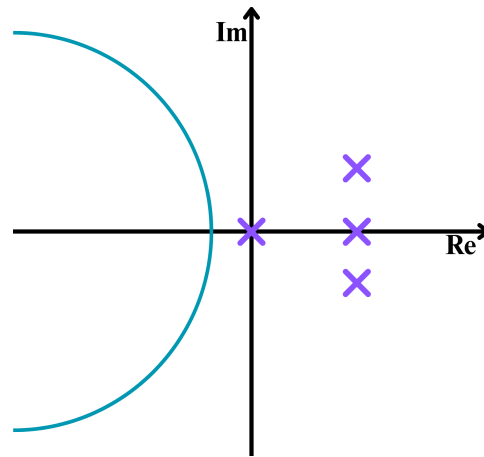


Figura 1.8.5: Los eigenvalores se encuentran en el semiplano derecho abierto, lo que indica inestabilidad (Beck 2006).

Mostraremos como ejemplo la ecuación de reacción-difusión para encontrar el operador  $L$ .

**Ejemplo 1.8.3.** Consideremos la **ecuación de reacción-difusión**

$$u_t = u_{xx} - u + u^3, \quad u = u(x, t) \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La **solución estacionaria** cumple que  $u_t = 0$ , es decir

$$u_{xx} - u + u^3 = 0.$$

Lo que resulta una EDO no lineal  $u'' - u + u^3 = 0$ ,  $u = u(x)$ ,  $u' = u - x$ .

Multiplicamos por  $u'$ ,

$$u'u'' - u'u + u'u^3 = 0.$$

Integrando,

$$\int \frac{d}{dx} \frac{(u')^2}{2} - \frac{d}{dx} \frac{u^2}{2} + \frac{d}{dx} \frac{u^4}{4} dx = \int 0 dx,$$

$$\frac{(u')^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} = C.$$

Agregando **condiciones asintóticas** usuales para soluciones de tipo pulso. Deseamos que  $u \rightarrow 0$  y  $u' \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

$$0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{(u')^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} \right) = C.$$

Por lo tanto,  $C = 0$ .

Tenemos que

$$\begin{aligned}(u')^2 &= u^2 - \frac{u^4}{2}, \\ u' &= \pm \sqrt{u^2 - \frac{u^4}{2}}, \\ u' &= \pm |u| \sqrt{1 - \frac{u^2}{2}}.\end{aligned}$$

Por manipulación, se considera  $|u| = u$  y la rama negativa de  $u$  inversa de la función cuadrática para tener la siguiente EDO separable

$$\frac{du}{dx} = -u \sqrt{1 - \frac{u^2}{2}}.$$

Integrando,

$$\int \frac{-1}{u \sqrt{1 - \frac{u^2}{2}}} \frac{du}{dx} dx = \int 1 dx.$$

Sea  $z = u$ ,  $dx = \frac{dz}{u} dx$ , entonces

$$- \int \frac{dz}{z \sqrt{1 - \frac{z^2}{2}}} = \int 1 dx.$$

La integral del lado izquierdo se puede calcular mediante el cambio de variable  $z = \sqrt{2} \operatorname{sech}(x)$  por lo que  $\sqrt{1 - \frac{z^2}{2}} = \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(x)} = \tanh(x)$  y  $dz = -\sqrt{2} \operatorname{sech}(x) \tanh(x) dx$ .

La integral se convierte en:

$$- \int \frac{dz}{z \sqrt{1 - \frac{z^2}{2}}} = - \int \frac{-\sqrt{2} \operatorname{sech}(x) \tanh(x)}{\sqrt{2} \operatorname{sech}(x) \tanh(x)} dx.$$

La integral de  $dx$  es simplemente  $x + K$ . La integral del lado derecho es otra constante  $Q$ .

Finalmente, regresando a la variable original tenemos que

$$u(x) = \sqrt{2} \operatorname{sech}(x).$$

Veamos que satisface la ecuación  $u'' - u + u^3 = 0$ .

$$u' = \frac{d}{dx} \sqrt{2} \operatorname{sech}(x) = -\sqrt{2} \operatorname{sech}(x) \tanh(x).$$

$$\begin{aligned}u'' &= \frac{d}{dx} \left( -\sqrt{2} \operatorname{sech}(x) \tanh(x) \right) = -\sqrt{2} \left( \frac{d}{dx} (\operatorname{sech}(x)) \tanh(x) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sech}(x) \frac{d}{dx} (\tanh(x)) \right).\end{aligned}$$

Como  $\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \operatorname{sech}^2(x)$ ,  $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(x)) = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x)$ , entonces

$$u'' = \sqrt{2}\operatorname{sech}(x)\tanh^2(x) - \sqrt{2}\operatorname{sech}^3(x) = \sqrt{2}\operatorname{sech}(x)(1 - 2\operatorname{sech}^2(x)).$$

Por otro lado  $u^3 = 2\sqrt{2}\operatorname{sech}^3(x)$ , entonces  $u - u^3 = \sqrt{2}\operatorname{sech}(x)(1 - 2\operatorname{sech}^2(x))$ .

Por lo tanto,

$$u'' - u + u^3 = \sqrt{2}\operatorname{sech}(x)(1 - 2\operatorname{sech}^2(x)) - \sqrt{2}\operatorname{sech}(x)(1 - 2\operatorname{sech}^2(x)) = 0.$$

La solución estacionaria es

$$u_*(x) = \sqrt{2}\operatorname{sech}(x).$$

Ahora, linealizamos la ecuación

$$u = v + u_*(x), \quad v(x, t) \text{ pequeña.}$$

Tenemos entonces que  $v_t = u_t = F(u) = F(v + u_*)$ , entonces

$$\begin{aligned} v_t = F(v + u_*) &= (v + u_*)_{xx} - (v + u_*) + (v + u_*)^3 \\ &= v_{xx} + (u_*)_{xx} - v + u_* + v^3 + 3v^2u_* \\ &\quad + 3(u_*)^2v + u_*^3. \end{aligned}$$

La siguiente simplificación se da debido a que  $u_*$  es solución estacionaria

$$v_t = F(v + u_*) = v_{xx} - v + 3(u_*)^2v.$$

los primeros 3 términos del lado derecho conforman la parte lineal, sustituyendo la forma explícita de  $u_*$ , tenemos:

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} - v + 3(2\operatorname{sech}^2(x))v \\ v_t &= v_{xx} + (6\operatorname{sech}^2(x) - 1)v \\ v_t &= Lv, \end{aligned}$$

$$L := \partial^2_x + (6\operatorname{sech}^2(x) - 1)I.$$

Para estudiar la estabilidad de la solución estacionaria se aplica la teoría espectral mencionada en esta sección sobre la linealización que acabamos de construir.

**Observación 1.8.3.** En soluciones estacionarias de EDPs no lineales que son invariantes traslacionales (si al hacer una traslación espacial o temporal, la forma de la ecuación no cambia) se tendrá un 0 eigenvalor del operador linealizado. Esto indica que la solución estacionaria puede desplazarse sin cambiar de forma.

Sea  $u_t(x, t) = F(u)$ ,  $\xi = x - ct$  el marco para buscar soluciones invariantes traslacionales y  $v(\xi, t) = u(x - ct, t)$  entonces

$$-cv_\xi(\xi, t) + v_t(\xi, t) = F(v(\xi, t)).$$

Asumiendo que  $v_t(\xi, t) = 0$  implica que  $V = V(\xi)$  es solución estacionaria por lo que satisface la EDO

$$0 = cV'(\xi) + F(V(\xi)) = G(V).$$

Notar que  $G$  es invariante traslacional pues  $G(V(\xi)) = 0$  y  $G(V(\xi + s)) = 0$ , para toda  $s$ .

Sea  $G(V + W) \approx G(V) + L_V W$  donde  $V$  es la solución de onda viajera y  $W$  es la perturbación. Tomamos  $G(V + W) = G(V) + L_V W$  y diferenciamos  $G(V(\xi + s)) = 0$  respecto a  $s$ .

$$0 = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} G(V(\xi + s)) = L_V \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} V(\xi + s) = L_V V'(\xi).$$

Por lo que

$$L_V V'(\xi) = 0 = 0V'(\xi).$$

Por lo tanto,  $\lambda = 0$  es un eigenvalor con eigenfunción  $V'(\xi)$ .

# Capítulo 2

---

## Fundamentos biológicos

### 2.1. Existencia de ondas viajeras

Existen hallazgos experimentales donde se ha encontrado evidencia de ondas viajeras en escalas de área única: **mesoscópicas** y de todo el cerebro: **macroscópicas**. Distintos tractos de la fibra axonal transporta ondas viajeras en las dos escalas y existen diferencias observables en la dinámica resultante como la extensión espacial y la velocidad de propagación.

- Nivel macroscópico: Se han observado oscilaciones en electroencefalograma (EEG) a finales del siglo XIX y principios del XX (Ahmed y Cash 2013). Sin embargo, la distorsión de la señal por los tejidos craneales (Buzsáki, Anastassiou y Koch 2012) y la conducción del volumen plantean posibles factores de confusión importantes para la detección de ondas viajeras en el EEG. También se han observado oscilaciones en los registros de electrocorticografía (ECoG intracraneal) para mapear los sitios corticales involucrados en la generación de convulsiones epilépticas (Jasper y Penfield 1949). En ambas técnicas se ha encontrado una alta resolución temporal (ms) pero baja resolución espacial (cm) con una velocidad de propagación de onda de 1 a 10 m/s cayendo dentro del rango de velocidades de conducción axonal de las fibras mielinizadas de la sustancia blanca en la corteza (Salinas y Sejnowski 2001; Swadlow, Beloozerova y Sirota 1998).
- Nivel mesoscópico: Se han aplicado métodos para el análisis de grabaciones de un solo ensayo como el potencial de campo local (LFP) utilizando conjuntos de electrodos múltiples (MEA) que permiten brindar pistas importantes sobre el código neuronal y el papel de los mapas topográficos en los sistemas sensoriales. Además, se ha introducido un algoritmo general basado en fases que puede detectar ondas de forma arbitraria en datos multicanal con alto nivel de ruido (L. Muller et al. 2014), utilizado imágenes ópticas registradas con tintes sensibles al voltaje (VSD) donde los resultados indican que la actividad evocada en un punto de la corteza visual puede, a través de la generación de una onda viajera, impactar en neuronas alejadas a lo largo del mapa retinotópico, y esto afecta la forma en que se procesan las entradas subsiguientes a lo largo del espacio visual (Reynaud, Masson y Chavane 2012). En estos métodos se ha encontrado

una alta resolución espacial y temporal (Maynard, Nordhausen y Normann 1997; Shoham et al. 1999) con una velocidad de propagación de entre 0.1 a 0.8 m/s consistentes con la velocidad de conducción axonal de las fibras horizontales amielínicas de largo alcance dentro de las capas superficiales de la corteza (Girardand, Hupé y Bullier 2001).

Las interacciones que propician las ondas viajeras pueden ser modeladas con el apoyo de las descripciones de población a gran escala, como las ecuaciones de Wilson-Cowan (Wilson y Cowan 1972) y el modelo de Amari (Amari 1977).

## 2.2. Linealización en soluciones estacionarias

Comenzaremos nuestro análisis con las siguientes ecuaciones que modelan el comportamiento colectivo de grupos de neuronas, basadas en la sinapsis:

$$\begin{aligned} \tau_e \frac{\partial u_e(x, t)}{\partial t} = & -u_e(x, t) \\ & + F_e \left( \int_{\Omega} J_{ee}(x - y) u_e(y, t) - J_{ie}(x - y) u_i(y, t) dy \right. \\ & \left. + I_e(x, t) \right), \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} \tau_i \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} = & -u_i(x, t) \\ & + F_i \left( \int_{\Omega} J_{ei}(x - y) u_e(y, t) - J_{ii}(x - y) u_i(y, t) dy \right. \\ & \left. + I_i(x, t) \right). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Este es un modelo de red de dos capas donde  $u_e(x, t)$  y  $u_i(x, t)$  representan la actividad sináptica de una población de miles o millones de neuronas excitatorias e inhibitoras, respectivamente. Las funciones  $J(x)$  representan la conectividad entre las dos poblaciones; estas son funciones no negativas que, en general, dependen solo de  $|x - y|$ , la distancia entre dos áreas. El dominio del modelo puede ser unidimensional o bidimensional. Aunque no es estrictamente cierto, las llamaremos **ecuaciones de Wilson-Cowan**.

El modelo capta la actividad promedio de poblaciones neuronales excitadoras e inhibitoras usando EDPs no lineales, se usa cuando la actividad neuronal puede formar patrones espaciales fijos (ondas estacionarias). Hacemos algunas suposiciones simples sobre la inhibición para reducir (2.2.1) y (2.2.2) a una ecuación escalar y luego hacemos la transformación.

Supongamos que  $\tau_i \ll \tau_e$ ,  $F_i$  es lineal y  $J_{ii} = 0$ , es decir, que la inhibición es más rápida que la excitación. (Si suponemos que la excitación está dominada

por los tipos de receptores NMDA lentos, entonces esta no es una mala suposición). La suposición sobre  $J_{ii}$  simplifica el álgebra. Fijamos  $\tau_i = 0$  y resolvemos para  $u_i(x, t)$ :

$$u_i(x, t) = F_i \left( \int_{\Omega} J_{ei}(x - y) u_e(y, t) dy + I_i(x, t) \right).$$

La suposición de linealidad con respecto a  $F_i$  significa que podemos absorber la pendiente y la intersección de  $F_i$  en  $J_{ei}$  e  $I_i$ . Sustituimos  $u_i(x, t)$  en (2.2.1) para obtener

$$\tau_e \frac{\partial u_e(x, t)}{\partial t} = -u_e(x, t) + F_e \left( \int_{\Omega} J(x - y) u_e(y, t) + I(x, t) \right),$$

donde

$$J(x) = J_{ee}(x) - \int_{\Omega} J_{ei}(x - y) J_{ie}(y) dy,$$

$$I(x, t) = I - e(x, t) - \int_{\Omega} J_{ei}(x - y) I_i(y, y) dy.$$

El núcleo espacial,  $J(x)$ ; es un compuesto de las interacciones excitatorias e inhibitorias. Si suponemos, por ejemplo, que la conectividad es una gaussiana y que la constante espacial (la desintegración de la conectividad) para las conexiones excitatorias (inhibitorias) es  $\sigma_e$  ( $\sigma_i$ ), entonces  $J(x)$  es la diferencia de dos gaussianas, una con una constante espacial de  $\sigma_e$  y la otra con una constante espacial de  $\sigma = \sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_i^2}$ . Si la excitación recurrente es fuerte, entonces  $J(x)$  será positiva cerca de  $x = 0$  y negativa para valores mayores de  $x$  ya que  $\sigma < \sigma_e$ .

Sea  $v(x, t) = J(x) * u_e(x, t) + I(x, t)$  (\* la operación convolución) de modo que  $v(x, t)$  satisface

$$\tau_e v_t(x, t) + v(x, t) = J(x) * F(v(x, t)) + \hat{I}(x, t), \quad (2.2.3)$$

$$\hat{I} = \tau I_t + I,$$

y  $F$  es la función Heaviside.

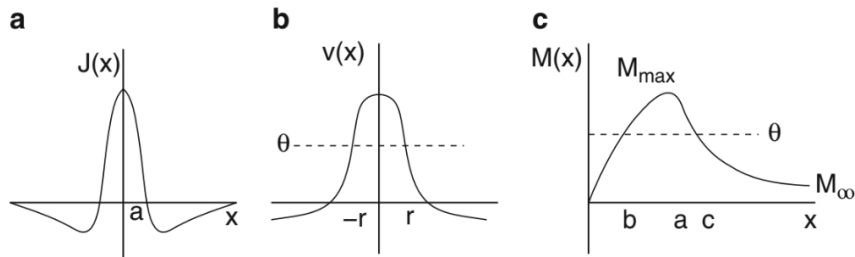


Figura 2.2.1: (a) Función de interacción compuesta; (b) Solución de “protuberancia”; (c) Integral de  $J(x)$  que muestra los anchos permitidos de la protuberancia.

Ahora supongamos que  $F(v) = H(v - \theta)$  es la función escalonada y que no hay entrada  $I = \hat{I} = 0$ . El dominio espacial,  $\Omega$ , será la línea real. Una protuberancia se define como una solución estacionaria de (2.2.3) que tiene un pico localizado espacialmente (Figura 2.2.1.b).

$$\tau_e v_t(x, t) + v(x, t) = J(x) * H(v(x, t) - \theta). \quad (2.2.4)$$

Una solución de este tipo satisface

$$v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} J(x - y)H(v(y) - \theta)dy.$$

Construimos una solución de protuberancia suponiendo que  $v(x) > \theta$  en un intervalo  $-r < x < r$  y  $v(x) < \theta$  fuera de ese intervalo (Figura 2.2.1.b). De la definición de la función escalonada,

$$v(x) = \int_{-r}^r J(x - y)dy = \int_{x-r}^{x+r} J(y)dy = M(x + r) - M(x - r),$$

donde  $M(x) = \int_0^x J(y)dy$ .

La continuidad de  $v(x)$  en  $x = \pm r$  implica que  $v(\pm r) = \theta$ , así, tenemos

$$\theta = M(2r) = -M(-2r).$$

Si  $J(y)$  no es simétrica, no podemos satisfacer ambas ecuaciones simultáneamente y no habrá protuberancia estacionaria. En cambio habrá un movimiento de protuberancia de manera muy similar al movimiento que se induce con un término de transporte en ecuaciones de difusión. Sin embargo, si  $J(y)$  es una función par, entonces  $M(y)$  es impar y ambas ecuaciones se reducen a la misma ecuación  $M(2r) = \theta$ , donde  $2r$  es el ancho de la protuberancia.

La Figura 2.2.1.c muestra que para una interacción de Wizard hat como en la Figura 2.2.1.a habrá una, dos o ninguna raíz de esta ecuación. Si el umbral es mayor que el máximo de  $M$ ,  $M_{\text{máx}}$  entonces no hay raíces ni protuberancias. Si el umbral se encuentra entre  $M_{\infty}$  y  $M_{\text{máx}}$  entonces hay dos raíces y dos protuberancias diferentes. Si  $M_{\infty} > 0$ , entonces para  $0 < \theta < M_{\infty}$  hay una sola raíz.

Examinamos la estabilidad con respecto a (2.2.4). Por lo tanto, suponemos que

$$v_0(x) = \int_{x-r}^{x+r} J(y)dy,$$

es una solución estacionaria y que  $r$  satisface  $M(2r) = \theta$ , de manera que  $v(x, t)$  varía ligeramente alrededor de esta solución, entonces

$$w(x, t) = v(x, t) - v_0(x),$$

o bien,

$$v(x, t) = v_0(x) + w(x, t),$$

donde  $w(x, t)$  representa una pequeña perturbación alrededor de  $v_0(x)$ .

Despejando  $v_t(x, t)$  en (2.2.4) y desarrollando, tenemos

$$v_t(x, t) = -\frac{1}{\tau_e}v(x, t) + \frac{1}{\tau_e} \int_{-\infty}^{\infty} J(x-y)H(v(y, t) - \theta)dy =: F(v). \quad (2.2.5)$$

Buscamos la dinámica para la perturbación

$$w_t(x, t) = v_t(x, t) = F(v),$$

de manera que

$$w_t(x, t) = F(v) = F(v_0(x) + w(x, t)).$$

Entonces

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &= -\frac{1}{\tau_e}(v_0(x) + w(x, t)) \\ &\quad + \frac{1}{\tau_e} \int_{-\infty}^{\infty} J(x-y)H(v_0(x) + w(x, t) - \theta)dy. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Considerando a la función  $H$  como distribución y tomando a  $J$  como una función de prueba podemos aproximar a  $w_t$ .

Recordando que la derivada de  $H$  como distribución es la función delta  $\delta$  de Dirac, se tiene la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &\approx -\frac{1}{\tau_e}(v_0(x) + w(x, t)) \\ &\quad + \frac{1}{\tau_e} \int_{-\infty}^{\infty} (J(x-y)H(v_0(y) - \theta) \\ &\quad + J(x-y)\delta(v_0(y) - \theta)w(y, t)) dy. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Notemos que se recupera la solución estacionaria, lo cual simplifica la ecuación diferencial. Por lo tanto, de manera no rigurosa la linealización del modelo sobre la solución estacionaria es

$$\tau_e w_t + w = \int_{-\infty}^{\infty} J(x-y)\delta(v_0(y) - \theta)w(y, t)dy.$$

Como la ecuación lineal es autónoma, podemos buscar soluciones que del tipo  $w(x, t) = \exp(\lambda t)\phi(x)$  donde  $\phi(x)$  obedece al problema del valor propio

$$\tau_e \lambda \phi(x) + \phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} J(x-y)\delta(v_0(y) - \theta)\phi(y)dy. \quad (2.2.8)$$

Recordemos que la función delta satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\phi(x)dx = \phi(a),$$

para cualquier función suave  $\phi(x)$  Además, cualquier texto estándar proporciona la siguiente identidad. Supongamos que  $f(0) = 0$  y  $f'(0) \neq 0$ . Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x))\phi(x)dx = \frac{\phi(0)}{|f'(0)|}.$$

El argumento dentro de la función delta en (2.2.8) se desvanece en  $y \pm r$ , por lo que  $\phi(x)$  debe satisfacer

$$(\tau_e\lambda + 1)\phi(x) = \frac{J(x+r)}{|v'_0(-r)|}\phi(-r) + \frac{J(x-r)}{|v'_0(r)|}\phi(r).$$

Usando la definición de  $v_0(x)$ , calculamos

$$v'_0(x) = J(x+r) - J(x-r),$$

así  $|v'_0(\pm r)| = |J(2r) - J(0)|$ . Para el caso del planteamiento inicial,  $|v'_0(\pm r)| = J(0) - J(2r)$ . Sea  $z^\pm = \phi(\pm r)$  y eligiendo  $x = \pm r$  en la ecuación de valor propio, debemos satisfacer

$$\begin{aligned} (\tau_e\lambda + 1)z^- &= \frac{J(0)}{J(0) - J(2r)}z^- + \frac{J(2r)}{J(0) - J(2r)}z^+, \\ (\tau_e\lambda + 1)z^+ &= \frac{J(2r)}{J(0) - J(2r)}z^- + \frac{J(0)}{J(0) - J(2r)}z^+. \end{aligned}$$

La estabilidad se reduce al análisis de una matriz simétrica  $2 \times 2$ . Porque la matriz tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

los valores propios  $a + b$  y  $b - a$  los cuales para nuestro sistema se traduce a  $\lambda = 0$  y

$$\lambda = \frac{1}{\tau_e} - 1 + \frac{J(0) + J(2r)}{J(0) - J(2r)}.$$

Este eigenvalor es negativo si y solo si  $J(2r) < 0$ . Consultando la figura 2.2.1.a y c, vemos que solo la protuberancia más ancha (que corresponde a  $2r = c$ ) cae en la región donde  $J(2r) < 0$ : En conclusión, si está entre  $M_\infty$  y  $M_{\text{máx}}$ , entonces hay dos protuberancias y la más ancha es estable. La protuberancia angosta es inestable y para  $0 < \theta < M_\infty$ , donde solo hay una protuberancia; esta protuberancia también es inestable.

## 2.3. Modelo de Amari

Los tejidos neuronales corticales pueden considerarse matemáticamente como campos neuronales que forman y propagan patrones de excitación que interactúan desempeñando un papel esencial en el procesamiento de la información cortical.

Se ha demostrado que la oscilación neuronal ocurre en un sistema que consta de grupos de neuronas excitadoras e inhibitoras (Amari 1971; Amari 1972;

Wilson y Cowan 1972). Para estudiar la formación de patrones dinámicos relacionados con la oscilación neuronal y los transitorios activos, que ocurren en un campo se requieren capas excitadoras e inhibitoras. En un campo de este tipo están presentes las ondas viajeras.

El modelo matemático que propone Amari para estudiar el mecanismo de formación de un patrón de excitación localizado en campos neuronales no homogéneos toma en cuenta campos neuronales simples unidimensionales que tienen un retraso de tiempo insignificante y consisten en una sola capa, que incluye neuronas excitatorias e inhibitoras.

Definimos a  $u(x, t)$  como el potencial de membrana promedio de las neuronas ubicadas en la posición  $x$  en el tiempo  $t$  de una sola capa cortical (G. Ermentrout y Terman 2010b). El *Modelo de Amari* (Amari 1977) nos proporciona una ecuación integro-diferencial con derivadas parciales para poder describir la propagación de un impulso en forma de onda viajera.

$$u_t(x, t) = -u(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} W(x - y)H(u(y, t) - \theta)dy =: F(u). \quad (2.3.1)$$

donde  $H$  es la función de activación Heaviside, el valor de  $\theta$  indica el umbral de intensidad,  $W(x) = J(x + \alpha)$  es la intensidad promedio de conexión entre las columnas corticales,  $\alpha$  es el traslado de  $J$  y

$$J(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_e}\right) - A \exp\left(-\frac{x^2}{\sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_i^2}}\right) \quad (2.3.2)$$

es el kernel espacial compuesto de las interacciones entre la población excitatoria e inhibitora, cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(x)dx = 1,$$

es decir, tiene soporte compacto.

Hacemos un cambio de variable para la onda viajera sobre la trayectoria  $x = z - ct$  donde  $c$  es la velocidad de la onda. El sentido del cambio de variable se concentra al estudio de una sola dirección dentro del plano ( $t \times z$ ) por donde se busca encontrar una protuberancia viajera al paso del tiempo (cuando el valor de  $t \geq 0$ , incrementa).

Con dicho cambio de variable y asumiendo soluciones estacionarias, la ecuación (2.3.1) se reduce a la EDO (Ramírez 2023).

$$cu' = -u(z) + \int_0^a W(z - y)dy. \quad (2.3.3)$$

Al resolver la EDO y aplicando condiciones al infinito, se encontró la solución dada por

$$u(z) = \exp(-z/c) \left( \int_{-\infty}^z \exp(x/c)f(x)dx \right), \quad (2.3.4)$$

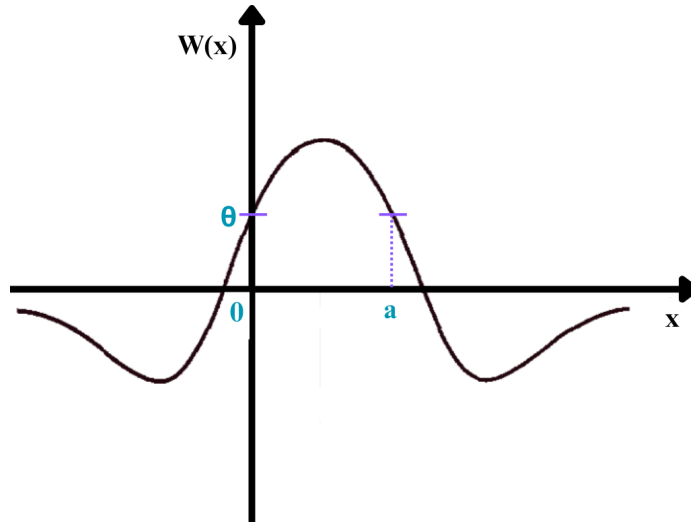


Figura 2.3.1: Función  $W = J(x + \alpha)$ :  $\alpha$  es el desplazamiento del origen de  $J$ ,  $\theta$  es el umbral de intensidad y  $a$  es el ancho de la onda.

donde  $f(x) = \frac{1}{c} \int_0^a W(z - y) dy$ .

En el trabajo de tesis de Licenciatura, para calcular los posibles valores  $c$  (velocidad de la onda) y  $a$  (ancho de la onda), donde la solución de pulso viajero existe, se evalúa la ecuación (2.3.4), en  $u_0(0) = \theta$  y  $u_0(a) = \theta$  ya que en estos valores la actividad neuronal alcanza el umbral de activación. Estas dos ecuaciones son llamadas las condiciones de existencia de pulsos viajeros. Además, se utilizan los parámetros fijos presentados en la Tabla 2.3.1. Los pares de parámetros son: (0.606515, 2.00915) y (0.685364, 0.224913) (ver Figura 2.3.3).

$\theta$	0.03
$A$	0.8
$\sigma_e$	2
$\sigma_i$	3
$\alpha$	0.5

Tabla 2.3.1: Parámetros para la función  $W$  y valor del umbral para el potencial de acción  $\theta$ .

Posteriormente, se realizó una simulación numérica para la ecuación (2.3.1), donde se obtuvo una onda viajera cuya velocidad tiene un valor de  $c = 0.6$  y un ancho de  $a = 2.07$ . Los valores obtenidos se aproximan a (0.606515, 2.00915). Por lo tanto, decimos que este par de parámetros determina las condiciones de existencia de soluciones de tipo protuberancia viajera a partir del *Modelo de Amari*.

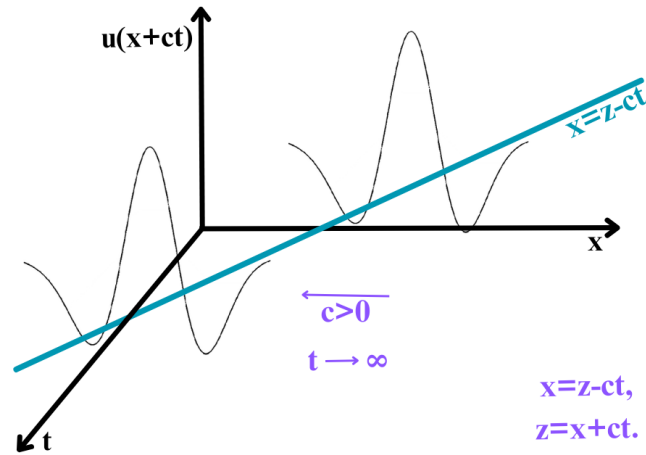


Figura 2.3.2: Visualización de protuberancia viajera bajo el marco de referencia  $x = z - ct$  donde  $c$  es la velocidad de la onda.

Hasta ese momento se consideró el hecho de que la ecuación (2.3.1) asociada a los parámetros  $a$  y  $c$  (0.606515, 2.00915) es estable, debido a que con una serie de ensayos con la simulación donde se variaron ligeramente los parámetros de la Tabla 2.3.1, se siguió observando la propagación de una onda viajera. Por otro lado, el otro par de parámetros visualizados en la Figura 2.3.3 correspondería a una solución inestable, debido a la sensibilidad con los otros parámetros involucrados y al no poder obtener soluciones con la velocidad indicada en dicho par.

La onda viajera construida permite visualizar la influencia de la intercomunicación entre las neuronas para la propagación de la actividad sináptica entre columnas corticales con interacciones espaciales no homogéneas, actividad semejante a la realidad ocurrida en la sinapsis, ya que a nivel cerebral nos encontramos con interacciones inhomogéneas entre poblaciones neuronales excitatorias e inhibitorias.

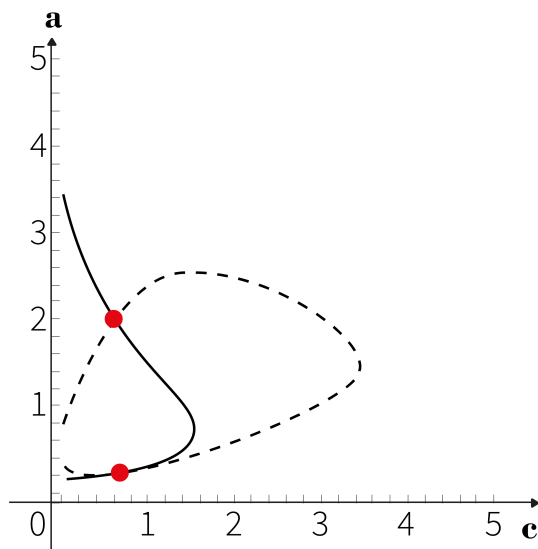


Figura 2.3.3: Los puntos marcados representan la existencia de pares de parámetros que satisfacen la condición de existencia de solución tipo pulso viajero, cuyos valores son:  $(0.606515, 2.00915)$  y  $(0.685364, 0.224913)$ . Gráfica obtenida con el entorno de Mathematica.

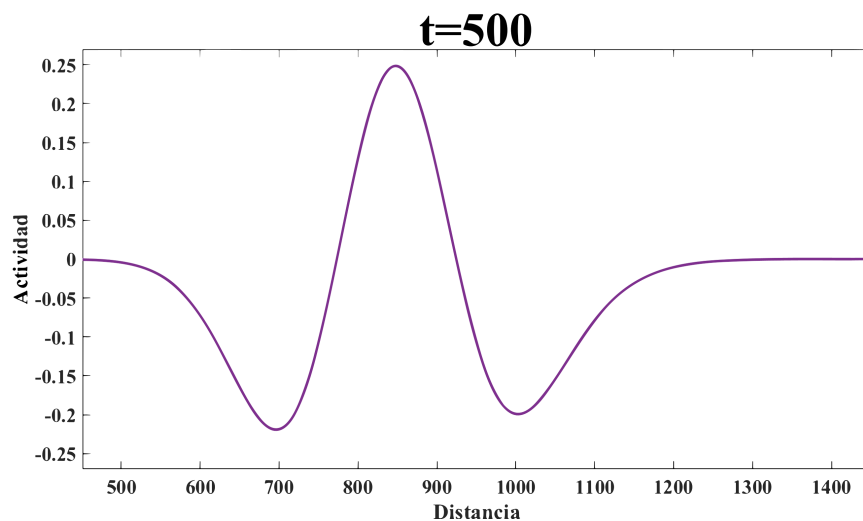


Figura 2.3.4: Onda viajera obtenida de la ecuación (2.3.1) cuya velocidad es 0.6 y ancho es 2.07. Gráfica obtenida con el entorno de MATLAB.

# Capítulo 3 ---

## Estabilidad de soluciones de tipo onda viajera en modelos neuronales con interacciones espaciales inhomogéneas

### 3.1. Estabilidad del modelo de Amari

Examinamos la estabilidad con respecto a la solución estacionaria (2.3.4) de la ecuación (2.3.1). Tenemos que  $u_t(x, t) = F(u)$ , sea  $u(z, t) = u(x + ct, t)$ , entonces  $u_t(z, t) + cu_z(z, t) = G(u)$ .

Sea  $u_0$  una solución estacionaria de la forma

$$u_0(z) = \exp(-z/c) \left( \int_{-\infty}^z \exp(x/c) f(x) dx \right), \quad (3.1.1)$$

donde  $f(x) = \frac{1}{c} \int_0^a W(z - y) dy$ , de manera que  $u(x, t)$  varía ligeramente alrededor de esta solución, entonces

$$w(z, t) = u(z, t) - u_0(z),$$

o bien,

$$u(z, t) = w(z, t) + u_0(z),$$

donde  $w(z, t)$  representa una pequeña perturbación alrededor de  $u_0(z)$ .

Buscamos la dinámica para la perturbación

$$w_t(z, t) = u_t(z, t) = G(u) = G(w + u_0).$$

De manera que

$$\begin{aligned} w_t(z, t) = & - (w(z, t) + u_0(z)) \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} W(z - y) H(w(y, t) + u_0(z) - \theta) dy \\ & - c(w_z(z, t) + u_0'(z)). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Capítulo 3: Estabilidad de soluciones de tipo onda viajera en modelos neuronales con interacciones espaciales inhomogéneas

Considerando a la función  $H(v_0(z) + w(z, t) - \theta)$  como distribución y tomando a  $W(z) = J(z + \alpha)$  como una función de prueba podemos aproximarla. Tendremos así, solo los términos constantes y lineales en  $w(z, t)$  de modo que la ecuación resultante describe cómo pequeñas perturbaciones alrededor de la solución estacionaria afectan el sistema de manera lineal.

$$\begin{aligned} w_t(z, t) + cw_z(z, t) + cu'_0(z) &\approx -w(z, t) - u_0(z) \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} [W(z - y)H(u_0(z) - \theta) \\ &+ W(z - y)\delta(u_0(z) - \theta)w(z, t)]dy. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Simplificando

$$\begin{aligned} w_t(z, t) + cw_z(z, t) + cu'_0(z) &\approx -w(z, t) - u_0(z) \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} W(z - y)H(u_0(z) - \theta)dy \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} W(z - y)\delta(u_0(z) - \theta)w(z, t)dy. \end{aligned}$$

Notemos que se recupera la solución estacionaria:

$$cu'_0(z) = -u_0(z) + \int_0^a W(z - y)dy,$$

lo cual simplifica la ecuación diferencial.

Por lo tanto, la linealización del modelo sobre la solución estacionaria es

$$w_t(z, t) + cw_z(z, t) = -w(z, t) + \int_{-\infty}^{\infty} W(z - y)\delta(u_0(z) - \theta)w(z, t)dy. \quad (3.1.4)$$

Como la ecuación lineal es autónoma, podemos buscar soluciones que del tipo  $w(z, t) = \exp(\lambda t)\phi(z)$  donde  $\phi(z)$  obedece al problema del valor propio

$$\begin{aligned} \lambda \exp(\lambda t)\phi(z) + c \exp(\lambda t)\phi'(z) &= -\exp(\lambda t)\phi(z) \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} W(z - y)\delta(u_0(y) - \theta) \exp(\lambda t)\phi(y)dy. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$\lambda\phi(z) + c\phi'(z) = -\phi(z) + \int_{-\infty}^{\infty} W(z - y)\delta(u_0(y) - \theta)\phi(y)dy.$$

$$(1 + \lambda)\phi(z) + c\phi'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} W(z - y)\delta(u_0(y) - \theta)\phi(y)dy.$$

$$(1 + \lambda)\phi(z) + c\phi'(z) = \frac{W(z)}{|u'_0(0)|}\phi(0) + \frac{W(z - a)}{|u'_0(a)|}\phi(a). \quad (3.1.6)$$

Reorganizamos la ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea como:

$$\phi'(z) + \frac{(1 + \lambda)}{c}\phi(z) = \frac{1}{c}q(z). \quad (3.1.7)$$

donde

$$q(z) = \frac{W(z)}{|u'_0(0)|} \phi(0) + \frac{W(z-a)}{|u'_0(a)|} \phi(a). \quad (3.1.8)$$

El factor integrante es:

$$\mu(z) = \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}z\right).$$

Multiplicamos toda la ecuación diferencial por  $\mu(z)$ :

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}z\right)\phi'(z) + \frac{1+\lambda}{c}\exp\left(\frac{1+\lambda}{c}z\right)\phi(z) \\ = \frac{1}{c}\exp\left(\frac{1+\lambda}{c}z\right)q(z). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Notemos que el lado izquierdo corresponde a la derivada del producto:

$$\frac{d}{dz}\left(\exp\left(\frac{1+\lambda}{c}z\right)\phi(z)\right) = \frac{1}{c}\exp\left(\frac{1+\lambda}{c}z\right)q(z). \quad (3.1.10)$$

Integrando ambos lados:

$$\int_{z_0}^z \frac{d}{ds}\left(\exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right)\phi(s)\right) ds = \int_{z_0}^z \frac{1}{c}\exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right)q(s) ds, \quad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}z\right)\phi(z) - \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}z_0\right)\phi(z_0) \\ = \int_{z_0}^z \frac{1}{c}\exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right)q(s) ds. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Despejamos  $\phi(z)$ :

$$\begin{aligned} \phi(z) = \exp\left(-\frac{1+\lambda}{c}z\right) \left[ \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}z_0\right)\phi(z_0) \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \int_{z_0}^z \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right)q(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Sustituimos la expresión de  $q$  para tener

$$\begin{aligned} \phi(z) = \exp\left(-\frac{1+\lambda}{c}z\right) \left[ \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}z_0\right)\phi(z_0) \right. \\ \left. + \frac{\phi(0)}{c|u'_0(0)|} \int_{z_0}^z W(s) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds \right. \\ \left. + \frac{\phi(a)}{c|u'_0(a)|} \int_{z_0}^z W(s-a) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds \right]. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Tomamos  $\lim z_0 \rightarrow -\infty$ :

$$\begin{aligned} \phi(z) = \exp\left(-\frac{1+\lambda}{c}z\right) \left[ \frac{\phi(0)}{c|u'_0(0)|} \int_{-\infty}^z W(s) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds \right. \\ \left. + \frac{\phi(a)}{c|u'_0(a)|} \int_{-\infty}^z W(s-a) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds \right]. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Sustituyamos  $z = 0$ .

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \frac{\phi(0)}{c|u'_0(0)|} \int_{-\infty}^0 W(s) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds \\ &+ \frac{\phi(a)}{c|u'_0(a)|} \int_{-\infty}^0 W(s-a) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds.\end{aligned}\quad (3.1.16)$$

$$\begin{aligned}\phi(0) &\left(1 - \frac{1}{c|u'_0(0)|} \int_{-\infty}^0 W(s) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds\right) \\ &- \phi(a) \frac{1}{c|u'_0(a)|} \int_{-\infty}^0 W(s-a) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds = 0.\end{aligned}$$

Sustituyamos  $z = a$ .

$$\begin{aligned}\phi(a) &= \exp\left(-\frac{1+\lambda}{c}a\right) \frac{\phi(0)}{c|u'_0(0)|} \int_{-\infty}^a W(s) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds \\ &+ \exp\left(-\frac{1+\lambda}{c}a\right) \frac{\phi(a)}{c|u'_0(a)|} \int_{-\infty}^a W(s-a) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds.\end{aligned}\quad (3.1.17)$$

$$\begin{aligned}\phi(0) &\left(-\exp\left(-\frac{1+\lambda}{c}a\right) \frac{1}{c|u'_0(0)|} \int_{-\infty}^a W(s) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds\right) \\ &+ \phi(a) \left(1 - \exp\left(-\frac{1+\lambda}{c}a\right) \frac{1}{c|u'_0(a)|} \int_{-\infty}^a W(s-a) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Tenemos el siguiente sistema lineal para  $\phi(0)$  y  $\phi(a)$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (3.1.18)$$

Donde:

- $A = 1 - \frac{1}{c|u'_0(0)|} \int_{-\infty}^0 W(s) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds$
- $B = -\frac{1}{c|u'_0(a)|} \int_{-\infty}^0 W(s-a) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds$
- $C = -\exp\left(-\frac{1+\lambda}{c}a\right) \frac{1}{c|u'_0(0)|} \int_{-\infty}^a W(s) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds$
- $D = 1 - \exp\left(-\frac{1+\lambda}{c}a\right) \frac{1}{c|u'_0(a)|} \int_{-\infty}^a W(s-a) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds$

para que existan  $\phi(0)$  y  $\phi(a)$  no triviales necesitamos que el determinante de (3.1.18) sea 0, esto es:

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{1}{c|u'_0(0)|} \int_{-\infty}^0 W(s) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds\right) \\
 & \left(1 - \exp\left(-\frac{1+\lambda}{c}a\right) \frac{1}{c|u'_0(a)|} \int_{-\infty}^a W(s-a) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds\right) \\
 & - \left(-\frac{1}{c|u'_0(a)|} \int_{-\infty}^0 W(s-a) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds\right) \\
 & \left(-\exp\left(-\frac{1+\lambda}{c}a\right) \frac{1}{c|u'_0(0)|} \int_{-\infty}^a W(s) \exp\left(\frac{1+\lambda}{c}s\right) ds\right) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Cálculo de  $u'_0$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{du_0}{dz} &= \frac{d}{dz} (\exp(-z/c)) \cdot \int_{-\infty}^z \exp(x/c) f(x) dx \\
 &+ \exp(-z/c) \cdot \frac{d}{dz} \left( \int_{-\infty}^z \exp(x/c) f(x) dx \right).
 \end{aligned}$$

Primera derivada:

$$\frac{d}{dz} (\exp(-z/c)) = -\frac{1}{c} \exp(-z/c).$$

El término con el integral depende de  $z$ , ya que  $z$  es el límite superior de integración. Usamos la regla fundamental del cálculo, que implica:

$$\frac{d}{dz} \left( \int_{-\infty}^z \exp(x/c) f(x) dx \right) = \exp(z/c) f(z).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{du_0}{dz} &= -\frac{1}{c} \exp(-z/c) \int_{-\infty}^z \exp(x/c) f(x) dx \\
 &+ \exp(-z/c) \cdot \exp(z/c) f(z).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{du_0}{dz} = f(z) - \frac{1}{c} u_0(z).$$

O bien

$$\frac{du_0}{dz} = \frac{1}{c} \int_0^a W(z-y) dy - \frac{1}{c} u_0(z).$$

## 3.2. Simulaciones numéricas

Por medio de Mathematica se realizaron las simulaciones numéricas para conocer los valores para  $\lambda$  del sistema lineal (3.1.18) para  $\phi(0)$ .

Primero se tomó el sistema lineal (3.1.18) con respecto a los valores de la Tabla 2.3.1 y se añadieron los valores para  $c$  y  $a$  donde se obtuvo una protuberancia viajera en el trabajo de Licenciatura.

Capítulo 3: Estabilidad de soluciones de tipo onda viajera en modelos neuronales con interacciones espaciales inhomogéneas

$\theta$	0.03
$A$	0.8
$\sigma_e$	2
$\sigma_i$	3
$\alpha$	0.5
$c$	0.6065145370949069
$a$	2.009152746029785

Tabla 3.2.1: Parámetros para el sistema (3.1.18). Valores para  $c$  y  $a$  donde se obtuvo una protuberancia viajera.

Como resultado, tenemos la gráfica del sistema lineal (3.1.18). Obtuvimos los eigenvalores  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = -0.972969$  que indican la estabilidad lineal de la ecuación (3.1.1), pues la perturbación  $w(z, t) = \exp(\lambda t)\phi(z)$  donde  $\phi(z)$  obedece al problema del valor propio, le corresponde el eigenvalor negativo que la hacen pequeña permitiendo que  $u$  varíe ligeramente alrededor de la solución estacionaria (3.1.1). Por lo tanto, este análisis sugiere la estabilidad lineal de la solución estacionaria (3.1.1) como se esperaba con los resultados numéricos de Licenciatura.

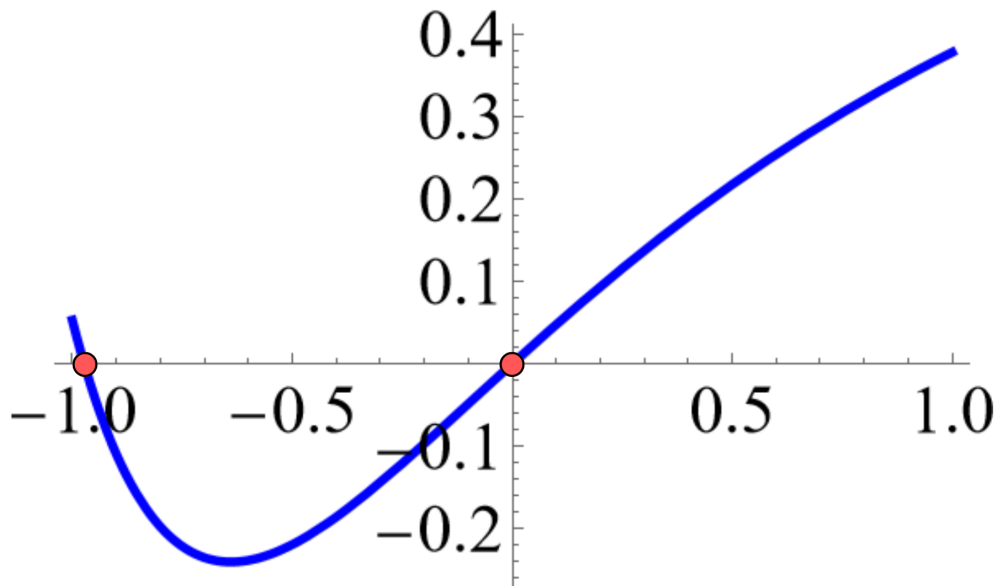


Figura 3.2.1: Eigenvalores del sistema lineal que corresponden a 0 y -0.972969.

Por otro lado, se tomó el sistema lineal (3.1.18) con respecto a los valores de la Tabla 2.3.1 y se añadieron los valores para  $c$  y  $a$  donde no se obtuvo una protuberancia viajera en el trabajo de Licenciatura.

Como resultado, tenemos la gráfica del sistema lineal (3.1.18). Obtuvimos los eigenvalores  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = 30.096$  que indican la inestabilidad lineal de



# Capítulo 4

---

## Conclusiones

El modelo de campo neural propuesto por Amari (Amari 1977) que se utilizó en este trabajo, describe la evolución de la actividad neuronal en medios corticales continuos, considerando interacciones a nivel poblacional incluyendo neuronas excitatorias e inhibitorias mediadas por un kernel de conectividad que tiene como argumento un peso asimétrico implicando inhomogeneidad espacial. Esto imita la estructura real del cerebro, donde ciertas conexiones tienen direccionalidad preferente.

Este modelo permite analizar soluciones en forma de ondas viajeras, cuya existencia y estabilidad están influenciadas por la estructura del kernel sináptico, la función de activación neuronal, y los parámetros que gobiernan el umbral y el nivel de inhibición global.

Respondiendo a nuestra inquietud sobre determinar qué par de condiciones que garantizan la propagación de ondas obtenidas en el trabajo de Licenciatura están asociadas con una estabilidad e inestabilidad de las soluciones estacionarias se realizó lo que se describe a continuación.

Al resolver el sistema (3.1.18) se determinaron los eigenvalores puntuales del espectro de la ecuación diferencial parcial (2.3.1). Se emplearon los parámetros de la Tabla 2.3.1 y se obtuvo la linealización (3.1.4) del modelo sobre la solución estacionaria (3.1.1) conformada por la perturbación  $w$ . Como la linealización es una ecuación lineal autónoma es posible buscar soluciones de tipo exponencial  $w(z, t) = \exp(\lambda t)\phi(z)$ , donde  $\phi(z)$  obedece al problema del valor propio. De esta manera, se obtuvo el sistema lineal (3.1.18) para que existan  $\phi(0)$  y  $\phi(a)$  (evaluación de  $\phi$  en el intervalo  $[0, a]$  donde se excede el umbral), no triviales, el determinante del sistema lineal (3.1.18) debe ser 0.

Numéricamente se calcularon las raíces del polinomio generado por el determinante igualado a 0 para cada par de valores  $c$  y  $a$ .

Para los valores de  $(c, a) = (0.6065145, 2.00915)$  se obtuvieron las raíces 0 y  $-0.972969$ . Recordemos que este par de parámetros para la velocidad y ancho de la onda coincidió con el par de valores calculados con la onda viajera construida en el trabajo de Licenciatura.

---

Para los valores de  $(c, a) = (0.68536, 0.224913)$  se obtuvieron las raíces 0 y 30.096. Con dicho par de parámetros para la velocidad y ancho de la onda no se obtuvo algún resultado con la simulación de Licenciatura.

Por lo tanto, para estos valores de  $c$  y  $a$  (0.6065145, 2.00915), la perturbación tiende a desvanecerse, por lo que la solución estacionaria (3.1.1) es linealmente estable y para los valores de  $c$  y  $a$  (0.68536, 0.224913) la perturbación tiende a crecer, por lo que la solución estacionaria (3.1.1) es linealmente inestable.

Por lo tanto, para las condiciones de existencia analizadas se obtuvo que la onda ancha y rápida es linealmente estable mientras que la onda delgada y lenta es linealmente inestable.

Este análisis enriquece la comprensión matemática del modelo, debido a que la ecuación utilizada permite caracterizar cómo se transmite la actividad sináptica a través de regiones corticales.

---

# Bibliografía

- [1] A. M. Aertsen et al. «Dynamics of neuronal firing correlation: modulation of ‘effective connectivity’». En: *J Neurophysiol* (1989).
- [2] O J Ahmed y S S Cash. «Finding synchrony in the desynchronized EEG: the history and interpretation of gamma rhythms». En: *Front Integr Neurosci* (2013).
- [3] Shun-Ichi Amari. «Characteristics of random nets of analog neuron-like elements». En: *IEEE Trans. on Syst. Man and Cybernetics SMC-2* (1972).
- [4] Shun-Ichi Amari. «Characteristics of randomly connected threshold element networks and network systems». En: *Proc. IEEE* 59 (1971).
- [5] Shun-Ichi Amari. «Dynamics of Pattern Formation in Lateral-Inhibition Type Neural Fields». En: *Biol. Cybern.* 27.2 (junio de 1977). DOI: [10.1007/BF00337259](https://doi.org/10.1007/BF00337259).
- [6] Margaret Anne Beck. «A brief introduction to stability theory for linear PDEs». 2012.
- [7] Margaret Anne Beck. «Topics in stability theory for partial differential equations». Tesis doctoral. Boston University, 2006.
- [8] P C Bressloff. «Spatiotemporal dynamics of continuum neural fields». En: *J Phys A Math Theor* (2011).
- [9] G Buzsáki, C A Anastassiou y C Koch. «The origin of extracellular fields and currents — EEG, ECoG, LFP and spikes». En: *Nat Rev Neurosci* (2012).
- [10] B Ermentrout. «Neural networks as spatio-temporal pattern-forming systems». En: *Rep Prog Phys* (1998).
- [11] G B Ermentrout y D Kleinfeld. «Traveling electrical waves in cortex: insights from phase dynamics and speculation on a computational role.» En: *Neuron* (2001).
- [12] G.B. Ermentrout y D.H. Terman. En: *Interdisciplinary Applied Mathematics Mathematical Foundations of Neuroscience*. Ed. por S.S. Antman et al. Vol. 35. New York: Springer, 2010. Cap. Spatially Distributed Networks, pp. 420-421. ISBN: 978-0-387-87707-5. DOI: [10.1007/978-0-387-87708-211](https://doi.org/10.1007/978-0-387-87708-211).

- 
- [13] G.B. Ermentrout y D.H. Terman. En: *Interdisciplinary Applied Mathematics Mathematical Foundations of Neuroscience*. Ed. por S.S. Antman et al. Vol. 35. New York: Springer, 2010, pp. 331-336. ISBN: 978-0-387-87707-5. DOI: [10.1007/978-0-387-87708-211](https://doi.org/10.1007/978-0-387-87708-211).
- [14] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010.
- [15] P Girardand, J M Hupé y J Bullier. «Feedforward and feedback connections between areas V1 and V2 of the monkey have similar rapid conduction velocities». En: *J Neurophysiol* (2001).
- [16] Moritz Helias et al. «Supercomputers ready for use as discovery machines for neuroscience». En: *Front Neuroinform* (2012).
- [17] P T Huerta y J R Lisman. «Bidirectional synaptic plasticity induced by a single burst during cholinergic theta oscillation in CA1 in vitro». En: *Neuron* (1995).
- [18] H Jasper y W Penfield. «Electrocorticograms in man: Effect of voluntary movement upon the electrical activity of the precentral gyrus». En: *Arch Psychiatr Nervenkr Z Gesamte Neurol Psychiatr* (1949).
- [19] James P. Keener. *Principles of Applied Mathematics transformation and Approximation*. CRC Press, 2018.
- [20] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley Sons, 1978.
- [21] E M Maynard, C T Nordhausen y R A Normann. «The Utah intracortical electrode array: a recording structure for potential brain-computer interfaces». En: *Electroencephalogr Clin Neurophysiol* (1997).
- [22] L Muller y A Destexhe. «Propagating waves in thalamus, cortex and the thalamocortical system: Experiments and models». En: *J Physiol* (2012).
- [23] L. Muller et al. «The stimulus-evoked population response in visual cortex of awake monkey is a propagating wave». En: *Nature Communications* (abril de 2014).
- [24] J Ni et al. «Gamma-rhythmic gain modulation». En: *Neuron* (2016).
- [25] Daniela Torres Ramírez. «Modelos matemáticos de actividad cerebral». Tesis de maestría. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2023.
- [26] A Reynaud, G S Masson y F Chavane. «Dynamics of local input normalization result from balanced short-and long-range intracortical interactions in area V1». En: *J Neurosci* (2012).
- [27] E Salinas y T J Sejnowski. «Correlated neuronal activity and the flow of neural information». En: *Nat Rev Neurosci* (2001).
- [28] D Shoham et al. «Imaging cortical dynamics at high spatial and temporal resolution with novel blue voltage-sensitive dyes». En: *Neuron* (1999).
- [29] V. S. Sohal et al. «Parvalbumin neurons and gamma rhythms enhance cortical circuit performance». En: *J Neurophysiol* (2009).

- [30] Walter A. Strauss. *Partial differential equations An introduction*. John Wiley Sons, 2008.
- [31] H A Swadlow, I N Beloozerova y M G Sirota. «Sharp, local synchrony among putative feed-forward inhibitory interneurons of rabbit somatosensory cortex». En: *J Neurophysiol* 79.1 (1998), pp. 567-582. DOI: [10.1152/jn.1998.79.1.567](https://doi.org/10.1152/jn.1998.79.1.567).
- [32] K. Takahashi et al. «Large-scale spatiotemporal spike patterning consistent with wave propagation in motor cortex». En: *Nature communications* 6 (mayo de 2015). DOI: [10.1038/ncomms8169](https://doi.org/10.1038/ncomms8169).
- [33] Hugh R. Wilson y Jack D. Cowan. «Excitatory and Inhibitory Interactions in Localized Populations of Model Neurons». En: *Biophysical Journal* 12.1 (1972), pp. 1-24. ISSN: 0006-3495. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0006-3495\(72\)86068-5](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(72)86068-5).