

# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN ACTUARÍA

Análisis y pronóstico del crecimiento económico mediante el Indicador  
Global de la Actividad Económica (IGAE).

Tesis presentada para obtener el título de

**Licenciado en Actuaría**

Presenta

Gisela Tlacuatl Sánchez

Director de tesis

Dr. Bulmaro Juárez Hernández

Puebla, Pue.

Abril 2016

## Dedicatoria

A mi papito y mami por ser mi ejemplo de superación y motivación,  
también a mi abuelita Regina porque su sonrisa es la mia.

## Agradecimientos

Agradezco a mis padres por el esfuerzo que han hecho para educar a sus cinco hijas con valores y responsabilidad, el apoyo y amor incondicional de mis cuatro hermanas, a Segali que nos ha dado un ejemplo ha seguir, Amada que no se rinde, Aris tan inteligente y amorosa y Aimel que me mantiene los pies en la tierra.

A mis profesores que fueron clave importante en mi formación, al Dr. Bulmaro Juárez Hernández que admiro por su constancia, esfuerzo, modestia y dedicación en su trabajo. El empeño y responsabilidad incondicional que me ofreció en este trabajo se lo agradezco infinitamente.

También a mis sinodales, al Dr. Israel Gerardo García Pérez por su perseverancia y trabajo, a la Dr. Hortesia Josefina Reyes Cervantes por motivarnos y enseñarnos que las mujeres no se rinden y a la MC. Brenda Zavala López por su apoyo incondicional y ser una gran maestra.

A todos mis profesores, al Dr. Raúl Esparza que siempre nos apoyó y además motiva a ir por lo grande.

A mi abuelita que es mi segunda madre, mis tíos, primos, mi prima hermana Abril, mi sobrino Richi que lo quiero como a mi hijo, sobrina Rebeca, también aquellos que no se encuentran en este mundo pero siempre los llevaré en mi corazón como mis abuelos David, Faustino, Amada, Francisco.

A todos mis amigos y compañeros, a Lili que me acompañó siempre, a Martell por contribuir a que fuera independiente, Gaby, Per, Dulce, Fanys, Jony, Mayi, Tere, Dan, mis amigos actuarios, físicos, matemáticos, mis amigas de la preparatoria y de toda la vida, gracias a todos por hacerme tan feliz y dichosa.

# Introducción

En el presente trabajo se tiene como objetivo principal, presentar la teoría y aplicación básica de series de tiempo, con esto se decide pronosticar el crecimiento de la economía mexicana mediante un indicador, para lograrlo se establecen los siguientes objetivos específicos: recopilar, analizar y explicar la teoría de series de tiempo, elegir al indicador de interés, identificar al mejor modelo para pronosticar los datos, utilizar otro método estadístico para elegir a la mejor herramienta para pronosticar los datos, realizar un código en el Software R para facilitar la obtención y evaluación de los resultados, además de emplear librerías dentro del Software hechas específicamente para el análisis de series de tiempo (`tseries`, `forecast`, `TSA`).

De ésta forma se analiza y pronostica el crecimiento de la economía mexicana, un tema de interés ya que un aumento en su economía habla de una posible mejora en los niveles de vida de la sociedad. Este análisis también permite conocer la situación económica y social en la que se encuentra una ciudad o país.

Ahora bien, el crecimiento económico se puede medir de diferentes formas, puesto que existen muchos indicadores los cuales miden tal crecimiento, la mejora de estos indicadores llevan, teóricamente, a un aumento en los estándares de vida de la población. Los estudios sobre crecimiento económico se concentran en factores como la población, la inversión en capital físico y el capital humano. Habitualmente éste crecimiento se mide a través de indicadores asociados a la productividad, es decir a la cantidad de bienes materiales

disponibles en una sociedad, ya que esto supone una cierta mejora del nivel de vida de las personas.

El pronóstico es muy importante para los economistas y los hacedores de política ya que, dadas las condiciones económicas históricas y actuales, les permiten conocer algunas condiciones económicas en el futuro. Por ejemplo, un cambio en la tasa de interés o un cambio en las expectativas sobre el nivel futuro de la tasa de interés, puede causar una cadena de acontecimientos que afectan a las tasas de interés de corto y largo plazo, el tipo de cambio, el precio de las acciones, etc. A su vez, los cambios en estas variables pueden influenciar las decisiones en gasto y consumo de los hogares y las empresas, lo que afecta el crecimiento de la demanda agregada y la economía, lo cual no es reflejado en tiempo real debido a que indicadores como el Producto Interno Bruto (PIB) es reportado de forma rezagada por el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI). Con ayuda de la información que nos proporciona el INEGI acerca del Indicador Global de la Economía Mexicana (IGAE), medido mensualmente, se realiza un pronóstico del crecimiento de la economía aplicando la teoría de series de tiempo.

El IGAE comúnmente se utiliza en México como una aproximación del PIB mensual. Es importante tomar en cuenta que la información básica que incorpora dicho indicador es muy preliminar y está sujeta a revisión por parte de las empresas y organismos públicos y privados. Además, no incluye a todas las actividades económicas como lo hace el PIB trimestral. Por ello, los resultados del IGAE pueden diferir de los del PIB trimestral. Por lo tanto, el IGAE debe considerarse como un indicador de la tendencia o dirección de la actividad económica del país en el corto plazo y no como un estimador de

la misma. Además, cabe mencionar que el IGAE es reportado con dos meses de rezago.

Es importante considerar que siempre que se hace un pronóstico existe algún grado de incertidumbre, es decir contiene un cierto nivel de error, por lo que es importante medir estos errores ya que nos indican si la metodología del pronóstico es adecuada.

Con el propósito de presentar un trabajo autocontenido, éste se desarrolla como se describe a continuación. En el capítulo primero se abordan los conceptos básicos de la macroeconomía y crecimiento económico.

En el capítulo segundo se realiza una presentación básica de la teoría de las series de tiempo, la cual abarca a las series de tiempo estacionales (*SARIMA*) y no estacionales (*ARIMA*) donde la diferencia radica en que el primer modelo tiene un fuerte componente que ocurre en un período determinado, porque existe una fuerte conexión con las actividades del calendario.

En el capítulo tercero se presenta el caso de estudio donde se tiene como objetivo pronosticar al IGAE mediante ésta teoría y considerando los resultados de análisis de los datos históricos del período 2008 al 2009, se decide emplear, adicionalmente, los modelos de intervención o transferencia ya que se cree que éste tipo de modelos podrían arrojar un mejor resultado, pues estos, se aplican siempre que hechos excepcionales, llamados intervenciones, afectan la variable que se desea pronosticar. Ejemplos de intervenciones son las huelgas, desastres naturales y cambios de políticas, en este caso se habla de una grave crisis financiera y económica, comenzando a manifestarse de manera extremadamente grave desde inicios de 2008, contagiándose primero al sistema financiero estadounidense, y después al internacional, teniendo co-

mo consecuencia una profunda crisis de liquidez, y causando, indirectamente, otros fenómenos económicos, en conjunto, una crisis económica a escala internacional. Es así como se considera a un modelo de intervención para modelar éste tipo de fenómenos. Finalmente se realiza la comparación de un modelo *SARIMA* y otro de intervención, propuestos de acuerdo a diferentes pruebas y análisis.

En el capítulo cuarto se realiza el análisis y conclusiones de los resultados obtenidos en el capítulo tercero, los cuales señalan los pasos seguidos para obtener los dos modelos propuestos, además de afirmar que el mejor modelo de entre un *SARIMA* y los modelos de intervención para pronosticar los datos es un  $SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 1)_{24}$  de acuerdo a la prueba Akaike, Ljung-Box, ajuste del modelo propuesto y análisis de residuales.

En el apartado de Apéndices se incorporan las soluciones de varianza no constante, invertibilidad, la evaluación y monitoreo del rendimiento de modelos de pronóstico como por ejemplo la prueba Ljung-Box, Criterio de Selección Akaike y el Test The Dickey-Fuller o de Raíz unitaria, la incorporación de un término constante, pruebas para los parámetros estimados, para aplicar el principio de parsimonia, los modelos de intervención y transferencia, la función de transferencia o modelo ruido y los tipos de outliers en las predicciones de los modelos *ARIMA*. También se añade el código en el Software R que se utilizó para el pronóstico, mencionando por pasos lo que se realiza, de tal forma que pueda ser reproducido con los datos del IGAE para el interesado.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XI</b>
<b>1. Conceptos básicos de la Macroeconomía y el Crecimiento Económico</b>	<b>1</b>
1.1. Macroeconomía . . . . .	1
1.2. Conceptos básicos en Macroeconomía . . . . .	2
1.2.1. Agregados Económicos . . . . .	2
1.2.2. Crecimiento económico . . . . .	4
1.2.3. Conceptos básicos del Crecimiento Económico . . . . .	4
<b>2. Conceptos básicos de series de tiempo</b>	<b>11</b>
2.1. Proceso estocástico . . . . .	11
2.2. Serie de tiempo . . . . .	12
2.3. Proceso Estacionario y la Autocorrelación . . . . .	13

2.3.1.	Función de autocovarianza, autocorrelación y autocorrelación parcial (FACV,FAC,FACP) . . . . .	14
2.3.2.	Serie de tiempo estrictamente y débilmente estacionaria	17
2.4.	Series de tiempo no estacionaria . . . . .	18
2.5.	Ejemplos de Series de tiempo . . . . .	19
2.5.1.	Ruido Blanco . . . . .	19
2.5.2.	Procesos de media móvil de primer orden (MA (1)) . .	20
2.5.3.	Procesos Autorregresivos de Primer Orden AR(1) . . .	21
2.6.	Función de autocorrelación muestral (FAM) . . . . .	24
2.7.	Función de Autocorrelación Parcial Muestral(FAMP) . . . . .	25
2.8.	Modelo Autorregresivo de Promedios	
	Móviles (ARMA) . . . . .	27
2.8.1.	Introducción . . . . .	27
2.8.2.	Modelo de Promedios Móviles (MA) . . . . .	28
2.8.3.	Modelo de Promedios Móviles de primer orden (MA(1))	28
2.8.4.	Modelo de Promedios Móviles de segundo orden MA(2)	29
2.8.5.	Modelo de Promedios Móviles de orden $q$ (MA( $q$ )) . . .	30
2.8.6.	Modelo Autorregresivo o Proceso Autorregresivo(AR) .	31
2.8.7.	Modelo Autorregresivo de Segundo Orden (AR(2)) . .	32
2.8.8.	Modelo Autorregresivo de orden $p$ . . . . .	34
2.8.9.	Modelo Autorregresivo de Promedios Móviles (ARMA( $p,q$ )) . . . . .	35
2.8.10.	Modelo Autorregresivo de Promedios Móviles Integrado <i>ARIMA</i> . . . . .	41
2.8.11.	Test de Dickey-Fuller o de Raíz unitaria . . . . .	43

2.8.12. Modelo $ARIMA(0, 1, 1)$ o $IMA(1, 1)$ . . . . .	44
2.8.13. Varianza y Autocovarianza del modelo $ARIMA$ . . . . .	44
2.8.14. Pasos para identificar a un modelo . . . . .	46
2.9. Modelo estacional $ARIMA$ o $SARIMA$ . . . . .	47
2.9.1. Modelo ARMA multiplicativo estacional . . . . .	50
2.9.2. Modelo $ARIMA$ estacional no estacionario . . . . .	53
2.9.3. Criterios para una identificación tentativa . . . . .	55
2.9.4. Estimación de parámetros . . . . .	56
2.9.5. Método de Máxima Verosimilitud . . . . .	56
2.9.6. Estimación de Máxima Verosimilitud Incondicional . . . . .	58
2.9.7. Función exacta de Verosimilitud . . . . .	60
2.9.8. Estimación por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) . . . . .	63
2.9.9. Método de momentos . . . . .	65
2.9.10. Diagnostico del modelo seleccionado . . . . .	69
2.9.11. Ejemplo . . . . .	70
<b>3. Caso de estudio</b>	<b>79</b>
3.1. Análisis de los datos con el modelo <i>SARIMA</i> . . . . .	83
3.2. Análisis del modelo sin intervención . . . . .	84
3.3. Modelos de intervención y transferencia . . . . .	99
<b>4. Análisis y Conclusiones</b>	<b>113</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>117</b>
<b>A. Solución a la Varianza no constante</b>	<b>119</b>

VIII

<b>B. Invertibilidad</b>	<b>121</b>
<b>C. Evaluación y monitoreo del rendimiento de modelos de pronóstico</b>	<b>123</b>
<b>D. Incorporación de un término constante</b>	<b>127</b>
<b>E. Prueba para los parámetros estimados, para aplicar el principio de parsimonia.</b>	<b>129</b>
<b>F. Modelos de intervención y transferencia</b>	<b>131</b>
<b>G. Código en Software R</b>	<b>139</b>

# Índice de figuras

2.1. FAC de Ruido Blanco. . . . .	20
2.2. Función de Autocorrelación para diferentes modelos AR(1). . .	22
2.3. Función de Autocorrelación para diferentes modelos AR(1). . .	22
2.4. FAC para diferentes procesos (Ver [9]). . . . .	23
2.5. FACP para diferentes procesos (Ver [9]). . . . .	24
2.6. Correlograma y correlograma parcial para diferentes procesos.	26
2.7. Realizaciones del proceso MA(1) con $\theta = 0.7$ y con $\theta = -0.9$ . .	29
2.8. Realizaciones del proceso AR(1) con $\psi = 0.7$ y con $\psi = -0.9$ .	32
2.9. Función de Autocorrelación para varios modelos ARMA(1,1). .	37
2.10. FAC y FACP para un modelo $ARMA(0, 1)(1, 0)_{12}$ con $\Psi = 0.7$ y $\theta = -0.4$ . . . . .	53
2.11. Resumen de la metodología Box-Jenkins [10]. . . . .	68
2.12. Serie de tiempo . . . . .	71
2.13. Serie de tiempo con una diferencia . . . . .	72
2.14. FACP de la serie con una diferencia. . . . .	73
2.15. Histograma de los residuales . . . . .	75
2.16. FAC y FACP de los residuales . . . . .	76
2.17. FAC y FACP de los residuales . . . . .	76

2.18. Pronóstico . . . . .	77
3.1. Actividades económicas dominantes en México . . . . .	80
3.2. Serie de tiempo IGAE . . . . .	84
3.3. Representación de las series generadas al transformar la serie original usando las pre-diferencias raíz cuadrada, raíz cuarta y logarítmica de la serie de datos del IGAE. . . . .	85
3.4. Diferenciación de la serie $Y_t$ con su FAM y FAMP. . . . .	86
3.5. Diagramas de cajas y bigotes . . . . .	87
3.6. Pronóstico de Junio a Noviembre del 2015. . . . .	96
3.7. Serie original y propuesta . . . . .	96
3.8. Pronóstico de Diciembre 2015 a Mayo del 2016. . . . .	97
3.9. Modelo original y propuesto . . . . .	98
3.10. Histograma, FAM, FAMP, y gráfica QQ. . . . .	99
3.11. Suceso extraordinario ocurrido a partir del 2008. . . . .	100
3.12. Serie antes de la intervención . . . . .	101
3.13. FAM y FAMP con $d = 1$ . . . . .	102
3.14. Pronóstico de Julio a Diciembre del 2008. . . . .	105
3.15. Serie propuesta . . . . .	106
3.16. Histograma y FAM los residuales. . . . .	107
3.17. Serie original y ajustada. . . . .	109
3.18. Histograma, FAM, FAMP, y gráfica QQ. . . . .	110

# Índice de tablas

2.1. Una clasificación de los procesos estocásticos (Fuente propia).	12
2.2. Descripción de la FAC Y FACP para diferentes modelos [11].	40
2.3. Comportamiento del FAC y FACP [13].	51
2.4. Serie de tiempo.	70
2.5. Prueba Dickey-Fuller.	71
2.6. Prueba Dickey-Fuller.	72
2.7. CIA para diferentes modelos.	74
2.8. Estimación de parámetros.	74
2.9. Prueba Ljung-Box.	75
2.10. Estimación de parámetros	77
3.1. Clasificación de las actividades económicas.	81
3.2. Fuentes de consulta [14].	82
3.3. Análisis de $Y_t$ a nivel estacional $s = 12$ .	89
3.4. Criterio de Akaike y Prueba Ljung-Box.	90
3.5. Análisis de $Y_t$ a nivel estacional $s = 24$ .	91
3.6. Criterio de Akaike a nivel estacional $s = 24$ .	92
3.7. Parámetros del modelo $SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 1)_{24}$ con $s = 24$ .	94

3.8. Prueba Ljung-Box del modelo $SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 1)_{24}$ . . .	95
3.9. Pronóstico de Junio a Noviembre del 2015. . . . .	95
3.10. Pronóstico de Diciembre 2015 a Mayo del 2016. . . . .	97
3.11. Estimación de parámetros para los datos IGAE antes de la intervención. . . . .	104
3.12. Pronóstico de Julio a Diciembre del 2008. . . . .	105
3.13. Prueba Ljung-Box para el modelo $SARIMA(2, 1, 0)(2, 1, 0)_{24}$ . . .	106
3.14. Estimación de parámetros para los datos IGAE con intervención. . .	108
3.15. Criterio de Akaike y prueba Ljung-Box con un modelo de transferencia. . . . .	109
3.16. Comparación de modelos. . . . .	111

Un pronóstico y análisis del crecimiento  
económico mediante el Indicador Global de la  
Actividad Económica (IGAE).

Gisela Tlacuatl Sánchez

Marzo 2016

# Capítulo 1

## Conceptos básicos de la Macroeconomía y el Crecimiento Económico

Al hablar del crecimiento económico, se habla de una de las ramas de la economía<sup>1</sup> que se encarga de estudiar éste tema y que a continuación se aborda.

### 1.1. Macroeconomía

¿Qué es la Macroeconomía?

La palabra macro proviene del griego "makros" que significa grande, Macroeconomía es el estudio grande de la economía. Se encarga de estudiar el comportamiento, la estructura y los indicadores de la economía.

---

<sup>1</sup>La economía es "el estudio de cómo los individuos transforman los recursos naturales en productos y servicios finales que pueden usar las personas"

¿Qué importancia tiene?

La macroeconomía ayuda a explicar los acontecimientos económicos así como también elaborar medidas cuyo objetivo es mejorar los resultados económicos.

## 1.2. Conceptos básicos en Macroeconomía

### 1.2.1. Agregados Económicos

¿Qué son los agregados económicos?

Son sumas de operaciones específicas, que arrojan un resultado y muestran el nivel económico, es decir son indicadores que nos reflejan diferentes aspectos de una economía.

¿Cuáles son los agregados económicos más importantes?

Dentro de los agregados más importantes se encuentra el Producto Interno Bruto (PIB), la tasa de inflación y la tasa de inactividad, a continuación se da una explicación de ellos.

El **Producto Interno Bruto (PIB)** es un indicador que muestra el valor total de la producción de bienes y servicios finales durante cierto período de tiempo (un trimestre o año)(Ver [1]).

Existen diferentes medidas de precios con las que se calcula el PIB (Ver [1]), es así como surgen el **PIB Nominal** que es el valor a precios corriente o de mercado<sup>2</sup>, de la producción de bienes y servicios finales producidos en un país durante un período determinado de tiempo y el **PIB Real** que son los bienes y servicios al precio de un determinado año que se considera como

---

<sup>2</sup>Precio corriente o de mercado se refiere aquel precio que se realiza en el periodo de cálculo.

base<sup>3</sup>. Compara todas las cantidades con el precio de un año base, por lo tanto su crecimiento permite apreciar si la economía en conjunto ha crecido o no. Es decir, para su cálculo los precios se mantienen fijos.

Otros agregados parecidos al PIB es el **Producto Nacional Bruto (PNB)** y **per cápita**, la primera habla del ingreso de todos los residentes y la segunda del ingreso por persona de los residentes. La primera es el valor total del ingreso que perciben los residentes nacionales en un período determinado de tiempo mientras que el segundo hace referencia a cada persona. A diferencia del PNB que considera el ingreso de todos los residentes mexicanos, éste se refiere al ingreso por cada una de las personas, por lo regular se emplea para medir el desarrollo económico de un país.

Un **flujo** es una medida económica, como una tasa, se mide por unidad de tiempo. Por ejemplo la producción de autos por mes, la demanda de un bien por año, mientras que un **stock** es una medida en un momento del tiempo, por ejemplo las ventas de refresco en el 2015.

La **inflación** es el proceso económico provocado por el desequilibrio existente entre la producción y la demanda, lo que causa una subida de los precios de productos y servicios, y una pérdida del valor del dinero para poder adquirirlos o hacer uso de ellos. Por el contrario una deflación implica la disminución de precios de los bienes y servicios (Ver [2]).

El **desempleo** habla de las personas de una edad específica, que se encuentren sin trabajo, disponible para trabajar y están buscando trabajo durante

---

<sup>3</sup>Un año base es cuando se calcula un índice, es el año para el cual se asigna un Valor específico a dicho índice, por lo general 1 ó 100. En el cálculo de un Índice de ponderación fija, es el año elegido para las ponderaciones.

un período de referencia y la **tasa de desempleo** es el número de personas desocupadas como proporción de la fuerza laboral, la cuál se refiere a las personas con trabajo y las que están en busca de éste.

### 1.2.2. Crecimiento económico

¿Qué es el Crecimiento Económico?

El crecimiento económico de un país se refiere al aumento de bienes y servicios finales producidos por una economía, en un determinado período de tiempo.

¿Por qué es importante?

El crecimiento económico de un país habla del bienestar [3] de un país, una forma común de medir esto es a través del PIB ya que está relacionado con el PIB per cápita de los individuos de un país. Puesto que uno de los factores asociados con el bienestar socio-económico de un país es la relativa abundancia de bienes económicos, materiales y de otro tipo disponibles para los ciudadanos de un país, el crecimiento económico ha sido usado como una medida de la mejora de las condiciones socio-económicas de un país, sin embargo existen muchos otros factores asociados con el bienestar de la población, siendo el PIB per cápita sólo uno de ellos.

### 1.2.3. Conceptos básicos del Crecimiento Económico

#### **Producción Agregada**

Es la suma de toda la producción de un país determinado.

## **Indicadores para medir el crecimiento económico**

### **PIB Real**

La medida de la producción de un país es el PIB Real, debido a que se establecen precios fijos que se pueden comparar con otros años. Sin embargo existen otro tipo de indicadores lo cuales nos podrían dar información acerca del crecimiento.

### **PNB real**

Los datos del PNB real también se utilizan para medir el crecimiento y comparar los resultados económicos. Cuando se usa éste indicador es deseable que la cobertura de la contabilidad nacional sea lo más amplia posible.

### **Indicador Global de la Actividad Económica (IGAE)**

Otro indicador para medir el crecimiento económico es el IGAE.

¿Qué es el IGAE?

Es el Indicador Global de la Actividad Económica, mide los diferentes sectores de la actividad económica.

¿Qué ventajas tiene sobre el PIB?

La principal es el tiempo de su emisión, mensualmente, ya que proporciona valiosa información a corto plazo.

¿Qué datos componen el IGAE?

Para la elaboración de este indicador se dispone de datos estadísticos provenientes de las Actividades Primarias, Actividades Secundarias o Industriales (Minería, Electricidad, Agua y Suministro de gas por ductos al consumidor

final, Construcción e Industrias manufactureras), Actividades Terciarias o de Servicios (Comercio; Transportes, Correos y Almacenamiento; Información en medios masivos; Servicios financieros y de seguros; Servicios inmobiliarios y de alquiler de bienes muebles e intangibles; Servicios profesionales, científicos y técnicos; Servicios de apoyo a los negocios; Servicios educativos; Servicios de salud; Servicios de esparcimiento, Deportivos, y otros servicios recreativos; Servicios de alojamiento temporal y de preparación de alimentos y bebidas; Otros servicios excepto actividades del Gobierno), y los Servicios de intermediación financiera medidos indirectamente.

¿Cómo se calcula el IGAE?

Para el cálculo del indicador se utiliza el esquema conceptual y metodológico de las Cuentas de bienes y servicios del SCNM (Sistemas de Cuentas Nacionales de México), mismo que sigue el cálculo trimestral del PIB y mensual del indicador de la actividad industrial; así como la clasificación por actividades económicas y las fuentes de información que cuentan con una gran oportunidad mensual.

Su cobertura geográfica es nacional e incorpora a las Actividades Primarias, Secundarias y Terciarias alcanzando el 93.9% del valor agregado bruto a precios básicos del año 2008, año base de todos los productos del SCNM. El cálculo del índice de volumen físico de las actividades económicas, según el origen de las mismas, consiste en elaborar índices mensuales de volumen físico para cada una de las clases seleccionados por su representatividad y para los que se cuenta con información mensual oportuna.

Con los índices mensuales obtenidos por clase de actividad económica se extrapolan los respectivos valores agregados brutos registrados en el año 2008.

Para el calculo se utiliza la fórmula de Laspeyres, de agregación ponderada, con base en los precios del año 2008, cuya expresión matemática general es la siguiente

$$Q_{0,n} = \frac{\sum p_0 q_n}{\sum p_0 q_0} * 100 = \frac{\sum p_0 q_0 \left(\frac{q_n}{q_0}\right)}{\sum p_0 q_0} * 100 \quad (1.2.1)$$

Donde, para una clase dada;

$Q_{0,n}$  = Índice de volumen físico de la producción del período n con relación al período 0.

0 = Año base.

n = Período de referencia.

$q_n$  = Cantidad de un bien, producida durante el periodo n.

$q_0$  = Cantidad de un bien, producida durante el período base.

$p_0$  = Precio medio de un bien correspondiente al período base.

(1.2.2)

Ésto permite totalizar cada período observado, el valor de la producción de cada clase en términos reales de 2008, y disponer de un índice de volumen físico directo y ponderado para cada clase.

La medición mensual real de cada clase queda resuelta aplicando la mecánica expuesta a la producción detallada por productos o líneas de productos, ya sea que se trate de producción típica o incluya producción secundaria.

Además del índice del total y sus componentes agropecuario, industrial y servicios, se incluyen 16 actividades, los cuatro índices agregados 4 sectores en las actividades industriales y 8 grupos de sectores de servicios. Bajo estas características, los resultados del IGAE mejoran su correlación con los del PIB Trimestral, por lo cual se constituye en un excelente indicador oportuno

del comportamiento mensual del Producto [15].

¿Dónde se encuentra disponible?

Las cifras mensuales del IGAE están disponibles en el portal del INEGI, en el apartado del banco de información económica (BIE), desde el mes de enero de 1993 y se expresan en índices de volumen físico con base fija en el año 2008.

La variable que comúnmente se utiliza en México como una aproximación del PIB mensual es el IGAE. Es importante tomar en cuenta que la información básica que incorpora dicho indicador es muy preliminar y está sujeta a revisión por parte de las empresas y organismos públicos y privados. Además, no incluye a todas las actividades económicas como lo hace el PIB trimestral. Por ello, los resultados del IGAE pueden diferir de los del PIB trimestral. Por lo tanto, el IGAE debe considerarse como un indicador de la tendencia o dirección de la actividad económica del país en el corto plazo y no como un estimador de la misma. Cabe destacar que aunque el IGAE es un buen indicador de la tendencia del PIB, siempre es comparado con éste debido a que los usuarios generalmente tienen en mente el rango de variación que se ha dado como proyección para el crecimiento del PIB.

### **Pronóstico del IGAE**

En éste trabajo se toman los datos del IGAE para hacer un análisis estadístico con el propósito de realizar un pronóstico del IGAE, es decir que se tendrá conocimiento anticipado de tal indicador en períodos en los que no se tienen mediciones disponibles, lo que significa que se predicen los valores históricos al futuro. La metodología que se seguirá es la de Box-Jenkins,

la cual consiste en el trabajo con series de tiempo, en éste caso la serie de tiempo son los datos del IGAE. El IGAE por ser un indicador de la actividad económica forma parte del análisis macroeconómico. Esto permite a los economistas formular políticas para analizar entre otras cosas, el impacto de los diferentes impuestos y los planes de gasto, el impacto del cambio en el precio del petróleo y otras perturbaciones de precios, el impacto de la política monetaria sobre la economía en su conjunto y sobre los componentes específicos de la demanda final, los ingresos, las industrias, etc. Conocer las condiciones económicas mediante el IGAE actuales es información útil para los economistas y los hacedores de política. Por ejemplo, un cambio en el IGAE puede causar una cadena de acontecimientos que afectan a las tasas de interés de corto y largo plazo, el tipo de cambio, el precio de las acciones, etc. A su vez, los cambios en estas variables pueden influenciar las decisiones en gasto y consumo de los hogares y las empresas, lo que afecta el crecimiento de la demanda agregada y la economía.



# Capítulo 2

## Conceptos básicos de series de tiempo

### 2.1. Proceso estocástico

Una serie de tiempo se puede describir como un caso particular de un proceso estocástico, es por eso que es importante definirlo. Los procesos estocásticos se encargan de estudiar fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo, es decir que van modificándose y cambiando conforme pasa el tiempo [6].

**Definición 2.1.1** (Proceso estocástico). *Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias  $X_t, t \in T$  definida sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y asociadas a un conjunto de índices  $T \in \mathbb{R}$  de forma tal que a cada elemento del conjunto le corresponda una y sólo una variable aleatoria.*

El conjunto  $T$  puede ser contable (finito o numerable) o no-contable. En

el primer caso se le denomina discreto y el otro caso continuo. De acuerdo a esto, se le nombrará proceso estocástico continuo o discreto. Notar que la variable aleatoria independientemente  $X$  puede ser continua o discreta en cualquiera de los casos. En la Tabla 2.1 se clasifican diferentes estados de acuerdo a la naturaleza de las variable.

Tabla 2.1: Una clasificación de los procesos estocásticos (Fuente propia).

$X \backslash T$	Discreta	Continua
Discreta	Cadenas de Markov, Procesos de ramificación	Serie de tiempo
Continua	Procesos de Poisson, Teoría de colas, Procesos de nacimiento y muerte	Procesos Brownianos

## 2.2. Serie de tiempo

**Definición 2.2.1** (Serie de tiempo). *Una serie de tiempo es una sucesión de observaciones  $x_t$ , generada por un proceso estocástico, cada observación está asociadas a un tiempo en específico  $T$ .*

**Definición 2.2.2.** *Las funciones  $X_t(w)$ ,  $w \in \Omega$  en  $T$  son conocidas como las realizaciones de un proceso  $X_t, t \in T$ .*

Las series de tiempo se encuentran en bases de datos que por lo regular consisten en observaciones anuales, trimestrales o mensuales, aunque se puede aplicar a cualquier otro período. Los datos de las series de tiempo se analizan con el propósito de encontrar un patrón y así aprovechar para hacer pronóstico. A continuación se mencionan las partes de una serie de tiempo:

1. **Tendencia** son los ascensos o descensos que presenta la serie, lo que podría hablar de un crecimiento de la variable que se observa.
2. **Ciclo** se puede observar como los movimientos por arriba o abajo de la tendencia y tiene una duración de entre 2 a 10 años.
3. **Variaciones Estacionales** son secuencias periódicas, es decir tendencias que se repiten por algún factor que ocurre frecuentemente.
4. **Fluctuaciones irregulares** son movimientos que no se esperan con respecto a la tendencia que seguía la serie de tiempo.

## 2.3. Proceso Estacionario y la Autocorrelación

Las series de tiempo pueden presentar determinado comportamiento que se presenta regularmente conforme pasa el tiempo.

La estacionariedad implica tener un tipo de equilibrio o estabilidad estadística en los datos. Por lo tanto, las serie de tiempo estacionaria tienen ciertas características que en éste capítulo se mencionan.

Una serie de tiempo presenta una **media** definida en la forma usual.

**Definición 2.3.1** (Media). *La media de una serie de tiempo estacionaria es*

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \text{ si } \int |x| f(x)dx < \infty \quad (2.3.1)$$

Además de una **varianza** definida como

**Definición 2.3.2** (Varianza). *La varianza definida como*

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x)dx \text{ si } \int |(x - \mu_x)| f(x)dx < \infty$$

La serie de tiempo se puede ver como una muestra aleatoria del proceso estocástico, es así como los parámetros anteriores se estiman con los datos de la serie de tiempo, de ésta forma se obtiene la media muestral y la varianza muestral. La media y la varianza son parámetros estimados en las series de tiempo. Si las observaciones en las series de tiempo son  $x_1, x_2, \dots, x_T$ , donde  $T$  es un entero entonces la **media muestral** es

$$\bar{x} = \hat{\mu}_x = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i \text{ donde } 1 \leq i \leq T$$

y de la misma forma la **varianza muestral** es

$$s^2 = \hat{\sigma}_x = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (x_i - \bar{x})^2.$$

En la siguiente sección se abordan la función de autocovarianza, la función de autocorrelación, la función de autocorrelación parcial y una serie estacionaria.

### 2.3.1. Función de autocovarianza, autocorrelación y autocorrelación parcial (FACV, FAC, FACP)

Como se sabe el comportamiento de una variable aleatoria  $X$  puede caracterizarse a través de su función de densidad  $f(x)$ . Similarmente, dos variables aleatorias están descritas por su función de densidad conjunta. En general en las series de tiempo existe cierta correlación entre las observaciones. La covarianza entre  $X_t$  y otra observación por ejemplo  $X_{t+k}$ , es llamada **autocovarianza** de intervalo  $k$  (es llamado lapso), la cual nos indica el grado de variación de dos observaciones de la serie de tiempo, aportando la tendencia en la relación lineal entre las variables, es decir que si una variable toma valores grandes y la otra tiene igualmente valores grandes, entonces,

la autocovarianza será positiva mientras que si pasa lo contrario será negativa. Se tiene que si el proceso es estacionario, la autocovarianza entre dos observaciones,  $X_t$  y  $X_{t+k}$  es

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t+k}) &= Cov(X_{t-t}, X_{t+k-t}) \\ &= Cov(X_0, X_k) \\ &= Cov(X_0, X_{|k|}) \\ &= \gamma_k. \end{aligned}$$

Es así como se puede decir que la autocovarianza sólo dependerá de su lapso  $k$ .

**Definición 2.3.3** (Autocovarianza). *La autocovarianza entre  $X_t$  y  $X_{t+k}$  con lapso  $k$  está definida por*

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)].$$

La colección de los valores de  $\gamma_k, k = 1, 2, \dots$  es llamado la **función de autocovarianza**. De esta forma obtenemos el coeficiente de autocorrelación.

**Definición 2.3.4** (Coeficiente de Autocorrelación). *El coeficiente de autocorrelación del lapso  $k$  es*

$$\rho_k = \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(X_t - \mu)^2]E[(X_{t+k} - \mu)^2]}} = \frac{Cov(X_t, X_{t+k})}{Var(X_t)} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}.$$

Notar que  $Var(X_t) = Var(X_{t+k}) = \gamma_0$ .

La colección de los valores de  $\rho_k, k = 1, 2, \dots$  es llamado la **función de autocorrelación (FAC)**. Con lo anterior, las funciones de autocovarianza  $\gamma_k$  y autocorrelación tiene las siguientes propiedades (Ver [8] y [9]):

1.  $\gamma_0 = \text{Var}(X_t); \rho_0 = 1$
2.  $|\gamma_k| \leq \gamma_0; \rho_k \leq 1$
3.  $\gamma_k = \gamma_{-k}$  y  $\rho_k = \rho_{-k}$  para toda  $k$ , lo que quiere decir que son funciones simétricas a partir del lapso  $k = 0$ . La diferencia entre  $X_t$  y  $X_{t+k}$  así como  $X_t$  y  $X_{t-k}$  es la misma.
4. Las funciones  $\gamma_k$  y la función de autocorrelación  $\rho_k$  son positivas semi-definidas en el sentido que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \gamma_{|t_i - t_j|} \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \rho_{|t_i - t_j|} \geq 0.$$

para cualquier conjunto de puntos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  y cualquier número  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , y  $\alpha_n$ .

**Definición 2.3.5** (Función de autocorrelación parcial). *La autocorrelación parcial de un proceso estacionario denotado por  $\phi_{k,k}$ , para  $k = 1, 2, \dots$ , es la correlación entre  $X_t$  y  $X_{t+k}$  después de su dependencia lineal mutua en las que intervienen las variables  $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+k-1}$  que se han eliminado.*

$$\phi_{1,1} = \text{Corr}(X_{t+1}, X_t) = \rho_1$$

$$\phi_{k,k} = \text{Corr}(X_t, X_{t+k} | X_{t+1}, \dots, X_{t+k-1})$$

las variables  $X_t$  y  $X_{t+k}$  no están correlacionadas con  $X_{t+1}, \dots, X_{t+k-1}$ , esto es  $\phi_{k,k}$  es la correlación de  $X_t$  y  $X_{t+k}$  con una dependencia lineal de  $X_{t+1}, \dots, X_{t+k-1}$  sobre cada una, eliminada.

### 2.3.2. Serie de tiempo estrictamente y débilmente estacionaria

**Definición 2.3.6** (Serie de tiempo estrictamente estacionaria). *Una serie de tiempo  $X_t$ , dice ser estrictamente estacionaria si tiene*

$$\{X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+k}\}$$

y

$$\{X_{t+h}, X_{t+h+1}, \dots, X_{t+h+k}\}.$$

*tienen la misma distribución para cualquier  $h$  en los enteros. Esto es*

$$P\{X_t \leq c_1, \dots, X_{t+k} \leq c_k\} = P\{X_{t+h} \leq c_1, \dots, X_{t+k+h} \leq c_k\}.$$

*Para toda  $k = 1, 2, \dots$ , para todo  $c_1, c_2, \dots, c_k$  y todos los tiempos desplazados  $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$*

Esto significa que la distribución de probabilidad conjunta de las observaciones  $X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+k}$  es exactamente la misma y sólo depende de su lapso  $k$  [7].

**Definición 2.3.7** (Serie de tiempo débilmente estacionaria). *Una serie de tiempo débilmente estacionaria,  $X_t$ , es un proceso de varianza finita constante tal que*

- i La función del valor de la media,  $\mu_X$ , definida en (1.31) es constante y no depende del tiempo  $t$ , y*
- ii La función de autocovarianza,  $\gamma(k)$ , sólo depende de su lapso  $k$ .*

Las series estacionarias son un tipo de proceso, en las cuales su distribución conjunta de probabilidad de cualesquiera dos observaciones  $X_{t_1}$  y  $X_{t_1+k}$  es la misma para cualquiera de los dos períodos  $t$  y  $t+k$  que se encuentran separados por el lapso  $k$ .

**Nota 2.3.1.** *En éste trabajo se usa el término **estacionario**, refiriendo a la definición de una serie de tiempo débilmente estacionaria.*

## 2.4. Series de tiempo no estacionaria

Una serie no estacionaria ocurre cuando se presenta alguna de las siguientes alternativas:

1. La media  $\mu_t$  no es constante
2. La varianza  $\sigma_t^2$  no es constante
3. Ocurre las dos anteriores al mismo tiempo.

En éste tipo de series sólo se podrá estudiar su comportamiento durante el período en consideración. Por lo que no se podrá hacer pronóstico para otros períodos. Comúnmente éste tipo de series se encuentran en temas de economía y áreas de negocios como las acciones o las tasas de cambio[1].

A continuación se mencionan algunos ejemplos de procesos con su **función de autocovarianza** y **función de autocorrelación**.

## 2.5. Ejemplos de Series de tiempo

### 2.5.1. Ruido Blanco

Se dice que un ruido blanco es un proceso de  $X_t$  de variables aleatorias independientes, con las siguientes características:

- $E(X_t) = 0$ .
- $Var(X_t) = \sigma^2$ .
- $Cov(X_t, X_{t+k}) = 0$  donde  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Al igual que  $X_t$  es un proceso Normal, denotado por  $X_t \sim WN(0, \sigma^2)$  y con función de autocovarianza

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } k = 0; \\ 0, & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

De la autocovarianza (2.5.1) se tiene la función de autocorrelación

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ 0, & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

En la Figura 2.1 se muestra gráficamente la función de autocorrelación (FAC), descrita en la expresión 2.5.1, se observa una sola espiga que sobresale en el lapso cero.

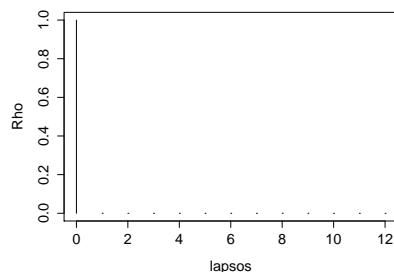


Figura 2.1: FAC de Ruido Blanco.

### 2.5.2. Procesos de media móvil de primer orden (MA (1))

Considere la serie definida por la ecuación

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}, \text{ para } t = 0, \pm 1, \dots, \quad (2.5.1)$$

donde  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$  y  $\theta \in \mathbb{R}$  es constante. Se observa que  $E[X_t] = 0$ ,  $E[X_t^2] = \sigma^2(1 + \theta^2) < \infty$ , y la autocovarianza de la serie  $X_t$

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta^2), & \text{si } k = 0; \\ \sigma^2\theta, & \text{si } k = \pm 1; \\ 0, & \text{si } |k| > 1 \end{cases}$$

y la serie MA(1) es estacionaria. La función de autocorrelación es

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ \frac{\theta}{(1+\theta^2)}, & \text{si } k = \pm 1; \\ 0, & \text{si } |k| > 1. \end{cases}$$

Notar que  $|\rho_1| \leq 1/2$  para todos los valores de  $\theta$ . También que,  $X_t$  está correlacionada con  $X_{t-1}$  pero no con  $X_{t-2}, X_{t-3}, \dots$

Cabe mencionar que para diferentes valores de  $\theta$  positivos el valor de  $\rho_1$  va decreciendo más, es decir cada vez es más negativo, en  $-1$  alcanzan su mínimo y como es una función impar, también alcanza su máximo en 1.

De acuerdo a la **función de autocorrelación parcial (FACP)** se tiene que para un modelo MA(1) en general es

$$\phi_{k,k} = \frac{-(\theta)^k(1 - \theta^2)}{1 - \theta^{2(k+1)}}, \text{ para } k \geq 1.$$

Gráficamente se tiene que para  $\theta$  positivo, toma valores negativos, siendo el máximo valor negativo en 1 y de esta forma va acercándose a 0, proyectando un aumento constante, hasta que alcanza el 0 y se mantiene, mientras que para valores  $\theta$  negativos, tiene un comportamiento decreciente alternado.

### 2.5.3. Procesos Autoregresivos de Primer Orden AR(1)

$X_t$  es una serie estacionaria donde satisface la siguiente ecuación

$$X_t = \psi X_{t-1} + Z_t,$$

donde  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ ,  $|\psi| < 1$ , y  $Z_t$  no tiene correlación con  $X_s$  para cada  $s < t$ . La función de autocovarianza de la serie  $X_t$  es

$$\begin{aligned} \gamma_k &= Cov(X_t, X_{t-k}) \\ &= Cov(\psi X_{t-1}, X_{t-k}) + Cov(Z_t, X_{t-k}) \\ &= \psi \gamma_{k-1} + 0 = \dots = \psi^k \gamma_0, \end{aligned}$$

donde  $\gamma_0 = \sigma^2/(1 - \psi^2)$ . Así la función de autocorrelación es la siguiente, observando que  $\gamma_k = \gamma_{-k}$  se tiene

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \psi^{|k|}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

En la Figura 2.2 y 2.3 se presenta la autocorrelación con diferentes lapsos, mientras  $|\psi| < 1$ , se nota como decrece conforme los lapsos van en aumento. Si  $\psi$  es positiva la correlación lo es también mientras que si es negativa; la correlación es alternada (positiva y luego negativa).

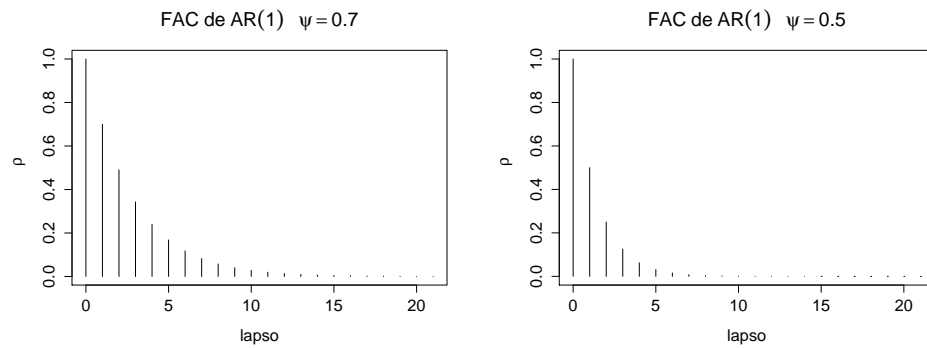


Figura 2.2: Función de Autocorrelación para diferentes modelos AR(1).

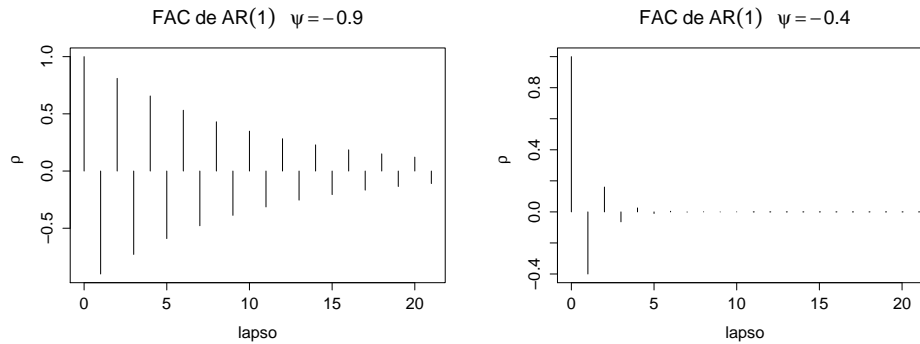


Figura 2.3: Función de Autocorrelación para diferentes modelos AR(1).

La función de autocorrelación parcial, donde por definición se tiene  $\phi_{1,1} = \rho_1 = \psi$ , de esto se obtiene

$$\phi_{2,2} = 0.$$

Además para  $k > 1$

$$\phi_{k,k} = 0.$$

Como resumen se tienen las Figuras 2.4 y 2.5, donde se muestra la FAC y FACP de los procesos MA y AR, con un parámetro positivo igual a 0.8 y otro negativo igual a -0.9 para cada uno de los modelos. Notar que la FACP del modelo MA(1) se comporta como la FAC de modelo AR(1), al igual que la FACP del modelo AR(1) se comporta como la FAC del modelo MA(1).

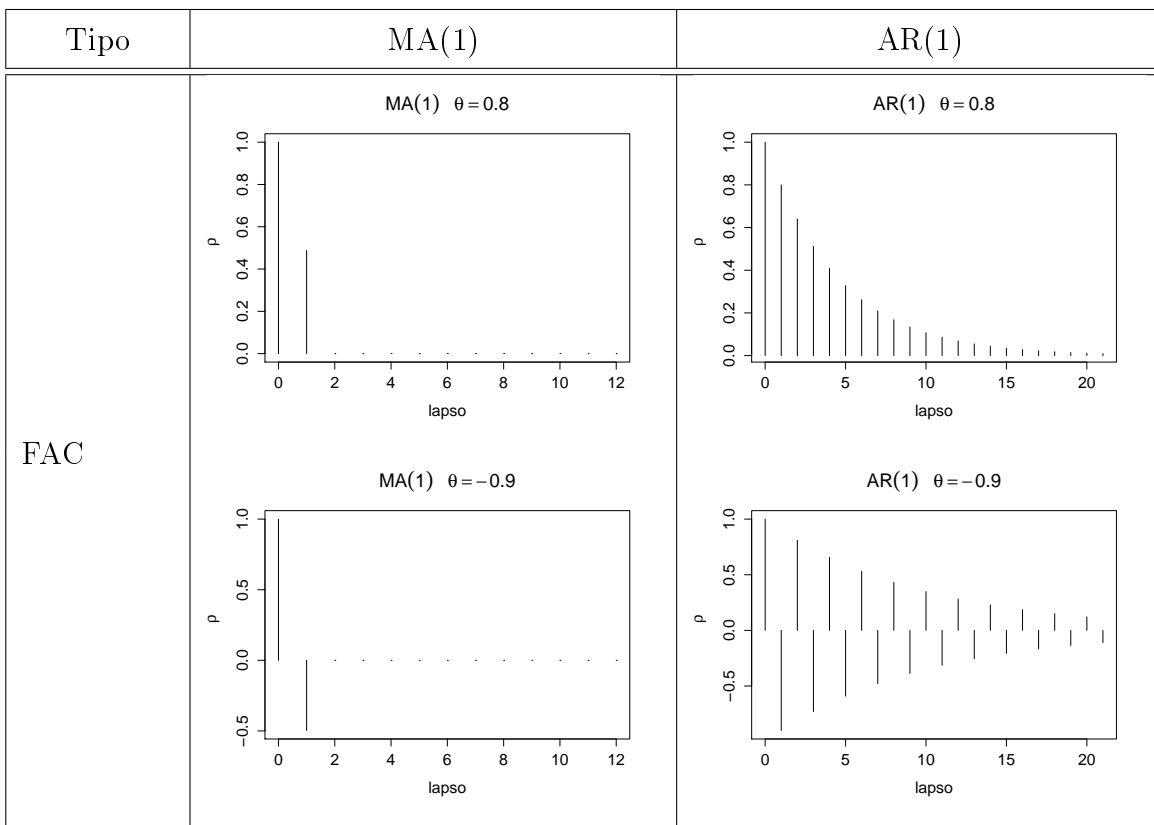


Figura 2.4: FAC para diferentes procesos (Ver [9]).

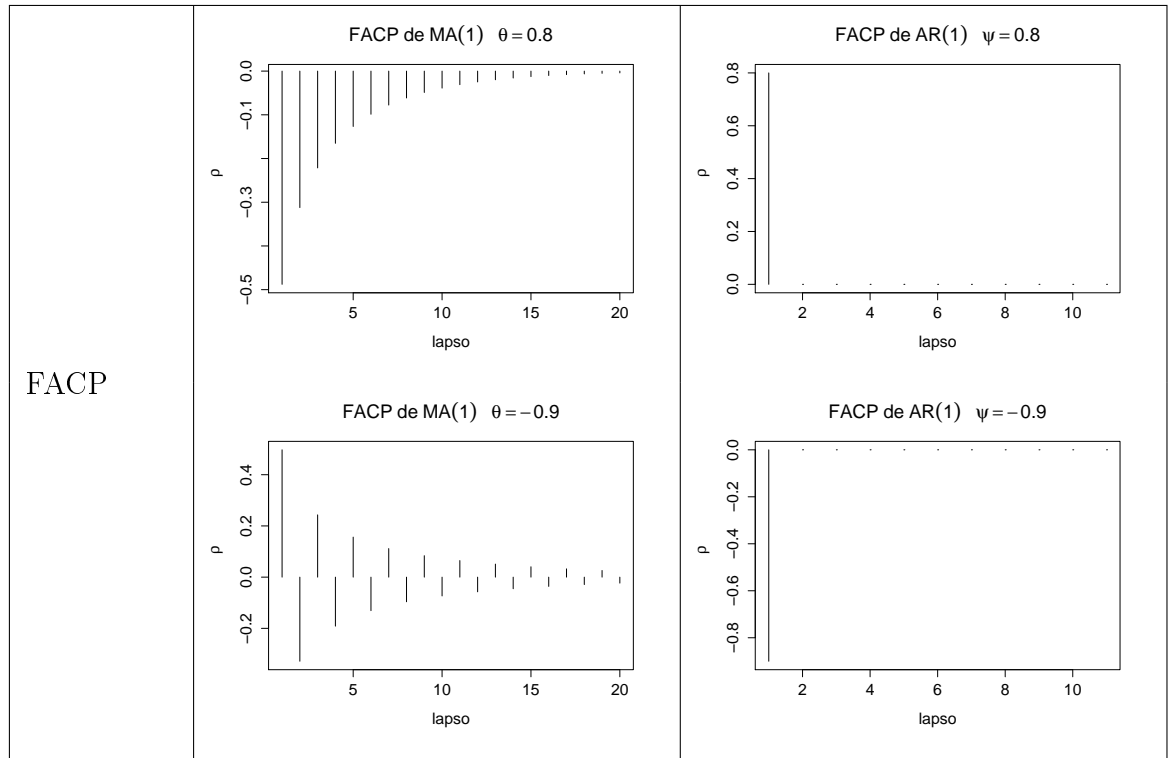


Figura 2.5: FACP para diferentes procesos (Ver [9]).

## 2.6. Función de autocorrelación muestral (FAM)

Anteriormente se mencionaron los parámetros para detectar la dependencia entre las observaciones, ahora se darán los estimadores de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, sus gráficas suelen llamarse **correlogramas**.

Los estimadores de las funciones de autocovarianza y autocorrelación de una serie de  $x_1, x_2, \dots, x_T$  de observaciones, por lo regular son las siguientes.

El estimador de la función de autocovarianza del lapso  $k$  es

$$c_k = \gamma_{x_k} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, T - k \text{ donde } k < T.,$$

y el estimador de la función de autocorrelación estimada por la **función de autocorrelación muestral (FAC muestral)**

$$r_k = \hat{\rho}_k = \frac{c_k}{c_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, T - k \text{ donde } k < T.$$

Cabe mencionar que FAC muestral también aplica para las series de tiempo no estacionarias mientras que la función de autocorrelación sólo aplica para las series de tiempo estacionarias.

**Observación 2.6.1.** *Una buena generalización que se tiene para calcular una confiable FAC es que se requieren de al menos 50 observaciones, y las autocorrelaciones individuales de la muestra deben estar calculadas hasta  $k$ .*

## 2.7. Función de Autocorrelación Parcial Muestral(FAMP)

La función de autocorrelación parcial muestral  $\hat{\phi}_{k,k}$  está dada por un método recursivo, dado por Durbin(1960), empezando con  $\hat{\phi}_{1,1} = \hat{\rho}_1$  y así calcular  $\hat{\phi}_{k,k}$ ,

$$\hat{\phi}_{k+1,k+1} = \frac{\hat{\rho}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \hat{\phi}_{ki} \hat{\rho}_{k+1-i}}{1 - \sum_{i=1}^k \hat{\phi}_{ki} \hat{\rho}_i}$$

y

$$\hat{\phi}_{k+1,i} = \hat{\phi}_{ki} - \hat{\phi}_{k+1,k+1} \hat{\phi}_{k,k+1-j}, \quad i = 1, \dots, k.$$

siempre que el proceso sea una secuencia de ruido blanco, la varianza de  $\hat{\phi}_{k,k}$  puede ser aproximado por

$$Var(\hat{\phi}_{k,k}) \simeq \frac{1}{n}.$$

Como resumen se tiene la Figura 2.6, el cual muestra el correlograma y correlograma parcial para el proceso MA(1) y AR(1).

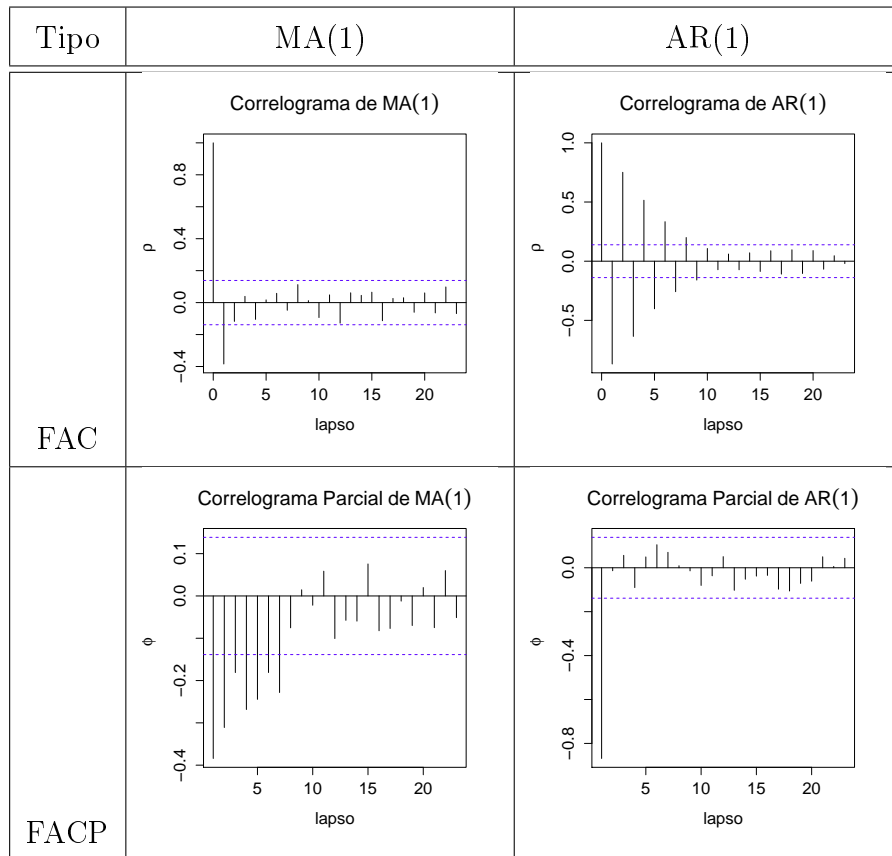


Figura 2.6: Correlograma y correlograma parcial para diferentes procesos.

## 2.8. Modelo Autorregresivo de Promedios Móviles (ARMA)

### 2.8.1. Introducción

En la sección anterior se abordó el tema de la autocorrelación. En éste capítulo se explicará como se forman modelos lineales basados en la teoría clásica de regresiones. A diferencia de las regresiones donde se tiene a la variable dependiente y las que la determinan que son las independientes, en las series de tiempo se usa el pasado de la misma para poder hacer pronóstico. La función de autocorrelación (FAC) es un indicador de la correlación de series de tiempo que nos muestra información importante, es por esto que se maneja a la correlación como un fenómeno que es generado con información del pasado a través de un **proceso autorregresivo (AR)** y un **proceso de media móvil (MA)**. Cabe señalar que el proceso autorregresivo de medias móviles (ARMA) es una mezcla del proceso de media móvil y el autorregresivo.

Los modelos que se presentan están formados por procesos lineales. El cual se define de la siguiente forma,

**Definición 2.8.1** (Proceso Lineal). *La serie de tiempo  $X_t$  es un proceso lineal si éste se puede representar como*

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \theta_i Z_{t-i},$$

para toda  $t$ , donde  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$  y  $\theta_i$  es una secuencia de constantes con  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\theta_i| < \infty$ .

Esto se puede simplificar y dejar en términos de  $B$ , que es el operador de desplazamiento hacia atrás, surge del método de diferencias (Ver [7], [8], y [9]). Se define el operador de diferencias de lapso  $k = 1$ ,  $\nabla$  por

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t, \quad (2.8.1)$$

así

$$BX_t = X_{t-1}. \quad (2.8.2)$$

La potencia del operador  $B$  y  $\nabla$  es definido como  $B^j(X_t) = X_{t-j}$  y  $\nabla^j(X_t) = \nabla(\nabla^{j-1}(X_t))$ ,  $j \geq 1$ , con  $\nabla^0(X_t) = X_t$ . Polinomios en  $B$  y  $\nabla$  son manipulados de la misma forma como una función polinómica de variables reales, por ejemplo  $\nabla^2 X_t = \nabla(\nabla(X_t)) = (1 - B)(1 - B)X_t = (1 - 2B + B^2)X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$ .

Tomando en cuenta que  $BZ_t = Z_{t-1}$ , el proceso lineal se puede expresar como

$$X_t = \theta(B)Z_t,$$

donde  $\theta(B) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \theta_i B^i$ .

### 2.8.2. Modelo de Promedios Móviles (MA)

### 2.8.3. Modelo de Promedios Móviles de primer orden (MA(1))

Se considera el modelo más simple, de orden 1 que es el MA(1), en 2.5.1 se definió como  $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$  donde  $\theta$  es no negativa y  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ . En resumen se puede decir que el proceso MA(1) no tiene autocorrelación a partir del lapso mayor a 1, como se muestra en la Figura 2.4. Éste hecho es

importante cuando se tenga que elegir un modelo adecuado para los datos. En la Figura 2.7 se muestran diferentes trayectorias para el modelo MA(1).

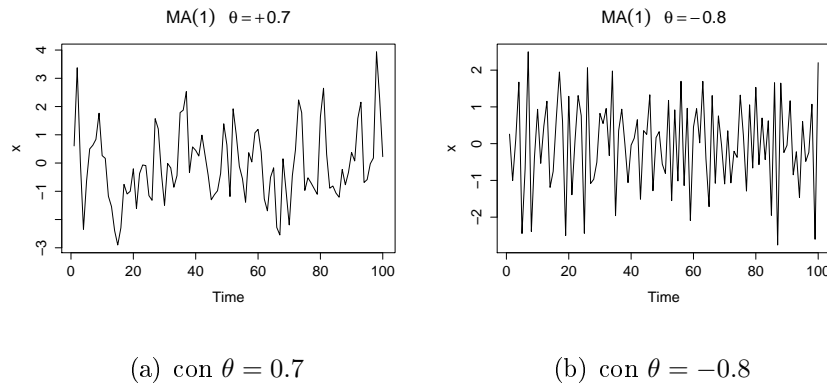


Figura 2.7: Realizaciones del proceso MA(1) con  $\theta = 0.7$  y con  $\theta = -0.9$ .

#### 2.8.4. Modelo de Promedios Móviles de segundo orden MA(2)

Considere el proceso de orden 2, donde  $\theta$  es no negativa y  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ .

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2},$$

donde

$$\gamma_0 = \text{var}(X_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2$$

$$\gamma_1 = \text{cov}(X_t, X_{t-1}) = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma^2$$

$$\gamma_2 = \text{cov}(X_t, X_{t-2}) = (-\theta_2)\sigma^2$$

$$\gamma_k = 0, \quad k > 2.$$

Además para el proceso MA(2)

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\ \rho_2 &= \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\ \rho_k &= 0, \quad k > 2.\end{aligned}$$

Por otra parte se tiene la FACP, teniéndose que  $\rho_k = 0$  para  $k \geq 3$ ,

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= \rho_1 \\ \phi_{22} &= \frac{\rho_{22} - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \\ \phi_{33} &= \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)} \\ &\dots\end{aligned}\tag{2.8.3}$$

El proceso MA(2) contiene al MA(1) como caso especial. Por lo tanto la FACP disminuye exponencialmente.

### 2.8.5. Modelo de Promedios Móviles de orden $q$ (MA( $q$ ))

Para un modelo de orden  $q$ , en general, se tiene un proceso donde  $\theta$  es no negativa y  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ , además de que el proceso es siempre estacionario independientemente de los valores de  $\theta$ .

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q}.$$

En términos del operador de desplazamiento hacia atrás,  $B$ , se tiene

$$\begin{aligned}X_t &= (1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q) Z_t \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^q \theta_i B^i\right) Z_t \\ &= \Theta(B) Z_t,\end{aligned}$$

donde  $\Theta(B) = 1 + \sum_{i=1}^q \theta_i B^i$ .

Se tiene que la autocovarianza del lapso  $k$  está dada por

$$\begin{aligned} \gamma_k &= Cov(X_t, X_{t+k}) \\ &= E[(Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q})(Z_{t+k} + \theta_1 Z_{t+k-1} + \dots + \theta_q Z_{t+k-q})] \\ &= \begin{cases} \sigma^2(-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q), & \text{si } k = 1, 2, \dots, q; \\ 0, & \text{si } k > q. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.8.4}$$

con la covarianza (2.8.4) se obtiene la función de autocorrelación, tomando en cuenta que

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2}, & \text{para } k = 1, 2, \dots, q; \\ 0, & \text{para } k > q. \end{cases}$$

La característica de la función de autocorrelación es muy útil para identificar a un modelo MA. Con datos reales cuando el lapso sea mayor a  $q$ , no necesariamente va ser cero pero se espera que llegue a ser muy pequeño en valores absolutos después del lapso  $q$ .

Otro tipo de proceso, AR, nos muestra otra alternativa para los modelos de autocorrelación, a continuación se habla de éste.

### 2.8.6. Modelo Autorregresivo o Proceso Autorregresivo(AR)

El modelo autorregresivo está basado en la idea de que el valor actual de la serie de tiempo puede ser explicada como una función de  $n$  valores,

$x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-n}$ , donde  $n$  es el número de pasos que se necesitan para determinar el valor actual de la serie de tiempo. Cuando  $n = 1$  es un proceso **AR(1)**.

**Definición 2.8.2** (Proceso AR(1)). *Un proceso AR(1) está definido como una solución estacionaria  $X_t$  de la ecuación*

$$X_t = \psi X_{t-1} + Z_t,$$

donde  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ , y  $|\psi| < 1$  y  $Z_t$  es independiente de  $X_s$  para cada  $s < t$ .

En la Figura 2.8 se muestran diferentes trayectorias del modelo autorregresivo de primer orden que se observó como ejemplo en la sección 2.5 donde se dan las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, enseguida se menciona el proceso AR(2) para así generalizar a un proceso AR( $q$ ).

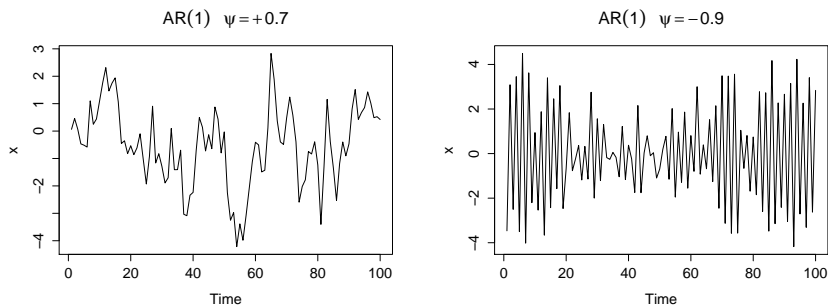


Figura 2.8: Realizaciones del proceso AR(1) con  $\psi = 0.7$  y con  $\psi = -0.9$ .

### 2.8.7. Modelo Autorregresivo de Segundo Orden (AR(2))

Se considera la serie que satisface

$$X_t = \psi_1 X_{t-1} + \psi_2 X_{t-2} + Z_t. \quad (2.8.5)$$

Otra representación del modelo AR(2) en términos del operador de retraso  $B$ ,  $\psi_1$  y  $\psi_2$

$$\Psi(B)X_t = Z_t, \quad (2.8.6)$$

donde  $\Psi(B) = 1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2$ . La función de autocorrelación se basa en la relación recursiva de la Ecuación (2.8.5), considerando estacionariedad, que la media es cero y que  $Z_t$  es independiente de  $X_{t-k}$ , así se tiene que la **función de autocovarianza** para un modelo AR(2) es,

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \psi_1 \gamma_{k-1} + \psi_2 \gamma_{k-2} + \sigma^2 & k = 0 \\ \gamma_k &= \psi_1 \gamma_{k-1} + \psi_2 \gamma_{k-2}, & k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

de este resultado se obtiene la función de autocorrelación, dividiendo por  $\gamma_0$ ,

$$\rho_k = \psi_1 \rho_{k-1} + \psi_2 \rho_{k-2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.8.8)$$

Luego para  $k = 1$  y usando  $\rho_0 = 1$  se obtiene de lo anterior que  $\rho_1 = \psi_1 + \psi_2 \rho_0$  esto es,

$$\rho_1 = \frac{\psi_1}{1 - \psi_2} \quad (2.8.9)$$

usando éste resultado se obtiene

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \psi_1 \rho_1 + \psi_2 \rho_0; \\ &= \frac{\psi_2(1 - \psi_2) + \psi_1^2}{1 - \psi_2}. \end{aligned}$$

Así una manera de obtener una expresión general de la función de autocorrelación para cualquier valor de  $k$ , en términos de las raíces de la ecuación es:  $1 - \psi_1 X - \psi_2 X^2 = 0$

$$G = \frac{\psi_1 \pm \sqrt{\psi_1^2 + 4\psi_2}}{2}, \quad (2.8.10)$$

y así para  $G_1 \neq G_2$

$$\rho_k = \frac{(1 - G_2^2)G_1^{k+1} - (1 - G_1^2)G_2^{k+1}}{(G_1 - G_2)(1 + G_1G_2)}. \quad (2.8.11)$$

Además la FACP para el proceso AR(2) es

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \rho_1 = \frac{\psi_1}{1 - \psi_2} \\ \phi_{22} &= \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \psi_2 \\ \phi_{kk} &= 0 \quad k \geq 3. \end{aligned} \quad (2.8.12)$$

Por lo tanto la FACP del proceso AR(2) se corta en lapso 2, es decir a partir de 2, se vuelve cero.

### 2.8.8. Modelo Autorregresivo de orden $p$

El proceso autorregresivo general de orden  $p$  es

$$X_t = \psi X_{t-1} + \psi_2 X_{t-2} + \dots + \psi_p X_{t-p} + Z_t, \quad (2.8.13)$$

donde  $Z_t$  es un ruido blanco. Expresando la Ecuación (2.8.13) en términos del operador de retraso  $B$  se tiene que  $\Psi(B)X_t = Z_t$  donde  $\Psi(B) = 1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \dots - \psi_p B^p$ .

y

$$\begin{aligned} \gamma_k &= Cov(X_t, X_{t-k}) \\ &= Cov(\psi X_{t-1} + \psi_2 X_{t-2} + \dots + \psi_p X_{t-p} + Z_t, X_{t-k}); \\ &= \sum_{i=1}^p \psi_i Cov(X_{t-i}, X_{t-k}) + Cov(Z_t, X_{t-k}); \\ &= \sum_{i=1}^p \psi_i \gamma_{k-1} + \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } k \text{ es } =0; \\ 0, & \text{si } k \text{ es } >0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora para obtener la autocorrelación se divide entre  $\gamma_0$  dado por

$$\gamma_0 = \sigma^2, \quad (2.8.14)$$

y así se tiene

$$\rho_k = \sum_{i=1}^p \psi_i \rho_{k-i}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.8.15)$$

La FACP para el modelo AR( $p$ ) es el siguiente

$$\begin{cases} \phi_{h,h} = \psi_p, & \text{si } h = p; \\ \phi_{h,h} = 0, & \text{si } h > p. \end{cases} \quad (2.8.16)$$

Para  $h < p$  los valores de  $\phi_{h,h}$  pueden ser fácilmente calculados del ultimo componente de

$$\phi_h = \Gamma_h^{-1} \gamma_h \quad (2.8.17)$$

donde  $\Gamma = [\gamma(i-j)]_{i,j=1}^h$ , y  $\gamma_h = [\gamma(1), \gamma(2), \dots, \gamma(h)]'$ . Por lo tanto  $\phi_{h,h}$  desaparece después del lapso  $p$ . Ésta propiedad es útil para identificar a un modelo AR.

### 2.8.9. Modelo Autorregresivo de Promedios Móviles (ARMA( $p,q$ ))

Éste proceso es definido por las ecuaciones lineales diferenciales con coeficientes constantes. Se asume que una parte es autoregresiva y de media móvil. En general, si

$$X_t = \psi_1 X_{t-1} + \psi_2 X_{t-2} + \dots + \psi_p X_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q}, \quad (2.8.18)$$

se dice que  $X_t$  es un proceso de orden  $p$  y  $q$ , respectivamente.

Primero se considera el proceso ARMA(1,1)

**Definición 2.8.3** (ARMA(1,1)). *La serie de tiempo  $X_t$  es un proceso ARMA(1,1) si es estacionario y si para todo  $t$ ,*

$$X_t - \psi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1},$$

donde  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$  y  $\psi + \theta \neq 0$ .

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \psi\gamma_1 + (1 + \theta\psi + \theta^2)\sigma^2 \\ \gamma_1 &= \psi\gamma_0 + \theta\sigma^2 \\ \gamma_k &= \psi\gamma_{k-1}, \text{ para } k > 2, \end{aligned} \tag{2.8.19}$$

despejando  $\gamma_0$  de las dos primeras ecuaciones en (2.8.19), se tiene

$$\gamma_0 = \frac{(1 + 2\psi\theta + \theta^2)}{1 - \psi^2}\sigma^2 \quad \text{y} \quad \gamma_1 = \frac{(1 + \psi\theta)(\psi + \theta)}{1 - \psi^2}\sigma^2$$

luego, solucionando de manera recursiva y dividiendo por  $\gamma_0$  se tiene

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ \frac{(1 + \theta\psi)(\psi + \theta)}{1 + 2\theta\psi + \theta^2}, & \text{si } k = 1; \\ \psi\rho_{k-1}, & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

En la Figura 2.9, se muestra la FAC de un proceso ARMA(1,1) con diferentes valores de  $\theta$  y  $\psi$ .

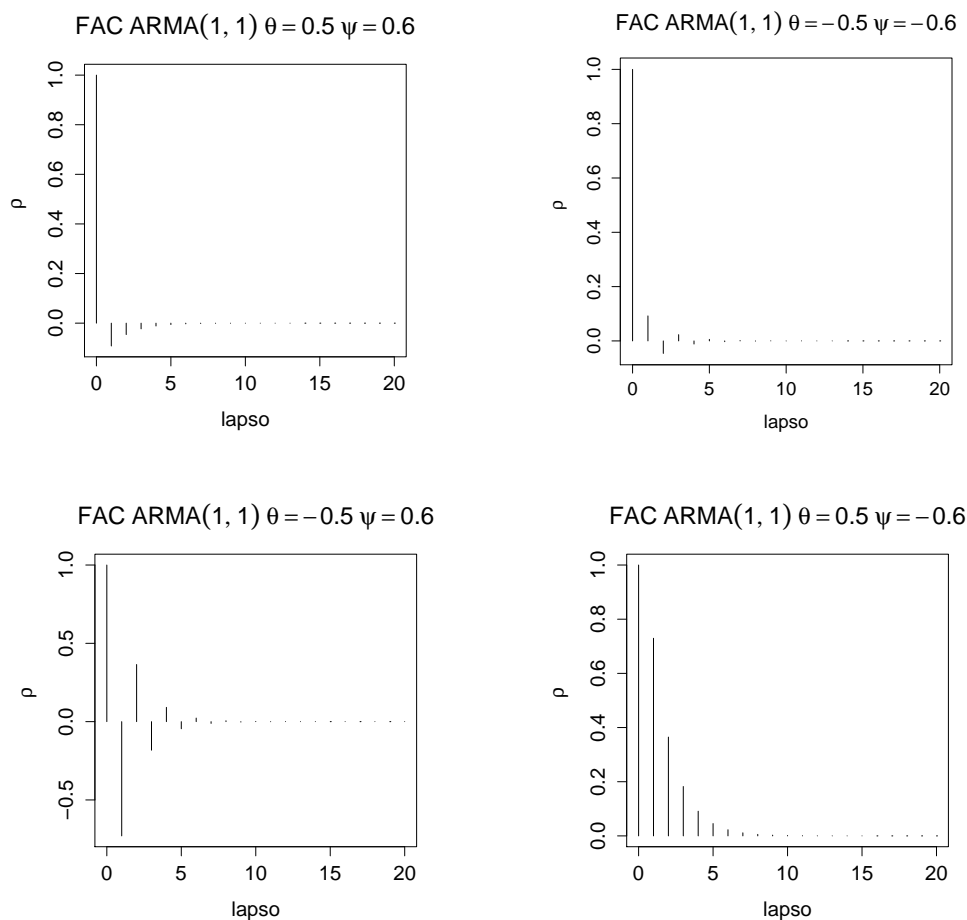


Figura 2.9: Función de Autocorrelación para varios modelos ARMA(1,1).

Enseguida se da la definición formal de un proceso ARMA( $p,q$ )

**Definición 2.8.4** (Proceso ARMA( $p,q$ )).  $X_t$  es un proceso ARMA( $p,q$ ) si  $X_t$  es estacionario y si para todo  $t$ ,

$$X_t - \psi_1 X_{t-1} - \dots - \psi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q},$$

donde  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$  y los polinomios  $(1 - \psi_1 Z - \dots - \psi_p Z^p)$ ,  $(1 + \theta_1 Z + \dots + \theta_q Z^q)$  no tienen factores comunes.

Es conveniente denotar al proceso como sigue

$$\psi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad (2.8.20)$$

donde  $\psi(B) = 1 - \psi_1 B - \dots - \psi_p B^p$  y  $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$ . Si

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i Z_t, \quad (2.8.21)$$

donde  $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i = \frac{\theta(B)}{\psi(B)}$ ,  $|B| \leq 1$  y  $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i < \infty$ .

Los procesos ARMA( $p, q$ ) deben cumplir con la condición de tener una solución estacionaria  $X_t$ . De la ecuación (2.8.4), ésta existe y además es única si sólo si

$$\psi(Z) = 1 - \psi_1 Z - \dots - \psi_p Z^p \neq 0, \quad (2.8.22)$$

para toda  $|Z| = 1$ .

Se obtiene la función de autocovarianza de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E(X_{t+k}, X_t) \\ &= E\left[\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_i Z_{t+k-i}\right)\left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} \varphi_h Z_{t-h}\right)\right] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \varphi_i \varphi_h E(Z_{t+k-i} Z_{t-h}) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \varphi_i \varphi_h \gamma_{k-i+h} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_i \varphi_{i+k} \sigma^2 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \varphi_{i+|k|} \sigma^2. \end{aligned} \quad (2.8.23)$$

Por lo tanto

$$\gamma_k = E[X_{t+k}, X_t] = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \varphi_{i+|k|}. \quad (2.8.24)$$

Dado que el proceso ARMA es estacionario e invertible, éste puede ser escrito en representación de un modelo autorregresivo y también como uno de media móvil discutido en el Apéndice B. La función de autocorrelación se deriva de 2.8.18 como

$$X_t = \psi_1 X_{t-1} + \psi_2 X_{t-2} + \dots + \psi_p X_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q},$$

multiplicando por  $X_{t-k}$  en ambos lados, se tiene

$$X_t X_{t-k} = \psi_1 X_{t-1} X_{t-k} + \dots + \psi_p X_{t-p} X_{t-k} + Z_t X_{t-k} + \theta_1 Z_{t-1} X_{t-k} + \dots + \theta_q Z_{t-q} X_{t-k}.$$

Ahora se toma la esperanza de lo anterior y se obtiene

$$\gamma_k = \psi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \psi_p \gamma_{k-p} + E(Z_t X_{t-k}) + \theta_1 E(Z_{t-1} X_{t-k}) + \dots + \theta_q E(Z_{t-q} X_{t-k})$$

ya que

$$E(X_{t-k} Z_{t-i}) = 0, \quad k > i,$$

se tiene

$$\gamma_k = \psi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \psi_p \gamma_{k-p}, \quad k > (q+1),$$

y por lo tanto

$$\rho_k = \psi_1 \rho_{k-1} + \dots + \psi_p \rho_{k-p}, \quad k > (q+1).$$

Notar que la anterior ecuación se parece al proceso AR( $p$ ). Por lo tanto, en un modelo ARMA( $p, q$ ), la función de autocorrelación se corta en el lapso  $q$  y la función de autocorrelación parcial se corta en el lapso  $p$ .

En la Tabla 2.2 se da una descripción de la FAC Y FACP para cada uno de los modelos anteriores.

Tabla 2.2: Descripción de la FAC Y FACP para diferentes modelos [11].

Modelo	FAC	FACP
Promedio móvil de primer orden $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ .	Se corta después del lapso $k = 1$ .	Se corta de manera que domina el decremento exponencial amortiguado.
Promedio móvil de segundo orden $X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2}$ .	Se corta después del paso $k = 2$ .	Se corta en forma de exponenciales amortiguadas, ondas en forma de seno amortiguada o ambos.
Promedio móvil de orden $q$ $X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$ .	Se trunca después del paso $q$ .	Se extingue.
Autorregresivo de primer orden $X_t = \psi X_{t-1} + Z_t$ .	Se corta de forma exponencial amortiguada.	Se corta después del lapso $k = 1$ .
Autorregresivo de segundo orden $X_t = \psi_1 X_{t-1} + \psi_2 X_{t-2} + Z_t$ .	Se corta en forma de exponenciales amortiguadas, ondas en forma de seno amortiguada o ambos.	Se corta después del lapso $k = 2$ .
Autorregresivo de orden $p$ $X_t = \psi X_{t-1} + \psi_2 X_{t-2} + \dots + \psi_p X_{t-p} + Z_t$ .	Se extingue.	Se trunca después del lapso $k = p$ .
Autorregresivo de Promedios Móviles de orden $(p,q)$ $X_t = \psi_1 X_{t-1} + \psi_2 X_{t-2} + \dots + \psi_p X_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$ .	Se extingue.	Se extingue.
Autorregresivo de Promedios Móviles de orden $(1,1)$ $X_t - \psi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$ .	Se corta de manera exponencial amortiguada.	Se corta de manera que domina el decremento exponencial amortiguado.

Notar que la FAC tiene autocorrelación no cero en los lapsos  $1, 2, \dots, q$ , y tiene autocorrelaciones cero en todos los lapsos después de  $q$ , además tiene autocorrelaciones parciales no cero en los lapsos  $1, 2, \dots, p$ , y tiene autocorre-

laciones parciales cero en todos los lapsos después de  $p$ .

### 2.8.10. Modelo Autorregresivo de Promedios Móviles Integrado *ARIMA*

Se ha mencionado el modelo ARMA para series estacionarias, ahora un modelo que incorpora a las series no estacionarias es el modelo *ARIMA*, éste se liga con un proceso ARMA a través del método de diferencias, el cual permite que se vuelva estacionario y así se reduzca a un proceso ARMA. Donde  $p$  denota el número de términos autorregresivos,  $d$  es el número de diferencias y  $q$  el número de términos de medias móviles.

**Definición 2.8.5** (*ARIMA*( $p, d, q$ )). Si  $d$  es un entero no negativo, entonces  $X_t$  es un proceso *ARIMA*( $p, d, q$ ), si  $Y_t := (1 - B)^d X_t$  es un proceso *ARMA*( $p, q$ ).

El proceso sigue la siguiente ecuación de diferencias

$$\psi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)Z_t, \quad Z_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad (2.8.25)$$

donde  $\psi(B)$  y  $\theta(B)$  son polinomios de grado  $p$  y  $q$ , respectivamente, y  $\psi(z) \neq 0$  para  $|z| \leq 1$ . El proceso  $X_t$  es estacionario si y sólo si  $d = 0$ , de ésta forma se reduce a un proceso *ARMA*( $p, q$ ). Considere un proceso *ARIMA*( $p, 1, q$ ). Con  $\nabla_t$  con lapso  $k = 1$ ,

$$\psi(B)(1 - B)^1 X_t = \theta(B)Z_t, \quad (2.8.26)$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned} & (X_t - X_{t-1}) - \psi_1(X_{t-1} - X_{t-2}) - \psi_2(X_{t-2} - X_{t-3}) - \dots - \psi_p(X_{t-p} - X_{t-p-1}) \\ & = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q}, \end{aligned} \tag{2.8.27}$$

esto se puede escribir como

$$\begin{aligned} X_t = & (1 + \psi_1)X_{t-1} + (\psi_2 - \psi_1)X_{t-2} + \dots + (\psi_p - \psi_{p-1})X_{t-p} - \psi_p X_{t-p-1} \\ & + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q}, \end{aligned} \tag{2.8.28}$$

Note que la anterior fórmula aparenta ser un proceso ARMA( $p + 1, q$ ). Sin embargo las características del polinomio implican que no es estacionaria. La estimación de  $\psi$ ,  $\theta$  y  $\sigma^2$  será basada en las diferencias observadas  $(1 - B)^d X_t$ .

La diferenciación puede ser usada para reducir una serie de tiempo no estacionaria homogénea a una serie de tiempo estacionaria, sin embargo, muchas series de tiempo no son homogéneas. La no estacionariedad en estas series no es porque el tiempo depende de la media sino porque depende de la covarianza y autocovarianzas. Así que se debe emplear otra transformación [9]. Si el proceso no contiene términos autorregresivos, se le llama un proceso de medias móviles integrados ( $IMA(d, q)$ ) y por otro lado si no reporta términos de medias móviles se denota como  $ARI(p, d)$  [4].

Una prueba importante que nos ayuda a verificar si la serie de datos es estacionaria o lo contrario es el Test de Dickey-Fuller, a continuación se da una breve explicación.

### 2.8.11. Test de Dickey-Fuller o de Raíz unitaria

Considere el modelo

$$X_t = \psi X_{t-1} + Z_t \text{ para } t = 1, 2, \dots \quad (2.8.29)$$

donde  $Z_t$  es un proceso estacionario ya que es el residual de ruido blanco. El proceso  $X_t$  es no estacionario si el coeficiente  $\psi = 1$ , es decir el caso de la raíz unitaria. Por lo tanto el test de Dickey-Fuller averigua si la  $\psi$  estimada es estadísticamente igual a uno, de ser así,  $X_t$  es no estacionaria. Aplicando primeras diferencias a (2.8.29) tenemos

$$\begin{aligned} X_t - X_{t-1} &= \psi X_{t-1} - X_{t-1} + Z_t \\ &= (\psi - 1)X_{t-1} + Z_t \\ \nabla X_t &= \delta X_{t-1} + Z_t \end{aligned}$$

donde  $\delta = (\rho - 1)$  y  $\nabla$  el operador de las primeras diferencias. Por lo tanto, en la práctica en vez de estimar (2.8.29), se calcula (2.8.11) y se prueba la hipótesis nula de que  $\delta = 0$  y la hipótesis alternativa es que  $\delta < 0$ . Si  $\delta = 0$ , entonces  $\rho = 1$ ; es decir, tenemos una raíz unitaria, lo que significa que la serie de tiempo es no estacionaria. Ahora  $\psi$  es estimado por MCO. El estimador del error estandar de  $\psi$  es

$$\widehat{ES}(\widehat{\psi}) = S \left( \sum_n^2 (\nabla X_{t-1} - \bar{X})^2 \right)^{1/2}$$

donde  $S^2 = \sum_{t=2}^n (\nabla X_{t-1} - \widehat{\psi} X_{t-1})^2 / (n - 3)$  y  $\bar{X}$  es la media de la serie. Dickey y Fuller probaron que según la hipótesis nula de que  $\delta = 0$ , el valor estimado y del coeficiente  $X_{t-1}$  sigue el estadístico  $\tau$ ,

$$\widehat{\tau} := \widehat{\psi} / \widehat{SE}(\widehat{\psi}).$$

Además se calcularon los valores críticos del estadístico  $\tau$  con base en simulaciones Montecarlo.

### 2.8.12. Modelo $ARIMA(0, 1, 1)$ o $IMA(1, 1)$

El modelo  $ARIMA(0, 1, 1)$  se presenta cuando se tiene  $p = 0$ ,  $d = 1$  y  $q = 1$ , entonces se tiene

$$(1 - B)X_t = (1 - \theta B)Z_t \text{ o } X_t = X_{t-1} + Z_t - \theta Z_{t-1}, \quad (2.8.30)$$

donde  $|\theta| < 1$ . El proceso se reduce a un modelo MA(1) para la serie con primeras diferencias,  $(1 - B)Z_t$ .

### 2.8.13. Varianza y Autocovarianza del modelo $ARIMA$

Un proceso que es estacionario en la media no es necesariamente estacionario en la varianza y autocovarianza. Sin embargo un proceso que no es estacionario en la media tampoco lo es en la varianza y autocovarianza. Se muestra en esta sección que el modelo  $ARIMA$  no es estacionario en la varianza y la función de autocovarianza.

Un fenómeno del modelo  $ARIMA$ , es que a pesar de ser no estacionario, las características completas del proceso son determinadas siempre por un número finito de parámetros, por ejemplo considere las variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  y suponga que se ajusta a un proceso  $IMA(1, 1)$

$$X_t = X_{t-1} + Z_t - \theta Z_{t-1}, \quad (2.8.31)$$

de esta forma la serie de  $n$  observaciones se puede escribir substituyendo sucesivamente

$$\begin{aligned}
X_t &= X_{t-1} + Z_t - \theta Z_{t-1} \\
&= X_{t-2} + Z_t + (1 - \theta)Z_{t-1} - \theta Z_{t-2} \\
&\quad \vdots \\
&= X_n + Z_t + (1 - \theta)Z_{t-1} + \dots + (1 - \theta)Z_{n+1} - \theta Z_n.
\end{aligned} \tag{2.8.32}$$

Similarmente para  $t - k > n$

$$Z_{t-k} = X_n + Z_{t-k} + (1 - \theta)Z_{t-k} + \dots + (1 - \theta)Z_{n+1} - \theta Z_n. \tag{2.8.33}$$

Por lo tanto, con respecto al tiempo original  $n$

$$\begin{aligned}
Var(X_t) &= [1 + (t - n - 1)(1 - \theta)^2]\sigma^2 \\
Var(X_{t-k}) &= [1 + (t - k - n - 1)(1 - \theta)^2]\sigma^2 \\
Cov(X_{t-k}, X_t) &= [(1 - \theta) + (t - k - n - 1)(1 - \theta)^2]\sigma^2.
\end{aligned} \tag{2.8.34}$$

Así la correlación es

$$Corr(X_{t-k}, X_t) = \frac{[(1 - \theta) + (t - k - n - 1)(1 - \theta)^2]\sigma^2}{[1 + (t - n - 1)(1 - \theta)^2]\sigma^2 [1 + (t - k - n - 1)(1 - \theta)^2]\sigma^2}. \tag{2.8.35}$$

De esto se tienen las siguientes observaciones:

1. La varianza  $Var(X_t)$  de un proceso *ARIMA* es dependiente del tiempo, además la  $Var(X_t) \neq Var(X_{t-k})$  para  $k \neq 0$ .
2. La varianza  $Var(X_t)$  no tiene límite cuando  $t \rightarrow \infty$ .
3. Si  $t$  es grande con respecto a  $n$ , entonces la Correlación  $\simeq 1$ .

### 2.8.14. Pasos para identificar a un modelo

Se considera un modelo  $ARIMA(p, d, q)$

$$(1 - \psi_1 B - \dots - \psi_p B^p)(1 - B)^d X_t = \theta_0 + (1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q) Z_t.$$

Identificar el modelo se refiere la metodología para buscar la transformación requerida de los datos. Los pasos son los siguientes:

**Paso 1** Graficar los datos y escoger la transformación apropiada. A través de las gráficas de nuestros datos se puede identificar la tendencia, estacionariedad, varianza no constante y otro tipo de fenómenos. Por lo regular en las series de tiempo se usan transformaciones para estabilizar la varianza, que por lo regular se hace con una transformación logarítmica.

**Paso 2** Calcular y examinar la FAC muestral, así como la FACP muestral de la serie original, además de determinar el grado de diferencia que se necesita para que serie sea estacionaria. Algunas reglas son las siguientes:

1. Si la FAC muestral cae lentamente y la FACP muestral se corta en uno, entonces es necesario la diferenciación. Probar tomando la primera diferencia  $(1 - B)X_t$ .
2. En general, para remover la no estacionariedad, se considera la diferenciación de alto orden  $(1 - B)^d X_t$  para  $d > 1$ . En la mayoría de los casos,  $d$  puede tomar los valores 0,1 o 2.

**Paso 3** Calcular y examinar la FAM y FAPM de la apropiada transformación y la serie diferenciada para así identificar el orden de  $p$  y  $q$ , donde  $p$  es

el más alto orden del polinomio autorregresivo y  $q$  es el más alto orden en el polinomio de medias móviles. Usualmente el orden necesario de  $p$  y  $q$  es menor o igual que tres. De acuerdo al valor de  $p$  y  $q$  según la Tabla 2.2 es como se comportan los autocorrelogramas.

**Paso 4** Estimación de los parámetros y diagnóstico del modelo seleccionado.

## 2.9. Modelo estacional *ARIMA* o *SARIMA*

La idea de los modelos estacionales es dar solución a la dependencia sobre tendencias del pasado que ocurre fuertemente en múltiplos de lapsos  $s$  estacionales. Es común que datos económicos mensuales, tengan un fuerte componente anual que ocurre en los lapsos múltiplos de  $s = 12$  porque existe una fuerte conexión con las actividades del calendario. Lo mismo ocurre con los fenómenos naturales tales como la temperatura, los cuales tiene un componente fuerte que corresponde a las estaciones del año. Es por esto que la variabilidad natural de procesos físicos, biológicos y económicos tienden a emparejarse con fluctuaciones estacionales (Ver[4] y [5]).

Se denota a  $s$  como el periodo estacional; para series mensuales  $s = 12$  y para series trimestrales  $s = 4$ . Considera la serie de tiempo generada de acuerdo a

$$X_t = Z_t + \Theta Z_{t-12}.$$

Notar que

$$Cov(X_t, X_{t-1}) = Cov(Z_t + \Theta Z_{t-12}, Z_{t-1} + \Theta Z_{t-13}) = 0$$

pero que

$$Cov(X_t, X_{t-12}) = Cov(Z_t + \Theta Z_{t-12}, Z_{t-12} + \Theta Z_{t-24}) = \Theta \sigma_Z^2.$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= (1 + \Theta^2) \\ \gamma_{\pm 12} &= \Theta\sigma^2 \\ \gamma_h &= 0, \text{ e.o.c. (en otro caso)}\end{aligned}\tag{2.9.1}$$

Luego la correlación es diferente de cero en los lapsos estacionales, además del lapso 0,  $\rho(\pm 12) = \Theta/(1 + \Theta^2)$ . Generalizando ésta idea, se define a un modelo estacional  $MA(Q)$  de orden  $Q$  con periodo estacional  $s$  por

$$X_t = Z_t - \Theta_1 Z_{t-s} - \Theta_2 Z_{t-2s} - \dots - \Theta_Q Z_{t-Qs}$$

con el polinomio característico del modelo estacional MA

$$\Theta(X) = 1 - \Theta_1 X^s - \Theta_2 X^{2s} - \dots - \Theta_Q X^{Qs}.$$

Es evidente que la serie es siempre estacionaria y que la función de autocorrelación es igual a cero, excepto en los lapsos de estacionales  $s, 2s, 3s, \dots, Qs$ . En particular,

$$\rho_{ks} = \frac{-\Theta_k + \Theta_1 \Theta_{k+1} + \Theta_2 \Theta_{k+2} + \dots + \Theta_{Q-k} \Theta_Q}{1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \dots + \Theta_Q^2} \text{ para } k = 1, 2, \dots, Q$$

Para que el modelo sea invertible, las raíces de  $\Theta(X) = 0$  deben de ser mayores que uno en valor absoluto.

Notar que el modelo estacional  $MA(Q)$  también puede ser visto como un caso especial de un modelo MA no estacional de orden  $q = Qs$  pero con todos los valores de  $\Theta$  excepto en los lapsos estacionales  $s, 2s, 3s, \dots, Qs$ .

Para el caso autorregresivo se define de la siguiente forma. Considerar el modelo AR estacional de primer orden ( $s = 12$ )

$$X_t = \Psi X_{t-12} + Z_t,\tag{2.9.2}$$

donde  $|\Psi| < 1$  y  $Z_t$  es independiente de  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ . Con  $|\Psi| < 1$  puede ser mostrado que asegura estacionariedad.

Para un modelo AR estacional de primer orden ( $s = 12$ ), usando las técnicas de un modelo AR(1) no estacional se tiene,

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \sigma^2 / (1 - \Psi^2) \\ \gamma_{\pm 12k} &= \sigma^2 \Psi^k / (1 - \Psi^2) \quad k = 1, 2, \dots \\ \gamma_h &= 0, \quad e.o.c.\end{aligned}\tag{2.9.3}$$

Además  $E(X_t) = 0$ ; multiplicando (2.9.2) por  $X_{t-k}$ , tomando la esperanza y dividiendo por  $\gamma_0$

$$\rho_k = \Psi \rho_{k-12} \text{ para } k \geq 1.\tag{2.9.4}$$

Claramente

$$\rho_{12} = \Psi \rho_0 = \Psi \text{ y } \rho_{24} = \Psi \rho_{12} = \Psi^2\tag{2.9.5}$$

más general,

$$\rho_{12k} = \Psi^k \text{ para } k = 1, 2, \dots\tag{2.9.6}$$

Éste resultado puede ser verificado usando el siguiente resultado,  $\gamma_h = \Psi \gamma(h - 12)$ , para  $h \geq 1$ .

Además, si en la ecuación 2.8.18  $k = 1$  entonces  $k = 11$  y usando  $\rho_k = \rho_{-k}$  se tiene

$$\rho_1 = \Psi \rho_{11} \text{ y } \rho_{11} = \Psi \rho_1$$

lo cual implica que  $\rho_1 = \rho_{11} = 0$ . Similarmente, se puede mostrar que  $\rho_k = 0$  excepto en los lapsos estacionales 12, 24, 36, ... . En estos lapsos, la función de autocorrelación decae exponencialmente como un modelo AR(1).

Es así como se define el modelo estacional AR(P) de orden P y período

estacional  $s$  por

$$X_t = \Psi_1 X_{t-s} + \Psi_2 X_{t-2s} + \dots + \Psi_p X_{t-Ps} + Z_t \quad (2.9.7)$$

con el operador estacional

$$\Psi(X) = 1 - \Psi_1 X^s - \Psi_2 X^{2s} - \dots - \Psi_P X^{Ps}.$$

Como se sabe  $Z_t$  debe ser independiente de  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ , y, para la estacionariedad, que las raíces de  $\Psi(X) = 0$  sean mayores que 1 en valor absoluto. De nuevo la expresión (2.9.7) puede ser vista como un caso especial de un modelo  $AR(p)$  de orden  $p = Ps$  con coeficientes  $\Psi$  diferentes de cero sólo en los lapsos estacionales  $s, 2s, 3s, \dots, Ps$ . Se puede mostrar que la función de autocorrelación es diferente de cero en los lapsos  $s, 2s, 3s, \dots$ , donde éste se comporta como una combinación de exponenciales que decae y una función seno amortiguada.

### 2.9.1. Modelo ARMA multiplicativo estacional

El resultado de un modelo autorregresivo de medias móviles, es decir un modelo  $ARMA(P, Q)_s$ , dado por

$$\Psi_P(B^s)X_t = \Theta_Q(B^s)Z_t \quad (2.9.8)$$

con las siguientes definiciones.

**Definición 2.9.1** (Los operadores).

$$\Psi_P(B^s) = 1 - \Psi_1 B^s - \Psi_2 B^{2s} - \dots - \Psi_P B^{Ps} \quad (2.9.9)$$

y

$$\Theta_Q(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_P B^{Ps}, \quad (2.9.10)$$

el operador estacional autorregresivo y el operador estacional de promedio móviles de orden  $P$  y  $Q$ , respectivamente, con períodos estacionales  $s$ . Análogamente tiene las mismas propiedades de un modelo ARMA no estacional. Como ejemplo se tiene un modelo autorregresivo de medias móviles estacional de primer orden, el cual se puede escribir como

$$(1 - \Psi B^{12})X_t = (1 + \Theta B^{12})Z_t \quad (2.9.11)$$

o

$$X_t = \Psi X_{t-12} + \Theta Z_{t-12}. \quad (2.9.12)$$

Éste modelo exhibe a la serie  $X_t$  en términos de lapsos pasados múltiplos del período estacional  $s = 12$ . El comportamiento de la FAC y FACP se resume en la Tabla 2.3.

Tabla 2.3: Comportamiento del FAC y FACP [13].

	$AR(P)_s$	$MA(Q)_s$	$ARMA(P, Q)_s$
FAC	Disminuye en el lapso $ks, k = 1, 2, \dots,$	Se corta después del lapso $Qs$	Disminuye en el lapso $ks$
FACP	Se corta después del lapso $Ps$	Disminuye en el lapso $ks, k = 1, 2, \dots,$	Disminuye en el lapso $ks$

Los valores de lapsos no estacionales  $h \neq ks$ , para  $k = 1, 2, \dots$ , son cero.

Muy pocas veces se necesitan modelos que incorporen sólo autocorrelación en los lapsos estacionales. Es por eso que se combina el modelo estacional con un modelo no estacional ARMA, para la solución de la autocorrelación en los lapsos estacionales pero también para aquella en los lapsos menores y vecinos a los estacionales.

En general un modelo autorregresivo de medias móviles estacional, denotado

por  $ARMA(p, q) \times (P, Q)_s$  y dado por

$$\Psi_P(B^s)\psi(B)X_t = \Theta_Q(B^s)\theta(B)Z_t. \quad (2.9.13)$$

Aunque las propiedades de la tabla no son estrictamente ciertas para todos los modelos posibles, el comportamiento de una FAC y una FACP tienden a seguir ese comportamiento.

Como ejemplo se tiene el siguiente modelo estacional multiplicativo. Considera un modelo  $ARMA(0, 1) \times (1, 0)_{12}$

$$X_t = \Psi X_{t-12} + Z_t + \theta Z_{t-1}$$

donde  $|\Psi| < 1$  y  $|\theta| < 1$ . Entonces, ya que  $X_{t-12}$ ,  $Z_t$ , y  $Z_{t-1}$  no están correlacionadas, y  $X_t$  es estacionario,  $\gamma(0) = \Psi^2 + \sigma_Z^2 + \theta^2\sigma_Z^2$ , o

$$\gamma(0) = \frac{1 + \theta^2}{1 - \Psi^2}\sigma_Z^2. \quad (2.9.14)$$

Además multiplicando el modelo por  $X_{t-h}$ ,  $h > 0$ , y tomando esperanzas, se tiene que  $\gamma(1) = \Psi\gamma(11) + \theta\sigma_Z^2$  y  $\gamma(h) = \Psi\gamma(h-12)$ , para  $h \geq 2$ . Además, la FAC para éste modelo es

$$\begin{aligned} \rho(12h) &= \Psi^h & h &= 1, 2, \dots \\ \rho(12h-1) &= \rho(12h+1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}\Psi^h & h &= 0, 1, 2, \dots \\ \rho(h) &= 0, & & e.o.c \end{aligned}$$

La FAC y FACP para éste modelo, se muestra en la Figura 2.10

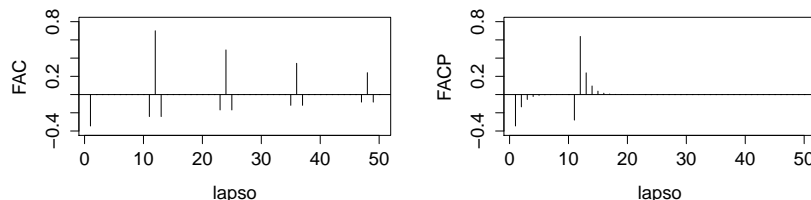


Figura 2.10: FAC y FACP para un modelo  $ARMA(0, 1)(1, 0)_{12}$  con  $\Psi = 0.7$  y  $\theta = -0.4$ .

### 2.9.2. Modelo $ARIMA$ estacional no estacionario

Una importante herramienta en un proceso estacional no estacionario es la diferencia estacional. La no estacionariedad puede ocurrir, cuando un proceso es casi estacional. La diferencia estacional del período  $s$  para la serie  $X_t$  es denotada  $\nabla_s^D X_t$  y es definida como

$$\nabla_s^D X_t = (1 - B^s)^D = X_t - X_{t-s}. \quad (2.9.15)$$

Notar que para una serie de longitud  $n$ , la serie diferenciada estacional será de longitud  $n - s$ ; lo que significa que  $s$  valores de los datos son perdidos debido a la diferenciación estacional. Considere un proceso generado de acuerdo a

$$X_t = S_t + Z_t \quad (2.9.16)$$

con

$$S_t = S_{t-s} + \varepsilon_t \quad (2.9.17)$$

donde  $Z_t$  y  $\varepsilon_t$  son series de ruido blanco independientes.  $S_t$  es una "caminata aleatoria estacional" y si  $\sigma_\varepsilon < \sigma_Z$ ,  $S_t$  modela un componente estacional que cambia lentamente [4]. Debido a la no estacionariedad de  $S_t$ , claramente  $X_t$

es no estacionaria. Sin embargo, si se diferencia estacionalmente  $X_t$ , según como en (2.9.15), se tiene

$$\begin{aligned}\nabla_s X_t &= (1 - B^s)X_t \\ &= S_t - S_{t-s} + Z_t - Z_{t-s} \\ &= \varepsilon_t + Z_t - Z_{t-s}.\end{aligned}\tag{2.9.18}$$

Además  $\nabla_s X_t$  es estacionaria y tiene la función de autocorrelación de un modelo  $MA(1)_s$ . Su FAC tendrá una sola espiga en el lapso  $s$ . En general, la diferencia estacional puede ser indicada cuando la FAC cae lentamente en los múltiplos de los lapsos estacionales  $s$  y es insignificante entre los periodos.

**Definición 2.9.2** (Modelo multiplicativo autorregresivo de medias móviles estacional o modelo *SARIMA*).

$$\Psi_P(B^s)\psi(B)\nabla_s^D\nabla^d X_t = \delta + \Theta_Q(B^s)\theta(B)Z_t,\tag{2.9.19}$$

donde  $Z_t$  es un ruido blanco. El modelo general es denotado como *ARIMA*  $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ . Los componentes del modelo autorregresivo y de promedio móviles son representados por los polinomios  $\psi(B)$  y  $\theta(B)$  de orden  $p$ ,  $q$ , respectivamente, y el componente  $\Psi_P(B^s)$  y  $\Theta_Q(B^s)$  de orden  $P$  y  $Q$  y los componentes diferenciales estacionales por  $\nabla^d = (1 - B)^d$  y  $\nabla_s^D = (1 - B^s)^D$ .

Por ejemplo considere un modelo *ARIMA* $(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)$  con  $s = 12$  es

$$\underbrace{(1 - B)(1 - B^{12})X_t}_{\omega_t} = (1 - \theta_1 - \Theta_1 B^{12} + \theta_1 \Theta_1 B^{13})Z_t.\tag{2.9.20}$$

Para éste proceso, la autocovarianza es calculada como

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= Var(w_t) = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \Theta_2^2 + (-\theta_1\Theta_1)^2) \\ &= \sigma^2(1 + \theta_1^2)(1 + \theta_1^2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= Cov(w_t, w_{t-1}) = \sigma^2(-\theta_1 + \Theta_1(-\theta_1\Theta_1)) \\ &= -\theta_1\sigma^2(1 + \Theta_1).\end{aligned}$$

$$\gamma(2) = \gamma(3) = \dots = \gamma(10) = 0.$$

$$\gamma(11) = \sigma^2\theta_1\Theta_1.$$

$$\gamma(12) = -\sigma^2\Theta_1(1 + \theta_1^2).$$

$$\gamma(13) = \sigma^2\theta_1\Theta_1.$$

$$\gamma(j) = 0, \quad j > 13.$$

En general, considere el modelo no estacional identificado tentativamente, usando los comportamientos no estacionales de la FAM y FAMP, y considere también el modelo estacional identificado en forma tentativa, usando también su FAM y FAMP. Si ambos modelos son modelos de promedio móvil o bien, si son autorregresivos, al combinarlos debemos utilizar términos multiplicativos formados al combinar términos no estacionales con términos estacionales como se muestra en él. De otra forma no se incluye la combinación.

### 2.9.3. Criterios para una identificación tentativa

- Se utiliza el comportamiento del FAM y FAPM de los valores  $X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+n}$  en el nivel no estacional para determinar cuál de los operadores no estacionales se debe utilizar.
- Utilizando los comportamientos del FAM y FAPM de los valores  $X_t,$

$X_{t+1}, \dots, X_{t+n}$  en el nivel estacional para determinar si se debe utilizar algún operador estacional.

- Combinar los modelos obtenidos en los anteriores pasos para llegar a un modelo global identificado tentativamente.
  
- Comprobar el modelo propuesto como se realiza en el nivel no estacional, tomando en cuenta que al calcular la estadística Ljung-Box (Ver en Apéndice C), se determina  $n'$  mediante la fórmula  $n' = n - (d + LD)$ . En éste caso,  $d$  es el grado de diferenciación no estacional y  $D$  es el grado de diferenciación estacional para obtener valores estacionarios de la serie temporal. Por lo tanto,  $d$  y  $D$  casi siempre serán 0 o 1.

#### 2.9.4. Estimación de parámetros

Una vez que se identifica el modelo tentativo, el siguiente paso es estimar los parámetros en el modelo. En ésta sección se presentan tres métodos para su estimación: Método de momentos, estimación de máxima verosimilitud y por mínimos cuadrados ordinarios, los dos últimos son los más usuales.

#### 2.9.5. Método de Máxima Verosimilitud

El método de máxima verosimilitud es uno de los métodos más usado para la estimación, a continuación se abordan diferentes alternativas.

## Estimación de Máxima Verosimilitud Condicional

Considere un modelo ARMA( $p, q$ )

$$X_t = \psi_1 X_{t-1} + \dots + \psi_p X_{t-p} + Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \dots - \theta_q Z_{t-q} \quad (2.9.21)$$

donde  $Z_t$  es independiente e idénticamente distribuida  $N(0, \sigma_Z^2)$  (ruido blanco), la densidad conjunta de probabilidad de  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)'$  ésta dada por

$$P(Z|\underline{\psi}, \underline{\theta}, \sigma_Z^2) = (2\pi\sigma_Z^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Z^2} \sum_{t=1}^n Z_t^2\right).$$

Se puede escribir (2.9.21) como

$$X_t = \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q} + Z_t - \psi_1 X_{t-1} - \dots - \psi_p X_{t-p}, \quad (2.9.22)$$

a continuación se tiene la función de verosimilitud en función de los parámetros  $\psi, \theta, \sigma_Z^2$ .

La función de verosimilitud de los parámetros  $(\underline{\psi}, \underline{\theta}, \sigma_Z^2)$ .

Dado  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$  y asumiendo la condición inicial de que,  $\underline{X}_* = (X_{1-p}, \dots, X_{-1}, X_0)'$  y  $Z_* = (Z_{1-q}, \dots, Z_0)'$  son conocidos. La función log de verosimilitud condicional es

$$\ln L_*(\underline{\psi}, \underline{\theta}, \sigma_Z^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma_Z^2 - \frac{S_*(\underline{\psi}, \underline{\theta})}{2\sigma_Z^2} \quad (2.9.23)$$

donde

$$S_*(\underline{\psi}, \underline{\theta}) = \sum_{t=1}^n Z_t^2(\underline{\psi}, \underline{\theta} \mid X_*, Z_*, X) \quad (2.9.24)$$

es la suma condicional de la función de cuadrados. Las cantidades de  $\underline{\psi}$  y  $\underline{\theta}$ , en la función *log* de verosimilitud condicional (2.9.23) maximizada, son las estimaciones de máxima verosimilitud y éstas tratadas como v.a.'s son los

estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros correspondientes. Notar que (2.9.23) involucra a los datos a través de (2.9.24), además de que es el mismo que el estimador de mínimos cuadrados condicionales.

Una de las alternativas para especificar la condición inicial de  $X_*$  y  $Z_*$  se basa en el supuesto de que  $X_t$  es estacionaria y  $Z_t$  es una serie de variables aleatorias i.i.d  $N(0, \sigma_Z^2)$ , así se puede reemplazar a  $X_t$  desconocido por la media muestral  $\bar{X}$  y a  $Z_t$  por el valor esperado igual a 0.

Es así como para el modelo (2.9.21), se puede asumir que  $Z_p = Z_{p-1} = \dots = Z_{p+1-q} = 0$  y calcular  $Z_t$  para  $t \geq (p+1)$  usando (2.9.22). Por lo tanto la función de la suma de mínimos cuadrados condicional (2.9.24)

$$S_*(\underline{\psi}, \underline{\theta}) = \sum_{t=p+1}^n Z_t^2(\underline{\psi}, \underline{\theta}|X). \quad (2.9.25)$$

Después de obtener los parámetros estimados  $\widehat{\underline{\psi}}, \widehat{\underline{\theta}}$ , el estimador  $\widehat{\sigma_Z^2}$  de  $\sigma_Z^2$  es calculado como

$$\widehat{\sigma_Z^2} = \frac{S_*(\widehat{\underline{\psi}}, \widehat{\underline{\theta}})}{g.l.},$$

donde el número de grados de libertad  $g.l.$  es igual al número de términos usados en la suma de  $S_*(\underline{\psi}, \underline{\theta})$  menos el número de parámetros estimados. Si (2.9.25) es usada para calcular (2.9.24),  $g.l. = (n-p) - (p+q+1) = n - (2p+q+1)$ . Para otro modelo, los  $g.l.$  deberán ser ajustados.

## 2.9.6. Estimación de Máxima Verosimilitud Incondicional

Como se ha mencionado se necesitan de los valores  $X_* = (X_{1-p}, \dots, X_{-1}, X_0)'$  y  $Z_* = (Z_{1-q}, \dots, Z_0)'$  para el cálculo de la suma de cuadrados y así obtener

la función de verosimilitud. Lo que lleva hacer un pronóstico del pasado. La forma siguiente del modelo ARMA permite una representación para éste posible pronóstico

$$(1 - \psi_1 B - \dots - \psi_p B^p) X_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) Z_t \quad (2.9.26)$$

o la forma para el pronóstico de valores pasados,

$$(1 - \psi_1 F - \dots - \psi_p F^p) X_t = (1 - \theta_1 F - \dots - \theta_q F^q) e_t \quad (2.9.27)$$

donde  $F^j X_t = X_{t+j}$ .

Debido a la estacionariedad, (2.9.26) y (2.9.27) debería tener la misma estructura de autocovarianza al igual que  $e_t$  es una serie de ruidos blanco con media cero y varianza  $\sigma_e^2$ . La forma en la que se realiza el pronóstico de los valores futuros  $Z_{n+j}$  para  $j > 0$  basado en los valores  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , con (2.9.27) es la misma en la que se hace pronóstico para los valores pasados  $Z_{n+j}$  para  $j \leq 0$  basado en los valores  $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)$ .

La función de verosimilitud logarítmica incondicional es,

$$\ln L(\underline{\psi}, \underline{\mu}, \underline{\theta}, \sigma_Z^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma_Z^2 - \frac{S(\underline{\psi}, \underline{\mu}, \underline{\theta})}{2\sigma_Z^2} \quad (2.9.28)$$

donde  $S(\underline{\psi}, \underline{\mu}, \underline{\theta})$  es la suma incondicional de la función de cuadrados dada por

$$S(\underline{\psi}, \underline{\mu}, \underline{\theta}) = \sum_{t=-\infty}^n E[Z_t | \underline{\psi}, \underline{\mu}, \underline{\theta}, X]^2 \quad (2.9.29)$$

y  $E(Z_t | \underline{\psi}, \underline{\mu}, \underline{\theta}, X)$  es la esperanza condicional de  $Z_t$ , dado  $\underline{\psi}$ ,  $\underline{\mu}$ ,  $\underline{\theta}$  y  $X$ . Algunos de estos términos tienen que ser calculados usando pronóstico del pasado. Los valores  $\hat{\underline{\psi}}$ ,  $\hat{\underline{\mu}}$  y  $\hat{\underline{\theta}}$  de la función (2.9.28) maximizada son llamados los estimadores de máxima verosimilitud incondicional. Como el  $\ln L(\underline{\psi}, \underline{\mu}, \underline{\theta}, \sigma_Z^2)$

involucra a los datos a través de  $S(\underline{\psi}, \mu, \underline{\theta})$ , éste estimador de máxima verosimilitud incondicional es equivalente a obtener el estimador de mínimos cuadrados incondicional minimizando  $S(\underline{\psi}, \mu, \underline{\theta})$ . En la práctica (2.9.29) es aproximada por

$$S(\underline{\psi}, \mu, \underline{\theta}) = \sum_{t=-M}^n E[Z_t | \underline{\psi}, \mu, \underline{\theta}, X]^2 \quad (2.9.30)$$

donde  $M$  es un entero suficientemente grande tal que

$$|E(X_t | \underline{\psi}, \mu, \underline{\theta}, X) - E(X_{t-1} | \underline{\psi}, \mu, \underline{\theta}, X)| < \varepsilon$$

donde  $\varepsilon$  es menor que cualquier valor arbitrario pequeño para  $t \leq -(M+1)$ . Además esto lleva a que  $E(X_t | \underline{\psi}, \mu, \underline{\theta}, X) \simeq \mu$ ; y por lo tanto es despreciable para  $t \leq -(M+1)$ .

Después de obtener los parámetros  $\hat{\underline{\psi}}$ ,  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\underline{\theta}}$ , el estimador de  $\hat{\sigma}_Z^2$  se puede calcular como

$$\hat{\sigma}_Z^2 = \frac{S(\hat{\underline{\psi}}, \hat{\mu}, \hat{\underline{\theta}})}{n}.$$

Cabe señalar que la importancia de los parámetros estimados a través de pronóstico del pasado es importante para los modelos estacionales, para los que están cerca de ser estacionales y para series que son relativamente cortas.

### 2.9.7. Función exacta de Verosimilitud

Las funciones de verosimilitud condicional e incondicional son aproximaciones. Para ilustrar la derivación exacta de la función de verosimilitud para un modelo de serie de tiempo, considere el proceso AR(1)

$$(1 - \psi B)X_t = Z_t$$

o

$$X_t = \psi X_{t-1} + Z_t$$

donde  $|\psi| < 1$  y  $Z_t$  es i.i.d,  $N(0, \hat{\sigma}_Z^2)$ . Escribiendo el proceso en términos de medias móviles, se tiene

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi^j Z_{t-j}.$$

Claramente  $X_t$  estará distribuido en forma  $N(0, \sigma_Z^2/(1 - \psi^2))$ . La  $X_t$ , sin embargo, está altamente correlacionada. Para derivar la función de densidad de probabilidad conjunta  $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  y por lo tanto la función de verosimilitud de los parámetros, se considera

$$\begin{aligned} e_1 &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi^j Z_{t-j} = X_t \\ Z_2 &= X_2 - \psi X_1 \\ Z_3 &= X_3 - \psi X_2 \\ &\vdots \\ Z_n &= X_n - \psi X_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.9.31}$$

Notar que  $e_1$  sigue una distribución normal  $N(0, \sigma_Z^2/(1 - \psi^2))$ ,  $Z_t$ , para  $2 \leq t \leq n$ , sigue una distribución  $N(0, \sigma_Z^2)$ , y todos son independientes uno de otro. Por lo tanto la densidad de probabilidad conjunta de  $(e_1, Z_2, \dots, Z_n)$  es

$$\begin{aligned} Pr(e_1, Z_2, \dots, Z_n) &= \left(\frac{1 - \psi^2}{2\pi\sigma_Z^2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-e_1^2(1 - \psi^2)}{2\sigma_Z^2}\right) \left(\frac{1}{2\pi\sigma_Z^2}\right)^{(n-1)/2} \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Z^2} \sum_{t=2}^n Z_t^2\right). \end{aligned} \tag{2.9.32}$$

Ahora se aplica la siguiente transformación:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= e_1 \\
 X_2 &= \psi X_1 + e_2 \\
 X_3 &= \psi X_2 + e_3 \\
 &\vdots \\
 X_n &= \psi X_{n-1} + e_n.
 \end{aligned} \tag{2.9.33}$$

El jacobiano de la transformación, de (2.9.31) es

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ -\psi & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -\psi & 1 & . & . & . & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -\psi & 1 \end{bmatrix} = 1 \tag{2.9.34}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 Pr(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \\
 &= \left(\frac{1 - \psi^2}{2\pi\sigma_Z^2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-X_1^2(1 - \psi^2)}{2\sigma_Z^2}\right) \\
 &\quad \left(\frac{1}{2\pi\sigma_Z^2}\right)^{(n-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Z^2} \sum_{t=2}^n (X_t - \psi X_{t-1})^2\right).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para una serie  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  se tiene la siguiente función de verosimilitud exacta:

$$\ln L(X_1, X_2, \dots, X_n | \psi, \mu, \sigma_Z^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln(1 - \psi^2) - \frac{n}{2} \ln \sigma_Z^2 - \frac{S(\psi, \mu)}{2\sigma_Z^2},$$

donde

$$S(\psi, \mu) = (X_1 - \mu)^2(1 - \psi^2) + \sum_{t=2}^n [(X_t - \mu) - \psi(X_{t-1} - \mu)]^2$$

es la suma de los términos cuadrados que sólo está en función de  $\psi$  y  $\mu$ .

### 2.9.8. Estimación por mínimos cuadrados ordinarios (MCO)

El análisis de regresión es probablemente el método estadístico más común en el análisis de datos. Por lo que, la estimación por mínimos cuadrados en éste tema es quizá el más frecuente, sin embargo, se puede usar este método para obtener estimadores para los parámetros de un modelo de series de tiempo. Considere el modelo lineal de regresión

$$Z_t = \psi X_t + e_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

Bajo la siguientes supuestos sobre el término de error  $e_t$ :

1. Media cero:  $E(e_t) = 0$ .
2. Varianza constante:  $E(e_t^2) = \sigma_e^2$ .
3. No existe autocorrelación:  $E(e_t e_k) = 0$  para  $t \neq k$ .
4. Sin correlación con variable explicativa  $X_t$ :  $E(X_t e_t) = 0$ .

Bajo éstas condiciones se tiene el estimador de MCO  $\psi$ ,

$$\psi = \frac{\sum_{t=1}^n X_t Z_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2},$$

éste estimador lineal resulta ser insesgado y consistente. Es decir, cumplen las mejores condiciones que estadísticamente se puede pedir a un estimador. Pero en series de tiempo, el supuesto 4 no se cumple. Sin embargo, dicho método puede ser aplicado en series de tiempo, en cuyo caso, las variables explicativas usualmente son variables aleatorias.

Ahora considérese el siguiente modelo de serie de tiempo:

$$X_t = \psi X_t + e_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

El estimador por MCO de  $\psi$ , basado sobre los datos disponibles es

$$\widehat{\psi} = \frac{\sum_{i=2}^n X_{t-1} X_t}{\sum_{i=2}^n X_{t-1}^2}.$$

Con esto todavía queda por saber si el estimador  $\widehat{\psi}$  aún es insesgado y consistente cuando la variable explicativa es una variable dependiente con  $k$  lapsos. La naturaleza estocástica del término de error  $e_t$  es quien lo determina, es decir  $\widehat{\psi}$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \widehat{\psi} &= \frac{\sum_{i=2}^n X_{t-1} X_t}{\sum_{i=2}^n X_{t-1}^2} = \frac{\sum_{i=2}^n X_{t-1} (\psi X_{t-1} + e_t)}{\sum_{i=2}^n X_{t-1}^2} \\ &= \psi + \frac{\sum_{i=2}^n X_{t-1} e_t}{\sum_{i=2}^n X_{t-1}^2}. \end{aligned} \quad (2.9.35)$$

y se consideran los siguientes dos casos.

**Caso 1**  $e_t = z_t$ ,  $e_t$  es una serie de ruido blanco con media cero y de varianzas constantes  $\sigma_Z^2$ . El parámetro  $\widehat{\psi}$  es equivalente a la correlación muestral con un lapso  $\widehat{\psi}_1$  para la serie  $X_t$ . Si  $|\psi| < 1$  y por lo tanto  $X_t$  se convierte en un proceso AR(1), donde  $\widehat{\rho}_1$  es un estimador consistente de  $\rho_1$  y que es igual a  $\psi$ . Además  $\widehat{\psi}$  es insesgado asintóticamente y un estimador consistente de  $\psi$ .

**Caso 2**  $e_t = (1 - \theta B)Z_t$ , donde  $Z_t$  es un ruido blanco con media cero de una varianza constante  $\sigma_Z^2$ , por lo tanto  $e_t$  es un proceso MA(1). Bajo ésta condición, la serie  $X_t$  se transforma en un proceso ARMA(1,1)

$$X_t = \psi X_{t-1} + Z_t - \theta Z_{t-1},$$

y

$$E(X_{t-1} e_t) = E[X_{t-1} (Z_t - \theta Z_{t-1})] = -\theta \sigma_Z^2.$$

Éste resultado muestra que la autocorrelación del término de error viola el supuesto 3 y 4 cuando la variable explicativa contiene una variable dependiente con lapso,  $X_{t-1}$ . En éste caso,  $\hat{\psi}$  no es más que un estimador consistente de  $\psi$  porque  $\hat{\psi} \simeq \hat{\rho}_1$  es un estimador consistente para  $\rho_1$  y para un proceso ARMA(1,1),

$$\rho_1 = \frac{(\psi - \theta)(1 - \psi\theta)}{1 + \theta^2 - 2\psi\theta} \neq \psi.$$

En conclusión el estimador MCO de los parámetros de una variable explicativa en un modelo de regresión será inconsistente a menos de que el término de error no esté correlacionado con la variable explicativa. Para un modelo ARMA( $p,q$ ), ésta condición usualmente no se mantiene, excepto cuando  $q = 0$ .

### 2.9.9. Método de momentos

El método de momentos para estimar los coeficientes del modelo de series de tiempo propuesto consiste en sustituir los momentos muestrales como la media muestral  $\bar{X}$ , la varianza muestral  $\hat{\gamma}$  y la FAC muestral  $\hat{\gamma}$  por los momentos poblacionales y resolviendo la ecuación resultante, se obtienen los estimadores de los parámetros desconocidos.

Por ejemplo, en el proceso AR( $p$ )  $X_t = \psi_1 X_{t-1} + \psi_2 X_{t-2} + \dots + \psi_p X_{t-p} + Z_t$  con media  $\mu = E[X_t]$  es estimada por  $\bar{X}$ . Para estimar  $\psi_i$ , se usa  $\rho_k = \psi_1 \rho_{k-1} + \psi_2 \rho_{k-2} + \dots + \psi_p \rho_{k-p}$  para  $k \geq 1$  obteniéndose el siguiente sistema

de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \psi_1 + \psi_2\rho_1 + \psi_3\rho_2 + \dots + \psi_p\rho_{p-1} \\
 \rho_2 &= \psi_1\rho_1 + \psi_2 + \psi_3\rho_1 + \dots + \psi_p\rho_{p-2} \\
 &\dots \\
 \rho_p &= \psi_1\rho_{p-1} + \psi_2\rho_{p-2} + \psi_3\rho_{p-3} + \dots + \psi_p.
 \end{aligned} \tag{2.9.36}$$

Entonces, reemplazando  $\rho_k$  por  $\hat{\rho}_k$ , los estimadores de momentos  $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \dots, \hat{\psi}_p$  son la solución al sistema (2.9.36). Esto es,

$$\begin{bmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \\ \dots \\ \hat{\psi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \dots & \hat{\rho}_{p-2} & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho}_{p-3} & \hat{\rho}_{p-2} \\ \dots & & & & & \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \hat{\rho}_{p-3} & \dots & \hat{\rho}_p & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \dots \\ \hat{\rho}_p \end{bmatrix}.$$

Se ha obtenido  $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \dots, \hat{\psi}_p$ , al usar el resultado,

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= E(X_t X_t) = E[X_t(\psi_1 X_{t-1} + \psi_2 X_{t-2} + \dots + \psi_p X_{t-p} + Z_t)] \\
 &= \psi_1 \gamma_1 + \psi_2 \gamma_2 + \dots + \psi_p \gamma_p + \sigma^2
 \end{aligned} \tag{2.9.37}$$

el estimador de momentos para  $\sigma^2$  se obtiene como

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0 (1 - \hat{\psi}_1 \hat{\rho}_1 - \hat{\psi}_2 \hat{\rho}_2 - \dots - \hat{\psi}_p \hat{\rho}_p).$$

Ahora para un modelo AR(1)

$$(X_t - \mu) = \psi_1 (X_{t-1} - \mu) + Z$$

el estimador de  $\psi_1$  es

$$\hat{\psi}_1 = \hat{\rho}_1.$$

El estimador de momentos de  $\mu$  y  $\sigma^2$  esta dado por

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

y

$$\hat{\sigma}^2 = \gamma_0(1 - \hat{\psi}_1\hat{\rho}_1),$$

respectivamente, donde  $\hat{\gamma}_0$  es la varianza muestral de la serie  $X_t$ . Por último se considera a un modelo MA(1)

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1},$$

de nuevo  $\mu$  es estimado por  $\bar{X}$ , se usa que

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

y resolviendo la ecuación cuadrática de arriba para  $\theta_1$  después remplazando  $\rho_1$  por  $\hat{\rho}_1$ . El resultado es

$$\hat{\theta}_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\hat{\rho}_1^2}}{2\hat{\rho}_1}.$$

Una vez obteniendo  $\hat{\theta}_1$ , se calcula el estimador de momentos para  $\sigma^2$  como  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{1 + \hat{\theta}_1^2}$ .

En la Figura 2.11 se presenta de manera sintetizada la metodología de Box-Jenkins (BJ). Tomando en principio una transformación a los datos llamada prediferenciación, esto ayuda a mantener la varianza constante de la serie de tiempo, cabe señalar que dentro de éstas transformaciones, la aplicación de raíces cuadradas, cuartas y el ln resultan ser las más adecuadas para el tratamiento, una vez esto se procede a analizar la media de la serie de tiempo es decir que con esto se verifica la estacionariedad de la serie de

tiempo, en caso de no ser constante se debe aplicar una transformación a través del método de diferencias, una vez esto se analiza si la serie presenta estacionalidad, esto puede ser observado en la FAM y FAMP además de los diagramas de cajas, por último se identifica el tipo de modelo de acuerdo al comportamiento de la FAM y FAMP.

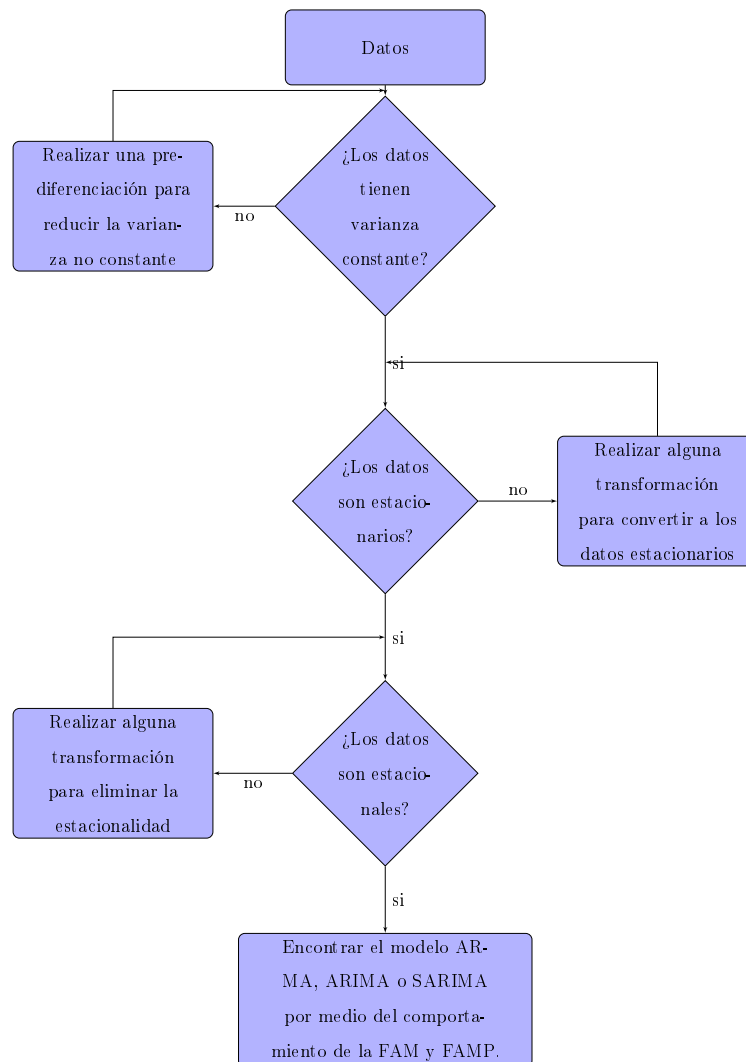


Figura 2.11: Resumen de la metodología Box-Jenkins [10].

### 2.9.10. Diagnostico del modelo seleccionado

Una vez siguiendo la metodología de Box-Jenkins, el paso final para comprobar la eficiencia del modelo identificado, es a través del análisis de residuales, mediante sus correlogramas obtenidos en la estimación, deberán ser **ruido blanco**. Si esto no es así, habrá que realizar una nueva estimación incorporando la estructura más parecida al modelo teórico que podamos intuir con la comparación de estos modelos.

Para saber cuando estamos ante un **ruido blanco**, se pueden hacer las siguientes observaciones:

- Media cero y varianza constante
- No existe autocorrelación
- Se puede identificar mediante la distribución Normal, debido a que es un ruido blanco.

Esto se puede identificar mediante:

- Las gráficas de autocorrelación muestral de los residuos y comprobar que ninguno de ellos supera el valor de las bandas de significancia.
- Mediante el gráfico de residuos la media debe ser nula, lo que significa que el error se mueve en torno al valor cero, además de analizar la constancia de la varianza del error.
- Se analiza el histograma de los residuales, el cual debe observarse una media nula, es decir que los valores se concentran en el valor cero,

además de una varianza constante la cual debe ser reflejada en el histograma, teniendo un peso uniforme en las colas. Lo que nos llevaría a tener un histograma muy parecido al de la distribución Normal.

- Una prueba gráfica de normalidad para los residuales y ver que tanto difiere de ésta, esto se realiza mediante la gráfica QQ, explicada más adelante.

### 2.9.11. Ejemplo

En esta parte se aplica la metodología de Box-Jenkins en el análisis de los datos de una serie de tiempo dados en la Tabla 2.4.

Tabla 2.4: Serie de tiempo.

1	2	3	4	5	6	7	8
-0.2117595	-1.2872040	-0.6051824	-0.3808966	-1.1419170	-0.7139077	-1.0220797	-1.9131391
-3.4824338	-1.1167311	-1.7267992	-2.4410273	-1.6709173	-2.9489364	-1.7727930	-3.5363936
-3.5159628	-4.7769152	-4.6972270	-3.9145513	-5.9049751	-5.5343875	-5.0604850	-7.2313678
-6.9617000	-7.7976601	-9.8730673	-10.2548105	-9.5927315	-9.8676503	-9.1295074	-10.0154529
-8.6810578	-9.2451805	-9.5083060	-9.1254718	-10.5450750	-9.3237443	-9.3181794	-9.8490958
-10.7601857	-10.9922325	-10.7900159	-11.2861510	-14.3881050	-14.7145006	-14.2765313	-12.5130119
-14.8717868	-13.3636597	-12.9348536	-12.5986409	-13.7331584	-12.5612337	-11.6687234	-11.8230166
-11.3733634	-12.8654104	-13.9263613	-13.7341780	-14.0717130	-15.8282935	-14.8122714	-14.7528161
-13.5039946	-13.4379666	-14.3385791	-14.0798658	-13.0736400	-13.9937194	-11.2708599	-13.6356295
-11.6031886	-13.9712072	-11.3577342	-11.8981195	-12.0049295	-12.1403674	-12.1343564	-10.7394032
-11.4673767	-11.2750550	-11.9186081	-11.9086247	-14.7176951	-12.0764121	-13.4468704	-12.7512851
-15.8460639	-16.0007837	-15.6180650	-16.0200496	-14.9761486	-15.8763364	-15.3131619	-15.0216184
-15.7284282	-14.4996634	-17.3073665	-18.0142405	-17.3338627	-17.0905901	-16.6217711	-17.7455453
-18.4205675	-18.5490863	-18.2081016	-16.5923872	-16.1005775	-16.3902724	-14.7127847	-14.6858540
-14.3787705	-12.1860231	-11.2729120	-9.7556355	-9.4632109	-8.4715660	-7.6110527	-6.7035854

La gráfica de los datos de la serie de tiempo dada en la Tabla 2.4 se observa en la Figura 2.12.

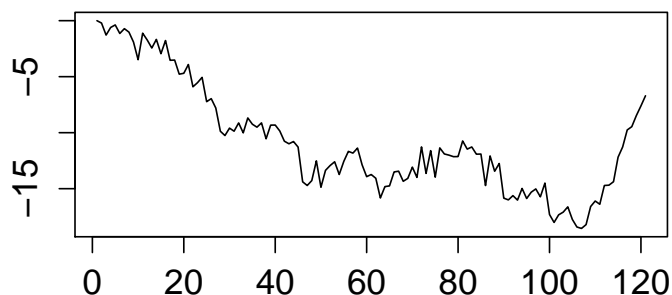


Figura 2.12: Serie de tiempo

Como se aprecia claramente, la serie no tiene una media y varianza constantes lo cual se puede comprobar mediante la prueba Dickey-Fuller, la cual es útil para contrastar el siguiente juego de hipótesis:

$H_0$ : La serie es no estacionaria *vs*  $H_1$ : La serie es estacionaria

con el estadístico  $\tau$  y la región de rechazo es  $R.C = \{\tau_H : \tau_H \leq \tau_\alpha\}$ , los resultados de la prueba se muestran en la Tabla 2.5, donde no se rechaza la hipótesis nula que dice que la serie es no estacionaria, por lo tanto la serie no es estacionaria y de acuerdo a la metodología de Box-Jenkins se transforma a la serie para así volverla estacionaria, aplicando una diferencia en el nivel no estacional.

Tabla 2.5: Prueba Dickey-Fuller.

Para $\alpha = .01$ , $\tau_\alpha = -2.60$	
Prueba de hipótesis	
$\tau_H$	-1.7266
R.C.	$\tau_H \leq -2.60$
p-valor	.6901
Conclusión	No se rechaza $H_0$

Así, al aplicar la transformación de una diferencia en la serie se obtiene la serie transformada cuya representación gráfica se encuentra en la Figura 2.13.

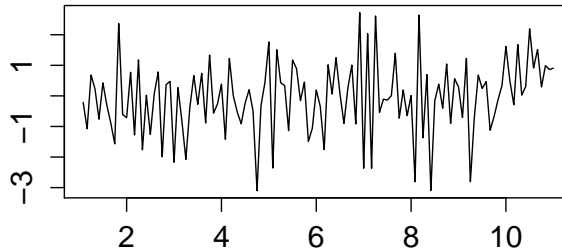


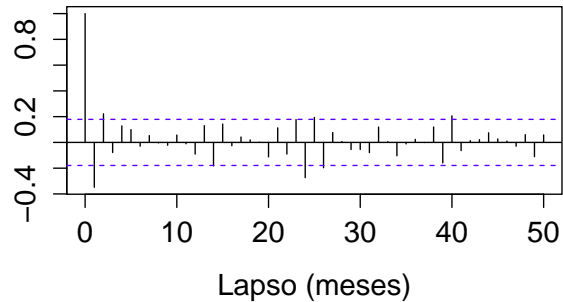
Figura 2.13: Serie de tiempo con una diferencia

Ahora la serie con una diferencia parece tener una media y varianza constante, para comprobarlo se aplica nuevamente el test de Dickey-Fuller, el resultado se muestra en la Tabla 2.6. Obteniéndose como resultado el rechazo de la hipótesis nula, lo cual indica que la serie transformada puede considerarse como estacionaria.

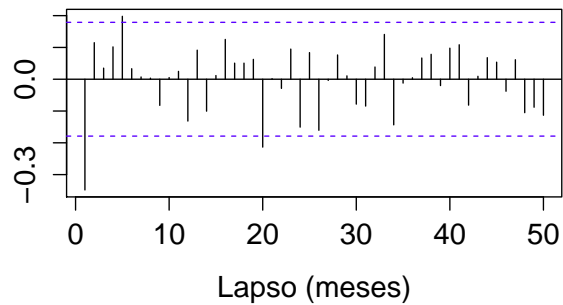
Tabla 2.6: Prueba Dickey-Fuller.

Para $\alpha = .01$ , $\tau_\alpha = -2.60$	
Prueba de hipótesis	
$\tau_H$	-4.0787
R.C.	$\tau_H \leq -2.60$
p-valor	0.01
Conclusión	Se rechaza $H_0$

Además se analiza el comportamiento de su autocorrelograma y autocorrelograma parcial, en la Figura 2.14 se muestran las respectivas gráficas.



(a) FAC



(b) FACP

Figura 2.14: FACP de la serie con una diferencia.

Como se puede notar, el autocorrelograma pareciera tener un comportamiento de un modelo  $MA(2)$  sin embargo sobresalen pequeñas espigas en diferentes lapsos como en lapso 24 aproximadamente. El autocorrelograma parcial tiene una espiga sobresaliente en el primer lapso, por lo que podría corresponder a la FACP de un modelo  $AR(1)$  pero después aparecen espigas pequeñas en diferentes lapsos como en el 20. Se elige un modelo *ARIMA* por tener una diferencia y se podría pensar en un modelo combinado entre  $AR$  y  $MA$ . A continuación se prueban diferentes modelos para la serie, eligiendo al mejor modelo mediante el Criterio de Akaike, el cual señala que el mejor modelo es aquel con el estadístico de menor tamaño, en la Tabla 2.7 se muestra el

coeficiente para los diferentes modelos. Se observa que el mejor modelo es  $ARIMA(2, 1, 1)$ , seguido de un  $ARIMA(1, 1, 0)$ .

Tabla 2.7: CIA para diferentes modelos.

Modelo	AIC
$ARIMA(2, 1, 1)$	372.13
$ARIMA(1, 1, 0)$	373.31
$ARIMA(2, 1, 2)$	373.66
$ARIMA(1, 1, 1)$	373.96
$ARIMA(2, 1, 2)$	374.01
$ARIMA(0, 1, 2)$	374.29
$ARIMA(1, 1, 2)$	375.78
$ARIMA(0, 1, 1)$	377.31

Enseguida se procede a la estimación de los parámetros del modelo que es considerado como el mejor, en éste caso el modelo  $ARIMA(2, 1, 1)$ , las estimaciones obtenidas mediante el Software para series de tiempo en el sistema R se presentan en la Tabla 2.8.

Por lo tanto el modelo  $ARIMA(2, 1, 1)$  queda determinado de la siguiente Tabla 2.8: Estimación de parámetros.

Parámetro	Valor	Error Estándar
AR1	0.4805	0.1415
AR2	0.3992	0.0861
MA1	0.8108	0.1314

forma

$$\begin{aligned}
 X_t &= \psi_1 X_{t-1} + \psi_2 X_{t-2} + Z_t + \theta Z_{t-1} \\
 &= 0.4805 X_{t-1} + 0.3992 X_{t-2} + Z_t + 0.8108 Z_{t-1}.
 \end{aligned}
 \tag{2.9.38}$$

Por último se verifica que el modelo propuesto sea adecuado, por lo que se procede a analizar el comportamiento de los residuales, el cual determina si los residuales son aleatorios. Para hacer la verificación se utiliza la prueba Ljung-Box, la cual contrasta el siguiente juego de hipótesis,

$H_0$ : El modelo es apropiado *vs*  $H_1$ : El modelo es inapropiado

usando el estadístico  $Q^*$ , de esta forma la región de rechazo es  $R.C = \{Q^* : Q^* > \chi^2_{[\alpha]}(K - n_c)\}$ , siendo  $K$  las primeras autocorrelaciones muestrales de los residuos y  $n_c$  el número de parámetros estimados, en éste caso  $K = 24$  y  $n_c = 3$ , los resultados de la prueba se muestra en la Tabla 2.9.

Tabla 2.9: Prueba Ljung-Box.

Para $\alpha = .05$ , $\chi^2_{[\alpha]}(K - n_c) = 32.67$	
Prueba de hipótesis	
$Q^*$	20.997
R.C.	$Q^* \leq 32.67$
p-valor	0.4591
Conclusión	No se rechaza $H_0$

Por lo tanto no se rechaza la hipótesis nula es decir se acepta la suficiencia del modelo, en la Figura 2.15 se muestra el histograma de los residuales.

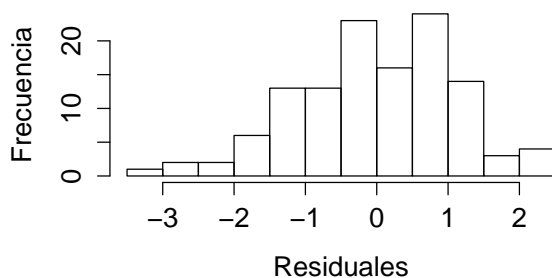
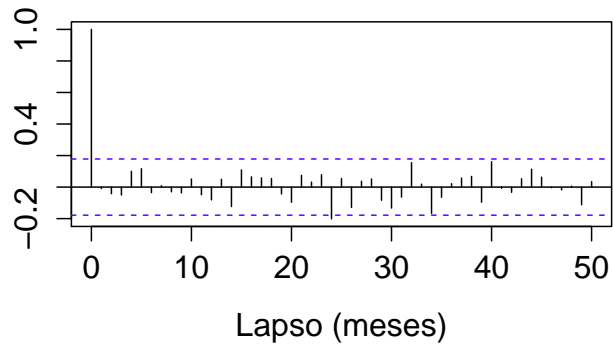


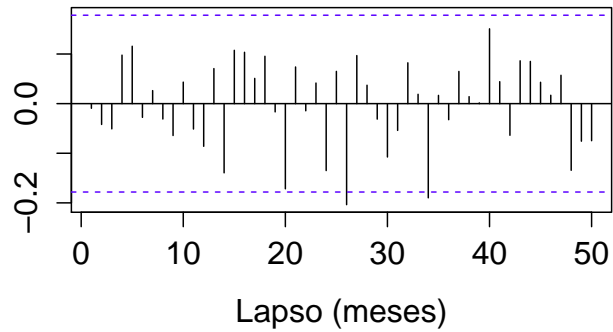
Figura 2.15: Histograma de los residuales

Luego podemos observar la FAC y FACP para los residuales en la Figura 2.16 y 2.17, los cuales muestran la suficiencia del modelo.



(a) FAC

Figura 2.16: FAC y FACP de los residuales



(a) FACP

Figura 2.17: FAC y FACP de los residuales

Una vez que se ha comprobado la suficiencia se realiza el pronóstico para el siguiente año es decir se pronostican 12 valores.

En la Figura 2.18 se muestra gráficamente el pronóstico, además del intervalo de confianza señalado con color verde.

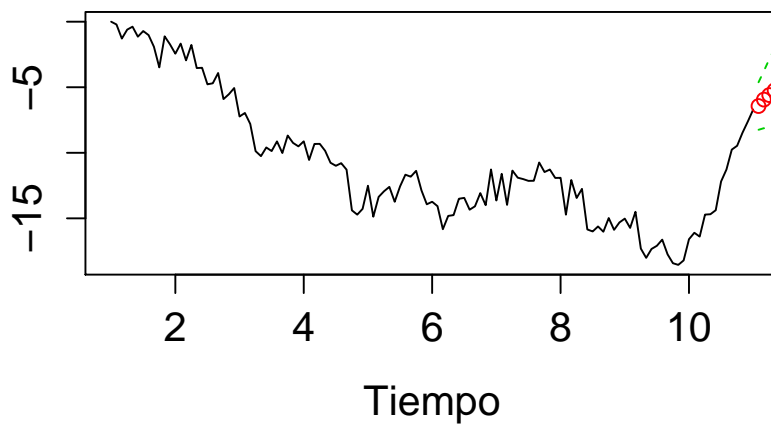


Figura 2.18: Pronóstico

La Tabla 2.10 indica el período e intervalo de confianza en el que se encuentra cada punto pronosticado.

Tabla 2.10: Estimación de parámetros

Período	Intervalo inferior	Pronóstico	Intervalo superior
121	-4.6208715	-5.826314	-8.245573
122	-3.7598048	-5.334107	-8.122225
123	-2.8618064	-4.989673	-8.331355
124	-2.0559488	-4.627669	-8.413204
125	-1.2800733	-4.316221	-8.566183
126	-0.5453721	-4.022049	-8.712540
127	0.1577081	-3.756362	-8.884247
128	0.8301509	-3.511259	-9.066483
129	1.4749215	-3.287418	-9.263573
130	2.0938050	-3.082012	-9.471644
131	2.6885943	-2.893952	-9.690313
132	3.2608263	-2.721586	-9.917814

Es así como se tiene al mejor modelo para pronosticar a los datos futuros, cabe señalar que efectivamente los datos fueron obtenidos de una simulación del modelo  $ARIMA(2, 1, 1)$ , comprobándose, al usar la metodología de Box-Jenkins, que efectivamente, se obtiene como mejor modelo aquel de donde se obtuvieron los datos por simulación.

# Capítulo 3

## Caso de estudio

El INEGI tiene como principal objetivo informar a la sociedad y dar a conocer mediante indicadores el estado y evolución de la actividad económica del país. Como un indicador de corto plazo tiene al IGAE.

El IGAE mide la evolución de las empresas productoras de bienes y servicios, así como el grupo de las que también se dedican a su comercialización, en el corto plazo de forma mensual, mismo que sigue el cálculo trimestral del PIB y mensual del indicador de la actividad industrial; así como la clasificación por actividades económicas y las fuentes de información que cuentan con una gran oportunidad mensual. De esta manera existe la compatibilidad entre los productos de corto plazo [15].

Las cifras mensuales del IGAE se encuentran en la página del INEGI, en el apartado del banco de información económica (BIE), la serie de datos con la que se trabaja es la original total, la cual toma al 2008 como año base, teniéndose información desde el mes de enero de 1993, y ésta se expresa en índices de volumen físico, donde se considera a un año base como referencia

para comparar los siguientes años, actualmente se tiene como año base al 2008 con un índice de volumen físico de 100 y a partir de éste valor se tiene un aumento del IGAE o lo contrario, con índices mensuales, acumulados y sus respectivas variaciones anuales.

A partir del 2008 el cálculo del IGAE utiliza el esquema conceptual y metodológico de las cuentas de bienes y servicios del Sistema de Cuentas Nacionales de México (SCNM), donde el índice de volumen físico de las actividades económicas, primarias, secundarias y terciarias, contienen un volumen físico para las clases más representativas y con información oportuna de las actividades económicas.



Figura 3.1: Actividades económicas dominantes en México

El análisis se hace para la República Mexicana, tomando en cuenta las

actividades primarias, secundarias y terciarias. La forman las actividades económicas con mayor peso y con información. La clasificación de las actividades económicas son muy diversas y son clasificadas de acuerdo al INEGI [10]. En la Figura 3.1 se clasifican las actividades dominantes en México de acuerdo al INEGI.

Para la elaboración de éste indicador se dispone de datos estadísticos provenientes de las actividades primarias, secundarias y terciarias, en la Tabla 3.1 se presenta la clasificación de las actividades que incorporan al IGAE.

Tabla 3.1: Clasificación de las actividades económicas.

<b>Actividades Primarias</b>	Agricultura, Ganadería, Explotacion forestal, Pesca.
<b>Actividades Secundarias</b>	Minería, manufacturas, electricidad, construcción, agua, suministro de gas por ducto al consumidor final.
<b>Actividades Terciarias</b>	Comercio, transporte, correo y almacenamiento, servicio financieros y de seguros, servicios de alojamiento temporal y de preparación de alimentos y bebidas, actividades gubernamentales, información en medios masivos, servicios inmobiliarios y de alquiler de bienes muebles e intangibles, servicios profesionales, científicos y técnicos, servicio de apoyo al negocio, servicio educativo, servicio de salud, servicio de esparcimiento, deportivo y otros servicios recreativos y servicio de intermediación financiera medido indirectamente.

Algunas de las fuentes para obtener los datos de las actividades económicas se muestran en la Tabla 3.2.

Es importante destacar que la información básica que incorpora el IGAE contiene datos muy preliminares y está sujeta a revisión por parte de las empresas y organismos públicos y privados; adicionalmente, no incluye la to-

talidad de las actividades como lo hace el PIB. Sin embargo el IGAE tiene la ventaja de ser un indicador a corto plazo que muestra la dirección que va tomando la economía del país.

Tabla 3.2: Fuentes de consulta [14].

Actividades primarias	Actividades secundarias	Actividades Terciarias
Secretaría de Agricultura, Ganadería, Desarrollo Rural, Pesca y Alimentación (SAGARPA)	Estadística Mensual de la Industria Minerometalúrgica	Encuesta Mensual de Servicios
	Encuesta Nacional de Empresas Constructoras	Sistema de Transporte Colectivo (METRO)
	Encuesta Mensual de la Industria Manufacturera	Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado (ISSSTE)
	Camino y Puentes Federales (CAPUFE)	Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS)
	Comisión Federal de Electricidad (CFE)	Banco de México (BANXICO)
	Petróleos Mexicanos (PEMEX)	Servicio postal Mexicano (SEPOMEX)
		Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT)
		Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP)
		Secretaría de Salud (SS)
		Secretaría de Turismo (SECTUR)

A continuación se describe la metodología que se emplea actualmente pa-

ra su cálculo [11].

Se obtienen índices mensuales por clase de actividad económica. Así se extrapolan los respectivos valores agregados brutos registrados en el año 2008. La producción típica se sustenta en un amplio y homogéneo detalle de los productos que elaboran las empresas.

Para lograr resultados regulares y consistentes se emplea un método estadístico donde las cantidades se cuentan en precios constantes. Se utiliza la fórmula de Laspeyres (ver [10], página 171), de agregación ponderada, con base en los precios del año 2008. De esta forma se suma para cada periodo, el valor de la producción de cada clase en términos reales de 2008, y dispone de un índice de volumen físico directo y ponderado para cada clase.

La medición mensual real de cada clase utiliza la fórmula de Laspeyres para cada producto o clasificación de productos, lo que permite obtener cada periodo de forma agregada en términos reales del 2008, además de contar con el volumen físico para cada clase de las actividades económicas.

Cabe mencionar que los resultados del IGAE siguen los mismos índices y métodos empleados para los cálculos trimestrales del producto interno bruto (PIB).

### **3.1. Análisis de los datos con el modelo**

#### *SARIMA*

Los datos analizados se toman mensualmente, tal como, los proporciona el INEGI, a partir de Abril de 1994 hasta Noviembre del 2015, el IGAE es publicado con 2 meses de retardo es por eso que en este trabajo se tienen datos hasta esa fecha, por lo tanto se tiene la información correspondiente a

248 meses, contando así casi 22 años. En forma gráfica los datos del IGAE se representan en la Figura 3.2.

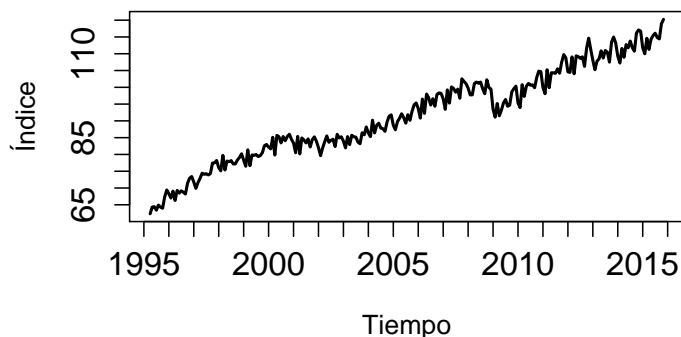


Figura 3.2: Serie de tiempo IGAE

De acuerdo a la Figura 3.2, es claro que la serie no tiene una media y varianza constantes por lo tanto se tiene que realizar una transformación para convertirla estacionaria. Se puede observar que la serie tiene una evidente caída en el 2009, es por eso que se consideran los modelos de intervención dentro de los modelos *ARIMA* o *SARIMA*. Se realiza primero un análisis de la serie sin tomar en cuenta los modelos de intervención y después haciéndolo, para así contrastar su eficacia y determinar al mejor modelo.

### 3.2. Análisis del modelo sin intervención

Debido a que la serie de tiempo no es estacionaria respecto a su varianza, se realiza una pre-diferenciación con el objeto de estabilizar dicha varianza, a continuación se presentan en la Figura 3.3 tres tipos de pre-diferenciación y se concluye que la mejor es aquella que utiliza raíces cuartas del IGAE, ya que ésta genera serie con variación estacional constante. Aquí, los datos

originales del IGAE se representan por  $X_t$ , los datos transformados por la pre-diferenciación "raíz cuarta" por  $X_t^*$ .

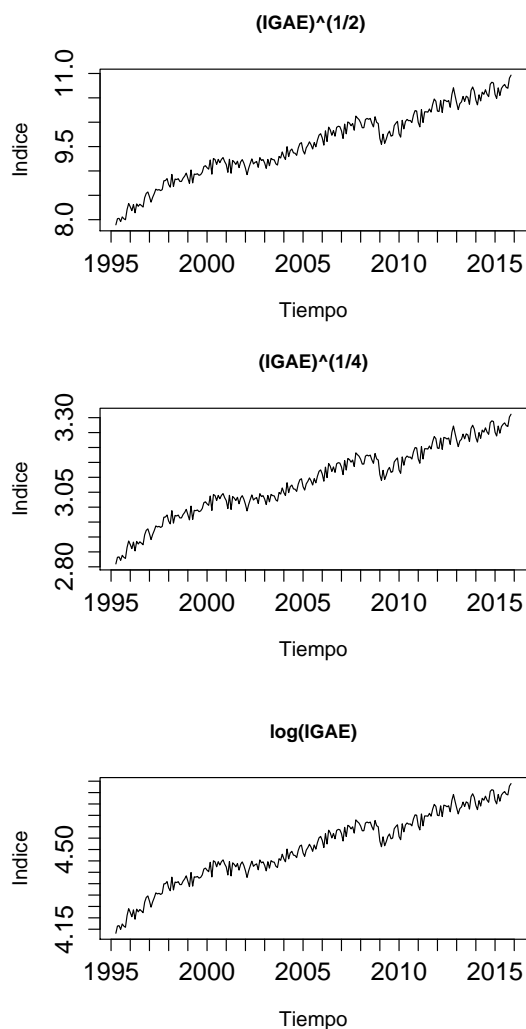


Figura 3.3: Representación de las series generadas al transformar la serie original usando las pre-diferencias raíz cuadrada, raíz cuarta y logarítmica de la serie de datos del IGAE.

Sin embargo la serie de tiempo sigue siendo no estacionaria ya que no tiene una media constante, así se aplica una diferencia a la serie  $X_t^*$ , obteniéndose una nueva, cuyos valores se representarán por  $Y_t$  y cuya gráfica, además de

su FAM y su FAMP se presentan en la Figura 3.4, donde en la FAM hay evidencia de estacionalidad con un período de  $s = 12$ .

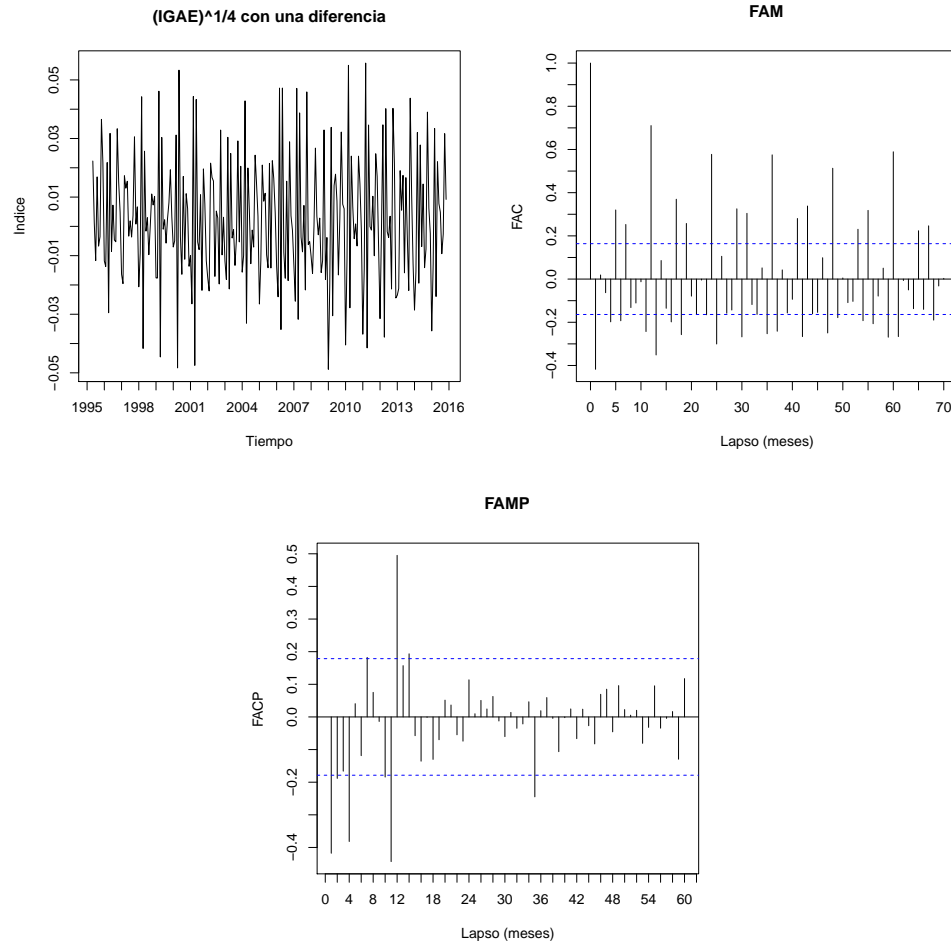


Figura 3.4: Diferenciación de la serie  $Y_t$  con su FAM y FAMP.

La existencia de estacionalidad también se comprueba mediante el análisis de diagramas de cajas y bigotes, los cuales, resumen la información de medidas estadísticas: el valor mínimo, el primer cuartil, la mediana, el tercer cuartil y el valor máximo. Consisten en un rectángulo, donde los lados más largos muestran el recorrido intercuartílico, dividida por un segmento

horizontal que indica la posición de la mediana. Esta caja se ubica a escala sobre un segmento que tiene como extremos los valores mínimo y máximo de la variable. Las líneas que sobresalen de la caja se llaman bigotes. Estos bigotes tienen un límite de prolongación, de modo que cualquier dato o caso que no se encuentre dentro de este rango es marcado e identificado individualmente. Dicho diagrama se encuentran en la Figura 3.5, donde los valores tienen un leve incremento en los últimos meses, sin embargo no hay una notable estacionalidad con  $s=12$ .

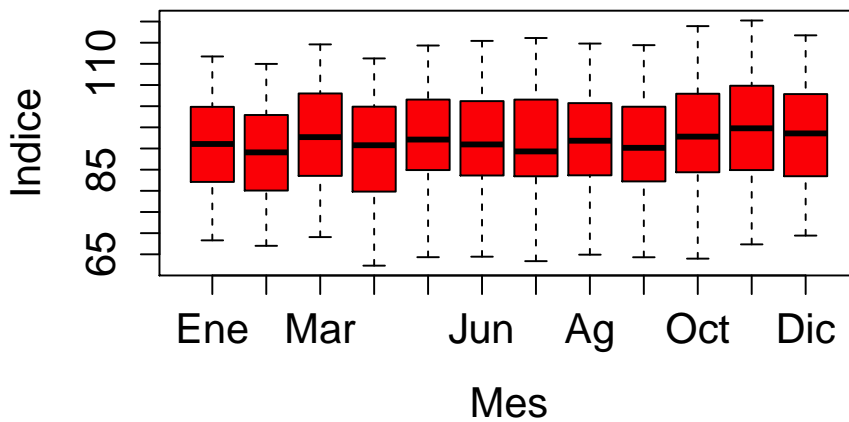


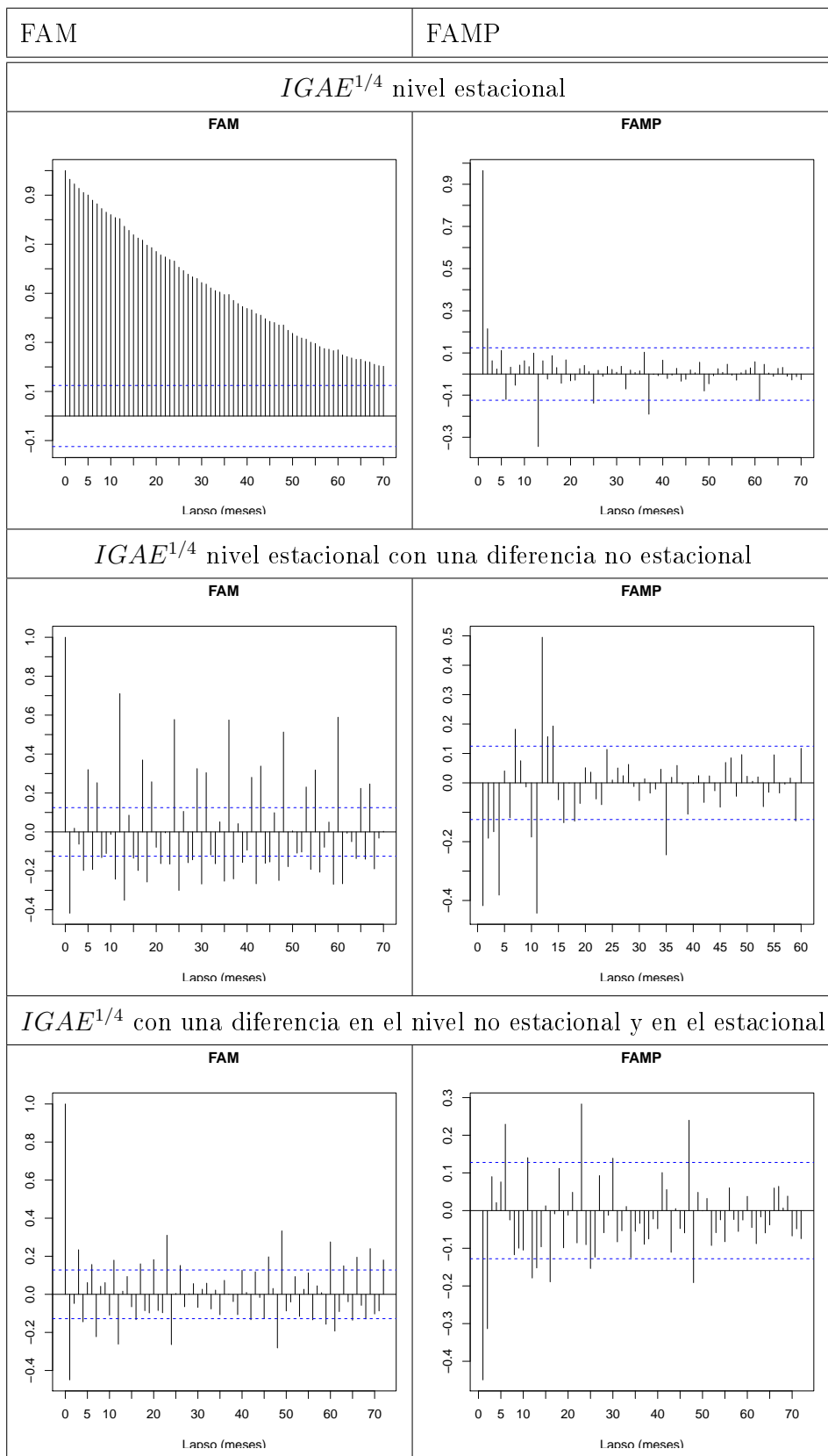
Figura 3.5: Diagramas de cajas y bigotes

Posteriormente se realiza el diagnostico de estacionariedad en el nivel no estacional, donde el comportamiento parece ser senoidal amortiguado, mediante la prueba de Dickey-Fuller se obtiene un  $p\text{-valor}=0.1$ ; así, la conclusión es que la serie es estacionaria para cualquier nivel de significancia razonable ( $\alpha < 0.1$ ). Luego se tiene que tomar medidas para eliminar la estacionalidad, se observa que los valores se extinguen con lentitud extrema por lo tanto se analizará la parte estacional ya que se pone en duda la estacionariedad estacional.

A continuación se presenta la Tabla 3.3, donde en el primer renglón se presenta la serie  $X_t^*$  a nivel estacional con un período de 12 meses ( $s = 12$ ), con el objetivo de hacer el análisis a un nivel estacional  $s = 12$ , por otro lado, se observa que su FAM se desvanece muy lentamente, indicando que la serie no es estacionaria, y que su FAMP se desvanece rápidamente en su nivel no estacional y estacional, se verifica la no estacionariedad con ayuda del test de Dickey-Fuller, el cual arroja un p-valor de 0.03565; de forma que, si  $\alpha = 0.01$ , la conclusión es que la serie es no estacionaria.

En el segundo renglón se muestra la serie  $Y_t$  a nivel estacional; en este caso se nota que la FAM va disminuyendo, sin embargo lo hace lentamente, el resultado de la prueba de Dickey-Fuller arroja un p-valor = 0.2458; así, la conclusión es que la serie es no estacionaria para cualquier nivel de significancia razonable ( $\alpha < 0.24$ ).

En el tercer renglón se toma en cuenta la serie  $Y_t$  a nivel estacional, con una diferencia en el nivel estacional, el modelo sigue poniendo en duda su estacionariedad ya que su FAM decae muy lentamente, tanto en el nivel no estacional como en el estacional, la prueba Dickey-Fuller arroja un p-valor = 0.1493, por lo tanto se afirma que sigue siendo no estacionaria. Debido a esto un modelo estacional con período de  $s = 12$  no será adecuado para pronosticar los datos.

Tabla 3.3: Análisis de  $Y_t$  a nivel estacional  $s = 12$ .

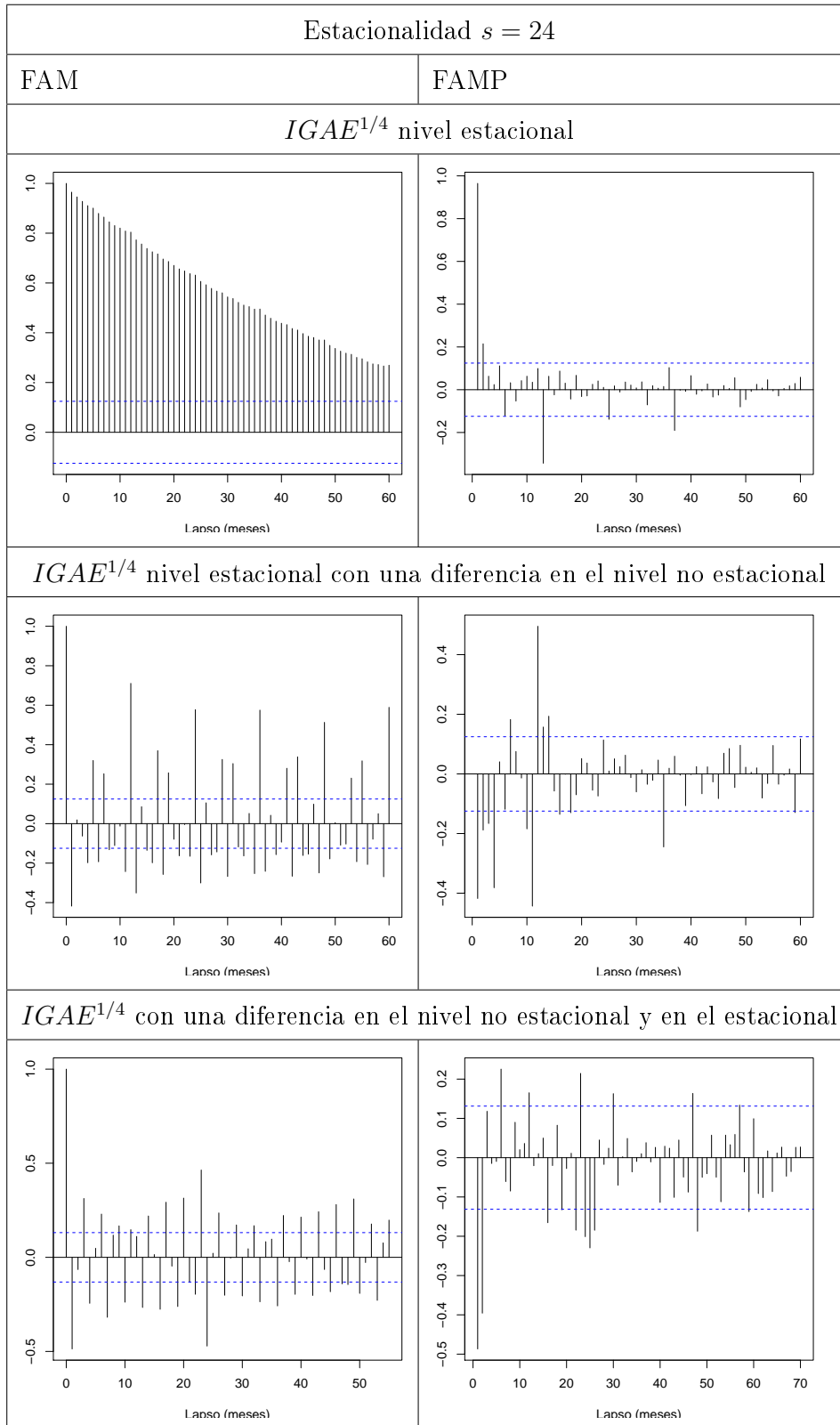
Con ayuda del Software R, se comprueba que no existe un modelo adecuado con estacionalidad de período  $s = 12$ . Así, se analizan los mejores modelos de acuerdo al Criterio de Akaike, los resultados se encuentran en la Tabla 3.4, observándose de acuerdo a la prueba de Ljung-Box, que los modelos no son adecuados, puesto que se rechaza tal hipótesis con cualquier nivel de significancia razonable. Por lo que se concluye que a pesar de que estos modelos son los más aceptables con estacionalidad de período  $s = 12$ , no son adecuados para predecir los datos del IGAE.

Tabla 3.4: Criterio de Akaike y Prueba Ljung-Box.

Modelo	CIA	Prueba de Ljung-Box	
		Estadístico	p-valor
$SARIMA(2, 1, 0)(2, 0, 0)_{12}$	-1456.6	122.69	1.95e-05
$SARIMA(2, 1, 0)(2, 1, 0)_{12}$	-1406.44	151.58	4.14e-09

Ahora, considerando los resultados obtenidos en el tercer renglón de la Tabla 3.3, es decir los modelos con  $d = 1$  y  $D = 1$ , se aprecian espigas en los períodos  $2s$  y  $4s$  con  $s = 12$  tanto en la FAM, como en la FAMP por lo tanto, se decide realizar un análisis considerando lapsos estacionales de longitud  $s = 24$ .

En la Tabla 3.5 se observa el comportamiento de las series  $X^*$  a nivel estacional con 24 meses, el de la serie  $Y_t$  a nivel estacional, y finalmente  $Y_t$  con una diferencia estacional. Del análisis del comportamiento de las series dado en la Tabla 3.5, se consideran los modelos  $SARIMA(2, 1, 3) (2, 1, 1)_{24}$ ,  $SARIMA(2, 1, 2) (2, 1, 1)_{24}$ ,  $SARIMA(2, 1, 3) (2, 1, 2)_{24}$  y  $SARIMA(2, 1, 2) (2, 1, 0)_{24}$ .

Tabla 3.5: Análisis de  $Y_t$  a nivel estacional  $s = 24$ .

Con ayuda del Software R, de acuerdo al Criterio de Akaike se seleccionó al más adecuado, en la Tabla 3.6 se muestran los resultados, donde el mejor modelo es un  $SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 1)_{24}$  puesto que la estadística del Criterio de Akaike, toma para este modelo, el valor más pequeño.

Tabla 3.6: Criterio de Akaike a nivel estacional  $s = 24$ .

Modelo	Criterio de Akaike
$SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 1)_{24}$	-1344.36
$SARIMA(2, 1, 2)(2, 1, 1)_{24}$	-1322.69
$SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 2)_{24}$	-1319.05
$SARIMA(2, 1, 2)(2, 1, 0)_{24}$	-1316.58

Por lo tanto, el modelo propuesto

$$\Psi_2(B^{24})\psi_2(B)\nabla_{24}^1\nabla^1X_t^* = \Theta_1(B^{24})\theta_3(B)Z_t \quad (3.2.1)$$

donde  $\nabla^1 = (1 - B)^1$  y  $\nabla_{24}^1 = (1 - B^{24})^1$ , además de que  $X_t^* = X_t^{.1/4}$  es una observación del IGAE en el tiempo  $t$ . Otra forma de presentar el modelo es considerar que

$$Y_t = X_t^* - X_{t-1}^* - X_{t-24}^* + X_{t-25}^*$$

luego en la parte no estacional se tiene el modelo

$$Y_t = \psi_1Y_{t-1} + \psi_2Y_{t-2} + Z_t + \theta_1Z_{t-1} + \theta_2Z_{t-2} + \theta_3Z_{t-3}$$

y en la parte estacional se propone

$$Y_t = \Psi_1Y_{t-1} + \Psi_2Y_{t-2} + Z_t + \Theta_1Z_{t-1}$$

de forma que, el modelo integrado propuesto es

$$\begin{aligned}
Y_t = & \psi_1 Y_{t-1} + \psi_2 Y_{t-2} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \theta_3 Z_{t-3} + \Psi_1 Y_{t-1} \\
& + \Psi_2 Y_{t-2} + \Theta_1 Z_{t-1} + \psi_1 \Psi_1 Y_{t-2} + \psi_1 \Psi_2 Y_{t-3} + \psi_2 \\
& \Psi_1 Y_{t-3} + \psi_2 \Psi_2 Y_{t-4} + \theta_1 \Theta_1 Z_{t-2} + \theta_2 \Theta_1 Z_{t-3} \\
& + \theta_3 \Theta_1 Z_{t-4}.
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Con objeto de pronosticar seis meses al IGAE, se tiene que como  $Y_t = X_t^* - X_{t-1}^* - X_{t-24}^* + X_{t-25}^*$  donde  $X_t^* = X_t^{1/4}$ , el modelo, finalmente, puede expresarse como

$$\begin{aligned}
X_t = & X_{t-1}^* + X_{t-24}^* - X_{t-25}^* + \psi_1 (X_{t-1}^* - X_{t-2}^* - X_{t-25}^* + X_{t-26}^*) \\
& + \psi_2 (X_{t-2}^* - X_{t-3}^* - X_{t-26}^* + X_{t-27}^*) + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} \\
& + \theta_3 Z_{t-3} + \Psi_1 (X_{t-1}^* - X_{t-2}^* - X_{t-25}^* + X_{t-26}^*) + \Psi_2 (X_{t-2}^* \\
& - X_{t-3}^* - X_{t-26}^* + X_{t-27}^*) + \Theta_1 Z_{t-1} + \psi_1 \Psi_1 (X_{t-2}^* \\
& - X_{t-3}^* - X_{t-26}^* + X_{t-27}^*) + \psi_1 \Psi_2 (X_{t-3}^* - X_{t-4}^* - X_{t-27}^* + \\
& X_{t-28}^*) + \psi_2 \Psi_1 (X_{t-3}^* - X_{t-4}^* - X_{t-27}^* + X_{t-28}^*) + \psi_2 \Psi_2 (X_{t-4}^* \\
& - X_{t-5}^* - X_{t-28}^* + X_{t-29}^*) + \theta_1 \Theta_1 Z_{t-2} + \theta_2 \Theta_1 Z_{t-3} \\
& + \theta_3 \Theta_1 Z_{t-4}.
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Utilizando el Software R se realiza la estimación de parámetros, utilizando el método de máxima verosimilitud, los resultados se muestran en la Tabla 3.7.

Tabla 3.7: Parámetros del modelo  $SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 1)_{24}$  con  $s = 24$ .

Tipo de parámetro	AR1	AR2	MA1	MA2	MA3	SAR1	SAR2	SMA1
Valor	-1.1587	-0.9999	0.7507	0.5191	-0.4126	-0.2707	-0.2408	-0.5067
Error Estándar	0.0042	0.0004	0.0086	0.0046	0.0155	0.1266	0.0920	0.1308

Una vez estimando los parámetros, el modelo queda como

$$\begin{aligned}
X_t = & X_{t-1}^* + X_{t-24}^* - X_{t-25}^* - 1.1587(X_{t-1}^* - X_{t-2}^* - X_{t-25}^* \\
& + X_{t-26}^*) - 0.9999(X_{t-2}^* - X_{t-3}^* - X_{t-26}^* + X_{t-27}^*) + Z_t \\
& + 0.7507Z_{t-1} + 0.5191Z_{t-2} - 0.4126Z_{t-3} - 0.4126(X_{t-1}^* \\
& - X_{t-2}^* - X_{t-25}^* + X_{t-26}^*) - 0.2707(X_{t-2}^* - X_{t-3}^* \\
& - X_{t-26}^* + X_{t-27}^*) - 0.5067Z_{t-1} + 1.1587(0.4126) \\
& (X_{t-2}^* - X_{t-3}^* - X_{t-26}^* + X_{t-27}^*) + 1.1587(0.2707) \\
& (X_{t-3}^* - X_{t-4}^* - X_{t-27}^* + X_{t-28}^*) \\
& + 0.9999(0.4126)(X_{t-3}^* - X_{t-4}^* - X_{t-27}^* + X_{t-28}^*) \\
& + 0.9999(0.2707)(X_{t-4}^* - X_{t-5}^* - X_{t-28}^* + X_{t-29}^*) \\
& - 0.7507(0.5067)Z_{t-2} - 0.5191(0.5067)Z_{t-3} \\
& + 0.4126(0.5067)Z_{t-4}.
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

En la Tabla 3.8 se muestran los resultados de la prueba de Ljung-Box aplicada a los datos, se calcula para diferentes lapsos en los cuales la prueba es suficiente.

Tabla 3.8: Prueba Ljung-Box del modelo  $SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 1)_{24}$ .

Modelo $SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 2)_{24}$		
Lapso	Prueba de Ljung-Box	
	Estadístico	p-valor
24	24.334	0.08246
36	36.74	0.1247
48	44.562	0.2858
72	62.31	0.5365

Cabe mencionar que el pronóstico de la serie IGAE deben ser elevadas a la cuarta ya que recordemos que  $X_t^* = X_t^{1/4}$  por lo tanto  $\widehat{X}^{1/4}$  se sustituyen por  $(\widehat{X}^{1/4})^4 = \widehat{X}$ . Una vez hecho esto se usa el modelo propuesto,  $SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 1)_{24}$ , para pronosticar el IGAE, teniendo como referencia a los datos del IGAE hasta Mayo del 2015, con el propósito de pronosticar los últimos 6 datos del IGAE ya propuestos por el INEGI, para así observar la eficacia del modelo propuesto, mediante el error. A continuación en la Tabla 3.9 se muestran los resultados.

Tabla 3.9: Pronóstico de Junio a Noviembre del 2015.

Periodo	$\widehat{X}$	X	Error	Intervalo inferior	Intervalo Superior
06/2015	115.3142478	115.426937	0.112689166	112.3285127	118.3591126
07/2015	115.2125137	116.1096042	0.897090521	111.7679801	118.7360572
08/2015	114.4409445	114.7940372	0.353092723	110.6281029	118.3513618
09/2015	114.0894969	114.4222867	0.332789827	109.9200196	118.3764814
10/2015	118.0873459	118.9173353	0.829989381	113.4695282	122.8446969
11/2015	119.0030334	120.2488303	1.245796865	114.0520793	124.1134539

En la Figura 3.6 se muestran los datos pronosticados, luego en la Figura 3.7 la serie de tiempo original y ajustada.

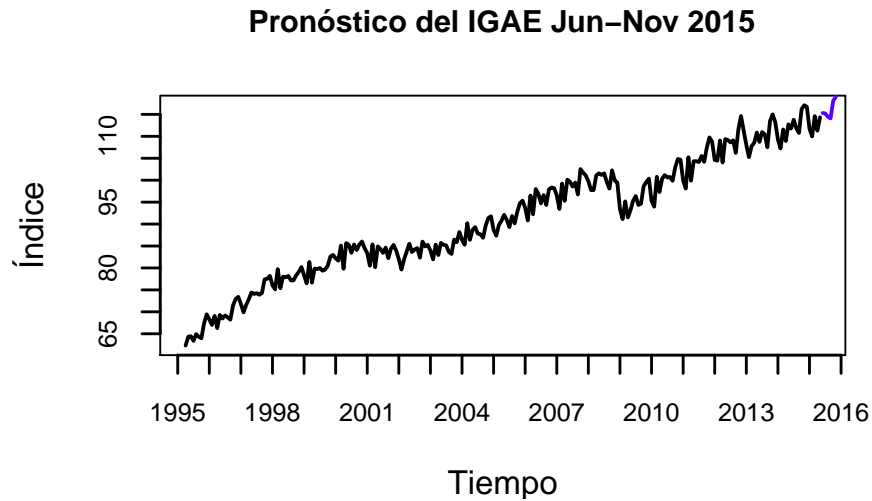


Figura 3.6: Pronóstico de Junio a Noviembre del 2015.

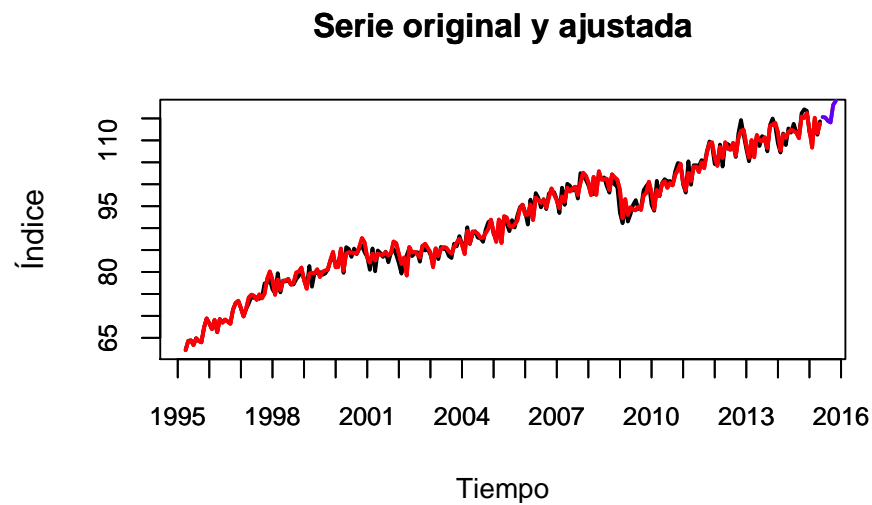


Figura 3.7: Serie original y propuesta

Ahora bien, se obtiene el pronóstico de interés, es decir el IGAE de Diciembre del 2015 a Mayo del 2016. Los resultados, así como los intervalos de

confianza se muestran en la Tabla 3.10.

Tabla 3.10: Pronóstico de Diciembre 2015 a Mayo del 2016.

Periodo	$\hat{X}$	Intervalo inferior	Intervalo Superior
12/2015	120.8527071	117.7981683	123.9661194
01/2016	115.8639012	112.4367559	119.3688021
02/2016	114.2259814	110.4411548	118.1072643
03/2016	120.233674	115.9149047	124.6720157
04/2016	116.3643485	111.8136366	121.0524285
05/2016	120.5238308	115.5359602	125.6714853

En la Figura 3.8 se muestra los datos pronosticados, también en la Figura 3.9 se presenta el modelo ajustado de color rojo y el original de negro.

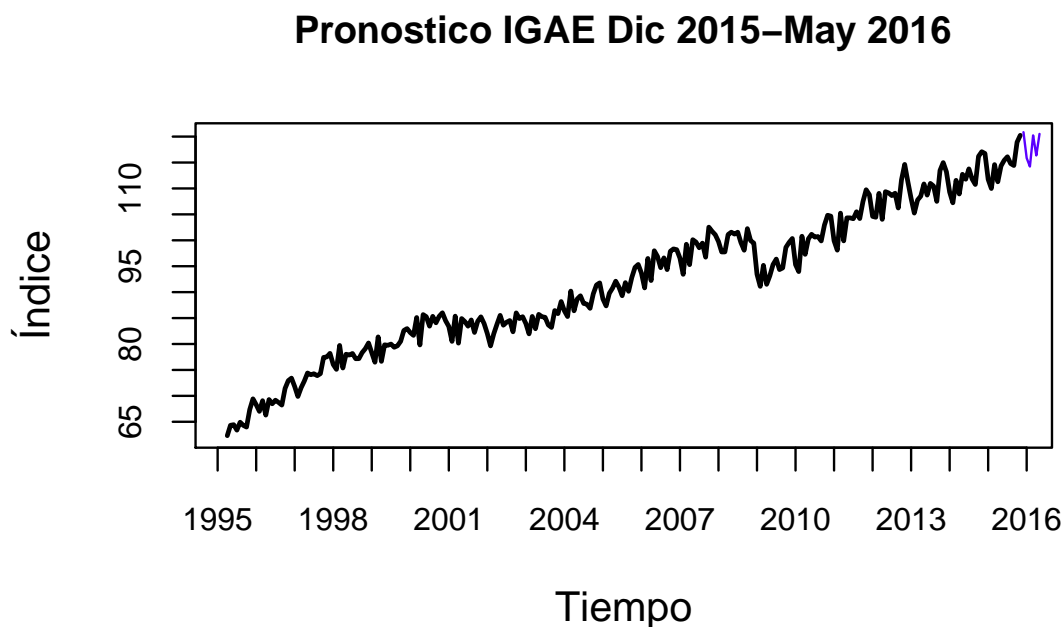


Figura 3.8: Pronóstico de Diciembre 2015 a Mayo del 2016.

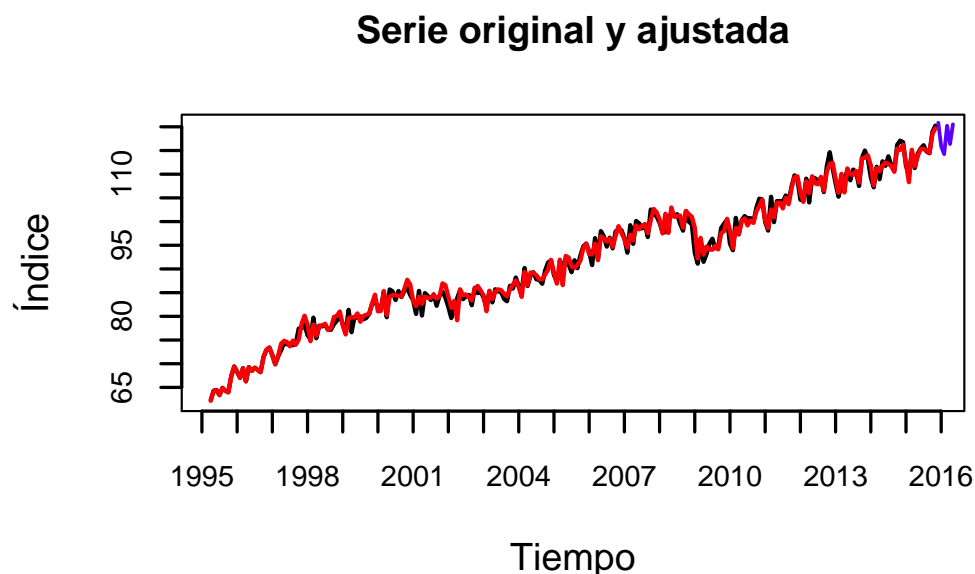


Figura 3.9: Modelo original y propuesto

Luego en la Figura 3.10 se encuentra el histograma de los residuales, que muestra una tendencia de una normal estándar, la FAM y la FAMP de los residuales es otra herramienta de diagnóstico importante para examinar la dependencia de los residuales, las cuales muestran en éste caso que el componente estocástico de la serie es muy parecido a un ruido blanco, y la última gráfica donde la normalidad se puede comprobar con más cuidado por el trazado de las denominadas puntuaciones normales o gráfica cuantil-cuantil (QQ), esto muestra a los cuantiles de los datos frente a los cuantiles teóricos de una distribución normal, con los datos distribuidos normalmente, la gráfica QQ se ve aproximadamente como una línea recta, por lo tanto se apoya la hipótesis de que los residuales tienden a estar normalmente distribuidos. Por lo tanto se determina que el mejor modelo para representar de forma adecuada a los datos es un  $SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 1)_{24}$ .

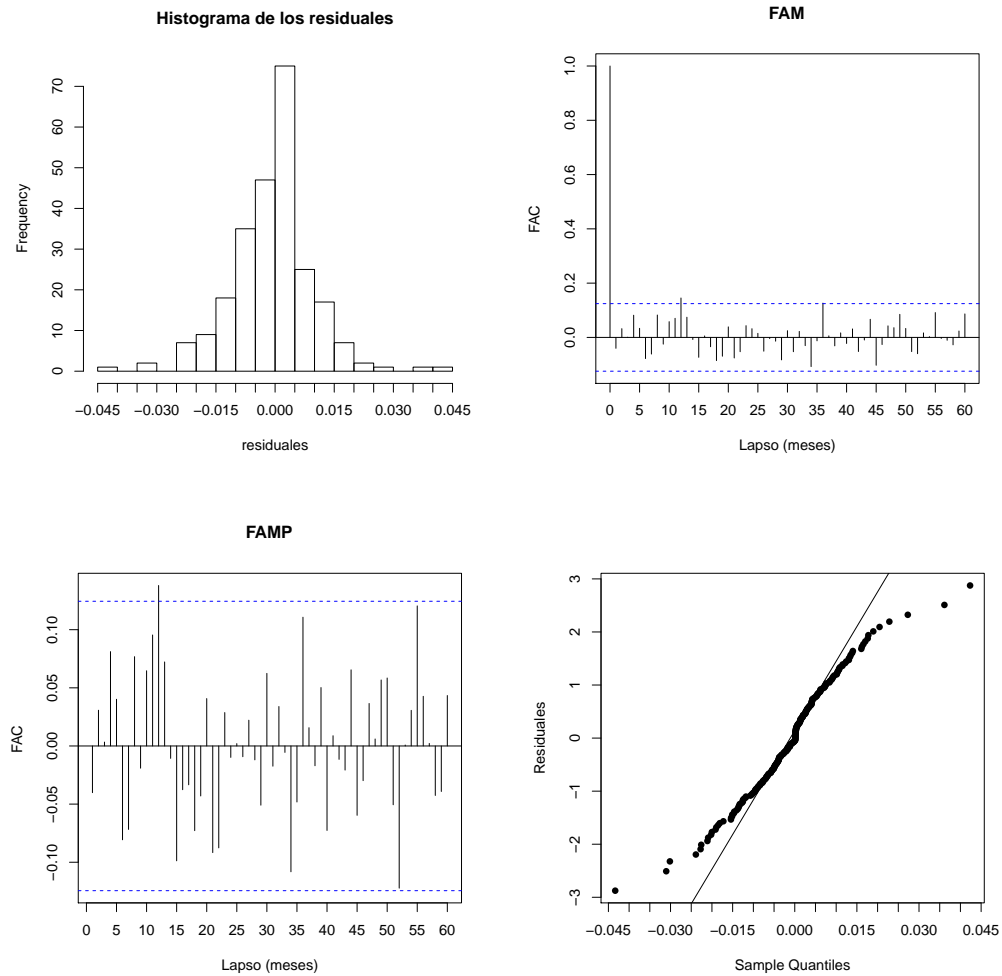


Figura 3.10: Histograma, FAM, FAMP, y gráfica QQ.

### 3.3. Modelos de intervención y transferencia

Por otro lado, continuando con el análisis de los datos, se toman en cuenta los modelos de intervención en los modelos *SARIMA* ya que existe una fuerte caída en el 2009 ocurrido a partir del 2008, en la Figura 3.11 se muestra con

detalle la caída, la cual es tomada del 2008 al 2009. Como bien se aprecia no se puede hablar de un dato outlier ya que se fue recuperando paulatinamente a partir del 2009, además de contar con evidencia de una grave crisis financiera y económica, a medida que el mercado hipotecario de Estados Unidos fue colapsando, y caían grandes instituciones financieras como los grandes bancos de inversión, por lo tanto considerar a un modelo de intervención es lo más adecuado para modelar éste tipo de fenómenos.

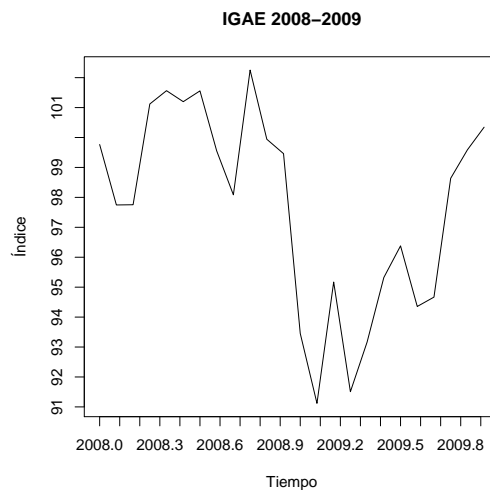


Figura 3.11: Suceso extraordinario ocurrido a partir del 2008.

Por lo tanto se puede decir que la crisis financiera y económica sucedió en Enero del 2009, obteniendo el punto más bajo.

De acuerdo a la teoría de modelos de intervención y transferencia, se estudia la serie de tiempo antes de la intervención, es decir se realizan los pasos de un modelo *SARIMA* para elegir al modelo.

Se realiza como primer paso una pre-diferenciación de la serie, la cual arroja mejores resultados aplicándose raíces cuartas, con esto se logra disminuir la variabilidad sin embargo no tiene una media constante por lo tanto se requiere de una diferencia a nivel no estacional para que sea estacionaria

en éste nivel, en la Figura 3.12 se muestran las gráficas correspondientes, después en la Figura 3.13 se obtienen la FAM y FAMP y como es evidente la serie muestra estacionalidad, debido al análisis sin intervención, se toma un período estacional de  $s = 24$ , luego en las dos últimas gráficas se encuentra la serie con raíces cuartas, una diferencia estacional de  $s = 24$  y otra en el no estacional, donde se nota un comportamiento a nivel estacional parecido al de un modelo  $AR(2)$  debido a las dos espigas estacionales en la FAMP y de las 3 espigas pronunciadas y las pequeñas que reflejan un comportamiento exponencial amortiguado. Un modelo aproximado para el nivel no estacional podría ser un  $AR(2)$  debido a las 2 espigas pronunciadas en la FAMP a nivel no estacional, por lo tanto se propone un  $SARIMA(2, 1, 0)(2, 1, 0)_{24}$ .

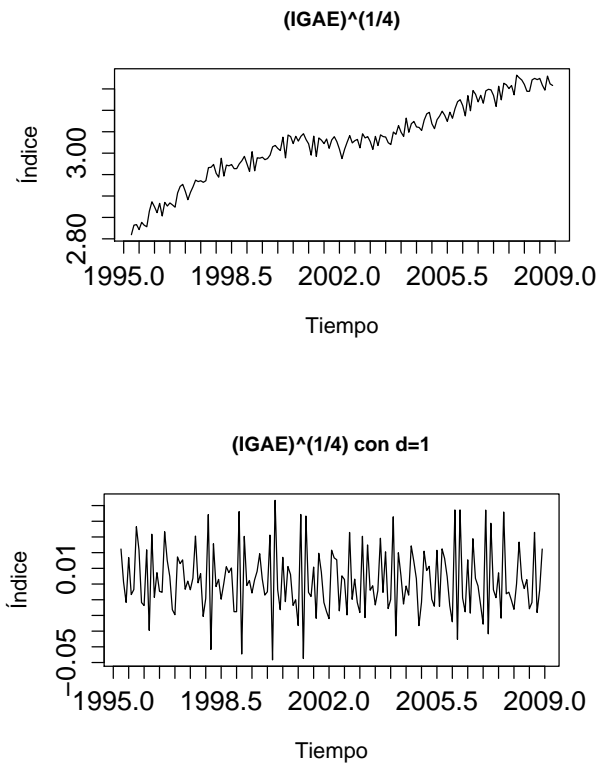


Figura 3.12: Serie antes de la intervención

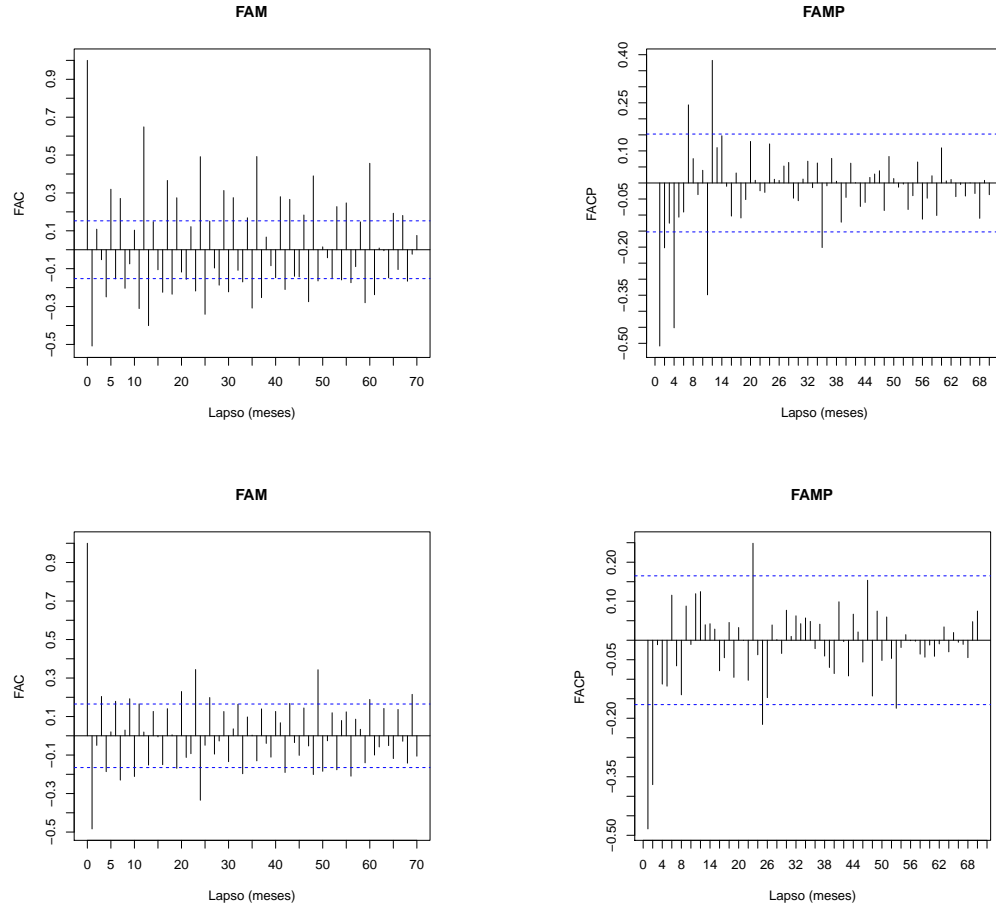


Figura 3.13: FAM y FAMP con  $d = 1$ .

Existe un modelo estacional con  $s = 12$  apropiado para los datos pero se obtiene un mejor ajuste con  $s = 24$ , con un CIA de -812.05 se afirma que el mejor modelo es un  $SARIMA(2, 1, 0)(2, 1, 0)_{24}$ .

Por lo tanto el modelo propuesto es

$$\Psi_2(B^{24})\psi(B)\nabla_{24}^1\nabla^1 X_t = Z_t \quad (3.3.1)$$

donde  $\psi(B)$  es de orden 2, también  $\nabla^1 = (1-B)^1$  y  $\nabla_{24}^1 = (1-B^{24})^1$ , además de que  $X_t^* = X_t^{.1/4}$  es una observación del IGAE en el tiempo  $t$ , antes de la

intervención. Otra forma de presentar el modelo, es considerar que

$$Y_t = X_t^* - X_{t-1}^* - X_{t-24}^* + X_{t-25}^*$$

en la parte no estacional se tiene el modelo

$$Y_t = \psi_1 Y_{t-1} + \psi_2 Y_{t-2} + Z_t$$

y en la parte estacional se propone

$$Y_t = \Psi_1 Y_{t-1} + \Psi_2 Y_{t-2} + Z_t$$

entonces el modelo integrado propuesto es

$$\begin{aligned} Y_t = & \psi_1 Y_{t-1} + \psi_2 Y_{t-2} + Z_t + \Psi_1 Y_{t-1} \\ & + \Psi_2 Y_{t-2} + \psi_1 \Psi_1 Y_{t-2} + \psi_1 \Psi_2 Y_{t-3} \\ & + \psi_2 \Psi_1 Y_{t-3} + \psi_2 \Psi_2 Y_{t-4}. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Con objeto de pronosticar seis meses al IGAE antes de la intervención y así ver la eficacia del modelo, observamos que como  $Y_t = X_t^* - X_{t-1}^* - X_{t-24}^* + X_{t-25}^*$  donde  $X_t^* = X_t^{1/4}$ , podemos expresar al finalmente el modelo como

$$\begin{aligned} X_t = & X_{t-1}^* + X_{t-24}^* - X_{t-25}^* + \psi_1 (X_{t-1}^* - X_{t-2}^* - X_{t-25}^* + X_{t-26}^*) \\ & + \psi_2 (X_{t-2}^* - X_{t-3}^* - X_{t-26}^* + X_{t-27}^*) + Z_t \\ & + \Psi_1 (X_{t-1}^* - X_{t-2}^* - X_{t-25}^* + X_{t-26}^*) \\ & + \Psi_2 (X_{t-2}^* - X_{t-3}^* - X_{t-26}^* + X_{t-27}^*) \\ & + \psi_1 \Psi_1 (X_{t-2}^* - X_{t-3}^* - X_{t-26}^* + X_{t-27}^*) \\ & + \psi_1 \Psi_2 (X_{t-3}^* - X_{t-4}^* - X_{t-27}^* + X_{t-28}^*) \\ & + \psi_2 \Psi_1 (X_{t-3}^* - X_{t-4}^* - X_{t-27}^* + X_{t-28}^*) \\ & + \psi_2 \Psi_2 (X_{t-4}^* - X_{t-5}^* - X_{t-28}^* + X_{t-29}^*). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Nuevamente utilizando el Software R se realiza la estimación de parámetros, utilizando el método de máxima verosimilitud, los resultados se muestran en la Tabla 3.11.

Tabla 3.11: Estimación de parámetros para los datos IGAE antes de la intervención.

Tipo de parámetro	AR1	AR2	SAR1	SAR2
Valor	-0.5469	-0.2218	-0.7710	-0.5122
Error Estándar	0.0875	0.0875	0.0904	0.0836

Finalmente el modelo queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
X_t = & X_{t-1}^* + X_{t-24}^* - X_{t-25}^* - 0.5469(X_{t-1}^* - X_{t-2}^* - X_{t-25}^* + X_{t-26}^*) \\
& - 0.7710(X_{t-2}^* - X_{t-3}^* - X_{t-26}^* + X_{t-27}^*) + Z_t \\
& - 0.7710(X_{t-1}^* - X_{t-2}^* - X_{t-25}^* + X_{t-26}^*) \\
& - 0.5122(X_{t-2}^* - X_{t-3}^* - X_{t-26}^* + X_{t-27}^*) \\
& + 0.5469(0.7710)(X_{t-2}^* - X_{t-3}^* - X_{t-26}^* + X_{t-27}^*) \\
& + 0.5469(0.5122)(X_{t-3}^* - X_{t-4}^* - X_{t-27}^* + X_{t-28}^*) \\
& + 0.7710(0.7710)(X_{t-3}^* - X_{t-4}^* - X_{t-27}^* + X_{t-28}^*) \\
& + 0.7710(0.5122)(X_{t-4}^* - X_{t-5}^* - X_{t-28}^* + X_{t-29}^*).
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Los pronósticos de la serie IGAE debe ser elevados a la cuarta ya que recordemos que  $X_t^* = X_t^{1/4}$  por lo tanto  $\widehat{X^{1/4}}$  se sustituyen por  $(\widehat{X^{1/4}})^4 = \widehat{X}$ . De la misma forma que en el modelo sin intervención se estimarán los últimos seis datos de la serie IGAE antes de la intervención, para así mostrar la eficacia del modelo propuesto, enseguida se muestran los resultados calculados con el Software R.

Tabla 3.12: Pronóstico de Julio a Diciembre del 2008.

Periodo	$\hat{X}$	X	Error	Intervalo inferior	Intervalo Superior
Julio	100.6791256	101.5575228	0.878397216	97.73635165	103.6878582
Agosto	101.0363402	99.55493675	-1.481403484	97.81259282	104.3392564
Septiembre	99.12344644	98.08460331	-1.038843133	95.58343518	102.7610186
Octubre	102.8859166	102.2527474	-0.633169206	98.82897993	107.066493
Noviembre	102.8726077	99.94191722	-2.930690457	98.5046494	107.3842456
Diciembre	103.1686807	99.46094261	-3.707738053	98.48251391	108.0201299

En la Figura 3.14 es reflejado el pronóstico de la Tabla 3.12.

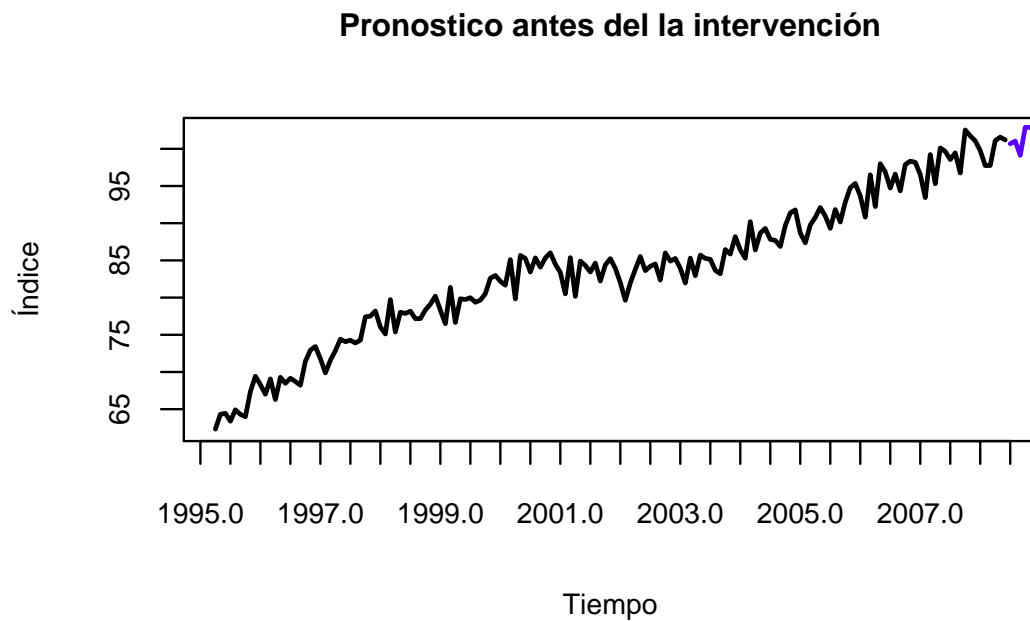


Figura 3.14: Pronóstico de Julio a Diciembre del 2008.

Además en la Figura 3.15 se encuentra el modelo ajustado a la serie original, en color rojo se muestra el modelo propuesto.

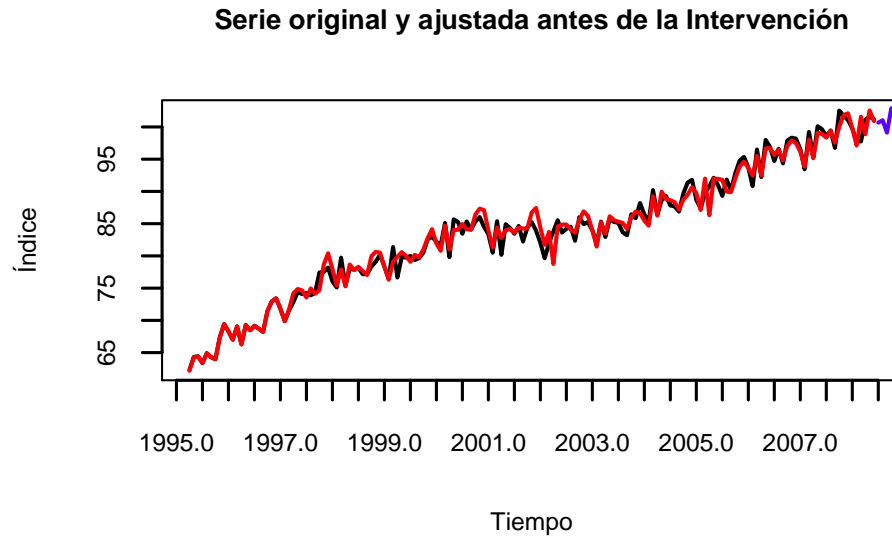


Figura 3.15: Serie propuesta

Los resultados de la eficacia del modelo son los de la Tabla 3.13, el cual muestra que es un modelo aceptable con ayuda de la prueba Ljung-Box.

Tabla 3.13: Prueba Ljung-Box para el modelo  $SARIMA(2, 1, 0)(2, 1, 0)_{24}$ .

Prueba de Ljung-Box		
Lapso	Estadístico	p-valor
12	12.748	0.1208
24	21.44	0.3716
36	31.821	0.4756
48	37.688	0.7376

Luego en la Figura 3.16 se encuentra el histograma de los residuales, la FAM, también se muestra la FAMP y gráfica cuantil-cuantil (QQ).

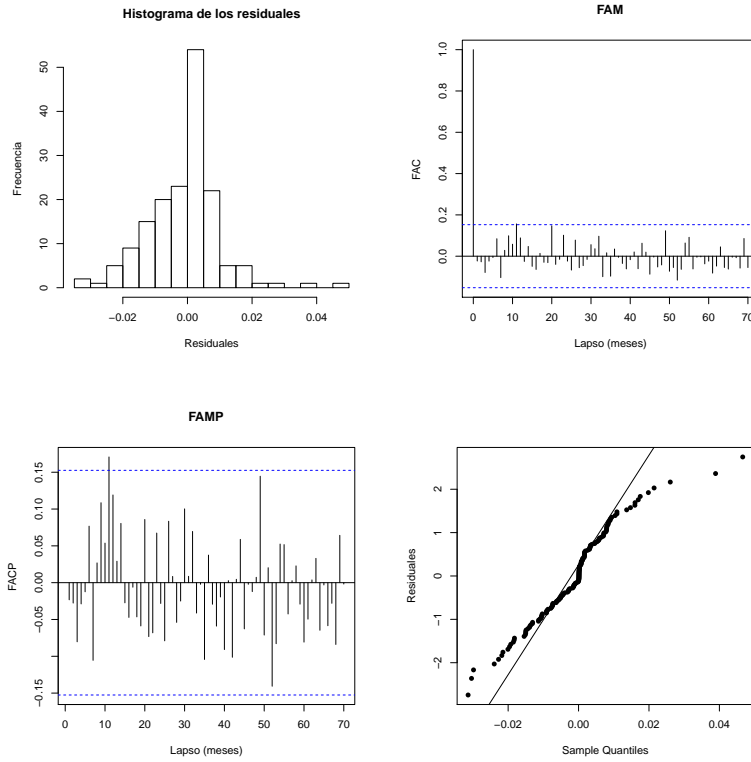


Figura 3.16: Histograma y FAM los residuales.

El cambio en el nivel podría ser modelado usando una función escalón de la siguiente forma

$$S_t(01/2009) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 01/2009; \\ 0, & \text{si } t < 01/2009. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Por lo tanto, un modelo de intervención completo o modelo de transferencia para la serie de tiempos puede ser el siguiente

$$X_t = v(B) \cdot S_t(01/2009) + N_t \quad (3.3.6)$$

donde  $v(B)$  representa el efecto de la intervención  $S_t$ , en éste caso se puede ver como cae gradualmente y el efecto es permanente por lo que puede ser

especificado como

$$X_t = \frac{w}{1 - \delta B} \cdot S_t(01/2009) + N_t \quad (3.3.7)$$

donde

$$N_t = \frac{\Theta_Q(B^s)\theta_q(B)}{\underbrace{\Psi_p(B^s)\psi_p(B)(1 - B^s)^D(1 - B)^d}} u_t \quad (3.3.8)$$

*SARIMA*(2, 1, 0)(2, 1, 0)<sub>24</sub>

y  $u_t$  es una secuencia de ruidos blancos. El modelo *SARIMA* propuesto es el mejor modelo antes de la intervención. Por lo tanto el modelo queda de la siguiente forma

$$X_t = \frac{w}{1 - \delta B} \cdot S_t(01/2009) + \frac{1}{\Psi_2(B^{24})\psi_2(B)(1 - B^{24})(1 - B)} u_t \quad (3.3.9)$$

donde  $\Psi_2(B^{24}) = 1 - \Psi_1 B^{24} - \Psi_2 B^{48}$  y  $\psi_2(B) = 1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2$ .

La estimación de los parámetros se obtiene usando el Software R, tal estimación es la siguiente:

Tabla 3.14: Estimación de parámetros para los datos IGAE con intervención.

Tipo de parámetro	AR1	AR2	SAR1	SAR2	$\delta$	$w$
Valor	-0.5667	-0.3083	-0.7087	-0.4582	0.1950	-0.0284
Error Estándar	0.0669	0.0667	0.0652	0.0636	0.4512	0.0116

Así, el modelo queda expresando como

$$X_t = \frac{-0.0284}{1-0.1950B} S_t(01/2009) + \frac{u_t}{(1-0.7087B^{24}-0.4582B^{48})(1-0.5667B-0.3083B^2)(1-B^{24})(1-B)}.$$

Con ayuda del Software R se determina el Criterio de Akaike y Ljung-Box para así poder determinar si es mejor modelo que el anterior modelo

*SARIMA* sin una intervención. De acuerdo a los resultados, el modelo con una intervención no es apropiado para los datos de acuerdo a la Prueba de Ljung-Box.

Tabla 3.15: Criterio de Akaike y prueba Ljung-Box con un modelo de transferencia.

Modelo	CIA	
Modelo de intervención	-1331.94	
Prueba de Ljung-Box		
Lapso	Estadístico	p-valor
12	21.657	0.005593
24	42.899	0.002108
36	55.671	0.005887
48	67.548	0.01276

A continuación se muestra en la Figura 3.17 el ajuste del modelo propuesto y el real, de color rojo y negro respectivamente, luego en la Figura 3.18 el histograma de los residuales, la FAM, FAMP y gráfica cuantil-cuantil (QQ) de los residuales, la gráfica de probabilidad normal de los residuales, donde no es del todo lineal pero pasan la prueba de que los términos de error se distribuyen normalmente.

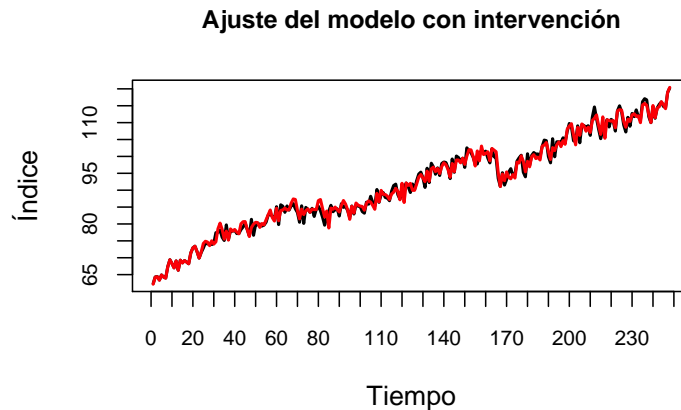


Figura 3.17: Serie original y ajustada.

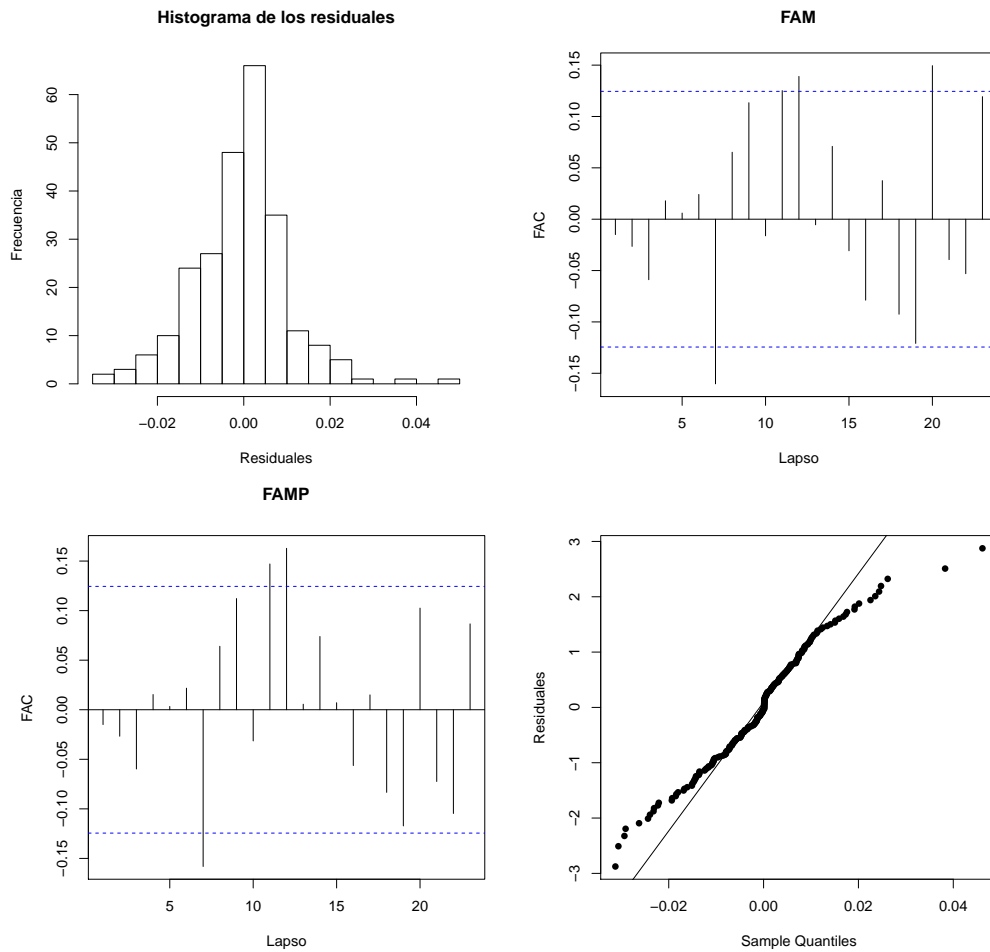
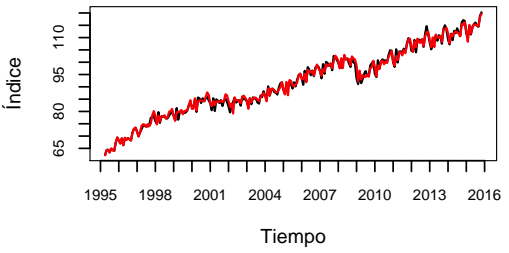
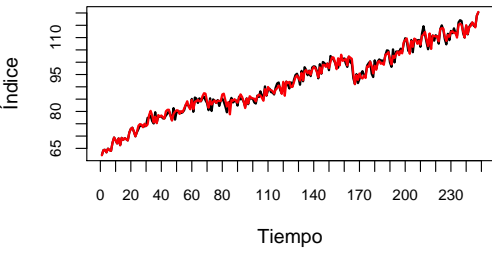
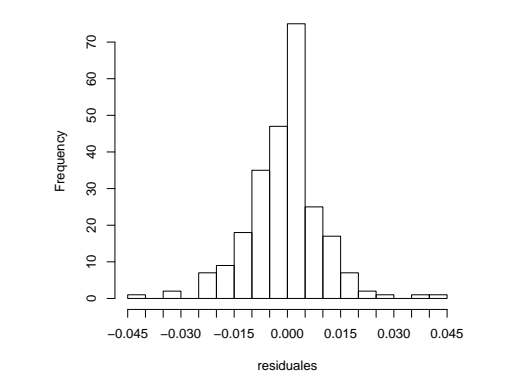
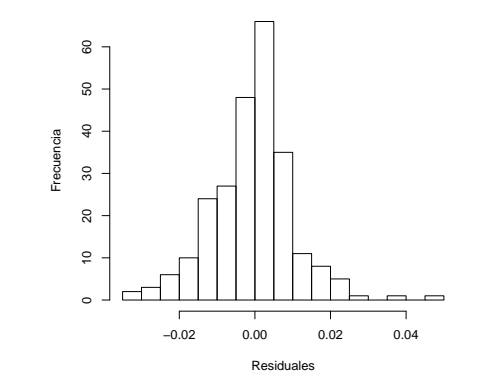
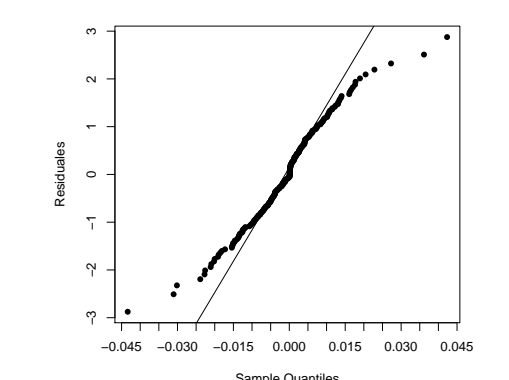
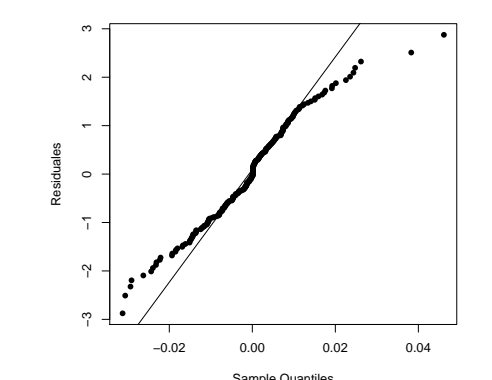


Figura 3.18: Histograma, FAM, FAMP, y gráfica QQ.

Por lo tanto se decide utilizar el modelo *SARIMA* sin intervención para pronosticar los datos del IGAE, a continuación en la Tabla 3.16 se comparan los resultados de los dos modelos propuestos, de acuerdo al modelo Akaike, prueba Ljung-Box y gráficas de residuales, lo cual justifica la decisión antes mencionada.

Tabla 3.16: Comparación de modelos.

Comparación de Modelos			
<i>SARIMA</i> (2, 1, 3)(2, 1, 2) <sub>24</sub>		Modelo de Intervención	
Prueba de Akaike			
-1344.36		-1331.94	
Prueba de Ljung-Box			
estadístico	p-valor	estadístico	p-valor
36.74	0.1247	21.657	0.001397
<p><b>Serie original y ajustada</b></p> 		<p><b>Ajuste del modelo con intervención</b></p> 	
<p><b>Histograma de los residuos</b></p> 		<p><b>Histograma de los residuos</b></p> 	
			



## Capítulo 4

# Análisis y Conclusiones

El propósito del trabajo expuesto en este documento es explicar y aplicar la teoría de series de tiempo, en el análisis de la economía mexicana, siguiendo el enfoque de Box-Jenkins. En particular el análisis del crecimiento económico, a través de indicadores representativos y reportados en intervalos de tiempo cortos, tales como trimestres o meses. Dos de tales indicadores son el PIB y el IGAE, siendo el PIB el indicador más acertado para medir el crecimiento económico, ya que representa una medida amplia de la actividad económica; sin embargo los datos del PIB son publicados trimestralmente y se reportan dos meses después de que termina el trimestre, lo cual limita el análisis del movimiento económico en periodos mensuales. Por tal motivo, es importante contar con estimaciones en períodos más cortos, ya que actualmente el flujo constante de información en forma más frecuente es cada vez más importante para conocer el estado de la economía, esto lleva a elegir al IGAE como el indicador sobre el cual se realizan los análisis.

Los datos mensuales de los que se dispuso fueron obtenidos en la página del

INEGI, lo que facilitó su uso ya que el INEGI se encarga de corregir cierto errores de captura, para así obtener una mejor interpretación. Primero se realiza un análisis descriptivo mediante la gráfica de los datos para observar el comportamiento general del IGAE; en el análisis de la gráfica se nota una caída abrupta comenzando en el 2008 y alcanzando un mínimo en el 2009, originada por una grave crisis financiera y económica en ese año, a medida que el mercado hipotecario de Estados Unidos fue colapsando, y caían grandes instituciones financieras como los grandes bancos de inversión, lo cual lleva a incorporar modelos de intervención. De tal forma que se decide realizar el pronóstico mediante un modelo *SARIMA* con y sin intervención, comparando los modelos que resultan más adecuados en ambos casos, para elegir al mejor.

Así al aplicar la metodología de Box-Jenkins aplicada al IGAE, en principio, se realiza una prediferenciación para disminuir la variabilidad, logrando una mayor disminución en la heterogeneidad de la varianza al usar raíces cuartas. Al llevar a cabo el análisis de la serie obtenida mediante la transformación anterior se concluye que ésta no es estacionaria optándose por realizar una diferencia. Se nota mediante el análisis de la FAM y FAMP de las primeras diferencias, que la serie es estacionaria en el nivel no estacional, sin embargo, se nota de forma evidente la estacionalidad mensual, lo que es común observar en indicadores ya que existe una fuerte conexión de éstas actividades con los ciclos marcados en el calendario. Enseguida se analiza la serie a nivel estacional realizando una diferencia, concluyéndose la no estacionariedad en este nivel, lo cual se confirma mediante la prueba de Dickey-Fuller, además de probar la no eficiencia de los probables modelos con estacionalidad de 12

meses mediante la prueba de Ljung-Box.

Se decide analizar a la serie con estacionalidad de 24 meses, se realiza el mismo procedimiento, encontrándose que a nivel estacional se transforma en estacionaria al aplicar una diferencia en el nivel estacional, con ayuda del Criterio de Akaike se determina al mejor modelo con estacionalidad de 24 meses. De tal forma que el modelo propuesto resulta un  $SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 1)_{24}$ , el cual es adecuado para pronosticar los datos según la prueba de Ljung-Box y el análisis de los residuales. Un hecho no esperado, ya que dentro de los modelos estacionales no es común tener períodos cada 24 meses sino períodos trimestrales, cuatrimestres o anuales. A pesar de esto, con un periodo de 24 meses se pudo determinar un modelo aceptable para los datos.

Por último se analizan los datos usando modelos con intervención, donde la importancia radica en encontrar a la "función de respuesta" que mejor modela el tipo de caída que se tiene, teniendo en este caso a una función escalón junto con un término que la ajusta a un inicio gradual, como segundo paso se incorpora un proceso  $SARIMA$  para los datos antes de la intervención, éste se elige de la misma manera que en los anteriores, y así se incorpora en el modelo de intervención completo. A continuación se realizan diferentes pruebas para verificar si el modelo es aceptable, de acuerdo a la prueba Ljung-Box, el modelo no es apto para pronosticar los datos del IGAE. Al comparar los dos modelos  $SARIMA$  con y sin intervención con ayuda de las pruebas de Akaike, Ljung-Box, ajuste del modelo propuesto y análisis de residuales se concluye que el mejor modelo es un  $SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 1)_{24}$ .

Es importante mencionar que en el presente trabajo queda por analizar otro tipo intervenciones, las cuales puedan incorporarse a los modelos de inter-

vención completos y así arrojar mejores resultados, al mismo tiempo realizar otro tipo de análisis alternativo como el de redes neuronales o bien usando la metodología de wavelets.

# Bibliografía

- [1] Sachs - Larrain, Macroeconomía en La Economía Global, Pearson Education, Segunda Edición, ISBN:968-880-289-1. 2002.
- [2] Stanley Fischer, Rudiger Dornbusch, Richard Schmalensee. Economía, Mcgraw-Will, Segunda Edición. ISBN: 0-07-01778-1-3, 1998.
- [3] José De Gregorio, Macroeconomía Teoría y Políticas, Pearson-Educación 1era. Edición, 2007.
- [4] Jonathan D. Cryer, Kung-Sik Chan. Time Series Analysis With Applications in R, Springer, Second Edition, ISBN: 978-0-387-75958-6. p.p.: 227 - 241. 2008.
- [5] Douglas.H.J. Time Series Análisis, Princeton University Press. ISBN: 0-691-04289-6. 1994.
- [6] Guerrero V. Modelos estadísticos para series de tiempo univariadas. V Coloquio del departamento de matemáticas. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. 1987.
- [7] Brockwell J. P., Davis A. R. Introduction to Time series and Forecasting. Springer. Second Ediditon. ISBN: 978-0-387-95351-9. 2002.

- [8] Robert H. Shumway, David S. Stoffer. Time Series Analysis and Its Applications, Third Edition. ISBN: 978-1-4419-7864-6. 2010.
- [9] William W.S. Wei. Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods, Pearson, Second Edition. ISBN: 0-321-32216-9. 2006.
- [10] Silvia Herrera Cortés. Tesis sobre Análisis de Variables Climatológicas del Estado de Tlaxcala Utilizando Series de Tiempo y Redes Neuronales.
- [11] Bruce L. Bowerman, Richard T. Oconnell. Pronósticos, Series de Tiempo Y Regresión: Un Enfoque Aplicado, ISBN: 9789706866066. 2007.
- [12] Damodar N. Gujarati, Dawn C. Porter. Econometría, Mc Graw Hill, Quinta edición. ISBN: 978-607-15-0294-0. 2010.
- [13] John M. Gottman, Time-series analysis, A comprehensive introduction for social scientist. ISBN: 0521235979. 1981.
- [14] Clasificador de Actividades económicas. <http://www.inegi.gob.mx/inegi/contenidos/espanol/clasificadores/clasificador%20de%20actividad%20economica.pdf>.
- [15] Metodología IGAE. [http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/proyectos/cn/igae/doc/SCNM\\_Metodologia\\_07.pdf](http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/proyectos/cn/igae/doc/SCNM_Metodologia_07.pdf).

# Apéndice A

## Solución a la Varianza no constante

La transformación de los datos nos ayuda a tratar la varianza no constante de los datos. Una familia de funciones muy conocida para esto son las **transformaciones de Box-Cox** dadas por

$$X^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{X^\lambda - 1}{\lambda \bar{X}^{\lambda-1}}, & \text{si } \lambda \neq 0; \\ \bar{X} \ln X, & \text{si } \lambda = 0, \end{cases} \quad (\text{A.0.1})$$

donde  $\bar{X} = \exp(1/T) \sum_{i=1}^T \ln X_i$  es la media de las observaciones. Se puede observar que el valor de  $\lambda$  determina la transformación, por ejemplo cuando  $\lambda = .05$  es una transformación de raíz cuadrada, cuando  $\lambda = 0$  es una transformación de tipo  $\ln$ , si  $\lambda = -0.5$  es una transformación recíproca de raíz cuadrada y cuando  $\lambda = -1$  es una transformación inversa.

La transformación  $\ln$  es la más común entre ellas, ya que se usa cuando las desviaciones estándar de la serie original incrementan linealmente con la media, éste método de transformación estabiliza las varianzas.



# Apéndice B

## Invertibilidad

Se muestra en el capítulo 2, como la FAC de un proceso MA(1) se parece a la FACP de un proceso AR(1) y al igual que el FAC de un proceso AR(1) se parece al del FACP de un MA(1). Esto se debe a que los procesos autorregresivos se pueden representar como procesos de medias móviles y algunos procesos de medias móviles como los MA(1), se pueden representar de manera autoregresiva.

Un proceso lineal  $X_t = \psi(B)Z_t$  es invertible, es decir se puede escribir en términos del modelo AR si las raíces de  $\psi(B) = 0$  como una función de  $B$  caen fuera del círculo unitario. Esto es, si  $\beta$  es una raíz de  $\psi(B)$ , entonces  $|\beta| < 1$ . Considere un proceso AR(1) estacionario, si  $|\phi| < 1$  entonces se tiene que un proceso AR es  $x_t = \psi x_{t-1} + z_t$  y dejándolo en términos de  $B$ ,  $(1 - \psi(B))x_t = z_t$  se transforma en

$$\begin{aligned} x_t &= (1 - \psi(B))^{-1} Z_t = \left( \sum_{i=1}^{\infty} (\psi(B))^i \right) Z_t \\ &= Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi^2 Z_{t-2} + \dots \end{aligned} \tag{B.0.1}$$

De manera general un proceso estacionario  $AR(q)$  se puede representar como

$$X_t = Z_t - \psi_1 Z_{t-1} - \psi_2 Z_{t-2} - \dots, \quad (\text{B.0.2})$$

con  $\sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i| < \infty$ . Los coeficientes  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Un proceso de medias móviles puede representarse como un proceso autorregresivo, por lo que es invertible y además tiene como posible representación en la siguiente forma

$$\theta(B)X_t = Z_t \quad (\text{B.0.3})$$

donde  $\theta(B) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i B^i$  y  $1 + \sum_{i=1}^{\infty} |\theta_i| < \infty$ .

Un proceso  $MA(1)$  tiene una representación en términos de un proceso autorregresivo siempre que  $|\theta| < 1$ . En efecto, el proceso  $MA(1)$

$$x_t = (1 + \theta(B))Z_t. \quad (\text{B.0.4})$$

Siempre que  $|\theta| < 1$ , se multiplica en ambos lados de la expresión por  $(1 + \theta(B))^{-1}$  para obtener

$$(1 - \theta_1(B) - \theta_2(B^2) - \theta_3(B^3) - \dots)X_t = Z_t, \quad (\text{B.0.5})$$

el cual se puede considerar como un proceso  $AR(\infty)$ .

Si un proceso  $MA(p)$  es invertible, admite la representación

$$\pi(B)X_t = 1 - \pi_1 X_{t-1} - \pi_2 X_{t-2} - \dots, \quad (\text{B.0.6})$$

## Apéndice C

# Evaluación y monitoreo del rendimiento de modelos de pronóstico

Una vez que se han estimado los parámetros, se tiene que asegurar que se tiene un modelo adecuado para el pronóstico, para tal efecto, generalmente se recurre a estudiar los errores o residuales que se tienen entre los valores originales y los pronosticados. Los errores de pronóstico de un lapso adelantado son,

$$e_t(1) = x_t - \hat{x}_t(t-1)$$

donde  $\hat{x}_t(t-1)$  es el pronóstico de  $x_t$  hecho un período antes. Estos errores hacen referencia al pronóstico que se tiene de datos particulares obtenidos. Ahora bien, se puede sacar el promedio de esos errores para así tener un error medio. Suponga que se tiene  $n$  observaciones para las cuales el pronóstico

genera  $n$  errores de pronóstico de paso adelantados,  $e_t(1), t = 1, 2, \dots, n.$ , el promedio de errores es,

$$ME = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^n e_t(1).$$

El valor esperado del estimador anterior se considera que sea 0, es decir, es insesgado. La desviación media absoluta o media absoluta del error es;

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t(1)|$$

y el error cuadrado medio es

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [e_t(1)]^2$$

tanto la desviación media absoluta y el error cuadrado medio (MSE) mide la variabilidad en los errores de pronóstico. Es así como el MSE es un estimador directo de la **varianza de los errores de pronóstico de un paso adelantado**,

$$\hat{\sigma}_{e(1)}^2 = MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [e_t(1)]^2.$$

Por otro lado se puede diagnosticar desde la perspectiva de las suposiciones donde  $Z_t$  son ruidos blancos. Esto es, que  $Z_t$  son variables aleatorias no correlacionadas con media cero y varianza constante. Por lo tanto se analizan la serie de residuales  $\hat{Z}_t$ . Para analizar si los errores están distribuidos normalmente, se puede construir el histograma de los residuales estandarizados es decir  $\hat{Z}_t/\hat{\sigma}_t$  y comparar esto con una distribución normal estándar usando el test de bondad de ajuste de una chi-cuadrada. Para analizar si tienen varianza constante, se puede analizar la gráfica de los residuales. También para determinar si se comportan como un ruido blanco se puede calcular la FAC y

FACP de los residuales.

Usando un test de diagnóstico en relación a la muestra de la FAC de los residuales con hipótesis nula

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = 0.$$

Éste estadístico que ocupa a los residuales para determinar la suficiencia del pronóstico es la estadística de Box-Pierce o la de Ljung-Box, ayuda a examinar las primeras  $k$  autocorrelaciones muestrales de los residuos.

**Definición C.0.1** (Estadística de Box-Pierce y Ljung-Box). *La estadística de Box-Pierce es*

$$Q = n' \sum_{i=1}^k \widehat{\rho}_i^2(\widehat{Z})$$

*La estadística de Ljung-Box es*

$$Q^* = n'(n' + 2) \sum_{i=1}^k (n' - i) \widehat{\rho}_i^2(\widehat{Z}).$$

donde  $n' = n - d$ ,  $n$  es el número de observaciones de la serie,  $d$  es el grado de diferencias donde la hipótesis nula afirma la no suficiencia del modelo mientras que la alternativa afirma la suficiencia del modelo. Es decir que, si  $Q^* < \chi_{[\alpha]}^2(k - n_c)$ , entonces la información obtenida estaría a favor de considerar al modelo como adecuado o suficiente, aquí  $n_c$  es el número de parámetros del modelo.

Basado en los resultados del análisis de los residuales, si el modelo resulta inadecuado se tendrá que proponer otro modelo que ajuste mejor a los datos.

## Criterio de Selección Akaike

En el análisis de series de tiempo o de datos, a veces muchos modelos podrían ser adecuados para representar a los datos, en otros casos resulta fácil elegir a un sólo modelo, sin embargo si existiera la primera posibilidad resulta difícil. Lo cual lleva a usar otros criterios basado en los residuales del pronóstico calculado.

El criterio de Información Akaike (CIA) asume que un modelo estadístico de  $M$  parámetros es ajustado a los datos. El criterio está definido como

$$AIC(M) = -2 \ln[ \text{función de máxima verosimilitud} ] + 2M$$

donde  $M$  es el número de parámetros en el modelo. Para un modelo ARMA con  $n$  observaciones, se tiene la función de verosimilitud logarítmica, como

$$\ln L = \frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma_Z^2 - \frac{1}{2\sigma_Z^2} S(\underline{\psi}, \mu, \underline{\theta}) \quad (\text{C.0.1})$$

Maximizando (C.0.1) con respecto a  $\underline{\psi}$ ,  $\mu$ ,  $\underline{\theta}$  y  $\sigma_Z^2$ , se tiene

$$\ln \hat{L} = -\frac{n}{2} \ln \hat{\sigma}_Z^2 - \frac{n}{2}(1 + \ln 2\pi) \quad (\text{C.0.2})$$

como el segundo término de (C.0.2) es una constante, el criterio AIC se reduce a

$$CIA(M) = n \ln \hat{\sigma}_Z^2 + 2M.$$

El orden óptimo del modelo es seccionado por el valor de  $M$ , el cual está en función de  $p$  y  $q$ , así que el  $CIA(M)$  es un mínimo. Una extensión del mínimo CIA es llamado el criterio de información bayesiano (CIB) y es igual a

$$BIC(M) = n \ln \hat{\sigma}_Z^2 - (n - M) \ln\left(1 - \frac{M}{n}\right) + M \ln\left[\left(\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Z^2} - 1\right)/M\right],$$

donde  $\hat{\sigma}_Z^2$  es un estimador de máxima verosimilitud de  $\sigma_Z^2$ ,  $M$  es el número de parámetros y  $\hat{\sigma}_X^2$  es la varianza muestral de la serie.

## Apéndice D

# Incorporación de un término constante

En ocasiones es apropiado incluir un término constante  $\delta$  al modelo de Box-Jenkins. Por ejemplo si se agrega una constante al modelo no estacional de promedio móvil de orden uno, el modelo quedaría como

$$X_t = \delta + Z_t + \theta_1 Z_{t-1}$$

En éste caso se puede demostrar que  $\delta = \mu$ , donde  $\mu$  es la media de la serie de tiempo estacionaria. También si lo incluimos en el modelo no estacional autorregresivo de orden 1, se obtiene el siguiente modelo

$$X_t = \delta + \psi Z_{t-1} + Z_t.$$

En éste caso se puede demostrar que  $\delta = \mu(1 - \psi_1)$ . En general el término constante  $\delta$  en cualquier modelo de Box-Jenkins, es una función de la media  $\mu$  de (todas las obtenciones posibles de la serie de tiempo) la serie de tiempo

estacionaria. Por lo tanto, puesto que la media muestral de los valores  $X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+n}$  de la serie de tiempo estacionaria

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n - t + 1}$$

es una estimación puntual posible de  $\mu$ , se infiere que si  $\bar{X}$  es estadísticamente significativa es decir diferente de cero, es razonable suponer que  $\mu$  no es igual a cero y por lo tanto  $\delta$  no es igual a cero. Lo que nos lleva a incluir el término constante  $\delta$  en el modelo. Por otra parte si  $\bar{X}$  no es estadísticamente diferente de cero, es decir que  $\mu$  es cero, se omite del modelo.

Para el caso estacional el modelo *SARIMA* quedaría determinado de la siguiente forma

$$\Psi_P(B^s)\psi(B)\nabla_s^D\nabla^d X_t = \delta + \Theta_Q(B^s)\theta(B)Z_t, \quad (\text{D.0.1})$$

El término constante también se le conoce como **tendencia determinista**, en este caso se refiere a la tendencia para los valores de la serie temporal original a desplazarse de manera insistente en una dirección particular.

## Apéndice E

# Prueba para los parámetros estimados, para aplicar el principio de parsimonia.

Sea  $\theta$  cualquier parámetro de un modelo de Box-Jenkins,  $\hat{\theta}$  la estimación puntual de  $\theta$ , y  $s_{\hat{\theta}}$  el error estándar de la estimación puntual  $\theta$ . Entonces, el valor  $t$  asociado con  $\hat{\theta}$

$$t = \frac{\hat{\theta}}{s_{\hat{\theta}}}.$$

Si el valor absoluto de  $t$  es grande, entonces  $\hat{\theta}$  es grande. Por lo tanto  $\theta$  no es igual a cero. Se tiene el siguiente juego de hipótesis

$$H_0: \theta = 0 \text{ vs } H_a: \theta \neq 0.$$

Suponga, que el modelo de Box-Jenkins que está en estudio utiliza  $n_p$  parámetros, y se define el estadístico de prueba

$$t = \frac{\hat{\theta}}{s_{\hat{\theta}}},$$

se rechaza la hipótesis nula si y sólo si

$$|t| > t_{[\alpha/2]}^{(n-n_p)}.$$

Es así que con ayuda de ésta prueba se podrá omitir parámetros que no sean significantes, según la prueba anterior.

# Apéndice F

## Modelos de intervención y transferencia

Estos modelos se aplican, siempre que existan hechos externos que afecten a la variable que se quiere pronosticar, llamados **intervenciones**. Una intervención ocurrida en el tiempo  $T$ , ocurre cuando hay un evidente cambio en la serie de tiempo, tal como un incremento en el nivel de la media.

Existen dos tipos de variables de intervención. Una representa una intervención ocurrida en el tiempo  $T$ , cuyo efecto permanece después de dicho tiempo  $T$ . Esto es, en este caso, la intervención se representa por la siguiente **función escalón**,

$$S_t^{(T)} = \begin{cases} 0, & \text{si } t < T; \\ 1, & \text{si } t \geq T. \end{cases} \quad (\text{F.0.1})$$

La otra representa una intervención tomando lugar en un solo período de tiempo, ésta función es una **función de impulso** dada por:

$$P_t^{(T)} = \begin{cases} 0, & \text{si } t = T; \\ 1, & \text{si } t \neq T. \end{cases} \quad (\text{F.0.2})$$

Notar que la función de impulso se puede obtener diferenciando la función escalón  $S_t^{(T)}$ . Esto es,  $P_t^T = S_t^T - S_{t-1}^T = (1 - B)S_t^{(T)}$ . Por lo tanto, un modelo de intervención puede ser bien representado sólo con la función escalón. El uso de una forma específica se utiliza usualmente por conveniencia de interpretación.

Las funciones (F.0.1) y (F.0.2) reciben el nombre de funciones de respuesta de modelado para las intervenciones. Existen varias funciones de respuesta. A continuación se aborda las más comunes.

- Un impacto determinado de una intervención que se refleja  $b$  períodos después de la intervención. Además, dependiendo del tipo de intervención, el impacto es

$$wB^b S_t^{(T)} \quad (\text{F.0.3})$$

o

$$wB^b P_t^{(T)}. \quad (\text{F.0.4})$$

- Un impacto de una intervención se refleja  $b$  períodos después de la intervención, pero la respuesta es gradual. Para una función escalón se tiene,

$$\frac{wB^b}{(1 - \delta B)} S_t^{(T)}, \quad (\text{F.0.5})$$

y para una función de impulso

$$\frac{wB^b}{(1-\delta B)}P_t^{(T)}, \quad (\text{F.0.6})$$

donde  $0 \leq \delta \leq 1$ . Para  $\delta = 0$ , (F.0.5) y (F.0.6) se reducen a (F.0.3) y (F.0.4) respectivamente. Si  $\delta = 1$ , el impacto incrementa linealmente sin límite. Para los demás casos, se tiene  $0 < \delta < 1$ , y la respuesta es gradual. Las respuestas pueden ser producidas por diferentes combinaciones de escalón e impulso. Por ejemplo se tiene la siguiente respuesta

$$\frac{w_0B}{(1-\delta B)}P_t^T + w_1BS_t^T. \quad (\text{F.0.7})$$

Esto se puede expresar en términos de una función de impulso, con ayuda de la diferenciación, porque  $P_t^T = (1-B)S_t^T$ , por lo tanto (F.0.7) se puede escribir como

$$\left[ \frac{w_0B}{(1-\delta B)} + \frac{w_1B}{(1-B)} \right] P_t^T. \quad (\text{F.0.8})$$

Este modelo es útil para representar un fenómeno en el cual una intervención produce una respuesta que disminuye gradualmente pero deja un efecto permanente en el sistema.

Se generaliza el modelo simple a un modelo con  $k$  intervenciones,

$$X_t = v(B)I_t^{t_0}, \quad (\text{F.0.9})$$

donde  $I_t^{t_0}$  es la variable impulso o escalón,

$$v(B) = \frac{w(B)B^b}{\delta(B)} \quad (\text{F.0.10})$$

donde  $w(B) = w_0 - w_1B - \dots - w_sB^s$  y  $\delta(B) = 1 - \delta_1B - \dots - \delta_rB^r$  son polinomios en  $B$ ,  $b$  es el lapso para el efecto de la intervención,

y los  $w_j$ 's en el polinomio  $w(B)$  a veces representan el efecto inicial esperado de la intervención. Por otro lado el polinomio  $\delta(B)$  mide el comportamiento del efecto permanente de la intervención.

Una representación realista de la respuesta es obtenida agregando un término de disturbio o ruido  $N_t$ . Por lo tanto el modelo es representado de la siguiente forma

$$X_t = v(B)I_t^{t0} + N_t \quad (\text{F.0.11})$$

donde  $N_t$  representa el proceso de ruido no observable,  $I_t^{t0}$  y  $N_t$  se asumen independientes. o también

$$X_t = v(B)I_t^{t0} + \frac{\theta(B)}{\psi(B)}Z_t, \quad (\text{F.0.12})$$

donde  $v(B) = \frac{w(B)B^{b_j}}{\delta_j(B)}$ , así, el modelo con  $k$  intervenciones es

$$X_t = \sum_{j=1}^k v(B)I_{tj}^{t0j} + N_t.$$

Así  $I_{jt}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  son las variables de intervención. Estas variables de intervención pueden ser tanto de escalón o de impulso. La forma de  $\frac{w_j(B)B^{b_j}}{\delta_j(B)}$  para la  $j$ -ésima intervención es postulada basada en la forma esperada de la respuesta dado el conocimiento de la intervención. La ecuación (F.0.19) es llamada la función de transferencia-modelo ruido. El principal propósito de los modelos de intervención es medir el efecto de la intervención. Además, con respecto a la variable  $I_{tj}$ , la serie de tiempo libre de la intervención es llamada la serie ruido y es denotada por  $N_t$ .

## Función de transferencia-Modelos Ruido

A partir de la serie temporal  $X_t$ , en la que algún suceso externo o intervención producen modificaciones en el comportamiento de la serie, es necesario tener en cuenta la inclusión de alguna intervención. A partir de la forma general del modelo multiplicativo  $ARIMA(p, d, q)$ ,

$$X_t = \frac{\theta_q(B)}{\psi_p(B)(1-B)^d} Z_t$$

si se incorpora el modelo de intervención, se transforma y se obtiene la siguiente ecuación

$$X_t = v(B)I_t^{t0} + \frac{\theta_q(B)}{\psi_p(B)(1-B)^d} Z_t.$$

Otra forma de obtener la expresión anterior es

$$\begin{aligned} X_t &= v(B)I_t^{t0} + \nu(B)Z_t \\ &= \frac{w(B)}{\delta(B)}I_t^{t0} + \frac{\theta(B)}{\psi(B)}Z_t. \end{aligned} \tag{F.0.13}$$

Luego se tiene

$$\begin{aligned} \underbrace{\delta(B)\psi(B)X_t}_{= \delta^*(B)} &= \underbrace{\psi(B)w(B)I_t^{t0}}_{= w^*(B)} + \underbrace{\delta(B)\theta(B)Z_t}_{= \theta^*(B)} \end{aligned} \tag{F.0.14}$$

$$\delta^*(B)X_t = w^*(B)I_t^{t0} + \delta(B) + \theta^*(B)Z_t$$

o

$$X_t - \sum_{i=1}^{r^*} \delta_i^* X_{t-i} = w_0^* I_t^{t0} - \sum_{i=1}^{s^*} w_i^* I_{ti}^{t0i} + Z_t - \sum_{i=1}^{q^*} \theta_i^* Z_{t-1}. \tag{F.0.15}$$

La ecuación (F.0.15) es la representación ARMA de una respuesta de  $X_t$ . Debido a la incorporación de la intervención la (F.0.15) es llamada modelo ARMAX.

## Tipos de Outliers en las predicciones de los modelos *ARIMA*

Supóngase que  $Y_t$  es la serie de tiempo observada y  $X_t$  a la misma serie pero libre de outliers. Suponiendo que  $X_t$  sigue un proceso *ARIMA*( $p, d, q$ ) se tiene

$$\psi_p(B)(1 - B)^d X_t = \theta_q(B)Z_t$$

y por conveniencia tenemos que

$$X_t = \phi(B)Z_t \tag{F.0.16}$$

donde  $\phi(B) = 1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots = \frac{\theta(B)}{\psi(B)(1 - B)^d}$ .

El outlier aditivo (AO) es un suceso (efecto externo) que afecta a una serie en un solo instante temporal ( $t = t_0$ ), se ocupa la función de impulso, de manera que podemos expresarlo como:

$$X_t = wI_t^{t_0} + N_t \tag{F.0.17}$$

donde

$$I_t^{t_0} = \begin{cases} 1, & \text{si } t = t_0; \\ 0, & \text{si } t \neq t_0. \end{cases} \tag{F.0.18}$$

es la variable que representa el outlier, siendo  $w$  el efecto de dicho outlier. Una forma alternativa de expresar el outlier aditivo es

$$X_t = wI_t^{t_0} + \phi(B)Z_t = wI_t^{t_0} + \frac{\theta(B)}{\psi(B)(1 - B)^d} Z_t.$$

El outlier innovacional (IO) es un suceso cuyo efecto se propaga en conformidad con el modelo *ARIMA* del proceso, afectando a todos los valores

observados después de su ocurrencia. Lo representaremos, por tanto, como sigue

$$X_t = \phi(B)wI_t^{t0} + N_t \quad (\text{F.0.19})$$

siendo  $I_t^{t0}$  una variable de impulso. Alternativamente se puede escribir IO como  $X_t = \phi(B)(wI_t^{t0} + Z_t)$ .

El cambio de nivel (LS) es un suceso que afecta a una serie en un período dado, y cuyo efecto es permanente. Su definición es

$$X_t = \frac{1}{1-B}wI_t^{t0} + N_t$$

donde  $I_t^{t0}$  es la variable de impulso. Donde LS también se puede escribir como

$$X_t = wS_t + N_t$$

donde  $S_t$  es la variable escalón. Finalmente un cambio temporal (TC) es un suceso que tiene un impacto inicial y cuyo efecto decae exponencialmente en conformidad con un factor de amortiguación, que denotaremos mediante el parámetro  $\delta$ . En consecuencia, se expresa como

$$X_t = \frac{1}{1-\delta B}wI_t^{t0} + N_t, \quad 0 < \delta < 1 \quad (\text{F.0.20})$$

siendo  $I_t^{t0}$  la variable de impulso.



# Apéndice G

## Código en Software R

En este apartado se presentan los siguientes pasos con las líneas de código en R que fueron compiladas para el análisis de las series de tiempo con la metodología de Box-jenkins y modelos con intervención.

I El siguiente código se utilizó para graficar los datos del IGAE, hacer la prediferenciación, una diferencia y analizar la FAM y FAMP.

```
data <- read.csv(file="C:/Users/Gisela/Documents/Tesis Bulmaro
/Datos/IGAE3.csv", header=TRUE, sep=",")
I<-ts(completaa,frequency=12,start=c(1995,04),end = c(2015,11))
par(lab=c(22,4,10));ts.plot(I,ylab="Índice",xlab="Tiempo"
,main="Serie de tiempo del IGAE")
# Prediferenciación
I2<-(I)^(1/2)
ts.plot(I2,main="(IGAE)^(1/2) ",ylab="Índice",xlab="Tiempo")
```

```

I4<-(I)^(1/4)
ts.plot(I4,main="(IGAE)^(1/4)",ylab="Índice",xlab="Tiempo")
Iln<-log(I)
ts.plot(Iln,main="log(IGAE)",ylab="Índice",xlab="Tiempo")
# Se aprecia que la transformación con raíces cuarta produce una
# serie transformada con variación estacional constante.
# Diferenciación; primera diferencia
I4d<-diff(I4,lag=1,differences=1)
ts.plot(I4d,main="(IGAE)^1/4 con una diferencia",ylab="Índice"
, xlab="Tiempo")
# Análisis de FAC y FACP con una diferencia
acfI4d <- acf(I4d, plot=FALSE,lag.max = 70)
# Transforma los lapsos de años a meses
acfI4d$lag <- acfI4d$lag * 12
# Gráfica de la FAM
plot(acfI4d, xlab="Lapso (meses)",ylab="FAC",main="FAM")
#FACP
pacfI4d <- pacf(I4d, plot=FALSE,lag.max = 60)
# Transforma los lapsos de años a meses
pacfI4d$lag <- pacfI4d$lag * 12
# Gráfica de la FAMP
plot(pacfI4d, xlab="Lapso (meses)",ylab="FACP",main="FAMP")

```

II En ésta parte del código se analiza la parte estacional con  $s = 12$ , la serie con una diferencia en el nivel no estacional y otra en el estacional y por último la serie con solo una diferencia en el nivel estacional, así

como sus respectivas FAM y FAMP.

```

I412<-lag(I4,12)
ts.plot(I412,main="IGAE con s=12",ylab="Índice",xlab="Tiempo")
# Análisis de FAC y FACP en el nivel estacional
acfI412 <- acf(I412, plot=FALSE,lag.max = 70)
acfI412$lag <- acfI412$lag * 12
# Gráfica de la FAM
plot(acfI412, xlab="Lapso (meses)",ylab="FAC",main="FAM")
#FACP
pacfI412 <- pacf(I412, plot=FALSE,lag.max = 70)
pacfI412$lag <- pacfI412$lag * 12
#Gráfica de la FAMP
plot(pacfI412, xlab="Lapso (meses)",ylab="FACP",main="FAMP")
#Se comprueba la estacionariedad de s=12
library(tseries)
adf.test(I412, alternative="stationary")
#Serie con una diferencia en el nivel no estacional y con s=12
# sin ninguna diferencia en el estacional
Id12<-lag(I4d,12)
ts.plot(Id12,main="(IGAE)^(1/4), d=1 y s=12",ylab="Índice"
,xlab="Tiempo")
acfId12 <- acf(Id12, plot=FALSE,lag.max = 70)
acfId12$lag <- acfId12$lag * 12
# Gráfica de la FAM
plot(acfId12, xlab="Lapso (meses)",ylab="FAC",main="FAM")

```

```

pacfId12 <- pacf(Id12, plot=FALSE,lag.max = 60)
pacfId12$lag <- pacfId12$lag * 12
# Gráfica de la FAMP
plot(pacfId12, xlab="Lapso (meses)",ylab="FACP",main="FAMP")
library(tseries)
adf.test(Id12, alternative="stationary")
# Nivel estacional d=1,D=1
I4d12D<-diff(I4d,lag=12,differences = 1)
ts.plot(I4d12D,main="(IGAE)1/4 con d=1,D=1 y s=12",
,ylab="Índice",xlab="Tiempo")
#Análisis de la FAM y FAMP en el nivel estacional
acfI4d12D <- acf(I4d12D, plot=FALSE,lag.max = 72)
acfI4d12D $lag <- acfI4d12D $lag * 12
plot(acfI4d12D , xlab="Lapso(meses)",ylab="FAC",main="FAM")
#FAMP
pacfI4d12D <- pacf(I4d12D, plot=FALSE,lag.max = 72)
pacfI4d12D$lag <- pacfI4d12D$lag * 12
plot(pacfI4d12D, xlab="Lapso(meses)",ylab="FACP",main="FAMP")
library(tseries)
adf.test(I4d12D, alternative="stationary")
library(forecast)
auto.arima(I4)
# Mejor modelo estacional con s=12 ARIMA(2,1,0)(2,0,0)[12]
MSI4d12<-arima(I4, order = c(2, 1, 0),
seasonal = list(order = c(2, 0, 0), period = 12))

```

```

MSI4d12
# Prueba Ljung-Box para probar la eficiencia del modelo
BT = Box.test(MSI4d12$residuals, lag=24,
  type = "Ljung-Box", fitdf=5)
BT

```

III Ahora se analiza el nivel estacional con  $s = 24$  ya que con  $s = 12$  no se encuentra un modelo adecuado para modelar los datos.

```

# Nivel estacional con S=24
I424<-lag(I4,24)
ts.plot(I424,main="IGAE con s=24",ylab="Índice",xlab="Tiempo")
#Análisis de FAC y FACP en el nivel estacional
acfI424 <- acf(I424, plot=FALSE,lag.max = 60)
acfI424$lag <- acfI424$lag * 12
plot(acfI424, xlab="Lapso (meses)",ylab="FAC",main="FAM")
#FACP
pacfI424 <- pacf(I424, plot=FALSE,lag.max = 60)
pacfI424$lag <- pacfI424$lag * 12
plot(pacfI424, xlab="Lapso (meses)",ylab="FACP",main="FAMP")
#Se comprueba la estacionalidad de s=24
library(tseries)
adf.test(I424, alternative="stationary")
#nivel estacional s=24 con d=0,D=1
I4d24<-lag(I4d,24)
ts.plot(I4d24,main="(IGAE)1/4, d=1, D=0 y s=24"

```

```

,ylab="Índice",xlab="Tiempo")
acfI4d24 <- acf(I4d24, plot=FALSE,lag.max = 60)
acfI4d24$lag <- acfI4d24$lag * 12
plot(acfI4d24, xlab="Lapso (meses)",ylab="FAC",main="FAM")
#FAMP
pacfI4d24 <- pacf(I4d24, plot=FALSE,lag.max = 60)
pacfI4d24$lag <- pacfI4d24$lag * 12
plot(pacfI4d24, xlab="Lapso (meses)",ylab="FACP",main="FAMP")
library(tseries)
adf.test(Id12, alternative="stationary")
#nivel estacional s=24 con d=1,D=1
I4d24D<-diff(I4d,lag=24,differences = 1)
ts.plot(I4d24D,main="(IGAE)1/4, d=1,D=1 s=24"
,ylab="Índice",xlab="Tiempo")
acfI4d24D <- acf(I4d24D, plot=FALSE,lag.max = 55)
acfI4d24D$lag <- acfI4d24D$lag * 12
plot(acfI4d24D, xlab="Lapso (meses)",ylab="FAC",main="FAM")
#FACP
pacfI4d24D <- pacf(I4d24D, plot=FALSE,lag.max = 70)
pacfI4d24D$lag <- pacfI4d24D$lag * 12
plot(pacfI4d24D, xlab="Lapso (meses)",ylab="FACP",main="FAMP")
library(tseries)
adf.test(I4d12D, alternative="stationary")
#Pronóstico de parámetros del modelo es un
#SARIMA(2,1,3)(2,1,1)[24]

```

```

MSI4d24D<-Arima(I4, order = c(2, 1, 3)
, seasonal = list(order = c(2, 1, 1), period = 24))
MSI4d24D
# Se prueba la eficiencia del modelo
BT = Box.test(MSI4d24D$residuals, lag=48,
type = "Ljung-Box", fitdf=9)
BT
#Se realiza el pronóstico
MSI4d24D.predict<-predict(MSI4d24D,n.ahead=6)
# Se deben elevar a La cuarta para obtener el pronostico original
ssi1<-(MSI4d24D.predict$pred)^(4)
ssi1
# Éste es le modelo ajustado original
fit1<-(fitted(MSI4d24D))^(4)
fit1
# Gráfica del pronóstico
plot(I,ylab="Índice",xlab="Tiempo"
,main="Pronostico IGAE Dic 2015-May 2016",lwd=2)
lines(ssi1,col=2,lwd=2)
# Gráfica del modelo propuesto ajustado al original
plot(I,ylab="Índice",xlab="Tiempo"
,main="Serie original y ajustada",lwd=2)
lines(fit1,col=2,lwd=2)
# Gráfica de probabilidad normal de residuales
qqnorm(resid(MSI4d24D), datax=TRUE,pch=16, xlab="Residuales",main="")

```

```

qqline(resid(MSI4d24D),datax=TRUE
qqnorm(resid(MSI4d24D), datax=TRUE,pch=16, xlab="Residuales",main="")
qqline(resid(MSI4d24D),datax=TRUE)
#histograma de los residuales
hist(MSI4d24D$residuals,30,
main="Histograma de los residuales",xlab="residuales")
#FAM de los residuales
acfI4d24 <- acf(MSI4d24D$residuals, plot=FALSE,lag.max = 60)
acfI4d24$lag <- acfI4d24$lag * 12
par(lab=c(20,4,10));
plot(acfI4d24, xlab="Lapso (meses)",ylab="FAC",main="FAM")
#FAMP de los residuales
pacfI4d24 <- pacf(MSI4d24D$residuals, plot=FALSE,lag.max = 60)
pacfI4d24$lag <- pacfI4d24$lag * 12
par(lab=c(20,4,10));
plot(pacfI4d24, xlab="Lapso (meses)",ylab="FAC",main="FAMP"))

```

IV Se pronóstica mediante los modelos de intervención, primero se determinar el modelo más apropiado para los datos antes de la intervención para luego incorporarlo al modelo de intervención completo.

```

data <- read.csv(file="C:/Users/Gisela/Documents/IGAE.csv"
, header=TRUE, sep=",")
attach(data)
#Muestra la intervención de cerca
IGAEIc<-ts(cerca,frequency=12,start=c(2008,01), end = c(2009,12))

```

```

ts.plot(IGAEIc,ylab="Índice",xlab="Tiempo",main="IGAE 2008-2009")
#La serie de tiempo antes de la intervención
II<-ts(inter,frequency=12,start=c(1995,04), end = c(2008,12))
ts.plot(II,ylab="Índice",xlab="Tiempo"
,main="Serie de tiempo del IGAE")
#Prediferenciación
II2<-ts((inter)^(1/2),frequency=12,start=c(1995,04),
end = c(2008,12))
ts.plot(II2,main="(IGAE)^(1/2) ",ylab="Índice",xlab="Tiempo")
II4<-ts((inter)^(1/4),frequency=12,start=c(1995,04),
end = c(2008,12))
ts.plot(II4,main="(IGAE)^(1/4)",ylab="Índice",xlab="Tiempo")
IIln<-ts(log(inter),frequency=12,start=c(1995,04),
end = c(2008,12))
ts.plot(IIln,main="log(IGAE)",ylab="Índice"
,xlab="Tiempo")
#Serie con una diferencia
II4d<-ts(diff(II4,lag=1,differences = 1),frequency=12
,start=c(1995,04), end = c(2008,12))
ts.plot(II4d,main="(IGAE)^(1/4) con d=1",
ylab="Índice",xlab="Tiempo")
#Análisis de FAC y FACP en el nivel no estacional
acfII4d<- acf(II4d, plot=FALSE,lag.max = 70)
acfII4d$lag <- acfII4d$lag * 12
plot(acfII4d, xlab="Lapso (meses)",ylab="FAC",main="FAM")

```

```

#FACP
pacfII4d<- pacf(II4d, plot=FALSE,lag.max = 70)
pacfII4d$lag <- pacfII4d$lag * 12
plot(pacfII4d, xlab="Lapso (meses)",ylab="FACP",main="FAMP")
#con d=1 y D=1
II4d24D<-diff(II4d,lag=24,differences = 1)
ts.plot(II4d24D,main="(IGAE)1/4, d=1,D=1 s=24"
,ylab="Índice",xlab="Tiempo")
#Análisis de FAC y FACP en el nivel estacional
acfII4d24D <- acf(II4d24D, plot=FALSE,lag.max = 70)
acfII4d24D$lag <- acfII4d24D$lag * 12
plot(acfII4d24D, xlab="Lapso (meses)",ylab="FAC",main="FAM")
#FACP
pacfII4d24D <- pacf(II4d24D, plot=FALSE,lag.max = 70)
pacfII4d24D$lag <- pacfII4d24D$lag * 12
plot(pacfII4d24D, xlab="Lapso (meses)",ylab="FACP",main="FAMP")

#El mejor modelo para los datos antes de la intervención es
#un SARIMA(2,1,0)(2,1,0)[24]
MIId24<-arima(II4, order = c(2, 1, 0),
seasonal = list(order = c(2, 1, 0), period = 24))
MIId24
# Se comprueba la eficacia del modelo
BT = Box.test(MIId24$residuals, lag=42,
type = "Ljung-Box", fitdf=4)

```

```
BT
# Los datos del modelo propuesto
fit24<-fitted(MIId24)
fit244<-(fit24)^4
# La gráfica del modelo propuesto al original
plot(II,ylab="IGAE",main="Ajuste del modelo")
points(II)
points(fit244,col=2)
#Histograma de los residuales
hist(resid(MIId24),main = "Histograma de los residuales"
, xlab="Residuales",ylab="Frecuencia",16)
#FAM y FAMP de los residuales
acfII4d<- acf(MIId24$residuals, plot=FALSE,lag.max = 70)
acfII4d$lag <- acfII4d$lag * 12
plot(acfII4d, xlab="Lapso (meses)",ylab="FAC",main="FAM")
#FACP
pacfII4d<- pacf(MIId24$residuals, plot=FALSE,lag.max = 70)
pacfII4d$lag <- pacfII4d$lag * 12
plot(pacfII4d, xlab="Lapso (meses)",ylab="FACP",main="FAMP")
# Gráfica de probabilidad normal de residuales
qqnorm(resid(MIId24), datax=TRUE,pch=16,
xlab="Residuales",main="")
qqline(resid(MIId24),datax=TRUE)
plot(fitted(MIId24),resid(MIId24)
, xlab="Valores ajustados", ylab="residuales")
```

```
abline(h=0)
```

V Por último se realiza el análisis del modelo de intervención completo.

```
#Modelo con una intervención
library(TSA)
#El siguiente es el modelo propuesto
#Se pronostican los parámetros del modelo
M11<-arimax((IGAE)^(1/4),order=c(2,1,0),
  seasonal=list(order=c(2,1,0),period=24),
  xtransf=data.frame(I165=1*(seq(IGAE)>=166)),
  transfer=list(c(1,0)) ,method='ML')
M11
#Se prueba la eficiencia del modelo con intervención
BT = Box.test(M11$residuals, lag=12, type = "Ljung-Box", fitdf=4)
BT
# La gráfica del modelo propuesto al original
fit4<-(fit)^4
plot(IGAE,ylab="IGAE",main="Modelo propuesto y original")
points(IGAE)
points(fit4,col=2)
#Histograma de los residuales
hist(resid(M11),main = "Histograma de los residuales"
, xlab="Residuales",ylab="Frecuencia",10)
#FAM y FAMP de los residuales
acfII4d<- acf(M11$residuals, plot=FALSE,lag.max = 70)
```

```
acfII4d$lag <- acfII4d$lag * 12
plot(acfII4d, xlab="Lapso (meses)",ylab="FAC",main="FAM")
#FACP
pacfII4d<- pacf(M11$residuals, plot=FALSE,lag.max = 70)
pacfII4d$lag <- pacfII4d$lag * 12
plot(pacfII4d, xlab="Lapso (meses)",ylab="FACP",main="FAMP")
# Gráfica de probabilidad normal de residuales
qqnorm(resid(M11), datax=TRUE,pch=16, xlab="Residuales",main="")
qqline(resid(M11),datax=TRUE)
plot(fit,resid(M11),xlab="Valores ajustados", ylab="residuales")
abline(h=0)
```