Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Estudio de las propiedades de los haces Mathieu a nivel de óptica geométrica: frentes de onda y cáustica

Tesis Presentada al

Posgrado en Cs.(Física Aplicada)

como requisito para la obtención del grado de

Maestría en Cs.(Física Aplicada)

por el

Lic. Israel Julián Macías

asesorado por

Dr. Gilberto Silva Ortigoza

Puebla, Pue.
Diciembre, 2017

Título: Estudio de las propiedades de los haces Mathieu a nivel de óptica geométrica: frentes de onda y cáustica

Estudiante: Lic. Israel Julián Macías

COMITÉ

Dr. Gerardo F. Torres de Castillo
Presidente

Dr. Maximino L. Arroyo Carrasco
Secretario

Dr. Carlos I. Robledo Sánchez
Vocal

Dra. M. del Rosario Pastrana Sánchez
Suplente

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Asesor

Índice general

Resumen **IV**

Objetivo General **VI**

1. Introducción **1**

2. Haz adifraccional **6**

2.1. ¿Qué es un haz adifraccional? 6

2.2. Conjunto de soluciones exactas separables no singulares a la ecuación escalar de onda 8

2.3. Método para calcular la función $A(\varphi)$ asociada a las soluciones separables no singulares de la ecuación escalar de onda 11

3. Solución a la ecuación escalar de onda en coordenadas cilíndricas elípticas usando el método de separación de variables **13**

3.1. Coordenadas cilíndricas elípticas 14

3.2. Solución separable a la ecuación escalar de onda en coordenadas cilíndricas elípticas 17

3.2.1. Método para resolver las ecuaciones de Mathieu 19

3.3. Expresión análitica de un haz Mathieu 22

3.4. Cálculo de la función $A(\varphi)$ asociada a un haz Mathieu 23

4. Método para calcular los frentes de onda y la cáustica asociados con un haz adifraccional **30**

4.1. Condiciones de la función $S(\mathbf{r})$ para que $e^{i[k_0 S(\mathbf{r})-\omega t]}$ sea solución a la ecuación escalar de onda en el vacío 30

4.2. Solución a la ecuación iconal por el método de separación de variable 32

4.3. Frentes de onda y cáustica asociados con un haz adifraccional 35

5. Resultados **39**

5.1. Gráficas de los frentes de onda y cáustica para algunos haces Mathieu particulares 40

5.1.1. Caracterización geométrica del haz Mathieu $\Psi_{0,q}$ 41

5.1.2. Caracterización geométrica del haz Mathieu $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ . . . 41

5.1.3. Cáusticas asociadas con $\Psi_{0,q}$ y $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ 46

5.2. Patrón de intensidad de un haz Mathieu $\Psi_{\lambda_\nu,q}$ 46

6. Conclusiones **50**

Resumen

En óptica física, el estudio de los haces adifraccionales es de gran importancia debido a que este tipo de haces no experimentan el fenómeno de difracción, en otras palabras, el patrón de intensidad se mantiene constante a lo largo de la direción de propagación del haz, además estos haces, se autorreconstruyen cuando son parcialmente obstruidos a una determinada distancia de donde se localiza el obstáculo, otra propiedad que manifiestan los haces adifraccionales de alto orden es la transferencia de momento angular a una partícula, este hecho permite que se puedan utilizar como pinzas ópticas. Existen cuatro tipos de haces adifraccionales que son soluciones exactas separables a la ecuación escalar de onda en cuatro sistemas coordenados diferentes: ondas planas, haces Bessel, Mathieu y parabólicos. El objetivo de este trabajo es obtener los frentes de onda geométricos, la cáustica y los patrones de intensidad asociados con los haces Mathieu. Se muestra que los frentes de onda son deformaciones de conos y la cáustica queda determinada por el orden del haz correspondiente y la distancia cofocal que aparece en la definición de coordenadas cilíndricas elípticas. Una propiedad de las cáusticas asociadas con los haces adifraccionales es que tienen una sola rama y son invariantes ante traslaciones a lo largo del eje de propagación del haz. Se obtienen los frentes de onda, cáustica asociada y el patrón de intensidad para un haz Mathieu caracterizados por los parámetros λ_ν, valor característico, y q en los siguientes casos: $\lambda_\nu = 0$ y $q = 0$, .1, .2, .3, .4, .5, .6; $q = 0$ y $\lambda_\nu = 0$, 1, 4, 9, 16. Se demuestra que los frentes de onda para $\lambda_\nu = 0$ y $q = 0$ son conos; mientras que para $q = 0$ y $\lambda_\nu = 1$, 4, 9, 16 son deformaciones de conos; la cáustica asociada con un haz Mathieu con estos parámetros son cilíndros, excepto para el haz Mathieu con $\lambda_\nu = 0$ y $q = 0$, en este caso la cáustica asociada es el eje z, además se muestra que el patrón de intensidad de un haz Mathieu con $q = 0$ y $\lambda_\nu = 0$, 1, 4, 9, 16 corresponde al patrón de intensidad de un haz Bessel de orden 0, 1, 2, 3, 4. Por otro lado, cuando

$\lambda_\nu = 0$ y q=.1, .2, .3, .4, .5, .6 también se tiene que los frentes de onda son deformaciones de conos pero, en este caso la forma de la cáustica asociada depende del parámetro de elipticidad q. Finalmente, encontramos que para valores del parámetro q=.3, .4, .5, .6 la cáustica asociada tiene singularidades del tipo cúspide, por lo que se puede decir que el haz Mathieu caracterizados por el valor característica $\lambda_\nu = 0$ con q=.3, .4, .5, .6 es estable ante pequeñas perturbaciones. Por lo tanto, concluimos que los haces Mathieu caracterizados por una cáustica con singularidades de tipo cúspide es más estable que un haz Mathieu cuya cáustica tiene singularidades de tipo fold, así como de un haz Bessel o parabólico .

Objetivo General

Obtener las gráficas de los frentes de onda geométricos la cáustica asociados con un haz Mathieu.

Objetivos particulares

1. Estudio de las soluciones a la ecuación escalar de Helmholtz en coordenadas cilíndricas elípticas mediante el método de separación de variables.

2. Estudio del método para resolver las ecuaciones de Mathieu.

3. Obtención de la expresión analítica de los haces Mathieu.

4. Cálculo de los frentes de onda y cáustica asociados con un haz Mathieu, con diferentes valores de los parámetros λ_ν y q, así como el patrón de intensidad correspondiente con este haz.

Capítulo 1

Introducción

Una de las propiedades más estudiadas de la luz es la difracción, un fenómeno que ocurre cuando las ondas se curvan al enfrentarse a algún obstáculo cuyas dimensiones son comparables con la longitud de onda λ. La difracción es la causante de que el haz se ensanche cuando se propaga a través del aire y provoca que la intensidad del haz disminuya. Sin embargo, en 1987 Durnin [1] presentó un conjunto de soluciones exactas no singulares a la ecuación escalar de onda en el espacio libre

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1.1}$$

en términos de la integral reducida de Whittaker [2], dada por

$$\psi(\mathbf{r},t) = \frac{e^{i(k_z z-\omega t)}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(\varphi)e^{ik_t(x\cos\varphi+y\sin\varphi)}d\varphi, \tag{1.2}$$

donde $k_t = k_0\sin\vartheta_0$ y $k_z = k_0\cos\vartheta_0$ son las magnitudes de las componentes transversal y longitudinal del vector de onda $\mathbf{k}_0$ respectivamente y $\vartheta_0 \in (0,\pi)$. Además, se cumple que $k_t^2+k_z^2 = k_0^2 = (\omega/c)^2$ y $A(\varphi)$ es una función compleja arbitraria de φ. La expresión matemática que utilizó Durnin para describir un haz adifraccional, fue propuesta por Whittaker. Whittaker [2] consideró una solución a la ecuación escalar de onda de la forma $\psi(\mathbf{r},t) = \zeta(x,y)e^{i(\beta z-\omega t)}$, por lo que, $I \propto \psi(\mathbf{r},t)\psi^*(\mathbf{r},t) = |\zeta(x,y)|^2$. Con este resultado, se muestra que la intensidad del haz es invariante a lo largo del eje de propagación, ya que $I(x,y,z) = I(x,y)$. Cuando $k_t = 0$ la Ec. (1.2) representa una onda plana. Sin embargo, para $0 < k_t < k_0$ la Ec. (1.2) representa una clase de campos que son

adifraccionales en el sentido de que el perfil de intensidad promedio en $z = 0$ es exactamente igual para todo z en cada plano normal al eje z. Puesto que la función $A(\varphi)$ es arbitraria, entonces existe un número infinito de haces adifraccionales. Es importante notar que existen cuatro familias especiales de haces adifraccionales que corresponden a las *soluciones separables* de la ecuación de onda con una dependencia de la forma $e^{i(k_z z-\omega t)}$ en coordenadas: cartesianas, cilíndricas, cilíndricas elípticas y cilíndricas parabólicas [3]. En este caso la función $A(\varphi)$ está determinada en términos de los parámetros que caracterizan a cada familia. Durnin [1] además de introducir el concepto de haz adifraccional, estudió las propiedades del haz Bessel de orden cero. Más tarde Durnin, Miceli y Eberly [4] presentaron el primer reporte experimental de un haz adifraccional, el cual corresponde al haz Bessel de orden cero. Gutiérrez-Vega, Iturbe-Castillo y Chávez-Cerda [5] presentaron teoricamente los haces Mathieu y los haces parabólicos fueron introducidos por Bandres, Gutiérrez-Vega y Chávez-Cerda [6]. Es importante destacar que los haces adifraccionales tienen la propiedad de autorreconstrucción; es decir, cuando son obstruidos parcialmente a determinada distancia del obstáculo se vuelven a reconstruir. Además, el estudio teórico y experimental de estos haces es muy importante debido a sus diferentes aplicaciones, tales como: metrología, microlitografía, óptica no lineal, cirugía médica, así como en comunicaciones inalámbricas y ópticas [7].

Una familia de haces adifraccionales son los haces Mathieu, desde que se reportaron teoricamente [5], este tipo de haces han sido objeto de estudio para determinar sus propiedades físicas. Gutiérrez-Vega, Iturbe-Castillo, Ramírez, Rodríguez-Dagnino y Chávez-Cerda reportaron la primera observación experimental de un haz Mathieu de orden cero [8]. Posteriormente, Chávez-Cerda, Padgett, Allison, New, Gutiérrez-Vega, O'Neil, MacVicar y Courtial [9] reportan la primera generación experimental holográfica de algunos haces Mathieu de alto orden, así como su propagación invariante sobre un rango limitado. López-Mariscal, Gutiérrez-Vega, Milne y Dholokia [10] reportaron que los haces Mathieu pueden transferir momento angular a partículas atrapadas en la distribución de intensidad transversal del haz. Debido a que un Haz Mathieu ideal no es de cuadrado integrable, no puede ser normalizado para que su intensidad sea unitaria, es decir, son de extensión y energía infinita, por lo que no son fisicamente realizables, en vista de esto, Bandres, y Gutiérrez-Vega [11] presentaron una expresión elegan-

te para la propagación de los así llamados haces Mathieu-Gauss los cuales tienen una potencia finita y son realizables experimentalmente con una buena aproximación. López-Mariscal, Bandres y Gutiérrez-Vega [12] muestran la generación experimental y caracterización de las cuatro familias de haces Helmholtz-Gauss (incluida el haz Mathieu-Gauss). Posteriormente, Bandres y Gutiérrez-Vega [13] determinaron las constantes de normalización de los haces Mathieu-Gauss par e impar. Alvarez-Elizondo, Rodriguez-Masegosa y Gutiérrez-Vega [14] reportan la primera observación experimental de los modos Mathieu-Gauss generados directamente en un resonador estable basado en un axicón. Más tarde, Hernández-Hernández, Terborg, Ricardez-Vargas y Volke-Sepúlveda [15] presentan un método nuevo para la generación eficiente de haces Mathieu-Gauss helicoidales. Los haces Mathieu han sido aplicados en: celdas fotónicas [16], transferencia de momento angular como pinzas ópticas [9,10] y ondas X localizadas [17].

Una de las primeras descripciones que se le dio al comportamiento de la luz fue con óptica geométrica; desde este enfoque, las dimensiones del medio por el cual se propaga la luz son más grandes que la longitud de onda de la luz, describiendo así a la propagación de la luz mediante dos conceptos: frentes de onda geométricos y rayos de luz, donde los rayos de luz son perpendiculares a los frentes de onda geométricos en un medio óptico isótropo. Es bien sabido que, en el límite de óptica geométrica, una onda plana que se propaga en el vacío y en dirección del eje z está caracterizada por frentes de onda geométricos los cuales son planos infinitos dados por $z = C = constante$ y una familia de rayos de luz paralelos al eje z. Cuando esta onda plana es refractada por una lente convergente entonces la familia de frentes de onda y rayos de luz refractados está caracterizada por una observable denominada cáustica. La cáustica es definida por las singularidades del tren de frentes de onda refractados o equivalentemente por la envolvente de los rayos de luz refractados. Es importante notar que cualitativamente la cáustica determina el máximo de la irradiancia. Por otro lado, tenemos que un haz adifraccional (1.2) es generado por la superposición de una familia uniparamétrica de ondas planas con una dependencia de la forma $e^{i(k_z z-\omega t)}$. Puesto que para generar un haz adifraccional experimentalmente en una región finita del espacio normalmente se usan lentes, entonces de manera natural surge la siguiente pregunta: ¿tales haces pueden ser caracterizados geometricamente? En un trabajo reciente demostramos [18] que un haz adifraccional está ca-

racterizado por una familia de frentes de onda y una cáustica, los cuales son invariantes ante traslaciones a lo largo del eje z. Como caso especial se presentó la caracterización geométrica de un haz Bessel de orden m. En un trabajo posterior [19] se reportó la caracterización geométrica de los haces parabólicos, encontrando que la cáustica describe cualitativamente el comportamiento del máximo global del patrón de intensidad teórico. El objetivo de este trabajo es presentar una caracterización geométrica de la expresión integral de Whittaker para $A(\varphi; q) = ce_\nu(\varphi; q) + ise_\nu(\varphi; q)$. Es decir, una caracterización geométrica de los haces Mathieu.

De acuerdo con lo que se ha expuesto, se han analizado las propiedades de los haces adifraccionales con óptica física. A partir de este enfoque, se han descrito ciertas caractéristicas de los haces adifraccionales, como son: la distribución de intensidad, el momento angular, la polarización y la interferencia. Nosotros presentamos la descripción de los haces adifraccionales conocidos como haces Mathieu a partir de óptica geométrica. Para este propósito:

* En el segundo capítulo se introduce el concepto de haz adifraccional y se describen algunas de sus propiedades. Posteriormente se enfatiza la importancia que tiene la función $A(\varphi)$. Se muestra que existe un conjunto de soluciones separables exactas a la ecuación escalar de onda en el que la función $A(\varphi)$ queda determinada. Finalmente, se menciona el método para determinar la función $A(\varphi)$ que caracteriza a cada familia del conjunto de soluciones separables exactas a la ecuación escalar de onda.

* Puesto que los haces Mathieu son un conjunto de soluciones separables a la ecuación de onda en coordendas cilíndricas elípticas (ξ, η, z), en el tercer capítulo revisamos la teoría que se tiene en la literatura sobre coordenadas cilíndricas elípticas. Dada la ecuación escalar de onda se obtiene la ecuación de Helmholtz. Posteriormente dada la transformación de coordenadas cartesianas a cilíndricas elípticas, se obtiene la ecuación escalar de onda y la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas elípticas. Para resolver la ecuación de Helmhotz en estas coordenadas, utilizamos el método de separación de variables proponiendo una solución de la forma $R(\xi)\Phi(\eta)Z(z)$, con lo cual obtenemos tres ecuaciones diferenciales de segundo orden; en el caso de las coordenadas ξ y η, obtenemos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo

orden con coeficientes periódicos, a estas dos ecuaciones se les denomina ecuaciones de Mathieu ordinaria y modificada respectivamente. Se discute el método que se utiliza para resolver las ecuaciones de Mathieu ordinaria y modificada. Finalmente, se determina la función $A(\varphi)$ en coordenadas cilíndricas elípticas.

* En el cuarto capítulo se obtienen las condiciones que debe cumplir la función $S(\mathbf{r})$ para que $\psi(\mathbf{r},t) = e^{i[S(\mathbf{r})-\omega t]}$ sea solución exacta a la ecuación escalar de onda en el vacío. Se muestra que la función $S(\mathbf{r})$ debe satisfacer las ecuaciones iconal y de Laplace. Se resuelve la ecuación iconal en coordenadas cartesianas por el método de separación de variables y se obtiene una integral completa $S = S(x,y,z;\vartheta,\varphi)$ que además satisface la ecuación de Laplace, donde ϑ y φ son dos parámetros no aditivos. Tomando $\vartheta = \vartheta_0 = constante$, y utilizando el principio de superposición, obtenemos una solución a la ecuación de onda en términos de la función $S(x,y,z,\varphi)$, esta nueva solución denotada por $\Psi(\mathbf{r},t)$ será expresada mediante una integral. Puesto que la función $S(x,y,z,\varphi)$ satisface la ecuación iconal, entonces es posible definir la familia de frentes de onda, y cáustica asociada con $\Psi(\mathbf{r},t)$.

* En el quinto capítulo aplicamos nuestros resultados generales presentados en el tercer y cuarto capítulo, es decir, usando la familia uniparamétrica asociada con un haz óptico invariante, el cual está descrito por una solución propuesta por Whittaker, obtenemos los frentes de onda y cáustica asociada a un haz Mathieu, para valores distintos de los parámetros λ_ν y q. Encontramos que, para valores $\lambda_\nu \in \mathsf{N} \cup 0$ y q=0 se obtienen los frentes de onda y cáustica asociados con los haces Bessel de 0, 1, 2, 3, 4..., es decir a las soluciones de la forma $J_{\lambda_\nu}(k_t\rho)e^{(i\lambda_\nu\phi+k_z z-\omega t)}$. Para λ_ν=0 y q =-.1,-.2,-.3,-.4,-.5,-.6 se obtienen los frentes de onda y cáustica asociados con la expresión de Whittaker para la función $A(\varphi;q) = ce_{\lambda_\nu}(\varphi;q)+ice_{\lambda_\nu}(\varphi;q) = ce_0(\varphi;q)+ice_0(\varphi;q)$.

Capítulo 2

Haz adifraccional

En esta sección se menciona cuáles son las propiedades de un haz adifraccional también denominado haz Durnin, así como el papel que juega la función $A(\varphi)$ en la expresión de un haz adifraccional Ec. (1.2), además, se muestra que un haz adifraccional se puede ver como la superposición de ondas planas −cada onda tiene su propia magnitud y fase inicial− cuyo vector de propagación yace sobre un cono. Se muestra que, cuando la ecuación escalar de onda (1.1) se expresa en cuatro diferentes sistemas coordenados, los cuales admiten soluciones por separación de variables, la función $A(\varphi)$ queda determinada.

2.1. ¿Qué es un haz adifraccional?

Un haz láser se puede modelar como una onda monocrómatica y armónica en el tiempo, cuya amplitud está dada por una envolvente Gaussiana; si es que no existe interés de analizar las propiedades producidas por la polarización del campo electromagnético del haz, basta con analizar la propagación de la onda sin tomar en cuanta los efectos que se puedan producir debido a la polarización del campo electromagnético. Por otro lado, experimentalmente se tiene que un haz láser al propagarse presenta dos fenómenos: disminución de intensidad y ensanchamiento; el segundo fenómeno se denomina difracción. La difracción es un fenómeno que ocurre por la simple propagación de la luz, sin necesidad de que la luz sea parcialmente obstruida. Durnin [1] presentó un conjunto de soluciones en todo el espacio Ec. (1.2) a la ecuación

escalar de onda Ec. (1.1) cuya dependencia es de la forma $e^{i(k_z z-\omega t)}$ con la propiedad de que su patrón de intensidad transversal −sobre el plano xy− no manifiesta cambio alguno mientras esta onda se propaga para cualquier valor de la función $A(\varphi)$ continua e integrable en el intervalo $(-\pi,\pi)$. Además, estudió las propiedades del haz Bessel de orden cero (solución separable a la ecuación escalar de onda en coordenadas cilíndricas circulares). Más tarde, él junto con otros colaboradores muestran evidencia experimental del haz Bessel de orden cero. Posteriormente a estos trabajos, se presentaron otros dos haces adifraccionales: haces Mathieu y haces parabólicos. Una caracterísa muy especial de estos tres haces adifraccionales es que la función $A(\varphi)$ es única, esto ocurre porque la expresión dada por la Ec. (1.2) está expresada en los sistemas coordenados: cilíndricos circulares, cilíndricos elípticos y cilíndricos parabólicos, respectivamente. Otra propiedad especial de estos haces, es que se pueden autoreconstruir una vez que se obstruyen parcialmente después de cierta distancia, estas tres características hacen que un haz Durnin sea de gran interés, por lo cual ha sido objeto de un estudio detallado desde su aparición. Es importante notar que, como se mencionó anteriormente, el patrón de intensidad transversal de un haz adifraccional depende de la función $A(\varphi)$, esta función que en general puede ser compleja, es decir, $A(\varphi) = A_{\mathrm{R}}(\varphi) + iA_{\mathrm{I}}(\varphi)$; por lo que un haz adifraccional Ec. (1.2) se puede expresar como

$$\psi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} O(\varphi)e^{i[k_t(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+k_z z+g(\varphi)-\omega t]}d\varphi, \tag{2.1}$$

donde $A(\varphi)$=$O(\varphi)e^{ig(\varphi)}$; las funciones $O(\varphi)$=$\sqrt{(A_{\mathrm{R}}(\varphi))^2+(A_{\mathrm{I}}(\varphi))^2} \geq 0$ y $g(\varphi)$ representan la magnitud y la fase, respectivamente, de la función compleja $A(\varphi)$. Observe que para cada valor de $\varphi \in [-\pi,\pi)$, el integrando de la Ec. (2.1), esto es, la expresión $O(\varphi)e^{i[k_t(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+k_z z+g(\varphi)-\omega t]}$, representa una onda plana monocromática de amplitud $O(\varphi)$ y fase inicial $g(\varphi)$, por lo tanto, podemos decir que un haz adifraccional es la superposición de ondas planas cuya magnitud y fase inicial están dadas por las funciones $O(\varphi)$ y $g(\varphi)$, respectivamente.

En la Fig.(2.1) se muestran como ejemplos, algunos patrones de intensidad para ciertas funciones $A(\varphi)$, consideramos dos funciones complejas y dos reales. Como se puede observar en la Fig. (2.1), el patrón de intensidad depende de la expresión de la función $A(\varphi)$. Debido a que para cada expresión de la función $A(\varphi)$ se tiene una solución en todo el espacio a la ecuación

escalar de onda Ec. (1.1) usando la representación integral Ec. (1.2), decimos que existe un número infinito de soluciones a la ecuación escalar de onda, denominadas haces adifraccionales.

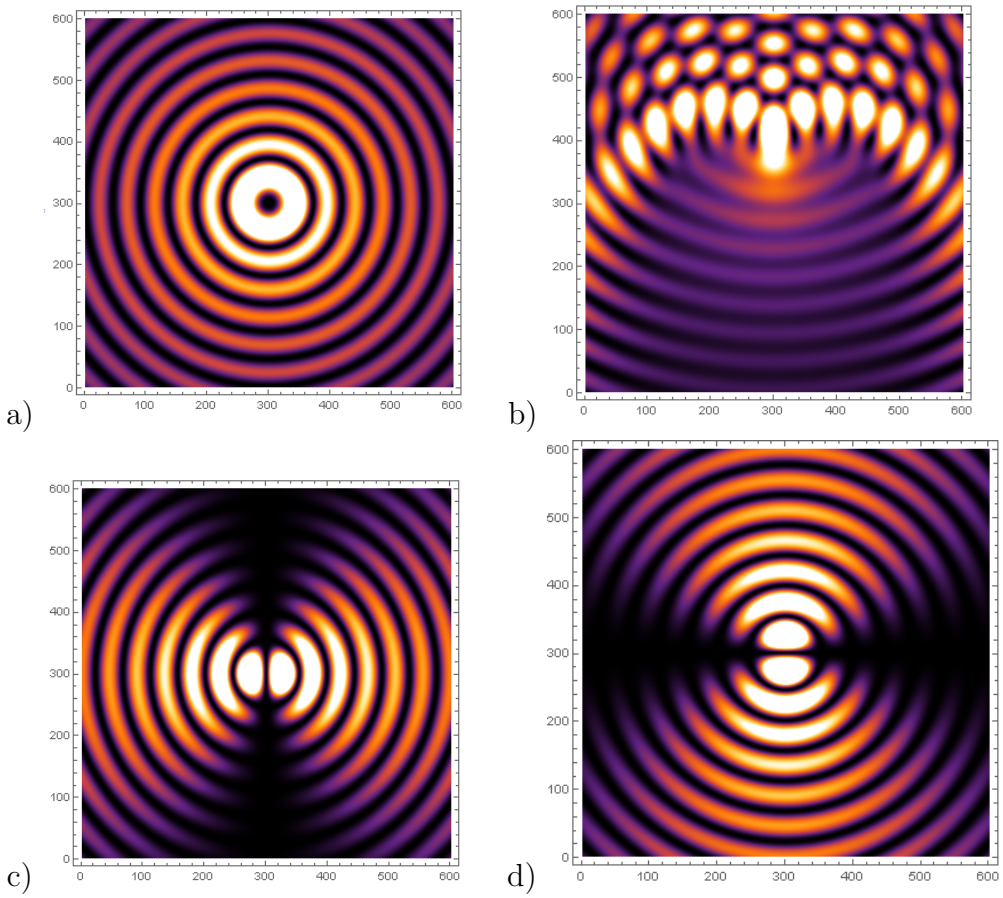


Figura 2.1: a).- $A(\varphi)$=cos$(2\varphi) + i\,$sin(2φ). b).- $A(\varphi)$=cos$(3\varphi^2) + i\,$sin$(3\varphi^2)$. c).- $A(\varphi)$=cos(φ). d).- $A(\varphi)$=sin(φ).

2.2. Conjunto de soluciones exactas separables no singulares a la ecuación escalar de onda

Es importante notar que la ecuación escalar de onda Ec. (1.1) está representada en un sistema arbitrario, mientras que Ec. (1.2) está expresada

en coordenadas cartesianas, por lo que, un haz adifraccional dado por la Ec. (1.2) es una solución exacta de la ecuación escalar de onda dada por la Ec. (1.1) en coordenadas cartesianas para cualquier función compleja $A(\varphi)$.

Observe que un haz adifraccional Ec. (1.2) puede escribirse en la forma

$$\psi(\mathbf{r},t) = e^{i(k_z z-\omega t)}\zeta(x,y), \tag{2.2}$$

$$\zeta(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(\varphi)e^{ik_t(x\cos\varphi+y\sin\varphi)}d\varphi. \tag{2.3}$$

Existe una característica especial acerca de la expresión dada por la Ec. (2.2) si se observa con detalle, esta función es separable en la posición, en el sentido de que su parte espacial se puede ver como el producto de dos funciones $e^{ik_z z}$ y $\zeta(x,y)$, en otras palabras, encontramos que un haz adifraccional Ec. (1.2) se puede escribir como una expresión en la cual la parte longitudinal $e^{ik_z z}$ es independiente de la parte transversal $\zeta(x,y)$.

Regresando a la ecuación escalar de onda Ec. (1.1); como se considera una onda armónica en el tiempo y monocromática, entonces $\psi(\mathbf{r},t)=\psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, por lo que, después de realizar la segunda derivada parcial de $\psi(\mathbf{r},t)$ con respecto del tiempo, la ecuación de onda en el vacío Ec. (1.1), se puede expresar como

$$\left(\nabla^2\psi(\mathbf{r})+\frac{\omega^2}{c^2}\psi(\mathbf{r})\right)e^{-i\omega t}=0. \tag{2.4}$$

Ahora bien, puesto que $e^{-i\omega t}$ es distinto de cero y, dada la relación que guarda la velocidad de la onda, la frecuencia angular y la magnitud del vector de onda en el vacío, está dada por $c=\omega/k_0$, de la Ec. (2.4) obtenemos la denominada ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r})+k_0^2\psi(\mathbf{r})=0. \tag{2.5}$$

Observe que el imponer que la onda sea armónica en el tiempo y monocromática, permite simplificar la ecuación escalar de onda en el vacío

Ec. (1.1), ya que, para obtener la función de onda basta con resolver una ecuación de segundo orden en derivadas parciales con respecto a la posición. Es importante señalar que dependiendo en qué coordenadas se resuelva la ecuación de Helmholtz, se va a poder describir ondas con ciertas características, los sistemas coordenados más estudiados son: cartesianas, cilíndricas y esféricas. El sistema coordenado que se elige para resolver la ecuación que describe cierto fenómeno físico depende de las condiciones del problema, por ejemplo, si notamos que el problema posee simetría circular entonces se consideran coordenadas cilíndricas, ya que este sistema coordenado es más apropiado debido a la simetría que posee el problema. El objetivo ahora es, hallar soluciones a la ecuación de Helmholtz Ec. (2.5); para ello, recurrimos al método de separación de variables. De los once sistemas coordenados en los que la ecuación de Helmholtz admite soluciones por separación de variables [3], sólo cuatro de ellos admiten soluciones de la forma

$$e^{ibz}Q_1(q_1)Q_2(q_2), \tag{2.6}$$

donde b es una constante, (q_1, q_2, z) representan las variables de: coordenadas cartesianas (x, y, z), cilíndricas circulares (ρ, ϕ, z), cilíndricas elípticas (ξ, η, z) y cilíndricas parabólicas (u, v, z). Al conjunto SS=$\{$ $e^{ibz}Q_1(q_1)Q_2(q_2)$ tal que (q_1, q_2)=(x, y), (ρ, ϕ), (ξ, η) y (u, v) $\}$ se le conoce como el conjunto de soluciones separables no singulares a la ecuación de Helmholtz, por lo que, el conjunto de soluciones separables no singulares a la ecuación escalar de onda en el vacío Ec. (1.1), para una onda armónica en el tiempo está dado por $SSEO$=$\{$ $e^{i(bz-\omega t)}Q_1(q_1)Q_2(q_2) : (q_1, q_2)$=$(x, y)$, (ρ, ϕ), (ξ, η) y (u, v) $\}$.

Dado que existe una ley de transformación entre coordenadas cartesianas y los otros tres sistemas coordenados: cilíndricas circulares, cilíndricas elípticas y cilíndricas parabólicas, entonces se puede expresar a la solución escalar de la ecuación de onda en el vacío Ec. (1.2) en términos de coordenadas cilíndricas polares, cilíndricas elípticas y cilíndricas parabólicas; y encontrar que, en efecto, cada una de estas soluciones satisfacen a la ecuación escalar de onda en el vacío Ec. (1.1) en el sistema coordenado correspondiente *para cualquier expresión de la función* $A(\varphi)$. Existe una función $A(\varphi)$ que caracteriza a cada elemento de $SSEO$ siempre y cuando se cumpla una condición. En la siguiente sección se hablará acerca de cómo determinar dicha función para cada uno de los cuatro sistemas coordenados (cartesianas, cilíndricas polares, cilíndricas elípticas y cilíndricas parabólicas).

2.3. Método para calcular la función $A(\varphi)$ asociada a las soluciones separables no singulares de la ecuación escalar de onda

Se debe poner atención en tres cosas de las cuales se habló en la sección anterior. Primero: se mostró que el conjunto de soluciones exactas a la ecuación escalar de onda Ec. (1.2) se puede expresar como una solución de la forma Ec. (2.2), segundo: se mencionó también que existen cuatro sistemas coordenados en los cuales la solución a la ecuación escalar de onda tiene una estructura muy parecida a la dada en la Ec. (2.2), y tercero: se mencionó que, realizando el cambio de variable $(x, y) \to (\rho, \phi)$, (ξ, η), y (u, v) un haz adifraccional dado por la Ec. (1.2) es solución a la ecuación escalar de onda en el vacío Ec. (1.1) en coordenadas cilíndricas circulares, cilíndricas elípticas y cilíndricas parabólicas, respectivamente.

Primero observe que, para cada ley de transformación entre (x, y) y (q_1, q_2), se tiene que la función $\zeta(q_1, q_2)$ dada por la Ec. (2.3) se puede escribir como

$$\zeta(q_1, q_2) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A(\varphi) e^{ik_t[x(q_1,q_2)\cos\varphi + y(q_1,q_2)\sin\varphi]} d\varphi. \tag{2.7}$$

Por otra parte, la ecuación de Helmholtz transversal en coordenadas curvilíneas ortogonales (q_1, q_2) está dada por

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial W}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)\right] + k_t^2 W = 0, \tag{2.8}$$

con $W = W(q_1, q_2)$, proponiendo una solución por el método de separación de variables, es decir, $W = Q_1(q_1)Q_2(q_2)$, entonces la Ec. (2.8) se expresa como dos ecuaciones diferenciales de segundo orden desacopladas

$$\frac{d^2 Q_1}{dq_1^2} + k_t^2 F_1(q_1) Q_1 = \pm\lambda \tag{2.9}$$

$$\frac{d^2 Q_2}{dq_2^2} + k_t^2 F_2(q_2) Q_2 = \mp\lambda, \tag{2.10}$$

donde $h_1h_2 = F_1(q_1) + F_2(q_2)$; observe que escribimos a h_1h_2 como la suma de las funciones $F_1(q_1)$ y $F_2(q_2)$ debido a que para cada elemento de *SSEO* se puede probar que en efecto, el producto de los factores de escala h_1h_2 se puede escribir como la suma de dos funciones de la forma $F_1(q_1)+F_2(q_2)$. Por lo tanto para determinar la función $A(\varphi)$ que caracteriza a cada elemento de *SSEO*, basta con sustituir la función $\zeta(q_1, q_2)$ dada por la Ec. (2.7) en una de las dos ecuaciones diferenciales de segundo orden (2.9-2.10) y despúes de algunas manipulaciones algebraicas se podrá hallar la expresión de la función $A(\varphi)$ asociada a cada uno de los cuatro sistemas coordenados que admiten soluciones exactas no singulares por separación de variables, esto es, a cada elemento de *SSEO*. Este método se expondrá en el siguiente capítulo para determinar la función $A(\varphi)$ que caracteriza las soluciones separables a la ecuación escalar de onda en el vacío Ec. (1.1) en coordenadas cilíndricas elípticas.

Capítulo 3

Solución a la ecuación escalar de onda en coordenadas cilíndricas elípticas usando el método de separación de variables

En este capítulo se resuelve la ecuación escalar de onda en el vacío Ec. (1.1) en coordenadas cilíndricas elípticas (ξ, η, z) usando el método de solución por separación de variables, para ello, se revisa en primera instancia lo relacionado con la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas elípticas. Una vez que se estudia la transformación de coordenadas, se encuentra que la ecuación escalar de onda en el vacío en coordenadas cilíndricas elípticas es equivalente a tres ecuaciones de segundo orden desacopladas, dos de ellas se denominan ecuaciones de Mathieu ordinaria y modificada; explicamos el método que se utiliza para resolver estas dos ecuaciones y, una vez que se obtienen sus soluciones, expresamos la solución de la ecuación escalar de onda en el vacío como el producto de tres funciones $\psi_{ss}(\xi, \eta, z) = R(\xi)\Phi(\eta)Z(z)e^{-i\omega t}$, donde $R(\xi)$ y $\Phi(\eta)$ denotan las soluciones a las ecuaciones de Mathieu modificada y ordinaria, respectivamente. Finalmente, se utiliza el método presentado en el capítulo 2 para determinar la función $A(\varphi, q)$ que caracteriza a la famila de soluciones separables exactas no singulares en coordenadas cilíndricas elípticas, es decir, para un haz Mat-

hieu de orden m. En este caso, se mostrará que la función $A(\varphi, q)$ depende de las variables φ y q; se obtendrá la relación que existe entre el parámetro q y la distancia interfocal f, la cual está presente en la ley de transformación entre coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas elípticas.

3.1. Coordenadas cilíndricas elípticas

El objetivo es resolver la ecuación escalar de onda en el vacío Ec. (1.1) en coordendas cilíndricas elípticas. Las coordenadas cilíndricas elípticas (ξ, η, z) están definidas mediante la ecuación:

$$x + iy = f\cosh(\xi + i\eta), \tag{3.1}$$

donde f es una constante. Igualando parte real e imaginaria de cada lado de la igualdad Ec. (3.1), se obtiene la transformación de coordnadas cartesianas a coordenadas cilíndricas elípticas

$$\begin{aligned} x &= f\cosh\xi\cos\eta, && (3.2)\\ y &= f\sinh\xi\sin\eta, && (3.3)\\ z &= z, && (3.4) \end{aligned}$$

donde $\xi \in [0, \infty)$, $\eta \in [\pi, \pi)$ y $2f$ es la distancia interfocal de las elipses y las hipérbolas cofocales con excentricidad $1/\cosh(\xi)$ y $1/\cos(\eta)$, respectivamente. Las curvas de nivel de este sistema coordendado se ilustran por curvas para valores fijos ξ y η en un plano $z = 0$, estas curvas de nivel se pueden obtener de la siguiente manera; si despejamos $\cos(\eta)$ y $\sin(\eta)$ de las Ecs.(3.2) y (3.3) respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} \cos\eta &= \frac{x}{f\cosh\xi} && (3.5)\\ \sin\eta &= \frac{y}{f\sinh\xi}, && (3.6) \end{aligned}$$

elevando al cuadrado las Ecs.(3.5) y (3.6), y sumándolas, obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} \cos^2\eta + \sin^2\eta &= \left(\frac{x}{f\cosh\xi}\right)^2 + \left(\frac{y}{f\sinh\xi}\right)^2 \\ &= 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por lo tanto, de la Ec. (3.7) se tiene que, para valores fijos de ξ tenemos que las curvas de nivel son elipses cofocales (curvas azules), ver Fig. (3.1a). Por otro lado, si despejamos $\cosh(\xi)$ y $\sinh(\xi)$ de las Ecs.(3.2) y (3.3) respectivamente, se tiene que

$$\cosh\xi = \frac{x}{f\cos\eta}, \tag{3.8}$$

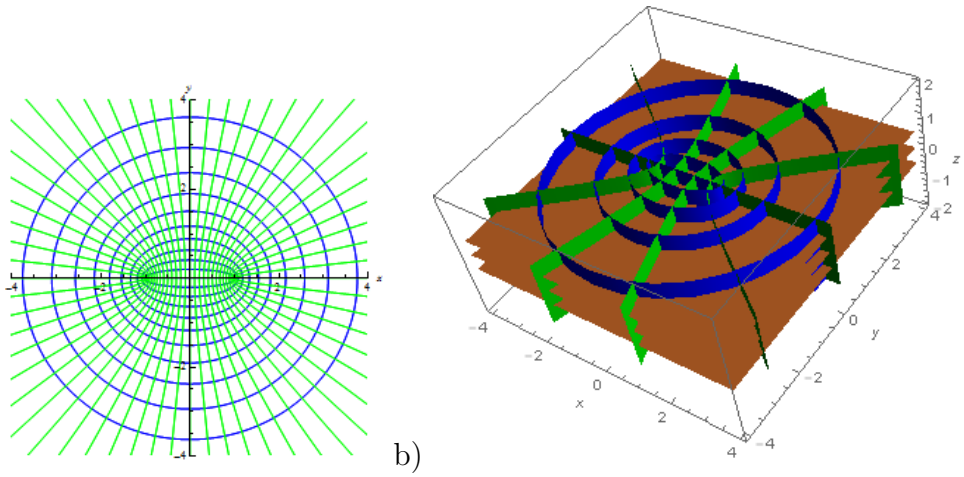
$$\sinh\xi = \frac{y}{f\sin\eta}, \tag{3.9}$$

elevando al cuadrado las Ecs. (3.8) y (3.9), y restándolas, se encuentra que

$$\begin{aligned} \cosh^2\xi - \sinh^2\xi &= \left(\frac{x}{f\cos\eta}\right)^2 - \left(\frac{y}{f\sin\eta}\right)^2 \\ &= 1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

La Ec.(3.10), muestra que para valores fijos de η tenemos que las curvas de nivel son hipérbolas cofocales (curvas verdes), ver Fig. (3.1a). Cuando se consideran valores constantes de z, las superfices de nivel en este caso son planos $z = constante$ (café), y las otras dos superficies de nivel son cilindros elípticos (azules) y cilindros hiperbólicos (verdes), ver Fig. (3.1b).

Observe que las curvas de nivel generadas a partir de considerar valores fijos de ξ (hipérbolas) y η (elipses), son ortogonales entre sí; para demostrar que esto es así, vamos a calcular las derivadas de las ecuaciones que describen una elipse y una hipérbola mediante la regla de derivación implícita. Si derivamos la Ec.(3.7) utilizando la derivación implícita, se obtiene que



a) b)

Figura 3.1: a).- Curvas de nivel en el plano x-y, elipses (azul) e hipéerbolas (verde). b).- superficies de nivel en el espacio x-y-z.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{eli} = -\frac{x\sinh^2(\xi)}{y\cosh^2(\xi)}. \tag{3.11}$$

Por otro lado, si derivamos la Ec.(3.10) utilizando la derivación implícita, se encuentra que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{hip} = \frac{x\sin^2(\xi)}{y\cos^2(\xi)}. \tag{3.12}$$

Recordemos que la condición necesaria y suficiente para que dos curvas en el plano sean ortogonales en un punto común (x_0, y_0), es que el producto de las pendientes de las rectas tangentes de cada curva en el punto (x_0, y_0) sea igual a -1. Observe que, en efecto se cumple esta condición, ya que, si multiplicamos las Ecs.(3.11) y (3.12) se verifica que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{eli}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{hip} = -1, \tag{3.13}$$

por lo tanto las elipses e hipérbolas interfocales dadas por las Ecs. (3.7) y (3.10) son ortogonales entre sí. Otro método para verificar que el sistema

coordenado cilíndrico elíptico es un sistema coordenado ortogonal es usando el desarrollo de coordenadas curvilíneas [21]

3.2. Solución separable a la ecuación escalar de onda en coordenadas cilíndricas elípticas

Considere una onda armónica en el tiempo, expresada de la forma $\psi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$. Utilizando la transformación de coordenadas dada por las Ecs. (3.2), (3.3) y (3.4), de la ecuación escalar de onda en el vacío Ec. (1.1) en coordenadas cilíndricas elípticas se tiene que la ecuación escalar de Helmhotz Ec. (2.5) en coordenadas cilíndricas elípticas, está dada por

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left(\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r})}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r})}{\partial\eta^2}\right)+\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r})}{\partial z^2}+k_0^2\psi(\mathbf{r})=0, \tag{3.14}$$

donde $h_\xi = h_\eta = \sqrt{\cosh^2\xi-\cos^2\eta}$ y $h_z = 1$. Proponiendo una solución por separación de variables, es decir, $\psi(\xi,\eta,z)\rightarrow\psi_{ss}(\xi,\eta,z) = R(\xi)\Phi(\eta)Z(z)$, la ecuación escalar de Helmholtz (3.14) se reescribe como

$$\frac{1}{R\Phi f^2\left(\cosh^2(\xi)-\cos^2(\eta)\right)}\left(\Phi\frac{d^2R}{d\xi^2}+R\frac{d^2\Phi}{d\eta^2}\right)+k_t^2+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+k_z^2=0 \tag{3.15}$$

donde $k_0^2 = k_t^2+k_z^2$. Observe lo siguiente, puesto que se pide una solución cuya dependencia en z sea de la forma e^{ik_zz} entonces se impone en la Ec. (3.15) que

$$\frac{1}{R\Phi f^2\left(\cosh^2\xi-\cos^2\eta\right)}\left(\Phi\frac{d^2R}{d\xi^2}+R\frac{d^2\Phi}{d\eta^2}\right)+k_t^2 = 0 \tag{3.16}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+k_z^2 = 0, \tag{3.17}$$

con ello se garantiza que la onda se propague en dirección z, es decir, se tiene una solución de la forma $\psi_{ss}(\xi,\eta,z) = R(\xi)\Phi(\eta)e^{i(k_zz-\omega t)}$. Por lo que,

ahora se requiere resolver la Ec. (3.16). Después de algunas manipulaciones algebraicas, la Ec. (3.16) se expresa como

$$\Phi\frac{d^2R}{d\xi^2} + R\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + f^2k_t^2\left(\cosh^2\xi - \cos^2\eta\right)R\Phi = 0. \tag{3.18}$$

Usando las siguientes relaciones de $\cosh^2\xi$ y $\cos^2\eta$ dadas por

$$\cosh^2\xi = \frac{1+\cosh(2\xi)}{2}, \tag{3.19}$$

$$\cos^2\eta = \frac{1+\cos(2\eta)}{2}, \tag{3.20}$$

así que, si dividimos por $R\Phi$ la Ec.(3.18) y sustituimos las identidades (3.19) y (3.20) en la Ec.(3.18), tenemos que

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\xi^2} + \frac{f^2k_t^2}{2}\cosh(2\xi) + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} - \frac{f^2k_t^2}{2}\cos(2\eta) = 0, \tag{3.21}$$

la cual se puede separar en dos ecuaciones diferenciales de segundo orden desacopladas con coeficientes no constantes dadas por

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\xi^2} + \frac{f^2k_t^2}{2}\cosh(2\xi) = \lambda, \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} - \frac{f^2k_t^2}{2}\cos(2\eta) = -\lambda, \tag{3.23}$$

donde λ se denomina constante de separación. Después de algunas manipulaciones algebraicas, las Ecs.(3.22) y (3.23) se pueden escribir como

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + (\lambda - 2q\cos(2\eta))\,\Phi = 0 \tag{3.24}$$

$$\frac{d^2R}{d\xi^2} + (-\lambda + 2q\cosh(2\xi))\,R = 0 \tag{3.25}$$

donde $q = \dfrac{f^2k_t^2}{4}$, denominado parámetro de elipticidad. El siguiente paso consiste en resolver estas dos ecuaciones; afortunadamente Émile Mathieu

obtuvo estas ecuaciones cuando abordó por primera vez el problema de analizar los modos normales de una membrana estirada con forma elíptica, por lo que en su honor, estas dos ecuaciones reciben el nombre de ecuación de Mathieu ordinaria (también denominada angular) Ec. (3.24) y modificada (también denominada radial) Ec. (3.25), respectivamente. Además, una propiedad que existe entre estas dos ecuaciones es que están relacionadas mediante el cambio de variable $\xi = i\eta$, bajo esta transformación se tiene que la Ec. (3.25) se transforma en la Ec. (3.24), por lo que, dada la solución a la ecuación de Mathieu ordinaria Ec. (3.24) denotada por $\Phi(\eta; q, \lambda)$ se tiene que la solución a la ecuación de Mathieu modificada Ec. (3.25) está dada por $R(\xi; q, \lambda) = \Phi(i\eta; q, \lambda)$. En la siguiente sección se presenta el método que se utiliza para determinar las soluciones a las ecuaciones de Mathieu; puesto que ambas ecuaciones están relacionadas por un cambio de variable, basta con determinar la soluciones de una de las dos ecuaciones de Mathieu, para obtener de manera inmediata las soluciones de la otra ecuación de Mathieu.

3.2.1. Método para resolver las ecuaciones de Mathieu

La mayoría de las ecuaciones diferenciales surgen a partir de resolver problemas físicos. Matemáticos y físicos se dan a la tarea de inventar métodos para resolver tales ecuaciones diferenciales y posteriormente determinar qué soluciones tienen significado físico. Las denominadas ecuaciones de Mathieu son un caso especial, ya que, como se mencionó anteriormente, las Ecs. (3.24) y (3.25) se obtienen al determinar los modos normales de vibración de una membrana estirada con frontera elíptica. En esta subsección se explica el método que se utiliza para determinar las soluciones a las ecuaciones de Mathieu Ecs. (3.24) y (3.25).

El objetivo ahora es determinar las soluciones a la ecuación de Mathieu ordinaria Ec. (3.24); esta ecuación es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes periódicos. Note que, q es un parámetro el cual está dado por $q = f^2 k_t^2/2$, así que $q \geq 0$, por lo que se analizarán dos casos[22]:

- Cuando $q = 0$, se tiene que la Ec. (3.24) se reduce a la ecuación diferencial que describe un oscilador armónico simple unidimensional, por lo que, las soluciones están dadas por

$$\Phi_{par}(\eta, 0, \lambda) = \cos(m\eta) \tag{3.26}$$

$$\Phi_{impar}(\eta, 0, \lambda) = \sin(m\eta), \tag{3.27}$$

donde $\lambda = m^2$, con m un numero entero.

Por otro lado, cuando $q > 0$, se requiere que λ y q estén relacionados, es decir, $\lambda = \lambda(q)$ para que las soluciones a la ecuación de Mathieu ordinaria Ec. (3.24) tengan periodo π o 2π, ya que, en este caso η es una variable angular. El método consiste en proponer dos soluciones, una par $ce_m(\eta; q)$ y otra impar $se_m(\eta; q)$ [22], las cuales están expresadas como

$$ce_m(\eta; q) = \cos(m\eta) + \sum_{r=1}^{\infty} q^r c_r(\eta), \tag{3.28}$$

$$se_m(\eta; q) = \sin(m\eta) + \sum_{r=1}^{\infty} q^r s_r(\eta), \tag{3.29}$$

con

$$\lambda_{cm}(q) = m^2 + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r q^r, \tag{3.30}$$

$$\lambda_{sm}(q) = m^2 + \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r q^r, \tag{3.31}$$

donde $c_r(\eta)$ y $s_r(\eta)$ son funciones por determinar y α_r son constantes que se eligen de tal manera que las soluciones (3.28) y (3.29) sean funciones periódicas Es importante mencionar que las soluciones $ce_m(\eta; q)$ Ec. (3.28) y $se_m(\eta; q)$ Ec. (3.29) tienen asociado su respectiva constante de separación, es decir, λ_{cm} y λ_{sm} (denominados valores característicos) son diferentes. Note que en el caso en que $q = 0$ se tiene que las soluciones $ce_m(\eta; 0)$ y $se_m(\eta; 0)$ tienen la misma constante de separación (valor característico), es decir, $\lambda_{cm}(0) = \lambda_{sm}(0)$.

Cuando m no es entero ($m \to \nu$), las soluciones a la Ec.(3.24) [22] se denotan por las funciones

$$ce_\nu(\eta; q) = \cos(\nu\eta) + \sum_{r=1}^{\infty} q^r c_r(\eta), \tag{3.32}$$

$$se_\nu(\eta; q) = \sin(\nu\eta) + \sum_{r=1}^{\infty} q^r s_r(\eta), \tag{3.33}$$

con

$$\lambda_\nu = \nu^2 + \sum_{r=1}^{\infty} \gamma_r q^r. \tag{3.34}$$

En el caso en el que ν no es entero se tiene que las soluciones $ce_\nu(\eta;q)$ y $se_\nu(\eta;q)$ tienen la misma constante de separación (valor característico). Si sustituimos las Ecs.(3.32) y (3.33) por separado en la Ec.(3.24) se puede mostrar que las funciones $ce_\nu(\eta;q)$ Ec. (3.32) y $se_\nu(\eta;q)$ Ec. (3.33) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} ce_\nu(\eta;q) &= \cos(\nu\eta) - \frac{q}{4}\left(\frac{\cos[(\nu+2)\eta]}{\nu+1} - \frac{\cos[(\nu-2)\eta]}{\nu-1}\right) \quad (3.35)\\ &\quad + \frac{q^2}{32}\left(\frac{\cos[(\nu+4)\eta]}{(\nu+1)(\nu+2)} - \frac{\cos[(\nu-4)\eta]}{(\nu-1)(\nu-2)}\right) + \cdots, \\ se_\nu(\eta;q) &= \sin(\nu\eta) - \frac{q}{4}\left(\frac{\sin[(\nu+2)\eta]}{\nu+1} - \frac{\sin[(\nu-2)\eta]}{\nu-1}\right) \quad (3.36)\\ &\quad + \frac{q^2}{32}\left(\frac{sin[(\nu+4)\eta]}{(\nu+1)(\nu+2)} - \frac{\sin[(\nu-4)\eta]}{(\nu-1)(\nu-2)}\right) + \cdots. \\ \lambda_\nu &= \nu^2 + \frac{q^2}{2(\nu^2-1)} + \frac{(5\nu^2+7)q^4}{32(\nu^2-1)(\nu^2-4)} \\ &\quad + \frac{(9\nu^4+58\nu^2+29)q^6}{64(\nu^2-1)(\nu^2-4)(\nu^2-9)} + \cdots \quad (3.37) \end{aligned}$$

Las fórmulas dadas por las Ecs. (3.36) y (3.37) se utilizan cuando se cumple la relación $q^2/2(\nu^2-1) < \nu^2$, con $\nu > 0$. En este caso se tiene que $ce_\nu(\eta;q)$ y $se_\nu(\eta;q)$ tienen la misma constante de separación (valor característico), así que, las soluciones dadas por las Ecs. (3.36) y (3.37) coexisten y son linealmente independientes. Por lo que una solución más general a la ecuación de Mathieu ordinaria Ec. (3.24) está dada por $\Phi(\eta;q,\nu) = Ace_\nu(\eta,q) + Bse_\nu(\eta,q)$, donde A y B son constantes arbitrarias. es importante mencionar que las soluciones $ce_\nu(\eta;q)$ Ec. (3.36) y $se_\nu(\eta;q)$ Ec. (3.37) en general no son periodicas. Poniendo $\nu = l+n$ con l un entero positivo y $0 < n < 1$, si $n = p/s$ es racional, las funciones $ce_\nu(\eta;q)$ y $se_\nu(\eta;q)$ tienen periodo $2\pi s$. Si si $n = p/s$ es irracional entonces $ce_\nu(\eta;q)$ y $se_\nu(\eta;q)$ no son periodicas.

Una vez que se determinaron las soluciones para la ecuación de Mathieu ordinaria Ec. (3.24), las soluciones a la ecuación de Mathieu modificada Ec. (3.25) denotadas por $Ce_m(\xi;q)$ y $Se_m(\xi;q)$ se obtienen considerando el cambio de variable $\xi = i\eta$. Estas soluciones están dadas por $ce_m(i\eta;q)$ y $se_m(i\eta;q)$, las cuales se expresan en términos de cosenos y senos hiperbólicos.

3.3. Expresión análitica de un haz Mathieu

En esta sección se presenta la expresión de la solución separable de la ecuación escalar de onda en coordenadas cilíndricas elípticas. Puesto que se propuso una solución a la ecuación escalar de onda en el vacío Ec. (1.1) en coordenadas cilíndricas elípticas de la forma $\psi_{ss}(\mathbf{r},t) = R(\xi)\Phi(\eta)e^{i(k_z z-\omega t)}$, están dadas por

$$\psi_{c\nu}(\mathbf{r},t) = Ce_\nu(\xi,q)ce_\nu(\eta,q)e^{i(k_z z-\omega t)}, \tag{3.38}$$
$$\psi_{s\nu}(\mathbf{r},t) = Se_\nu(\xi,q)se_\nu(\eta,q)e^{i(k_z z-\omega t)}, \tag{3.39}$$

donde ν puede denotar un número entero o no entero. Recuerde que, cuando ν es un número entero, se tiene que $ce_\nu(\eta;q)$ y $ce_\nu(\eta;q)$ son de periodo π o 2π; mientras que, si ν no es un número entero, se debe cumplir cierta condición para que $ce_\nu(\eta;q)$ y $se_\nu(\eta;q)$ sean periodicas. Una solución separable a la ecuación de onda en el vacío en coordenadas cilíndricas elípticas denominado *haz Mathieu* está dada como una combinación lineal de las Ecs. (3.38) y (3.39) de la forma

$$\psi_{ss}(\xi,\eta,z,t;q) = \left[Ace_\nu(\eta,q)Ce_\nu(\xi,q) + Bse_\nu(\eta,q)Se_\nu(\xi,q)\right]e^{i(\beta z-\omega t)}, \tag{3.40}$$

donde A y B son constantes. Observe que la expresión de la solución separable dada por la Ec. (3.40) representa una onda cuya intensidad es invariante a lo largo del eje z, el cual es el eje de propagación de la onda, ya que, el perfil de intensidad I es tal que

$$I(\xi,\eta,z) = I(\xi,\eta) \tag{3.41}$$

por lo tanto, el patrón de intensidad no experimenta ensanchamiento ni disminución de su intensidad. Observe que un *haz Mathieu* Ec. (3.40) representa una clase de campo óptico con la misma características que el conjunto que propuso Durnin, sólo que no está expresado en términos de la integral de Whittaker. Más adelante se muestra la relación que existe entre la solución separable Ec. (3.40) y la expresión de Whittaker Ec. (1.2) para ciertos valores de A, B y ν.

3.4. Cálculo de la función $A(\varphi)$ asociada a un haz Mathieu

En esta sección se utiliza el método ilustrado en la sección 2.3 para determinar la función $A(\varphi)$ que caracteriza a un *haz Mathieu*, es decir, a las soluciones separables en coordenadas cilíndricas elípticas. Posteriormente mostramos que es posible conectar la expresión integral de un haz adifraccional Ec. (1.2) con el conjunto de soluciones separables en coordenadas cilíndricas elípticas dado por la Ec. (3.40). Usando la ley de transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas elípticas dadas por las Ecs. (3.2) y (3.3) la función ζ Ec. (2.7) se expresa como

$$\zeta(\xi,\eta)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i2\sqrt{q}w}A(\varphi)d\varphi, \tag{3.42}$$

donde $w=f(\cosh\xi\cos\eta\cos\varphi+\sinh\xi\sin\eta\sin\varphi)$ y $k_t=\dfrac{2\sqrt{q}}{f}$.

Considerando la regla de transformación dada por las Ecs.(3.2) y (3.3), después de algunas manipulaciones algebraicas, la Ecuación de Helmholtz transversal en coordenadas elípticas Ec. (2.8) se escribe como

$$\frac{\partial^2\zeta(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\zeta(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}+2q\left[\cosh(2\xi)-\cos(2\eta)\right]\zeta(\xi,\eta)=0, \tag{3.43}$$

donde $2q=\dfrac{f^2k_t^2}{2}$.

Ahora se probará que la función $\zeta(\xi,\eta)$ Ec. (3.42) es solución a la ecuación de Helmholtz transversal Ec. (3.43).

Prueba: Dada la función $\zeta(\xi,\eta)$ Ec. (3.42), se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\zeta(\xi,\eta)}{\partial\xi} &= i2\sqrt{q}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial w}{\partial\xi}e^{i2\sqrt{q}w}A(\varphi)d\varphi \\
\frac{\partial\zeta(\xi,\eta)}{\partial\eta} &= i2\sqrt{q}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial w}{\partial\eta}e^{i2\sqrt{q}w}A(\varphi)d\varphi \\
\frac{\partial^2\zeta(\xi,\eta)}{\partial\xi^2} &= i2\sqrt{q}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+i2\sqrt{q}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2\right)e^{i2\sqrt{q}w}A(\varphi)d\varphi \\
\frac{\partial^2\zeta(\xi,\eta)}{\partial\eta^2} &= i2\sqrt{q}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}+i2\sqrt{q}\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)^2\right)e^{i2\sqrt{q}w}A(\varphi)d\varphi.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\zeta(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\zeta(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}+2q\left[\cosh(2\xi)-\cos(2\eta)\right]\zeta(\xi,\eta) \\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\left[i2\sqrt{q}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}+i2\sqrt{q}\left(\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)^2\right)\right)+2q\left(\cosh(2\xi)-\cos(2\eta)\right)\right] \\
&\times e^{i2\kappa w}A(\varphi)d\varphi \\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\left[i2\sqrt{q}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right)-4q\left(\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)^2\right)+2q\left(\cosh(2\xi)-\cos(2\eta)\right)\right] \\
&\times e^{i2\sqrt{q}w}A(\varphi)d\varphi \\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\left[i2\sqrt{q}\,(0)-4q\left(\frac{\cosh(2\xi)-\cos(2\eta)}{2}\right)+2q\left(\cosh(2\xi)-\cos(2\eta)\right)\right]e^{i2\sqrt{q}w}A(\varphi)d\varphi \\
&=0,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

donde $\dfrac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}=w-w=0$ y $\left(\dfrac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial\eta}\right)^2=\dfrac{\cosh(2\xi)-\cos(2\eta)}{2}$.

Por lo tanto, la función $\zeta(\xi,\eta)$ dada por la Ec. (3.42) es solución a la ecuación de Helmholtz transversal Ec. (3.43) en coordenadas elípticas (ξ,η) .

Ahora, para determinar la expresión de la función $A(\varphi)$ se va a pedir que $\zeta(\xi_0 = constante, \eta)$ Ec. (3.42) sea solución a la ecuación de Mathieu ordinaria Ec. (3.24). Por lo que

$$\frac{d\zeta(\xi_0,\eta)}{d\eta} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dw}{d\eta} e^{i2\sqrt{q}w} A(\varphi) d\varphi, \tag{3.46}$$

entonces

$$\frac{d^2\zeta(\xi_0,\eta)}{d\eta^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(i2\sqrt{q}\frac{d^2w}{d\eta^2} - 4q\left(\frac{dw}{d\eta}\right)^2 \right) e^{i2\sqrt{q}w} A(\varphi) d\varphi, \tag{3.47}$$

usando las identidades

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\cosh\xi\cos\eta\cos\varphi - \sinh\xi\sin\eta\sin\varphi \tag{3.48}$$

$$\left(\frac{dw}{d\eta}\right)^2 = \left(\sinh\xi\cos\eta\sin\varphi - \cosh\xi\sin\eta\cos\varphi\right)^2, \tag{3.49}$$

se tiene que la Ec. (3.47) queda expresada como

$$\begin{aligned}\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = & \int_{-\pi}^{\pi} [i2\sqrt{q}\left(-\cosh\xi\cos\eta\cos\varphi - \sinh\xi\sin\eta\sin\varphi\right) \\ & +4q\left(\sinh\xi\cos\eta\sin\varphi - \cosh\xi\sin\eta\cos\varphi\right)^2] e^{i2\sqrt{q}w} A(\varphi) d\varphi.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Para seguir con los cálculos de la integral dada por la Ec.(3.50), es necesario considerar las identidades

$$\left(\sinh\xi\cos\eta\sin\varphi - \cosh\xi\sin\eta\cos\varphi\right)^2 = \left(\sinh\xi\sin\eta\cos\varphi - \cosh\xi\cos\eta\sin\varphi\right)^2 + \frac{-\cos(2\eta)+\cos(2\theta)}{2}, \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} e^{i2\sqrt{q}w} = & -i2\sqrt{q}\left(\cosh\xi\cos\eta\cos\varphi + \sinh\xi\sin\eta\sin\varphi\right) e^{i2\sqrt{q}w} \\ & -4q\left(-\cosh\xi\cos\eta\sin\varphi + \sinh\xi\sin\eta\cos\varphi\right)^2 e^{i2\sqrt{q}w}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Sustituyendo las dos identidades dadas por las Ecs. (3.51) y (3.52) en la Ec.(3.50) se obtiene que

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = \int_{-\pi}^{\pi} A(\varphi)\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2q\left(\cos(2\eta) - \cos(2\varphi)\right)\right) e^{i2\sqrt{q}w} d\varphi, \qquad (3.53)$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} + \left(\lambda - 2q\cos(2\eta)\right)\zeta &= \int_{-\pi}^{\pi} A(\varphi)\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + 2q\left(\cos(2\eta) - \cos(2\varphi)\right)\right) e^{i2\sqrt{q}w} d\varphi \\ &+ \left(\lambda - 2q\cos(2\eta)\right)\int_{-\pi}^{\pi} A(\varphi) e^{i2\sqrt{q}w} d\varphi,\end{aligned} \qquad (3.54)$$

reagrupando términos nos da como resultado que

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} + \left(\lambda - 2q\cos(2\eta)\right)\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} A(\varphi)\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \lambda - 2q\cos(2\varphi)\right) e^{i2\sqrt{q}w} d\varphi. \qquad (3.55)$$

Antes de finalizar observe lo siguiente: sean F y G dos funciones de una variable, entonces se tiene que

$$F\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(F\frac{dG}{dx}\right) - \frac{dF}{dx}\frac{dG}{dx} = \frac{d}{dx}\left(F\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dx}G\right) + \frac{d^2F}{dx^2}G, \qquad (3.56)$$

para nuestro interés, $F = A(\varphi)$, $G = e^{i2\sqrt{q}w}$ y $\dfrac{d}{dx} \to \dfrac{\partial}{\partial\varphi}$, entonces

$$A(\varphi)\frac{\partial^2 e^{i2\sqrt{q}w}}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A(\varphi)\frac{\partial e^{i2\sqrt{q}w}}{\partial\varphi} - A'(\varphi)e^{i2\sqrt{q}w}\right) + A''(\varphi)e^{i2\sqrt{q}w}. \qquad (3.57)$$

Finalmente, usando la Ec.(3.57), la Ec.(3.55) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} + \left(\lambda - 2q\cos(2\eta)\right)\zeta &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[A''(\varphi) + \left(\lambda - 2q\cos(2\theta)\right)A(\varphi)\right] e^{i2\sqrt{q}w} d\varphi \\ &+ \left(A(\varphi)\frac{\partial e^{i2\sqrt{q}w}}{\partial\varphi} - A'(\varphi)e^{i2\sqrt{q}w}\right)_{\varphi_i=-\pi}^{\varphi_f=\pi}.\end{aligned} \qquad (3.58)$$

Observe que si $A(\varphi)$ satisface la ecuación de Mathieu ordinaria, el primer término de la Ec. (3.58) desaparece. Mientras que, si $A(\varphi)$ es de periodo π o 2π, el segundo término de la Ec. (3.58) se anula. Por lo tanto, $A(\varphi)$ debe ser un múltiplo de las funciones $ce_\nu(\varphi, q)$ y $se_\nu(\varphi, q)$ (con ν un número entero). Con este resultado se tienen dos soluciones a la ecuación de Helmholtz transversal Ec. (3.43) dadas por

$$\zeta_{par}(\xi, \eta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2\sqrt{q}w} ce_\nu(\varphi, q) d\varphi, \tag{3.59}$$

$$\zeta_{impar}(\xi, \eta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2\sqrt{q}w} se_\nu(\varphi, q) d\varphi. \tag{3.60}$$

Por otro lado, dadas las soluciones a las ecuaciones de Mathieu ordinaria y modificada, dadas por

$$R(\xi) = \begin{cases} Ce_\nu(\xi, q) \\ Se_\nu(\xi, q), \end{cases} \tag{3.61}$$

$$\Phi(\eta) = \begin{cases} ce_\nu(\eta, q) \\ ce_\nu(\eta, q), \end{cases} \tag{3.62}$$

se tienen dos conjuntos de soluciones separables a la ecuación de Helmholtz transversal Ec. (3.18) en coordenadas cilíndricas elípticas dados por

$$R(\xi)\Phi(\eta) = Ce_\nu(\xi, q) ce_\nu(\eta, q), \tag{3.63}$$

$$R(\xi)\Phi(\eta) = Se_\nu(\xi, q) se_\nu(\eta, q). \tag{3.64}$$

Observe que los conjuntos dados por las Ecs. (3.59-3.60) y Ecs. (3.63-3.64) son soluciones separables a la ecuación de Helmholtz transversal Ec. (3.18) en coordenadas cilíndricas elípticas, los cuales están relacionados de la siguiente forma

$$Ce_\nu(\xi, q) ce_\nu(\eta, q) = \rho_\nu \int_0^{2\pi} e^{i2\sqrt{q}w} ce_\nu(\eta, q) d\theta. \tag{3.65}$$

$$Se_\nu(\xi, q) se_\nu(\eta, q) = \sigma_\nu \int_0^{2\pi} e^{i2\sqrt{q}w} se_\nu(\eta, q) d\theta. \tag{3.66}$$

donde ρ_ν y σ_ν son los valores característicos del núcleo $e^{i2\sqrt{q}w}$[22]. Las Ecs. (3.65) y (3.66) muestran la relación que existe entre una solución separable a la ecuación de Helmholtz transversal Ec. (3.18) y la función $\zeta(\xi,\eta)$ Ec. (3.42) cuando ν es un número entero. Por lo que, una solución separable a la ecuación escalar de onda en el vacío en coordenadas cilíndricas elípticas en términos de las funciones ζ_{par} Ec. (3.59) y ζ_{impar} Ec. (3.60) se escribe como

$$\begin{aligned}\psi_W(\xi,\eta,z,t) &= \frac{e^{i(k_z z-\omega t)}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[ce_\nu(\varphi;q)+ise_\nu(\varphi;q)] \\ &\quad\times e^{ik_t f(\cosh\xi\cos\eta\cos\varphi+\sinh\xi\sin\eta\sin\varphi)}d\varphi, \end{aligned}\tag{3.67}$$

la cual corresponde a una solución en términos de la integral de Whittaker Ec. (1.2) con $A(\varphi;q)=ce_\nu(\varphi;q)+ise_\nu(\varphi;q)$ en coordenadas cilíndricas elípticas, y se puede expresar como la solución separable

$$\psi_{ss}(\xi,\eta,z,t)=\left[\frac{Ce_\nu(\xi,q)ce_\nu(\eta,q)}{\rho_\nu}+\frac{iSe_\nu(\xi,q)se_\nu(\eta,q)}{\sigma_\nu}\right]e^{i(k_z z-\omega t)}, \tag{3.68}$$

esto es, $\psi_W(\xi,\eta,z,t;q)=\psi_{ss}(\xi,\eta,z,t;q)$, sustituyendo $A=\dfrac{1}{\rho_\nu}$ y $B=\dfrac{i}{\sigma_\nu}$ en la Ec. (3.40).

Regresando a coordenadas cartesianas, mediante la transformación dada por las Ecs. (3.2)-(3.4), se tiene que (3.67) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\psi_W(x,y,z,t) &= \frac{e^{i(k_z z-\omega t)}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{[ce_\nu(\varphi,q)]^2+[se_\nu(\varphi,q)]^2} \\ &\quad\times e^{i\left[k_t(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+\arctan\left(\frac{se_\nu(\varphi,q)}{ce_\nu(\varphi,q)}\right)\right]}d\varphi. \end{aligned}\tag{3.69}$$

Es importante recalcar que, la expresión integral de Whittaker se puede escribir como una solución separable a la ecuación escalar de onda en coordenadas cilílindricas elípticas cuando las funciones $ce_\nu(\eta;q)$ y $se_\nu(\eta;q)$ son periodicas, es decir, cuando ν es un número entero. Note que las funciones de onda $\psi_W(\xi,\eta,z,t;q)$ y $\psi_W(x,y,z,t;q)$ dadas por las Ecs. (3.67) y (3.69) respectivamente, son equivalentes, sólo que están expresadas en sistemas coordenados diferentes. En este caso, (3.69) es solución a la ecuación escalar de onda en el vacío Ec. (1.1) en coordenadas cartesianas, sólo que,

como se puede ver la función $A(\varphi)$ ya no es arbitraria debido a que se impuso que la expresión de un haz adifraccional Ec. (1.2) sea solución separable a la ecuación escalar de onda en el vacío en coordenadas cilíndricas elípticas con dependencia de la forma $e^{i(k_z z-\omega t)}$, esto es, cuando la expresión de un haz adifraccional Ec. (1.2) descrita en un sistema coordenado ortogonal el cual admite soluciones por separación de variables, la función $A(\varphi)$ queda determinada.

Capítulo 4

Método para calcular los frentes de onda y la cáustica asociados con un haz adifraccional

En este capítulo se presenta el método que se va a utilizar para obtener los frentes de onda asociados con un haz adifraccional. Posteriormente, dada la representación paramétrica del frente de onda, se determina la región cáustica asociada con estos frentes de onda.

4.1. Condiciones de la función $S(\mathbf{r})$ para que $e^{i[k_0 S(\mathbf{r})-\omega t]}$ sea solución a la ecuación escalar de onda en el vacío

Es bien sabido que una solución a la ecuación escalar de onda Ec. (1.1) está dada por

$$\psi_{op} = A_0 e^{i[\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t]}, \tag{4.1}$$

donde $\mathbf{k}_0$ y ω son el vector de propagación y la frecuencia angular de la onda y $A_0 = constante$ es la amplitud de la onda. Fisicamente la expresión Ec. (4.1) representa una onda plana definida en todo el espacio debido a que los frentes de onda asociados con esta onda son todos los puntos (x, y, z) que cumplen $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}$=$\mathcal{C}$=constante, los cuales son planos. Observe que, $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}$=$k_0 s$, donde k_0=$2\pi/\lambda$ es el número de onda en el vacío y $s(x, y, z)$=$(\cos\gamma_1 x + \cos\gamma_2 y + \cos\gamma_3 z)$ donde γ_1, γ_2 y γ_3 son los cosenos directores del vector $\mathbf{k}_0$, por lo que la Ec. (4.1) se puede expresar como

$$\psi_{op} = A_0 e^{i[k_0 s(x,y,z)-\omega t]}. \tag{4.2}$$

Nuestro propósito ahora es considerar la función

$$\psi_n = e^{i[k_0 S(\mathbf{r})-\omega t]}, \tag{4.3}$$

y preguntarnos qué condiciones debe cumplir la función $S(\mathbf{r})$ para que la Ec. (4.3) sea solución a la ecuación escalar de onda la cual se propaga en un medio caracterizado con índice de refracción constante n

$$\nabla^2\psi_n(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi_n(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \tag{4.4}$$

para ello es necesario calcular el laplaciano y la segunda derivada parcial con respecto del tiempo de la función ψ_n dada por la Ec. (4.3). Un cálculo directo muestra que

$$\nabla^2 e^{i[k_0 S(\mathbf{r})-\omega t]} = (ik_0\nabla^2 S - k_0^2(\nabla S)^2)e^{i[k_0 S(\mathbf{r})-\omega t]}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^2 e^{i[k_0 S(\mathbf{r})-\omega t]}}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{i[k_= S(\mathbf{r})-\omega t]}, \tag{4.6}$$

por lo que

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) e^{i[k_0 S(\mathbf{r})-\omega t]} = \left(ik_0\nabla^2 S - k_0^2(\nabla S)^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\right) e^{i[k_0 S(\mathbf{r})-\omega t]}. \tag{4.7}$$

Suponiendo que $S(\mathbf{r})$ es una función real, entonces Ec. (4.4) se cumple, si y sólo si

$$\nabla^2 S = 0, \tag{4.8}$$

$$(\nabla S)^2 = n^2, \tag{4.9}$$

esto es, la función $\psi_n = e^{i[k_0 S(\mathbf{r})-\omega t]}$ es solución a la ecuación escalar de onda en un medio caracterizado con un índice de refracción n, si y sólo si, la función $S(\mathbf{r})$ satisface las ecuaciones de Laplace e iconal. Es importante recordar que la Ec. (4.9) es la ecuación que gobierna a la óptica geométrica. En el caso en el que $n = 1$, la onda Ec. (4.3) se propaga en el vacío

4.2. Solución a la ecuación iconal por el método de separación de variable

Nuestro interés ahora radica en determinar la expresión analítica de la función $S(\mathbf{r})$, tal que $S(\mathbf{r})$ sea solución separable de las ecuaciones de Laplace e iconal en un medio caracterizado con un índice de refracción constante n. Se obtiene una solución a la ecuación iconal en el vacío y despúes se verifica que esta solución tambien satisface la ecuación de Laplace. El método se expone a continuación.

Para determinar una solución separable a la ecuación iconal en un medio caracterizado con índice de refracción n

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2, \tag{4.10}$$

se propone una solución de la forma

$$S(x, y, z) = X(x) + Y(y) + Z(z). \tag{4.11}$$

Sustituyendo la Ec. (4.11) en la Ec. (4.10), después de algunas manipulaciones algebraicas se obtiene que la ecuación iconal en un medio caracterizado

con índice de refracción n Ec. (4.10) se puede escribir como

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^2+\left(\frac{dY}{dy}\right)^2+\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2=n^2, \tag{4.12}$$

la cual se puede expresar en tres ecuaciones de primer orden

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 = \alpha^2, \tag{4.13}$$

$$\left(\frac{dY}{dy}\right)^2 = \beta^2, \tag{4.14}$$

$$\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2 = \gamma^2, \tag{4.15}$$

donde α, β y γ son constantes de separación que satisfacen la ecuación $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=n^2$.

Una vez que se resuelven las Ecs.(4.13-4.15), la solución a la ecuación iconal en un medio caracterizado con índice de refracción n Ec. (4.11) está dada por

$$S(x,y,z;\alpha,\beta)=\pm\alpha x\pm\beta y\pm\sqrt{n^2-(\alpha^2+\beta^2)}z, \tag{4.16}$$

con $\gamma=\pm\sqrt{n^2-(\alpha^2+\beta^2)}$. Note que la función S Ec. (4.16) es una función de las variables (x,y,z) y de las constantes de separación (α,β). Además, la relación entre los parámetros α, β y γ se puede ver como todos los puntos (α,β,γ) que pertenecen a una esfera de radio n. Por lo que, una forma de expresar las constantes de separación es la siguiente

$$\alpha = n\sin\vartheta\cos\varphi, \tag{4.17}$$

$$\beta = n\sin\vartheta\sin\varphi, \tag{4.18}$$

$$\gamma = n\cos\vartheta, \tag{4.19}$$

con $\vartheta\in[0,\pi]$ y $\varphi\in[-\pi,\pi)$.

Por lo tanto, usando las Ecs. (4.17-4.19), la solución por separación de variables a la ecuación iconal en un medio caracterizado con índice de refracción constante n Ec. (4.11) está dada por

$$S(x,y,z;\vartheta,\varphi) = n(x\sin\vartheta\cos\varphi + y\sin\vartheta\sin\varphi + z\cos\vartheta), \tag{4.20}$$

la cual, representa una familia biparamétrica de soluciones a la ecuación iconal en un medio caracterizado con índice de refracción constante n. Note que en un principio S dependia de $(x,y,z;\alpha,\beta)$. Sin embargo, dadas las relaciones (4.17-4.19) se pudo expresar a S en términos de $(x,y,z;\vartheta,\varphi)$, donde ϑ es el ángulo que forma con ele eje z; mientras que φ es el ángulo que forma con el eje x sobre el plano $x-y$. Estos ángulos ϑ y φ se utilizan para etiquetar un punto sobre la superficie de una esfera de radio igual a uno. En el caso en el que se resuelva la ecuación iconal en el vacío, se debe cambiar a n=1 en la Ec. (4.20). Por otra parte, un cálculo directo muestra que, en efecto, la función S dada por la Ec. (4.20) es también solución separable de la ecuación de Laplace. Por lo tanto, una familia biparamétrica de soluciones a la ecuación escalar de onda en un medio caracterizado con índice de refracción constante n en términos de una solución $S(\mathbf{r})$ está dada por

$$\begin{aligned}
\psi_n &= e^{i[k_0 S(x,y,z;\vartheta,\varphi)-\omega t]}, && (4.21)\\
S(x,y,z;\vartheta,\varphi) &= n\hat{k}(\vartheta,\varphi)\cdot\mathbf{r} && (4.22)\\
\hat{k}(\vartheta,\varphi) &= \sin\vartheta\cos\varphi\hat{x} + \sin\vartheta\cos\varphi\hat{y} + \cos\vartheta\hat{z} && (4.23)\\
\mathbf{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, && (4.24)
\end{aligned}$$

donde k_0 es el número de onda en el vacío. Observe que para cada valor de ϑ entre $[0,\pi]$ y φ entre $[-\pi,\pi)$, (4.21) representa una onda plana que se propaga en un medio caracterizado con un índice de refracción constante n. Ahora, considere que el valor de ϑ es constante, el cual se denota por ϑ_0, esto implica que ahora el punto con coordenadas (α,β,γ) pertenece a un cono y ya no a una esfera como en el caso anterior; por lo que, ahora la función $S(x,y,z;\vartheta_0,\varphi)$=$S(x,y,z;\varphi)$ es una familia uniparamétrica de soluciones a la ecuación iconal en un medio caracterizado con un índice de refracción constante n. En este caso, para ϑ_0 constante y φ entre $[-\pi,\pi)$, la función S Ec. (4.21) sigue representando una onda plana.

Observe que la función de onda

$$\psi_{Og}(\mathbf{r},t;\varphi) = O(\varphi)e^{i[k_0\tilde{S}(x,y,z;\varphi)-\omega t]}, \tag{4.25}$$

con

$$\tilde{S}(x,y,z;\varphi) \;=\; n\hat{k}(\vartheta_0,\varphi)\cdot\mathbf{r}+\frac{g(\varphi)}{k_0} \tag{4.26}$$

es solución a la ecuación de onda en un medio caracterizado con un índice de refracción constante n para cada valor de φ, donde $O(\varphi)$ y $g(\varphi)$ son la amplitud y la fase inicial de cada onda plana para cada valor de φ. Usando el principio de superposición, se tiene que la función de onda dada por

$$\Psi_n(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} O(\varphi)e^{ik_0\tilde{S}(x,y,z;\varphi)}d\varphi, \tag{4.27}$$

satisface la ecuación de onda en un medio caracterizado con índice de refracción constante n Ec. (4.4). En resumen, se ha obtenido la expresión integral de una solución a la ecuación de onda en un medio caracterizado con índice de refracción constante n en términos de una familia uniparamétrica de soluciones a la ecuación de Laplace y a la ecuación iconal en el vacío. En la siguiente sección se demuestra que es posible caracterizar geometricamente a la función de onda dada por la Ec. (4.27)

4.3. Frentes de onda y cáustica asociados con un haz adifraccional

Usando el resultado obtenido en la sección anterior Ec. (4.27), una solución a la ecuación escalar de onda en el vacío Ec. (1.1) en términos de una familia uniparamétrica de soluciones a la ecuación iconal y de Laplace Ec. (4.26) está dada por

$$\Psi(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} O(\varphi)e^{i[k_0\hat{k}(\vartheta_0,\varphi)\cdot\mathbf{r}+g(\varphi)]}d\varphi, \tag{4.28}$$

donde sólo se ha remplazado a n=1 en la Ec. (4.27). Es importante mencionar que la función de onda dada por la Ec. (4.28) es un haz adifraccional puesto que tomando $A(\varphi)=O(\varphi)e^{ig(\varphi)}$ se transforma en la Ec. (1.2).

De la expresión dada por la Ec. (4.28) se tiene que un haz adifraccional se puede ver como la superposición de ondas planas, con amplitud $O(\varphi)$ y

fase inicial $g(\varphi)$, por lo que, para cada valor de φ se tiene que los frentes de onda están dado por todos los puntos $\mathbf{r} = (x, y, z)$ en el vacío tales que

$$\tilde{S}(x, y, z; \varphi), = \mathcal{C} \tag{4.29}$$

donde $\mathcal{C}$ es una constante real. En este caso los frentes de onda dados por la Ec. (4.29) son planos. Para hallar los frentes de onda asociados con un haz adifraccional Ec. (4.28) se requiere obtener la envolvente de todos los frentes de onda planos dados por la Ec. (4.29) para cada valor de φ, la cual está dada como todos los puntos $\mathbf{r} = (x, y, z)$ en el vacío tales que

$$\tilde{S}(x, y, z; \varphi) = \mathcal{C} \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}(x, y, z; \varphi)}{\partial \varphi} = 0, \tag{4.31}$$

Utilizando las expresiones explícitas de $\hat{k}(\vartheta_0, \varphi)$ Ec. (4.23) y $\mathbf{r}$ Ec. (4.24), las Ecs. (4.30) y (4.31) se pueden expresar como

$$X \cos\varphi + Y \sin\varphi = \frac{\tau - Z\cos\vartheta_0 - g(\varphi)}{\sin\vartheta_0} \tag{4.32}$$

$$-X \sin\varphi + Y \cos\varphi = -\frac{g_\varphi(\varphi)}{\sin\vartheta_0}, \tag{4.33}$$

con $X = k_0 x$,$Y = k_0 y$, $Z = k_0 z$, $\tau = k_0 \mathcal{C}$ y $g_\varphi(\varphi)$ denota la derivada de $g(\varphi)$ con respecto de φ. Resolviendo el sistema de Ecs. (4.32) y (4.33) se obtiene que

$$X(\tau, \varphi, Z) = [\tau - Z\cos\vartheta_0 - g(\varphi)]\cos\varphi + \frac{g_\varphi(\varphi)}{\sin\vartheta_0}\sin\varphi, \tag{4.34}$$

$$Y(\tau, \varphi, Z) = -\frac{g_\varphi(\varphi)}{\sin\vartheta_0}\cos\varphi + [\tau - Z\cos\vartheta_0 - g(\varphi)]\sin\varphi, \tag{4.35}$$

$$Z(\tau, \varphi, Z) = Z, \tag{4.36}$$

observe que las Ecs. (4.34)-(4.36) representa una superficie en el espacio (X, Y, Z), la cual se puede expresar como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(\tau,\varphi,Z) &= \left([\tau - Z\cos\vartheta_0 - g(\varphi)]\cos\varphi + \frac{g_\varphi(\varphi)}{\sin\vartheta_0}\sin\varphi\right)\hat{x} \\ &+ \left(-\frac{g_\varphi(\varphi)}{\sin\vartheta_0}\cos\varphi + [\tau - Z\cos\vartheta_0 - g(\varphi)]\sin\varphi\right)\hat{y} \\ &+ Z\hat{z},\end{aligned} \tag{4.37}$$

donde $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ son los vectores unitarios cartesianos. En coordenadas cilíndricas circulares, el frente de onda dado por la Ec. (4.37) se puede expresar como

$$\boldsymbol{r}(\tau,\varphi,Z) = \frac{[\tau - Z\cos\vartheta_0 - g(\varphi)]\hat{\rho} - g_\varphi(\varphi)\hat{\varphi}}{\sin\vartheta_0} + Z\hat{z}, \tag{4.38}$$

con $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$ son los vectores unitarios polares. Observe que los frentes de onda dados por la Ec. (4.38) son invariantes ante una traslación a lo largo del eje Z. A continuación se va a determinar la cáustica que caracteriza a esta familia de frentes de onda Ec. (4.38), para este propósito se usará la siguiente definición.

Definición: Sea $\mathbf{h} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un mapeo diferenciable, con $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ variedades diferenciables. El conjunto de puntos en $\mathcal{M}$ donde h no es localmente uno a uno es denominado conjunto crítico, y la imagen de este conjunto crítico se denomina conjunto cáustico de $\mathbf{h}$ [23,24,25].

El conjunto crítico del mapeo dado por la Ec. (4.38), es decir, el conjunto de puntos del espacio dominio con coordenadas (τ, φ, Z) tal que el mapeo no es locamente uno a uno, se obtiene de la siguiente condición

$$\mathbf{J} \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Z}\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right) = 0. \tag{4.39}$$

Usando la Ec. (4.38), un cálculo directo muestra que el conjunto crítico del mapeo dado por la Ec. (4.38) está dado por todos los puntos (τ, φ, Z) tales que

$$\tau = Z\cos\vartheta_0 + g(\varphi) + g_{\varphi\varphi}(\varphi). \tag{4.40}$$

Sustituyendo la Ec. (4.40) en las Ecs. (4.34)-(4.36) se tiene que el conjunto cáustico asociado con el mapeo dado por la Ec. (4.38) está dado por todos los puntos (X_c, Y_c, Z_c) tales que

$$X_c(\tau, \varphi, Z) = \frac{g_{\varphi\varphi}\cos\varphi + g_{\varphi}\sin\varphi}{\sin\vartheta_0}, \tag{4.41}$$

$$Y_c(\tau, \varphi, Z) = \frac{g_{\varphi\varphi}\sin\varphi - g_{\varphi}\cos\varphi}{\sin\vartheta_0}, \tag{4.42}$$

$$Z_c(\tau, \varphi, Z) = Z. \tag{4.43}$$

Las Ecs. (4.41-4.43) representan una superficie en el espacio (X, Y, Z) la cual se puede expresar en términos de los vectores unitarios polares $\hat{\rho}$ y $\hat{\varphi}$ en la forma

$$\boldsymbol{r}_c(\tau, \varphi, Z) = \frac{g_{\varphi\varphi}(\varphi)\hat{\rho} - g_{\varphi}(\varphi)\hat{\varphi}}{\sin\vartheta_0} + Z\hat{z}. \tag{4.44}$$

Dada la representación paramétrica de la cáustica Ec. (4.41)-(4.43) asociada con un haz adifraccional Ec. (4.28) se tiene que la cáustica tiene una sola rama, además también es invariante a lo largo del eje de propagación como en el caso de los frentes de onda. Dadas las representaciones paramétricas de los frentes de onda Ecs. (4.34)-(4.36) y de la cáustica Ecs. (4.41)-(4.43), se obtendrán las gráficas de los frentes de onda y la cáustica asociados con un haz adifraccional que se propaga en el vacío. En el siguiente capítulo se obtienen los frentes de onda y cáustica asociados con la expresión integral de Whittaker Ec. (1.2) con $A(\varphi; q) = ce_{\nu}(\varphi; q) + ise_{\nu}(\varphi; q)$. Cuando λ_{ν} es un número entero se obtienen los frentes de ondas geométricos y la cáustica asociados con las soluciones separables a la ecuación escalar de onda en coordenadas cilíndricas elípticas. Por otro lado, cuando ν toma un valor específico que no es entero, entonces se obtienen los frentes de onda y cáustica asociados con una solución no separable a la ecuación escalar de onda en coordenadas cilíndricas elípticas.

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo se presentan las gráficas de los frentes de onda, cáustica y el patrón de intensidad numérico asociados con un haz Mathieu denotado por $\Psi_{\lambda_\nu,q}$, con los siguientes valores de los parámetros λ_ν y q:

+ $\lambda_\nu = 0$ y $q = 0$, .1, .2, .3, .4, .5, .6 denotados por $\Psi_{0,q}$
+ $q = 0$ y $\lambda_\nu = 0$, 1, 4, 9, 16 denotados por $\Psi_{\lambda_\nu,0}$

Cuando $\lambda_\nu = 0$ y $q = 0$ se encontró que los frentes de onda son conos y la cáustica es el eje Z; en este caso se muestra que tanto los frentes de onda y cáustica asociada son invariantes a lo largo del eje de propagación, es decir, al eje Z. Para $\lambda_\nu \neq 0$ y $q \neq 0$ los frentes de onda son deformaciones de conos y la estructura de la superficie cáustica está caracterizada por los parámetros λ_ν y q. La caracterización geométrica del haz Mathieu se dividió en dos subconjuntos: haces Bessel de orden $1, 2, 3, 4$ denotados por $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ y haces Mathieu con $\lambda_\nu = 0$ y diferente valor q denotados por $\Psi_{0,q}$. Se encontró que la cáustica asociada al conjunto $\Psi_{\lambda_\nu \neq 0,0}$ tiene singularidades de tipo fold y la cáustica asociada al conjunto $\Psi_{0,q\neq 0}$ tiene singularidades de tipo fold y cúspide dependiendo del valor de q.

5.1. Gráficas de los frentes de onda y cáustica para algunos haces Mathieu particulares

Para obtener los frentes de onda y cáustica asociados con los haces Mathieu, es necesario comparar $\psi_W(\mathbf{r},t)$ Ec. (3.69) y $\Psi(\mathbf{r},t)$ Ec. (4.28), por lo que

$$O(\varphi;q) = \sqrt{[ce_\nu(\varphi;q)]^2+[ce_\nu(\varphi;q)]^2}, \tag{5.1}$$

$$g(\varphi;q) = \arctan\left[\frac{se_\nu(\varphi;q)}{ce_\nu(\varphi;q)}\right]. \tag{5.2}$$

donde $ce_\nu(\varphi;q)$ y $se_\nu(\varphi;q)$ están dadas por las Ecs. (3.36) y (3.37) respectivamente. En este caso se utilizó el programa Mathematica para obtener las expresiones de las funciones $ce_\nu(\varphi;q)$ y $se_\nu(\varphi;q)$. Por otro lado, dado que $2q=(k_t^2f^2)/2$, entonces q es mayor o igual que cero en la ecuación de Mathieu ordinaria Ec. (3.24). Usando las funciones $O(\varphi;q)$ Ec. (5.1) y $g(\varphi;q)$ Ec. (5.2) se tiene que los frentes de onda Ecs. (4.34)-(4.36) de un haz Mathieu están dados por todos los puntos (X,Y,Z) en el vacío tales que

$$\begin{aligned} X &= \left[\tau - Z\cos\vartheta_0 - \arctan\left[\frac{se_\nu(\varphi,q)}{ce_\nu(\varphi,q)}\right]\right]\cos\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\sin\vartheta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi}\arctan\left[\frac{se_\nu(\varphi,q)}{ce_\nu(\varphi,q)}\right]\sin\varphi, \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{1}{\sin\vartheta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi}\arctan\left[\frac{se_\nu(\varphi,q)}{ce_\nu(\varphi,q)}\right]\cos\varphi \\ &\quad + \left[\tau - Z\cos\vartheta_0 - \arctan\left[\frac{se_\nu(\varphi,q)}{ce_\nu(\varphi,q)}\right]\right]\sin\varphi, \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$Z = Z, \tag{5.5}$$

mientras que la cáustica Ecs. (4.41)-(4.43) asociada con un haz Mathieu está dada por todos los puntos $(X_c,Y_c,Z_c)\subset(X,Y,Z)$ tal que

$$X_c = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\arctan\left[\frac{se_\nu(\varphi,q)}{ce_\nu(\varphi,q)}\right]\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi}\arctan\left[\frac{se_\nu(\varphi,q)}{ce_\nu(\varphi,q)}\right]\sin\varphi, \tag{5.6}$$

$$Y_c = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\arctan\left[\frac{se_\nu(\varphi,q)}{ce_\nu(\varphi,q)}\right]\sin\varphi - \frac{\partial}{\partial\varphi}\arctan\left[\frac{se_\nu(\varphi,q)}{ce_\nu(\varphi,q)}\right]\cos\varphi, \tag{5.7}$$

$$Z_c = Z. \tag{5.8}$$

De las Ecs. (5.3)-(5.5) y (5.6)-(5.8) se puede observar que el frente de onda y la cáustica asociados con un haz Mathieu depende de los paramétros ν y q o equivalentemente por λ_ν y q, donde ν denota el orden del haz y λ_ν el valor característico,. Se denota por $\Psi_{0,q}$ al haz Mathieu con parámetros $\lambda_\nu = 0$ y q =.1, .2, .3, .4, .5, .6; mientras que $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ denota al haz Mathieu con $\lambda = 0$, 1, 4, 9, 16 y $q = 0$. La caracterización geométrica de ambos conjuntos $\Psi_{0,q}$ y $\Psi_{\lambda,0}$ se realiza a continuación.

5.1.1. Caracterización geométrica del haz Mathieu $\Psi_{0,q}$

Usando las Ecs. (5.3-5.5) y las Ecs. (5.6-5.8) se obtienen las gráficas de los frentes de onda y la cáustica respectivamente, asociados con un haz Mathieu $\Psi_{0,q}$. En la Fig. (5.1) se muestran el frente de onda (azul) y cáustica (rojo) asociados con el haz Mathieu $\Psi_{0,q}$. Como se puede ver en la Fig. (5.1), los frentes de onda son deformaciones de conos para valores de $q \neq 0$; en el caso en el que $\lambda_\nu = 0$ y $q = 0$ el frente de onda es un cono y la cáustica es el eje Z. En la Fig.(5.2) se puede apreciar las curvas de nivel del frente de onda y la cáustica en $Z = 0$, con lo cual se muestra que la cáustica es el conjunto de singularidades del frente de onda, además, se puede distinguir que para cada valor de q la estructura de la cáustica cambia. Es importante notar que la cáustica para estos valores de λ_ν y q tiene singularidades de tipos fold y cúspide; en la Fig. (5.5a) se puede ver con detalle cómo cambia la estructura de la cáustica para los diferentes valores de q.

5.1.2. Caracterización geométrica del haz Mathieu $\Psi_{\lambda_\nu,0}$

Por otro lado, en la Fig. (5.3) se muestran el frente de onda y cáustica asociados con un haz Mathieu $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ dados por las Ecs. (5.3-5.5) y las Ecs. (5.6-5.8), respectivamnete. En este caso también se tiene que los frentes de onda son deformaciones de conos para los diferentes valores de λ_ν excepto para $\lambda_\nu = 0$ y la cáustica es un cilindro cuyo radio está caracterizado por el valor característico $\lambda_\nu = \nu^2$ (con ν un número entero), ver Fig. (5.3). En la Fig. (5.4) se puede apreciar las curvas de nivel y la cáustica en $Z = 0$, con lo cual se muestra que la cáustica es el conjunto de singularidades del frente de onda. En la Fig. (5.5b) se observa la cáustica en el plano $Z = 0$ para los diferentes valores de λ_ν.

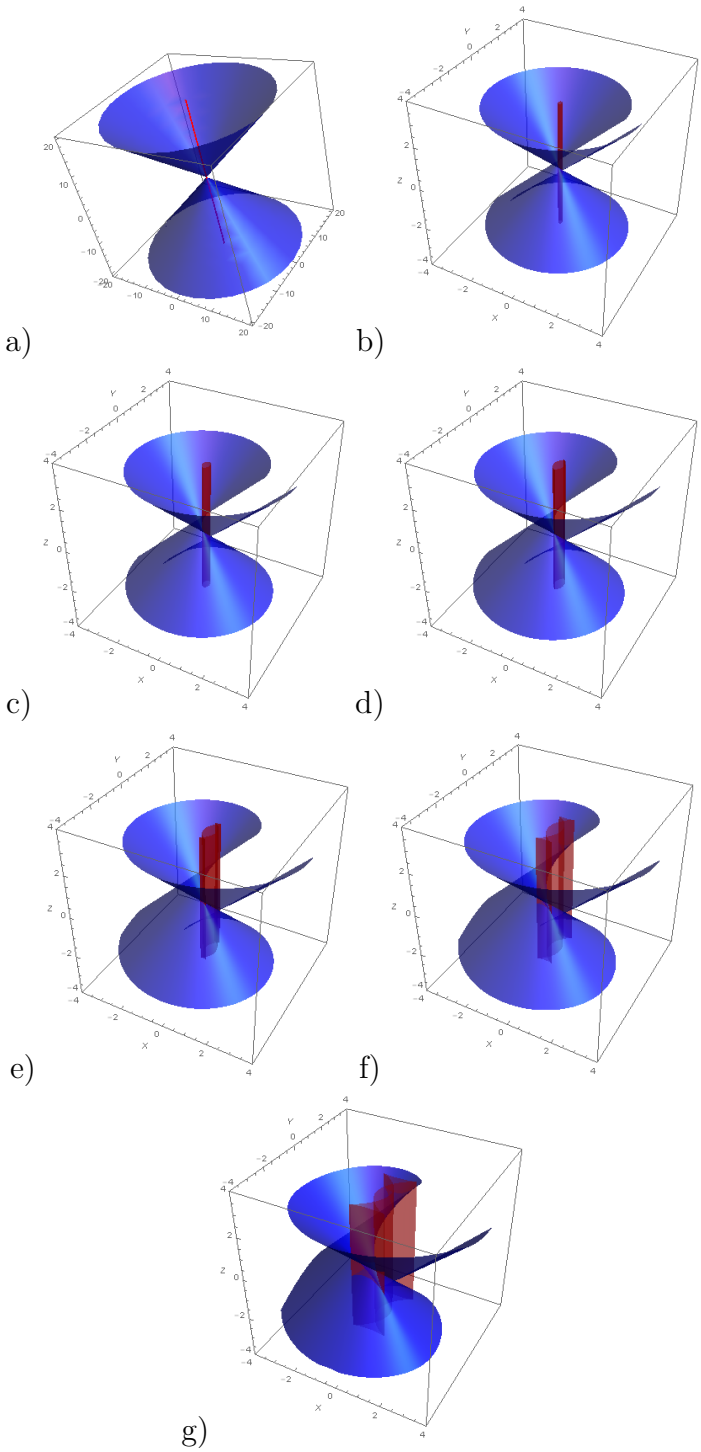


Figura 5.1: Frentes de onda y cáustica asociados con un haz Mathieu para $\lambda_\nu = 0$ y q =.1, .2, .3, .4, .5, .6; $\vartheta_0 = \pi/4$ y $\tau = 0$.

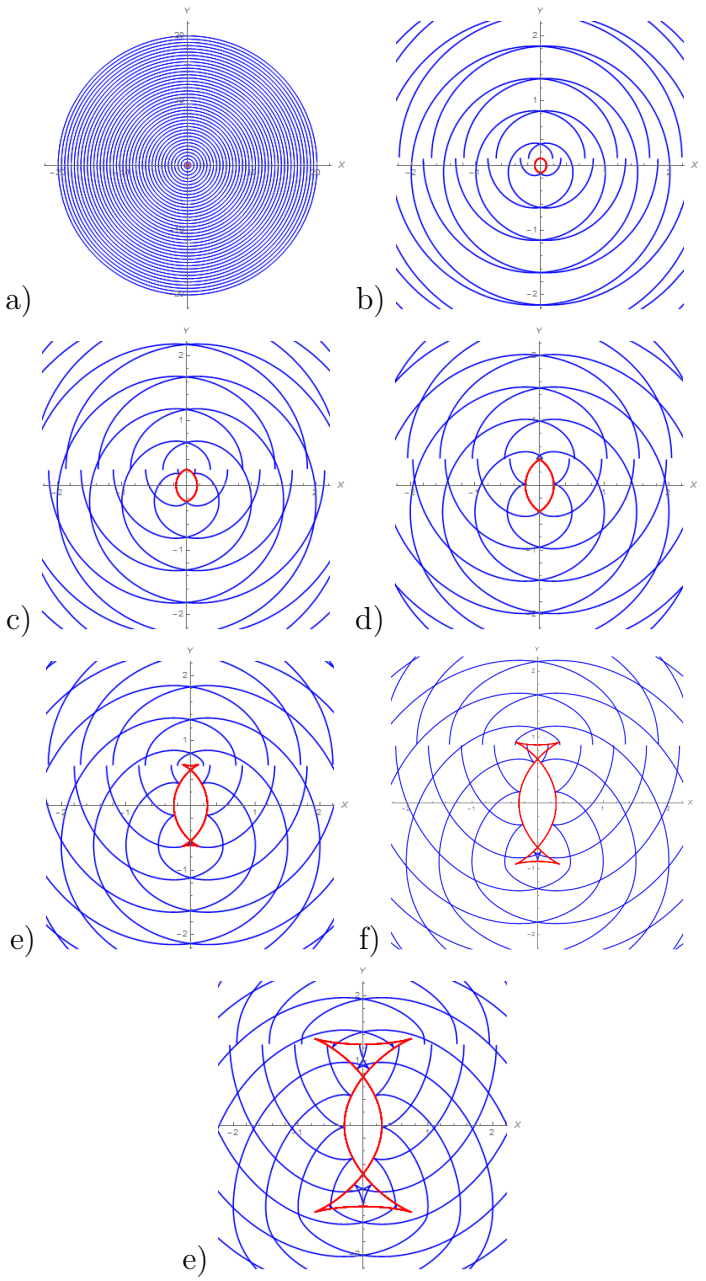


Figura 5.2: Curvas de nivel y cáustica asociados con un haz Mathieu para $\lambda_\nu = 0$ y $q = 0, .1, .2, .3, .4, .5, .6$, en el plano XY.

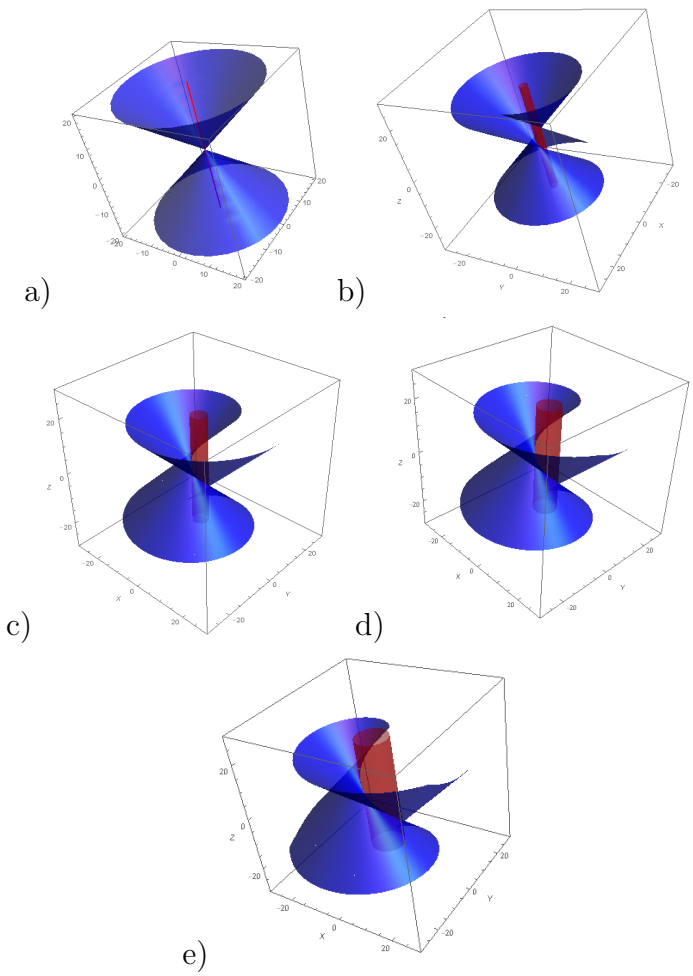


Figura 5.3: Frentes de onda y cáustica asociados con un haz Mathieu para $q = 0$ y $\lambda_\nu = 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16$; $\vartheta_0 = \pi/4$ y $\tau = 0$.

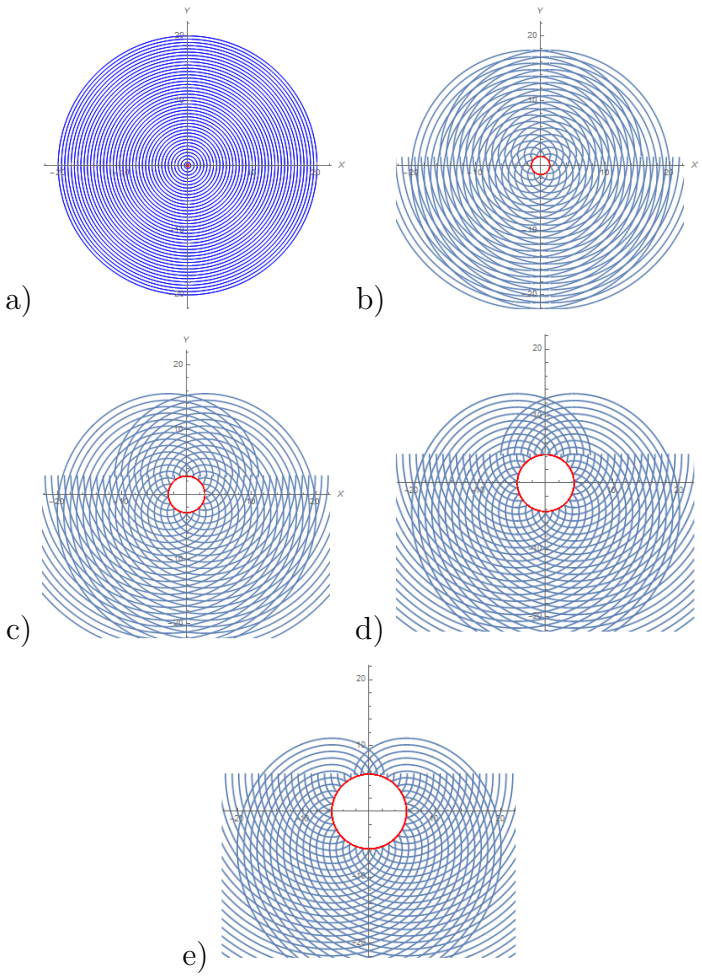
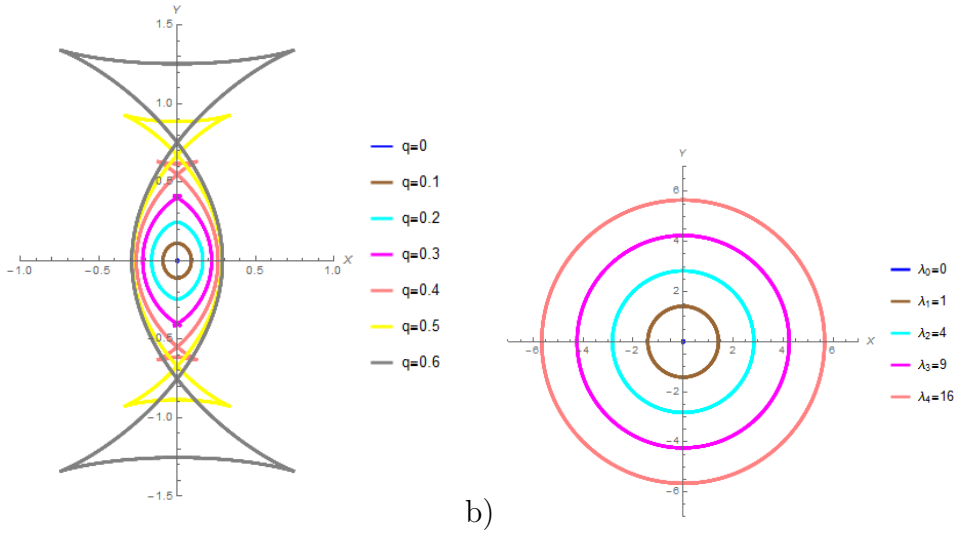


Figura 5.4: Curvas de nivel del frente de onda y cáustica asociados con un haz Mathieu para $q = 0$ y $\lambda_\nu = 0$, 1, 4, 9, 16; en el plano XY.

5.1.3. Cáusticas asociadas con $\Psi_{0,q}$ y $\Psi_{\lambda_\nu,0}$

En la Fig. (5.5a) se muestra la intersección de las cáusticas asociadas con el haz Mathieu $\Psi_{0,q}$ con el plano $Z = 0$; por otro lado en la Fig. (5.5b)) se tienen las gráficas de la intersección de las cáusticas asociadas con el haz Mathieu $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ con el plano $Z = 0$. Como se puede ver, la estructura de la cáustica asociada para un haz Mathieu $\Psi_{0,q}$ tiene singularidades de tipo fold y cúspide dependiendo del valor del parámetro q. Mientras que la estructura de la cáustica asociada para un haz Mathieu $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ tiene singulares de tipo fold para $m \neq 0$.



a) b)

Figura 5.5: a) Cáusticas asociadas con un haz Mathieu para $q = 0$, .1, .2, .3, .4, .5, .6 y $\lambda_\nu = 0$ en el plano XY . b) Cáusticas asociadas con un haz Mathieu para $q = 0$ y $\lambda_\nu = 0$, 1 ,4 ,9, 16 en el plano XY.

5.2. Patrón de intensidad de un haz Mathieu $\Psi_{\lambda_\nu,q}$

En esta subsección se presenta el patrón de intensidad transversal al eje de propagación asociado con un haz Mathieu $\Psi_{\lambda_\nu,q}$. Para determinar dicho patrón de intensidad se realiza lo siguiente. Un haz Mathieu en términos de

la expresión de Whittaker Ec. (1.2) se escribe como

$$\begin{aligned}\Psi_{\lambda_\nu,q}(\mathbf{r},t) &= \frac{e^{i(k_z z-\omega t)}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} O\cos[k_t(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+g]d\varphi \\ &\quad +\frac{ie^{i(k_z z-\omega t)}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} O\sin[k_t(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+g]d\varphi,\end{aligned} \tag{5.9}$$

con $A(\varphi;q)=ce_\nu(\varphi;q)+ise_\nu(\varphi;q)$. Como la intensidad I de una onda dada por la función $\Psi(\mathbf{r},t)$ es proporcional a $\Psi(\mathbf{r},t)\Psi^*(\mathbf{r},t)$ [26], se tiene que

$$\begin{aligned}I_{\lambda_\nu,q}(X,Y) &\propto \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} O\cos[\sin\vartheta_0(X\cos\varphi+Y\sin\varphi)+g]d\varphi\right]^2 \\ &\quad +\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} O\sin[\sin\vartheta_0(X\cos\varphi+Y\sin\varphi)+g]d\varphi\right]^2,\end{aligned} \tag{5.10}$$

donde $O=O(\varphi;q)$ y $g=g(\varphi;q)$ están dadas por las Ecs. (5.1) y (5.2) respectivamente.

Observe que la intensidad dada por la Ec. (5.10) es invariante a lo largo del eje de propagación Z. Para obtener el patrón de intensidad correspondiente al haz Mathieu $\Psi_{0,q}$ y $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ se utilizó el programa Mathematica. La integral dada por la Ec. (5.6) se calculó mediante una suma de Riemann. En la Fig. (5.6) se muestra el patrón de intensidad del haz Mathieu $\Psi_{0,q}$ para cada valor de q. Mientras que en la Fig. (5.7) se observa el patrón de intensidad del haz Mathieu $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ para cada valor de λ_ν. Es importante mencionar que los frentes de onda, cáustica y patrón de intensidad asociados con el haz Mathieu $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ corresponden al haz Bessel de orden $0,1,2,3,4$; por lo tanto, se concluye que los haces Bessel de orden entero son un subconjunto de los haces Mathieu. Las cáusticas asociadas al haz Bessel $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ Fig. (5.5b) describen cualitativamente el máximo global de los patrones de intensidad numéricos asociados con el haz Bessel $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ Fig. (5.7), ya que la cáustica tiene la misma estructura que el máximo global. Sin embargo, en el caso del haz Mathieu $\Psi_{0,q}$ no se pueden decir lo mismo, debido a que las cáusticas asociadas al haz Mathieu $\Psi_{0,q}$ Fig. (5.5a) no describen cualitativamente el máximo global de los patrones de intensidad asociados con el haz Mathieu $\Psi_{0,q}$ Fig. (5.6); en este caso la cáustica se encuentra en la región del máximo de intensidad más no tiene la misma estructura que el máximo global del patrón de intensidad. Los valores de los parámetros de los dos subconjuntos

que se analizaron no fueron arbitrarios, sino cumplen con cierta relación que sale a partir del método que se utilizó para resolver la ecuación de Mathieu ordinaria. Existen otros métodos para determinar las funciones de Mathieu con los cuales se puede elegir de manera general los valores λ_ν y q, por lo que sería interesante revisar esos métodos y ver si existen haces Mathieu cuya cáustica asociada tenga la misma estructura del máximo global del patrón de intensidad y sobre todo determinar los valores de λ_ν y q para los cuales la cáustica asociada tenga singularidades de tipo cúspide.

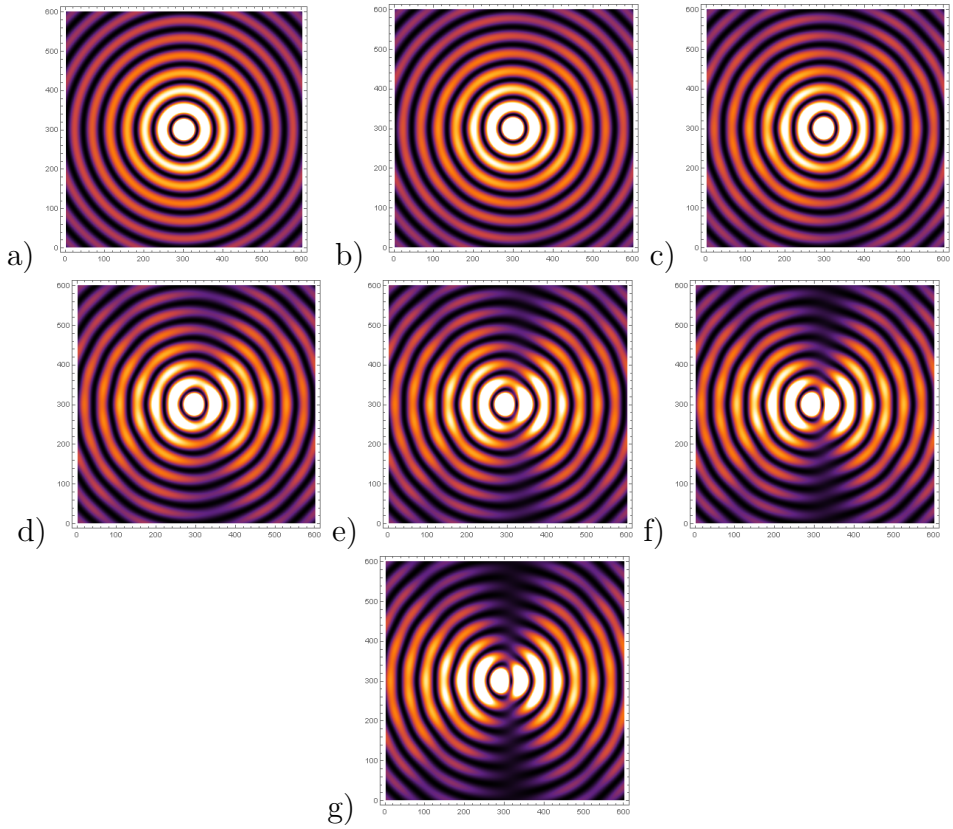


Figura 5.6: Patrón de intensidad de un haz Mathieu $\Psi_{0,q}$ con $q = 0$, .1, .2, .3, .4, .5, .6.

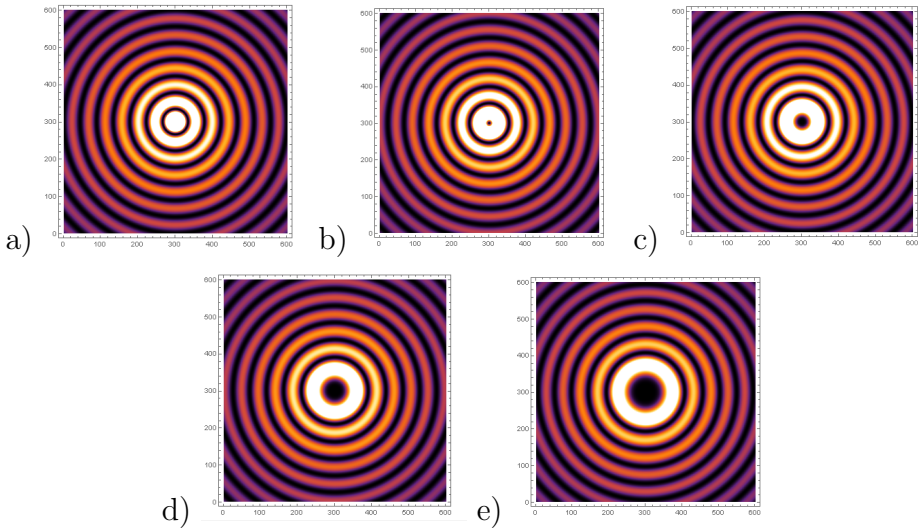


Figura 5.7: Patrón de intensidad de un haz Mathieu $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ con $\lambda_\nu = 0, 1, 4, 9, 16$.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un método para dar una caracterización geométrica de un haz adifraccional, en particular a un haz Mathieu, es decir, se calcularon los frentes de onda y la cáustica asociados con un haz Mathieu, además de obtener el patrón de intensidad de este haz. Puesto que el haz Mathieu $\Psi_{\lambda_\nu,q}$ es una función de onda que depende de los parámetros λ_ν y q, se caracterizaron dos conjuntos: el primer conjunto fue el haz Mathieu con $\lambda_\nu = 0$ y $q = 0, .1, .2, .3, .4, .5, .6$, denotado por $\Psi_{0,q}$; el segundo conjunto fue el haz Mathieu con $\lambda_\nu = 0, 1, 4, 9, 16$ y $q = 0$ denotado por $\Psi_{\lambda_\nu,0}$. Se encontró que los frentes de onda y la cáustica asociados con un haz Mathieu $\Psi_{\lambda_\nu,q}$ son invariantes a lo largo del eje de propagación, es decir, del eje Z. Los frentes de onda para $\lambda_\nu = 0$ y $q = 0$ son conos, para $\lambda_\nu \neq 0$ y $q \neq 0$ son deformaciones de conos. Por otro lado, se encontró que la cáustica asociada a $\Psi_{0,q}$ tiene singularidades de tipo fold y de tipo cúspide, dependendiendo del valor de $q \neq 0$; mientras que la cáustica asociada a $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ con $\lambda_\nu \neq 0$ tiene singularidades de tipo fold. Para el caso especial $\lambda_\nu = 0$ y $q = 0$ se tiene que la cáustica es una recta infinita (el eje Z), la cual no tiene singularidades de tipo fold o cúspide. El haz Bessel es un subconjunto del haz Mathieu debido a que los frentes de onda, cáustica y patrón de intensidad asociados con el haz Mathieu $\Psi_{\lambda_\nu,0}$ corresponden al haz Bessel de orden $0, 1, 2, 3, 4$. Finalmente, se mostró que la cáustica asociada con un haz Bessel da una caracterización cualitativa del máximo global de la distribución de intensidad de este haz. Mientras que para el haz Mathieu $\Psi_{0,q}$ la cáustica se localiza en la región de mayor intensidad, pero no presenta la estructura del máximo global de la distribución de intensidad.

Referencias

[1] J Durnin *Exact solutions for nondiffracting beams: I. The scalar theory*, J. Opt. Soc. Am. A **4** (1987) 651-654.

[2] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, fourth edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

[3] C. P. Boyer, E. G. Kalnins and W. Miller, *Symmetry and separation of variables for the Helmholtz and Laplace equations*, Nagoya Math. J. **60** (1976) 35-80.

[4] J. Durnin and J.J. Miceli, Jr., and J. H. Eberly *Difraction-free beams*, Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 1499-1501.

[5] J.C. Gutiérrez-Vega, M.D.Iturbe-Castillo, and S. Chávez-Cerda, *Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams*, Opt. Lett **25** (2000) 1493-1495.

[6] C. López-Mariscal, M. A. Bandres, and Julio C. Gutiérrez-Vega y S. Chávez-Cerda, *Observation of parabolic nondiffracting optical fields*, Opt. Express **13** (2005) 2364-2369.

[7] J. Salo, J. Fagerholm, A. T. Friberg, and M. M. Salomaa, *Nondiffracting Bulk-Acoustic X waves in Crystals*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1171.

[8] J. C. Gutiérrez-Vega, M. D. Iturbe-Castillo, G. A. Ramírez, E. Tepichín, R. M. Rodríguez-Dagnino, S. Chávez-Cerda and G. H. C. New *Experimental demostration of optical Mathieu beams*, Opt. Comm. **195** (2001) 35-40.

[9] S. Chávez-Cerda, M. J. Padgett, I. Allison, G. H. C. New, J. C. Gutiérrez-Vega, A. T. O'Neil, I. MacVicar and J. Courtial *Holographic generation and orbital angular momentum of high-order Mathieu beams*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **4** (2002) S52-S57.

[10] C. López-Mariscal, J. C. Gutiérrez-Vega, G. Milne and K. Dholokia, *Orbital angular momentum transfer in helical Mathieu beams*, Opt. Exp. **14** (2006) 4182-4187.

[11] J. C. Gutiérrez-Vega and M. A. Bandres, *Helmholtz-Gauss waves*, J. Opt. Am. A **22** (2005) 289-298.

[12] C. López-Mariscal, M. A. Bandres and Julio C. Gutiérrez-Vega, *Observation of the experimental propagation properties of Helmholtz-Gauss beams*, Optical Engineering **45** (2006) 068001.

[13] J. C. Gutiérrez-Vega and M. A. Bandres, *Normalization of the Mathieu-Gauss optical beams*, J. Opt. Am. A **24** (2007) 215-220.

[14] M. B. Alvarez-Elizondo, R. Rodríguez-Masegosa ans J. C. Gutiérrez-Vega, *Generation of Mathieu-Gauss modes with an axicon-based laser resonator*, Opt. Exp. **16** (2008) 18770-18775.

[15] R. J. Hernández-Hernández, R. A. Terborg, I. Ricardez-Vargas and V. Volke-Sepúlveda, *Experimental generation of Mathieu-Gauss beams with a phase-only spatial light modulator*, App. Opt. **49** (2010) 6903-6909.

[16] Y. V. Kartashov, A. A. Egorov, V. A. Vysloukh and L. Torner, *Shaping soliton properties in Mathieu lattices*, Opt. Lett. **31** (2006) 238-240.

[17] C. A. Dartora and H. E. Hernández-Figueroa, *Properties of a localized Mathieu pulse*, J. Opt. Am. A **21** (2004) 662-667.

[18] O. de J. Cabrera-Rosas, E. Espíndola-Ramos, S. A. Juárez-Reyes, I. Julián-Macías, P. Ortega-Vidals, G. Silva-Ortigoza, R. Silva-Ortigoza and C. T. Sosa-Sánchez, *Wavefronts and caustic associated with Durnin's beams*, J. Opt. **19** (2017) 015603.

[19] C. T. Sosa-Sánchez, G. Silva-Ortigoza, S. A. Juárez-Reyes, O. de J. Cabrera-Rosas, E. Espíndola-Ramos, I. Julián-Macías, P. Ortega-Vidals, *Parabolic non-diffracting beams: geometrical approach*, J. Opt. **19** (2017) 085604.

[21] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, fourth edition, Academic Press, San Diego, 1995.

[22] N. W. McLachlan, *Theory and applications of Mathieu functions* (Oxford at the Clarendon Press, 1947).

[23] Arnold V. I., Gussein-Zade S. M. and Varchenko A N 1995 *Singularities of Differenciable Maps* vol I (Boston: Birkhauser)

[24] Arnold V I 1983 *Singularities, bifurcations and catastrophes* Usp. Fizs. Nauk. **141** 569-90

[25] Y. A. Krastov and Y. I. Orlov 1983 *Caustics catastrophes, and wave*

fields Usp. Fizs. Nauk. **141** 591-62790

[26] Eugene Hecht, *Optics*, fourth edition, Addison-Wesley 2002.