BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

UNICIDAD DEL n-ÉSIMO HIPERESPACIO PARA CONTINUOS LOCALMENTE CONEXOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

LEONARDO RAMÍREZ APARICIO

DIRECTORES DE TESIS

DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO
DR. DAVID HERRERA CARRASCO

PUEBLA, PUE. 7 DE DICIEMBRE DE 2022

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

UNICIDAD DEL n-ÉSIMO HIPERESPACIO PARA CONTINUOS LOCALMENTE CONEXOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
LEONARDO RAMÍREZ APARICIO

DIRECTORES DE TESIS

DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO
DR. DAVID HERRERA CARRASCO

PUEBLA, PUE. 7 DE DICIEMBRE DE 2022

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

LEONARDO RAMÍREZ APARICIO

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 7 de noviembre de 2022, con la tesis titulada:

Unicidad del n-ésimo hiperespacio para continuos localmente conexos

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 9 de noviembre de 2022

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Dedicatoria

A mi mamá Juana y mi papá Higinio, quienes nunca han regateado su vida para mí. Siempre esforzándose por el bien de mis hermanas y el mío.

A mi dulcinea, Marijose.

Los amo.

≪*Hijo mío (se zafaba el páter), los insondables designios de la Providencia todo lo regulan, y una desgracia aparente es origen, a veces, de un provecho extraordinario, aunque invisible.*≫
Los hermanos Karamázov.

Agradecimientos

Gracias a Dios, que me ha dado el don de la vida para poder disfrutar de las alegrías como de reflexionar de las tristezas que hay cada día.

Gracias a mi madrecita linda, mujer valiente y sabia, y a mi padre, hombre de fe y de mil batallas. Algo bueno tuve que haber hecho o haré en este mundo para tenerlos como mis maestros de vida.

Gracias a mis hermanas Gladys y Mariela por enseñarme que muchas veces lo que desborda el alma no puede ser expresado en palabras. A mis sobrinos, Cristhel, Alexis y Mateo, por orden de aparición.

Gracias a Marijose Perucini, por decidir caminar conmigo, este pequeñito logro también es tuyo. Al amigo fiel Hércules.

Gracias al Dr. David Herrera Carrasco, por hacerme sentir uno de los suyos, por ser un gran maestro, pero sobre todo una excelente persona, al igual, que el Dr. Fernando Macías Romero. Muchas gracias de todo corazón, por su admirable paciencia conmigo.

Gracias a los muy respetables Doctores: María de Jesús López Toriz, Patricia Domínguez Soto, Raúl Escobedo Conde y Mauricio Esteban Chacón Tirado, por el valioso tiempo que se tomaron para la revisión de esta tesis, y así, mejorara.

Gracias a los profesores de mi feliz infancia, Plinio y Fernando Vergara, donde quiera que se encuentren sepan que lo que me inculcaron ha dado muchos frutos.

Por último, pero no por ello de menor importancia, puesto que su apoyo económico ha sido indispensable durante estos dos años, gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).

Que Dios les bendiga.

Introducción

Históricamente, el concepto del *n-ésimo hiperespacio* de X, cuando X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, tuvo sus inicios en 1939 con Wojdysławski en su artículo [32], *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*. Sin embargo, el nombre de este hiperespacio fue dado por Sergio Macías quien en el año de 2001 estudió varias de sus propiedades, como se puede ver en [25].

De acuerdo a la literatura existente de la teoría de los continuos y sus hiperespacios, se sabe que si dos continuos X y Y son homeomorfos y si $\mathcal{H}(X)$ es alguno de los hiperespacios 2^X, $C_n(X)$, o $F_n(X)$, entonces $\mathcal{H}(X)$ y $\mathcal{H}(Y)$ también son homeomorfos, véase [20, Teorema 1.9]. Sin embargo, el recíproco no siempre se cumple, es decir, puede haber espacios que tengan hiperespacios homeomorfos pero ellos mismos no lo son, por ejemplo, los hiperespacios de subcontinuos de la circunferencia unitaria y el intervalo unitario $[0,1]$ son homeomorfos, pero dichos espacios no lo son, véase la Proposición 2.17 y la Proposición 2.18. Es por esta razón, que decimos que si X es el arco o la curva cerrada simple, entonces X no tiene hiperespacio único $C(X)$. Formalmente, un continuo X tiene hiperespacio único $C_n(X)$ si dado un continuo Y tal que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y. En nuestro caso, nos interesamos en estudiar condiciones bajo las cuales, dado un continuo X localmente conexo, éste tenga hiperespacio único $C_n(X)$, esto, particularmente lo estudiamos, para la clase de los continuos casi enrejados y su subclase la de los continuos enrejados.

Esta tesis consiste en estudiar y completar los resultados originalmente expuestos en el artículo de 2013 [12], realizado por Rodrigo Hernández, Alejandro Illanes y Verónica Martínez de la Vega. Con este propósito, dividimos su contenido en cuatro capítulos. Naturalmente, el primer capítulo, se encarga de presentar los resultados generales acerca de los conceptos de dimensión, orden, conexidad local y variedad que usaremos a lo largo de este trabajo.

El segundo capítulo, introduce el material necesario para la comprensión del tercer capítulo, como son: los hiperespacios, la métrica de Hausdorff, los modelos del hiperespacio de subcontinuos para el arco y la curva cerrada simple, los hiperespacios de crecimento, retractos absolutos, Z-conjuntos y el Teorema de Toruńczyk.

En el tercer capítulo, tratamos los conceptos de continuos casi enrejados y enrejados, así como algunas de sus caracterizaciones, entre las cuales se encuentran, el Lema 3.17, el Lema 3.21 y el Teorema 3.30. Respecto a la unicidad de hiperespacios, establecemos una condición necesaria para que un continuo localmente conexo tenga n-ésimo hiperespacio único, véase Teorema 3.54.

Por otro lado, considerando como $\mathfrak{A}_S(X)$ a la clase de los arcos libres maximales y circunferencias libres de un continuo X, en este mismo capítulo, nos ocupamos de demostrar algunas propiedades de estos objetos, entre la que destaca; para cada arco libre de un continuo X localmente conexo, existe un elemento de $\mathfrak{A}_S(X)$ que lo contiene, véase Lema 3.73. La mayoría de los resultados de este capítulo, son utilizados en la Sección 4.2.

En el cuarto capítulo, demostramos una condición necesaria para que un continuo localmente conexo y casi enrejado posea hiperespacio de subcontinuos único, véase Corolario 4.2, así como la existencia de una clase de continuos localmente conexos que no tienen m-ésimo hiperespacio único, para algún $m \leq n$, con $n, m \in \mathbb{N}$, véase Corolario 4.3. Por último, en este mismo capítulo, demostramos que la clase de los continuos enrejados poseen n-ésimo hiperespacio único, véase Teorema 4.24.

Leonardo Ramírez Aparicio
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
7 de diciembre de 2022

Índice general

Introducción I

1. Preliminares 1
1.1. Dimensión 1
1.2. Orden 4
1.3. Conexidad local 5
1.4. Variedades 8

2. Propiedades de los continuos 13
2.1. Hiperespacios y métrica de Hausdorff 13
2.2. Dos modelos de Hiperespacios 18
2.3. Hiperespacios de crecimiento 23
2.4. Convergencia en hiperespacios 24
2.5. Retractos absolutos, Z-conjuntos y Teorema de Toruńczyk. . . . 27

3. Clases de continuos 29
3.1. Gráficas finitas 29
3.2. Continuos casi enrejados y enrejados 31
3.3. Continuos que no son casi enrejados 42
3.4. Arcos y circunferencias libres 53

4. Unicidad del n-ésimo hiperespacio para continuos localmente conexos 65
4.1. Continuos casi enrejados sin n-ésimo hiperespacio único 65
4.2. Los continuos enrejados tienen n-ésimo hiperespacio único . . . 68

5. Conclusiones 93

Referencias 94

Índice alfabético 98

Unicidad del n-ésimo hiperespacio para continuos localmente conexos

Leonardo Ramírez Aparicio

7 de diciembre de 2022

Capítulo 1

Preliminares

El presente capítulo está dedicado a estudiar y presentar los principales conceptos y resultados generales que usaremos a lo largo de este trabajo. Nuestro principal objetivo es enlistarlos para que más adelante podamos hacer referencia a ellos.

En todo este trabajo si X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X, los símbolos $\mathrm{cl}_X(A)$, $\mathrm{int}_X(A)$ y $\mathrm{bd}_X(A)$ denotan la cerradura de A, el interior de A y la frontera de A en el espacio X, respectivamente. Como es usual, los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{N}$ y ω, representan el conjunto vacío, el conjunto de los números naturales (enteros positivos), y el primer ordinal no numerable, respectivamente. El símbolo $|A|$ denota la cardinalidad del conjunto A.

1.1. Dimensión

Definimos el concepto de dimensión para un espacio topológico. Entre algunos de los resultados importantes de este concepto se encuentra que la dimensión es una propiedad topológica, es decir, es invariante bajo homeomorfismos.

El siguiente lema relativo a fronteras nos ayudará en la prueba del Teorema 1.3.

Lema 1.1. *Sea X un espacio topológico. Si A y Y son subconjuntos de X, entonces:*

(a) $\mathrm{bd}_Y(A \cap Y) \subset \mathrm{bd}_X(A)$;

(b) *si* $\mathrm{cl}_X(A) \subset \mathrm{int}_X(Y)$, *entonces* $\mathrm{bd}_X(A) = \mathrm{bd}_Y(A)$.

Demostración. Para probar (a) observemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{bd}_Y(A \cap Y) &= \mathrm{cl}_Y(A \cap Y) \cap \mathrm{cl}_Y(Y - A), \\ &\subset \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(X - A) \\ &= \mathrm{bd}_X(A), \end{aligned}$$

$$\text{es decir, } \mathrm{bd}_Y(A \cap Y) \subset \mathrm{bd}_X(A).$$

Ahora, para mostrar (b) notemos primero que como $A \subset Y$, entonces $X -$

$A = (X - Y) \cup (Y - A)$. Así,

$$\begin{aligned}
\mathrm{bd}_X(A) &= \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(X - A) \\
&= \mathrm{cl}_X(A) \cap (\mathrm{cl}_X(X - Y) \cup \mathrm{cl}_X(Y - A)) \\
&= \mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(Y - A) \\
&= \mathrm{cl}_X(A) \cap Y \cap \mathrm{cl}_X(Y - A) \\
&= \mathrm{cl}_Y(A) \cap \mathrm{cl}_Y(Y - A) \\
&= \mathrm{bd}_Y(A),
\end{aligned}$$

es decir, $\mathrm{bd}_X(A) = \mathrm{bd}_Y(A)$.

□

Definición 1.2. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos la dimensión de X, recursivamente, que denotamos como $\dim(X) \in \{-1, 0, 1, ..., \} \cup \{\infty\}$, de la siguiente manera:*

(a) $\dim(X) = -1$ *si y solo si* $X = \emptyset$*;*

(b) *supongamos que hemos definido cuándo un espacio topológico Y tiene dimensión $\dim(Y) \leq n - 1$, para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces, decimos que la dimensión de X en x es menor o igual a n, denotada por $\dim(x, X) \leq n$, si y solo si X tiene una base local de vecindades de x cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual a $n-1$. Si para cada $x \in X$, se cumple que $\dim(x, X) \leq n$, entonces escribimos que $\dim(X) \leq n$;*

(c) *la dimensión de X es igual a n, denotada por $\dim(X) = n$, si y solo si $\dim(X) \leq n$ y es falso que $\dim(X) \leq n - 1$;*

(d) *la dimensión de X en x es igual a n, denotada por $\dim(x, X) = n$, si y solo si $\dim(x, X) \leq n$ y es falso que $\dim(x, X) \leq n - 1$;*

(e) *decimos que la dimensión de X es ∞, denotada por $\dim(X) = \infty$, si y solo si es falso que $\dim(X) \leq n$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$;*

(f) *decimos que la dimensión de X en x es ∞, denotada por $\dim(x, X) = \infty$, si y solo si $\dim(x, X) > n$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$.*

Además, por convención, aceptamos que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\} \cup \{\infty\}$, se cumple que $n \leq \infty$.

El siguiente resultado puede ser consultado en [4, Teorema 5.2], incluimos su demostración porque es utilizado frecuentemente.

Teorema 1.3. *Si X es un espacio topológico, A un subespacio de X y $x \in A$, entonces se cumple lo siguiente:*

(a) $\dim(A) \leq \dim(X)$*;*

(b) $\dim(x, A) \leq \dim(x, X)$*;*

(c) *si X es un espacio topológico regular tal que $x \in \mathrm{int}_X(A)$, entonces $\dim(x, A) = \dim(x, X)$.*

Demostración. Para demostrar (a) podemos suponer que $\dim(X) < \infty$ ya que si $\dim(X) = \infty$, la afirmación es clara. Haremos la prueba por inducción sobre una cota superior de la dimensión de X. Claramente la desigualdad se cumple si $\dim(X) = -1$. Supongamos que (a) se cumple para X cuya dimensión no excede $n-1 \geq -1$ con $n \geq 0$. Sean X un espacio topológico con $\dim(X) \leq n$ y A un subespacio de X. Veamos que $\dim(x, A) \leq \dim(X)$, para cada $x \in A$. Sean $x \in A$ y U una vecindad de x en A, entonces existe V una vecindad de x en X tal que $U = A \cap V$. Como $\dim(X)$ es finita, $\dim(X) \leq \dim(X)$ y $x \in U$, tenemos que existe W una vecindad de x en X tal que $x \in W \subset V$ y $\dim(\mathrm{bd}_X(W)) \leq \dim(X) - 1$. Notemos que $W \cap A \subset U$ es una vecindad de A que contiene a x. Además, por el Lema 1.1 (a), $\mathrm{bd}_A(W \cap A) \subset \mathrm{bd}_X(W)$, así, $\mathrm{bd}_A(W \cap A)$ es un subespacio de $\mathrm{bd}_X(W)$. Por hipótesis de inducción, se sigue que $\dim(\mathrm{bd}_A(W \cap A)) \leq \dim(\mathrm{bd}_X(W)) \leq \dim(X) - 1$. Así, $\dim(x, A) \leq \dim(X)$. Como $x \in A$ es arbitrario, se sigue que $\dim(A) \leq \dim(X)$, concluyendo lo requerido.

Para probar (b), observemos que si $\dim(x, X) = \infty$, entonces la desigualdad es cierta. Supongamos que $\dim(X) < \infty$. Si $\dim(x, X) = -1$, entonces por vacuidad, la desigualdad es cierta. En otro caso, sea U una vecindad de x en A, razonando análogamente como en (a), existen vecindades V y W de x en X tales que $U = A \cap V$, $p \in W \subset V$ y $\dim(\mathrm{bd}_X(A)) \leq \dim(x, X) - 1$. Por el Lema 1.1 (a), como $\mathrm{bd}_A(W \cap A) \subset \mathrm{bd}_X(W)$, se sigue que $\dim(\mathrm{bd}_A(W \cap A)) \leq \dim(\mathrm{bd}_X(W)) \leq \dim(x, X) - 1$. Ya que $W \cap A$ es una vecindad de x en A que está contenida en U, se sigue que $\dim(x, A) \leq \dim(x, X)$, concluyendo lo requerido.

Por último, para probar (c), por el iniciso (b), es suficiente mostrar que $\dim(x, X) \leq \dim(x, A)$. Para esto, podemos suponer que $\dim(x, A) < \infty$. Sea U una vecindad abierta de x en X que está contenida en A, entonces U también es una vecindad abierta de x en A. Por lo que, existe V una vecindad de x en A tal que $V \subset U$ y $\dim(\mathrm{bd}_A(V)) \leq \dim(x, A) - 1$. Ahora, notemos que V también es una vecindad de x en X. En efecto, como V es una vecindad de x en A tal que $V \subset U$, existe un abierto O_A en A tal que $x \in O_A \subset V \subset U$. Además, ya que U es un abierto en X que contiene a x y está contenido en A, entonces $U \subset \mathrm{int}_X(A) \subset A$. Así, $O_A \subset \mathrm{int}_X(A) \subset A$. De modo que O_A es abierto en $\mathrm{int}_X(A)$ y por ende, en X. Debido a esto, V es una vecindad de x en X. Por otra parte, como por hipótesis, X es regular y $x \in \mathrm{int}_X(A)$, podemos suponer que $\mathrm{cl}_X(V) \subset \mathrm{int}_X(A)$. Así, por el Lema 1.1 (b), $\mathrm{bd}_A(V) = \mathrm{bd}_X(V)$. De aquí, $\dim(x, \mathrm{bd}_X(V)) \leq \dim(x, A) - 1$. Por lo tanto, $\dim(x, X) \leq \dim(x, A)$ y así concluye la prueba. □

Teorema 1.4. *Sean X, Y dos espacios topológicos homeomorfos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces,* $\dim(X) = n$ *si y solo si* $\dim(Y) = n$.

Demostración. Demostramos la primera implicación, ya que el recíproco es similar. La prueba se hace por inducción sobre la dimensión de X. Si $\dim(X) = -1$, entonces $X = \emptyset$. Como X es homeomorfo a Y, entonces $Y = \emptyset$. Así, $\dim(Y) = -1$. Supongamos que si $\dim(X) = n-1$, entonces $\dim(Y) = n-1$. Ahora veamos que si $\dim(X) = n$, entonces $\dim(Y) = n$. Para esto, demostremos que para cada $x \in X$, si $\dim(x, X) = n$, entonces $\dim(h(x), Y) = n$.

Supongamos que $\dim(x, X) = n$. Sea U una vecindad de un punto $h(x)$ en Y, entonces como h es continua en x, se tiene que $h^{-1}(U)$ es una vecindad de x en X. Como $\dim(x, X)$ es finita, existe W una vecindad de x en X tal que $x \in W \subset h^{-1}(U)$ y $\dim(\mathrm{bd}_X(W)) \leq n-1$. Como h es un homeomorfismo entre X e Y, entonces $h\restriction_{\mathrm{bd}_X(W)}\colon \mathrm{bd}_X(W) \to h(\mathrm{bd}_X(W))$ es también un homemorfismo. Como los homeomorfismos conservan frontentas, es decir, si $A \subset X$, entonces $h(\mathrm{bd}_X(A)) = \mathrm{bd}_Y(h(A))$, por hipótesis de inducción, se cumple que $\dim(\mathrm{bd}_X(W)) = \dim(h(\mathrm{bd}_X(W))) = \dim(\mathrm{bd}_Y(h(W))) \leq n-1$. De esto, se sigue que $h(W)$ es una vecindad de $h(x)$ contenida en U tal que, $\dim(\mathrm{bd}_Y(h(W))) \leq n-1$. Así, $\dim(h(x), Y) \leq n$.

Resta probar que $\dim(h(x), Y) > n-1$. Supongamos que $\dim(h(x), Y) \leq n-1$, luego, por hipótesis de inducción, $\dim(x, X) \leq n-1$, lo que es una contradicción, ya que $\dim(x, X) = n$. Así, $\dim(h(x), Y) > n-1$ y por lo tanto, $\dim(h(x), Y) = n$. Así, como x fue elegida arbitrariamente en X, si $\dim(X) = n$, entonces $\dim(Y) = n$. □

Lema 1.5. *Si X, Y son espacios topológicos y $(x, y) \in X \times Y$, entonces,* $\dim(x, X) \leq \dim((x, y), X \times Y)$.

Demostración. Observemos primero que la función $h\colon X \to X \times \{y\}$ definida por $h(x) = (x, y)$, para cada $x \in X$, es un homeomorfismo. Luego, como la noción de dimensión en un punto es una propiedad topológica, por el Teorema 1.4, $\dim(x, X) = \dim((x, y), X \times \{y\})$. Por el Teorema 1.3 (a), se cumple que $\dim((x, y), X \times \{y\}) \leq \dim((x, y), X \times Y)$. Por lo tanto, $\dim(x, X) \leq \dim((x, y), X \times Y)$. □

1.2. Orden

Definición 1.6. *Un **continuo** es un espacio métrico X con más de un punto conexo y compacto. Un subconjunto Y de X es un **subcontinuo** de X si Y es un continuo o Y es un conjunto de un punto.*

Definición 1.7. *Sean X un continuo, A un subconjunto no vacío de X y β un número cardinal. Se dice que A es de **orden menor o igual** que β en X, denotado por* $\mathrm{ord}(A, X) \leq \beta$, *si para cualquier conjunto abierto V de X con $A \subset V$, existe un conjunto abierto U de X tal que $A \subset U \subset V$ y $|\mathrm{bd}_X(U)| \leq \beta$. Si $A = \{x\}$ se escribirá que* $\mathrm{ord}(x, X) \leq \beta$ *en lugar de escribir* $\mathrm{ord}(\{x\}, X) \leq \beta$. *Se dice también que A es de **orden** β en X, denotado por* $\mathrm{ord}(A, X) = \beta$, *si* $\mathrm{ord}(A, X) \leq \beta$ *y para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$, se tiene que* $\mathrm{ord}(A, X) \not\leq \alpha$.

Teorema 1.8. *Si X es un continuo, A un subespacio de X y $x \in A$, entonces* $\mathrm{ord}(x, A) \leq \mathrm{ord}(x, X)$. *Además, si A es una vecindad de x en X, entonces* $\mathrm{ord}(x, A) = \mathrm{ord}(x, X)$.

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de A con $x \in U$, entonces existe V un subconjunto abierto de X tal que $U = A \cap V$. Como $\mathrm{ord}(x, X) = \mathrm{ord}(x, X)$ y $x \in V$, por la Definición 1.7, existe un subconjunto abierto W de X tal que, $x \in W \subset V$ y $|\mathrm{bd}_X(W)| \leq \mathrm{ord}(x, X)$. Por el Lema 1.1 (a),

$\mathrm{bd}_A(A \cap W) \subset \mathrm{bd}_X(W)$, luego, $|\mathrm{bd}_A(A \cap W)| \leq \mathrm{ord}(x, X)$. Por lo tanto, como $A \cap W$ es un abierto de A y $x \in A \cap W \subset U$, se sigue que, $\mathrm{ord}(x, A) \leq \mathrm{ord}(x, X)$.

Supongamos ahora que $x \in \mathrm{int}_X(A)$, por el análisis anterior, es sufiente mostrar que $\mathrm{ord}(x, X) \leq \mathrm{ord}(x, A)$. Para esto, sea U un subconjunto abierto de X que contiene a x. Notemos que $x \in \mathrm{int}_X(A) \cap U$, donde, en particular, $\mathrm{int}_X(A) \cap U$ es un subconjunto abierto de A, luego, existe un subconjunto abierto W de A tal que $x \in W \subset \mathrm{int}_X(A) \cap U$ y $|\mathrm{bd}_A(W)| \leq \mathrm{ord}(x, A)$. Como $x \in W \subset U$, si demostramos que $|\mathrm{bd}_X(W)| = |\mathrm{bd}_A(W)|$ habremos terminado. Para esto, notemos que, como $W \subset \mathrm{int}_X(A) \subset A$, entonces W es abierto en $\mathrm{int}_X(A)$ y por ende, en X. Además, como X es regular y $x \in \mathrm{int}_X(A)$, podemos suponer que $\mathrm{cl}_X(W) \subset \mathrm{int}_X(A)$, luego, por el Lema 1.1 (b), se obtiene lo requerido. □

Proposición 1.9. *Si X, Y son continuos, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ y $h\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces* $\mathrm{ord}(x, X) = n$ *si y solo si* $\mathrm{ord}(h(x), Y) = n$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{ord}(x, X) = n$. Sea V un subconjunto abierto de Y tal que $h(x) \in V$, entonces, $x \in h^{-1}(V)$, con $h^{-1}(V)$ un subconjunto abierto de X. Como $\mathrm{ord}(x, X) = n$, existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U \subset h^{-1}(V)$ y $|\mathrm{bd}_X(U)| = n$. Esto implica que, $h(x) \in h(U) \subset V$ y $|\mathrm{bd}_Y(h(U))| = n$. Como $h(U)$ es un subconjunto abierto Y, tenemos que $\mathrm{ord}(h(x), Y) = n$. De manera similar, se puede demostrar que si $\mathrm{ord}(h(x), Y) = n$, entonces $\mathrm{ord}(x, X) = n$. Esto termina la prueba de la proposición. □

Definición 1.10. *Sea X un continuo. Un punto x en X es un punto* ***extremo, ordinario*** *o de* ***ramificación*** *de X si,* $\mathrm{ord}(x, X) = 1$, $\mathrm{ord}(x, X) = 2$ *o* $\mathrm{ord}(x, X) > 2$, *respectivamente.*

Ahora definimos los siguientes conjuntos para un continuo X:

(a) $O(X) = \{x \in X : x \text{ es un punto ordinario }\}$;
(b) $R(X) = \{x \in X : x \text{ es un punto de ramificación }\}$;
(c) $E(X) = \{x \in X : x \text{ es un punto extremo }\}$.

1.3. Conexidad local

En esta sección presentamos uno de los conceptos fundamentales en topología y de este trabajo; se trata de los espacios localmente conexos, dichos espacios, son aquellos que se comportan localmente como los espacios conexos. Los espacios localmente conexos tienen una importancia vital en el desarrollo de este trabajo, es por eso que también mostramos algunas de sus caracterizaciones

Definición 1.11. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Se dice que V es una* ***vecindad*** *de x en X, si V es un subconjunto de X para el cual existe un conjunto abierto U de X tal que $x \in U \subset V$.*

Definición 1.12. *Un espacio topológico X es* ***localmente conexo en un punto*** *$x \in X$ si para cada vecindad V de x en X, existe U un conjunto abierto y conexo de X tal que $x \in U \subset V$. Cuando X es* ***localmente conexo*** *en cada uno de sus puntos, decimos que es localmente conexo.*

Observación 1.13. *A veces puede ser conveniente utilizar la equivalencia de que existe una base de vecindades en cada punto de X que consiste de conjuntos abiertos conexos, en lugar de la Definición 1.12.*

Una propiedad equivalente a la de ser localmente conexo, es la siguiente.

Teorema 1.14. *Un espacio topológico X es localmente conexo si y solo si las componentes de cada subconjunto abierto de X son abiertas en X.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean U un abierto de X y C una componente de U. Sea $x \in C \subset U$. Como X es localmente conexo, existe V un abierto y conexo en X tal que $x \in V \subset U$. Luego, por la maximalidad de C, $x \in V \subset C$. Por lo tanto, C es abierto en X.

Ahora, supongamos que las componentes de cada subconjunto abierto de X son abiertas en X. Dados $x \in X$ y U un abierto de X que contiene a x. Sea C la componente de U que contiene a x. Luego, C es abierto y conexo en X tal que $x \in C \subset U$. Por lo tanto, X es localmente conexo. □

Observación 1.15. *Cuando hablemos de un* ***continuo localmente conexo****, nos referiremos a un continuo que además es localmente conexo.*

Teorema 1.16. *Sea X un continuo localmente conexo. Si Y es un subcontinuo de X y U es cualquier subconjunto abierto de X tal que $Y \subset U$, entonces existe un subcontinuo Z de X tal que $Y \subset \operatorname{int}_X(Z) \subset Z \subset U$.*

Demostración. Como X es un continuo localmente conexo y $Y \subset U$ es un subcontinuo de X, con U un abierto de X, entonces para cada $y \in Y$ existe un conjunto abierto y conexo C_y de X tal que $y \in C_y \subset \operatorname{cl}_X(C_y) \subset U$, con $\operatorname{cl}_X(C_y)$ conexo ya que C_y lo es. Como Y es compacto y $Y \subset \bigcup\{C_y \colon y \in Y\}$, existe I un subconjunto finito de Y tal que $Y \subset \bigcup\{C_y \colon y \in I\}$. Sean $\mathcal{A} = \{\operatorname{cl}_X(C_y) : y \in I\}$ y $Z = \bigcup \mathcal{A}$, entonces Z es un conjunto cerrado de X y como X es compacto, entonces Z es compacto, además $Z \subset U$. Notemos que $Y \subset Z$, Y es conexo y para cada $\operatorname{cl}_X(C_y) \in \mathcal{A}$, $\operatorname{cl}_X(C_y) \cap Y \neq \emptyset$, entonces por [21, Teorema 2], Z es conexo. Así, como $Z \subset X$ es compacto y conexo, entonces Z es un subcontinuo de X. Además, como $\bigcup\{C_y \colon y \in I\} \subset Z$, entonces $Y \subset \bigcup\{C_y \colon y \in I\} \subset \operatorname{int}_X(Z)$, de donde, $Y \subset \operatorname{int}_X(Z) \subset Z \subset U$. Concluyendo lo requerido. □

Corolario 1.17. *Si X es un continuo localmente conexo y Y_1, Y_2 son subcontinuos de X ajenos, entonces existen subcontinuos Z_1 y Z_2 de X ajenos tales que, $Y_1 \subset \operatorname{int}_X(Z_1)$ y $Y_2 \subset \operatorname{int}_X(Z_2)$.*

Demostración. Como Y_1 y Y_2 son dos subcontinuos de X ajenos, entonces, en particular, Y_1 y Y_2 son subconjuntos cerrados de X. Luego, como X es un espacio métrico y por lo tanto, un espacio normal, existen, U_1, U_2 subconjuntos abiertos de X ajenos, tales que $Y_1 \subset U_1$ y $Y_2 \subset U_2$. Así, por el Teorema 1.16, existen subcontinuos Z_1 y Z_2 de X, tales que, $Y_1 \subset \operatorname{int}_X(Z_1) \subset Z_1 \subset U_1$ y $Y_2 \subset \operatorname{int}_X(Z_2) \subset Z_2 \subset U_2$, de donde $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$. □

Definición 1.18. *Un* ***arco*** *es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado* $[0,1]$ *con la topología euclideana. Sea* $h\colon [0,1] \to \alpha$ *un homeomorfismo, decimos que* $h(0)$ *y* $h(1)$ *son los puntos extremos del arco* α*. El arco va de* $h(0)$ *a* $h(1)$ *cuando* $h(0)$ *y* $h(1)$ *son sus puntos extremos. Dado* $n \in \mathbb{N}$*, si* $\mathbb{R}^n$ *es el espacio euclideano* n*-dimensional, para cada punto* $x = (x_i)_{i=1}^n$ *en* $\mathbb{R}^n$*, denotamos por* $\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \right)^{1/2}$*. Una* n***-celda*** *es cualquier espacio homeomorfo a la bola cerrada* n*-dimensional* $\mathbb{B}_n$ *en* $\mathbb{R}^n$*, donde* $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \| x \| \leq 1\}$*. Un* ***cubo de Hilbert*** $\mathcal{Q}$*, es cualquier espacio homeomorfo al producto cartesiano infinito numerable de* $I = [0,1]$*, es decir, a* $\prod_{i=1}^{\infty} I_i$*, con la topología producto.*

Como los conceptos de metrizable, compacto y conexo son invariantes topológicos, se sigue que un arco, una n-celda y un cubo de Hilbert son continuos.

Definición 1.19. *Un continuo* X *se dice que es arco conexo, si para cualesquiera dos puntos* $x, y \in X$ *tales que* $x \neq y$*, existe un arco* α *en* X *con extremos* x *y* y*.*

Teorema 1.20. [29, Proposición 8.23] *Todo continuo localmente conexo es arco conexo.*

Teorema 1.21. [29, Teorema 8.26] *Sea* X *un continuo localmente conexo, entonces cualquier subconjunto abierto y conexo de* X *es arco conexo.*

Definición 1.22. *Sea* X *un continuo. Se dice que* X *es* ***conexo en pequeño en un punto*** $x \in X$ *si para cada vecindad* V *de* x *existe una vecindad conexa* W *de* x *tal que* $x \in \operatorname{int}_X(W) \subset W \subset V$*. Además,* X *es* ***conexo en pequeño*** *cuando* X *es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.*

Observación 1.23. *Si* X *es un espacio localmente conexo en un punto* $x \in X$*, entonces también es conexo en pequeño en el punto* x*. Sin embargo, el recíproco no es cierto, incluso para continuos, véase la Figura 1.1.*

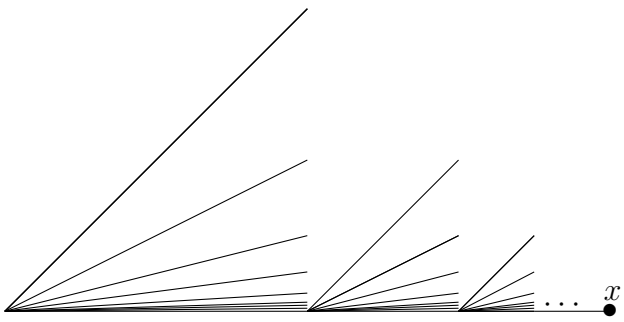

Figura 1.1: Continuo conexo en pequeño en x pero no localmente conexo en x.

No obstante, si el espacio es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos, sí podemos asegurar que el espacio es localmente conexo y viceversa. Formalmente tenemos lo siguiente.

Teorema 1.24. *Un espacio métrico X es localmente conexo si y solo si X es conexo en pequeño.*

Demostración. Sea X un espacio métrico localmente conexo. Es claro por definición que X es conexo en pequeño en cada punto $x \in X$. Recíprocamente, supongamos que X es conexo en pequeño. Por el Teorema 1.14, basta demostrar que cada componente de cualquier abierto de X es un abierto de X. Sean U un abierto de X y C una componente de U. Sea $x \in C$. Como $x \in U$, existe una vecindad conexa V de x tal que $x \in \operatorname{int}_X(V) \subset V \subset U$, luego $x \in \operatorname{int}_X(V) \subset C$, es decir C es abierto en X. □

1.4. Variedades

Es momento de hablar de otro concepto topológico interesante que nos permitirá tratar a ciertos espacios topológicos de manera local como n-celdas; hablamos del concepto de variedad (topológica). En realidad, la definición que aquí presentamos es la de variedad con frontera, pero por razones de simplicidad en el lenguaje, utilizamos el concepto de variedad. De hecho, las definiciones comunmente usadas para dicho concepto son más sofisticadas, pero para nuestros propositos, bastará con la Definición 1.25.

Comenzamos con presentar el concepto de n-variedad, interior como variedad y frontera como variedad. Así, como algunos resultados de interés que serán de ayuda para demostraciones posteriores.

Definición 1.25. *Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que X es una n-**variedad** si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad en X homeomorfa a una n-celda.*

Denotaremos por $Int_V X$ y ∂X, el **interior como variedad** y la **frontera como variedad** de X, respectivamente. Los conjuntos están dados por

$$Int_V X = \{x \in X : x \text{ tiene una vecindad en } X \text{ homeomorfa a } \mathbb{R}^n\} \text{ y}$$
$$\partial X = X - Int_V X.$$

Proposición 1.26. *Si X y Y son n-variedades, y $h\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $h(Int_V X) = Int_V Y$. En consecuencia, $h(\partial X) = \partial Y$.*

Demostración. Sea $y \in h(Int_V X)$, entonces existe $x \in Int_V X$ tal que $y = h(x)$. Luego, existe una vecindad V de x en X que es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Como V es homeomorfa a $h(V)$, entonces $h(V)$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Así, como $y \in h(V) \subset Y$, tenemos que $h(V)$ es una vecindad de y en Y que es homeomorfa $\mathbb{R}^n$, es decir, $y \in Int_V Y$, de donde $h(Int_V X) \subset Int_V Y$.

Recíprocamente, utilizando que $h^{-1}\colon Y \to X$ es un homeomorfismo, se tiene que $h^{-1}(Int_V Y) \subset Int_V X$. Por lo tanto, $Int_V Y = h(h^{-1}(Int_V Y)) \subset h(Int_V X)$.

Para la segunda parte, notemos que h es biyectiva, luego $h(X - Int_V X) = h(X) - h(Int_V X) = Y - h(Int_V X)$. Así, utilizando lo demostrado en la primera parte, tenemos que $h(\partial X) = Y - Int_V Y$, es decir $h(\partial X) = \partial Y$. □

Si $p \in X$ y $\epsilon > 0$, denotaremos por $B_d(\epsilon, p)$, la bola abierta con centro en p y radio ϵ.

Proposición 1.27. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si x tiene una vecindad W en X homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, entonces X tiene una base de vecindades de x homeomorfas a $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $h\colon W \to \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo y sea Z una vecindad de x en X. Como $x \in \operatorname{int}_X(W) \cap \operatorname{int}_X(Z)$ y $A = \operatorname{int}_X(W) \cap \operatorname{int}_X(Z) \subset W$, entonces A es una vecindad de x en W. Por lo que, $h(\operatorname{int}_X(W) \cap \operatorname{int}_X(Z))$ es una vecindad de $h(x)$ en $\mathbb{R}^n$. Más aún, $C = h(\operatorname{int}_X(W) \cap \operatorname{int}_X(Z))$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, así, como $h(x) \in C$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B = B_{\mathbb{R}^n}(\epsilon, h(x)) \subset C \subset \mathbb{R}^n$. Luego, como B es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y $x \in h^{-1}(B) \subset A \subset Z$, con $h^{-1}(B)$ un abierto de W contenido en A un abierto de X, tenemos que $h^{-1}(B)$ es un abierto de X y homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, tal que $x \in h^{-1}(B) \subset Z$. Esto termina la prueba. □

Proposición 1.28. *Si X es un espacio topológico, $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una vecindad U de x en X que es una n-variedad tal que $x \in \partial U$ si y solo si para vecindad V de x en X que es también una n-variedad, resulta que $x \in \partial V$.*

Demostración. Hacemos la primera implicación por contrarrecíproca. Supongamos que existe una vecindad V de x en X que es una n-variedad tal que $x \notin \partial V$, entonces $x \in Int_V V$. Luego, existe una vecindad W de x en V tal que W es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Como $x \in \operatorname{int}_V(W) \cap \operatorname{int}_X(V)$ y $A = \operatorname{int}_V(W) \cap \operatorname{int}_X(V)$ es un abierto de V contenido en $\operatorname{int}_X(V)$, se sigue que A es un abierto de X contenido en W. Esto implica que W es una vecindad de x en X, homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Por la Proposición 1.27, para cada vecindad U de x en X que es también una n-variedad, existe una vecindad Z de x en X, homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in Z \subset U$. Como Z es también una vecindad de x en U, tenemos que $x \in Int_V U$, de donde, $x \notin \partial U$. Esto prueba la primera implicación.

El recíproco es inmediato. Así termina la prueba. □

Teorema 1.29. [11, Teorema 4.12] *Sean X un espacio métrico, U un abierto de X y V una n-celda, con $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in U \cap \operatorname{int}_X(V)$, entonces existe una n-celda J de X tal que $x \in \operatorname{int}_X(J) \subset J \subset U \cap \operatorname{int}_X(V)$.*

Ahora presentamos el Teorema de la invariancia del dominio de Brouwer, el cual nos será útil para demostrar el Teorema 1.31.

Teorema 1.30. [30, Teorema 19.2] *Si X y Y son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y $h\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $h(\operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(X)) = \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(Y)$. En particular, si X es un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces Y es un abierto de $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 1.31. *Si F es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ que también es una n-variedad, entonces $Int_V F = \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(F)$ y $\partial F = \operatorname{bd}_{\mathbb{R}^n}(F)$.*

Demostración. Sea $x \in Int_V F$. Luego, existe una vecindad V de x contenida en F tal que V es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Sea $h\colon \mathbb{R}^n \to V$. Por el Teorema1.30,

$h(\mathbb{R}^n) = V$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que, $x \in V \subset F$. Luego, $x \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(F)$. Esto muestra que $Int_V F \subset \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(F)$.

Recíprocamente, sea $x \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(F)$. Luego, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{\mathbb{R}^n}(\epsilon, x) \subset F$. Como $B_{\mathbb{R}^n}(\epsilon, x)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y además, es una vecindad de x en $\mathbb{R}^n$ y por ende, una vecindad de x en F, se sigue que $x \in Int_V F$. Esto muestra que $\operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(F) \subset Int_V F$. Por lo tanto, $Int_V F = \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(F)$.

La otra igualdad se sigue de la primera igualdad y de que F es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, así, $\operatorname{bd}_{\mathbb{R}^n}(F) = F - \operatorname{int}_{\mathbb{R}^n}(F) = F - Int_V F = \partial F$, es decir, $\partial F = \operatorname{bd}_{\mathbb{R}^n}(F)$. □

Proposición 1.32. *Si X es un espacio métrico que es una n-variedad y U es un subconjunto abierto de X, entonces U es una n-variedad.*

Demostración. Sea $x \in U \subset X$. Como $x \in X$ y X es una n-variedad, existe una vecindad W de x en X que es una n-celda. Entonces $x \in U \cap \operatorname{int}_X(W)$, luego, por el Teorema 1.29, existe una n-celda J de X tal que $x \in \operatorname{int}_X(J) \subset J \subset U \cap \operatorname{int}_X(W) \subset U \subset X$. Como $\operatorname{int}_X(J)$ es un abierto de X contenido en U, entonces $\operatorname{int}_X(J)$ es un abierto de U. Luego J es una vecindad de x en U que es una n-celda. Así, como x fue elegida arbitrariamente en U, resulta que U es una n-variedad. □

Proposición 1.33. *Si X es un espacio métrico que es una n-variedad y U es subconjunto abierto de X, entonces $\partial U = \partial X \cap U$.*

Demostración. Como U es subconjunto abierto de X, por la Proposición 1.32, U es una n-variedad, luego, podemos hablar de su frontera como variedad.

Sea $x \in \partial X \cap U$, entonces $x \in \partial X$ y $x \in U$. Observemos que X es una vecindad de x en X que es una variedad tal que $x \in \partial X$. Como U es una vecindad de x en X que es también una n-variedad, por la Proposición 1.28, tenemos que $x \in \partial U$.

Recíprocamente, sea $x \in \partial U$. Como U es una vecindad de x en X que es una n-variedad tal que $x \in \partial U$ y X es una vecindad de x en X que es también una n-variedad, por la Proposición 1.28, tenemos que $x \in \partial X \cap U$. Así, termina la prueba. □

Proposición 1.34. *Si M es una m-variedad y N es una n-variedad, entonces $M \times N$ es una $m+n$-variedad. Además, se cumple que $\partial(M \times N) = (M \times \partial N) \cup (\partial M \times N)$.*

Demostración. Sea $(m, n) \in M \times N$, entonces $m \in M$ y $n \in N$. Como M es una m-variedad y N es una n-variedad, existen U y V vecindades de x en M y N, respectivamente, tales que U es una m-celda y V una n-celda. Luego $U \times V$ es una vecindad de (m, n) en $M \times N$. Más aún, como U es homemorfo a I^m y V es homeomorfo a I^n, entonces $U \times V$ es homeomorfo a $I^m \times I^n = I^{m+n}$, es decir, $U \times V$ es una $m+n$-celda. Así, como (m, n) fue elegido arbitrariamente en $M \times N$, resulta que $M \times N$ es una $m+n$-variedad.

Ahora probemos que $\partial(M \times N) = (M \times \partial N) \cup (\partial M \times N)$. Sea $(m, n) \in \partial(M \times N)$, entonces existen W y Z vecindades de x en M y N, respectivamente, tales que W es una m-celda y Z una n-celda. Luego, existen $h_1 \colon I^m \to W$ y $h_2 \colon I^n \to Z$ homeomorfismos. Por la proposición 1.26, $\partial W = h_1(\partial I^m)$ y $\partial Z =$

$h_2(\partial I^n)$. Sea $h\colon I^m \times I^n \to W \times Z$ que está dada por $h(w,z) = (h_1(w), h_2(z))$. Observemos que h es un homeomorfismo. Luego, por la Proposición 1.26, $\partial(W \times Z) = h(\partial(I^m \times I^n))$. Como $\partial(I^m \times I^n) = (I^m \times \partial I^n) \cup (\partial I^m \times I^n)$, entonces

$$\begin{aligned} h(\partial(I^m \times I^n)) &= h((I^m \times \partial I^n) \cup (\partial I^m \times I^n)) \\ &= h((I^m \times \partial I^n)) \cup h((\partial I^m \times I^n)) \\ &= (h_1(I^m) \times h_2(\partial I^n)) \cup (h_1(\partial I^m) \times h_2(I^n)) \\ &= (W \times \partial Z) \cup (\partial W \times Z), \end{aligned}$$

de donde $\partial(W \times Z) = (W \times \partial Z) \cup (\partial W \times Z)$. Utilizando esta última igualdad, tenemos que, como $(m,n) \in \partial(M \times N)$ y $W \times Z$ es una vecindad de (m,n) en $M \times N$, por la Proposición 1.28, $(m,n) \in \partial(W \times Z)$. Así, $(m,n) \in W \times \partial Z$ o $(m,n) \in \partial W \times Z$, es decir, $n \in \partial Z$ o $m \in \partial W$. De nuevo, por la Proposición 1,28, $n \in \partial N$ o $m \in \partial M$. Así, $(m,n) \in (M \times \partial N) \cup (\partial M \times N)$ y por ende, $\partial(M \times N) \subset (M \times \partial N) \cup (\partial M \times N)$.

Recíprocamente, dado $(m,n) \in (M \times \partial N) \cup (\partial M \times \partial N)$, tenemos que $n \in \partial N$ o $m \in \partial M$, esto implica por la proposición 1.28 que, $n \in \partial Z$ o $m \in \partial W$, es decir, $(m,n) \in \partial(W \times Z)$. Nuevamente por la Proposición 1.28, $(m,n) \in \partial(M \times N)$. Así, $(M \times \partial N) \cup (\partial M \times N) \subset \partial(M \times N)$. Por lo tanto, $\partial(M \times N) = (M \times \partial N) \cup (\partial M \times N)$. $\square$

Capítulo 2

Propiedades de los continuos

En este capítulo presentamos algunos resultados relacionados con continuos. Introducimos el hiperespacio de nuestro estudio, $C_n(X)$, como también una métrica que hace de éste un espacio métrico. Presentamos las definiciones de continuos casi enrejados y enrejados, así como algunos resultados que los caracterizan. Se remite al lector a [4], [6], [7], [9], [20], [28] y [29] para la consulta de bibliografía de este capítulo.

2.1. Hiperespacios y métrica de Hausdorff

Recordemos la definición de un **continuo**, véase la Definición 1.6.

Definición 2.1. *Un **hiperespacio** de un continuo X es una clase de subconjuntos de X que cumple ciertas condiciones específicas.*

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, algunos de los hiperespacios de X son:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X \colon A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado de } X\}; \\ C(X) &= \{A \in 2^X \colon A \text{ es conexo}\}; \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X \colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}; \\ F_1(X) &= \{A \in C(X) \colon |A| = 1\}. \end{aligned}$$

Se acostumbra denotar a $C_1(X)$ como $C(X)$, conocido como el **hiperespacio de los subcontinuos** del continuo X. Por otra parte, $C_n(X)$ es conocido como el n-**ésimo hiperespacio** de X. Lo que nos interesa ahora, es dotar al hiperespacio 2^X de una métrica, pero antes, tenemos lo siguiente.

Sean X un continuo y $A, B \subset X$, la distancia entre A y B que denotamos como $d(A, B)$, está dada de la siguiente manera:

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Si $p \in X$, escribimos $d(p, A) = d(\{p\}, A)$. Mientras no se diga lo contrario, dado un continuo X, denotaremos por d la métrica de X. Además, si $p \in X$ y $\epsilon > 0$, denotamos por $B_d(\epsilon, p)$, la bola abierta con centro en p y radio ϵ.

Sean X un espacio métrico con métrica acotada d y $A \subset X$, con A no vacío. La ϵ-**nube** de A (o la **nube con centro en** A **y radio** $\epsilon > 0$), es

$$N_d(\epsilon, A) = \{x \in X\colon \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(x,a) < \epsilon\}.$$

Si $A, B \in 2^X$, la función $H_d\colon 2^X \times 2^X \to [0,\infty)$, para cada $A, B \in 2^X$ está dada por

$$H_d(A,B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0\colon A \subset N_d(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\epsilon, A)\},$$

y toma un papel muy importante a lo largo de este trabajo. Pero, antes de saber la razón, mostremos algunos resultados básicos que cumplen las ϵ-nube y que utilizaremos posteriormente.

Lema 2.2. *Si X es un continuo y $A, B \in 2^X$ son tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $N_d(\epsilon, A) \cap N_d(\epsilon, B) = \emptyset$.*

Demostración. Como A y B son compactos, entonces $d(A,B) > 0$. Sean $\epsilon = \frac{d(A,B)}{2} > 0$ y supongamos que $y \in N_d(\epsilon, A) \cap N_d(\epsilon, B)$, entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(a,y) < \epsilon$ y $d(b,y) < \epsilon$. Luego, $d(a,b) \leq d(a,y) + d(b,y) < 2\epsilon = d(A,B)$, es decir, $d(a,b) < d(A,B)$, lo que es una contradicción. □

Lema 2.3. [7, Lema 2.1] *Si X es un continuo, $A \in 2^X$ y U es un subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $A \subset N_d(\epsilon, A) \subset U$.*

Lema 2.4. [7, Lema 2.8] *Si X es un continuo, $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, entonces $H_d(A,B) < \epsilon$ si y solo si $A \subset N_d(\epsilon, B)$ y $B \subset N_d(\epsilon, A)$.*

Ahora sí, el siguiente resultado, nos dice que para cualquier espacio métrico X cuya métrica acotada es d, la función H_d, induce una métrica para 2^X.

Teorema 2.5. [20, Teorema 2.2] *Si X es un espacio métrico con métrica acotada d, entonces la función H_d es una métrica para 2^X.*

La métrica H_d se le conoce como la **métrica de Hausdorff inducida por** d o simplemente **métrica de Hausdorff**. De ahora en adelante, siempre que consideraremos a 2^X, lo haremos con esta métrica. También, al ser los demás hiperespacios, $F_1(X)$, $C(X)$ y $C_n(X)$ subconjuntos de 2^X, se les considera dotados con la restricción correspondiente de la métrica de Hausdorff H_d.

Si X es un continuo con métrica d, $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$, denotaremos la bola abierta de 2^X con centro en A y radio ϵ como:

$$B_{H_d}(\epsilon, A) = \{B \in 2^X\colon H_d(A,B) < \epsilon\}.$$

Definición 2.6. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, ..., U_n \subset X$. El **vietórico de** $U_1, U_2, ..., U_n$ **en** 2^X, está dado de la siguiente manera:*

$$\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle = \{A \in 2^X \ : \ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, ..., n\}\}.$$

Teorema 2.7. [28, Teorema 0.13] *Si X es un espacio métrico acotado, una base de abiertos para la topología inducida por la métrica de Hausdorff de 2^X viene dada por:*

$$\{\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle : U_i \text{ es un abierto de } X, \text{ para cada } i \in \{1, 2, ..., n\}, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}.$$

Sean X un continuo y $n, k \in \mathbb{N}$, el **vietórico de** $U_1, U_2, ..., U_k$ **en** $C_n(X)$, denotado por $\langle U_1, U_2, ..., U_k\rangle_{C_n(X)}$, es la intersección del vietórico $\langle U_1, U_2, ..., U_k\rangle$ y el hiperespacio $C_n(X)$, es decir,

$$\langle U_1, U_2, ..., U_k\rangle_{C_n(X)} = \langle U_1, U_2, ..., U_k\rangle \cap C_n(X).$$

Lema 2.8. *Si X es un continuo y $f : X \to F_1(X)$ está dada por $f(x) = \{x\}$, para cada $x \in X$, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap F_1(X) : U_i$ es un abierto de X, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, con $n \in \mathbb{N}\}$. Por el Teorema 2.7, $\mathcal{B}$ es una base de $F_1(X)$. Sean $x \in X$ y $f(x) = \{x\} \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap F_1(X)$. Consideremos $V = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, entonces V es un subconjunto abierto de X tal que $x \in V$. Dado $y \in V$, tenemos que $y \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Por lo que, $f(y) = \{y\} \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap F_1(X)$. Así, $f(V) \subset \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap F_1(X)$. Esto muestra que f es continua.

Ahora, sea U un subconjunto abierto de X. Veamos que $f(U) = \langle U\rangle \cap F_1(X)$. Sea $x \in U$, entonces $f(x) = \{x\} \in \langle U\rangle \cap F_1(X)$. Así, $f(U) \subset \langle U\rangle \cap F_1(X)$. Dado $\{y\} \in \langle U\rangle \cap F_1(X)$, tenemos que $y \in U$ y por ende, $f(y) = \{y\} \in f(U)$. Luego, $\langle U\rangle \cap F_1(X) \subset f(U)$. Por lo tanto, como f es una función biyectiva, continua y abierta, se sigue que f es un homeomorfismo. □

Lema 2.9. *Sean X un continuo y $B \in 2^X$. Si $f : 2^X \to 2^X$ está dada por $f(A) = A \cup B$, para cada $A \in 2^X$, entonces f es una función continua.*

Demostración. Sean $A \in 2^X$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ una colección finita de subconjuntos abiertos de X tal que $f(A) = A \cup B \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Sea J el conjunto más grande de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que para cada $i \in J$, $A \cap U_i \neq \emptyset$. Consideremos $\mathcal{U} = \{U_i : i \in J\}$. Como $A \cup B \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$, tenemos que $A \in \langle \mathcal{U}\rangle$. Observemos que $\langle \mathcal{U}\rangle$ es un abierto de 2^X. Así, si $f(\langle \mathcal{U}\rangle) \subset \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$, f será continua. Para esto, sea $A \in \langle \mathcal{U}\rangle$, entonces $A \subset \bigcup \mathcal{U} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Además, $A \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in J$. Si existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $j \notin J$, entonces $A \cap U_j = \emptyset$. Como $(A \cup B) \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces $B \cap U_j \neq \emptyset$. De esto último, concluimos que $f(A) = A \cup B \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$. Por lo tanto, f es continua. □

Lema 2.10. *Si X y Y son continuos y $\gamma : X \to Y$ es una función continua, entonces la función $\gamma^* : 2^X \to 2^Y$ dada por $\gamma^*(A) = \gamma(A)$ es continua. Más aún, $\gamma(C_n(X)) \subset C_n(Y)$.*

Demostración. Notemos primero que γ^* está bien definida, ya que si $A \in 2^X$, A es un compacto, luego, como γ es continua, $\gamma(A) = \gamma^*(A)$ es un compacto, así, $\gamma^*(A) \in 2^Y$. Ahora, para ver que γ es continua, observemos que $(\gamma^*)^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_k\rangle) = \langle \gamma^{-1}(U_1), \ldots, \gamma^{-1}(U_k)\rangle$. Así, como γ continua, cada $\gamma^{-1}(U_i)$ es un abierto de X. De modo que por el Teorema 2.7, γ^* es continua.

Ahora probemos que $\gamma(C_n(X)) \subset C_n(Y)$. Sea $A \in C_n(X) \subset 2^X$, entonces $\gamma(A) \in 2^Y$. Sean $C_1, \ldots, C_k$ las componentes de A, con $k \leq n$, como γ es continua, entonces $\gamma(C_i)$ es un conjunto conexo de Y, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Además, ya que $\gamma(A) = \bigcup_{i=1}^{k} \gamma(C_i)$ y cada $\gamma(C_i)$ está contenida en una y sola una componente de $\gamma(A)$, resulta que $\gamma(A)$ tiene a los más n componentes. Así, $\gamma(A) \in C_n(Y)$ y por ende, $\gamma(C_n(X)) \subset C_n(Y)$. □

Proposición 2.11. *Sean X, Y dos espacios métricos, $x_0 \in X$ y $f\colon X \to Y$ una función. Entonces, f es continua en x_0 si y solo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X que converge a x_0, existe una subsucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim f(x_{n_k}) = f(x_0)$.*

Demostración. Sean d y d' las metricas de X y Y, respectivamente. Supongamos que f es continua en x_0 y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de X que converge a x_0. Como f es continua en x_0, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_d(\delta, x_0)) \subset B_{d'}(\epsilon, f(x_0))$. Además, como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge x_0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $x_n \in B_d(\delta, x_0)$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $f(x_n) \in B_{d'}(\epsilon, f(x_0))$. Por lo tanto, $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

Ahora supongamos que f no es continua en x_0. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, $f(B_d(\delta, x_0)) \not\subset B_{d'}(\epsilon, f(x_0))$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B_d\left(\frac{1}{n}, x_0\right)$ tal que $f(x_n) \notin B_{d'}(\epsilon, f(x_0))$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a x_0, por hipótesis, existe una sucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim f(x_{n_k}) = f(x_0)$, lo que es una contradicción, porque para cada $k \in \mathbb{N}$, x_{n_k} es un elemento de $B_d\left(\frac{1}{n}, x_0\right)$ tal que $f(x_{n_k}) \notin B_{d'}(\epsilon, f(x_0))$. Por lo tanto, f es continua en x_0. □

Proposición 2.12. *Sean X un espacio métrico compacto, $x \in X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de X. Entonces, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x si y solo si cada subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x.*

Demostración. Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x en X. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $x_n \in B_d(\epsilon, x)$. Sea $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Considerendo $K \geq N$, tenemos que $n_k \geq K \geq N$, así, $x_{n_k} \in B_d(\epsilon, x)$. Por lo tanto, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a x.

Ahora supongamos que cada subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x. Veamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x. Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a x. Entonces, existe $\epsilon > 0$ y un conjunto infinito $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ tal que $x_n \notin B_d(\epsilon, x)$, para cada $x_n \in A$. Como X es compacto y A es un conjunto infinito, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de elementos de A que converge a y. Además, $X - B_d(\epsilon, x)$ es un conjunto cerrado, entonces $y \in X - B_d(\epsilon, x)$. Observemos que $y \neq x$. Así, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a un punto distinto de x, contradicción. Por lo tanto, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x y termina la prueba. □

Teorema 2.13. *Si X y Y son continuos y $f\colon X \to Y$ una función biyectiva y continua, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Como f es biyectiva, entonces existe su inversa f^{-1}. Para probar que f es un homeomorfismo, es suficiente mostrar que f^{-1} es continua. Sea U un cerrado en X, como X es compacto, entonces U es compacto. Además, como f es continua, entonces, $f(U)$ es compacto y por lo tanto, cerrado en Y. Así, f^{-1} es continua y por ende, f un homeomorfismo. □

Denotamos por $(2^X)^n$ el producto cartesiano de n veces el hiperespacio 2^X.

Teorema 2.14. [4, Teorema 6.9] *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, la función $\psi\colon \left(2^X\right)^n \to 2^X$ que está definida por $(A_1, A_2, ..., A_n) \overset{\psi}{\mapsto} \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es continua.*

Teorema 2.15. *Sean X un continuo y $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ una familia de subcontinuos ajenos dos a dos de X. La función $\varphi\colon \prod_{i=1}^{n} C(A_i) \to \langle A_1, ..., A_n\rangle_{C_n(X)}$ definida por $(B_1, B_2, ..., B_n) \overset{\varphi}{\mapsto} \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Observemos primero que $\varphi = \psi \restriction_{C(A_1)\times C(A_2)\times\cdots\times C(A_n)}$, entonces por el Teorema 2.14, tenemos que φ es continua. Así, por el Teorema 2.13 es suficiente mostrar que φ es biyectiva.

Sean $B_1, C_1 \in C(A_1)$, $B_2, C_2 \in C(A_2)$, ..., $B_n, C_n \in C(A_n)$ tales que $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Notemos que $B_i, C_i \subset A_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, por lo que, $B_i \cap C_j \subset B_i \cap A_j \subset A_i \cap A_j = \emptyset$, para cada $i \neq j$, con $j \in \{1, ..., n\}$, donde la igualdad es debido a que los elementos de $\mathcal{A}$ son disjuntos dos a dos. Sea $x \in B_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, entonces, existe $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in C_k$. Luego, por lo escrito anteriormente, $k = i$, de donde $x \in C_i$. Como x es arbitrario en B_i, entonces $B_i \subset C_i$. Análogamente, obtenemos que $C_i \subset B_i$. Por lo tanto, $B_i = C_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Así, φ es inyectiva.

Para mostrar que φ es suprayectiva, sea $G \in \langle A_1, A_2, ..., A_n\rangle_{C_n(X)}$, entonces, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se cumple que $G \cap A_i \neq \emptyset$, además que $G \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y G tiene a lo más n componentes. Luego, observemos que como $\mathcal{A}$ es una colección de conjuntos disjuntos dos a dos en X, se sigue que, $G_1 = G \cap A_1$, ..., $G_n = G \cap A_n$ son las n componentes distintas de G. Por otro lado, como G es cerrado en X pues $G \in \langle A_1, ..., A_n\rangle$ y además, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $G_i \subset A_i$, entonces G_i es cerrada en A_i, es decir, $G_i \in C(A_i)$. Así, como $G_1, ..., G_n$ son las n componentes distintas de G, entonces $\varphi(G_1, ..., G_n) = \bigcup_{i=1}^{n} G_i = G$. Así, concluimos que φ es suprayectiva. Por lo tanto, como φ es una función biyectiva, continua, con dominio compacto y codominio de Hausdorff, entonces φ es un homeomorfismo. □

El siguiente resultado será utilizado en el Teorema 4.22.

Teorema 2.16. [9, Teorema 9.4, página 83] *Sean X un espacio topológico y $\{A_\alpha\colon \alpha \in \Lambda\}$ una cubierta de X tal que :*

(a) *para cada $\alpha \in \Lambda$, tenemos que A_α es un abierto de X o;*

(b) *para cada $\alpha \in \Lambda$, tenemos que A_α es un cerrado de X, y tal cubierta forma una familia de vecindades finita.*

Para cada $(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda$, sea $f_\alpha \colon A_\alpha \to Y$ continua tal que $f_\alpha \restriction_{A_\alpha \cap A_\beta} = f_\beta \restriction_{A_\alpha \cap A_\beta}$. Entonces existe una única función continua $f \colon X \to Y$ extensión de f_α, es decir, $f \restriction_{A_\alpha} = f_\alpha$.

2.2. Dos modelos de Hiperespacios

Cambiando un poco de tema, en esta brevísima sección, construímos dos modelos geométricos para $C(X)$; uno cuando X es un arco y el otro cuando X es una curva cerrada simple. Mostramos que $C(X)$ es una 2-celda, véase la Figura 2.1 y la Figura 2.3, y determinamos cuáles subcontinuos de X forman la frontera como variedad de $C(X)$.

Dado un continuo X, consideremos el siguiente hiperespacio de X:

$$C(s, X) = \{A \in C(X) : s \in A\}.$$

Proposición 2.17. *Si X es un arco con $E(X) = \{p, q\}$, entonces $C(X)$ es una 2-celda y $\partial C(X) = C(p, X) \cup C(q, X) \cup F_1(X)$.*

Demostración. Para demostrar esto, veamos primero el caso cuando $X = [0, 1]$. Observemos que los elementos de $C([0, 1])$ son de dos formas: singletones, esto es, de la forma $\{x\} = [x, x]$, donde $x \in [0, 1]$ o arcos de la forma $[a, b]$, donde $0 \leq a < b \leq 1$ y no hay más. Consideremos las métricas d en $[0, 1]$ inducida por el valor absoluto y d_2 en $T = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ inducida por la métrica euclideana en $\mathbb{R}^2$. Notemos que T es el triángulo relleno en $\mathbb{R}^2$ acotado por el eje Y, la diagonal y la recta que está formada por los puntos cuya segunda coordenada es 1. Sea $h \colon C([0, 1]) \to T$ que está dada por $h([a, b]) = (a, b)$.

Afirmación. h es un homeomorfismo.

En efecto, sean $[a, b], [c, d] \in C([0, 1])$ tales que $h([a, b]) = h([c, d])$. Entonces $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$. Así, $[a, b] = [c, d]$. Por lo tanto, h es inyectiva.

Ahora, para cada $(a, b) \in T$, tenemos que $[a, b] \in C[0, 1])$ es tal que $h([a, b]) = (a, b)$, lo que prueba que h es sobreyectiva.

Para ver que h es continua, sea $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de $C([0, 1])$ que converge a $[a, b]$ en $C([0, 1])$. Probemos que $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a (a, b) en T. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i \geq N$, $H_d([a_i, b_i], [a, b]) < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. Por el Lema 2.4, $[a_i, b_i] \subset N_d\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, [a, b]\right)$ y $[a, b] \subset N_d\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, [a_i, b_i]\right)$. Como $N_d\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, [a, b]\right) = (a - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, b + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}})$ y $N_d\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, [a_i, b_i]\right) = (a_i - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, b_i + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}})$, se sigue que $[a_i, b_i] \subset (a - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, b + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}})$ y $[a, b] \subset (a_i - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, b_i + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}})$. Esto implica que, $\mid a_i - a \mid < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ y $\mid b_i - b \mid < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. Luego, $(a_i - a)^2 + (b_i - b)^2 < \epsilon^2$,

esto es, $\sqrt{(a_i - a)^2 + (b_i - b)^2} < \epsilon$. Así, para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i \geq N$, $d_2((a_i, b_i), (a, b)) < \epsilon$. Por lo tanto, $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a (a, b) en T y h es continua. Con todo esto, como h es una función biyectiva, continua, con dominio compacto y codominio de Hausdorff, tenemos que h es un homeomorfismo. Como el triángulo T es una 2-celda, concluimos que $C([0,1])$ es una 2-celda, véase la Figura 2.1.

Por otra parte, como $\partial T = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup \{(a,a) \colon a \in [0,1]\}$, por la Proposición 1.26, $h(\partial C([0,1])) = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup \{(a,a) \colon a \in [0,1]\}$, es decir, $\partial C([0,1]) = h^{-1}(\{0\} \times [0,1]) \cup h^{-1}([0,1] \times 1) \cup h^{-1}(\{(a,a) \colon a \in [0,1]\}) = C(0,[0,1]) \cup C(1,[0,1]) \cup F_1([0,1])$. Así, $\partial C([0,1]) = C(0,[0,1]) \cup C(1,[0,1]) \cup F_1([0,1])$.

Utilizando lo que hemos demostrado para $C([0,1])$, demostremos el caso general para $C(X)$ cuando X es un arco cuyos puntos extremos son p y q. Como X es un arco, por [20, Teorema 1.9], $C([0,1])$ es homeomorfo a $C(X)$, así, $C(X)$ es una 2-celda. Sean $h \colon X \to [0,1]$ un homeomorfismo y $h^* \colon C(X) \to C([0,1])$ que está dada por $h^*(A) = h(A)$. Por [20, Teorema 1.9], h^* es un homeomorfismo. Luego, como cualquier homeomorfismo entre arcos debe mandar los puntos extremos de uno en los puntos del otro, tenemos que $\{h(p), h(q)\} = \{0, 1\}$. Así, por definición de h^*, y la Proposición 1.26, tenemos que $\partial C(X) = (h^*)^{-1}(C(0,[0,1])) \cup (h^*)^{-1}(C(1,[0,1])) \cup (h^*)^{-1}(F_1([0,1])) = C(p,X) \cup C(q,X)) \cup F_1(X)$. Por lo tanto, $\partial C(X) = C(p,X) \cup C(q,X)) \cup F_1(X)$, concluyendo lo requerido. $\square$

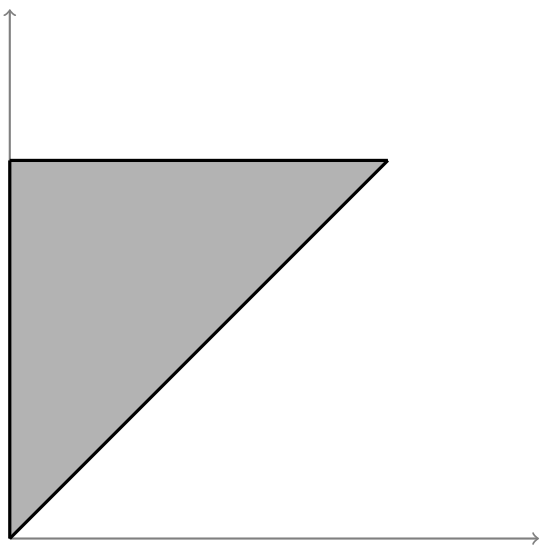

Figura 2.1: Modelo geométrico de $C([0,1])$.

Ahora veamos cómo quedan representados algunos elementos particulares de $C([0,1])$ en T, véase la Figura 2.2. Por ejemplo, $h^*([0,1]) = (0,1)$, por lo que el intervalo $[0,1]$ queda representado por el vértice $(0,1)$ de T. Asu vez, como los conjuntos de la forma $\{p\}$, con $p \in [0,1]$, se pueden escribir como $\{p\} = [p,p]$, y $h^*(p) = (p,p)$, si consideramos todos los conjuntos de esta forma, obtenemos que dichos elementos están representados por la diagonal del

triángulo T. Otro de los conjuntos que podemos considerar, son aquellos de la forma $[0, b]$ y $[b, 1]$, donde b varía en el intervalo $[0, 1]$, a estos subcontinuos les corresponde los puntos de la forma $(0, b)$ y $(b, 1)$ en T, respectivamente. De modo que si consideramos todos los conjuntos de esta forma, obtenemos el lado del triángulo T que tiene en común con el eje Y y la recta que esta formada por los puntos cuya segunda coordenada es igual a 1 en T.

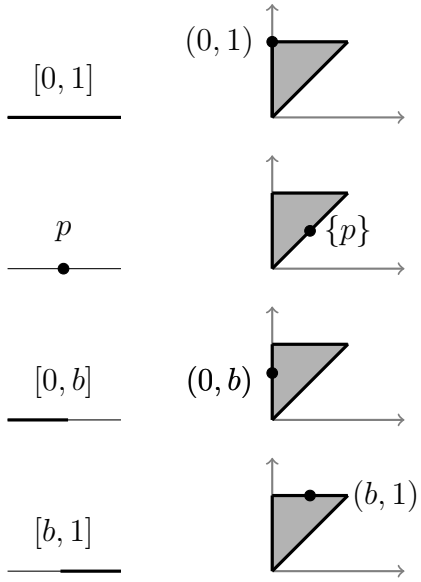

Figura 2.2: Representación de los elementos de $C([0, 1])$ sobre T.

Proposición 2.18. *Si X es una curva cerrada simple, entonces $C(X)$ es una 2-celda y $\partial C(X) = F_1(X)$.*

Demostración. Consideremos primero el caso cuando X es la circunferencia unitaria S^1 en $\mathbb{R}^2$, centrada en el origen. Sea $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ el disco unitario en $\mathbb{R}^2$. Observemos que los elementos de $C(S^1)$ son de tres formas: singletones de la forma $\{(x, y)\}$, con $(x, y) \in S^1$, subarcos A de S^1 y S^1 mismo. Además, cada subarco A de S^1 está completamente determinado por su punto medio $m(A)$ y su longitud $l(A)$. Sea $h \colon C(S^1) \to \mathbb{D}$ que está dada por

$$h(A) = \begin{cases} \left(1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right) m(A), & \text{si } A \in C\left(S^1\right) - \{S^1\}, \\ (0, 0), & \text{si } A = S^1. \end{cases}$$

Afirmación. h es un homeomorfismo.

En efecto, sean $A, B \in C(S^1)$ tales que $A \neq B$. Si A o B es S^1, es claro que $h(A) \neq h(B)$. Así, supongamos que $A, B \in C(S^1) - \{S^1\}$. Entonces, tenemos los siguientes casos:

(i) Si $m(A) \neq m(B)$ y $l(A) = l(B)$, sean $m(A) = (a_1, a_2)$ y $m(B) = (b_1, b_2)$. Entonces $a_1 \neq b_1$ o $a_2 \neq b_2$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_1 \neq b_1$ Luego, $\left(1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right) a_1 \neq \left(1 - \frac{l(B)}{2\pi}\right) b_1$, así, $h(A) \neq h(B)$.

(ii) Si $m(A) \neq m(B)$ y $l(A) \neq l(B)$, como $h(A)$ y $h(B)$ están en la recta que pasa por $(0,0)$ y los puntos $m(A)$ y $m(B)$, respectivamente, y además, estos dos últimos puntos son distintos, entonces $h(A) \neq h(B)$.

(iii) Si $m(A) = m(B)$ y $l(A) \neq l(B)$, entonces $\left(1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right) \neq \left(1 - \frac{l(B)}{2\pi}\right)$, por lo que, $\left(1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right) m(A) \neq \left(1 - \frac{l(B)}{2\pi}\right) m(B)$, es decir, $h(A) \neq h(B)$. Así, h es inyectiva.

Para demostrar que h es sobreyectiva, debemos de probar que, para cada $(x,y) \in \mathbb{D}$, existe $A \in C(S^1)$ tal que $\left(1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right) m(A) = (x,y)$. O sea, $\left|1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right| \|m(A)\| = \|(x,y)\|$, que es lo mismo que $1 - \frac{l(A)}{2\pi} = \|(x,y)\|$. De aquí, tenemos los siguientes casos:

(i) Si $\|(x,y)\| = 0$, entonces $1 - \frac{l(A)}{2\pi} = 0$, lo que solo ocurre si $l(A) = 2\pi$. Considerando $A = S^1$, se sigue que $h(A) = (x,y)$.

(ii) Si $\|(x,y)\| = 1$, entonces $1 - \frac{l(A)}{2\pi} = 1$ y $(x,y) \in S^1$, por lo que, $l(A) = 0$. Así, considerando $A = \{(x,y)\} \in C(S^1)$, tenemos que $h(A) = (x,y)$.

(iii) Si $0 < \|(x,y)\| < 1$, entonces $0 < 1 - \frac{l(A)}{2\pi} < 1$, esto es, $0 < l(A) < 2\pi$. De esto, A es un arco de S^1. Considerando r el rayo con punto inicial $(0,0)$ tal que $(x,y) \in r$, podemos elegir $(z,w) \in r \cap S^1$ de tal manera que $0 < l(A) < 2\pi$ y $m(A) = (z,w)$. Por lo tanto, $h(A) = (x,y)$. Se sigue que h es sobreyectiva y por ende, biyectiva.

Para ver que h es continua, sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $C(S^1) - \{S^1\}$ que converge a A en $C(S^1) - \{S^1\}$. Observemos que si x_n y y_n son los puntos extremos de A_n y x y y son los puntos extremos de A, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Debido a esto, $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n) = m(A)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} l(A_n) = l(A)$. Es decir, l y m son funciones continuas en $C(S^1) - \{S^1\}$. Así, h es continua en $C(S^1) - \{S^1\}$.

Falta ver que h es continua en S^1. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de arcos de S^1 que converge a $A = S^1$. Por el comportamiento de la función h, tenemos que entre más grande sea el arco A_n, su longitud tiende a 2π y así, $h(A_n)$ tiende al origen. Como la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a S^1, entonces $\lim h(A_n) = (0,0)$. Por lo tanto, h es una función biyectiva, continua, con dominio compacto y codominio de Hausdorff, así, h es un homeomorfismo. Como $\mathbb{D}$ es una 2-celda, concluimos que $C(S^1)$ es una 2-celda, véase la Figura 2.3. Además, observemos que $h(F_1(S^1)) = \partial D$. Por la Proposición 1.26, $\partial C(S^1) = F_1(S^1)$.

Utilizando lo que hemos demostrado para $C(S^1)$, demostremos el caso general cuando X es una curva cerrada simple. Sea X es una curva cerrada simple, por [20, Teorema 1.9], $C(X)$ es homeomorfo a $C(S^1)$, así, $C(X)$ es una 2-celda. Sean $h\colon X \to S^1$ un homeomorfismo y $h^*\colon C(X) \to C(S^1)$ que está dada por $h^*(A) = h(A)$. Por [20, Teorema 1.9], h^* es un homeomorfismo. Por definición de h^*, tenemos que $h^*(F_1(X)) = F_1(S^1)$. Así, como $F_1(S^1) = \partial C(S^1)$, por la Proposición 1.26, $\partial C(X) = F_1(X)$, concluyendo lo requerido.

De manera similar que como hicimos con el hiperespacio $C([0,1])$, podemos ver a qué lugar han ido a dar algunos subcontinuos particulares de S^1 sobre $\mathbb{D}$. Por ejemplo, los subcontinuos de un solo punto de S^1, quedan representados por los puntos de la orilla de $\mathbb{D}$, y los subarcos que tienen una longitud fija, conforman una circunferencia con centro en el origen.

Por otro lado, veamos cómo está representada la familia $\mathcal{A} = \{A \in C(S^1) \colon p \in A\}$, donde $p \in S^1$. Por la homogeneidad de S^1, podemos suponer que $p = (0, 1)$. Primero veamos qué le corresponde a la familia $\mathfrak{B}_1$ que consta de todos los subarcos que tienen como extremo izquierdo a p, esto es, si A es un arco de S^1, p es el punto extremo de A que está a la izquierda de A, cuando nos paramos sobre este y miramos hacia el origen. Entonces, para cada $A \in \mathfrak{B}_1$, $m\,(A)$ está en $\{(x, y) : y \geq 0\}$. Cuando $l(A)$ es muy pequeña y distinta de cero, A se parece mucho a $\{p\}$. Por otro lado, cuando $l(A)$ se aproxima mucho a 2π, se sigue que $m(A)$ se acerca a $(-1, 0)$, y $1 - \frac{l(A)}{2\pi}$ decrece a cero, así, $h(A)$ es un punto muy cercano al origen. Similarmente, podemos considerar $\mathfrak{B}_2$ como la familia de todos los subarcos de S^1 que tienen como extremo derecho a p. Como para cada subarco A de S^1 que contiene a p, existen dos subarcos de S^1 con la misma longitud de A, a saber, uno que contiene a p como extremo izquierdo y otro que contiene a p como extremo derecho, por el párrafo anterior, dichos subarcos quedan representados como puntos sobre una misma circunferencia. Así, vemos que los subarcos $A \in \mathcal{A}$ que contienen a p como extremo, están representados en $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$. Por lo tanto, cada subarco $A \in \mathcal{A}$, queda representado como un punto entre $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$. Concluimos que el conjunto $\mathcal{A}$ queda representado como la región limitada por $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$, véase la Figura 2.4. $\square$

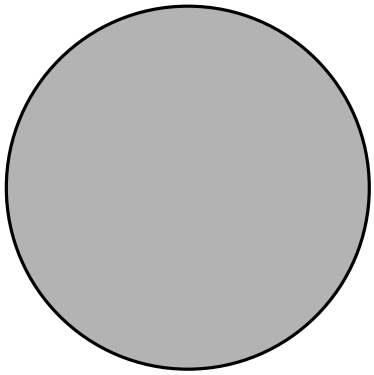

Figura 2.3: Modelo geométrico de $C\,(S^1)$.

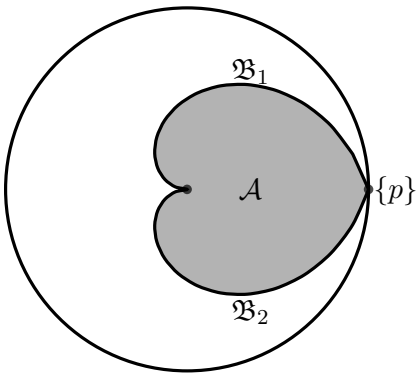

Figura 2.4: Representación geométrica de la familia de conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$.

2.3. Hiperespacios de crecimiento

Definición 2.19. *Sean X un continuo y $\mathfrak{B}$ un subconjunto cerrado de 2^X, decimos que $\mathfrak{B}$ es un* ***hiperespacio de crecimiento*** *siempre que, para cada $A \in \mathfrak{B}$ y $B \in 2^X$ tales que $A \subset B$ y cada componente de B intersecta a A, tenemos que $B \in \mathfrak{B}$.*

Dado un continuo X y K un subconjunto cerrado y no vacío de X, sean:

$$C_n^K(X) = \{A \in C_n(X) : K \subset A\};$$
$$C_n(X, K) = \{A \in C_n(X) : A \cap K \neq \emptyset\}.$$

Lema 2.20. *Los hiperespacios $C_n(X)$, $C_n^K(X)$ y $C_n(X, K)$ son hiperespacios de crecimientos.*

Demostración. Sean $A \in C_n(X)$ y $B \in 2^X$ tales que $A \subset B$ y cada componente de B intersecta a A. Sean $A_1, A_2, ..., A_k$ las componentes de A, con $k \leq n$. Como para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, A_i es conexo, existe una componente B_i de B tal que, $A_i \subset B_i$. Luego, $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. Como las componentes de B son ajenas por pares y cada componente de B intersecta a A, se sigue que $B_1, ..., B_k$ son las únicas componentes de B, así, $B \in C_n(X)$.

Además, si $A \in C_n^K(X)$, se sigue que $K \subset A \subset B$, es decir, $K \subset B$, así, $B \in C_n^K(X)$.

Por otro lado, si $A \in C_n(X, K)$, como $A \subset B$, entonces $B \cap K \supset A \cap K \neq \emptyset$, esto implica que $B \in C_n(X, K)$. Así, concluye la prueba. □

Sean X un continuo con métrica d, $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$, la **d-bola cerrada generalizada** en X de radio ϵ alrededor de A, es el conjunto

$$C_d(\epsilon, A) = \{x \in X : d(x, A) \leq \epsilon\}.$$

Observación 2.21. *Notemos que $C_d(\epsilon, A)$ es un conjunto cerrado no vacío de X, para cada $A \in 2^X$.*

En efecto, como $C_d(\epsilon, A) \supset A \neq \emptyset$, se tiene que $C_d(\epsilon, A) \neq \emptyset$. Sea $x \in X - C_d(\epsilon, A)$, es decir, $d(x, A) > \epsilon$. Por la propiedad arquimediana, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, A) - \epsilon > 2\delta = \frac{1}{n}$. Como para cada $y \in B_d(\delta, x)$, $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < \delta + d(y, a)$, se tiene que $\epsilon + \delta < d(x, A) - \delta < d(y, a)$, para cada $a \in A$. De aquí, $\epsilon < \epsilon + \delta \leq d(y, A)$. Por lo tanto, $y \in X - C_d(\epsilon, A)$ y $B_d(x, \delta) \subset X - C_d(\epsilon, A)$. Esto muestra que, $X - C_d(\epsilon, A)$ es un abierto no vacío de X y por ende, $C_d(\epsilon, A)$ es un cerrado no vacío de X.

Definición 2.22. *Dado X un continuo con métrica d, se dice que su métrica es convexa si, para cada $p, q \in X$, existe una isometría $\gamma\colon [0, d(p, q)] \to X$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(d(p, q)) = q$.*

Proposición 2.23. [20, Proposición 10.5] *Si X es un continuo con métrica convexa d y $\epsilon > 0$, entonces para cada $A, B \in 2^X$,*

$$H_d(C_d(\epsilon, A), C_d(\epsilon, B)) \leq H_d(A, B).$$

Si X es un continuo localmente conexo con métrica convexa d y $\epsilon > 0$, consideremos la función

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon \colon 2^X &\to 2^X \\ A &\mapsto C_d(\epsilon, A), \end{aligned} \tag{2.1}$$

que nos será de ayuda más adelante. Notemos que por la Observación 2.21, Φ_ϵ está bien definida. Algunas de sus propiedades son las siguientes.

Lema 2.24. *Si X es un continuo localmente conexo con métrica convexa d y $\epsilon > 0$, la función Φ_ϵ es continua en 2^X.*

Demostración. Es una simple consecuencia de la definición de continuidad y la Proposición 2.23. □

Lema 2.25. *Si X es un continuo localmente conexo con métrica convexa d y $\epsilon > 0$, entonces $H_d\left(I_{d_{2^X}}(A), \Phi_\epsilon(A)\right) < \epsilon$, para cada $A \in 2^X$.*

Demostración. En efecto, sea $\delta > 0$, observemos que $A \subset C_d(\epsilon, A) = \Phi_\epsilon(A) \subset N_d(\epsilon + \delta, \Phi_\epsilon(A))$. Además, dado $x \in \Phi_\epsilon(A) = C_d(\epsilon, A)$, se tiene que $d(x, A) \leq \epsilon$. Observemos que existe $a \in A$ tal que $d(x, a) = d(x, A) \leq \epsilon < \epsilon + \delta$, es decir, $x \in N_d(\epsilon + \delta, A)$. Como x es arbitrario en $\Phi_\epsilon(A)$, se sigue que $\Phi_\epsilon(A) \subset N_d(\epsilon + \delta, A)$. Por el Lema 2.4, $H_d\left(I_{d_{2^X}}(A), \Phi_\epsilon(A)\right) < \epsilon + \delta$. Como $\delta > 0$ fue elegida arbitrariamente, concluimos que $H_d\left(I_{d_{2^X}}(A), \Phi_\epsilon(A)\right) < \epsilon$. □

Lema 2.26. *Si X es un continuo con métrica convexa d y $\mathfrak{B}$ un hiperespacio de crecimiento, entonces para cada $\epsilon > 0$ y $A \in \mathfrak{B}$, $\Phi_\epsilon(A) \in \mathfrak{B}$.*

Demostración. Como cada $A \in \mathcal{B}$ y $C_d(\epsilon, A) \in 2^X$ son tales que $A \subset C_d(\epsilon, A)$, basta verificar que cada componente de $C_d(\epsilon, A)$ intersecta a A. Sea C una componente de $C_d(\epsilon, A)$, entonces para cada $x \in C$, se tiene $d(x, A) \leq \epsilon$. Notemos que existe $a \in A$ tal que $d(x, A) = d(x, a) \leq \epsilon$. Como $x \in C_d(\epsilon, \{a\}) \subset C_d(\epsilon, A)$ y por [20, Proposición 10.6], $C_d(\epsilon, \{a\})$ es conexo, se tiene que $C_d(\epsilon, \{a\}) \subset C$. Así, $a \in C$ y $A \cap C \neq \emptyset$. Como C fue escogida arbitrariamente, tenemos lo requerido □

Como consecuencia del Lema 2.20 y el Lema 2.26 obtenemos lo siguiente.

Lema 2.27. *Si X es un continuo localmente conexo con métrica convexa d y $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $A \in C_n(X)$ y $\epsilon > 0$, se tiene que $C_d(\epsilon, A) \in C_n(X)$.*

Teorema 2.28. [20, Teorema 10.3] *Cualquier continuo localmente conexo admite una métrica convexa.*

2.4. Convergencia en hiperespacios

En esta sección presentamos resultados relativos a la convergencia de sucesiones de subconjuntos cerrados de un continuo y algunas relaciones con la convergencia de sucesiones de elementos de ellos.

Definición 2.29. *Sean X un espacio topológico y una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de X. El* ***límite inferior*** *y el* ***límite superior*** *de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ denotados como $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$, respectivamente, están dados de la siguiente manera:*

$$\liminf A_n = \{x \in X\colon \text{ para cada conjunto abierto } U \text{ de } X \text{ tal que } x \in U,\ U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para todo número natural } n \text{ excepto un número finito}\};$$

$$\limsup A_n = \{x \in X\colon \text{ para cada conjunto abierto } U \text{ de } X \text{ tal que } x \in U,\ U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para una cantidad infinita de números naturales } n\}.$$

Cuando $\liminf A_n = A = \limsup A_n$, donde $A \subset X$, entonces el límite de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es A y se escribe como $\lim A_n = A$.

Ejemplo 2.30. *Sea $X = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3 \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}$. Consideremos*

$$A_n = \begin{cases} [1,3] \times \left\{\dfrac{1}{n}\right\}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ [0,2] \times \left\{\dfrac{1}{n}\right\}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Entonces, $\liminf A_n = [1, 2] \times \{0\}$ *y* $\limsup A_n = [0, 3] \times \{0\}$. *Véase la Figura 2.5.*

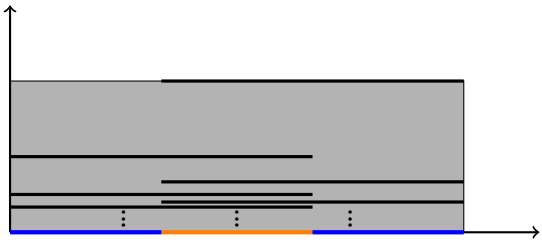

Figura 2.5: Convergencia en hiperespacios

Proposición 2.31. *Si X es un espacio topológico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos de X, entonces:*

(a) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$;

(b) $\liminf A_n$ *y* $\limsup A_n$ *son conjuntos cerrados de X.*

Demostración. (a) Sean $x \in \liminf A_n$ y U un conjunto abierto de X tal que $x \in U$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. Tomando $J = \{n \in \mathbb{N}\colon n \geq N\}$, tenemos que $x \in \limsup A_n$.

(b) Notemos que es suficiente mostrar que $\mathrm{cl}_X(\limsup A_n) \subset \limsup A_n$. Sea $x \in \mathrm{cl}_X(\limsup A_n)$ y U un conjunto abierto de X tal que $x \in U$. Entonces, $U \cap (\limsup A_n) \neq \emptyset$. Sea $y \in U \cap (\limsup A_n)$, luego, existe $J \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \in J$. Así, $x \in \limsup A_n$.

Ahora probemos que $\mathrm{cl}_X(\liminf A_n) \subset \liminf A_n$. Sean $x \in \mathrm{cl}_X(\liminf A_n)$ y U un conjunto abierto de X tal que $x \in U$. Entonces, $U \cap (\liminf A_n) \neq \emptyset$. Sea $y \in U \cap (\liminf A_n)$, luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \geq N$. Así, $x \in \liminf A_n$. Esto termina la prueba. $\square$

Proposición 2.32. *Si X es un espacio topológico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de subconjuntos de X, tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, entonces:*

(a) $\lim (A_n \cup B_n) = A \cup B$;

(b) *si existe un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $A_n \subset B_n$, para todo $n \in J$, entonces $A \subset B$.*

Demostración. (a) Por la Proposición 2.31 (a), probemos que $\limsup (A_n \cup B_n) \subset A \cup B \subset \liminf (A_n \cup B_n)$. Mostremos primeros que $\limsup (A_n \cup B_n) \subset A \cup B$. Sea $x \in X - (A \cup B)$, entonces $x \notin \limsup A_n$ y $x \notin \limsup B_n$. Por lo que, existen U_1 y U_2 subconjuntos abiertos de X tales que $x \in U_1 \cap U_2$ y $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $U_1 \cap A_n = \emptyset$, para cada $n \geq N$ y $U_2 \cap B_n = \emptyset$, para cada $n \geq N_2$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, entonces $(U_1 \cap U_2) \cap (A_n \cup B_n) = \emptyset$, para cada $n \geq N$. Así, $x \notin \limsup (A_n \cup B_n)$.

Ahora, sea $x \in A \cup B$ y U un conjunto abierto de X tal que $x \in U$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in A$. Luego, $x \in \liminf A_n$, por lo que, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. Luego, $U \cap (A_n \cup B_n) \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. Por lo tanto, $x \in \liminf (A_n \cup B_n)$.

(b) Demostremos que si $x \in \liminf A_n$, entonces $x \in \limsup B_n$. Sean $x \in \liminf A_n$ y U un conjunto abierto de X tal que $x \in U$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. Tomemos $J' = J \cap \{n \in \mathbb{N} \colon n \geq N\}$, notemos que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \in J'$. Como $A_n \subset B_n$, para cada $n \in J$, entonces, $U \cap B_n \neq \emptyset$, para cada $n \in J'$. Así, ya que J' es infinito, tenemos que $x \in \limsup B_n$. Por lo tanto, $A \subset B$ □

El siguiente lema nos da una equivalencia del límite inferior y del límite superior de una sucesión de subconjuntos cerrados de un continuo X.

Lema 2.33. [4, Lema 6.6] *Sea X un continuo. Si $\{A_n\}$ es una sucesión de subconjuntos de X, entonces se cumple lo siguiente:*

$$\liminf A_n = \{x \in X \colon \text{ existe una sucesión } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ de } X \text{ que converge a } x \text{ tal que } x_n \in A_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\ \};$$

$$\limsup A_n = \{x \in X \colon \text{ existe una sucesión } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ de } X, \text{ con } x_n \in A_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \text{ tal que alguna subsucesión de } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ converge a } x\ \}.$$

Proposición 2.34. *Sean X un continuo, $A \subset X$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de 2^X que converge a A en 2^X. Entonces, $p_0 \in A$ si y solo si existe $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $p_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\lim p_n = p_0$.*

Demostración. Sea $p_0 \in X$. Consideremos la función distancia $f \colon X \to [0, \infty)$ que está dada por $f(x) = d(p_0, x)$. Observemos que f es continua. Más aún, dado $n \in \mathbb{N}$, como A_n es compacto y f es continua, existe $p_n \in A_n$ tal que, $f(p_n) \leq f(p)$, para todo $p \in A_n$. Así, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in A_n$. Veamos que $\lim p_n = p_0$. Como $\lim A_n = A$, por [29, Teorema 4.11], $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge A con respecto a la métrica de Hausdorff. Así, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $H_d(A.A_n) < \epsilon$. Por el Lema 2.4, para cada $n \geq N$, $A \subset N_d(A_n, \epsilon)$. Como $p_0 \in A$, existe

$p \in A_n$ tal que $d(p_0, p) < \epsilon$, es decir, $f(p) = d(p_0, p) < \epsilon$. Esto implica que, $f(p_n) \leq f(p) < \epsilon$, por lo que $d(p_0, p_n) < \epsilon$, para cada $n \geq N$. Por lo tanto, $\lim p_n = p_0$.

Ahora supongamos que $p_0 \in X$ y existe $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de X tal que $p_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\lim p_n = p_0$. Veamos que $p_0 \in A$. Supongamos que $p_0 \notin A$. Entonces, $d(p_0, A) > 0$, ya que A es compacto. Como $\lim p_n = p_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $d(p_0, p_n) < \frac{d(p_0,A)}{2}$. Por otra parte, como $\lim A_n = A$, existe $M \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq M$, $H_d(A, A_n) < \epsilon$. Sea $n \geq \text{máx}\{N, M\}$, por el Lema 2.4, $A_n \subset N_d\left(A, \frac{d(p_0,A)}{2}\right)$. Como $p_n \in A_n$, existe $p \in A$ tal que $d(p_n, p) < \frac{d(a_0,A)}{2}$. Esto implica que, $d(p_0, p) \leq d(p_0, p_n) + d(p_n, p) < d(a_0, A)$, es decir, $d(p_0, p) < d(p_0, A)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $p_0 \in A$. □

Proposición 2.35. *Sea X un continuo. Supongamos que existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de 2^X y $p \in X$ tales que $\lim A_n = \{p\}$. Si $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $p_n \in A_n$, entonces $\lim p_n = p$.*

Demostración. Sea d una métrica para X. Por [29, Teorema 4.11], $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\{p\}$ con respecto a la métrica de Hausdorff H_d. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $H_d(A_n, \{p\}) < \epsilon$. Por el Lema 2.4, $A_n \subset N_d(\epsilon, \{p\})$, para cada $n \geq N$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in A_n$, existe $q \in \{p\}$ tal que $d(p_n, q) < \epsilon$, es decir, $d(p_n, p) < \epsilon$. Por lo tanto, $\lim p_n = p$. □

2.5. Retractos absolutos, Z-conjuntos y Teorema de Toruńczyk.

Esta sección tiene como objetivo establecer los conceptos de retráctos absolutos y Z-conjuntos para poder enunciar el Teorema de Toruńczyk. Dicho teorema se debe a E. Toruńczyk, que a mediados de la década de 1970 se dedicó a caracterizar el cubo de Hilbert. También, es menester aclarar que por **compactum** entenderemos un espacio métrico no vacío y compacto.

Definición 2.36. *Sean X y Y dos espacios topológicos, $A \subset Y$ y $f\colon A \to X$ una función continua. Una función $F\colon Y \to X$ es una **extensión continua** de f a Y si F es continua y $F\restriction_A = f$. Un espacio normal X es un **extensor absoluto*** (**AE**) *si, para cada espacio normal Y, cada subconjunto cerrado A de Y y cada función continua $f\colon A \to X$, se cumple que f tiene una extensión continua a Y.*

Definición 2.37. *Un subconjunto cerrado A de un espacio topológico Y es un **retracto** de Y si, la función identidad Id_A en A tiene una extensión continua a Y. Un espacio normal X es un **retracto absoluto*** (**AR**) *si, para cada espacio normal Y y cada subconjunto cerrado B de Y homeomorfo a X, se satisface que B es un retracto de Y.*

Teorema 2.38. (Borsuk) [20, Teorema 9.1] *Un compactum K, es un AR si y solo si K es un AE.*

Corolario 2.39. [20, Corolario 9.2] *Sea K un compactum encajado en $\mathcal{Q}$. Si K es un retracto de $\mathcal{Q}$, entonces K es un AR.*

Definición 2.40. *Sean X y Y dos espacios métricos, Y con métrica acotada d, y $f, g\colon X \to Y$ funciones continuas, denotamos por*

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

*Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas de X en Y, decimos que $f\colon X \to Y$ es el **límite uniforme** de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$.*

Definición 2.41. *Dado un compactum X con métrica d, un subconjunto cerrado A de X es llamado un Z**-conjunto** en X si, para cada $\epsilon > 0$, existe una función continua f_ϵ de X en $X - A$ tal que $d(f_\epsilon(x), x) < \epsilon$, para todo $x \in X$. Una función continua f entre dos compactums X_1 y X_2 es una Z**-función** si $f(X_1)$ es un Z-conjunto en X_2.*

Las siguientes dos propiedades de los Z-conjuntos son utilizadas en la demostración del Teorema 3.43.

Lema 2.42. *Si X es un compactum, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(a) *si A es un subconjunto cerrado de B, con B un Z-conjunto en X, entonces A es un Z-conjunto en X;*

(b) *la unión finita de Z-conjuntos en X, es un Z-conjunto en X.*

Demostración. (a) Como B es un Z-conjunto en X, entonces B es un subconjunto cerrado de X. Luego, A también es un subconjunto cerrado de X. Además, para cada $\epsilon > 0$, $f_\epsilon\colon X \to X - B$ es una función continua tal que $d(f_\epsilon(x), x) < \epsilon$, para todo $x \in X$. Como $X - B \subset X - A$, si consideramos $f_\epsilon\colon X \to X - A$, f_ϵ es una función continua. Así, A es un Z-conjunto en X.

(b) Por inducción es suficiente que demostremos la afirmación para dos Z-conjuntos en X. Sean A y B dos Z-conjuntos en X. Como A y B son subconjuntos cerrados de X, entonces $A \cup B$ es un subconjunto cerrado de X. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe una función continua $f\colon X \to X - A$ tal que, $d(f(x), x) < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $x \in X$. Como $d(f(X), A) \leq d(f(a), a)$, para cada $a \in A$, se sigue que $d(f(X), A) < \frac{\epsilon}{2}$. Ya que $f(X)$ es compacto y $f(X) \cap A \subset (X - A) \cap A = \emptyset$, se tiene que $d(f(X), A) > 0$. Así, como B es un Z-conjunto en X, existe una función continua $g\colon X \to X - B$, tal que $d(g(x), x) < \frac{d(f(X),A)}{2} < d(f(X), A)$, para cada $x \in X$. En particular, como $f(x) \in X$, $d(g(f(x)), f(x)) < d(f(X), A)$, de aquí que $g(f(x)) \notin A$. Por lo tanto, $g(f(X)) \subset X - A$. De esto úlimo y como $g(X) \subset X - B$, podemos considerar la función continua $h = g \circ f\colon X \to X - (A \cup B)$ tal que, para todo $x \in X$, $d(h(x), x) \leq d(h(x), f(x)) + d(f(x), x) < \epsilon$. Así, concluimos que $A \cup B$ es un Z-conjunto en X. □

Ahora enunciamos el Teorema de Toruńczyk.

Teorema 2.43. (Toruńczyk) [20, Teorema 9.3] *Sea X un AR. Si la función identidad sobre X es un límite uniforme de Z-funciones, entonces X es un cubo de Hilbert.*

Capítulo 3

Clases de continuos

3.1. Gráficas finitas

Un concepto que está estrechamente relacionado con la definición de arco, es la definición de gráfica finita. En esta sección presentamos su definición, así como algunas de sus principales caracterizaciones que nos serán de utilidad. Se remite al lector a [4], [8], [12], [23], [24], [28], [29] y [31] para la consulta de bibliografía de este capítulo.

Las demostraciones de los siguientes tres lemas pueden ser consultados en [4, Lema 2.2, Lema 2.4, Lema 2.3].

Lema 3.1. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y F un subconjunto cerrado no vacío de X. Si $x \notin F$ y α es un arco que va de x a un punto en F, entonces existe un subarco β de α tal que $F \cap \beta = \{y\}$, donde x, y son los puntos extremos de β.*

Lema 3.2. *Si X es un espacio topológico arco conexo y F_1 y F_2 son subconjuntos cerrados, no vacíos y ajenos de X, entonces existe un arco α de X tal que $F_1 \cap \alpha = \{x\}$ y $F_2 \cap \alpha = \{y\}$, donde x y y son los puntos extremos de α.*

Lema 3.3. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Si α es un arco de X con un punto extremo x y U es una vecindad de x, entonces existe un subarco β de α tal que $\beta \subset \operatorname{int}_X(U) \subset U$ y x es un punto extremo de β.*

Definición 3.4. *Sea X un continuo. Un* ***arco libre*** *de X es un arco α con puntos extremos a y b tal que $\alpha - \{a, b\}$ es un abierto de X.*

Lema 3.5. *Sean X un continuo y J un arco libre de X, con p_J y q_J sus puntos extremos. Entonces, para cada subarco K de J, cuyos puntos extremos son p_K y q_K, $K - E(K)$ es un subconjunto abierto de X, es decir, K es un arco libre de X.*

Demostración. Primero notemos que K también es un subarco de X y $K - E(K) \subset J - E(J)$. Sea $x \in K - E(K)$, entonces $x \in J - E(J)$. Como J es un arco libre de X, $J - E(J)$ es un subconjunto abierto de X. Así, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $B_d(\epsilon_1, x) \subset J - E(J)$. Sea $\epsilon_2 = \text{mín}\{\epsilon_1, d(x, p_K), d(x, q_K)\}$. De esta forma, $B_d(\epsilon_2, x) \subset K - E(K)$, es decir, $K - E(K)$ es un subconjunto abierto de X. $\square$

Lema 3.6. *Sean X un continuo, Y un subcontinuo de X y J un arco libre de X. Si $J \subset Y \subset X$, entonces J es un arco libre de Y.*

Demostración. Como $J - E(J)$, es un subconjunto abierto de X y $J - E(J) \subset Y \subset X$, entonces $J - E(J)$ es un subconjunto abierto de Y, es decir, J es un arco libre de Y. □

Definición 3.7. *Una **gráfica finita** es un continuo que se puede escribir como la unión de un número finito de arcos tales que dos a dos son ajenos o se intersectan solamente en uno o ambos puntos extremos.*

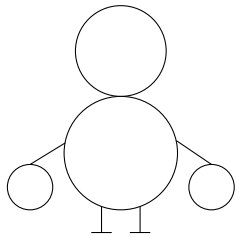

Figura 3.1: Una gráfica finita

Teorema 3.8. *Toda gráfica finita es la unión de sus arcos libres.*

Demostración. Sea G una gráfica finita. Entonces, $G = \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i$, donde cada α_i es un arco con puntos extremos a_i y b_i, y tal que, si $i \neq j$, $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$ o se intersectan solamente en uno o ambos puntos extremos. Además, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, como $a_i, b_i \in G$ y G es un espacio métrico, entonces $\{a_i, b_i\}$ es un cerrado de G. Luego, $G - \{a_i, b_i\}$ es un abierto de G. Pero también, cada α_j es compacto, entonces cada α_j es cerrado en G. De modo que, $\bigcup_{\substack{j \neq i \\ j \in \{1,...,n\}}} \alpha_j$ es un cerrado de G. Así, $(G - \{a_i, b_i\}) \cap \bigcap_{\substack{j \neq i \\ j \in \{1,...,n\}}} (G - \alpha_j) = \alpha_i - \{a_i, b_i\}$, es un abierto de G, es decir, α_i es un arco libre de G. Por lo tanto, G es la unión de sus arcos libres. □

Teorema 3.9. [29, Proposición 9.2] *Si X y Y son gráficas finitas, tales que su intersección es no vacía y finita, entonces $X \cup Y$ es una gráfica finita.*

Teorema 3.10. [29, Corolario 9.10.1] *Todo subcontinuo de una gráfica finita es una gráfica finita.*

Ahora mostramos, una caracterización para la clase de las gráficas finitas. En particular, esta nos dice que el conjunto de los puntos de ramificación de cualquier gráfica finita es finito.

Teorema 3.11. [29, Corolario 9.10] *Un continuo X es una gráfica finita si y solo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

(a) $\operatorname{ord}(x, X) < \aleph_0$, *para cada* $x \in X$;

(b) $\operatorname{ord}(x, X) \leq 2$ *para todos, excepto un número finito de puntos* $x \in X$.

Teorema 3.12. [29, Ejercicio 9.41] *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$. El continuo X es una gráfica finita si y solo si cada punto de X tiene una vecindad cerrada que es un n-odo simple o un arco.*

Terminamos este apartado con el siguiente resultado que nos será de ayuda en la prueba del Teorema 3.22.

Teorema 3.13. [4, Lema 4.3] *Si X es un continuo arco conexo y $G_1, ..., G_k$ es una colección de gráficas finitas de X ajenas por pares, entonces existen un número finito de arcos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$ en X, con $k - 1 \in \mathbb{N}$ tales que $G = \bigcup\{G_i \colon 1 \leq i \leq k\} \cup \bigcup\{\alpha_i \colon 1 \leq i \leq k - 1\}$ es una gráfica finita de X. En particular, $\bigcup_{i=1}^{k} G_i \subset G$.*

3.2. Continuos casi enrejados y enrejados

En esta sección introducimos los conceptos de continuo casi enrejado y enrejado. Presentamos algunos resultados que los caracterizan, entre los que se encuentran; una caracterización para los casi enrejados, ver Lema 3.17, y una caracterización para los continuos enrejados X en términos de la densidad de la clase de los elementos de $C_n(X)$, cuya dimensión es finita, ver Teorema 3.30. Además, conoceremos algunas clases de continuos que están contenidos en la clase de los continuos enrejados, ver Teorema 3.41.

Dado un continuo X, sean:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(X) &= \{x \in X \colon \text{ existe } M \subset X \text{ tal que} \\
&\qquad\qquad M \text{ es una gráfica finita y } x \in \operatorname{int}_X(M)\}; \\
\mathcal{P}(X) &= X - \mathcal{G}(X); \\
\mathcal{FA}(X) &= \bigcup\{\operatorname{int}_X(J) : J \text{ es un arco libre de } X\}.
\end{aligned}$$

Observación 3.14. *Si X es un continuo, el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es un subconjunto abierto de X. Así, $\mathcal{P}(X)$ es un subconjunto cerrado de X.*

Definición 3.15. *Decimos que un continuo X es* ***casi enrejado*** *si y solo si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X. Un continuo casi enrejado X es* ***enrejado*** *si X tiene una base de vecindades $\mathcal{B}$ tal que para cada elemento $U \in \mathcal{B}$ se cumple que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.*

Existen continuos que son casi enrejados y enrejados, por ejemplo, cualquier gráfica finita. Sin embargo, esto no siempre es cierto.

Ejemplo 3.16. *Sea $X = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup \left(\{\frac{1}{n}\} \times \left[0, \frac{1}{n}\right]\right)\right)$. Entonces, $\mathcal{P}(X) = \{(0, 0)\}$, X es casi enrejado, pero no es enrejado, pues para cada conjunto abierto U de X tal que $(0, 0) \in U$, tenemos que $U - \mathcal{P}(X)$ es disconexo. Así, X es un continuo casi enrejado y no enrejado, véase la Figura 3.2.*

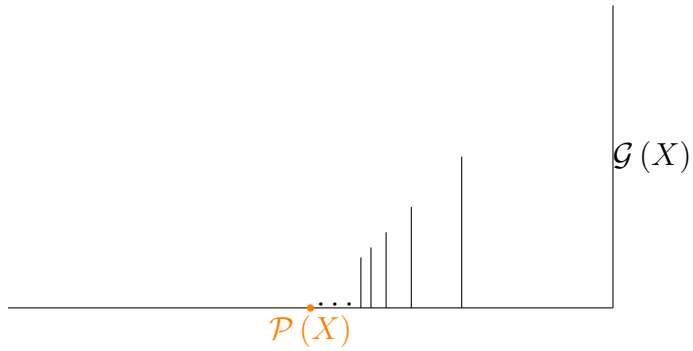

Figura 3.2: Un continuo casi enrejado que no es enrejado

Lema 3.17. *Si X es un continuo, entonces* $\mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X)) = \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$. *Por lo tanto, X es casi enrejado si y solo si $\mathcal{FA}(X)$ es denso en X.*

Demostración. Probemos que $\mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X)) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$. Sea $x \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X))$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{G}(X)$, que converge a x en X. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, como $x_n \in \mathcal{G}(X)$, entonces existe una gráfica finita $M \subset X$ tal que $x_n \in \mathrm{int}_X(M) \subset M$. Por el Teorema 3.8, $M = \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i$ con cada α_i un arco libre de M y tal que, si $i \neq j$, α_i y α_j son ajenos o se intersectan en uno o ambos de sus puntos extremos. Por lo que, existe α_k, para algún $k \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $x_n \in \alpha_k$. Sea $r = \frac{1}{n}$, como $V = B_d(r, x_n) \cap \mathrm{int}_X(M)$ es un conjunto abierto no vacío de X que contiene a x_n, por el Lema 3.3, existe un subarco β de α_k tal que, $x_n \in \beta \subset V$ y x_n es un punto extremo de β. Como α_k es un arco libre de M y β es un subarco de α_k, por el Lema 3.5, β es un arco libre de M. Así, $\beta - E(\beta)$ es un abierto de M. Además, $\beta - E(\beta) \subset \beta \subset \mathrm{int}_X(M) \cap B_d(r, x_n) \subset \mathrm{int}_X(M)$, entonces $\beta - E(\beta) \subset \mathrm{int}_X(M) \subset M$. Luego, $\beta - E(\beta)$ es abierto en X y por tanto, β es un arco libre de X. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $y_n \in \beta - E(\beta) \subset \mathrm{int}_X(\beta) \subset \mathcal{FA}(X)$, es decir, $y_n \in \mathcal{FA}(X)$. Como $y_n \in \beta - E(\beta) \subset \beta \subset \mathrm{int}_X(M) \cap B_d(r, x_n)$, entonces $y_n \in B(r, x_n)$. Luego, $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x en X. De este modo, como $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{FA}(X)$ que converge a x, entonces $x \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$.

Mostremos ahora que $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X))$.

Sea $x \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$, dado $r > 0$, $B_d(r, x) \cap \mathcal{FA}(X) \neq \emptyset$. Sea $y \in B_d(r, x) \cap \mathcal{FA}(X)$, entonces $y \in \mathcal{FA}(X)$, por lo que existe $\mathrm{int}_X(J) \subset \mathcal{FA}(X)$, con J un arco libre de X tal que $y \in \mathrm{int}_X(J)$. Como J es una gráfica finita de X, entonces $y \in \mathcal{G}(X)$. Por lo tanto, $y \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X))$. Así, $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) = \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X))$. Además, por definición de casi enrejado y por esta última igualdad tenemos que, X es casi enrejado si y solo si $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) = \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X)) = X$, es decir, X es casi enrejado si y solo si $\mathcal{FA}(X)$ es denso en X. □

Lema 3.18. *Si X es un continuo casi enrejado y U es un subconjunto de X, entonces* $\mathrm{int}_X(U) \subset \mathrm{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))$.

Demostración. Cuando $\mathrm{int}_X(U) = \emptyset$, el resultado es inmediato. Sean $x \in X$ y V un subconjunto abierto no vacío de X tal que $x \in \mathrm{int}_X(U)$ y $x \in$

V. Entonces, $V \cap \operatorname{int}_X(U)$ es un subconjunto abierto no vacío de X. Como X es un continuo casi enrejado y $\operatorname{int}_X(\mathcal{P}(X)) = X - \operatorname{cl}_X(\mathcal{G}(X))$, se sigue que, $\operatorname{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$. Por lo que, $V \cap \operatorname{int}_X(U) \not\subset \mathcal{P}(X)$, así, $V \cap (\operatorname{int}_X(U) - \mathcal{P}(X)) = (V \cap \operatorname{int}_X(U)) - \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Como $U - \mathcal{P}(X) \supset \operatorname{int}_X(U) - \mathcal{P}(X)$, se tiene que, $V \cap (U - \mathcal{P}(X)) \supset V \cap (\operatorname{int}_X(U) - \mathcal{P}(X)) \neq \emptyset$, es decir, $x \in \operatorname{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))$. Por lo tanto, como x es arbitrario, $\operatorname{int}_X(U) \subset \operatorname{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))$. □

El siguiente resultado nos da una condición necesaria para que un continuo sea enrejado.

Lema 3.19. *Si X es un continuo enrejado, entonces X es un continuo localmente conexo.*

Demostración. Como X es un continuo enrejado, X tiene una base de vecindades $\mathcal{B}$ tal que, para cada elemento $U \in \mathcal{B}$, $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo. Sea $x \in X$ y V un subconjunto abierto de X, tal que $x \in V$. Elijamos ahora, W un subconjunto abierto de X tal que, $x \in W \subset \operatorname{cl}_X(W) \subset V$. Sea $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \operatorname{int}_X(U) \subset U \subset W$. Por el Lema 3.18, $\operatorname{int}_X(U) \subset \operatorname{cl}_X(U - \mathcal{P}(X)) \subset \operatorname{cl}_X(U) \subset cl_X(W) \subset V$. Esto nos dice que, $x \in \operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))) \subset \operatorname{cl}_X(U - \mathcal{P}(X)) \subset V$. Además, $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo, entonces $\operatorname{cl}_X(U - \mathcal{P}(X))$ también es conexo. Por lo tanto, como x es arbitrario en X, se sigue que X es conexo en pequeño. Por el Teorema 1.24, X es localmente conexo. □

Ejemplo 3.20. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{(x, 2^{-n+1}) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1\}$ y $A_0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1\}$. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y cada $0 \leq m \leq 2^{n+1}$, sea $B_{n,m} = \{(m2^{-n-1}, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq 2^{-n}\}$. Consideremos*

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \cup \left[\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\bigcup_{m=0}^{2^{n+1}} B_{n,m}\right)\right],$$

entonces X es un continuo enrejado, $\mathcal{P}(X) = A_0$ y por el Teorema 3.19, X es localmente conexo, véase la Figura 3.3.

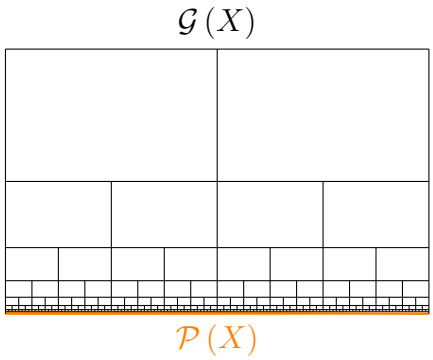

Figura 3.3: Un continuo enrejado

En general, el recíproco del Lema 3.19, no es cierto. Para ver esto, sean $n \in \mathbb{N}$ y $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \left(x - \frac{1}{2n}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2n}\right)^2\}$. Consideremos $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, con la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Entonces X es un continuo llamado Arete Hawaiano Armónico. En este ejemplo, X es un continuo localmente conexo y casi enrejado. Sin embargo, X no es enrejado, ya que $U - \mathcal{P}(X)$ es disconexo, para cualquier conjunto abierto U de X que contenga $\mathcal{P}(X)$, véase la Figura 3.4.

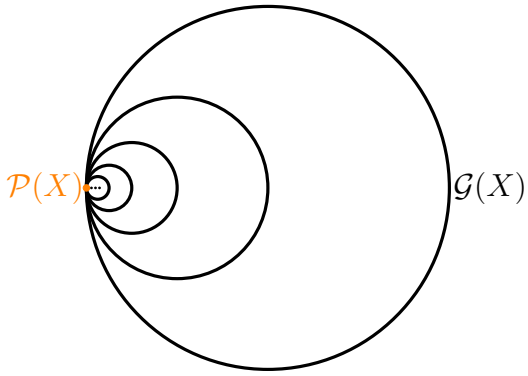

Figura 3.4: Un continuo localmente conexo y casi enrejado, que no es enrejado.

Lema 3.21. *Si X es un continuo, entonces X es enrejado si y solo si X es casi enrejado y X tiene una base $\mathcal{D}$ de subconjuntos abiertos conexos de X tal que, para cada elemento $U \in \mathcal{D}$, $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.*

Demostración. La suficiencia es inmediata por la definición de continuo enrejado, y ya que todo elemento de $U \in \mathcal{D}$, en particular, es un conjunto abierto, y por lo tanto una vecindad de cada uno de sus puntos.

Para la necesidad, supongamos que X es enrejado. Sea $\mathcal{B}$ una base de vecindades de X tal que, para cada elemento $U \in \mathcal{B}$, $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo. Sean $p \in X$ y W un subconjunto abierto no vacío de X tal que $p \in W$.

Sea $U \in \mathcal{B}$ tal que $p \in \operatorname{int}_X(U) \subset U \subset W$. Por el Lema 3.19, como X es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo Z de X tal que $p \in Z \subset \operatorname{int}_X(U)$. Ya que $\mathcal{G}(X)$ es abierto en X, entonces $\mathcal{P}(X)$ es cerrado en X. Luego, se tiene que $W - \mathcal{P}(X)$ es un subconjunto abierto de X. Como $U - \mathcal{P}(X) \subset W - \mathcal{P}(X)$, para cada $x \in U - \mathcal{P}(X)$, existe un subconjunto abierto y conexo V_x de X tal que, $x \in V_x \subset W - \mathcal{P}(X)$.

Consideramos ahora, $V = Z \cup (\bigcup \{V_x : x \in U - \mathcal{P}(X)\})$. Notemos que V es un subconjunto abierto de X ya que es la unión de dos conjuntos abiertos de X. Sea $S = \bigcup \{V_x : x \in U - \mathcal{P}(X)\}$, entonces $U - \mathcal{P}(X) \subset S \subset W - \mathcal{P}(X) \subset W$. En particular, $S \subset W$. Como $Z \subset W$, se tiene que, $p \in Z \subset V \subset W$, es decir, $p \in V \subset W$. Además, como $V - \mathcal{P}(X) = (Z \cup S) - \mathcal{P}(X) = (Z - \mathcal{P}(X)) \cup (S - \mathcal{P}(X)) = (Z - \mathcal{P}(X)) \cup S$, se sigue que $S \subset V - \mathcal{P}(X)$. Como $Z - \mathcal{P}(X) \subset U - \mathcal{P}(X)$, entonces $V - \mathcal{P}(X) \subset (U - \mathcal{P}(X)) \cup S \subset S$ ya que $U - \mathcal{P}(X) \subset S$. Así, se obtiene que $S = V - \mathcal{P}(X)$.

Por otro lado, como $V - \mathcal{P}(X) = V \cap \mathcal{G}(X)$, se sigue que $V - \mathcal{P}(X)$ es un abierto de X. Más aún, como $\{V_x : x \in U - \mathcal{P}(X)\}$ es una familia de

subconjuntos conexos de X y $U-\mathcal{P}(X)$ es un subconjunto conexo de X tal que $U-\mathcal{P}(X)\subset S$ y cada $V_x\in\{V_x : x\in U-\mathcal{P}(X)\}$ cumple que, $V_x\cap(U-\mathcal{P}(X))\neq\emptyset$, entonces por [21, Teorema 2], S es conexo, es decir, $V-\mathcal{P}(X)$ es conexo. Por último, como $V-\mathcal{P}(X)\subset V$, por el Lema 3.18, se sigue que $V-\mathcal{P}(X)\subset V\subset \mathrm{cl}_X(V-\mathcal{P}(X))$. Por lo tanto, V es conexo y también abierto de X. Esto completa la prueba del lema. □

Teorema 3.22. *Sean X un continuo localmente conexo, $n\in\mathbb{N}$ y $A\in C_n(X)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\dim(A, C_n(X))$ *es finita;*

(b) *existe una gráfica finita D contenida en X, tal que $A\subset \mathrm{int}_X(D)$;*

(c) $A\cap\mathcal{P}(X)=\emptyset$.

Demostración. (a)⇒(b) Sea k el número de componentes de A, entonces, $k\leq n$. Supongamos que $k=1$, es decir, $A\in C(X)$. Como $C(X)\subset C_n(X)$, por el Teorema 1.3 (b), se tiene que $\dim(A, C(X))\leq\dim(A, C_n(X))$ y por lo tanto, $\dim_A(C(X))$ es finita. Luego, por [19, Lema 2.2, Afirmación 1], existe una gráfica finita D contenida en X tal que $A\subset\mathrm{int}_X(D)$.

Supongamos ahora que $k>1$. Sean $A_1,...,A_k$ las componentes de A. Notemos que $A_1,...,A_k$ son subcontinuos de X ajenos por pares. Así, por el Corolario 1.17, existen subcontinuos $Z_1,...,Z_k$ de X ajenos por pares, tales que $A_i\subset\mathrm{int}_X(Z_i)$, para cada $i\in\{1,...,k\}$.

Dado $i\in\{1,...,k\}$, notemos que $A_i\in\langle\mathrm{int}_X(Z_i)\rangle_{C(X)}\subset C(Z_i)$. Luego, se tiene que $C(Z_i)$ es una vecindad de A_i en $C(X)$, o sea, $A_i\in\mathrm{int}_{C(X)}(C(Z_i))$. Así, por el Teorema 1.3 (c), $\dim(A_i, C(X))=\dim(A_i, C(Z_i))$. Luego, por el Teorema 1.5, tenemos que $\dim(A_i, C(Z_i))\leq\dim\left((A_1,...,A_k), \prod_{j=1}^{k}C(Z_j)\right)$. Por otro lado, por el Teorema 2.15, existe un homeomorfismo

$$\varphi\colon \prod_{j=1}^{k}C(Z_j)\to\langle Z_1,...,Z_k\rangle_{C_k(X)},$$

que está definido por $(B_1,B_2,...,B_k)\overset{\varphi}{\mapsto}\bigcup_{i=1}^{k}B_i$. Luego, por el Teorema 1.4,

$$\dim\left((A_1,...,A_k), \prod_{j=1}^{k}C(Z_j)\right)=\dim\left(A,\langle Z_1,...,Z_k\rangle_{C_k(X)}\right)$$

y como, $\langle Z_1,...,Z_k\rangle_{C_k(X)}\subset C_n(X)$, por el Teorema 1.3 (b), se tiene que $\dim\left(A,\langle Z_1,...,Z_k\rangle_{C_k(X)}\right)\leq\dim(A, C_n(X))$. Debido a esto último, y como, $\dim(A_i, C(X))=\dim(A_i, C(Z_i))$, $\dim(A_i, C(X))\leq\dim(A, C_n(X))$. Por lo tanto, la dimensión de $C(X)$ en A_i es finita. Así, por [19, Lema 2.2, Afirmación 1], existe una gráfica finita G_i contenida en X, tal que, $A_i\subset\mathrm{int}_X(G_i)$. Además, como cada A_i es conexo y $A_i\subset\mathrm{int}_X(G_i)\cap\mathrm{int}_X(Z_i)$, existe una componente C_i de $\mathrm{int}_X(G_i)\cap\mathrm{int}_X(Z_i)$ tal que, $A_i\subset C_i$. Notemos que $\mathrm{int}_X(G_i)\cap\mathrm{int}_X(Z_i)$ es un abierto de X y X es locamente conexo. Por el Teorema 1.14, C_i es un abierto

de X. Tomando ahora, $D_i = \mathrm{cl}_X(C_i)$, se sigue que D_i es un conexo y cerrado de X. Además, como $G_i \cap Z_i \supset C_i$ es un cerrado de X , se tiene que $D_i \subset G_i \cap Z_i$. Por lo tanto, D_i es un subcontinuo de G_i y Z_i. Así, por el Teorema 3.10, D_i es una gráfica finita, la cual, cumple que, $A_i \subset C_i \subset \mathrm{int}_X(D_i) \subset D_i \subset Z_i$. Así, como $D_i \subset Z_i$, para cada $i \in \{1, ..., k\}$ y los Z_i son ajenos por pares, se sigue que, $D_1, ..., D_k$ es una colección de gráficas finitas contenidas en X, ajenas por pares. Luego, por el Teorema 3.13, existe una gráfica finita D contenida en X tal que $\bigcup_{i=1}^{k} D_i \subset D$. Así, $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{int}_X(D_i) \subset D$. Por lo tanto, como $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, se sigue que, $A \subset \mathrm{int}_X(D)$. Concluyendo lo requerido.

(b)⇒(a) Supongamos que $A \subset \mathrm{int}_X(D)$ para alguna gráfica finita D contenida en X. Notemos que $A \in \langle \mathrm{int}_X(D) \rangle_{C_n(X)} \subset C_n(D)$, luego, se tiene que, $C_n(D)$ es una vecindad de A en $C_n(X)$, es decir, $A \in \mathrm{int}_{C_n(X)}(C_n(D))$. Así, por el Teorema 1.3 (b), $\dim(A, C_n(X)) = \dim(A, C_n(D))$. Luego, por [26, Teorema 2.4],

$$\begin{aligned}\dim(A, C_n(D)) &= 2n + \sum_{p \in A \cap R(D)} (\mathrm{ord}(p, D) - 2) \\ &\leq 2n + \sum_{p \in R(D)} (\mathrm{ord}(p, D) - 2),\end{aligned}$$

es decir, $\dim(A, C_n(D)) \leq 2n + \sum_{p \in R(D)} (\mathrm{ord}(p, D) - 2)$. Por el Teorema 3.11, $R(D)$ es finito, entonces $\dim(A, C_n(D))$ es finita. Por lo tanto, $\dim(A, C_n(X))$ es finita.

(b)⇒(c) Esta demostración es clara, ya que cada punto de A tiene a D como vecindad, la cual, es una gráfica finita contenida en X. Por lo tanto, $A \subset \mathcal{G}(X)$ y por ende, $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$.

(c)⇒(b) Supongamos que $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. Entonces, para cada punto $a \in A$, existe una gráfica finita D_a en X tal que $a \in \mathrm{int}_X(D_a)$. Como X es localmente conexo, existe un conjunto abierto y conexo F_a de X tal que $a \in F_a \subset \mathrm{cl}_X(F_a) \subset \mathrm{int}_X(D_a)$.

Además, como $A \subset \bigcup_{a \in A} F_a$ y A es compacto, existen $r \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_r \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{r} F_{a_i}$. Sea $F = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{cl}_X(F_{a_i})$, entonces F tiene k componentes con $k \leq r$. Sean $C_1, C_2, ..., C_k$ dichas componentes. Notemos que, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, C_i es un continuo y además, $C_i \subset F \subset \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{int}_X(D_{a_i})$. Así, dado $a \in C_i$, existe $j \in \{1, 2, ..., r\}$ tal que $a \in \mathrm{int}_X\left(D_{a_j}\right)$. Es decir, D_{a_j} es una vecindad de a en X. Luego, por el Teorema 1.8, se tiene que $\mathrm{ord}(a, C_i) \leq \mathrm{ord}(a, X) = \mathrm{ord}\left(a, D_{a_j}\right)$, es decir, para cada $a \in C_i$, $\mathrm{ord}(a, C_i) \leq \mathrm{ord}\left(a, D_{a_j}\right)$. Más aún, por el Teorema 3.11 cada punto de D_{a_j} es de orden finito y todos salvo una cantidad finita de puntos de D_{a_j} tienen orden menor o igual a dos en D_{a_j}. Como $\{a_j \colon j \in \{1, 2, ..., r\}\}$ es un conjunto finito, de lo anterior, se sigue que cada punto de C_i tiene orden finito y todos salvo una cantidad finita de sus puntos tienen orden menor o igual que dos en C_i. Así, por el Teorema 3.11, C_i es una gráfica finita. De modo que, $C_1, C_2, ..., C_n$ es una colección de gráficas finitas ajenas por pares, y por el Teorema, 1.21, X es arco conexo.

Aplicando el Teorema 3.13, obtenemos una gráfica finita D contenida en X tal que $F = \bigcup_{i=1}^{k} C_i \subset D$. Entonces, $A \subset \bigcup_{i=1}^{r} F_{a_i} \subset F \subset D$ y por lo tanto, $A \subset \operatorname{int}_X(D)$ que es como se requería. □

Como una aplicación del Teorema 3.22 tenemos la siguiente observación.

Observación 3.23. *Si X y Y son continuos localmente conexos y $Y \subset X$, entonces $\mathcal{G}(X) \cap Y \subset \mathcal{G}(Y)$. Notemos que $\mathcal{G}(X) \cap Y \subset \mathcal{G}(Y)$ es equivalente a $\mathcal{P}(Y) \subset \mathcal{P}(X)$.*

En efecto, sea $x \in \mathcal{G}(X) \cap Y$, como $\{x\} \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$, por el Teorema 3.22 (a)*, se tiene que* $\dim(\{x\}, C(X)) < \infty$. *Además, como $\{x\} \subset C(Y) \subset C(X)$, por el Teorema 1.3* (b)*, se tiene que* $\dim(\{x\}, C(Y)) \leq \dim(\{x\}, C(X)) < \infty$. *Aplicando, el Teorema 3.22* (c)*, se tiene que $\{x\} \cap \mathcal{P}(Y) = \emptyset$, es decir, $x \in \mathcal{G}(Y)$, que es lo que se requería.*

Dado un continuo X, sea 2^{2^X} la familia de todos los subconjuntos no vacíos y cerrados de 2^X con la métrica de Hausdorff H_{H_d} definida para toda $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in 2^{2^X}$ como

$$H_{H_d}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \{r > 0 : \mathcal{A}_1 \subset N_{H_d}(r, \mathcal{A}_2), \mathcal{A}_2 \subset N_{H_d}(r, \mathcal{A}_1)\}.$$

Lema 3.24. [28, Lema 1.48] *Si X es un continuo y $\rho\colon 2^{2^X} \to 2^X$ está dada por $\rho(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, entonces ρ está bien definida y para cada $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in 2^{2^X}$ se cumple que*

$$H_d(\rho(\mathcal{A}_1), \rho(\mathcal{A}_2)) \leq H_{H_d}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2).$$

En particular, ρ es continua.

Definición 3.25. *Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria con la topología euclideana.*

Definición 3.26. *Un **árbol** es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.*

Lema 3.27. *Si X es un espacio topológico arco conexo y F es un subconjunto finito de X, con más de un punto, entonces existe un árbol T en X tal que $F \subset T$*

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre el número finito n de elementos de F. Si $F = \{x, y\}$, como X es arco conexo, existe un arco T en X que une x con y, como en particular T es homeomorfo a $[0, 1]$ que no contiene una curva cerrada simple, entonces T es un árbol tal que $F \subset T$. Ahora supongamos que el resultado es cierto para cualquier subconjunto que tiene a lo más $n - 1$ elementos y demostremos que el lema es cierto para todo subconjunto finito con n elementos. Para esto, sea F un subconjunto de X con $n-1$ elementos y $x \in X$, por el paso inductivo, existe T un árbol contenido en X tal que $F \subset T$. Ahora notemos, si $x \in T$, entonces $F \cup \{x\} \subset T$ y termina la demostración. En caso contrario, si $x \notin T$, dado $y \in T$, como $x, y \in X$ y X es arco conexo, existe un arco β en X tal que va de x a y. Aplicando el

Lema 1,17, existe un arco α que está contenido en X tal que, $T \cap \alpha = \{q\}$ con x y q los puntos extremos de α. Notemos que $q \neq x$. Aplicando ahora el Teorema 1.4, se obtiene que $T \cup \alpha$ es una gráfica finita. Si demostramos que $T \cup \alpha$ no contiene una curva cerrada simple, entonces $T \cup \alpha$ será un árbol y habremos terminado. Para esto, supongamos que existe C una curva cerrada simple tal que $C \subset T \cup \alpha$. Como T es un árbol y α es un arco, C no puede estár contenido en ninguno de los dos. Además, como T y α son compactos, $(T \cup \alpha) - \alpha = T - \alpha$ y $(\alpha \cup T) - T = \alpha - T$ son subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de $T \cup \alpha$ que además intersectan a $C - \{q\}$ ya que, como $C \not\subset T$ y $C \not\subset \alpha$, existen $c_1, c_2 \in C$ tales que $c_1 \notin T$ y $c_2 \notin \alpha$. Luego, como $C \subset T \cup \alpha$ entonces $c_1 \in \alpha$ y $c_2 \in T$. Observe que $c_1 \neq q$ y $c_2 \neq q$, entonces $(T - \alpha) \cap (C - \{q\}) \neq \emptyset$ y $(\alpha - T) \cap (C - \{q\}) \neq \emptyset$. Luego, como $C - \{q\} = C - (T \cap \alpha) = (C - T) \cup (C - \alpha) \subset (\alpha - T) \cup (T - \alpha)$, entonces $C - \{q\}$ es disconexo, lo que es una contradicción, ya que C es una curva cerrada simple y al quitarle uno de sus puntos no es disconexa. Por lo tanto, $T \cup \alpha$ es un árbol. □

Lema 3.28. *Dados X un continuo, $\epsilon > 0$, $A, B \in 2^X$ y $C \subset A$ no vacío, si $A \subset N_d(\epsilon, B) < \epsilon$, entonces $B \cap N_d(\epsilon, C) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $c \in C$, entonces $c \in C \subset A \subset N_d(\epsilon, B)$, así, existe $b \in B$ tal que $d(b, c) < \epsilon$, es decir, $b \in B_d(\epsilon, c) \subset N_d(\epsilon, C)$. Por lo tanto, $B \cap N_d(\epsilon, C) \neq \emptyset$. □

Observación 3.29. *Si X es un espacio métrico y $D \subset A \subset X$, se dice que D es denso en A si D es denso en el subespacio métrico (A, d). Esto quiere decir, D es denso en A si y solo si $\mathrm{cl}_X(D) \cap A = A$, o equivalentemente si y solo si, $A \subset \mathrm{cl}_X(D)$.*

Dados X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathfrak{F}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim(A, C_n(X)) \text{ es finita}\},$$

se acostumbra denotar $\mathfrak{F}_1(X)$ como $\mathfrak{F}(X)$.

Teorema 3.30. *Sea X un continuo localmente conexo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) *X es enrejado;*

(b) *para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}_n(X)$ es denso en $C_n(X)$;*

(c) *existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\mathfrak{F}_n(X)$ es denso en $C_n(X)$.*

Demostración. (a)⇒(b). Antes de comenzar la demostración, hacemos la siguiente aclaración. De acuerdo a la Observación 3.29, para mostrar que $\mathfrak{F}_n(X)$ es denso en $C_n(X)$, es suficiente mostrar que $C_n(X) \subset \mathrm{cl}_{2^X}(\mathfrak{F}_n(X))$. Supongamos que X es enrejado y sean $n \in \mathbb{N}$, $A \in C_n(X)$ y $\epsilon > 0$. Consideremos $A_1, \ldots, A_k$ cada una de las componentes de A, con $k \leq n$. En particular, $A_1, \ldots, A_k$ son subconjuntos compactos y ajenos por pares en X. Así, por el

Lema 2.2, $N_d(\epsilon, A_1)$, $N_d(\epsilon, A_2)$, ...,$N_d(\epsilon, A_k)$ son conjuntos disjuntos por pares. Por otro lado, por el Lema 3.21, existe una base de vecindades $\mathcal{D}$ de X que está formada por subconjuntos abiertos conexos de X tal que, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{D}$, $\mathcal{U} - \mathcal{P}(X)$ es conexo.

Así, dado $a \in A$ y $B_d(\epsilon, a)$, existe un subconjunto abierto conexo U_a de X tal que $a \in U_a \subset B_d(\epsilon, a)$. Sea $V_a = U_a - \mathcal{P}(X)$, se tiene que V_α es un conjunto conexo y abierto de X. De hecho, $V_a \neq \emptyset$, ya que como X es enrejado, $\operatorname{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$, por lo que $U_a \not\subset \mathcal{P}(X)$. Ahora, sea $b(a) \in V_a$. Dado $i \in \{1, ..., k\}$, por la compacidad de A_i, existe $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, ..., a_m \in A_i$ tales que $A_i \subset \bigcup_{j=1}^m U_{a_j} \subset \bigcup_{j=1}^m B_d(\epsilon, a_j) \subset N_d(\epsilon, A_i)$. Sean $U = \bigcup_{j=1}^m U_{a_j}$ y $V = \bigcup_{j=1}^m V_{a_j}$. Notemos que U y V son subconjuntos abiertos de X. Además, como $\mathcal{A} = \{U_{a_1}, ..., U_{a_m}\}$ es una familia de subconjuntos conexos, $A_i \subset \bigcup \mathcal{A}$ y para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $a_j \in A_i \cap U_{a_j}$, por [21, Teorema 2], se tiene que $U = A_i \cup \left(\bigcup_{j=1}^m U_{a_j}\right)$ es conexo. Mostremos que V también es conexo, para esto, supongamos que es disconexo, es decir, existen V_1 y V_2 subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de V tales que $V = V_1 \cup V_2$. Como para cada $j \in \{1, 2, ..., m\}$, V_{a_j} es conexo, entonces $V_{a_j} \subset V_1$ o $V_{a_j} \subset V_2$, así, podemos asumir que existe $r \in \{1, 2, ..., m-1\}$ tal que $\left(\bigcup_{j=1}^r V_{a_j}\right) \subset V_1$ y $\left(\bigcup_{j=r+1}^m V_{a_j}\right) \subset V_2$, por lo que $\left(\bigcup_{j=1}^r V_{a_j}\right) \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^m V_{a_j}\right) = \emptyset$. Notemos que como U es conexo, $W = \left(\bigcup_{j=1}^r U_{a_j}\right) \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^m U_{a_j}\right)$ es un subconjunto abierto y no vacío de X. Además, como $\operatorname{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$, $W - \mathcal{P}(X) = \left(\left(\bigcup_{j=1}^r U_{a_j}\right) \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^m U_{a_j}\right)\right) - \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ ya que si fuera vacío, $\left(\bigcup_{j=1}^r U_{a_j}\right) \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^m U_{a_j}\right) \subset \mathcal{P}(X)$. De donde, $\left(\bigcup_{j=1}^r U_{a_j}\right) \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^m U_{a_j}\right) \subset \operatorname{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \emptyset$, lo que es una contradicción. Sin embargo, si $W - \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$, entonces $W - \mathcal{P}(X) = \left(\bigcup_{j=1}^r V_{a_j}\right) \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^m V_{a_j}\right) \neq \emptyset$, lo que también es una contradicción. Como en ambos casos obtenemos una contradicción, V tiene que ser conexo. Luego, por el Teorema 1.21, V es arco conexo. Así, por el Lema 3.27, existe un árbol T_i contenido en V tal que $\{b(a_1), ..., b(a_m)\} \subset T_i$. Como $b(a_j) \in V_{a_j} \subset U_{a_j} \subset B_d(\epsilon, a_j)$, entonces $d(a_j, b(a_j)) < \epsilon$. Sea $x \in B_d(\epsilon, a_j)$, entonces $d(a_j, x) < \epsilon$. Como $d(b(a_j), x) \leq d(b(a_j), a_j) + d(a_j, x) < 2\epsilon$, $B_d(\epsilon, a_j) \subset B_d(2\epsilon, b(a_j))$, para cada $j \in \{1, ..., m\}$. Por lo que, $A_i \subset \bigcup_{j=1}^m U_{a_j} \subset \bigcup_{j=1}^m B_d(\epsilon, a_j) \subset \bigcup_{j=1}^m B_d(2\epsilon, b(a_j)) \subset N_d(2\epsilon, T_i)$. Como también, $T_i \subset V \subset U \subset N_d(\epsilon, A_i) \subset N_d(2\epsilon, A_i)$, por el Lema 2.4, $H_d(A_i, T_i) < 2\epsilon$. Además, $T_i \subset V - \mathcal{P}(X)$, de donde $T_i \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. Notemos que $H_{H_d}(\{A_i : i \leq m\}, \{T_i : i \leq m\}) < 2\epsilon$. Sea $T = \bigcup_{j=1}^m T_i \in C_n(X)$, entonces $T \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. Por el Lema 3.24, $H_d(A, T) < 2\epsilon$, es decir, $T \in B_{H_d}(2\epsilon, A)$. Además, por el Teorema 3.22 (c), se obtiene que $\dim(T, C_n(X))$ es finita. Por lo tanto, $T \in \mathfrak{F}_n(X)$ y $B_{H_d}(2\epsilon, A) \cap \mathfrak{F}_n(X) \neq \emptyset$. Así concluye la demostración.

(b)$\Rightarrow$(c) Es claro, ya que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}_n(X)$ es denso en $C_n(X)$, en particular, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$.

(c)$\Rightarrow$(a) Mostremos primero que X es casi enrejado. Para esto, es suficiente mostrar que $X \subset \operatorname{cl}_X(\mathcal{G}(X))$. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Como $\{x\} \in C_n(X)$ y $\mathfrak{F}_n(X)$ es denso en $C_n(X)$, entonces $B_{H_d}(\epsilon, \{x\}) \cap \mathfrak{F}_n(X) \neq \emptyset$, es decir, existe $A \in \mathfrak{F}_n(X)$ tal que $H_d(\{x\}, A) < \epsilon$. Como $\dim(A, C_n(X))$ es finita, por el

Teorema 3.22, existe una gráfica finita G contenida en X tal que $A \subset \operatorname{int}_X(G)$. Dado $a \in A$, por Lema 2.4, $A \subset N_d(\epsilon, \{x\})$, luego, $a \in B_d(\epsilon, x)$. Como también, G es una gráfica finita la cual es una vecindad de a en X, entonces $a \in B_d(\epsilon, x) \cap \mathcal{G}(X)$. Así, $\mathcal{G}(X)$ es denso en X y por ende, X es casi enrejado.

Ahora supongamos que X no es enrejado, entonces existen $x \in X$ y W una vecindad de x en X tal que para cada vecindad U de x con $x \in U \subset W$, $U - \mathcal{P}(X)$ es disconexo. Como X es localmente conexo, existe un conjunto V abierto y conexo de X tal que $x \in V \subset W$. Luego, $V - \mathcal{P}(X)$ es disconexo, es decir, $V - \mathcal{P}(X) = S \cup T$, con S y T subconjuntos no vacíos, ajenos y abiertos de $V - \mathcal{P}(X)$. Notemos que S y T también son abiertos de X. Sean $x \in T$ y $p_1, ..., p_n \in S$, n puntos de S distintos por pares. Como V es un abierto y conexo de X, por el Teorema 1.21, V es arco conexo. Además, ya que $\{x\}$ y $\{p_1, ..., p_n\}$ son subconjuntos cerrados no vacíos y ajenos de V, por el Lema 3.2, existe un arco $\alpha \subset V$ que va de x a algún punto $p_i \in \{p_1, ..., p_n\}$ y $\alpha \cap \{p_1, ..., p_n\} = \{p_i\}$. Supongamos que $p_i = p_n$. Sea $A = \{p_1, ..., p_{n-1}\} \cup \alpha \in C_n(X)$. Como $\alpha, \{p_1\}, ..., \{p_{n-1}\} \in 2^X$ y son ajenos por pares, por el Lema 2.2, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_d(\epsilon, p_1), ..., B_d(\epsilon, p_{n-1})$ y $N_d(\epsilon, \alpha)$ son ajenos por pares. Además, ya que V, T y S son abiertos de X con $\alpha \subset V$, $\{x\} \subset T$ y $\{p_k\} \subset S$, para $k \in \{1, ..., n\}$, por el Lema 2.3, podemos suponer que $N_d(\epsilon, \alpha) \subset V$, $B_d(\epsilon, x) \subset T$ y $B_d(\epsilon, p_k) \subset S$. Por otro lado, como $\mathfrak{F}_n(X)$ en denso en $C_n(X)$, existe $B \in \mathfrak{F}_n(X)$ tal que $H_d(A, B) < \epsilon$. Luego, por el Lema 2.4, $B \subset N_d(\epsilon, A) = \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} B_d(\epsilon, p_j)\right) \cup N_d(\epsilon, \alpha)$, con cada uniendo abierto de X y disjuntos por pares. Además, por el Lema 3.28, B intersecta a cada uno de estos uniendo. Así, las componentes de B son $B_1 = B \cap B_d(\epsilon, p_1)$, $B_2 = B \cap B_d(\epsilon, p_2)$, ...,$B_{n-1} = B \cap B_d(\epsilon, p_{n-1})$ y $B_n = B \cap N_d(\epsilon, \alpha)$. Notemos que por el Lema 3.28, $B \cap B_d(\epsilon, p_n) \neq \emptyset$ y $B \cap B_d(\epsilon, x) \neq \emptyset$. Así, $B_n \cap S = B \cap N_d(\epsilon, \alpha) \cap S \supset B \cap B_d(\epsilon, p_n) \cap S = B \cap B_d(\epsilon, p_n)$ y $B_n \cap T = B \cap N_d(\epsilon, \alpha) \cap T \supset B \cap B_d(\epsilon, x) \cap T = B \cap B_d(\epsilon, x)$ son conjuntos no vacíos. Como B_n es conexo, $B_n \not\subset S \cup T = V - \mathcal{P}(X)$, además, $B_n \subset N_d(\epsilon, \alpha) \subset V$, entonces $B_n \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Así, $B \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Como $B \in C_n(X)$, por el Teorema 3.22, $B \notin \mathfrak{F}_n(X)$, lo que es una contradicción. Esto prueba que X es enrejado y concluye la demostración. □

Definición 3.31. *Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.*

Denotamos por $\mathfrak{D}$ la clase de todas las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado

Definición 3.32. *Una **dendrita local** es un continuo tal que cada uno de sus puntos tiene una vecindad que es una dendrita.*

Denotamos por $\mathfrak{LD}$ la clase de las dendritas locales tal que cada uno de sus puntos tiene una vecindad que pertenece a $\mathfrak{D}$.

Definición 3.33. *Sean X un continuo y $x \in X$. Decimos que x es un **punto de corte** de X si $X - \{x\}$ es disconexo y x es un **punto de no corte** de X si $X - \{x\}$ es conexo.*

Observación 3.34. *Dado X una dendrita, por* [29, Teorema 6.6]*, existen al menos dos puntos de no corte de X, así, por* [29, Teorema 10.7]*, los puntos de no corte de X son los puntos extremos de X. Por lo tanto, X posee al menos dos puntos extremos.*

Teorema 3.35. [23, Capítulo 6, Teorema 4 (i), página 303] *Un continuo X es una dendrita local si y solo si es localmente conexo y contiene a lo más un número finito de curvas cerradas simples.*

Proposición 3.36. [29, Proposición 9.5] *Si X es un continuo, entonces para cada $x \in X$, $\operatorname{ord}(x, X) \leq 2$ si y solo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

Teorema 3.37. [29, Proposición 9.4] *Si X es un continuo tal que $\operatorname{ord}(x, X) < \aleph_0$, para cada $x \in X$, entonces cada subcontinuo de X es un continuo localmente conexo. En particular, cada subcontinuo de una gráfica finita es un continuo localmente conexo.*

Observación 3.38. *De acuerdo a la Proposición 3.36 y el Teorema 3.37, cada arco, curva cerrada simple y gráfica finita, son continuos localmente conexos. Luego, como cada árbol es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples, entonces es una dendrita. En particular, cada arco es una dendrita.*

Definición 3.39. *Un n-**odo simple** es un continuo X que es la unión de n arcos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, con $n \in \mathbb{N}$ tal que existe $p \in X$ con la propiedad de que $\alpha_i \cap \alpha_j = \{p\}$, cuando $i \neq j$, y p es un punto extremo de cada uno de los arcos α_i. En particular, cada n-odo simple es una gráfica finita y una dendrita.*

Teorema 3.40. *La clase de las gráficas finitas está contenida en la clase $\mathfrak{LD}$.*

Demostración. Sea G una gráfica finita, por el Teorema 3.12, cada punto $x \in G$, tiene una vecindad cerrada que es un n-odo simple o un arco. Como cada n-odo simple y cada arco es una dendrita, se sigue que G es una dendrita local. Además, como en cada arco y cada n-odo simple su conjunto de puntos extremos es finito, y por ende, cerrado, se sigue que $G \in \mathfrak{LD}$. □

Teorema 3.41. *La clase de los continuos enrejados contiene las siguientes clases:*

(a) *gráficas finitas;*

(b) *clase $\mathfrak{D}$;*

(c) *clase $\mathfrak{LD}$.*

Demostración. Por el Teorema 3.40, cada gráfica finita es un elemento de $\mathfrak{LD}$. Además, de acuerdo al Teorema 3.35, cada dendrita es una dendrita local, así, en particular, cada elemento de $\mathfrak{D}$ es un elemento de $\mathfrak{LD}$, es decir, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{LD}$. De modo que, es suficiente mostrar que los elementos de $\mathfrak{LD}$ son enrejados. Sea $X \in \mathfrak{LD}$, por [3, Teorema 3.20], $\mathfrak{F}(X)$ es denso en $C(X)$, además, por el Teorema 3.35, X es localmente conexo, así, por el Teorema 3.30, X es enrejado. □

3.3. Continuos que no son casi enrejados

La presente sección está encaminada a presentar una condición necesaria que tienen que cumplir los continuos localmente conexos para que posean n-ésimo hiperespacio único, véase Teorema 3.54. Además, de demostrar que para cualquier continuo X localmente conexo que no sea casi enrejado, existe una familia no numerable de continuos localmente conexos cuyos n-ésimos hiperespacios son homeomorfos a $C_n(X)$, pero dichos continuos no son homeomorfos a X, véase Teorema 3.55. Para esto, necesitamos algunos resultados auxiliares. También, para mayor simplicidad, en algunos resultados de esta sección, si X es un subespacio de un espacio métrico Y, con métrica d y $p \in X$, utilizamos la siguiente notación, $B_\epsilon^X(p)$, para denotar a $B_d(\epsilon, p) \cap X$. Algo similar tenemos para $N_\epsilon^X(A)$, con $A \in 2^X$.

Lema 3.42. *Si X es un continuo localmente conexo, R un subconjunto cerrado de $\mathcal{P}(X)$ y $K \in C(X)$, tales que $\operatorname{int}_X(K) \cap R \neq \emptyset$, entonces $C_n^K(X)$ es un Z-conjunto de $C_n(X, R)$.*

Demostración. Sea d una métrica para X. Observemos primero que $C_n^K(X)$ es un subconjunto cerrado de $C_n(X, R)$. En efecto, sea $A \in C_n^K(X)$, por hipótesis $\operatorname{int}_X(K) \cap R \neq \emptyset$, entonces $A \cap R \supset K \cap R \supset \operatorname{int}_X(K) \cap R \neq \emptyset$, es decir, $A \cap R \neq \emptyset$, así, $A \in C_n(X, R)$. Además, como $C_n^K(X)$ es compacto y $C_n(X, R)$ es un espacio métrico, se sigue que $C_n^K(X)$ es un subconjunto cerrado de $C_n(X, R)$. Ahora mostremos, que para cada $\epsilon > 0$, existe una función continua, $g_\epsilon \colon C_n(X, R) \to C_n(X, R) - C_n^K(X)$ tal que $H_d(g_\epsilon(A), A) < \epsilon$, para toda $A \in C_n(X, R)$.

Sea $\epsilon > 0$ y fijemos $p \in \operatorname{int}_X(K) \cap R$ tales que $B_d(\epsilon, p) \subsetneq \operatorname{int}_X(K)$. Por [29, Teorema 8.10], existen $m \in \mathbb{N}$ y subcontinuos localmente conexos $X_1, ..., X_m$ de X tales que, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, $\operatorname{diam}(X_i) < \frac{\epsilon}{4}$ y $X = X_1 \cup X_2 \cdots \cup X_m$. Consideremos $\Lambda = \{i \in \{1, \ldots, m\} \colon p \in X_i\}$. Sea $x \in \bigcup_{i \in \Lambda} X_i$, como $p \in \bigcap_{i \in \Lambda} X_i$, se sigue que $d(x, p) < \frac{\epsilon}{4}$, es decir, $x \in B_d\left(\frac{\epsilon}{4}, p\right) \subset B_d(\epsilon, p) \subsetneq \operatorname{int}_X(K)$. Esto implica que, $\Lambda = \{1, \ldots, r\}$, con $r < m$. Definamos la estrella de p, por $\operatorname{St}(p) = X_1 \cup X_2 \cdots \cup X_r$. Notemos que $\operatorname{St}(p) \subset B_d\left(\frac{\epsilon}{4}, p\right) \subsetneq \operatorname{int}_X(K)$. Sea $F = \{j \in \{1, \ldots, m\} \colon p \notin X_j \text{ y } X_j \cap \operatorname{St}(p) \neq \emptyset\}$. Observemos que $F \neq \emptyset$. En efecto, sea $E = \{j \in \{1, ..., m\} \colon X_j \cap \operatorname{St}(p) = \emptyset\}$. Notemos que $\{1, \ldots, m\} = E \cup F \cup \Lambda$. Además, $\operatorname{St}(p)$ y $\bigcup_{j \in E} X_j$ son subconjuntos cerrados y ajenos de X. Si $F = \emptyset$, como $\operatorname{St}(p) \subsetneq X$, se tiene que $\bigcup_{j \in E} X_j \neq \emptyset$ y $X = \operatorname{St}(p) \cup (\bigcup \{X_j \colon j \in E\})$. Esto contradice la conexidad de X, por lo que $F \neq \emptyset$. Dado $j \in F$, fijemos $p_j \in X_j \cap \operatorname{St}(p)$. Por [20, Proposición 10.7], $\operatorname{St}(p)$ es un continuo localmente conexo y por el Teorema 1.20 es arco conexo. Así, por el Lema 3.27 existe un árbol T contenido en $\operatorname{St}(p)$ tal que $\{p\} \cup \{p_j \colon j \in F\} \subset T$. Entonces, $T \cap X_j \neq \emptyset$, para cada $j \in F$.

Sea $Y = T \cup (\bigcup \{X_j \colon j \in F\})$. Como para cada $j \in F$, $p_j \in T \cap X_j$, se tiene que, por [29, Proposición 10.7], Y es un continuo localmente conexo. Además, por el Lema 2.20, $C(Y)$ es un hiperespacio de crecimiento y por [5, Teorema 4.14], un retracto absoluto. Notemos que para cada $j \in F$ y $x \in X_j$, se tiene

que $d(x,p) \leq d(x,p_j) + d(p_j,p) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$, es decir, $x \in B_d\left(\frac{\epsilon}{2}, p\right)$. De este modo $\bigcup_{j\in F} X_j \subset \operatorname{int}_X(K)$. Así, $Y \subset B_d\left(\frac{\epsilon}{2}, p\right) \subset \operatorname{int}_X(K)$.

Consideremos $Z = Y \cap R$. Observemos que $p \in Y \cap R$. Por hipótesis, R es un subconjunto cerrado de $\mathcal{P}(X)$, entonces R es un subconjunto cerrado de X. Así, Z es un subconjunto cerrado de Y. Luego, por el Lema 2.20, $C(Y,Z)$ y $C(Y)$ son hiperespacios de crecimiento, y por [5, Teorema 4.14], retractos absolutos.

Definamos $\Phi\colon X \to C(X)$ que está dada por $\Phi(x) = \{x\}$. Observemos que por el Lema 2.8, Φ es una función continua. Luego, $\alpha = \Phi\restriction_Y\colon Y \to C(Y)$ y $\beta = \Phi\restriction_Z\colon Z \to C(Y,Z)$, también son continuas. Por otra parte, como $C(Y,Z)$ es un compactum y un retracto absoluto, por el Teorema 2.38, $C(Y,Z)$, es un extensor absoluto, así, ya que Z es un subconjunto cerrado de $(\mathrm{St}(p) \cup Y) \cap R$, β puede extenderse a una función continua $\overline{\beta}\colon (\mathrm{St}(p) \cup Y) \cap R \to C(Y,Z)$. Observemos que $(\mathrm{St}(p) \cup Y) \cap R$ y Y son subconjuntos cerrados de $((\mathrm{St}(p) \cup Y) \cap R) \cup Y$. Además, $((St(p) \cup Y) \cap R) \cap Y = Z$ y $\alpha\restriction_Z = \overline{\beta}\restriction_Z$, así, por [27, Teorema 18.3], la función $\alpha \cup \overline{\beta}\colon ((\mathrm{St}(p) \cup Y) \cap R) \cup Y \to C(Y)$ definida como

$$\alpha \cup \overline{\beta}(x) = \begin{cases} \alpha(x), & \text{si } x \in Y, \\ \overline{\beta}(x), & \text{si } x \in (\mathrm{St}(p) \cup Y) \cap R, \end{cases}$$

es una función continua.

Ahora, como $((\mathrm{St}(p) \cup Y) \cap R) \cup Y$ es un subconjunto cerrado de $\mathrm{St}(p) \cup Y$ y $C(Y)$ es un extensor absoluto, se sigue que $\alpha \cup \overline{\beta}$ puede extenderse a una función continua $\overline{\alpha}\colon \mathrm{St}(p) \cup Y \to C(Y)$.

Sea $\gamma\colon X \to C(X)$ la función que está dada por

$$\gamma(x) = \begin{cases} \overline{\alpha}(x), & \text{si } x \in \mathrm{St}(p) \cup Y, \\ \{x\}, & \text{si } x \in \mathrm{cl}_X(X - (\mathrm{St}(p) \cup Y)). \end{cases}$$

Para mostrar que γ es continua en $C(X)$, probemos que $\mathrm{cl}_X(X - \mathrm{St}(p)) \cap \mathrm{St}(p) \subset Y$. Sean $x \in \mathrm{cl}_X(X - \mathrm{St}(p)) \cap \mathrm{St}(p)$ y $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $X - \mathrm{St}(p)$ tal que $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a x. Como $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$ y $m < \infty$, existe un número $l \in \{1, 2, \cdots, m\}$ tal que $x_k \in X_l$. para una cantidad infinita de k´s. Observemos que esto implica que X_l tiene las siguientes tres propiedades:

(i) $x \in X_l$;

(ii) $p \notin X_l$, ya que $x_k \notin \mathrm{St}(p)$ para cualquier k;

(iii) $X_l \cap \mathrm{St}(p) \neq \emptyset$, esto debido a (i), y ya que $x \in \mathrm{St}(p)$.

Por (ii) y (iii), tenemos que $X_l \in \{X_j\colon j \in F\}$, y por (i), $x \in X_l$, así, $x \in Y$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_X(X - \mathrm{St}(p)) \cap \mathrm{St}(p) \subset Y$.

Como $\mathrm{bd}_X(\mathrm{St}(p)\cup Y)\subset \mathrm{bd}_X(\mathrm{St}(p))\cup \mathrm{bd}_X(Y)$ y Y es cerrado, por el párrafo anterior, tenemos que $\mathrm{bd}_X(\mathrm{St}(p)\cup Y) = \mathrm{cl}_X(X-(\mathrm{St}(p)\cup Y))\cap(\mathrm{St}(p)\cup Y)\subset Y$. Esto muestra que γ está bien definida. Luego, por [27, Teorema 18.3], γ es continua.

Definamos $g_\epsilon\colon C_n(X)\to C_n(X)$ como $g_\epsilon(A)=\bigcup\gamma(A)$. Sean $A\in C_n(X)$ y $A_1,\ldots,A_k$, con $k\leq n$, las componentes de A. Dado que γ es una función continua de X en $C(X)$, si $i\in\{1,\ldots,k\}$, $\gamma(A_i)$ es un subcontinuo de $C(X)$. Usando [22, Lema 2.2], se tiene que $\bigcup\gamma(A_i)\in C(X)$. Como $\bigcup\gamma(A)=\bigcup\{\bigcup\gamma(A_i): A_i$ es una componente de $A\}$ y A tiene a lo más n componentes, se sigue que $\bigcup\gamma(A)\in C_n(X)$. De esta manera, la función g_ϵ está bien definida. Ahora veamos que g_ϵ es continua sobre $C_n(X)$. Para esto, observemos que para cada $A\in C_n(X)$, $g_\epsilon(A)=\rho\circ\gamma^*(A)$, donde $\gamma^*\colon 2^X\to 2^{C(X)}$ y $\rho\colon 2^{2^X}\to 2^X$ son funciones que están dadas por $\rho(\mathcal{A})=\bigcup\mathcal{A}$ y $\gamma^*(A)=\gamma(A)$. Más aún, por el Lema 2.10 y el Lema 3.24, γ^* y ρ son continuas, así, g_ϵ es continua sobre $C_n(X)$.

Observemos que $\mathrm{St}(p)\cup Y\subset B_d\left(\frac{\epsilon}{2},p\right)$, entonces $\mathrm{diam}(\mathrm{St}(p)\cup Y)<\epsilon$. Sea $x\in X=(\mathrm{St}(p)\cup Y)\cup\mathrm{cl}_X(X-(\mathrm{St}(p)\cup Y))$. Si $x\in\mathrm{St}(p)\cup Y$, entonces $\{x\}\subset\mathrm{St}(p)\cup Y$ y $\gamma(x)=\overline{\alpha}(x)\in C(Y)$, esto implica que $\gamma(x)\subset\mathrm{St}(p)\cup Y$. Así, $\mathrm{diam}(\{x\}\cup\gamma(x))\leq\mathrm{diam}(\mathrm{St}(p)\cup Y)<\epsilon$, es decir, $\mathrm{diam}(\{x\}\cup\gamma(x))<\epsilon$. Si $x\in\mathrm{cl}_X(X-(\mathrm{St}(p)\cup Y))$, entonces $\gamma(x)=\{x\}$, por lo que $\mathrm{diam}(\{x\}\cup\gamma(x))=0\leq\mathrm{diam}(\mathrm{St}(p)\cup Y)<\epsilon$, es decir, $\mathrm{diam}(\{x\}\cup\gamma(x))<\epsilon$. Por lo tanto, para cada $x\in X$, se cumple que $\mathrm{diam}(\{x\}\cup\gamma(x))<\epsilon$.

Así, para cualquier $A\in C_n(X)$, tenemos que $A\subset N_d(\epsilon,g_\epsilon(A))$ y $g_\epsilon(A)\subset N_d(\epsilon,A)$. Por el Lema 2.4, $H_d(A,g_\epsilon(A))<\epsilon$.

Sea $A\in C_n(X,R)$, y fijemos $a\in A\cap R$. Si $a\in\mathrm{cl}_X(X-(\mathrm{St}(p)\cup Y))$, entonces $\gamma(a)=\{a\}\subset R$, por lo cual $g_\epsilon(A)\cap R\supset\gamma(a)\cap R\neq\emptyset$, así, $g_\epsilon(A)\in C_n(X,R)$. Si $a\in\mathrm{St}(p)\cup Y$, entonces $a\in R\cap(\mathrm{St}(p)\cup Y)$. Luego, $\gamma(a)=\overline{\alpha}(a)=\left(\alpha\cup\overline{\beta}(a)\right)=\overline{\beta}(a)\in C(Y,Z)$, debido a esto, $g_\epsilon(A)\cap R\supset\gamma(a)\cap Z\neq\emptyset$. De cualquier manera, $g_\epsilon(A)\in C_n(X,R)$.

Como $\mathrm{St}(p)-(\bigcup\{X_j: j\in F\})=\mathrm{int}_X(\mathrm{St}(p))\cap(X-(\bigcup\{X_j: j\in F\}))$ es un subconjunto abierto de X que contiene a p y $p\in\mathcal{P}(X)$, se sigue que $\mathrm{St}(p)-(\bigcup\{X_j: j\in F\})\not\subset T$. Sea $s\in(\mathrm{St}(p)-\bigcup\{X_j: j\in F\})-T\subset\mathrm{St}(p)-Y\subset\mathrm{int}_X(K)$. Dado $x\in X$, si $x\in\mathrm{St}(p)\cup Y$, entonces $\gamma(x)=\overline{\alpha}(x)\subset Y$, como $s\in\mathrm{St}(p)-Y$, entonces $s\notin\gamma(x)$. Si $x\in X-(\mathrm{St}(p)\cup Y)$, entonces, $x\in\mathrm{cl}_X(X-(St(p)\cup Y))$, luego $\gamma(x)=\{x\}$, por lo que $s\notin\gamma(x)$. Por lo tanto, $K\not\subset g_\epsilon(A)$, para cualquier $A\in C_n(X)$. Entonces, $g_\epsilon\restriction_{C_n(X,R)}\colon C_n(X,R)\to C_n(X,R)-C_n^K(X)$ es la función continua deseada y el lema está terminado. □

Teorema 3.43. *Si X es un continuo localmente conexo y R un subconjunto cerrado no vacío de $\mathcal{P}(X)$, entonces $C_n(X,R)$ es un cubo de Hilbert, para cada $n\in\mathbb{N}$.*

Demostración. La prueba está basada en el Teorema de Toruńczyk's (Teorema 2.43). Por el Lema 2.20, $C_n(X,R)$ es un hiperespacio de crecimiento, luego, por [5, Teorema 4.14], $C_n(X,R)$ es un retracto absoluto. Así, por el Teorema 2.43, resta verificar que $I_{d_{C_n(X,R)}}$ es un límite uniforme de Z-funciones. Sea d una métrica para X, por el Teorema 2.28, podemos asumir que d es una métrica convexa.

Sea $\epsilon > 0$, por el Lema 2.26, $\Phi_\epsilon \restriction_{C_n(X,R)} \colon C_n(X,R) \to C_n(X,R)$ es una función continua. Además, por el Lema 2.25, $H_d\left(I_{d_{C_n(X,R)}}(A), \Phi_\epsilon(A)\right) < \epsilon$, para cada $A \in C_n(X,R)$.

Así, solo necesitamos mostrar que cada $\Phi_\epsilon \restriction_{C_n(X,R)}$ es una Z-función. Notemos primero que, como $C_n(X,R)$ es un compactum y Φ_ϵ es una función continua, se sigue que $\Phi_\epsilon(C_n(X,R))$ es un subconjunto compacto y por lo tanto, un cerrado de $C_n(X,R)$. Por otro lado, como R es un subconjunto compacto de X, existe un número finito de puntos $p_1, \ldots, p_s$ de R, tales que $R \subset \bigcup_{i=1}^{s} B_d\left(\frac{\epsilon}{2}, p_i\right)$. Como para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, $B_d\left(\frac{\epsilon}{2}, p_i\right) \subset C_d\left(\frac{\epsilon}{2}, \{p_i\}\right)$, se sigue que $R \subset \bigcup_{i=1}^{s} C_d\left(\frac{\epsilon}{2}, \{p_i\}\right)$. Sea $K_i = C_d\left(\frac{\epsilon}{2}, \{p_i\}\right)$, por el Lema 2.27, $K_i \in C(X)$, es decir, K_i es un subcontinuo de X. Como $p_i \in \operatorname{int}_X(K_i) \cap R$, aplicando el Lema 3.42, se tiene que $C_n^{K_i}(X)$ es un Z-conjunto de $C_n(X,R)$. Además, por el Lema 2.42, el conjunto $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{s} C_n^{K_i}(X)$ es un Z-conjunto de $C_n(X,R)$. Sea $A \in C_n(X,R)$, entonces $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{s} C_d\left(\frac{\epsilon}{2}, \{p_i\}\right)\right) \supset A \cap R \neq \emptyset$. Así, existe $x \in A \cap C_d\left(\frac{\epsilon}{2}, \{p_j\}\right)$, para algún $j \in \{1, \ldots, s\}$. Observemos que $C_d\left(\frac{\epsilon}{2}, \{p_j\}\right) \subset C_d(\epsilon, \{x\}) \subset C_d(\epsilon, A) = \Phi_\epsilon(A)$. Como A fue elegida arbitrariamente en $C_n(X,R)$, se sigue que $\Phi_\epsilon(C_n(X,R)) \subset \mathcal{G}$.

Ya que $C_n(X,R)$ es cerrado y Φ_ϵ es continua, entonces $\Phi_\epsilon(C_n(X,R))$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{G}$. Por el Lema 2.42, $\Phi_\epsilon(C_n(X,R))$ es un Z-conjunto de $C_n(X,R)$. Por lo tanto, para cada $\epsilon > 0$, $\Phi_\epsilon \restriction_{C_n(X,R)}$ es una Z-función y $I_{d_{C_n(X,R)}}$ es un límite uniforme de Z-funciones. Aplicando el Teorema 2.43, obtenemos que $C_n(X,R)$ es un cubo de Hilbert. □

El siguiente resultado es conocido como el Teorema de homegeneidad de Anderson's, y es importante para la demostración del Lema 3.53.

Teorema 3.44. [8, Corolario 10.3] *Sean A y B dos Z-conjuntos en un cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$. Si $h \colon A \to B$ es un homeomorfismo, entonces h se extiende a un homeomorfismo de $\mathcal{Q}$ sobre $\mathcal{Q}$.*

Ahora necesitamos definir una operación que nos permitirá construir nuevos continuos a partir de continuos ya conocidos, esta operación nos será de ayuda para lo que resta del presente capítulo. Para esto necesitamos algunos conceptos.

Definición 3.45. *Sean (S_2, τ_1) y (S_2, τ_2) dos espacios topológicos ajenos. La* **unión libre** *de S_1 y S_2 es el espacio topológico (S, τ) donde $S = S_1 \cup S_2$ y τ está definida por la condición: $U \in \tau$ si y solo si $U \cap S_1 \in \tau_1$ y $U \cap S_2 \in \tau_2$.*

Si (S, τ) es un espacio topológico y A es un subconjunto cerrado no vacío de S, denotamos por $\mathcal{D}_A$ la partición de S dada por $\mathcal{D}_A = \{A\} \cup \{\{s\} \colon s \in S - A\}$. Una topología para $\mathcal{D}_A$ es $\tau_{\mathcal{D}_A} = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_A \colon \bigcup \mathcal{U} \in \tau\}$.

Por otra parte, sabemos por [6, Proposición 4.30] que $\tau_{\mathcal{D}_A}$ es la **topología cociente** definida por la **función natural** $q \colon S \to \mathcal{D}_A$ la cual asigna a cada $s \in S$ el único elemento de $\mathcal{D}_A$ al cual pertenece. Se acostumbra a denotar

el espacio topológico $(\mathcal{D}_A, \tau_{\mathcal{D}_A})$ por S/A. Intuitivamente, S/A es el espacio obtenido a partir de S identificando A como un solo punto de S.

Definición 3.46. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces f es una identificación si y solo si la topología para Y coincide con $\mathcal{U} = \{U \subset Y\colon f^{-1}(U)$ es un abierto de $X\}$.*

Proposición 3.47. *Si X y Y son dos continuos ajenos y $p \in X$ y $y \in Y$, entonces $X \cup Y/\{p, y\}$ es un continuo.*

Demostración. Sea $q\colon X \cup Y \to X \cup Y/\{p, y\}$ la función natural que está dada por

$$q(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in (X \cup Y) - \{p, y\}, \\ \{p, y\} & \text{si } x \in \{p, y\}. \end{cases}$$

Como $X \cup Y/\{p, y\}$ tiene la topología cociente, tenemos que q es continua, además, $\{A \subset X \cup Y/\{p, y\}\colon q^{-1}(A)$ es un abierto de $X \cup Y\}$ es la topología de $X \cup Y/\{p, y\}$ más grande que hace continua a q. Veamos que $q(X) - \{\{p, y\}\}$ es homeomorfo a $X - \{p\}$ y $q(Y) - \{\{p, y\}\}$ es homeomorfo a $Y - \{y\}$. Para esto, demostremos primero que $q \restriction_X$ y $q \restriction_Y$ son encajes. Para esto, basta demostrar que $q \restriction X$ es un encaje, ya que el procedimiento para ver que $q \restriction_Y$ es un encaje, es similar. Observemos que $q \restriction_X$ es una función inyectiva y continua. Luego, $q \restriction_X\colon X \to q(X)$ es biyectiva y continua. Así, solo necesitamos probar que, para cualquier subconjunto abierto de X, su imagen bajo $q \restriction_X$ es un subconjunto abierto de $q(X)$. Sea U un subconjunto abierto de X, si $p \in U$, se tiene que $q(p) \in q(U)$, entonces $q^{-1}(q(U \cup Y)) = U \cup Y$. Como $U \cup Y$ es un subconjunto abierto de $X \cup Y$, se sigue que $q(U \cup Y)$ es un subconjunto abierto de $X \cup Y/\{p, y\}$. Como $q(U) = q(U \cup Y) \cap q(X) = q(U)$, tenemos que $q(U)$ es un subconjunto abierto de $q(X)$. En otro caso, si $p \notin U$, tenemos que $q(p) \notin q(U)$, entonces $q^{-1}(q(U)) = U$. Como X es un subconjunto abierto de $X \cup Y$, entonces U es un subconjunto abierto de $X \cup Y$. Luego, $q(U)$ es un subconjunto abierto de $X \cup Y/\{p, y\}$. Así, $q(U)$ es un subconjunto abierto de $q(X)$. Por lo tanto, concluimos que $q \restriction_X$ Y $q \restriction_Y$ son encajes.

Ahora, como $X - \{p\} \subset X$, $Y - \{y\} \subset Y$ y $q(X - \{p\}) = q(X) - \{\{p, y\}\}$ y $q(Y - \{y\}) = q(Y) - \{\{p, y\}\}$, tenemos que $q(X) - \{\{p, y\}\}$ es homeomorfo a $X - \{p\}$ y $q(Y) - \{\{p, y\}\}$ es homeomorfo a $Y - \{p\}$. Más aún, como $X - \{p\}$ y $Y - \{y\}$ son espacios de Hausdorff, porque X y Y lo son, tenemos que $q(X) - \{\{p, y\}\}$ y $q(Y) - \{\{p, y\}\}$ son espacios de Hausdorff disjuntos. Observemos también que, $q^{-1}(q(X) - \{\{p, y\}\}) = X - \{p\}$, así, como $X - \{p\}$ es un abierto de $X \cup Y$, entonces $q(X) - \{\{p, y\}\}$ es un abierto de $X \cup Y/\{p, y\}$. Similarmente, $q(Y) - \{\{p, y\}\}$ es un abierto de $X \cup Y/\{p, y\}$.

Por otro parte, como X y Y son conexos y compactos, y q es una función continua tal que $q(X) \cap q(Y) = \{\{p, y\}\}$, tenemos que $q(X \cup Y) = X \cup Y/\{p, y\}$ es conexo y compacto. Así, para probar que $X \cup Y/\{p, y\}$ es un continuo, por [29, Lema 3.2], es suficiente mostrar que $X \cup Y/\{p, y\}$ es un espacio de Hausdorff. Sean $u, v \in X \cup Y/\{p, y\}$, con $u \neq v$. Si u y v son elementos de $q(X) - \{\{p, y\}\}$ o de $q(Y) - \{\{p, y\}\}$, incluso, si algunos de ellos pertenece a $q(X) - \{\{p, y\}\}$ y el otro a $q(Y) - \{\{p, y\}\}$, por el párrafo anterior, no hay nada que probar. Así, podemos suponer que u o v es igual a $\{p, y\}$. Sin

pérdida de generalidad, supongamos que $u = \{p, y\}$ y $v \in q(X) - \{\{p, y\}\}$, entonces existen $p, r \in X$ tales que $q(p) = \{p, y\} = u$ y $q(r) = \{r\} = v$. Como $p \neq r$ y X es un espacio de Hausdorff, existen U y V subconjuntos ajenos y abiertos de X tales que $p \in U$ y $r \in V$. Así, $u = q(p) \in q(U) \subset q(U \cup Y)$ y $v = q(r) \in q(V)$. Veamos que $q(U \cup Y)$ y $q(V)$ son subconjuntos ajenos y abiertos de $X \cup Y/\{\{p, y\}\}$. Observemos primero, $q^{-1}(q(U \cup Y)) = U \cup Y$ y $q^{-1}(q(V)) = V$, luego, como $U \cup Y$ y V son subconjuntos ajenos y abiertos de $X \cup Y$ y $p, y \notin V$, entonces $q(U \cup Y)$ y $q(V)$ son subconjuntos ajenos y abiertos de $X \cup Y/\{\{p, y\}\}$. Por lo tanto, $\{X \cup Y\}/\{p, y\}$ es un espacio de Hausdorff y la proposición está probada. □

Habiendo demostrado la Proposición 3.47, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.48. *Sean X, Y dos continuos ajenos, $p \in X$ y $y \in Y$. Denotamos por $X \cup_p Y$ el continuo obtenido al identificar el conjunto $\{p, y\}$ como un solo punto de $X \cup Y$.*

De ahora en adelante, consideramos a X y Y como subespacios de $X \cup_p Y$, ignorando que se trata con una identificación. Así también, se asume que $X \cup Y = X \cup_p Y$ y $X \cap Y = \{p\}$.

Lema 3.49. *Sean X, Y y D continuos, y $p \in Y$, tales que $Y = X \cup D$ y $X \cap D = \{p\}$. Supongamos que E es un subconjunto cerrado de X que contiene a p, entonces $\mathrm{bd}_{C_n(X)}(C_n(X, E)) = \mathrm{bd}_{C_n(Y)}(C_n(Y, E \cup D))$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Mostremos primero que:

(a) $C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D) = C_n(X) - C_n(X, E)$;

(b) $C_n(X) \cap C_n(Y, E \cup D) = C_n(X, E)$.

(a) Sea $A \in C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D)$, entonces $A \subset Y$ y $A \cap (E \cup D) = \emptyset$. En particular, esto último nos dice que $A \cap E = \emptyset$ y $A \cap D = \emptyset$. Así, $A \subset Y - D \subset X$ y por tanto, $A \in C_n(X)$. Como también $A \cap E = \emptyset$, entonces $A \in C_n(X) - C_n(X, E)$.

Recíprocamente, sea $A \in C_n(X) - C_n(X, E)$, entonces $A \subset X \subset Y$ y $A \cap E = \emptyset$. Como $A \in C_n(Y)$, basta con demostrar que $A \cap (E \cup D) = \emptyset$. Para esto, observemos que

$$\begin{aligned} A \cap (E \cup D) &= (A \cap E) \cup (A \cap D) \\ &= (A \cap E) \cup (A \cap (X \cap D)) \\ &= (A \cap E) \cup (A \cap \{p\}) \\ &= A \cap (E \cup \{p\}) \\ &= A \cap E. \end{aligned}$$

Así, como $A \cap E = \emptyset$, entonces $A \cap (E \cup D) = \emptyset$.

(b) Como $C_n(X, E) \subset C_n(X)$ y $C_n(X, E) \subset C_n(Y, E \cup D)$, se tiene que $C_n(X, E) \subset C_n(X) \cap C_n(Y, E \cup D)$. Por lo cual, solo debemos probar la otra contención. Sea $A \in C_n(X) \cap C_n(Y, E \cup D)$, entonces $A \in C_n(X)$ y $A \cap$

$(E \cup D) \neq \emptyset$. Análogamente, como en el inciso anterior, $A \cap E = A \cap (E \cup D) \neq \emptyset$. Concluyendo lo requerido.

Demostremos ahora sí, que $\mathrm{bd}_{C_n(X)}(C_n(X,E)) = \mathrm{bd}_{C_n(Y)}(C_n(Y, E \cup D))$. Para esto, observemos primero que $C_n(X)$ es un subconjunto cerrado de $C_n(Y)$ y $C_n(X) - C_n(X,E) \subset C_n(X)$. Así, por el inciso (a),

$$\begin{aligned}
\mathrm{cl}_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X,E)) &= C_n(X) \cap \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(C_n(X) - C_n(X,E)) \\
&= C_n(X) \cap \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D)) \\
&= \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D)),
\end{aligned}$$

es decir, $\mathrm{cl}_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X,E)) = \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D))$. Por lo tanto, como $C_n(X,E)$ es un subconjunto cerrado de $C_n(X)$, $C_n(Y, E \cup D)$ es un subconjunto cerrado de $C_n(Y)$ y por el inciso (b),

$$\begin{aligned}
\mathrm{bd}_{C_n(X)}(C_n(X,E)) &= \mathrm{cl}_{C_n(X)}(C_n(X,E)) \cap \mathrm{cl}_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X,E)) \\
&= C_n(X,E) \cap \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D)) \\
&= C_n(Y, E \cup D) \cap \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D)) \\
&= \mathrm{bd}_{C_n(Y)}(C_n(Y, E \cup D)).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.50. *Sean X, Y y D continuos, y $p \in Y$, tales que $Y = X \cup D$ y $X \cap D = \{p\}$. Si d es una métrica convexa para Y, entonces d también es una métrica convexa para X.*

Demostración. Probemos que para cada par de elementos x y y de X, existe un arco que es isométrico a $[0, d(x,y)]$ y cuyos puntos extremos son x y y. Sean $x, y \in X$. Como d es una métrica convexa de Y, existe una isometría $\gamma\colon [0, d(x,y)] \to \gamma([0, d(x,y)]) \subset Y$. Sea $A = \gamma([0, d(x,y)])$, como toda isometría es un homeomorfismo, A es un arco cuyos puntos extremos es x y y. Observemos que podemos suponer que $p \in A$, ya que si $p \notin A$, como $A \subset Y$ es conexo y $X \cap D = \{p\}$, entonces $A \subset X$ o $A \subset D$. Si $A \subset D$, entonces $\{x,y\} \subset X \cap D$, pero $\{p,p\} \neq \{x,y\}$, lo que es una contradicción. Así, $A \subset X$. Por lo tanto, podemos asumir que $p \in A$. Si $p \in E(A)$, digamos $p = y$, entonces $A - \{p\}$ es conexo. Como X y D son conjuntos cerrados de Y y $X \cap D = \{p\}$, entonces $Y - X = D - X$ y $Y - D = X - D$ son subconjuntos abiertos no vacíos y ajenos de Y. Observemos también que $D - X = D - \{p\}$ y $X - D = X - \{p\}$. Luego, $A - \{p\} \subset Y - \{p\} = (X - \{p\}) \cup (D - \{p\})$. Como $A - \{p\}$ es conexo y $x \in (X - \{p\}) \cap (A - \{p\})$, entonces $A - \{p\} \subset X - \{p\}$. Así, $A \subset X$. Si $p \notin E(A)$, entonces $A - \{p\}$ es disconexo y tiene dos componentes C_1 y C_2 tales que $x \in C_1$ y $y \in C_2$. Como $x \in C_1 \cap (X - \{p\})$ y $y \in C_2 \cap (X - \{p\})$, entonces por un argumento similar al anterior, $C_1 \subset X - \{p\}$ y $C_2 \subset X - \{p\}$. Así, $A - \{p\} = C_1 \cup C_2 \subset X - \{p\}$, de donde $A \subset X$. Concluyendo lo requerido. □

Consideremos $\mathbb{N}' = (\mathbb{N} - \{1,2\}) \cup \{\omega\}$. Con la finalidad de demostrar el Teorema 3.51, haremos uso de las siguientes dendritas especiales sin arcos libres. Dado S un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}'$, denotamos por D_S cualquier dendrita que satisface las siguientes dos condiciones:

(i) si $p \in R(D_S)$, entonces $\operatorname{ord}(p, D_S) \in S$;

(ii) para cada $m \in S$ y cada arco A en D_S, existe $p \in A$ tal que $\operatorname{ord}(p, D_S) = m$.

Observemos que por [2, Teorema 4.11] las dendritas D_S existen.

Teorema 3.51. *Si X es un continuo localmente conexo tal que $R(X) \neq \emptyset$ y $p \in X$, entonces existe una clase no numerable $\mathcal{D}$ de dendritas sin arcos libres y no homeomorfas por pares tales que:*

(a) *si $D \in \mathcal{D}$, el continuo localmente conexo $X \cup_p D$ no es homeomorfo a X;*

(b) *si $B \neq D$ son elementos de $\mathcal{D}$, entonces $X \cup_p B$ y $X \cup_p D$ no son homeomorfos.*

Demostración. Sea $P(\mathbb{N}') = \{S : S \subset \mathbb{N}'\}$. Como X es un continuo localmente conexo, la clase $\mathcal{B} = \{U \subset X : U$ es abierto y conexo de $X\}$ es una base de X. Además, X es un espacio métrico compacto, entonces por [10, Teorema 1.1.15], existe una base numerable $\mathcal{B}_0$ de X tal que $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$. Supongamos que $\mathcal{B}_0 = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ y sea $f : \mathcal{B}_0 \to P(\mathbb{N}')$ la función que está dada por $f(U_n) = \{\operatorname{ord}(p, X) : p \in R(X) \cap U_n\}$, para cualquier $U_n \in \mathcal{B}_0$. Como $R(X) \neq \emptyset$, la función f está bien definida. Además, $f(\mathcal{B}_0) = \{f(U_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es numerable y $P(\mathbb{N}')$ es no numerable, entonces el conjunto $\mathcal{S} = P(\mathbb{N}') - f(\mathcal{B}_0) = \{S_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es no numerable y cumple con las siguientes propiedades:

(1) $S_\alpha \subset \mathbb{N}'$, para cada $\alpha \in \Lambda$;

(2) $S_\alpha \neq f(U_n)$, para cada $\alpha \in \Lambda$ y cada $n \in \mathbb{N}$;

(3) $S_\alpha \neq S_\beta$, si $\alpha, \beta \in \Lambda$ y $\alpha \neq \beta$.

Dado $\alpha \in \Lambda$, consideremos las dendritas D_{S_α} sin arcos libres descritas anteriormente, recordando que tienen las siguientes propiedades:

(4) si $x \in R(D_{S_\alpha})$, entonces $\operatorname{ord}(x, D_{S_\alpha}) \in S_\alpha$;

(5) para cada arco $A \in D_{S_\alpha}$ y cada $m \in S_\alpha$, existe $x \in A$ tal que $\operatorname{ord}(x, D_{S_\alpha}) = m$.

Entonces por [2, Teorema 4.11], $\mathcal{D} = \{D_{S_\alpha} : S_\alpha \in \mathcal{S}\}$ es una clase no numerable de dendritas sin arcos libres no homeomorfas por pares.

Demostremos (a). Sea $D_{S_\alpha} \in \mathcal{D}$, con $\alpha \in \Lambda$, y sean $p \in X$ y $e_\alpha \in D_{S_\alpha}$, con $e_\alpha \in E(D_{S_\alpha})$ (la cual existe por la Observación 3.34). Sea $Y_\alpha = X \cup_p D_{S_\alpha}$ al identificar p con e_α, como en la Definición 3.48. Supongamos que Y_α es homeomorfo a X, entonces existe un homeomorfismo $h_\alpha : Y_\alpha \to X$. Como $X \cap D_{S_\alpha} = \{p\}$ y X es un subconjunto cerrado de Y_α, tenemos que $Y_\alpha - X = D_{S_\alpha} - \{e_\alpha\}$ es un subconjunto abierto de Y_α. Más aún, como $e_\alpha \in E(D_{S_\alpha})$, por [29, Teorema 10.13], $D_{S_\alpha} - \{e_\alpha\}$ es un subconjunto conexo de D_{S_α}, así, $Y_\alpha - X$ es un subconjunto abierto y conexo de Y_α. Esto implica que $h_\alpha(Y_\alpha - X)$ es un conjunto abierto y conexo de X. En particular, $h_\alpha(Y_\alpha - X)$ es un conjunto abierto de X, por lo que, dado $y \in h_\alpha(Y_\alpha - X)$ existe $U_n \in \mathcal{B}_0$

abierto de X tal que $y \in U_n \subset h_\alpha(Y_\alpha - X) \subset h_\alpha(D_{S_\alpha}) \subset h(Y_\alpha) = X$. Observemos que $y \in \operatorname{int}_X(h_\alpha(D_{S_\alpha}))$. Así, por el Teorema 1.8 y la Proposición 1.9, tenemos que $\operatorname{ord}(y, X) = \operatorname{ord}(y, h_\alpha(D_{S_\alpha})) = \operatorname{ord}\left(h_\alpha{}^{-1}(y), D_{S_\alpha}\right)$. Por lo tanto, para cada $z \in R(X) \cap U_n$, se tiene que $h_\alpha{}^{-1}(z) \in R(D_{S_\alpha})$ y $\operatorname{ord}(z, X) = \operatorname{ord}\left(h_\alpha{}^{-1}(z), D_{S_\alpha}\right)$, además por (4), $\operatorname{ord}\left(h_\alpha{}^{-1}(z), D_{S_\alpha}\right) \in S_\alpha$. Esto implica que $f(U_n) \subset S_\alpha$.

Ahora probemos que $S_\alpha \subset f(U_n)$. Para esto, notemos primero que por el Teorema 1.21, U_n es arco conexo, ya que U_n es un subconjunto abierto y conexo de X y X es localmente conexo. Sea A un arco en U_n, como $U_n \subset h_\alpha(D_{S_\alpha})$, entonces $h_\alpha{}^{-1}(A) \subset h_\alpha{}^{-1}(U_n) \subset D_{S_\alpha} \subset h_\alpha{}^{-1}(X) = Y_\alpha$. Como $h_\alpha{}^{-1}(A)$ también es un arco y D_{S_α} satisface (5), dado $m \in S_\alpha$, existe $s \in h_\alpha{}^{-1}(A)$ tal que $\operatorname{ord}(s, D_{S_\alpha}) = m$. Por otra parte, como $h_\alpha(s) \in A \subset U_n \subset h_\alpha(D_{S_\alpha}) \subset X$, tenemos que $h_\alpha(s) \in \operatorname{int}_X(h_\alpha(D_{S_\alpha}))$. Así, por el Teorema 1.8 y la Proposición 1.9, se sigue que $\operatorname{ord}(h_\alpha(s), X) = \operatorname{ord}(h_\alpha(s), h_\alpha(D_{S_\alpha})) = \operatorname{ord}(s, D_{S_\alpha}) = m \geq 3$, es decir, $h_\alpha(s) \in R(X) \cap U_n$, por ende, $m \in f(U_n)$. Como m fue elegida arbitrariamente en S_α, se sigue que $S_\alpha \subset f(U_n)$. Por lo tanto, $S_\alpha = f(U_n)$, esto contradice (2), por lo cual, Y_α no es homeomorfo a X.

Por último, demostremos (b). Sean $D_{S_\alpha}, D_{S_\beta} \in \mathcal{D}$, con $\alpha, \beta \in \Lambda$ tales que $\alpha \neq \beta$. Observemos que $S_\alpha \neq S_\beta$, entonces $D_{S_\alpha} \neq D_{S_\beta}$. Más aún, D_{S_α} y D_{S_β} no son homeomorfos. Sean $Y_\alpha = X \cup_p D_{S_\alpha}$ y $Y_\beta = X \cup_p D_{S_\beta}$, los continuos obtenidos al identificar p con $e_\alpha \in D_{S_\alpha}$ y p con $e_\beta \in D_{S_\beta}$, respectivamente. Como $X \cap D_{S_\alpha} = \{p\}$ y $X \cap D_{S_\beta} = \{p\}$, tenemos que $Y_\alpha - X = D_{S_\alpha} - \{e_\alpha\}$ y $Y_\beta - X = D_{S_\beta} - \{e_\beta\}$. Además, por [29, Teorema 10.13], $D_{S_\alpha} - \{e_\alpha\}$ y $D_{S_\beta} - \{e_\beta\}$ son subconjuntos conexos de D_{S_α} y D_{S_β}, respectivamente. Así, como X es un subconjunto cerrado de Y_α y Y_β, se sigue que $Y_\alpha - X$ y $Y_\beta - X$ son conjuntos abiertos y conexos de Y_α y Y_β, respectivamente.

Supongamos que Y_α y Y_β son homeomorfos, entonces existe h un homeomorfismo que va de Y_α sobre Y_β. Si $F = h(Y_\alpha - X) \cap (Y_\beta - X) \neq \emptyset$, por el párrafo anterior, F es un conjunto abierto y conexo de Y_β, así, por el Teorema 1.21, F es arco conexo. Sea $h(A)$ un arco en F, entonces A es un arco en $(Y_\alpha - X) \cap h^{-1}(Y_\beta - X) \subset D_{S_\alpha} \subset Y_\alpha$. Sea $m \in S_\alpha$, por (4), existe $x \in A$ tal que $\operatorname{ord}(x, D_{S_\alpha}) = m \geq 3$. Por el Teorema 1.8, $\operatorname{ord}(x, D_{S_\alpha}) = \operatorname{ord}(x, Y_\alpha)$. Luego, como h es un homeomorfismo, por la Proposición 1.9, tenemos que $\operatorname{ord}(x, Y_\alpha) = \operatorname{ord}(h(x), Y_\beta)$, es decir, $\operatorname{ord}(x, D_{S_\alpha}) = \operatorname{ord}(h(x), Y_\beta)$. Además, $h(x) \in Y_\beta - X \subset D_{S_\beta} \subset Y_\beta$, así, $h(x) \in \operatorname{int}_{Y_\beta}\left(D_{S_\beta}\right)$. De nuevo, por el Teorema 1.8, $\operatorname{ord}(h(x), Y_\beta) = \operatorname{ord}\left(h(x), D_{S_\beta}\right)$. Esto muestra que $m = \operatorname{ord}(x, D_{S_\alpha}) = \operatorname{ord}\left(h(x), D_{S_\beta}\right)$ y por lo tanto, $h(x) \in R\left(D_{S_\beta}\right)$. Así, por (3), $m \in S_\beta$. Como m es arbitraria en S_α, se sigue que $S_\alpha \subset S_\beta$. Similarmente se demuestra que $S_\beta \subset S_\alpha$. Así pues, $S_\alpha = S_\beta$, pero esto es una contradicción por (3). Por lo tanto, $F = \emptyset$, es decir, $h(Y_\alpha - X) \subset X$. Procediendo de manera similar como en la demostración de (a), obtenemos una contradicción de (2). Así (b) está probado. □

Definición 3.52. *Sean X un continuo y n un número natural. Decimos que X tiene* **hiperespacio único** *$C_n(X)$ si para cada continuo Y tal que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, se cumple que X es homeomorfo a Y.*

Lema 3.53. *Sean D, X, Y continuos tales que $X \cup D = Y$ y $X \cap D = \{p\}$. Si E es un subconjunto cerrado de X con $p \in E$, y $C_n(X, E)$ y $C_n(Y, E \cup D)$ son cubos de Hilbert tales que, $\mathrm{bd}_{C_n(X)}(C_n(X, E))$ y $\mathrm{bd}_{C_n(Y)}(C_n(Y, E \cup D))$ son Z-conjuntos de $C_n(X, E)$ y $C_n(Y, E \cup D)$, respectivamente, entonces $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$.*

Demostración. Por el Lema 3.49, se tiene que $id\colon \mathrm{bd}_{C_n(X)}(C_n(X, E)) \to \mathrm{bd}_{C_n(Y)}(C_n(Y, E \cup D))$ es un homeomorfismo y por el Teorema 3.44, la función id puede extenderse a un homeomorfismo $h_1\colon C_n(X, E) \to C_n(Y, E \cup D)$. Consideremos la función $h\colon C_n(X) \to C_n(Y)$ que está dada por

$$h(A) = \begin{cases} h_1(A) & \text{si } A \in C_n(X, E), \\ Id_{C_n(X)}(A) & \text{si } A \in C_n(X) - C_n(X, E). \end{cases}$$

Para mostrar que h es continua en $C_n(X)$, verifiquemos la continuidad de h en $\mathcal{B} = \mathrm{cl}_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X, E))$. Sean $B \in \mathrm{cl}_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X, E))$ y $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \in C_n(X) - C_n(X, E)$ tal que B_i converge a B. Vamos a demostrar que $h(B_i)$ converge a $h(B)$. Como cada $B_i \in C_n(X) - C_n(X, E)$, entonces $h(B_i) = B_i$. Además, B_i converge a B, luego $h(B_i)$ converge a B. Veamos que $h(B) = B$.

Si $B \in C_n(X) - C_n(X, E)$, entonces $h(B) = B$. Si $B \in C_n(X, E) = \mathrm{cl}_{C_n(X)}(C_n(X, E))$, entonces $B \in \mathrm{bd}_{C_n(X)}(C_n(X, E))$, ya que por hipótesis, $B \in \mathcal{B}$. Así, $h(B) = h \restriction \mathrm{bd}_{C_n(X,E)} = id(B) = B$, es decir, $h(B) = B$. Como en cualquiera de los dos casos $h(B) = B$ y B fue elegida arbitrariamente en $\mathcal{B}$, podemos concluir que h es continua en $\mathcal{B}$.

Además, $Id_{C_n(X)}$ y h_1 son inyectivas, entonces h es inyectiva. Más aún, por el Lema 3.49, $C_n(X) - C_n(X, E) = C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D)$, así,

$$\begin{aligned} h(C_n(X)) &= h(C_n(X, E) \cup (C_n(X) - C_n(X, E))) \\ &= h_1(C_n(X, E)) \cup Id_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X, E)) \\ &= C_n(Y, E \cup D) \cup (C_n(Y) - C_n(Y, E \cup D)) \\ &= C_n(Y), \end{aligned}$$

es decir, h es sobreyectiva. Por lo tanto, $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$. □

El siguiente teorema es otro de los principales resultados de este trabajo, este nos dice que para que un continuo localmente conexo tenga hiperespacio único, necesitamos al menos que éste sea casi enrejado.

Teorema 3.54. *Si X es un continuo localmente conexo que no es casi enrejado, entonces X no tiene hiperespacio único $C_n(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Como X es localmente conexo y $p \in X$, por el Teorema 3.51 (a), (b), existe una dendrita D sin arcos libres tal que $Y = X \cup_p D$ es un continuo localmente conexo que no es homeomorfo a X. Sea d una métrica para Y, por el Teorema 2.28, podemos asumir que d es una métrica convexa para Y. Además, por el Lema 3.50, las métricas inducidas en X y D por d son convexas. Como X no es casi enrejado, $\mathcal{G}(X)$ no es denso en X, luego, existe un abierto A no vacío de X tal que $A \cap \mathcal{G}(X) = \emptyset$, es decir,

$A \subset \mathcal{P}(X)$. Sea $p \in A$ y $B_{2\epsilon}^{X}(p) \subset A$. Consideremos $E = C_d(\epsilon, \{p\})$. Por [20, Proposición 10.6], E es un subcontinuo de X. Más aún, $E = \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(E))$. En efecto, por la Observación 2.21, $C_d(\epsilon, \{p\})$ es un conjunto cerrado de X no vacío. Luego, $\mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(C_d(\epsilon, \{p\}))) \subset C_d(\epsilon, \{p\})$. Así, solo necesitamos mostrar la otra contención. Sea $x \in C_d(\epsilon, \{p\})$, si $x \in \{p\}$, entonces $x \in N_d(\epsilon, \{x\}) \subset C_d(\epsilon, \{p\})$. Luego, $N_d(\epsilon, \{x\}) \subset \mathrm{int}_X(C_d(\epsilon, \{p\}))$, y por ende, $x \in N_d(\epsilon, \{x\}) \subset \mathrm{cl}_X(N_d(\epsilon, \{x\})) \subset \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(C_d(\epsilon, \{p\})))$. Así, podemos suponer que $x \notin \{p\}$. Observemos que $d(p, x) = d(x, \{p\})$ y existe una isometría $\gamma\colon [0, d(p, x)] \to \gamma([0, d(p, x)]) \subset X$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(d(p, x)) = x$. Sea $t \in [0, d(p, x))$, como γ es una isometría y $x \in C_d(\epsilon, \{p\})$, $d(p, \gamma(t)) = d(\gamma(0), \gamma(t)) = |t - 0| = t < d(p, x) = d(x, \{p\}) \leq \epsilon$. Así, $\gamma(t) \in B_d(\epsilon, p) \subset C_d(\epsilon, \{p\})$. Esto nos dice que, $\gamma([0, d(p, x))) \subset \mathrm{int}_X(C_d(\epsilon, \{p\}))$, por lo que $x \in \gamma([0, d(p, x)]) = \mathrm{cl}_X(\gamma([0, d(p, x))]) \subset \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(C_d(\epsilon, \{p\})))$, es decir, $C_d(\epsilon, \{p\}) \subset \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(C_d(\epsilon, \{p\})))$. Por lo tanto, $E = \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(E))$.

Observemos que $C_d(\epsilon, \{p\}) \subset B_{2\epsilon}^{X}(p) \subset \mathcal{P}(X)$. Luego, $C_d(\epsilon, \{p\})$ es un cerrado de $\mathcal{P}(X)$. Aplicando el Teorema 3.43, $C_n(X, E)$ es un cubo de Hilbert. Por otro parte, como D es una dendrita sin arcos libres, por el Lema 3.17, $\mathrm{cl}_D(\mathcal{G}(D)) = \mathrm{cl}_D(\mathcal{FA}(D)) = \emptyset$, es decir, $\mathcal{P}(D) = D$. Además, por la Observación 3.23, $\mathcal{P}(D) \subset \mathcal{P}(Y)$ y $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$. Ya que D también es un cerrado de Y, se tiene que $E \cup D \subset Y$ es un cerrado de Y. Luego, $E \cup D \subset \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(D) \subset \mathcal{P}(Y)$, así, $E \cup D$ es un cerrado de $\mathcal{P}(Y)$. Aplicando una vez más, el Teorema 3.43, se tiene que $C_n(Y, E \cup D)$ es un cubo de Hilbert.

Afirmación 1. $\mathrm{bd}_{C_n(X)}(C_n(X, E))$ es un Z-conjunto en $C_n(X, E)$.

Sea $\delta > 0$ y consideremos la función $\Phi_\delta \restriction_{C_n(X,E)}\colon C_n(X, E) \to C_n(X, E)$ como en la ecuación 2.1. Por el Lema 2.20, $C_n(X, E)$ es un hiperespacio de crecimiento, entonces, por el Lema 2.26, $\Phi_\delta \restriction C_n(X, E)$ está bien definida. Más aún, por el Lema 2.24 y el Lema 2.25, $\Phi_\delta \restriction_{C_n(X,E)}$ es continua y $H_d\left(I_{d_{C_n(X,E)}}(A), \Phi_\delta \restriction_{C_n(X,E)}(A)\right) < \delta$, para cada $A \in C_n(X, E)$, respectivamente. Para demostrar que $\Phi_\delta(A) \notin \mathrm{bd}_{C_n(X)}(C_n(X, E))$, veamos que $\Phi_\delta(A) \notin \mathrm{cl}_{C_n(X)}(C_n(X) - C_n(X, E)) \supset \mathrm{bd}_{C_n(X)}(C_n(X, E))$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C_n(X)$ tal que $\lim A_n = \Phi_\delta(A)$. Como $E = \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(E))$ y $A \in C_n(X, E)$, entonces $N_\delta^X(A) \cap \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(E)) \supset A \cap E \neq \emptyset$. Luego, $\Phi_\delta(A) \cap \mathrm{int}_X(E) \supset N_\delta^X(A) \cap \mathrm{int}_X(E) \neq \emptyset$. Sean $a \in \Phi_\delta(A) \cap \mathrm{int}_X(E)$ y $\kappa > 0$ tales que $B_\kappa^X(a) \subset \mathrm{int}_X(E) \subset E$. Por la Definición 2.29, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq N$, $A_n \cap E \supset A_n \cap B_\kappa^X(a) \neq \emptyset$. Luego, $A_n \in C_n(X, E)$, que es lo que se requería. Por lo tanto, $\Phi_\delta \restriction_{C_n(X,E)}\colon C_n(X, E) \to C_n(X, E) - \mathrm{bd}_{C_n(X)}(C_n(X, E))$. Así, $\mathrm{bd}_{C_n(X)}(C_n(X, E))$ es un Z-conjunto en $C_n(X, E)$.

Afirmación 2. $\mathrm{bd}_{C_n(Y)}(C_n(Y, E \cup D))$ es un Z-conjunto en $C_n(Y, E \cup D)$. Observermos primero que $\mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(E \cup D)) \subset E \cup D$, ya que $E \cup D$ es un cerrado de Y. Ahora veamos que $E \cup D \subset \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(E \cup D))$. Para esto, observemos que $E = \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(E))$ y $D - \{p\} = Y - X$ es un abierto de Y,

entonces

$$\begin{aligned} E \cup D &= \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(E)) \cup (D - \{p\}) \cup \{p\} \\ &= \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(E)) \cup \mathrm{int}_Y(D - \{p\}) \cup \{p\} \\ &\subset \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(E)) \cup \mathrm{cl}_Y\left(\mathrm{int}_Y(D - \{p\})\right) \cup \{p\} \\ &= \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(E) \cup \mathrm{int}_Y(D - \{p\})) \\ &\subset \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(E \cup D)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $E \cup D = \mathrm{cl}_Y\left(\mathrm{int}_Y\left(E \cup D\right)\right)$. Realizando un procedimiento similar al de la Afirmación 1, obtenemos que $\mathrm{bd}_{C_n(Y)}(C_n(Y, E \cup D))$ es un Z-conjunto en $C_n(Y, E \cup D)$.

Así, por la Afirmación 1, la Afirmación 2 y el Lema 3.53, $C_n\left(X\right)$ es homeomorfo a $C_n\left(Y\right)$. Por lo tanto, X no tiene hiperespacio único $C_n\left(X\right)$.

□

Corolario 3.55. *Si X es un continuo localmente conexo que no es casi enrejado, entonces existe una clase $\mathcal{Y}$ no numerable de continuos localmente conexos no homeomorfos por pares tales que:*

(a) *para cada $Y \in \mathcal{Y}$, X no es homeomorfo a Y;*

(b) *para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $Y \in \mathcal{Y}$, $C_n\left(X\right)$ es homeomorfo a $C_n\left(Y\right)$.*

Demostración. Como X no es casi enrejado, $\mathrm{int}_X\left(\mathcal{P}\left(X\right)\right) \neq \emptyset$. Sea $p \in \mathrm{int}_X\left(\mathcal{P}\left(X\right)\right)$, por el Teorema 3.51, existe una clase $\mathcal{D}$ no numerable de dentritas no homeomorfos por pares tales que:

(a) para cada $D \in \mathcal{D}$, D no contiene arcos libres;

(b) el continuo localmente conexo $X \cup_p D$ no es homeomorfo a X;

(c) si $B \neq D$ son elementos de $\mathcal{D}$, entonces $X \cup_p B$ y $X \cup_p D$ no son homeomorfos.

Considerando $\mathcal{Y} = \{X \cup_p D \colon D \in \mathcal{D}\}$, se tiene que por el iniciso (b), para cada $Y \in \mathcal{Y}$, X no es homeomorfo a Y.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, por un procedimiento similar al del Teorema 3.54, se tiene que para cada $Y \in \mathcal{Y}$, $C_n\left(X\right)$ es homeomorfo a $C_n\left(Y\right)$, y concluye la demostración. □

3.4. Arcos y circunferencias libres

En esta nueva sección, introducimos los conceptos de arco libre maximal y circunferencia libre de un continuo X. Demostramos que los arcos libres no tienen vértices de triodos simples en su interior, véase Lema 3.57, y mostramos que la convergencia en el hiperespacio $C(X)$ por arcos libres maximales y circunferencias libres distintos por pares, esta implicada por la convergencia de elementos de cada uno de estos en el continuo X, cuando X es localmente conexo, véase Lema 3.69. Por último, demostramos que en los continuos localmente conexos, cada arco libre está contenido en un arco libre maximal o una circunferencia libre, véase Lema 3.73.

Recordemos la definición de **arco libre** de X, véase la Definición 3.4.

Definición 3.56. *Sea X un continuo, un* ***arco libre maximal*** *J de X es un arco libre de X, el cual es maximal con respecto a la inclusión, es decir, para cada arco libre K de X tal que $J \subset K$, se cumple que $J = K$. Una* ***circunferencia libre*** *S de X, es una curva cerrada simple de X para la cual existe $p \in S$ tal que $S - \{p\}$ es un abierto de X.*

Dado un arco J en un continuo X y $x, y \in J$. Denotamos el subarco de J que va de x a y como $[x, y]_J$, si $x \neq y$, y $[x, y]_J = \{x\}$, si $x = y$. También, denotamos $(x, y]_J = [x, y]_J - \{x\}$ y $(x, y)_J = [x, y]_J - \{x, y\}$.

Lema 3.57. *Si X es un continuo y J es un arco libre de X, entonces ningún punto de $\operatorname{int}_X(J)$ puede ser el vértice de un triodo simple de X.*

Demostración. Supongamos que $x \in \operatorname{int}_X(J)$ es el vértice de un triodo simple T de X, por el Teorema 1.8, $\operatorname{ord}(x, J) = \operatorname{ord}(x, X)$. Como J es un arco, por la Proposición 3.36, $\operatorname{ord}(x, J) \leq 2$, así, $\operatorname{ord}(x, X) \leq 2$. Pero, $\operatorname{ord}(x, X) \geq 3$. Como esto es una contradicción, se debe de cumplir que ningún punto de $\operatorname{int}_X(J)$ puede ser el vértice de un triodo simple de X. □

Lema 3.58. *Si X es un continuo y J y K son arcos libres de X tales que $\operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K) \neq \emptyset$, entonces $J \cup K$ es un arco libre o una circunferencia libre de X.*

Demostración. Como $J \cap K \supset \operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K) \neq \emptyset$, entonces $J \cap K \neq \emptyset$. Cuando $J \cap K = J$ o $J \cap K = K$, el resultado es inmediato. Así, podemos asumir que $J \cap K \neq J$ y $J \cap K \neq K$. Más aún, podemos asumir que X no es un arco. Sea $l \in \operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K)$, como $J \cap K \neq K$, se tiene que $K \not\subset J$, así, existe $p \in K - J$. Consideremos $[p, l]_K$ el arco contenido en K. Por el Lema 3.1, existe β un subarco de $[p, l]_K \subset K$ tal que $\beta \cap J = \{s\}$ y $E(\beta) = \{p, s\}$. Demostremos que $s \in E(J)$. Para esto, supongamos que $s \notin E(J)$. Como $s \notin E(J) = \{p_J, q_J\}$ y $s \in J$, entonces $s \in J - E(J) \subset \operatorname{int}_X(J)$. Como $[s, q_J]_J$ es un arco contenido en J y $s \in \beta \cap [s, q_J]_J \subset \beta \cap J = \{s\}$, entonces $\beta \cap [s, q_J]_J = \{s\}$. Similarmente, $s \in \beta \cap [p_J, s]_J \subset \beta \cap J = \{s\}$, entonces $\beta \cap [p_J, s]_J = \{s\}$. Así, $[p_J, s]_J \cup \beta \cup [s, q_J]_J$ es un triodo simple de X cuyo vértice es $s \in \operatorname{int}_X(J)$, por el Lema 3.57, esto es una contradicción. Por lo tanto, $s \in E(J)$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $s = q_J$ y mostremos que $[s, l]_K \subset J$. Supongamos que $[s, l]_K \not\subset J$, entonces $s \neq l$. Sea $c \in [s, l]_k - J$. Como $[c, l]_K$ es un subarco de $[s, l]_K$, por el Lema 3.1, existe un subarco η de $[c, l]_K$ tal que $\eta \cap J = \{u\}$ y $E(\eta) = \{c, u\}$. Notemos que $u \in E([s, l]_K)$. De manera similar, como $[s, c]_K \subset [s, l]_K$, existe γ un subarco de $[s, c]_K$ tal que $\gamma \cap J = \{v\}$ y $E(\gamma) = \{v, c\}$. Notemos también que $v \in E([s, l]_K)$. Como $u \notin [s, c]_K$ y $v \notin [c, l]_K$, entonces $u = l$ y $v = s$. Si $l \in E(J)$, como $l \neq s$ y $s = q_J \in \beta \cap E(J) \subset \beta \subset K$, entonces $l = p_J$ y $s \in \operatorname{int}_X(K)$. Así, como $\gamma \cap J = \{s\}$, $\beta \cap J = \{s\}$ y $\beta \cap \gamma = [p, s]_K \cap [s, c]_K = \{s\}$, se tiene que $J \cup \gamma \cup \beta$, es un triodo simple cuyo vértice es $s \in \operatorname{int}_X(K)$. Por el Lema 3.57, esto es una contradicción, por lo tanto, $l \notin E(J)$. Pero $l \in \eta \cap [p_J, l]_J \subset \eta \cap J = \{l\}$, $l \in \eta \cap [l, q_J]_J \subset \eta \cap J = \{l\}$ y $[p_J, l]_J \cap [l, q_J]_J = \{l\}$, entonces $[p_J, l]_J \cup \eta \cup [l, q_J]_J$ es un triodo simple cuyo vértice es $l \in \operatorname{int}_X(J)$. Como esto es una contradicción

que surgió de suponer que $[s,l]_K \not\subset J$, se tiene que $[s,l]_K \subset J$. Similarmente y como $J \not\subset K$, se demuestra que $[l,q_K]_K \subset [l,p_J)_J$, para algún $q_K \in E(K)$.

Sea $p_K \in E(K) - \{q_K\}$. Observemos que $[s,l]_K = [s,l]_J \subset J$ y $[l,q_K]_K = [l,q_K]_J \subset J$. Luego, $K \cup J = ([p_K,s]_K \cup [s,l]_K \cup [l,q_K]_K) \cup ([s,l]_J \cup [l,q_K]_J \cup [q_K,p_J]_J) = ([p_k,s]_K \cup [s,l]_K \cup [l,q_k]_K) \cup [q_K,p_J]_J = K \cup [q_K,p_J]_J$. Si $l \in E(J)$, entonces $l = q_J = s$, ya que si $l = p_J$, entonces $J \subset K$, lo que es una contradicción. Como X no es un arco y $q_J \in \operatorname{int}_X(J)$, entonces $\operatorname{int}_X(J) = J - \{p_J\}$ y $\operatorname{bd}_X(J) = \{p_J\}$.

En base a esto y recordando que $p \in K - J$ tenemos lo siguiente:

Caso 1. $[p,p_K]_K \cap \{p_J\} = \emptyset$.

Como $K \cup J = K \cup [q_K,p_J]_J$, entonces $K \cap [q_K,p_J]_J = \{q_K\}$. Así, $J \cup K$ es un arco con $E(J \cup K) = \{p_K,p_J\}$. Como, $(J \cup K) - E(J \cup K) = (J - \{p_J\}) \cup (K - E(K)) = \operatorname{int}_X(J) \cup (K - E(K))$ es un abierto de X, entonces $J \cup K$ es un arco libre de X.

Caso 2. $[p,p_K]_K \cap \{p_J\} \neq \emptyset$.

Observemos que $[p_J,p_K]_K \subset [p_J,q_K)_J$ y $J \cup K$ es una curva cerrada simple. Si $p_K \in E(J)$, entonces $p_K = p_J$. Luego, $(J \cup K) - \{p_J\} = (J - \{p_J\}) \cup (K - E(K)) = \operatorname{int}_X(J) \cup (K - E(K))$ es un abierto de X. Así, $J \cup K$ es una circunferencia libre de X. Si $p_K \notin E(J)$, entonces $J \cup K = (J - \{p_J\}) \cup (K - E(K)) = \operatorname{int}_X(J) \cup (K - E(K))$ es un abierto de X. Por la conexidad de X, $J \cup K = X$, se sigue que $J \cup K$ es una circunferencia libre de X.

En otro caso, si $l \notin E(J)$, siguiendo un argumento similar que en los dos casos anteriores, se obtiene lo siguiente. Si $[p,p_K]_K \cap \{p_J\} = \emptyset$, entonces $J \cup K$ es un arco libre de X. En otro caso, si $[p,p_K]_K \cap \{p_J\} \neq \emptyset$, entonces $J \cup K$ es una curva cerrada simple de X. Si $p_K \in E(J)$, entonces $p_K = p_J$, luego $(J \cup K) - \{p_J\} = (J - E(J)) \cup (K - E(K))$ es un abierto de X. Por lo tanto, $J \cup K$ es una circunferencia libre de X. Si $p_K \notin E(J)$, $(J \cup K) = (J - E(J)) \cup (K - E(K))$ es un abierto de X. Por la conexidad de X, $J \cup K = X$. Por lo tanto, $J \cup K$ es una circunferencia libre de X. De cualquier modo, $J \cup K$ es un arco o una circunferencia libre de X. □

Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, denotamos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}(X) &= \{J \subset X \colon J \text{ es un arco libre maximal de } X\};\\
\mathfrak{A}_S(X) &= \{J \subset X \colon J \text{ es un arco libre maximal de } X \text{ o}\\
&\qquad\qquad J \text{ es una circunferencia libre de } X\};\\
\mathfrak{A}_E(X) &= \{J \in \mathfrak{A}(X) : \text{existe } p \in E(J) \cap \operatorname{int}_X(J)\}.
\end{aligned}$$

Definición 3.59. *Sea X una curva cerrada simple. Si K y L son arcos contenidos en X tales que $K \cup L = X$ y $E(K) = K \cap L = E(L)$, entonces se dice que K y L forman una* ***descomposición simple*** *de X. Si $x,y \in X$ son los puntos extremos en común de K y L, se dice que x y y son los* ***puntos base*** *de la descomposición simple, o bien, que la descomposición simple está* ***basada*** *en x y en y.*

Proposición 3.60. [31, Proposición 2.59] *Si X es una curva cerrada simple, entonces cualesquiera dos puntos distintos de X son puntos base de una descomposición simple de X.*

Lema 3.61. *Si X es un arco o una curva cerrada simple, entonces $\mathfrak{A}_S(X) = \{X\}$.*

Demostración. Supongamos que X es un arco, entonces X es un arco libre en X y por lo tanto, es el único arco libre maximal en X. Además, como X no contiene curvas cerradas simples, se sigue que $\mathfrak{A}_S(X) = \{X\}$. En otro caso, si X es una curva cerrada simple, $\mathfrak{A}(X) = \emptyset$. Para mostrar esto, supongamos lo contrario, es decir, existe $J \in \mathfrak{A}(X)$. Sean $x \in X - J$ y p y q los puntos extremos de J. Notemos que $x \notin \{p, q\}$, así, por el Lema 3.60, x y q son puntos base de una descomposición simple de X, por lo que, existen arcos K y L tales que $K \cup L = X$ y $E(K) = K \cap L = \{x, q\} = E(L)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que K es el arco que contiene a J. Notemos que $K \neq J$. Además, $K - E(K) = X - L$, que es abierto en X, es decir, K es un arco libre de X que contiene propiamente a J. Como esto es una contradicción, se sigue que $\mathfrak{A}(X) = \emptyset$. Luego, como la única circunferencia libre de X es la misma X, se sigue que $\mathfrak{A}_S(X) = \{X\}$. □

Con ayuda del Lema 3.57 y el Lema 3.61, obtenemos el siguiente resultado que será de utilidad en el Lema 3.73.

Lema 3.62. *Sean X un continuo localmente conexo, J un arco libre de X y K una circunferencia libre de X. Si $J \not\subset K$, entonces $J \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$.*

Demostración. Hacemos la demostración por contrarrecíproca. Supongamos que $J \cap \operatorname{int}_X(K) \neq \emptyset$. Cuando X es un arco o una curva cerrada simple, por el Lema 3.61, el resultado es inmediato. Así, podemos suponer que X no es un arco ni una curva cerrada simple. Si $\operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$, entonces $\operatorname{int}_X(J) \subset X - \operatorname{int}_X(K)$. Como $J - E(J) \subset \operatorname{int}_X(J)$, entonces $J = \operatorname{cl}_X(J - E(J)) \subset \operatorname{cl}_X(\operatorname{int}_X(J)) \subset X - \operatorname{int}_X(K)$, es decir, $J \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$. Como esto es una contradicción, $\operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K) \neq \emptyset$.

Sea $p \in K$ tal que $K - \{p\}$ es abierto de X. Notemos que $p \notin \operatorname{int}_X(K)$, es decir, $\operatorname{int}_X(K) = K - \{p\}$. Supongamos que $p \in \operatorname{int}_X(J)$ y $J \not\subset K$, luego, existe $q \in J - K$. Sea $L = [p, q]_J$. Como $L - \{p\}$ es conexo y $X - K$, $K - \{p\}$ son subconjuntos ajenos y abiertos de X, entonces $L - \{p\} \subset X - K$. Sean A y B arcos contenidos en K tales que $p \in E(A) \cap E(B)$ y $A \cap B = \{p\}$. Notemos que $A \cup B \cup L$ es un triodo simple de X con vértice p. Por el Lema 3.57, esto es una contradicción. Por lo tanto, $p \notin \operatorname{int}_X(J)$ o $J \subset K$. Si $p \notin \operatorname{int}_X(J)$, entonces $\operatorname{int}_X(J) \subset X - \{p\}$. Como $\operatorname{int}_X(J) \cap (K - \{p\}) = \operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K) \neq \emptyset$, y $\operatorname{int}_X(J)$ es conexo, entonces $\operatorname{int}_X(J) \subset K - \{p\}$. Así, $J = \operatorname{cl}_X(J - E(J)) \subset \operatorname{cl}_X(K - \{p\}) = K$. De cualquier modo $J \subset K$, concluyendo lo requerido. □

Lema 3.63. *Sean X un continuo localmente conexo, J un arco libre de X y K un arco libre maximal de X. Si $J \not\subset K$, entonces $J \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$.*

Demostración. Hacemos la demostración por contrarecíproca. Supongamos que $J \cap \operatorname{int}_X(K) \neq \emptyset$ y probemos que $J \subset K$. Si $\operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$, entonces $\operatorname{int}_X(J) \subset X - \operatorname{int}_X(K)$. Como J es un arco libre de X, $J - E(J) \subset \operatorname{int}_X(J)$, esto implica que $J = \operatorname{cl}_X(J - E(J)) \subset \operatorname{cl}_X(\operatorname{int}_X(J)) \subset X - \operatorname{int}_X(K)$. Luego, $J \cap \operatorname{int}_X(K) \subset (X - \operatorname{int}_X(K)) \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$, es decir, $J \cap \operatorname{int}_X(K) = \emptyset$, lo que es una contradicción. Así, $\operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(K) \neq \emptyset$. Por lo tanto, por [14, Lema 3], $J \subset K$ □

Observación 3.64. *Si X es un continuo distinto de un arco y de una curva cerrada simple, y $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(a) *si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $\operatorname{int}_X(J) = J - \{q_J\}$ y $\operatorname{bd}_X(J) = \{q_J\}$, donde p_J y q_J son los puntos extremos de J, con $p_J \in \operatorname{int}_X(J)$. Observemos que $\operatorname{int}_X(J)$ es homeomorfo a $[0,1)$;*

(b) *si $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, es decir, J es un arco libre maximal de X que no tiene puntos extremos en su interior o J es una circunferencia libre de X, entonces $\operatorname{int}_X(J) = J - \{p_J, q_J\}$ y $\operatorname{bd}_X(J) = \{p_J, q_J\}$, si J es un arco libre maximal en X o $\operatorname{int}_X(J) = J - \{q_J\}$ y $\operatorname{bd}_X(J) = \{q_J\}$, para algún q_J en J, si J es una circunferencia libre en X. Observemos que en cualquiera de los dos casos $\operatorname{int}_X(J)$ es homeomorfo a $(0,1)$.*

El siguiente resultado nos será de utilidad más adelante.

Lema 3.65. [24, Lema 3.1 (c)] *Sean X un continuo localmente conexo y $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Si $\operatorname{int}_X(J) \cap K \neq \emptyset$, entonces $J = K$.*

Observación 3.66. *Sean X un continuo localmente conexo y J, K, L, M elementos de $\mathfrak{A}_S(X)$. Si $\{J, K\} \neq \{L, M\}$, entonces $\langle \operatorname{int}_X(J), \operatorname{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$ y $\langle \operatorname{int}_X(L), \operatorname{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)}$ son ajenos.*

Demostración. Por el Lema 3.61, podemos suponer que X no es el arco ni la curva cerrada simple. Como $\{J, K\} \neq \{L, M\}$, podemos asumir que $J \in \{J, K\} - \{L, M\}$. Luego, $J \neq L$ y $J \neq M$. Por el Lema 3.65, $\operatorname{int}_X(J) \cap L = \emptyset$ y $\operatorname{int}_X(J) \cap M = \emptyset$, entonces $\operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(L) = \emptyset$ y $\operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(M) = \emptyset$. Supongamos que $\langle \operatorname{int}_X(J), \operatorname{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \cap \langle \operatorname{int}_X(L), \operatorname{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)} \neq \emptyset$, así, existe $E \in C_2(X)$ con $E \in \langle \operatorname{int}_X(J), \operatorname{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \cap \langle \operatorname{int}_X(L), \operatorname{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)}$. En particular, $E \subset \operatorname{int}_X(L) \cup \operatorname{int}_X(M)$ y $E \cap \operatorname{int}_X(J) \neq \emptyset$. Así, existe $x \in E \cap \operatorname{int}_X(J) \subset E \subset \operatorname{int}_X(L) \cup \operatorname{int}_X(M)$, es decir, $x \in \operatorname{int}_X(L)$ o $x \in \operatorname{int}_X(M)$. Esto implica que $x \in \operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(L)$ o $x \in \operatorname{int}_X(J) \cap \operatorname{int}_X(M)$. Como en ambos casos obtenemos una contradicción, $\langle \operatorname{int}_X(J), \operatorname{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \cap \langle \operatorname{int}_X(L), \operatorname{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)} = \emptyset$ □

Proposición 3.67. *Si X es un espacio métrico conexo con más de un punto, entonces es infinito no numerable.*

Demostración. Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que X es finito. Como X es un espacio métrico, para cada $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto compacto y por ende, cerrado de X. Además, como $X - \{x\}$ es la unión de un número finito de conjuntos cerrados de X, entonces es cerrado en X, así, $\{x\}$ es un abierto de X. Como X tiene más de un punto, esto nos dice que $\{x\}$ es un conjunto cerrado y abierto de X distinto del vacío y X, lo que es una contradicción, ya que X es conexo. Por lo tanto, X es infinito. Más aún, observemos que X es un conjunto infinito no numerable. □

Lema 3.68. *Sean X un continuo y J un arco de X. Si C es un conjunto conexo de X tal que $C \cap \operatorname{bd}_X(J) = \emptyset$, entonces $C \cap J = \emptyset$ o $C \subset J$.*

Demostración. Cuando $J = X$, claramente $C \subset J$. Así, podemos suponer que $J \neq X$. Como $X - J$ y $\operatorname{int}_X(J)$ forman una separación de $X - \operatorname{bd}_X(J)$ y C es un subconjunto conexo de $X - \operatorname{bd}_X(J)$, entonces $C \subset X - J$ o $C \subset \operatorname{int}_X(J)$, es decir, $C \cap J = \emptyset$ o $C \subset J$. □

Lema 3.69. *Sean X un continuo localmente conexo, $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathfrak{A}_S(X)$ distintos por pares y $x_m \in J_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Si $\lim x_m = x$ para algún $x \in X$, entonces $\lim J_m = \{x\}$ (en $C(X)$).*

Demostración. Por el Lema 3.61, podemos suponer que X no es el arco ni la curva cerrada simple. Dado $m \in \mathbb{N}$ y $x_m \in J_m$, existe una sucesión de elementos de $\operatorname{int}_X(J_m)$ que convergen a x_m, entonces $x_m \in \operatorname{cl}_X(\operatorname{int}_X(J_m))$. Así, como para cada $m \in \mathbb{N}$, $x_m \in \operatorname{cl}_X(\operatorname{int}_X(J_m))$, podemos suponer que $x_m \in \operatorname{int}_X(J_m)$ Luego, por la Observación 3.64, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\operatorname{bd}_X(J_m)$ es un subconjunto no vacío de X con a lo más dos elementos. Por lo que podemos suponer que $\operatorname{bd}_X(J_m) = \{p_m, q_m\}$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$ no converge a $\{x\}$ en $C(X)$. Como $C(X)$ es un espacio métrico compacto, ya que X es compacto, por la Proposición 2.12, existe una subsucesión de $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$ que converge a algún $A \in C(X)$, con $A \neq \{x\}$. Podemos asumir que $\lim J_m = A$, $\lim p_m = p$ y $\lim q_m = q$, para algunos $p, q \in X$. Además, por hipótesis, $\lim x_m = x$ para algún $x \in X$. Entonces, por la Proposición 2.34, $p, q, x \in A$. Como en particular, $A \neq \{x\}$ es un conjunto conexo no degenerado, por la Proposición 3.67, A es un conjunto infinito, así podemos elegir $y \in A - \{p, q\}$. Entonces, por el Lema 2.33, existe una sucesión $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ de X tal que $y_m \in J_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\lim y_m = y$. Notemos que, si $y \in \operatorname{int}_X(J_k)$, para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces existe $l \in \mathbb{N}$ tal que, $y_m \in \operatorname{int}_X(J_k)$, para cada $m \geq l$, es decir, $J_m \cap \operatorname{int}_X(J_k) \neq \emptyset$, pero esto es una contradicción por Lema 3.65. Por lo tanto, $y \notin \operatorname{int}_X(J_m)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Ahora, como X es localmente conexo y $X - \{p, q\}$ es un conjunto abierto de X que contiene a y, existe un subconjunto U abierto y conexo de X tal que $y \in U \subset \operatorname{cl}_X(U) \subset X - \{p, q\}$. Luego, como $\lim y_m = y$ en X, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_m \in U$ para cada $m \geq m_0$. Por el Teorema 1.21, U es arco conexo, así, para cada $m \geq m_0$, podemos tomar un arco α_m en U con puntos extremos y y y_m. Dado $m \in \mathbb{N}$, notemos que si $\{y, y_m\} \cap \operatorname{bd}_X(J_m) \neq \emptyset$, entonces $\alpha_m \cap \operatorname{bd}_X(J_m) \neq \emptyset$. En otro caso, si $\{y, y_m\} \cap \operatorname{bd}_X(J_m) = \emptyset$, entonces $y_m \notin \operatorname{bd}_X(J_m)$, luego, $y_m \in \operatorname{int}_X(J_m)$. Además, como $y \notin \operatorname{int}_X(J_m)$ y $y \notin \operatorname{bd}_X(J_m)$, se sigue que $y \in X - (\operatorname{int}_X(J_m) \cup \operatorname{bd}_X(J_m)) = X - J_m$. Por el Lema 3.68, se tiene que $\alpha_m \cap \operatorname{bd}_X(J_m) \neq \emptyset$. Así, como en cualquiera de los dos casos, $\alpha_m \cap \operatorname{bd}_X(J_m) \neq \emptyset$, para cada $m \in \mathbb{N}$, se sigue que $U \cap \operatorname{bd}_X(J_m) \neq \emptyset$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Por lo que existe una subsucesión de $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ o $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$ convergente a p o q, respectivamente, cuyos elementos están contenidos en U, entonces $p \in \operatorname{cl}_X(U)$ o $q \in \operatorname{cl}_X(U)$. Como esto es una contradicción por la elección de U, concluimos que $\lim J_m = \{x\}$ en $C(X)$. □

Lema 3.70. *Sean X un continuo y J un arco libre de X. Si x es un punto extremo de J con $x \in \operatorname{int}_X(J)$ y K es un arco de X que contiene a J, entonces x es un punto extremo de K y $x \in \operatorname{int}_X(K)$.*

Demostración. Como $x \in \operatorname{int}_X(J)$ y $J \subset K$, se sigue que $x \in \operatorname{int}_X(K)$. Además, como $x \in E(J)$ y J y K son vecindades de x en X, por el Teorema

1.8, $\operatorname{ord}(x, K) = \operatorname{ord}(x, X) = \operatorname{ord}(x, J) = 1$, es decir, x es un punto extremo de K. $\square$

Lema 3.71. *Sean X un continuo localmente conexo y J un arco libre de X con un punto extremo e tal que $e \in \operatorname{int}_X(J)$. Entonces, existe K un arco libre de X, tal que $J \subset K$, e es un punto extremo de K, $e \in \operatorname{int}_X(K)$ y K contiene a cada arco libre de X que contiene a J.*

Demostración. Podemos asumir que X no es un arco. Sea $\mathcal{F} = \{L \subset X : L$ es un arco libre de X tal que $J \subset L\}$. Sea $L \in \mathcal{F}$ y p_L, q_L sus puntos extremos. Notemos que $e \in L$. Por el Lema 3.70, $e \in E(L)$ y $e \in \operatorname{int}_X(L)$. Podemos suponer que $e = q_L$. Como L es un arco libre de X, $L - \{p_L, e\}$ es abierto en X. Así, $L - \{p_L\} = (L - \{p_L, e\}) \cup \{e\} \subset \operatorname{int}_X(L)$. Como X no es un arco y L es un subconjunto cerrado y no vacío de X, se debe de cumplir que $L - \{p_L\} = \operatorname{int}_X(L)$. Por lo tanto, $\operatorname{bd}_X(L) = \{p_L\}$.

Observemos que si $L, M \in \mathcal{F}$, entonces $L \subset M$ o $M \subset L$. En efecto, supongamos que $L \not\subset M$ y $M \not\subset L$. Entonces existen $l \in L$ y $m \in M$ tales que $l \notin M$ y $m \notin L$. Como $J \subset L \cap M$, se tiene que $l \notin J$ y $m \notin J$. Así, $M \neq J \neq L$ y $m \neq p_J \neq l$, para algún $p_J \in E(J) - \{e\}$. Por el Lema 3.70, $e \in E(L) \cap E(M)$, luego $e \neq l$ y $e \neq m$. Observemos que $[p_J, l]_L \cup [p_J, m]_M \cup [p_J, e]_J$ es un triodo simple de X cuyo vértice es p_J. Como $p_J \notin \operatorname{bd}_X(L)$, entonces $p_J \in \operatorname{int}_X(L)$, esto contradice el Lema 3.57, ya que L es un arco libre de X. Por lo tanto, si L, $M \in \mathcal{F}$, entonces $L \subset M$ o $M \subset L$.

Sean $U = \bigcup\{L - \{p_L\} : L \in \mathcal{F}\}$ y $K = \operatorname{cl}_X(U)$. Veamos que $U \neq K$. Supongamos que $U = K$. Como para cada $L \in \mathcal{F}$, $L - \{p_L\}$ es un subconjunto abierto de X, U es un subconjunto abierto, cerrado y no vacío de X, así, como X es conexo, $U = X$. Notemos que $\{L - \{p_L\} : L \in \mathcal{F}\}$ es una cubierta abierta de X. Luego, como X es compacto, existen L_1, L_2,...,L_r, con $r \in \mathbb{N}$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{r} (L_i - p_{L_i}) = K$. Por el párrafo anterior, podemos suponer que $L_i \subset L_j$, para cada $i \in \{1, 2, ..., r\}$ y para algún $j \in \{1, 2, ..., r\}$. Luego, como L_j es un arco, $L_i - p_{L_i} \subset L_j - p_{L_j}$. De esto se sigue que $X = L_j - p_{L_j}$ y $p_{L_j} \notin X$. Como esto es una contradicción, $U \neq K$. Fijemos $q \in X - U$. Notemos que $e \notin X - U$. Por el Teorema 1.21, X es arco conexo, así, existe un arco α que va de q a e. Por el Lema 3.1, existe un arco M en X que va de p a e, para algún $p \in M$, tal que $M \cap (X - U) = \{p\}$, entonces $M - \{p\} \subset U$.

Veamos que $K = M$. Para esto, mostremos primero que $U = M - \{p\}$. Sea $L \in \mathcal{F}$ y $z \in L - \{p_L, e\}$. Entonces $X - \{z\} = (X - [z, e]_L) \cup (z, e]_L$, luego $\{z\}$ es una separación entre $\{p\}$ y $\{e\}$. Así, z separa a p y e en X. Entonces $z \in M$. De modo que, $L - \{p_L, e\} \subset M$. Notemos que $L - \{p_L\} \subset L = \operatorname{cl}_X(L - \{p_L, e\}) \subset M$, es decir, $L - \{p_L\} \subset M$. De esto se sigue que $U \subset M$ y como $p \notin U$, entonces $U \subset M - \{p\}$. Por lo tanto, $U = M - \{p\}$. Notemos que $K = \operatorname{cl}_X(U) = \operatorname{cl}_X(M - \{p\}) = M$. Por lo tanto, K es un arco con puntos extremos p y e. Además, $K - \{p\} = M - \{p\} = U$, es un subconjunto abierto de X, entonces $(K - \{p\}) - \{e\} = K - \{p, e\}$ también es un subconjunto abierto de X. Así, K es un arco libre de X. Dado $L \in \mathcal{F}$, como K es un subconjunto cerrado de X y $L - \{p_L\} \subset U \subset K$, entonces $L = \operatorname{cl}_X(L - \{p_L\}) \subset K$. Esto completa la prueba del lema. $\square$

Teorema 3.72. [29, Teorema 5.6] *Sean X un continuo y E un subconjunto propio y no vacío de X. Si K es una componente de E, entonces* $\mathrm{cl}_X(K) \cap \mathrm{bd}_X(E) \neq \emptyset$.

Lema 3.73. *Si X es un continuo localmente conexo y J un arco libre de X, entonces existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $J \subset K$.*

Demostración. Notemos que por el Lema 3.61, podemos suponer que X no es una curva cerrada simple y J no está contenido en una circunferencia libre de X. Sean $x, y \in E(J)$ y fijemos $p, q \in (x,y)_J$ tales que $[x,p]_J \cap [q,y]_J = \emptyset$. Como J es un arco libre de X y $[p,q]_J \subset J$, por el Lema 3.5, $(p,q)_J$ es un abierto de X. Así, $Y = X - (p,q)_J$ es un cerrado de X. Sean X_p y X_q las componentes de Y que contienen como elemento a p y a q, respectivamente. Notemos que $\mathrm{bd}_X(Y) = \mathrm{bd}_X((p,q)_J) = \mathrm{cl}_X((p,q)_J) - \mathrm{int}_X((p,q)_J) = [p,q]_J - (p,q)_J = \{p,q\}$. Como $[x,p]_J \cap (p,q)_J = \emptyset$, $[x,p]_J \subset Y$. Así, ya que $[x,p]_J$ es un conjunto conexo que contiene a p, entonces $[x,p]_J \subset X_p$. Análogamente, $[q,y]_J \subset X_q$. En particular, X_p y X_q son subcontinuos de X. Notemos que por el Teorema 3.72, cada componente de Y intersecta a $\{p,q\}$, es decir, cada componente de Y tiene como elemento a p o a q. Esto implica, que las únicas componentes de Y son X_p y X_q. Por lo tanto, $Y = X_p \cup X_q$ y $X_p \cap X_q = \emptyset$ o $X_p = X_q = Y$. Así, como X_p y X_q son subconjuntos abiertos de Y y Y es localmente conexo, entonces X_p y X_q son subcontinuos localmente conexos. Como $[x,p]_J \subset J \cap X_p$, por el Lema 3.5, $[x,p]_J$ es un arco libre de X. Luego, por el Lema 3.6, $[x,p]_J$ es un arco libre de X_p.

Ahora, $[x,y]_J = J$ es un arco libre de X, entonces $(x,y)_J$ es un subconjunto abierto de X. Si $X_p \cap X_q = \emptyset$, $X_p = Y - X_q = (X - (p,q)_J) - X_q$, entonces $X_p \cap (p,q)_J = \emptyset$. Además, como $[q,y]_J \subset X_q$, entonces $X_p \cap [q,y)_J = \emptyset$. De esto y como $[x,p]_J \subset X_p$, se sigue que $X_p \cap (x,y)_J = X_p \cap ((x,p]_J \cup (p,q)_J \cup [q,y)_J) = (x,p]_J \subset [x,p]_J$ es un subconjunto abierto de X_p, así, $p \in \mathrm{int}_{X_p}([x,p]_J)$. En otro caso, si $X_p = X_q = Y = X - (p,q)_J$, entonces $X_p \cap (x,y)_J = (x,p]_J \cup [q,y)_J$ es un subconjunto abierto de X_p. Notemos que en particular, $[q,y]_J \subset X_p$ es un subconjunto cerrado de X_p. Así, $((x,p]_J \cup [q,y)) - [q,y]_J = (x,p]_J \subset [x,p]_J$ es un subconjunto abierto de X_p. De esto se sique que $p \in \mathrm{int}_{X_p}([x,p]_J)$.

De cualquier manera, $[x,p]_J$ es un arco libre de X_p y $p \in \mathrm{int}_{X_p}([x,p]_J)$. Por el Lema 3.70, existe un arco libre K_p de X_p tal que $[x,p]_J \subset K_p$, p es un punto extremo de K_p, $p \in \mathrm{int}_{X_p}(K_p)$ y K_p contiene cada arco libre de X_p que contiene a $[x,p]_J$. Análogamente, se puede ver que $[q,y]_J$ es un arco libre de X_q, $q \in \mathrm{int}_{X_q}([q,y]_J)$ y existe un arco libre K_q de X_q tal que $[q,y]_J \subset K_q$, q es un punto extremo de K_q, $q \in \mathrm{int}_{X_q}(K_q)$ y K_q contiene cada arco libre de X_q que contiene a $[q,y]_J$. Sean p_0 y q_0 los otros puntos extremos de K_p y K_q, respectivamente.

Si $p \in (q,q_0)_{K_q}$, entonces $p \in X_p \cap X_q$, $X_p = X_q$ y p no es un punto extremo del arco $[q,q_0]_{K_q} \subset X_p$. Así, por la proposición 3.36 y el Teorema 1.8, $2 \leq \mathrm{ord}\left(p, [q,q_0]_{K_q}\right) \leq \mathrm{ord}(p, X_p) = \mathrm{ord}(p, [x,p]_J) = 1$. Como esto es una contradicción, $p \notin (q,q_0)_{K_q}$ y $(q,q_0)_{K_q} \subset X_q - \{p,q\}$. Ahora notemos, si $X_p \cap X_q = \emptyset$, $X_q = Y - X_p$, entonces $X_q - \{q\} = X - ((p,q]_J \cup X_p) = X - ([p,q]_J \cup X_p)$, el cual es un subconjunto abierto de X. Luego, $X_q - \{p,q\}$

es un subconjunto abierto de X. En otro caso, si $X_p = X_q$, entonces $Y = X-(p,q)_J = X_q$, por lo que $X_q-\{p,q\} = X-[p,q]_J$ es un subconjunto abierto de X. De cualquier modo, $X_q - \{p,q\}$ es un subconjunto abierto de X. Así, como $(q,q_0)_{K_q}$ es un subconjunto abierto de X_q y $(q,q_0)_{K_q}$ está contenido en el subconjunto abierto $X_q-\{p,q\}$ de X, entonces $(q,q_0)_{K_q}$ es abierto en $X_q-\{p,q\}$ y por ende, en X. Por lo tanto, K_q es un arco libre de X. Similarmente, se puede ver que K_p es un arco libre de X. Notemos que $\emptyset \neq (q,y)_J \subset K_q \cap [p,y]_J$, entonces $\emptyset \neq (q,y)_J \subset \operatorname{int}_X(K_q) \cap \operatorname{int}_X([p,y]_J)$, así por el Lema 3.58, $K_q \cup [p,y]_J$ es un arco libre o una circunferencia libre de X.

Supongamos que $K_q \cup [p,y]_J$ es una circunferencia libre de X. Notemos que $\emptyset \neq (q,y)_J \subset J \cap \operatorname{int}_X(K_q \cup [p,y]_J)$, entonces por el Lema 3.62, $J \subset K_q \cup [p,y]_J$. Como esto es una contradicción, $K_q \cup [p,y]_J$ es un arco libre de X. De forma similar, $K_p \cup [x,q]_J$ es un arco libre de X.

Notemos que el conjunto abierto $(p,q)_J$ de X está contenido en $K_p \cup [x,q]_J$ y $K_q \cup [p,y]_J$. Por el Lema 3.58 y como $J \subset K_p \cup K_q \cup [x,q]_J \cup [p,y]_J = K_p \cup K_q \cup J$, se sigue que $M = K_p \cup K_q \cup J$ es un arco libre de X.

Por otro lado, notemos que $M - \{p_0,q_0\} = (p_0,p)_{K_p} \cup (x,y)_J \cup (q,q_0)_{K_q}$ es un subconjunto abierto de M. Luego, por el Teorema 1.8, para cada $z \in M - \{p_0,q_0\}$, $\operatorname{ord}(z, M - \{p_0,q_0\}) = \operatorname{ord}(z,M)$.

Si $\operatorname{ord}(z, M - \{p_0,q_0\}) = 1$, como $z \in (p_0,p)_{K_p} \cup (x,y)_J \cup (q,q_0)_{K_q}$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $z \in (p_0,p)_{K_p} \subset M$. Por el Teorema 1.8, $\operatorname{ord}\left(z,(p_0,p)_{K_p}\right) = \operatorname{ord}(z,M) = 1$. Notemos que $\operatorname{ord}\left(z,(p_0,p)_{K_p}\right) = \operatorname{ord}\left(z,[p_0,p]_{K_p}\right)$, que es una contradicción, ya que z no es un punto extremo de $[p_0,p]_{K_p}$. Por lo tanto, p_0 y q_0 son los puntos extremos de M.

Supongamos que L es un arco libre de X tal que $K_p \cup J \cup K_q \subset L$. Sean u y v los puntos extremos de L. Como $q \in [p,q]_J = [p,q]_L \subset [p,v]_L$, $(p,q)_J \subset (p,v)_L$. Luego, como $[u,p]_L \cap (p,v)_L = \emptyset$, $[u,p]_L \cap (p,q)_J = \emptyset$, es decir, $[u,p]_L \subset X-(p,q)_J$. Ya que $p \in [u,p]_L$, entonces $[u,p]_L \subset X_p$. Además, $[u,p]_L \subset L \subset X$ y $[u,p]_L \subset X_p \subset X$, entonces $[u,p]_L$ es un arco libre de X y de X_p. Notemos que $[x,p]_J = [x,p]_L$ es un conjunto conexo contenido en $L-(p,q)_J = L-(p,q)_L = [u,p]_L \cup [q,v]_L$, con $[u,p]_L \cap [q,v]_L = \emptyset$. Como $p \in [x,p]_J \cap [u,p]_L \neq \emptyset$, entonces $[x,p]_J \subset [u,p]_L$. Por la maximilidad de K_p, $[u,p]_L \subset K_p$. De manera similar, como $p \in [u,q]_L$, $[q,v]_L \subset K_q$. Por lo tanto, $L = [u,p]_L \cup [p,q]_J \cup [q,v]_L \subset K_p \cup J \cup K_q$. Esto muestra que $K_p \cup J \cup K_q$ es maximal y concluye la prueba del lema. □

Como una consecuencia del Lema 3.73, tenemos lo siguiente.

Lema 3.74. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces* $\mathcal{FA}(X) = \bigcup\{\operatorname{int}_X(K) \colon K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$.

Demostración. Demostremos la igualdad por doble contención.

Sea $x \in \mathcal{FA}(X)$, entonces existe J un arco libre de X tal que $x \in \operatorname{int}_X(J) \subset J$. Por el Lema 3.73, existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $J \subset K$. Esto implica que $x \in \operatorname{int}_X(J) \subset J \subset K$, es decir, $x \in K$. Así, $\mathcal{FA}(X) \subset \bigcup\{\operatorname{int}_X(K) \colon K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$.

Recíprocamente, sea $x \in \operatorname{int}_X(K)$, para algún $K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Si K es un arco libre maximal de X, ya terminamos. En otra caso, si K es una circunferencia

libre de X, sea $p \in K$ tal que $K - \{p\}$ es un abierto de X. Observemos que $K - \{p\} \subset \operatorname{int}_X(K) \subset K$. Si $p \in \operatorname{int}_X(K)$, entonces $K = \operatorname{int}_X(K)$. Como X es conexo, $K = X$. En este caso, cada arco contenido en K, es un arco libre de K y por ende, de X. Supongamos que $p \notin \operatorname{int}_X(K)$. Por un razonamiento similar al del Lema 3.61, se sigue que $x \in \operatorname{int}_X(J)$, para algún J arco libre de X. Así, $\bigcup\{\operatorname{int}_X(K) \colon K \in \mathfrak{A}_S(X)\} \subset \mathcal{FA}(X)$. Esto concluye la demostración del lema. □

Teorema 3.75. *Si X es un continuo localmente conexo, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X)$, entonces $\dim(A, C_n(X)) \geq 2n$ y, si $\dim(A, C_n(X)) = 2n$, entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y elementos $J_i \in \mathfrak{A}_S(X)$, con $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ y $k \leq n$, tales que $A \in \langle \operatorname{int}_X(J_1), ..., \operatorname{int}_X(J_k)\rangle_{C_n(X)}$, donde cada componente de A está contenida en algún $\operatorname{int}_X(J_i)$.*

Demostración. Cuando $\dim(A, C_n(X)) = \infty$, el resultado es inmediato. Supongamos que $\dim(A, C_n(X))$ es finita. Si X es un arco o una curva cerrada simple, por la Proposición 3.36, $R(X) = \emptyset$ y por [26, Teorema 2.4], $\dim(A, C_n(X)) = 2n$. Por el Lema 3.61, $\mathfrak{A}_S(X) = \{X\}$, entonces $A \in \langle \operatorname{int}_X(X)\rangle_{C_n(X)}$ y cada componente de A está contenida en $\operatorname{int}_X(X)$. Así, podemos suponer que $\dim(A, C_n(X))$ es finita y X no es un arco ni una curva cerrada simple. Por el Teorema 3.22, existe una gráfica finita D contenida en X tal que $A \subset \operatorname{int}_X(D)$. Luego $A \in \langle \operatorname{int}_X(D)\rangle_{C_n(X)} \subset C_n(D)$, es decir, $C_n(D)$ es una vecindad de A en $C_n(X)$. Así, por el Teorema 1.3, $\dim(A, C_n(X)) = \dim(A, C_n(D))$. Por otro lado, por [26, Teorema 2.4],

$$\dim(A, C_n(D)) = 2n + \sum_{x \in A \cap R(D)} (\operatorname{ord}(x, D) - 2).$$

Notemos que si $A \cap R(D) = \emptyset$, entonces $\dim(A, C_n(D)) = 2n$. Si $A \cap R(D) \neq \emptyset$, para cada $x \in R(D)$, $\operatorname{ord}(x, D) \geq 3$, entonces $\dim(A, C_n(X)) > 2n$. Así, $\dim(A, C_n(X)) \geq 2n$, para cada $A \in C_n(X)$.

Ahora, supongamos que $\dim(A, C_n(X)) = 2n$, entonces se debe de cumplir que $\sum_{x \in A \cap R(D)} (\operatorname{ord}(x, D) - 2) = 0$ y $A \cap R(D) = \emptyset$. Sean $A_1, A_2, ..., A_k$ las componentes de A, con $1 \leq k \leq n$. Sea $i \in \{1, ..., k\}$. Demostremos que existe un arco libre L_i de D tal que $A_i \subset \operatorname{int}_D(L_i)$. Como D es una gráfica finita, existe $\mathcal{D} = \{C_1, ..., C_r\}$ una colección finita de arcos tales que $D = \bigcup \mathcal{D}$ y dos a dos son ajenos o se intersectan solamente en uno o en ambos de sus puntos extremos.

Supongamos que existe un punto $x \in A_i \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3$, donde $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{D}$, entonces x es un punto extremo de estos tres arcos. Para cada $l \in \{1, 2, 3\}$, tomemos B_l un subarco de C_l tal que $x \in B_l$, pero B_l no posee al otro punto extremo de C_l. Entonces $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ es un triodo simple cuyo vértice es x. Por el Teorema 1.8, $\operatorname{ord}(x, D) \geq \operatorname{ord}(x, B_1 \cup B_2 \cup B_3) = 3$, es decir, $x \in A_i \cap R(D)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, A_i no tiene puntos de intersección de tres arcos distintos de $\mathcal{D}$.

Sea $D_i = \{C \in \mathcal{D} \colon C \cap A_i \neq \emptyset\}$, para cada $i \in \{1, , \ldots, k\}$. Observemos que $A_i \subset \bigcup D_i$. Como cada D_i tiene un número finito de elementos y cada uno de ellos es un subconjunto compacto de D, entonces $\bigcup D_i$ es un subconjunto compacto de D. Además, como cada A_i es conexo y cada par de elementos

de D_i son ajenos o se intersectan solamente en uno o en ambos de sus puntos extremos, se tiene que $\bigcup D_i$ es un subconjunto conexo de D. Así, $\bigcup D_i$ es un continuo para cada $i \in \{1 \ldots, k\}$. Sea $i \in \{1, \ldots, k\}$, veamos que $\bigcup D_i$ es un arco o una curva cerrada simple de D. La demostración la haremos por inducción sobre el número finito de elementos de D_i. Si $\mid D_i \mid = 1$, claramente $\bigcup D_i$ es un arco. Si $\mid D_i \mid = 2$ y $C_1, C_2 \in D_i$, como $\bigcup D_i$ es conexo, si $\mid C_1 \cap C_2 \mid = 1$, $\bigcup D_i$ es un arco, en otro caso, $\mid C_1 \cap C_2 \mid = 2$ y $\bigcup D_i$ es una curva cerrada simple. Ahora, supongamos que la afirmación es cierta cuando $\mid D_i \mid = k-1$ y probemos que también es cierto cuando $\mid D_i \mid = k$. Si $\mid D_i \mid = k$, sea C_k un elemento de D_i que no hace disconexo a $\bigcup D_i$. Como $\mid D_i - \{C_k\} \mid = k-1$, por hipótesis de inducción, $F = \bigcup (D_i - \{C_k\})$ es un arco o una curva cerrada simple. Si F es una curva cerrada simple, entonces $D_i - \{C_k\}$ tiene al menos dos elementos de $\mathcal{D}$. Como X no es una curva cerrada simple, $\bigcup D_i$ es conexo y A_i intersecta a cada elemento de $D_i - \{C_k\}$ y también a C_k, entonces tiene que existir un punto $y \in A_i \cap C_k \cap C_l \cap C_m$, con $C_l, C_m \in D_i - \{C_k\}$, lo que es una contradicción, ya que A_i no tiene puntos de intersección de tres arcos distintos de $\mathcal{D}$. Así, F es un arco. Luego, como $\bigcup D_i = (\bigcup (D_i - \{C_k\})) \cup C_k$ es conexo, entonces $(\bigcup (D_i - \{C_k\})) \cap C_k \neq \emptyset$, así, si $\mid \bigcup (D_i - \{C_k\}) \cap C_k \mid = 1$, entonces $\bigcup D_i = (\bigcup (D_i - \{C_k\})) \cup C_k$ es un arco, en otro caso $\mid \bigcup (D_i - \{C_k\}) \cap C_k \mid = 2$ y $\bigcup D_i$ es una curva cerrada simple. Por lo tanto, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\bigcup D_i$ es un arco o una curva cerrada simple de D.

Caso 1. $\bigcup D_i$ es un arco.

Sea $B_i = \{C \in \mathcal{D} \colon C \cap A_i = \emptyset\}$. Observemos que $A_i \subset \bigcup D_i = (\bigcup \mathcal{D}) - \bigcup B_i$. Como $\bigcup B_i$ es un cerrado de D, entonces $\bigcup D_i$ es un abierto de D. Esto implica que $\bigcup D_i = D$, es decir, D es un arco. Así, $D - E(D)$ es un abierto de D y por ende, D es un arco libre de D. Tomando $L_i = D$, obtenemos lo requerido.

Caso 2. $\bigcup D_i$ es una curva cerrada simple.

Observemos primero que $A_i \neq \bigcup D_i$, ya que si $A_i = \bigcup D_i$, entonces A_i es una curva cerrada simple. Como X no es un curva cerrada simple, entonces existe $x \in A_i \cap X$ tal que $\operatorname{ord}(x, X) \geq 3$. Como $x \in A_i \subset A \subset \operatorname{int}_X(D)$, entonces D es una vecindad de x en X. Por el Teorema 1.8, $\operatorname{ord}(x, D) = \operatorname{ord}(x, X) \geq 3$, es decir, $x \in A_i \cap R(D)$, lo que es una contradicción. Así, podemos asumir que A_i es de un solo punto o A_i es un arco. Si A_i es de un solo punto o A_i es un arco, entonces existe $p \in \bigcup D_i$ tal que $p \notin A_i$. Así, $A_i \subset (\bigcup D_i) - \{p\}$. Por la Proposición 3.60, existe una descomposición simple de $\bigcup D_i$ tal que $\bigcup D_i = K \cup L$ y $E(K) = K \cap L = E(L)$. Además, por la Proposición 3.67, podemos elegirla tal que, $A_i \subset K - E(K) \subset K \subset (\bigcup D_i) - \{p\}$. Observemos que $(\bigcup D_i) - \{p\}$ es un subconjunto abierto de D. Luego, como $K - E(K) = (\bigcup D_i) - L$, se tiene que $K - E(K)$ es un abierto de $\bigcup D_i$ y por ende, de $(\bigcup D_i) - \{p\}$. Así, $K - E(K)$ es un abierto de D. Tomando $L_i = K$, obtenemos que $A_i \subset \operatorname{int}_D(L_i)$.

En cualquier caso, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, existe un arco libre L_i de D tal que, $A_i \subset \operatorname{int}_D(L_i)$. Como $A_i \subset \operatorname{int}_X(D)$, se tiene que $A_i \subset \operatorname{int}_X(D) \cap \operatorname{int}_D(L_i)$. Sea K_i una componente de $\operatorname{int}_X(D) \cap \operatorname{int}_D(L_i)$ tal que $A_i \subset K_i$. Como $\operatorname{int}_X(D) \cap \operatorname{int}_D(L_i)$ es un abierto de D y está contenido en $\operatorname{int}_X(D)$, entonces $\operatorname{int}_X(D) \cap \operatorname{int}_D(L_i)$ es un abierto de X. Luego, como X es localmente conexo, por el Teorema 1.14, K_i es un abierto de X. Así, $A_i \subset K_i \subset \operatorname{int}_X(L_i) \subset$

$\mathrm{int}_X(D)$, es decir, $A_i \subset \mathrm{int}_X(L_i)$. Por el Teorema 1.16, existe un subcontinuo F_i de X tal que $A_i \subset \mathrm{int}_X(F_i) \subset F_i \subset \mathrm{int}_X(L_i) \subset D$. Observemos que F_i es un subarco de L_i y por ende, un arco libre de D, ya que L_i lo es. Como $F_i - E(F_i)$ es un abierto de D y está contenido en $\mathrm{int}_X(L_i)$, entonces $F_i - E(F_i)$ es un abierto de X. Esto implica que F_i es un arco libre de X. Por el Lema 3.73, existe $J_i \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que, $F_i \subset J_i$. Así, $A_i \subset \mathrm{int}_X(F_i) \subset \mathrm{int}_X(J_i)$. Como esto lo podemos hacer para cualquier componente de A, podemos concluir que $A \in \langle \mathrm{int}_X(J_1), ..., \mathrm{int}_X(J_k) \rangle_{C_n(X)}$ y cada componente de A está contenida en algún $\mathrm{int}_X(J_i)$. $\square$

Capítulo 4

Unicidad del n-ésimo hiperespacio para continuos localmente conexos

En la Sección 3.3, demostramos que para que un continuo X localmente conexo tenga hiperespacio único $C_n(X)$, necesitamos al menos que X sea casi enrejado, véase Teorema 3.54. Ahora, en este capítulo, demostramos que en general, no todo continuo localmente conexo casi enrejado X tiene hiperespacio único $C_n(X)$, véase Corolario 4.2. Sin embargo, para los continuos enrejados esto sí es cierto, véase Teorema 4.24.

4.1. Continuos casi enrejados sin n-ésimo hiperespacio único

Mostramos una condición suficiente para que un continuo localmente conexo casi enrejado X no tenga hiperespacio único $C(X)$, véase Corolario 4.2. Así, como la existencia de una clase de continuos localmente conexos sin m-ésimo hiperespacio único, para algún $m \leq n$, con $m, n \in \mathbb{N}$, véase Corolario 4.3.

Teorema 4.1. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y X un continuo localmente conexo y casi enrejado. Supongamos que existe R un subconjunto cerrado de $\mathcal{P}(X)$ y conjuntos $U_1, \ldots, U_{n+1}$ no vacíos, ajenos por pares y abiertos de X, tales que:*

(a) $X - R = U_1 \cup \cdots \cup U_{n+1}$;

(b) *para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, $R \subset \mathrm{cl}_X(U_i)$.*

Entonces, X no tiene hiperespacio único $C_m(X)$, para cada $m \leq n$.

Demostración. Sea $m \leq n$, con $m, n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, R es un subconjunto cerrado de $\mathcal{P}(X)$, entonces por el Teorema 3.43, $C_m(X, R)$ es un cubo de Hilbert. Dado $p \in R \subset X$ fijo, por el Teorema 3.51, existe un continuo D localmente conexo sin arcos libres tal que $Y = X \cup_p D$ es un continuo localmente conexo que no es homeomorfo a X. Sea d una métrica para Y, por el Teorema 2.28 y el Lema 3.50, podemos asumir que d es una métrica convexa para X,

Y y D. Por el Lema 3.17, $D = \mathcal{P}(D)$. Además, como $X \subset Y$ y $D \subset Y$, por la Observación 3.23, $R \cup D \subset \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(D) \subset \mathcal{P}(Y)$. Esto implica que, $R \cup D$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{P}(Y)$. Por el Teorema 3.43, $C_m(Y, R \cup D)$ es un cubo de Hilbert.

Afirmación 1. $\mathrm{bd}_{C_m(Y)}(C_m(Y, R \cup D))$ es un Z-conjunto en $C_m(Y, R \cup D)$.

Sea $\epsilon > 0$, por el Lema 2.24, $\Phi_\epsilon \restriction_{C_m(Y,R\cup D)} : C_m(Y, R \cup D) \to C_m(Y, R \cup D)$ es una función continua. Por el Lema 2.25, $H_d\left(I_{d_{C_m(Y,R\cup D)}}(A), \Phi_\epsilon(A)\right) < \epsilon$, para cada $A \in C_m(Y, R \cup D)$. Así, basta demostrar que $\Phi_\epsilon(C_m(Y, R \cup D)) \cap \mathrm{bd}_{C_m(Y)}(C_m(Y, R \cup D)) = \emptyset$.

Sea $A \in C_m(Y, R \cup D)$.

Caso 1. $A \cap R \neq \emptyset$. Sea $a \in A \cap R \subset N_\epsilon^X(A) \cap R \subset \Phi_\epsilon(A) \cap \mathrm{cl}_X(U_i)$, entonces $B_\epsilon^X(a) \cap U_i \neq \emptyset$. Como $\Phi_\epsilon(A) \cap U_i \supset B_\epsilon^X(a) \cap U_i \neq \emptyset$, se sigue que $\Phi_\epsilon(A) \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Sea $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ una sucesión de elementos de $C_m(Y)$ tal que $\lim A_j = \Phi_\epsilon(A)$. Por la Definición 2.29, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $j \geq M$ y cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, $A_j \cap U_i \neq \emptyset$. Ahora supongamos que $A_j \cap (R \cup D) = \emptyset$, entonces $A_j \subset Y - (R \cup D) = (Y - R) \cap (Y - D) = (Y - R) \cap (X - \{p\}) = X - R$. Así, como $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$, y A_j intersecta a cada uno de los conjuntos U_i no vacíos, ajenos por pares y abiertos de X, con $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, esto implica que A_j tiene a lo menos $n+1$ componentes, lo que es una contradicción, ya que $A_j \in C_m(Y)$. Por lo tanto, $A_j \cap (R \cup D) \neq \emptyset$. Así, $A_j \in C_m(Y, R \cup D)$ y $\Phi_\epsilon(A)$ no se puede aproximar por elementos de $C_m(Y)$ que no intersectan a $R \cup D$, es decir, $\Phi_\epsilon(A) \notin \mathrm{cl}_{C_m(Y)}(C_m(Y) - C_m(Y, R \cup D)) \supset \mathrm{bd}_{C_m(Y)}(C_m(Y, R \cup D))$. De esto último, $\Phi_\epsilon(A) \notin \mathrm{bd}_{C_m(Y)}(C_m(Y, R \cup D))$.

Caso 2. $A \cap R = \emptyset$. Como $A \cap (R \cup D) \neq \emptyset$, entonces $A \cap D \neq \emptyset$. Si $p \in A$, entonces $p \in A \cap R$. Como esto es una contradicción, $p \notin A$. Así, $(A \cap D) - \{p\} = A \cap D \neq \emptyset$. Luego, $\Phi_\epsilon(A) \cap (D - \{p\}) = (\Phi_\epsilon(A) \cap D) - \{p\} \supset (A \cap D) - \{p\} \neq \emptyset$, es decir, $\Phi_\epsilon(A) \cap (D - \{p\}) \neq \emptyset$. Como $D - \{p\} = Y - X$, tenemos que $D - \{p\}$ es un abierto de Y contenido en $R \cup D$, entonces $\Phi_\epsilon(A) \notin \mathrm{bd}_{C_m(Y)}(C_m(Y, R \cup D))$.

Del Caso 1 y el Caso 2, concluimos que $\Phi_\epsilon \restriction_{C_m(Y,R\cup D)} : C_m(Y, R \cup D) \to C_m(Y, R \cup D) - \mathrm{bd}_{C_m(Y)}(C_m(Y, R \cup D))$. Esto prueba la Afirmación 1.

Afirmación 2. $\mathrm{bd}_{C_m(X)}(C_m(X, R))$ es un Z-conjunto en $C_m(X, R)$.

Sea $\epsilon > 0$, por el Lema 2.24 y el Lema 2.25, $\Phi_\epsilon \restriction_{C_m(X,R)} : C_m(X, R) \to C_m(X, R)$ es una función continua tal que $H_d\left(I_{d_{C_m(X,R)}}(A), \Phi_\epsilon(A)\right) < \epsilon$, para cada $A \in C_m(X, R)$. Así, es suficiente probar que $\Phi_\epsilon \restriction_{C_m(X,R)} (C_m(X, R)) \cap \mathrm{bd}_{C_m(X)}(C_m(X, R)) = \emptyset$.

Sea $A \in C_m(X, R)$. Observemos que $C_m(X, R) \subset C_m(Y, R \cup D)$. Por la Afirmación 1 y el Lema 3.49, $\Phi_\epsilon(C_m(X, R)) \subset \Phi_\epsilon(C_m(Y, R \cup D)) \subset C_m(Y, R \cup D) - \mathrm{bd}_{C_m(X)}(C_m(X, R))$. Así, $\Phi_\epsilon(C_m(X, R)) \cap \mathrm{bd}_{C_m(X)}(C_m(X, R)) = \emptyset$. Por lo tanto, la Afirmación 2 está probada.

Luego, por la Afirmación 1, la Afirmación 2 y el Lema 3.53, $C_m(X)$ es homeomorfo a $C_m(Y)$. Por lo tanto, X no tiene hiperespacio único $C_m(X)$, para cada $m \leq n$. □

El siguiente resultado se desprende como un caso particular del Teorema

4.1 cuando $n = 1$.

Corolario 4.2. *Si X es un continuo localmente conexo y casi enrejado tal que $X - \mathcal{P}(X)$ es disconexo, entonces X no tiene hiperespacio único $C(X)$.*

Demostración. Como $X - \mathcal{P}(X)$ es disconexo, existen U y V no vacíos, ajenos y abiertos de $X - \mathcal{P}(X)$ tales que $X - \mathcal{P}(X) = U \cup V$. Observemos que U y V también son abiertos de X. Más aún, como $U \cap V = \emptyset$, entonces $U \subset X - V$ y $V \subset X - U$. Así, $\mathrm{cl}_X(U) \subset X - V$ y $\mathrm{cl}_X(V) \subset X - U$. Como X es casi enrejado $\mathrm{int}_X(\mathcal{P}(X)) = \mathrm{int}_X(X - \mathcal{G}(X)) = X - \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X)) = \emptyset$. Así, $\mathrm{cl}_X(X - \mathcal{P}(X)) = X - \mathrm{int}_X(\mathcal{P}(X)) = X = \mathrm{cl}_X(U) \cup \mathrm{cl}_X(V)$, es decir, $X = \mathrm{cl}_X(U) \cup \mathrm{cl}_X(V)$. Como X es conexo, $R = \mathrm{cl}_X(U) \cap \mathrm{cl}_X(V) \neq \emptyset$. Luego, $\mathrm{cl}_X(U) \cap \mathrm{cl}_X(V) \subset X - (U \cup V) = \mathcal{P}(X)$, es decir, R es un subconjunto cerrado de X, y por ende, de $\mathcal{P}(X)$. Sean $W = X - \mathrm{cl}_X(U)$ y $Z = X - \mathrm{cl}_X(V)$. Como $U \subset Z$ y $V \subset W$, entonces $R \subset \mathrm{cl}_X(W) \cap \mathrm{cl}_X(Z)$. Además, W y Z son subconjuntos ajenos, no vacíos y abiertos de X tales que $X - R = W \cup Z$. Por el Teorema 4.1, X no tiene hiperespacio único $C(X)$. □

Corolario 4.3. *Si X es un continuo localmente conexo y casi enrejado que satisface las condiciones del Teorema 4.1, entonces existe una clase no numerable $\mathcal{Y}$ de continuos localmente conexos no homeomorfos por pares tales que:*

(a) *para cada $Y \in \mathcal{Y}$, X no es homeomorfo a Y;*

(b) *para cada $Y \in \mathcal{Y}$ y cada $m \leq n$, $C_m(X)$ es homeomorfo a $C_m(Y)$.*

Demostración. Dado $p \in R \subset X$ fijo, por el Teorema 3.51, existe una clase $\mathcal{D}$ no numerable de continuos localmente conexos sin arcos libres y no homeomorfos por pares tales que satisfacen los incisos (a) y (b) del Teorema 3.51. Considerando $\mathcal{Y} = \{X \cup_p D \colon D \in \mathcal{D}\}$, se tiene por el inciso (b) del Teorema 3.51, que para cada $Y \in \mathcal{Y}$, X no es homeomorfo a Y. Además, para cada $m \leq n$, con $m, n \in \mathbb{N}$, por un procedimiento similar al del Teorema 4.1, se tiene que $C_m(X)$ es homeomorfo a $C_m(Y)$. Esto concluye la demostración. □

Proposición 4.4. [29, Corolario 10.20.1] *Si X es una dendrita y $x \in X$, entonces* $\mathrm{ord}(x, X) \in \mathbb{N}$ *o* $\mathrm{ord}(x, X) = \omega$.

Corolario 4.5. *Si X es una dendrita que no es un árbol y $k = \sup\{\mathrm{ord}(p, X) : p \in \mathcal{P}(X)\}$, note que $k \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Entonces, para cada $m < k$, con $m \in \mathbb{N}$, X no tiene hiperespacio único $C_m(X)$.*

Demostración. Cuando X no es casi enrejado, por el Teorema 3.54, el resultado es inmediato. Así, podemos suponer que X es casi enrejado. Como X es un continuo localmente conexo sin curvas cerradas simples que no es un árbol, entonces X no es una gráfica finita. Luego, no existe una gráfica finita D contenida en X tal que $X \subset \mathrm{int}_X(D)$. Por el Teorema 3.22, $X \cap \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Así, $k = \sup\{\mathrm{ord}(p, X) : p \in \mathcal{P}(X)\}$ está bien definido. Sea $m < k$, entonces existe $q \in \mathcal{P}(X)$ tal que $\mathrm{ord}(q, X) \geq m + 1$. Si $\mathrm{ord}(q, X)$ es finito, por [29, Teorema 10.13], el número de componentes de $X - \{q\}$ también es finito y coincide con $\mathrm{ord}(q, X)$. Sean $n + 1 = \mathrm{ord}(q, X)$ y $U_1, U_2, \cdots, U_{n+1}$

las componentes de $X - \{q\}$. Luego, $X - \{q\} = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$. Observemos que los conjuntos U_i son subconjuntos abiertos no vacíos y disjuntos de X, para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Ahora, fijemos $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ y observemos que $U_j \subset X - \bigcup_{i \neq j} U_i$. Entonces, $\mathrm{cl}_X(U_j) \subset \left(X - \bigcup_{i \neq j} U_i\right) = U_j \cup \{q\}$. Notemos que $q \in \mathrm{cl}_X(U_j)$, ya que en caso contrario, $\mathrm{cl}_X(U_j) = U_j$. Luego, U_j es un subconjunto propio de X con frontera vacía, lo que es una contradicción, pues X es conexo. Así, $\{q\} \subset \mathrm{cl}_X(U_j)$, para cada $j \in \{1, \ldots, n+1\}$. Por la tanto, por el Teorema 4.1, X no tiene hiperespacio único $C_m(X)$ para cada $m < k$.

Ahora, si $\mathrm{ord}(q, X)$ es infinito, por [29, Teorema 10.13], el número de componentes de $X - \{q\}$ también es infinito. Tomando $U_1, U_2, \cdots, U_{n+1}$ las componentes de $X - \{q\}$, con U_{n+1} la unión de todas las demás componentes distintas de U_l, para $l \in \{1, \ldots, n\}$, por un procedimiento similar cuando el número de componentes de $X - \{p\}$ es finito, se obtiene que X no tiene hiperespacio único $C_m(X)$, para cada $m < k$. Así, el lema está probado. □

Ejemplo 4.6. *El continuo F_ω, véase la Figura 4.1, es una dendrita que no es un árbol, y además,* $\mathrm{ord}(x, F_\omega) = \omega$. *Así, por el Corolario 4.5, F_ω no tiene hiperespacio único $C_n(F_\omega)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

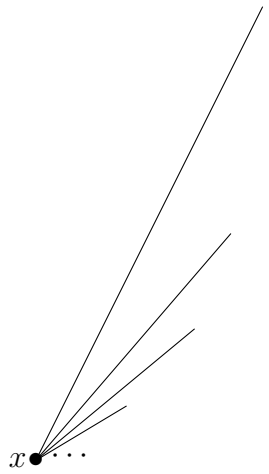

Figura 4.1: Continuo F_ω

4.2. Los continuos enrejados tienen n-ésimo hiperespacio único

Esta sección está encaminada en demostrar, como su nombre lo indica, que los continuos enrejados tienen n-ésimo hiperespacio único.

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, las siguientes clases de conjuntos tienen un

papel importante en esta sección:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_n(X) &= \{A \in C_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } C_n(X) \text{ que es una } 2n\text{-celda}\};\\
\mathfrak{P}_n^{\partial}(X) &= \{A \in C_n(X) : A \text{ tiene una vecindad } \mathcal{M} \text{ en } C_n(X) \text{ que es una } 2n\text{-celda y } A \in \partial\mathcal{M}\};\\
\Gamma_n(X) &= \{A \in C_n(X) - \mathfrak{P}_n(X) : A \text{ tiene una base local de vecindades abiertas } \mathfrak{H} \text{ en } C_n(X) \text{ tal que, para cada } \mathcal{U} \in \mathfrak{H},\\
&\qquad \dim(\mathcal{U}) = 2n \text{ y } \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X) \text{ es arco conexo }\}.
\end{aligned}$$

Se acostumbra denotar a $\mathfrak{P}_1(X)$ y $\mathfrak{P}_1^{\partial}(X)$ como $\mathfrak{P}(X)$ y $\mathfrak{P}^{\partial}(X)$, respectivamente.

Recordemos que

$$\mathfrak{A}_E(X) = \{J \in \mathfrak{A}(X) : \text{ existe un punto extremo } p \text{ de } J \text{ tal que } p \in \operatorname{int}_X(J)\}.$$

Si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y $p \in E(J)$ tal que $p \in \operatorname{int}_X(J)$, decimos que p es un **extremo** de X. Además, en algunos resultados, si B es un subconjunto de un continuo X, denotamos por:

$$\begin{aligned}
C(B) &= \{A \in C(X) : A \subset B\};\\
F_1(B) &= \{A \in F_1(X) : A \subset B\}.
\end{aligned}$$

Observación 4.7. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathfrak{P}_n(X)$ es una $2n$-variedad.*

En efecto, sea $A \in \mathfrak{P}_n(X)$, entonces $A \in C_n(X)$ y A tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $C_n(X)$ que es una $2n$-celda. Como $\mathfrak{P}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $C_n(X)$ y $A \in \mathfrak{P}_n(X) \cap \operatorname{int}_{C_n(X)}(M)$, por el Teorema 1.29, existe una vecindad $\mathcal{N}$ de A en $C_n(X)$ que es una $2n$-celda tal que $A \in \operatorname{int}_{C_n(X)}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \subset \mathfrak{P}_n(X) \cap \operatorname{int}_{C_n(X)}(M) \subset \mathfrak{P}_n(X) \subset C_n(X)$. Observemos que $\mathcal{N}$ es una vecindad de A en $\mathfrak{P}_n(X)$ que es una $2n$-celda. Como A fue elegido arbitrariamente en $\mathfrak{P}_n(X)$, por la Definición 1.25, $\mathfrak{P}_n(X)$ es una $2n$-variedad.

Otra forma de describir a $\mathfrak{P}^{\partial}(X)$ que nos será útil en la Proposición 4.11, es la siguiente.

Observación 4.8. *Si X es un continuo, entonces $\mathfrak{P}^{\partial}(X) = \{A \in \mathfrak{P}(X) : A$ tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $\mathfrak{P}(X)$ que es una 2-celda y $A \in \partial M\}$.*

Sea $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X) \subset \mathfrak{P}(X)$, entonces $A \in \mathfrak{P}(X)$, A tiene una vecindad $\mathcal{N}$ en $C(X)$ que es una 2-celda y $A \in \partial\mathcal{N}$. Como $A \in \mathfrak{P}(X) \cap \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{N})$ y $\mathfrak{P}(X)$ es un subconjunto abierto de $C(X)$, por el Teorema 1.29, existe una 2-celda $\mathcal{M}$ en $C(X)$ tal que $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(X) \cap \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{N}) \subset \mathfrak{P}(X) \subset C(X)$. Notemos que $\mathcal{M}$ es una vecindad de A en $\mathfrak{P}(X)$. Si $A \notin \partial\mathcal{M}$, entonces $A \in Int_V\mathcal{M}$, por lo que existe W vecindad de A en $\mathcal{M}$ tal que W es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Como $\operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M})$ es una vecindad de A en $\mathcal{M}$, por la Proposición 1.27, existe una vecindad U de A en $\mathcal{M}$ tal que $A \in \operatorname{int}_{\mathcal{M}}(U) \subset U \subset \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ y U es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Notemos que $\operatorname{int}_{\mathcal{M}}(U)$ también es un subconjunto abierto de $\mathcal{N}$, entonces U es una vecindad de A en $\mathcal{N}$ tal que U es homeomorfo

a $\mathbb{R}^2$*, lo que es una contradicción, ya que* $A \in \partial\mathcal{N}$*. Así,* $A \in \partial\mathcal{M}$*, y por ende,* $A \in \{A \in \mathfrak{P}(X)\colon A$ *tiene una vecindad* $\mathcal{M}$ *en* $\mathfrak{P}(X)$ *que es una 2-celda y* $A \in \partial\mathcal{M}\}$*.*

Recíprocamente, sea $A \in \{A \in \mathfrak{P}(X)\colon A$ *tiene una vecindad* $\mathcal{M}$ *en* $\mathfrak{P}(X)$ *que es una 2-celda y* $A \in \partial\mathcal{M}\}$*, entonces* $A \in \mathfrak{P}(X)$ *y* A *tiene una vecindad* $\mathcal{M}$ *en* $\mathfrak{P}(X)$ *que es una 2-celda tal que* $A \in \partial\mathcal{M}$*. Como* $A \in \operatorname{int}_{\mathfrak{P}(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(X) \subset C(X)$ *y* $\mathfrak{P}(X)$ *es un subconjunto abierto de* $C(X)$*, entonces* $\mathcal{M}$ *es una vecindad de* A *en* $C(X)$*. Así,* $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$*.*

Lema 4.9. *Sean* X *un continuo localmente conexo y* $A \in C(X)$*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$*;*

(b) *existe* $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ *tal que una de las siguientes condiciones se cumplen:* (1) $A = \{p\}$*, para algún* $p \in \operatorname{int}_X(J)$*,* (2) $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ *y existe un extremo* p *de* X *tal que* $p \in A \subset \operatorname{int}_X(J)$*.*

Demostración. (a)⇒(b) Supongamos que $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$, entonces existe una vecindad $\mathcal{M}$ de A en $C(X)$ que es una 2-celda tal que $A \in \partial\mathcal{M}$. Luego, $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M} \subset C(X)$, así, por el Teorema 1.3, $\dim(A, \mathcal{M}) = \dim(A, C(X))$. Más aún, por el Teorema 1.4 y [30, Teorema 9.5], $\dim(\mathcal{M}) = \dim(I^2) = 2$, en particular, $\dim(A, \mathcal{M}) = 2$, entonces $\dim(A, C(X)) = 2$. Por el Teorema 3.75, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \in \langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_{C(X)}$ y $A \subset \operatorname{int}_X(J)$. Como $A \in \langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_{C(X)} \subset C(J)$, entonces $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(C(J))$. Así, $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M}) \cap \operatorname{int}_{C(X)}(C(J))$, entonces por el Teorema 1.29, existe una 2-celda $\mathcal{L}$ de $C(X)$ tal que $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L} \subset \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M}) \cap \operatorname{int}_{C(X)}(C(J)) \subset \operatorname{int}_{C(X)}(C(J)) \subset C(J) \subset C(X)$. Si $A \notin \partial\mathcal{L}$, entonces $A \in Int_V\mathcal{L}$, por lo que existe una vecindad $\mathcal{S}$ de A en $\mathcal{L}$ tal que $A \in \operatorname{int}_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, con $\mathcal{S}$ homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Como en particular, $\operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{L})$ es una vecindad de A en $\mathcal{L}$, por la Proposición 1.27, existe una vecindad $\mathcal{T}$ de A en $\mathcal{L}$ tal que $A \in \operatorname{int}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T} \subset \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$, con $\mathcal{T}$ homeomorfa a $\mathbb{R}^2$, esto implica que $\operatorname{int}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T})$ es un subconjunto abierto de $\operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{L})$ y por ende, de $C(X)$. Así, como $A \in \operatorname{int}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{M} \subset C(X)$, tenemos que $\operatorname{int}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T})$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{M}$, es decir, $\mathcal{T}$ es una vecindad de A en $\mathcal{M}$ que es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$, lo que es una contradicción, ya que $A \in \partial\mathcal{M}$. Por lo tanto, $A \in \partial\mathcal{L}$. Por otro lado, como $\operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{L})$ es un abierto de $C(X)$ contenido en $C(J)$, entonces $\operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{L})$ es también un abierto de $C(J)$, por lo que $\mathcal{L}$ es una vecindad de A en $C(J)$ que es una 2-celda y por ende, una 2-variedad tal que $A \in \partial\mathcal{L}$. Así, como $C(J)$ es una vecindad de A en $C(J)$ que es una 2-variedad por ser una 2-celda, entonces por la Proposición 1.28, se sigue que $A \in \partial C(J)$.

En base a esto, tenemos dos casos.

Caso 1. J es una curva cerrada simple.

Por la Proposición 2.18, tenemos que $A \in \partial C(J) = F_1(J)$, luego, $\mid A \mid = 1$. Como $A \subset \operatorname{int}_X(J)$, entonces $A = \{p\}$, para algún $p \in \operatorname{int}_X(J)$. Así, se cumple (a).

Caso 2. J es un arco.

Observemos que A es un subcontinuo de J. Luego, A es de un solo punto, $A = J$ o A es un subarco propio de J. Si A es de un solo punto, claramente se cumple (a). Si $A = J$, como $A \subset \operatorname{int}_X(J)$, entonces $A = \operatorname{int}_X(J)$. Esto implica que, A es un cerrado y abierto no vacío de X. Como X es conexo, $A = X$. Así, (b) se cumple. Por último, si A es un subarco propio de J y $E(J) = \{p, q\}$, por la Proposición 2.17, tenemos que $A \in \partial C(J) = F_1(J) \cup C(p, J) \cup C(q, J)$. Como $A \notin F_1(J)$, entonces $A \in C(p, J) \cup C(q, J)$. Si $A \in C(p, J)$, entonces $p \in A \subset \operatorname{int}_X(J) \subset J$, así, $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y p es un extremo de X. Análogamente, si $A \in C(q, J)$, se puede demostrar que $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y q es un extremo de X tal que $q \in A \subset \operatorname{int}_X(J)$. Así, (b) se cumple.

(b)$\Rightarrow$(a) Cuando X es un arco o una curva cerrada simple, el resultado es inmediato. Así, supongamos que X no es un arco ni una curva cerrada simple. Como $A \in C(X)$ y $A \subset \operatorname{int}_X(J)$, entonces $A \in C(\operatorname{int}_X(J)) \subset C(J)$. Luego, $C(\operatorname{int}_X(J))$ es una vecindad de A en $C(X)$. Como $C(\operatorname{int}_X(J))$ es un subconjunto abierto de $C(X)$ contenido en $C(J)$, entonces $C(\operatorname{int}_X(J))$ es un subconjunto abierto de $C(J)$. Más aún, como $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, por la Proposición 2.17 y la Proposición 2.18, $C(J)$ es una 2-celda, y por ende, una 2-variedad. Así, por la Proposición 1.32, $C(\operatorname{int}_X(J))$ es una 2-variedad cuya frontera como variedad, por la Proposición 1.33, es $\partial C(\operatorname{int}_X(J)) = \partial C(J) \cap C(\operatorname{int}_X(J))$. De aquí, si $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, por la Observación 3.64, $\operatorname{int}_X(J)$ es homeomorfo a $(0, 1)$. De la construcción en la Proposición 2.17 y la Proposición 2.18, $C(\operatorname{int}_X(J))$ es homeomorfo a $(0, 1) \times (0, 1)$. Entonces, $\partial C(\operatorname{int}_X(J)) = F_1(\operatorname{int}_X(J))$. En otro caso, si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y p_J y q_J son los puntos extremos de J, con $p_J \in \operatorname{int}_X(J)$, por la Observación 3.64, $\operatorname{int}_X(J)$ es homeomorfo a $[0, 1)$. De la construcción en la Proposición 2.17, $C(\operatorname{int}_X(J))$ es homeomorfo a $[0, 1) \times [0, 1)$. Así, $\partial C(\operatorname{int}_X(J)) = C(p_J, \operatorname{int}_X(J)) \cup F_1(\operatorname{int}_X(J))$.

Ahora bien, si se cumple (1), $A = \{p\}$, para algún $p \in \operatorname{int}_X(J)$. Por el párrafo anterior, $A \in \partial C(\operatorname{int}_X(J))$. Si se cumple (2), $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y existe un extremo p de X tal que $p \in A \subset \operatorname{int}_X(J)$. Como $p \in E(J) \cap \operatorname{int}_X(J)$ y X no es un arco, entonces $p = p_J$. Por el párrafo anterior, $A \in \partial C(\operatorname{int}_X(J))$. En cualquier caso, $C(\operatorname{int}_X(J))$ es una vecindad de A en $C(X)$ que es una 2-variedad tal que $A \in \partial C(\operatorname{int}_X(J))$. Como $A \in C(\operatorname{int}_X(J)) \cap \operatorname{int}_{C(X)}(C(J))$ y $C(J)$ es una 2-celda, por el Teorema 1.29, existe una vecindad $\mathcal{N}$ de A en $C(X)$ que es una 2-celda, tal que $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \subset C(\operatorname{int}_X(J)) \cap \operatorname{int}_{C(X)}(C(J))$. Por la Proposición 1.28, $A \in \partial\mathcal{N}$. Esto muestra que $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$ y termina la prueba del Lema. □

Lema 4.10. *Si X es un continuo localmente conexo y $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, entonces $\Gamma_n(X) = \{A \in C_n(X) : A$ es conexo y existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \subset \operatorname{int}_X(J)\} = \mathfrak{P}(X)$.*

Demostración. Primero demostremos que $\Gamma_n(X) = \{A \in C_n(X) : A$ es conexo y existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \subset \operatorname{int}_X(J)\}$. Sea $A \in \Gamma_n(X)$, entonces $A \in C_n(X) - \mathfrak{P}_n(X)$ y A tiene una base de vecindades abiertas $\mathfrak{H}$ en $C_n(X)$ tal que, para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}$, $\dim(\mathcal{U}) = 2n$ y $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X)$ es arco conexo. Como para cada vecindad $\mathcal{V}$ de A en $C_n(X)$, existe una vecindad abierta $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}$ de A en $C_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \subset C_n(X)$, entonces por el Teorema 1.3 (c), $\dim(A, C_n(X)) = \dim(A, \mathcal{U}) = 2n$, es decir, $\dim(A, C_n(X)) = 2n$. Así,

por el Teorema 3.22, existe una gráfica finita D en X tal que $A \subset \operatorname{int}_X(D)$. Entonces $A \in \langle \operatorname{int}_X(D)\rangle_{C_n(X)} \subset C_n(D)$, es decir, $C_n(D)$, es una vecindad de A en $C_n(X)$. En consecuencia, $\mathfrak{H}$ contiene una base de vecindades abiertas $\mathfrak{H}'$ de A en $C_n(D)$ tal que, para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}'$, $\dim(\mathcal{U}) = 2n$, $\mathcal{U} \cap \mathfrak{B}_n(X)$ es arco conexo y $\mathcal{U} \subset C_n(D)$.

Ahora mostremos que $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X) = \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(D)$, para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}'$. Sean $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}'$ y $B \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X)$, entonces B tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $C_n(X)$ que es una $2n$-celda. Como $B \in \mathcal{U} \cap \operatorname{int}_{C_n(X)}(\mathcal{M})$, por el Teorema 1.29, existe una $2n$-celda $\mathcal{N}$ en $C_n(X)$ tal que $B \in \operatorname{int}_{C_n(X)}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{U} \cap \operatorname{int}_{C_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{M} \subset \mathcal{U} \subset C_n(D)$. Esto implica que $\mathcal{N}$ es una vecindad de B en $C_n(D)$ que es una $2n$-celda. Así, $B \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(D)$.

Recíprocamente, dado $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}'$ y $B \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(D)$, tenemos que B tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $C_n(D)$ que es una $2n$-celda. Como $B \in \mathcal{U} \cap \operatorname{int}_{C_n(D)}(\mathcal{M})$, por el Teorema 1.29, existe una $2n$-celda $\mathcal{N}$ en $C_n(D)$ tal que $B \in \operatorname{int}_{C_n(D)}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{U} \cap \operatorname{int}_{C_n(D)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{M} \subset \mathcal{U} \subset C_n(D)$. Observemos que $\operatorname{int}_{C_n(D)}(\mathcal{N})$ es un abierto de $C_n(X)$, luego, $\mathcal{N}$ es una vecindad de B en $C_n(X)$ que es una $2n$-celda. Por lo tanto, $B \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X)$. Así concluimos que $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X) = \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(D)$.

Como por hipótesis, $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X)$ es arco conexo, por el párrafo anterior, $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(D)$ es arco conexo. Además, $A \in \mathcal{U} - \mathfrak{P}_n(X) = \mathcal{U} - \mathfrak{P}_n(D)$. Así, hemos demostrado que $A \in \Gamma_n(D)$. Entonces por [18, Lema 3.6], A es conexo y por el Teorema 3.75, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \subset \operatorname{int}_X(J)$.

Ahora supongamos que $A \in C_n(X)$ es conexo y existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \subset \operatorname{int}_X(J)$. Por la Proposición 3.36, $R(J) = \emptyset$, entonces por [18, Lema 3.6], $A \in C_n(J) - \mathfrak{P}_n(J)$ y A tiene una base de vecindades abiertas $\mathfrak{H}$ en $C_n(J)$ tal que para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}$, $\dim(\mathcal{U}) \leq 2n$ y $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(J)$ es arco conexo. Observemos que por el Teorema 3.75, $\dim(\mathcal{U}) = 2n$, para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}$. Como por hipótesis $A \subset \operatorname{int}_X(J)$ y $A \in C_n(X)$, entonces $A \in \langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_{C_n(X)} \subset \operatorname{int}_{C_n(X)}(C_n(J)) \subset C_n(J)$, es decir, $\operatorname{int}_{C_n(X)}(C_n(J))$ es una vecindad de A en $C_n(J)$. En consecuencia, $\mathfrak{H}$ contiene una base de vecindades abiertas $\mathfrak{H}'$ de A en $C_n(X)$ tal que para cada $\mathcal{U} \in \mathfrak{H}'$, $\dim(\mathcal{U}) = 2n$, $\mathcal{U} \cap \mathfrak{B}_n(J)$ es arco conexo y $\mathcal{U} \subset \operatorname{int}_{C_n(X)}(C_n(J))$. Procediendo como en párrafos anteriores, se demuestra que $\mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(J) = \mathcal{U} \cap \mathfrak{P}_n(X)$ y $A \in \mathcal{U} - \mathfrak{B}_n(J) = \mathcal{U} - \mathfrak{B}_n(X)$. Por lo tanto, $A \in \Gamma_n(X)$.

Por último, demostremos que $\{A \in C_n(X) : A$ es conexo y existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \subset \operatorname{int}_X(J)\} = \mathfrak{P}(X)$. Sean $A \in C_n(X)$ tal que A es conexo y $A \subset \operatorname{int}_X(J)$ para algún $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Entonces $A \in \langle \operatorname{int}_X(J)\rangle_{C(X)} \subset C(J) \subset C(X)$, es decir, $C(J)$ es una vecindad de A en $C(X)$. Por [20, Ejemplo 5.2], $C(J)$ es una 2-celda, así, $A \in \mathfrak{P}(X)$.

Recíprocamente, sea $A \in \mathfrak{P}(X)$, entonces $A \in C(X)$ y A tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $C(X)$ que es una 2-celda. Luego, por el Teorema 1.3 (c), $\dim(A, C(X)) = \dim(A, \mathcal{M}) = 2$, es decir, $\dim(A, C(X)) = 2$. Así, por el Teorema 3.75, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \subset \operatorname{int}_X(J)$. Esto muestra que $A \in \{A \in C_n(X) : A$ es conexo y existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A \subset \operatorname{int}_X(J)\}$ y termina la demostración. $\square$

Proposición 4.11. *Sean X y Y dos continuos localmente conexos y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$. Si $h\colon C_n(X) \to C_n(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $h\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) =$*

$\mathfrak{P}^{\partial}(Y)$.

Demostración. Por la Observacion 4.7, $\mathfrak{P}(X)$ y $\mathfrak{P}(Y)$ son 2-variedades, por lo que podemos hablar de sus fronteras como variedad. Mostremos que $\partial\mathfrak{P}(X) = \mathfrak{P}^{\partial}(X)$. Sea $A \in \partial\mathfrak{P}(X)$, entonces $A \in \mathfrak{P}(X)$, por lo que A tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $C(X)$ que es una 2-celda y $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M}) \cap \mathfrak{P}(X)$. Por el Teorema 1.29, existe una vecindad $\mathcal{N}$ de A en $C(X)$ que es una 2-celda tal que $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \subset \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{M}) \cap \mathfrak{P}(X)$. Observemos que $\mathcal{N}$ es una vecindad de A en $\mathfrak{P}(X)$. Si $A \notin \partial\mathcal{N}$, entonces existe una vecindad $\mathcal{S}$ de A en $\mathcal{N}$ que es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Como $\operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{N})$ es una vecindad de A en $\mathcal{N}$, por la Proposición 1.27, existe una vecindad $\mathcal{T}$ de A en $\mathcal{N}$ tal que $A \in \operatorname{int}_{\mathcal{N}}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T} \subset \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \subset \mathfrak{P}(X) \subset C(X)$ y $\mathcal{T}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Notemos que $\mathcal{T}$ es una vecindad de A en $\mathfrak{P}(X)$ que es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, entonces $A \in Int_V\mathfrak{P}(X)$, lo que es una contradicción, ya que $A \in \partial\mathfrak{P}(X)$. Así, $A \in \partial\mathcal{N}$. Por la Observación 4.8, $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$.

Recíprocamente, sea $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$, por la Observación 4.8, $A \in \mathfrak{P}(X)$, A tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $\mathfrak{P}(X)$ que es una 2-celda y $A \in \partial\mathcal{M}$. Si $A \notin \partial\mathfrak{P}(X)$, entonces $A \in Int_V\mathfrak{P}(X)$. Luego, existe una vecindad $\mathcal{N}$ de A en $\mathfrak{P}(X)$ que es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Como $\mathcal{M}$ es una vecindad de A en $\mathfrak{P}(X)$, por la Proposición 1.27, existe una vecindad $\mathcal{S}$ de A en $\mathfrak{P}(X)$ tal que $A \in \operatorname{int}_{\mathfrak{P}(X)}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(X) \subset C(X)$ y $\mathcal{S}$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Observemos que $\mathcal{S}$ es una vecindad de A en $\mathcal{M}$ que es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$, lo que es una contradicción. Así, $A \in \partial\mathfrak{P}(X)$, y por lo tanto, $\partial\mathfrak{P}(X) = \mathfrak{P}^{\partial}(X)$.

Regresando a la demostración, por el párrafo anterior, tenemos que $\partial\mathfrak{P}(X) = \mathfrak{P}^{\partial}(X)$ y $\partial\mathfrak{P}(Y) = \mathfrak{P}^{\partial}(Y)$. Como $\mathfrak{P}(X)$ está dado en términos de conceptos topológicos que se conservan bajo homeomorfismos, para $n = 1$, $h(\mathfrak{P}(X)) = \mathfrak{P}(X)$. Para $n \geq 3$, por el Lema 4.10, $\Gamma_n(X) = \mathfrak{P}(X)$ y $\Gamma_n(Y) = \mathfrak{P}(Y)$. Como $\Gamma_n(X)$ está dado en términos de conceptos topológicos, se tiene que $h(\Gamma_n(X)) = \Gamma_n(Y)$, o sea, $h(\mathfrak{P}(X)) = \mathfrak{P}(Y)$. Por la Proposición 1.26, $h(\partial\mathfrak{P}(X)) = \partial\mathfrak{P}(Y)$, es decir, $h\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) = \mathfrak{P}^{\partial}(Y)$. Esto termina la prueba de la proposición. □

Teorema 4.12. *Si X es un continuo localmente conexo que no es un arco, entonces existe un homeomorfismo $h\colon \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) \to \operatorname{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)$ tal que $h(p) = \{p\}$ para cada $p \in \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) - \bigcup\{\operatorname{int}_X(J) : J \in \mathfrak{A}_E(X)\}$ y, si $h(p) \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$, entonces $p \in \mathcal{P}(X)$ o p es un punto extremo de J, para algún $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, donde $J \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ y $p \in \operatorname{int}_X(J)$.*

Demostración. Cuando X es una curva cerrada simple, por la Proposición 2.18, $C(X)$ es una 2-celda tal que $\partial C(X) = F_1(X)$. Luego, $F_1(X) \subset \mathfrak{P}^{\partial}(X)$. Más aún, $F_1(X) = \mathfrak{P}^{\partial}(X)$. En efecto, supongamos que $F_1(X) \neq \mathfrak{P}^{\partial}(X)$, entonces podemos suponer que $\mathfrak{P}^{\partial}(X) \not\subset F_1(X)$. Luego, existe $A \in \mathfrak{P}^{\partial}(X)$ tal que $A \notin F_1(X)$. Como X es una curva cerrada simple, por el Lema 3.61, $\mathfrak{A}_E(X) = \emptyset$. Entonces, por el Lema 4.9, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A = \{p\}$, para algún $p \in \operatorname{int}_X(J)$. Por el Lema 3.61, $J = X$, así, $A \in F_1(X)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathfrak{P}^{\partial}(X) = F_1(X)$. De aquí, $\operatorname{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) = F_1(X)$. Como X es casi enrejado, por el Lema 3.18, $\operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) = X$. Entonces, por el Lema 2.8, existe $h\colon \operatorname{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) \to \operatorname{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)$ tal que $h(p) = \{p\}$, para cada $p \in$

$\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$. Como X es una gráfica finita, $h(p)\cap\mathcal{P}(X)=\emptyset$. Así, supongamos que X no es un arco ni una curva cerrada simple.

Sean $J\in\mathfrak{A}_E(X)$ y p_J y q_J sus puntos extremos, con $p_J\in\mathrm{int}_X(J)$. Como X no es un arco, $\mathrm{int}_X(J)=J-\{q_J\}$. Sean $h_J\colon [0,1]\to J$ un homeomorfismo tal que $h_J(0)=q_J$ y $h_J(1)=p_J$, y $W=\bigcup\{J-\{q_J\}\colon J\in\mathfrak{A}_E(X)\}$. Observemos que W es un subconjunto abierto de X. Además, por el Lema 3.74, $\mathcal{FA}(X)=\bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J\in\mathfrak{A}_S(X)\}$, luego, $W\subset\mathcal{FA}(X)$.

Consideremos $h\colon \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))\to\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)$ que está dada por

$$h(p)=\begin{cases}\{p\} & \text{si } p\in\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))-W,\\ \{h_J(2s)\} & \text{si } p\in J\in\mathfrak{A}_E(X),\ p=h_J(s) \text{ y } s\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ h_J([2-2s,1]) & \text{si } p\in J\in\mathfrak{A}_E(X),\ p=h_J(s) \text{ y } s\in\left[\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

Por el Lema 4.9, h es una función bien definida. Observemos que h es continua en $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))-W$ y en W. Así, para concluir que h es continua, basta con demostrar que h es continua en cada punto de $\mathrm{bd}_X(W)$. Sea $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de W tal que $\lim x_m=x$, para algún $x\notin W$. Mostremos que $\lim h(x_m)=\{x\}$. Como para cada $m\in\mathbb{N}$, $x_m\in W$, existe $J_m\in\mathfrak{A}_E(X)$ tal que $x_m\in\mathrm{int}_X(J_m)$. Si $\{J_m\colon m\in\mathbb{N}\}$ es un conjunto finito, entonces existe $N\in\mathbb{N}$ y una subsucesion $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_{n_k}\in J_N$, para cada $k\in\mathbb{N}$. Como X es un espacio métrico compacto, podemos suponer que $\lim x_{n_k}=x$. Más aún, como J_N es cerrado, $x\in J_N$. Así, $x\in J_N-W$. Esto implica que, $x\in\{q_{J_N}\}$, para algún $q_{J_N}\in\mathrm{bd}_X(J_N)$, es decir, $x=q_{J_N}$. Por la continuidad de h, $\lim h(x_{n_k})=h(q_{J_N})=\{x\}$, es decir, $\lim h(x_{n_k})=\{x\}$. Entonces, por la Proposición 2.11, $\lim h(x_n)=\{x\}$. Por lo tanto, h es continua. Así, podemos asumir que $J_m\neq J_k$, si $m\neq k$. Como X no es un arco y X es compacto, para cada $m\in\mathbb{N}$, existe $q_{J_m}\in\mathrm{bd}_X(J_m)$ tal que $\lim q_{J_m}=q$, para algún $q\in X$. Por el Lema 3.69, $\lim J_m=\{q\}$, y por la Proposición 2.35, $\lim x_m=q$, así, $x=q$. Por lo tanto, $\lim h(x_m)=\{x\}$. De cualquier modo, h es continua.

Ahora veamos que h es una función biyectiva. Por construcción, h es inyectiva. Por otra parte, para probar que h es sobreyectiva, observemos cómo se comporta geométricamente la función h en W cuando $s\in[0,1]$. Si $s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, los elementos $h(p)=\{h_J(2s)\}$, son puntos en el hiperespacio $C(J)$ (que a su vez son singulares en el subespacio J de X) que van desde $\{q_J\}$ a $\{p_J\}$, tomando todos los puntos del arco J. Por otra parte, si $s\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, los elementos $h(p)=h_J([2-2s,1])$ son de dos formas: un singular $\{p_J\}$ cuando $s=\frac{1}{2}$ y arcos de J con el punto en común p_J cuando $s\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ en el subespacio J de X, que a su vez en el hiperespacio $C(J)$ se pegan en el punto $\{p_J\}$, pero que no se superponen con los puntos $h(p)=\{h_J(2s)\}$, cuando $s\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$.

Con ayuda de lo descrito en el parráfo anterior, veamos que $\mathfrak{P}^{\partial}(X)\subset h(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)))$. Sea $A\in\mathfrak{P}^{\partial}(X)$, entonces por el Lema 4.9, existe $J\in\mathfrak{A}_S(X)$ tal que uno de los siguientes dos casos se cumplen:

Caso 1. $A=\{p\}$, para algún $p\in\mathrm{int}_X(J)$.

Si $p\notin W$, entonces $p\in\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))-W$. Luego, por la construcción de h, se sigue que $h(p)=\{p\}=A$. En otro caso, si $p\in W$, $J\in\mathfrak{A}_E(X)$, luego existe $s\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ tal que $h(p)=\{h_J(2s)\}=\{p\}=A$.

Caso 2. $J\in\mathfrak{A}_E(X)$ y existe un extremo p de X tal que $p\in A\subset\mathrm{int}_X(J)$. Notemos que $h_J(1)=p\in A\cap\mathrm{int}_X(J)$.

Podemos suponer que A no es un singular. Entonces, existe $s \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tal que $h(p) = h_J([2-2s, 1]) = A$.

De esta forma, $\mathfrak{P}^{\partial}(X) \subset h(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)))$. Sea $A \in \mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)$, entonces existe una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ de $\mathfrak{P}^{\partial}(X)$ tal que $\lim A_m = A$. Como para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $p_m \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ tal que $h(p_m) = A_m$, entonces existe una sucesión $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ de $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$. Como X es compacto y $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ es un conjunto cerrado de X, $\lim p_m = p$, para algún $p \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$. Así, por la continuidad de h, $h(p) = \lim h(p_m) = \lim A_m = A$, es decir, $h(p) = A$, para algún $p \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$. Esto muestra que $\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) \subset h(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)))$. Por lo tanto, h es sobreyectiva.

Finalmente, sea $p \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ tal que $h(p) \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$. Si $h(p) = \{p\}$, claramente $p \in \mathcal{P}(X)$. En otro caso, si $h(p) \neq \{p\}$, entonces $p \in W$, por lo que $p \in J - \{q_J\} = \mathrm{int}_X(J)$, para algún $J \in \mathfrak{A}_E(X)$. Como $h(p) \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$, $h(p) \not\subset \mathrm{int}_X(J)$, ya que si $h(p) \subset \mathrm{int}_X(J)$, como J es una gráfica finita, entonces $h(p) \subset \mathcal{G}(X)$, de donde $h(p) \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$, lo que es una contradicción. Así, $h(p) \not\subset \mathrm{int}_X(J)$, por lo que $h(p) = J = h_J([0,1])$ y $p = h_J(1) = p_J$, por la construcción de la función h. Es decir, p es un punto extremo de J, con $J \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ y $p \in \mathrm{int}_X(J)$. Esto termina la prueba del teorema.

□

Teorema 4.13. *Si X y Y son continuos localmente conexos casi enrejados, $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ y $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.*

Demostración. Cuando X es un arco, por [18, Teorema 3.8 (b)] el resultado es inmediato. Análogamente, si Y es un arco el resultado se cumple. Así, supongamos que X y Y no son arcos. Sea $h\colon C_n(X) \to C_n(Y)$ un homeomorfismo. Por la Proposición 4.11, $h\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) = \mathfrak{P}^{\partial}(Y)$. Como h conserva cerraduras por ser un homeomorfismo, $h\left(\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)\right) = \mathrm{cl}_{C(Y)}\left(h\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)\right) = \mathrm{cl}_{C(Y)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(Y)\right)$. Entonces, $h\restriction_{\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)}\colon \mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) \to \mathrm{cl}_{C(Y)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(Y)\right)$ también es un homeomorfismo. Como X y Y no son arcos, por el Teorema 4.12, $\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{FA}(X))$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)$ y $\mathrm{cl}_{C(Y)}(\mathcal{FA}(Y))$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_{C(Y)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(Y)\right)$, así, $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ es homemorfo a $\mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y))$. Como X y Y son continuos casi enrejados, por el Lema 3.17, $X = \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ y $Y = \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y))$. Por lo tanto, X es homeomorfo a Y. □

Teorema 4.14. *Si X y Y son continuos localmente conexos casi enrejados que no son arcos y $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.*

Demostración. Sea $h\colon C(X) \to C(Y)$ un homeomorfismo. Por el Teorema 4.11, $h\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) = \mathfrak{P}^{\partial}(Y)$. Como h conserva cerraduras por ser un homeomorfismo, entonces $h\left(\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)\right) = \mathrm{cl}_{C(Y)}\left(h\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)\right) = \mathrm{cl}_{C(Y)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(Y)\right)$. Esto implica que $h\restriction_{\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)}\colon \mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right) \to \mathrm{cl}_{C(Y)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(Y)\right)$ es un homeomorfismo. Como X no es un arco, por el Teorema 4.12, $\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{FA}(X))$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(X)\right)$. Análogamente, $\mathrm{cl}_{C(Y)}(\mathcal{FA}(Y))$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_{C(Y)}\left(\mathfrak{P}^{\partial}(Y)\right)$. Así, $\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ es homemorfo a $\mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y))$. Como X y Y son continuos casi enrejados, por el Lema 3.17, $X = \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$ y $Y = \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y))$. Por lo tanto, X es homeomorfo a Y. □

Con el proposito de extender las conclusiones del Teorema 4.13 y el Teorema 4.14, para el caso $n = 2$, introducimos la siguiente notación.

Dados un continuo X que no es un arco ni una curva cerrada simple, y $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, sea

$$\mathcal{D}(J,K) = \mathrm{cl}_{C_2(X)}\left(\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right) \\ \cap \mathrm{cl}_{C_2(X)}\left(\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right).$$

Además, cuando J es un arco y $E(J) = \{p_J, q_J\}$, supondremos que $q_J \in \mathrm{bd}_X(J)$. En cambio, si J es una curva cerrada simple, q_J será el único punto de J tal que $J - \{q_J\}$ es un subconjunto abierto de X. Observemos que $q_J \notin \mathrm{int}_X(J)$, ya que X no es una curva cerrada simple. También, dependiendo si J es un arco o una curva cerrada simple, denotamos a $\mathcal{E}(J)$ de la siguiente manera. Si J es un arco, $\mathcal{E}(J) = C(J)$. Si J es una curva cerrada simple, $\mathcal{E}(J) = \{A \in C(J) \colon A = J$ o $A = \{p\}$ para algún $p \in J$ o A un subarco de J tal que $q_J \notin A$ o A es un subarco de J tal que q_J es uno de sus puntos extremos$\}$. Notemos que en ambos casos, $\mathcal{E}(J) = \mathrm{cl}_{C(X)}(C(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle)$.

Sea W_0 el continuo obtenido al tomar $W_0 = D - \mathrm{int}_{\mathbb{R}^2}(E)$, donde D y E son discos cerrados en el plano $\mathbb{R}^2$, E es un subconjunto propio de D, y E y D son tangentes, véase la Figura 4.2.

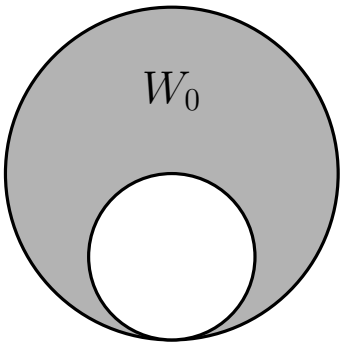

Figura 4.2: Continuo W_0.

Lema 4.15. *Si X es un continuo que no es un arco ni una curva cerrada cerrada simple y $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces:*

(a) *si J es un arco, $\mathcal{E}(J)$ es una 2-celda;*

(b) *si J es una curva cerrada simple, $\mathcal{E}(J)$ es homeomorfo a W_0, donde el punto de tangencia correspondiente es $\{q_J\}$.*

Demostración. (a) Si J es un arco, por la Proposición 2.17, $\mathcal{E}(J)$ es una 2-celda.

(b) Si J es una curva cerrada simple, de la construcción en la Proposición 2.18, vemos que $\mathcal{E}(J)$ es homeomorfo al continuo W_0. Así, concluye la prueba de este lema. □

Teorema 4.16. *Sea X un continuo localmente conexo que no es una curva cerrada simple. Entonces, $\{\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \colon J, K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ es la clase de componentes de $\mathfrak{P}_2(X)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathfrak{P}_2(X)$, entonces existe una vecindad $\mathcal{M}$ de A en $C_2(X)$ que es una 4-celda. Por el Teorema 1.3 (c), $\dim(A, \mathcal{M}) = \dim(A, C_2(X))$. Más aún, por el Teorema 1.4 y [30, Teorema 9.5], $\dim(\mathcal{M}) = \dim(I^4) = 4$, en particular, $\dim(A, \mathcal{M}) = 4$. Luego, $\dim(A, C_2(X)) = 4$. Por el Teorema 3.75, existen $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, con $A \in \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$, así, $A \in \bigcup\{\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \colon J, K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Es decir, $\mathfrak{P}_2(X) \subset \bigcup\{\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \colon J, K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$.

Recíprocamente, sea $A \in \bigcup\{\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \colon J, K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$, entonces, existen $L, M \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que $A \in \langle \mathrm{int}_X(L), \mathrm{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)}$.

Caso 1. $L = M$ y L es un arco libre maximal de X.

Tenemos que $\langle \mathrm{int}_X(L), \mathrm{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)} = \langle \mathrm{int}_X(L)\rangle_{C_2(X)} \subset C_2(L)$. Como $\langle \mathrm{int}_X(L), \mathrm{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)}$ es un subconjunto abierto de $C_2(X)$ y por [17, Lema 2.2], $C_2(L)$ es una 4-celda, se sigue que $C_2(L)$ es una vecindad de A en $C_2(X)$ que es una 4-celda. Así, $A \in \mathfrak{P}_2(X)$.

Caso 2. $L = M$ y L es una circunferencia libre de X.

Como X no es una curva cerrada simple, si $p \in L$ es tal que $L - \{p\}$ es un abierto de X, entonces $\mathrm{int}_X(L) = L - \{p\}$. Luego, $\langle \mathrm{int}_X(L), \mathrm{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)} = \langle \mathrm{int}_X(L)\rangle_{C_2(X)} = \{A \in C_2(X) \colon A \subset L - \{p\}\}$. Dado $A \in \langle \mathrm{int}_X(L)\rangle_{C_2(X)}$, existe un arco $J \subset L - \{p\}$ tal que $A \subset \mathrm{int}_X(J)$. Así, $A \in \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_{C_2(X)} \subset C_2(J)$, esto es, $C_2(J)$ es una vecindad de A en $C_2(X)$ que es una 4-celda. Por lo tanto, $A \in \mathfrak{P}_2(X)$.

Caso 3. $L \neq M$.

Por el Lema 3.65, $\mathrm{int}_X(L) \cap \mathrm{int}_X(M) = \emptyset$. Sea $A \in \langle \mathrm{int}_X(L), \mathrm{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)}$, entonces $A \subset \mathrm{int}_X(L) \cup \mathrm{int}_X(M)$, $A \cap \mathrm{int}_X(L) \neq \emptyset$ y $A \cap \mathrm{int}_X(M) \neq \emptyset$. Así, las componentes de A son $A_1 = A \cap \mathrm{int}_X(L)$ y $A_2 = A \cap \mathrm{int}_X(M)$. Como $A_1 \subset X \cap \mathrm{int}_X(L)$, por el Teorema 1.32, existe un arco L_1 de X tal que $A_1 \subset \mathrm{int}_X(L_1) \subset L_1 \subset \mathrm{int}_X(L)$. Luego, $A_1 \subset L \cap \mathrm{int}_X(L_1) \subset \mathrm{int}_L(L_1) \subset L_1 \subset \mathrm{int}_X(L)$, es decir, $A_1 \subset \mathrm{int}_L(L_1) \subset L_1 \subset \mathrm{int}_X(L)$. Similarmente, se puede demostrar que $A_2 \subset \mathrm{int}_M(M_1) \subset M_1 \subset \mathrm{int}_X(M)$, para algún arco M_1 de X. Entonces $\mathrm{int}_L(L_1)$ y $\mathrm{int}_M(M_1)$ son abiertos de X. Además, $L_1 \cap M_1 \subset \mathrm{int}_X(L) \cap \mathrm{int}_X(M) = \emptyset$, es decir, L_1 y M_1 son ajenos. Por el Teorema 2.15, la función $\varphi \colon C(L_1) \times C(M_1) \to \langle L_1, M_1\rangle_{C_2(X)}$ que está dada por $\varphi(H, G) = H \cup G$ es un homeomorfismo y $A \in \langle \mathrm{int}_L(L_1), \mathrm{int}_M(M_1)\rangle_{C_2(X)} \subset \langle L_1, M_1\rangle_{C_2(X)} = \varphi(C(L_1) \times C(M_1))$. Como $C(L_1)$ y $C(M_1)$ son 2-celdas, por la Proposición 1.34, $C(L_1) \times C(M_1)$ es una 4-celda, así, como $\langle \mathrm{int}_L(L_1), \mathrm{int}_M(M_1)\rangle_{C_2(X)}$ es un subconjunto abierto de $C_2(X)$, entonces $\langle L_1, M_1\rangle_{C_2(X)}$ es una vecindad de A en $C_2(X)$ que es una 4-celda. Por lo tanto, $A \in \mathfrak{P}_2(X)$.

De lo anterior, $\mathfrak{P}_2(X) = \bigcup\{\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle \colon J, K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Como por [19, Lema 2.1], para cada $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, $\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$ es una componente de $\mathfrak{P}_2(X)$, se sigue que las componentes de $\mathfrak{P}_2(X)$ son todos los conjuntos de esta forma. □

Lema 4.17. *Si X es un continuo localmente conexo tal que $R(X) \neq \emptyset$, entonces $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) = \{A \in \mathfrak{P}_2(X) \colon A$ es conexo o A tiene una componente de un solo punto, o A contiene un extremo de $X\}$.*

Demostración. Por el Teorema 4.16, $\{\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \colon J, K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ es la familia de componentes de $\mathfrak{P}_2(X)$.

Dado $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, por la Observación 3.64, si $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, $\mathrm{int}_X(J)$ es homeomorfo a $(0,1)$, en otro caso, si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, $\mathrm{int}_X(J)$ es homeomorfo a $[0,1)$. De la construcción en la Proposición 2.17, $C(\mathrm{int}_X(J))$ es homeomorfo a $(0,1)\times(0,1)$, cuando $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, y $C(\mathrm{int}_X(J))$ es homeomorfo a $[0,1)\times[0,1)$, cuando $J \in \mathfrak{A}_E(X)$. Sea $\mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J)) = \{A \in C(\mathrm{int}_X(J)) : A$ tiene una vecindad $\mathcal{M}$ en $C(\mathrm{int}_X(J))$ que es una 2-celda y $A \in \partial\mathcal{M}\}$. Observemos que $\mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J)) = \mathfrak{P}^\partial(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle$.

Afirmación 1. si $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, $\mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J)) = \{\{p\} : p \in \mathrm{int}_X(J)\}$.

Sea $A \in \mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J))$, entonces $A \in \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle$ y $A \in \mathfrak{P}^\partial(X)$. Por el Lema 4.9, existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que uno de los siguientes dos casos se cumplen: (1) $A = \{p\}$, para algún $p \in \mathrm{int}_X(K)$. Entonces, $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K) \neq \emptyset$. Por el Lema 3.65, $J = K$. Así, $A = \{p\}$, para algún $p \in \mathrm{int}_X(J)$. (2) $K \in \mathfrak{A}_E(X)$ y existe un extremo p de X tal que $p \in A \subset \mathrm{int}_X(K)$. Entonces, $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K) \neq \emptyset$. Por el Lema 3.65, $J = K$. Esto implica que, $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J)) \subset \{\{p\} : p \in \mathrm{int}_X(J)\}$. La otra contención es inmediata por el Lema 4.9.

Afirmación 2. si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y p_J es el punto extremo de X contenido en J, entonces $\mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J)) = \{\{p\} : p \in \mathrm{int}_X(J)\} \cup \{A \in C(\mathrm{int}_X(J)) : p_J \in A\}$.

Sea $A \in \mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J))$, entonces $A \in \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle$ y $A \in \mathfrak{P}^\partial(X)$. Razonando análogamente como en la Afirmación 1, tenemos que $A \in \{\{p\} : p \in \mathrm{int}_X(J)\} \cup \{A \in C(\mathrm{int}_X(J)) : p_J \in A\}$.

Recíprocamente, sea $A \in \{\{p\} : p \in \mathrm{int}_X(J)\} \cup \{A \in C(\mathrm{int}_X(J) : p_J \in A)\}$. Por el Lema 4.9, $A \in \mathfrak{P}^\partial(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle = \mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J))$. Así, $\{\{p\} : p \in \mathrm{int}_X(J)\} \cup \{A \in C(\mathrm{int}_X(J)) : p_J \in A\} \subset \mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J))$.

Ahora bien, cuando $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$ y J es un arco, $\mathrm{int}_X(J) = J - \{p_J, q_J\}$, con p_J y q_J los puntos extremos de J, entonces por la Afirmación 1, $\mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J)) = F_1(\mathrm{int}_X(J))$. Como $C(\mathrm{int}_X(J))$ es un subconjunto abierto de $C(J)$ y $C(J)$ es una 2-variedad, por la Proposición 1.32, $C(\mathrm{int}_X(J))$ es una 2-variedad, y por la Proposición 1.33, $\partial C(\mathrm{int}_X(J)) = \partial C(J) \cap C(\mathrm{int}_X(J))$. De la construcción en la Proposición 2.17, $\mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J)) = \partial C(\mathrm{int}_X(J))$.

Similarmente, si $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$ y J es una circunferencia libre de X, de la construcción en la Proposición 2.18, se sigue que $\mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J)) = \partial C(\mathrm{int}_X(J))$.

Cuando $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, con p_J el punto extremo de X contenido en J, por la Afirmación 2, $\mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J)) = F_1(\mathrm{int}_X(J)) \cup C(p_J, \mathrm{int}_X(J))$. Como $C(\mathrm{int}_X(J))$ es un subconjunto abierto de $C(J)$ y $C(J)$ es una 2-variedad, por la Proposición 1.32, $C(\mathrm{int}_X(J))$ es una 2-variedad. Por la Proposición 1.33, $\partial C(\mathrm{int}_X(J)) = \partial C(J) \cap C(\mathrm{int}_X(J))$. De la construcción en la Proposición 2.17, $\mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J)) = \partial C(\mathrm{int}_X(J))$.

De cualquier modo, $\mathfrak{P}^\partial(\mathrm{int}_X(J)) = \partial C(\mathrm{int}_X(J))$, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Por un procedimiento similar al de la Observación 4.8, se sigue que $\partial\mathfrak{P}_2(X) = \mathfrak{P}_2^\partial(X)$.

Por otra parte, dados $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, tenemos lo siguiente:

Caso 1. $J \neq K$.

Por el Lema 3.65, $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K) = \emptyset$. Así, $\mathrm{int}_X(J)$ y $\mathrm{int}_X(K)$ son conjuntos separados. Sea $\varphi\colon C(\mathrm{int}_X(J)) \times C(\mathrm{int}_X(K)) \to \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$ que está dada por $\varphi((B,C)) = B \cup C$, entonces φ es un homeomorfismo. Como $C(\mathrm{int}_X(J)) \times C(\mathrm{int}_X(K))$ es un subconjunto abierto de $C(J) \times C(K)$

que es una 4-variedad, por la Proposición 1.33, $C(\mathrm{int}_X(J)) \times C(\mathrm{int}_X(K))$ es una 4-variedad. Así, por la Proposición 1.26, $\partial\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} = \varphi(\partial(C(\mathrm{int}_X(J)) \times C(\mathrm{int}_X(K))))$. De la Proposición 1.33 y la Proposición 1.34, $\partial\mathfrak{P}_2(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} = \varphi((\partial C(\mathrm{int}_X(J)) \times C(\mathrm{int}_X(K))) \cup (C(\mathrm{int}_X(J)) \times \partial C(\mathrm{int}_X(K))))$. Además, de dos párrafos anteriores, obtenemos que $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} = \varphi((\mathfrak{P}^{\partial}(\mathrm{int}_X(J)) \times C(\mathrm{int}_X(K)))) \cup (C(\mathrm{int}_X(J)) \times \mathfrak{P}^{\partial}(\mathrm{int}_X(K))))$. Así, $\varphi((\mathfrak{P}^{\partial}(\mathrm{int}_X(J)) \times C(\mathrm{int}_X(K))) \cup (C(\mathrm{int}_X(J)) \times \mathfrak{P}^{\partial}(\mathrm{int}_X(K)))) = \{A \in \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \colon A \cap \mathrm{int}_X(J) \in \mathfrak{P}^{\partial}(\mathrm{int}_X(J))$ o $A \cap \mathrm{int}_X(K) \in \mathfrak{P}^{\partial}(\mathrm{int}_X(K))\} = \{A \in \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$: A tiene una componente degenerada o A contiene un extremo de $X\}$. Por lo tanto, $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} = \{A \in \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$: A tiene una componente de un solo punto o A contiene un extremo de $X\}$.

Caso 2. $J = K$.

Entonces, $\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} = \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_{C_2(X)}$. Por [17, Lema 2.2], $C_2([0,1])$ es una 4-celda cuya frontera como variedad es $\partial(C_2([0,1])) = \{A \in C_2([0,1]) : A$ es conexo o A tiene una componente degenerada o $A \cap \{0,1\}\}$. Si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, $\mathrm{int}_X(J)$ es homeomorfo a $[0,1)$. Como J es un arco, dado $h\colon [0,1] \to J$ un homeomorfismo, la función $h^*\colon C_2([0,1]) \to C_2(J)$ que está dada por $h^*(A) = h(A)$, para cada $A \in C_2([0,1])$ es un homeomorfismo, entonces $C_2(J)$ es una 4-celda. Por la Proposición 1.26, $\partial C_2(J) = h^*(\partial C_2([0,1])) = \{A \in C_2(J)\colon A$ es conexo o A tiene una componente degenerada o $A \cap E(J) \neq \emptyset\}$. De aquí, $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_{C_2(X)} = \partial C_2(J) \cap C_2(\mathrm{int}_X(J)) = \{A \in \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_{C_2(X)}\colon A$ es conexo o A tiene una componente de un solo punto o A tiene un extremo de $X\}$. Si $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, $\mathrm{int}_X(J)$ es homeomorfo a $(0,1)$, luego, $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_{C_2(X)} = \{A \in \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_{C_2(X)}\colon A$ es conexo o A tiene una componente de un solo punto$\}$.

Por lo tanto, para cada $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} = \{A \in \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\colon A$ es conexo o A tiene una componente de un solo punto o A tiene un extremo de $X\}$. Esto completa la prueba del lema. □

Lema 4.18. *Sea X un continuo localmente conexo tal que $R(X) \neq \emptyset$. Si $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ son tales que $\mathrm{bd}_X(J) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J)$ y $\mathrm{bd}_X(K) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - K)$, entonces $\mathcal{D}(J,K) = \{\{p\} \cup A\colon p \in \mathrm{bd}_X(J)$ y $A \in \mathcal{E}(K)$, o $p \in \mathrm{bd}_X(K)$ y $A \in \mathcal{E}(J)\}$.*

Demostración. Demostremos la igualdad por doble contención.

($\subset$) Sea $B \in \mathcal{D}(J,K)$. Obsevemos que $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J) . \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \subset \langle J, K\rangle_{C_2(X)}$ y $\langle J, K\rangle_{C_2(X)}$ es un cerrado de $C_2(X)$, entonces $B \in \langle J, K\rangle_{C_2(X)}$. Como $B \in C_2(X)$ tenemos los siguientes casos:

Caso 1. B es disconexo.

Sean B_1 y B_2 las componentes de B. Como $B \in \mathrm{cl}_{C_2(X)}(\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle)$, existe una sucesión $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ de $\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$ tal que $\lim E_n = B$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que E_m es disconexo y sean ${E_m}^{(1)}$ y ${E_m}^{(2)}$ las componentes de E_m, para cada $m \in \mathbb{N}$. Como $C(X)$ es compacto, por la Proposición 2.32 (a), $\lim E_m = \lim \left({E_m}^{(1)} \cup Em^{(2)}\right) = E^{(1)} \cup E^{(2)} = B$, para algunos $E^{(1)}, E^{(2)} \in C(X)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lim {E_m}^{(1)} = B_1$ y $\lim {E_m}^{(2)} = B_2$. Si $J = K$, tenemos que $E_m \subset J$, para cada

$m \in \mathbb{N}$. Así, por la Proposición 2.32 (b), $B \subset J = K$. Si $J \neq K$, por el Lema 3.65, $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K) = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que ${E_m}^{(1)} \subset \mathrm{int}_X(J)$ y ${E_m}^{(2)} \subset \mathrm{int}_X(K)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 2.32 (b), $B_1 \subset J$ y $B_2 \subset K$. Así, de ambos casos, podemos asumir que $B_1 \subset J$ y $B_2 \subset K$. Como $B \in \mathrm{cl}_{C_2(X)}\left(\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right)$, existe una sucesión $\{F_m\}_{m=1}^{\infty}$ de $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$, con $F_m = {F_m}^{(1)} \cup {F_m}^{(2)}$, para cada $m \in \mathbb{N}$, tales que $\lim {F_m}^{(1)} = B_1$ y $\lim {F_m}^{(2)} = B_2$. Como $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} \subset \mathfrak{P}_2(X) - \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$, por el Lema 4.16, existen $L_m, M_m \in \mathfrak{A}_S(X)$, con $F_m \in \langle \mathrm{int}_X(L_m), \mathrm{int}_X(M_m)\rangle_{C_2(X)}$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Luego, $\{L_m, M_m\} \neq \{J, K\}$. Podemos asumir que $K \neq M_m$, ${F_m}^{(1)} \subset \mathrm{int}_X(L_m)$ y ${F_m}^{(2)} \subset \mathrm{int}_X(M_m)$. Si $L_m \neq M_m$, por el Lema 3.65, $\mathrm{int}_X(L_m) \cap \mathrm{int}_X(M_m) = \emptyset$. Luego, como ${F_m}^{(1)}$ es conexo, se tiene que ${F_m}^{(1)} \cap \mathrm{int}_X(M_m) = \emptyset$. Entonces, ${F_m}^{(1)} \subset \mathrm{int}_X(L_m)$ y ${F_m}^{(2)} \cap \mathrm{int}_X(M_m) \neq \emptyset$. Por la conexidad de ${F_m}^{(2)}$, tenemos que ${F_m}^{2} \subset \mathrm{int}_X(M_m)$. En otro caso, si $L_m = M_m$, ${F_m}^{(1)}, {F_m}^{(2)} \subset \mathrm{int}_X(L_m) \cup \mathrm{int}_X(M_m) = \mathrm{int}_X(L_m) = \mathrm{int}_X(M_m)$. Así, podemos asumir que ${F_m}^{(1)} \subset C(\mathrm{int}_X(L_m))$ y ${F_m}^{(2)} \subset C(\mathrm{int}_X(M_m))$. Notemos que $B_2 = \lim {F_m}^{(2)} \subset M_m$. Como $K \neq M_m$, por el Lema 3.65, $M_m \cap \mathrm{int}_X(K) = \emptyset$. De modo que, $B_2 \subset X - \mathrm{int}_X(K)$. Como $B_1 \subset J$ y $B_2 \subset K$, tenemos que $B_2 \subset X - \mathrm{int}_X(K)$ y $B_2 \subset K$, entonces $B \subset \mathrm{bd}_X(K)$. Por la Observación 3.64, $\mathrm{bd}_X(K)$ tiene a lo más dos elementos y B_2 es conexo, entonces $B_2 = \{p\}$, para algún $p \in \mathrm{bd}_X(K)$. De aquí, tenemos dos casos. Si J es un arco, entonces $B = \{p\} \cup B_1$, donde $p \in \mathrm{bd}_X(K)$ y $B_1 \in \mathcal{E}(J) = C(J)$. Si J es una curva cerrada simple, como para cada $m \in \mathbb{N}$, ${E_m}^{(1)} \subset \mathrm{int}_X(J) = J - \{q_J\} \subset J$ y $B_1 = \lim {E_m}^{(1)}$, tenemos que $B_1 = J$ o $B_1 = \{p\}$, para algún $p \in J$, o B_1 es un subarco de J que tiene a q_J como uno de sus puntos extremos o B_1 es un subarco de J tal que $q_J \notin J$. De cualquier modo, $B_1 \in \mathcal{E}(J)$.

Caso 2. B es conexo, con $J \neq K$.

Demostremos que $B \cap \mathrm{int}_X(J) = \emptyset$ o $B \cap \mathrm{int}_X(K) = \emptyset$. Supongamos lo contrario, es decir, $B \cap \mathrm{int}_X(J) \neq \emptyset$ y $B \cap \mathrm{int}_X(K) \neq \emptyset$. Como $B \in \mathrm{cl}_{C_2(X)}\left(\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right)$, existe una sucesión $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$ tal que $\lim E_m = B$. Como en el caso anterior, para cada $m \in \mathbb{N}$, existen $L_m, M_m \in \mathfrak{A}_S(x)$ tales que $\{L_m, M_m\} \neq \{J, K\}$ y $E_m \in \langle \mathrm{int}_X(L_m), \mathrm{int}_X(M)\rangle_{C_2(X)}$. Como $\mathrm{int}_X(J)$ y $\mathrm{int}_X(K)$ son subconjuntos abiertos de X tales que $(\lim E_m) \cap \mathrm{int}_X(J) \neq \emptyset$ y $(\lim E_m) \cap \mathrm{int}_X(K) \neq \emptyset$, por la Definición 2.29, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m \geq m_0$, $E_m \cap \mathrm{int}_X(J) \neq \emptyset$ y $E_m \cap \mathrm{int}_X(K) \neq \emptyset$. Luego, $L_m \cup M_m$ intersecta a $\mathrm{int}_X(J)$ y a $\mathrm{int}_X(K)$. Si $L_m \cap \mathrm{int}_X(J) \neq \emptyset$, por el Lema 3.65, $L_m = J$. Así, para cada $m \geq m_0$, $L_m = J$ y $M_m = K$. Entonces, $\{L_m, M_m\} = \{J, K\}$, para cada $m \geq m_0$, una contradicción. Por lo tanto, $B \cap \mathrm{int}_X(J) = \emptyset$ o $B \cap \mathrm{int}_X(K) = \emptyset$. Supongamos que $B \cap \mathrm{int}_X(J) = \emptyset$. Puesto que $B \in \langle J, K\rangle_{C_2(X)}$, tenemos que $B \cap J \neq \emptyset$ y $B = (B \cap J) \cup (B \cap K)$. Como $B \cap J \subset B \subset X - \mathrm{int}_X(J)$ y $B \cap J \subset J$, entonces $B \cap J \subset \mathrm{bd}_X(J)$. Por la Observación 3.64, $B \cap J$ posee a lo más dos elementos. Ya que $B \cap J$ y $B \cap K$ son subconjuntos cerrados y no vacíos de B, con B conexo, entonces $B \cap J \subset B \cap K$. De modo que $B = B \cap K$, es decir, $B \subset K$. Sea $p \in B \cap J$. Si K es un arco, $B = B \cup \{p\}$, donde $p \in \mathrm{bd}_X(J)$ y $B \in \mathcal{E}(K) = C(K)$. Si K es una cur-

va cerrada simple, como $B \in \mathrm{cl}_{C_2(X)}\left(\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right)$, existe una sucesión $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ de $\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$ tal que $\lim B_m = B$. Luego, las componentes de B_m son $B_m \cap \mathrm{int}_X(J)$ y $B_m \cap \mathrm{int}_X(K)$, y además, $B = \lim((B_m \cap \mathrm{int}_X(J)) \cup (B_m \cap \mathrm{int}_X(K)))$. Como $C(X)$ es compacto, podemos suponer que $\{B_m \cap \mathrm{int}_X(J)\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{B_m \cap \mathrm{int}_X(K)\}_{m=1}^{\infty}$ convergen en $C(X)$, así, por la Proposión 2.32 (a), $B = \lim(B_m \cap \mathrm{int}_X(J)) \cup \lim(B_m \cap \mathrm{int}_X(K))$. Recordemos que $B \cap J$ tiene a lo más dos elementos. Si $q \in B$ y $q = \lim q_m$, donde $q_m \in B_m \cap \mathrm{int}_X(J)$, para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces $q \in \mathrm{bd}_X(J)$. Como $B_m \cap \mathrm{int}_X(J) \subset B_m$ y $B_m \cap \mathrm{int}_X(J) \subset J$, por la Proposición 2.32 (b), $\lim B_m \cap \mathrm{int}_X(J) \subset B \cap J \subset \mathrm{bd}_X(J)$, es decir, $\lim B_m \cap \mathrm{int}_X(J)$ tiene solo un elemento y está en $\mathrm{bd}_X(J)$. Esto implica que, $B = \lim(B_m \cap \mathrm{int}_X(K))$. Puesto que $B_m \cap \mathrm{int}_X(K)$ es un subconjunto conexo y cerrado de X que está contenido en $\mathrm{int}_X(K) = K - \{q_K\}$, entonces $B_m \cap \mathrm{int}_X(K)$ es un arco de K tal que $q_k \notin B_m \cap \mathrm{int}_X(K)$. Así, $B = \{p\} \cup B$, donde $p \in \mathrm{bd}_X(J)$ y $B \in \mathcal{E}(K)$.

Caso 3. B es conexo, con $J = K$.

Como $B \in \mathrm{cl}_{C_2(X)}\left(\mathfrak{P}_2^{\partial} - \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_{C_2(X)}(X)\right)$, B es límite de una sucesión de $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_{C_2(X)}$ y $B \subset J$. Así, $B \not\subseteq \mathrm{int}_X(J)$. Luego, existe $p \in B \cap \mathrm{bd}_X(J)$. Si J es un arco, $B = \{p\} \cup B$, con $p \in \mathrm{bd}_X(J)$ y $B \in \mathcal{E}(K) = C(K)$. Si J es una curva cerrada simple, existe una sucesión $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ de $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_{C_2(X)}$ tal que $B = \lim E_m$. Por el Lema 4.17, E_m es conexo o contiene una componente de un solo punto. En ambos casos, $E_m = \{p\} \cup F_m$, donde $F_m \in C(\mathrm{int}_X(K))$. Notemos que $\lim F_m = B$. Como F_m es un subconjunto conexo y cerrado de X que está contenido en $\mathrm{int}_X(J) = J - \{q_J\}$, tenemos que F_m es un subarco de J tal que $q_J \notin F_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $B = \{p\} \cup B$, donde $p \in \mathrm{bd}_X(J)$ y $B \in \mathcal{E}(K)$.

Ahora probemos la otra contención.

($\supset$) Sea $B = \{p\} \cup A$, con $p \in \mathrm{bd}_X(J) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA} - J)$ y $A \in \mathcal{E}(K) = \mathrm{cl}_{C(X)}(C(\mathrm{int}_X(J)))$. Entonces, existe $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de $C(\mathrm{int}_X(K))$ tal que $\lim A_m = A$. Dado $m \in \mathbb{N}$, como $p \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J)$, existe $p_m \in B_d(1/m, p) \cap \mathcal{FA}(X) - J$, esto es, $p = \lim p_m$. Notemos que $\{p_m\} \cup A_m \notin \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)_{C_2(X)}$. En efecto, si $J = K$, entones $\mathrm{int}_X(J) \cup \mathrm{int}_X(K) = \mathrm{int}_X(K)$. Como $A_m \subset \mathrm{int}_X(K)$ y $p_m \notin J$, entonces $A_m \cup \{p_m\} \not\subseteq \mathrm{int}_X(K)$. Si $J \neq K$, por la Proposición 3.65, $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K) = \emptyset$. Esto implica que, $A_m \cap \mathrm{int}_X(J) \subset \mathrm{int}_X(K) \cap \mathrm{int}_X(J) = \emptyset$, es decir, $A_m \cap \mathrm{int}_X(J) = \emptyset$. Así, $(A_m \cup \{p_m\}) \cap \mathrm{int}_X(J) = \emptyset$. De cualquier manera, $\{p_m\} \cup A_m \notin \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$. Por el Lema 4.17, $\{p_m\} \cup A_m \in \mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$. Entonces, $\{\{p_m\} \cup A_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de $\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$. Por la Proposición 2.32 (a), $\lim(\{p_m\} \cup A_m) = (\lim\{p_m\}) \cup (\lim A_m) = B$. Así, $B \in \mathrm{cl}_{C_2(X)}\left(\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) - \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right)$. Como $p \in \mathrm{bd}_X(J)$, existe $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de $\mathrm{int}_X(J)$ tal que $\lim x_m = p$. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\{x_m\} \cup A_m \in \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$. Por el Lema 4.17, $\{x_m\} \cup A_m \in \mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$. Luego, $B = \lim(\{x_m\}) \cup \lim(A_m)$. Así, $B \in \mathrm{cl}_{C_2(X)}\left(\mathfrak{P}_2^{\partial}(X) \cap \langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right)$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{D}(J, K)$. Esto completa la demostración de este lema. $\square$

Dados X un continuo tal que $R(X) \neq \emptyset$, $p \in X$ y $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, denotamos como $\mathcal{D}_p^J = \{\{p\} \cup A \colon A \in \mathcal{E}(J)\}$.

Lema 4.19. *Dado X un continuo tal que $R(X) \neq \emptyset$, sean $p \in X$, $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $f \colon \mathcal{E}(J) \to \mathcal{D}_p^J$ que está dada por $f(A) = \{p\} \cup A$, para cada $A \in \mathcal{E}(J)$. Entonces, f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sean $p \in X$, $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $\mathcal{D}_p^J = \{\{p\} \cup A \colon A \in \mathcal{E}(J)\}$. Consideremos $f \colon \mathcal{E}(J) \to \mathcal{D}_p^J$ que está dada por $f(A) = \{p\} \cup A$, para cada $A \in \mathcal{E}(J)$. Observemos que f es sobreyectiva. Sean $A, B \in \mathcal{E}(J)$ tales que $f(A) = f(B)$, es decir, $\{p\} \cup A = \{p\} \cup B$. Si $p \in A$, entonces A es conexo. Esto implica que $p \in B$ y por ende, B es conexo. Así, $A = B$. Si $p \notin A$, entonces $\{p\} \cup A$ es disconexo y $\{p\}$ y A son las componentes de $\{p\} \cup A$. Como $\{p\} \cup A$ es disconexo, entonces $p \notin B$. Luego, $\{p\} \cup B$ es disconexo y $\{p\}$ y B son las componentes de $\{p\} \cup B$. Asi, $A = B$. De cualquier modo, f es inyectiva. Por el Lema 2.9 y el Lema 4.15, f es una función continua y $\mathcal{E}(J)$ es un conjunto compacto, respectivamente. Por lo tanto, f es una biyectiva, continua, con dominio compacto y codominio de Hausdorff, así, f es un homeomorfismo. $\square$

Lema 4.20. *Si X es un continuo localmente conexo tal que $R(X) \neq \emptyset$ y $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

(1) *si $p, q \in \mathrm{bd}_X(J) \cup (X - J)$, con $p \neq q$,*

$$\mathcal{D}_p^J \cap \mathcal{D}_q^J = \begin{cases} \{\{p,q\}, J\}, & \text{si } p, q \in J, \\ \emptyset, & \text{si } p \notin J \text{ o } q \notin J; \end{cases}$$

(2) *si $\mathrm{bd}_X(J) = \{p, u\}$ y $\mathrm{bd}_X(K) = \{q, v\}$,*

$$\mathcal{D}_p^K \cap \mathcal{D}_q^J = \begin{cases} \{\{p,q\}, \{p,v\}\}, & \text{si } v \neq q,\ u \neq p,\ u = v \text{ y } p = q, \\ \{\{p,q\}\}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. (1) Sean $J \in \mathfrak{A}_S(X)$y $p, q \in \mathrm{bd}_X(J) \cup (X - J)$, con $p \neq q$. Veamos quién es $\mathcal{D}_p^J \cap \mathcal{D}_q^J$. Sea $D \in \mathcal{D}_p^J \cap \mathcal{D}_q^J$, entonces $D = \{p\} \cup A = \{q\} \cup B$, con $A, B \in \mathcal{E}(J)$. Tenemos dos casos.

Caso 1. $p, q \in J$.

Entonces, $p, q \in \mathrm{bd}_X(J)$. Como $p \neq q$ y $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, tenemos que $p, q \in \mathrm{bd}_X(J) = E(J)$ y J es un arco. Si $p \in A$, entonces $D = A$ y $q \in A$. Esto implica que A es un subcontinuo de un arco J tal que $E(J) \subset A$. Luego, $D = A = J$. Si $p \notin A$, entonces D es disconexo y $\{p\}$ y A son las componentes de D. Luego, $q \notin B$, $\{q\} \cup B$ es disconexo y $\{q\}$ y B son las componentes de D. Como $\{p\} \neq \{q\}$, entonces $A = \{q\}$ y $B = \{p\}$. Así, $D = \{p, q\}$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_p^J \cap \mathcal{D}_q^J = \{\{p,q\}, J\}$.

Caso 2. $p \notin J$ o $q \notin J$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p \notin J$. Sea $D \in \mathcal{D}_p^J \cap \mathcal{D}_q^J$, entonces $D = \{p\} \cup A = \{q\} \cup B$. Como $A \subset J$ y $p \notin J$, entonces D es disconexo y $\{p\}$ y A son sus componentes. Como D es disconexo, entonces $q \notin B$ y $\{q\}$ y B son las componentes de D. Como $\{p\} \neq \{q\}$, entonces $A = \{q\}$ y $B = \{p\}$. Así, $D = \{p, q\}$. Esto implica que $D \in \mathcal{D}_q^J$. De aquí, $p \in J$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{D}_p^J \cap \mathcal{D}_q^J = \emptyset$.

De los casos 1 y 2, obtenemos lo deseado.

(2) Ahora, consideremos $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, con $J \neq K$ y $p \in \mathrm{bd}_X(J)$ y $q \in \mathrm{bd}_X(K)$. Veamos quién es $\mathcal{D}_p^K \cap \mathcal{D}_q^J$. Sea $D \in \mathcal{D}_p^K \cap \mathcal{D}_q^J$, entonces $D = \{p\} \cup A = \{q\} \cup B$, con $A \in \mathcal{E}(K)$ y $B \in \mathcal{E}(J)$. Como $J \neq K$, entonces $\mathrm{int}_X(J) \cap K = \emptyset$, así, $K \subset X - \mathrm{int}_X(J)$. Esto implica que $K \cap J \subset \mathrm{bd}_X(J)$. Como $B \subset \{p\} \cup A$, $\{p\} \subset \mathrm{bd}_X(J)$, $B \subset J$ y $A \subset K$, entonces $B \subset (\{p\} \cup A) \cap J = \{p\} \cup (A \cap J) \subset \{p\} \cup (K \cap J) \subset \mathrm{bd}_X(J)$. De aquí, como B es conexo y $\mathrm{bd}_X(J)$ es finita, se sigue que $B = \{b\}$, para algún $b \in \mathrm{bd}_X(J)$. De manera análoga, se puede ver que $A = \{a\}$, para algún $a \in \mathrm{bd}_X(K)$. Así, $D = \{p\} \cup \{a\} = \{q\} \cup \{b\}$, con $a \in \mathrm{bd}_X(K)$ y $b \in \mathrm{bd}_X(J)$. Por el Lema 4.15, $F_1(J) \subset \mathcal{E}(J)$ y $F_1(K) \subset \mathcal{E}(K)$. Luego, $\{q, d\} \in \mathcal{D}_q^J$, para cada $d \in J$, y $\{p, e\} \in \mathcal{D}_p^K$, para cada $e \in K$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_p^K \cap \mathcal{D}_q^J = \{\{p, a\} \colon a \in \mathrm{bd}_X(K)\} \cap \{\{q, b\} \colon b \in \mathrm{bd}_X(J)\}$. Así, si $\mathrm{bd}_X(J) = \{p, u\}$ y $\mathrm{bd}_X(K) = \{q, v\}$, entonces $\mathcal{D}_p^K \cap \mathcal{D}_q^J = \{\{p, q\}, \{p, v\}\} \cap \{\{q, p\}, \{q, u\}\} = \{\{p, q\}\} \cup (\{\{p, v\}\} \cap \{\{q, u\}\})$. De aquí, si $\mathcal{D}_p^K \cap \mathcal{D}_q^J \neq \{\{p, q\}\}$, entonces $\{\{p, v\}\} \cap \{\{q, u\}\} \not\subset \{\{p, q\}\}$, por lo que $\{\{p, v\}\} \cap \{\{q, u\}\} \neq \emptyset$. Luego, existe $w \in \{\{p, v\}\} \cap \{\{q, u\}\}$ tal que $w = \{p, v\} = \{q, u\} \neq \{p, q\}$. Así, $\mathcal{D}_p^K \cap \mathcal{D}_q^J \neq \{\{p, q\}\}$ si y solo si $\{p, v\} = \{q, u\} \neq \{p, q\}$ si y solo si $v \neq q$, $u \neq p$, $u = v$ y $p = q$. Por lo tanto, el enunciado (2) se cumple. □

Teorema 4.21. *Dados X y Y continuos localmente conexos tales que $R(X) \neq \emptyset$ y $R(Y) \neq \emptyset$, sean $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $L, M \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tales que $\mathrm{bd}_X(J) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J)$, $\mathrm{bd}_X(K) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - K)$, $\mathrm{bd}_Y(L) \subset \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y) - L)$ y $\mathrm{bd}_Y(M) \subset \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y) - M)$. Si $h \colon C_2(X) \to C_2(Y)$ es un homeomorfismo y además, $h\left(\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right) = \langle \mathrm{int}_Y(L), \mathrm{int}_Y(M)\rangle_{C_2(Y)}$, entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

(1) *si $J = K$ y J es una curva cerrada simple, entonces $L = M$ y L es una curva cerrada simple;*

(2) *si $J = K$, J es un arco y $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $L = M$, L es un arco y $L \notin \mathfrak{A}_E(Y)$;*

(3) *si $J = K$ y $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $L = M$ y $L \in \mathfrak{A}_E(Y)$;*

(4) *si $J \neq K$, entonces $L \neq M$;*

(5) *si X y Y son casi enrejados, $J = K$ y $p \in J - \mathrm{int}_X(J)$, entonces $h(\{p\})$ es un conjunto de un solo punto y $h(\{p\}) \subset L - \mathrm{int}_Y(L)$.*

Demostración. Por el Lema 4.19, $\mathcal{E}(J)$ es homeomorfo a $\mathcal{D}_p^J = \{\{p\} \cup A \colon A \in \mathcal{E}(J)\}$, para cada $p \in X$.

A continuación describiremos modelos para la clase de conjuntos $\mathcal{D}(J, K)$, donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Primero notemos que por la Observación 3.64, podemos suponer que $\mathrm{bd}_X(J) = \{p_J, q_J\}$ y $\mathrm{bd}_X(K) = \{p_K, q_K\}$. Así, por Lema 4.18, $\mathcal{D}(J, K) = \mathcal{D}_{p_J}^K \cup \mathcal{D}_{q_J}^K \cup \mathcal{D}_{p_K}^J \cup \mathcal{D}_{q_K}^J$. Tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1. $J = K$.

(a) Si J es un arco y $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $\mathrm{bd}_X(J) = \{p_J, q_J\}$, con $p_J \neq q_J$. Luego, $\mathcal{D}(J, K) = \mathcal{D}(J, J) = \mathcal{D}_{p_J}^J \cup \mathcal{D}_{q_J}^J$. Observemos que por el Lema 4.15, $\mathcal{D}_{p_J}^J$ y $\mathcal{D}_{p_J}^J$ son 2-celdas. Más aún, por el Lema 4.20 (1), $\mathcal{D}_{p_J}^J \cap \mathcal{D}_{q_J}^J = \{\{p_J, q_J\}, J\}$.

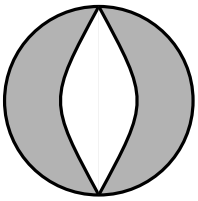

Figura 4.3: **Caso (a).**

(b) Si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, $\mathrm{bd}_X(J) = \{q_J\}$. Entonces, por el Lema 4.18, $\mathcal{D}(J, J) = \mathcal{D}^J_{q_J}$. Más aún, por el Lema 4.15, $\mathcal{D}^J_{q_J}$ es un una 2-celda.

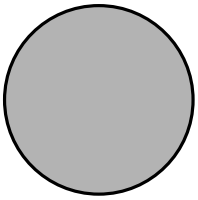

Figura 4.4: **Caso (b).**

(c) Si J es una curva cerrada simple, $\mathrm{bd}_X(J) = \{q_J\}$. Entonces, por el Lema 4.18, $\mathcal{D}(J, J) = \mathcal{D}^J_{q_J}$. Luego, por el Lema 4.15, $\mathcal{D}^J_{q_J}$ es homeomorfo al continuo W_0.

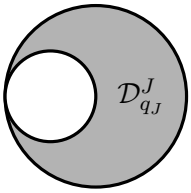

Figura 4.5: **Caso (c)**.

Caso 2. $J \neq K$.

(d) Si J y K son arcos y $J, K \notin \mathfrak{A}_E(X)$, entonces $\mathrm{bd}_X(J) = \{p_J, q_J\}$ y $\mathrm{bd}_X(K) = \{p_K, q_K\}$, con $p_J \neq q_J$ y $p_K \neq q_K$. Así, por el Lema 4.18, $\mathcal{D}(J, K) = \mathcal{D}^J_{p_K} \cup \mathcal{D}^J_{q_K} \cup \mathcal{D}^K_{p_J} \cup \mathcal{D}^K_{q_J}$. Por Lema 4.15, $\mathcal{D}^J_{p_K}$, $\mathcal{D}^J_{q_K}$, $\mathcal{D}^K_{p_J}$ y $\mathcal{D}^K_{q_J}$ son 2-celdas. De aquí, tenemos los siguientes subcasos:

(d.1) $J \cap K = \emptyset$.

Por el Lema 4.20 (1), $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^K_{q_J} = \emptyset$, ya que $p_J \notin K$. Asimismo, $\mathcal{D}^J_{p_K} \cap \mathcal{D}^J_{q_k} = \emptyset$, ya que $p_K \notin J$. Por otra parte, por el Lema 4.20 (2), $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^J_{p_K} = \{\{p_J, p_K\}\}$, ya que $p_J \neq p_K$. Similarmente, tenemos que $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{p_J, q_K\}\}$, $\mathcal{D}^K_{q_J} \cap \mathcal{D}^J_{p_K} = \{\{q_J, p_K\}\}$ y $\mathcal{D}^K_{q_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{q_J, q_K\}\}$.

(d.2) $J \cap K$ es un conjunto de un solo punto.

Podemos suponer que $J \cap K = \{q_J\} = \{q_K\}$. Entonces, $p_J \notin K$ y $p_K \notin J$, ya que $p_J \neq q_J$ y $p_K \neq q_K$. Por el Lema 4.20 (1), $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^K_{q_J} = \emptyset$, ya que $p_J \notin K$, y $\mathcal{D}^J_{p_K} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \emptyset$, ya que $p_K \notin J$. Por otra parte, por el Lema 4.20 (2), $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^J_{p_K} = \{\{p_J, p_K\}\}$, ya que $p_J \neq p_K$. Similarmente, $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{p_J, q_K\}\}$, $\mathcal{D}^K_{q_J} \cap \mathcal{D}^J_{p_K} = \{\{q_J, p_K\}\}$ y $\mathcal{D}^K_{q_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{q_J, q_K\}\}$.

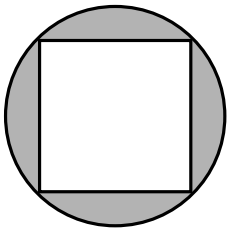

Figura 4.6: **Casos (d.1), (d.2).**

(d.3) $J \cap K$ es un conjunto con exactamente dos puntos.

Entonces, $\mathrm{bd}_X(J) = \mathrm{bd}_X(K)$. Podemos suponer que $p_J = p_K$ y $q_J = q_K$. Luego, $p_J, q_J \in K$ y $p_K, q_K \in J$. Por el Lema 4.20 (1), $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^K_{q_J} = \{\{p_J, q_J\}, K\}$, ya que $p_J, q_J \in K$ y $\mathcal{D}^J_{p_K} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{p_K, q_K\}, J\}$, ya que $p_K, q_K \in J$. Por el Lema 4.20 (2), $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^J_{p_K} = \{\{p_J\}, \{p_J, q_J\}\}$, $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{p_J, q_K\}$, ya que $p_J \neq q_K$, $\mathcal{D}^K_{q_J} \cap \mathcal{D}^J_{p_K} = \{\{q_J, p_K\}\}$, ya que $q_J \neq p_K$ y $\mathcal{D}^K_{q_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{q_J\}, \{p_J, q_K\}\}$.

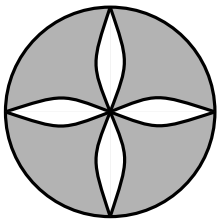

Figura 4.7: **Caso (d.3).**

(e) J y K son arcos y $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$ y $K \in \mathfrak{A}_E(X)$.

Entonces, $\mathrm{bd}_X(J) = \{p_J, q_J\}$ y $\mathrm{bd}_X(K) = \{q_K\}$, con $p_J \neq q_J$. Luego, $\mathcal{D}(J, K) = \mathcal{D}^K_{p_J} \cup \mathcal{D}^K_{q_J} \cup \mathcal{D}^J_{q_K}$. Observemos que por el Lema 4.15, $\mathcal{D}^K_{p_J}$, $\mathcal{D}^K_{q_J}$ y $\mathcal{D}^J_{q_K}$ son 2-celdas. Tenemos los siguientes dos subcasos:

(e.1) $J \cap K = \emptyset$.

Entonces, por el Lema 4.20 (1), $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^K_{q_J} = \emptyset$, ya que $p_J \notin K$. Por el Lema 4.20 (2), $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{p_J, q_K\}\}$, ya que $p_J \neq q_K$ y $\mathcal{D}^K_{q_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{q_J, q_K\}\}$, ya que $q_J \neq q_K$.

(e.2) $J \cap K$ es un conjunto de un solo punto.

Podemos suponer que $J \cap K = \{q_J\} = \{q_K\}$. Luego, por el Lema 4.20 (1), $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^K_{q_J} = \emptyset$, ya que $p_J \notin K$. Por el Lema 4.20 (2), $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{p_J, q_K\}\}$ y $\mathcal{D}^K_{q_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{q_J, q_K\}\}$, ya que $p_J \neq q_K$.

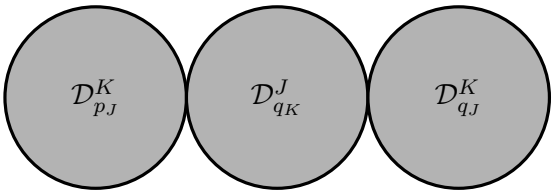

Figura 4.8: **Caso (e).**

(f) J es un arco, $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$ y K es una curva cerrada simple.

Entonces, $\mathrm{bd}_X(J) = \{p_J, q_J\}$ y $\mathrm{bd}_X(K) = \{q_K\}$, con $p_J \neq q_J$. Luego, $\mathcal{D}(J,K) = \mathcal{D}^K_{p_J} \cup \mathcal{D}^K_{q_J} \cup \mathcal{D}^J_{q_K}$. Además, por el Lema 4.15, $\mathcal{D}^J_{q_K}$ es una 2-celda, y $\mathcal{D}^K_{p_J}$ y $\mathcal{D}^K_{q_J}$ son homeomorfos al continuo W_0. Tenemos los siguientes dos subcasos:

(f.1) $J \cap K = \emptyset$.

Entonces, por el Lema 4.20 (1), $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^K_{q_J} = \emptyset$, ya que $p_J \notin K$. Por el Lema 4.20 (2), $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{p_J, q_K\}\}$, ya que $p_J \neq q_K$, y $\mathcal{D}^K_{q_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{q_J, q_K\}\}$, ya que $q_J \neq q_K$.

(f.2) $J \cap K$ es de un solo punto.

Podemos suponer que $J \cap K = \{q_J\} = \{q_K\}$. Por el Lema 4.20 (1), $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^K_{q_J} = \emptyset$, ya que $p_J \notin K$. Por el Lema 4.20 (2), $\mathcal{D}^K_{p_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{p_J, q_K\}\}$, ya que $p_J \neq q_K$, y $\mathcal{D}^K_{q_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{q_J, q_K\}\}$, ya que $p_J \neq q_K$.

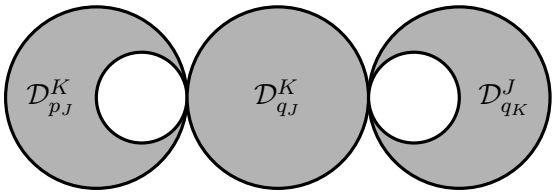

Figura 4.9: **Caso (f)**.

(g) J y K son arcos y $J, K \in \mathfrak{A}_E(X)$.

Entonces, $\mathrm{bd}_X(J) = \{q_J\}$ y $\mathrm{bd}_X(K) = \{q_K\}$. Luego, $\mathcal{D}(J,K) = \mathcal{D}^K_{q_J} \cup \mathcal{D}^J_{q_K}$. Por el Lema 4.15, $\mathcal{D}^K_{q_J}$ y $\mathcal{D}^J_{q_K}$ son 2-celdas. Además, por el Lema 4.20 (2), $\mathcal{D}^K_{q_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{q_J, q_K\}\}$.

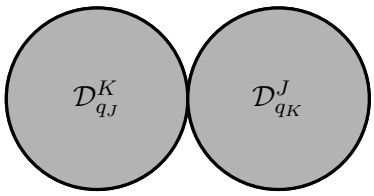

Figura 4.10: **Caso (g)**.

(h) $J \in \mathfrak{A}_E(X)$ y K es una curva cerrada simple.

Entonces, $\mathrm{bd}_X(J) = \{q_J\}$ y $\mathrm{bd}_X(K) = \{q_K\}$. Luego, $\mathcal{D}(J,K) = \mathcal{D}^K_{q_J} \cup \mathcal{D}^J_{q_K}$. Por el Lema 4.15, $\mathcal{D}^K_{q_J}$ es homeomorfo al continuo W_0 y $\mathcal{D}^J_{q_K}$ es una 2-celda. Por el Lema 4.20 (2), $\mathcal{D}^K_{q_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{q_J, q_K\}\}$.

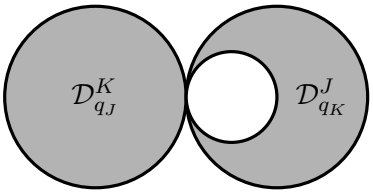

Figura 4.11: **Caso (h)**.

(i) J y K son curvas cerradas simples.

Entonces, $\mathrm{bd}_X(J) = \{q_J\}$ y $\mathrm{bd}_X(K) = \{q_K\}$. Luego, $\mathcal{D}(J, K) = \mathcal{D}^K_{q_J} \cup \mathcal{D}^J_{q_K}$. Por el Lema 4.15, $\mathcal{D}^K_{q_J}$ y $\mathcal{D}^J_{q_K}$ son homeomorfos al continuo W_0. Por el Lema 4.20 (2), $\mathcal{D}^K_{q_J} \cap \mathcal{D}^J_{q_K} = \{\{q_J, q_K\}\}$.

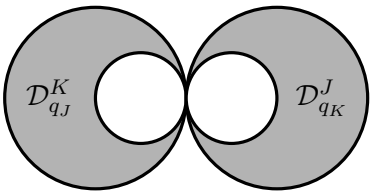

Figura 4.12: **Caso (i)**.

Resta probar (5). Para esto, sea $B = h(\{p\})$. Como $p \in \mathrm{bd}_X(J)$, existe una sucesión $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathrm{int}_X(J)$ tal que $\lim p_m = p$. Entonces, por el Lema 2.8, $\lim\{p_m\} = \{p\}$. Así, por la continuidad de h, $\lim h(\{p_m\}) = h(\{p\})$. Como para cada $m \in \mathbb{N}$, $p_m \in \mathrm{int}_X(J)$, entonces $\{p_m\} \in \langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_2$. Por los incisos (1), (2) y (3) de este teorema (que ya se han demostrado), tenemos que $h(\{p_m\}) \in h(\langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_2) = \langle \mathrm{int}_Y(L)\rangle_2$, es decir, $h(\{p_m\}) \in \langle \mathrm{int}_Y(L)\rangle_2$. Esto implica que, $h(\{p_m\}) \subset \mathrm{int}_Y(L)$. Así, $\{h(\{p_m\})\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente de elementos de $C_2(L)$ que es un cerrado de $C_2(X)$. Por lo tanto, $\lim h(\{p_m\}) = B \in C_2(L)$. De donde, $B \subset L$. Por otra parte, como $p \in \mathrm{bd}_X(J) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J)$, existe una sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{FA}(X) - J$ tal que $\lim x_m = p$. Por el Lema 3.74, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $x_m \in \mathrm{int}_X(J_m)$. De aquí, $\{x_m\} \in \langle \mathrm{int}_X(J_m)\rangle_2$, por lo que $h(\{x_m\}) \in h(\langle \mathrm{int}_X(J_m)\rangle_2)$. Por el Lema 4.16, existen $L_m, M_m \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tales que $h(\langle \mathrm{int}_X(J_m)\rangle_2) = \langle \mathrm{int}_Y(L_m), \mathrm{int}_Y(M_m)\rangle_2$. Como en este caso, X y Y son casi enrejados, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $L \in \mathfrak{A}_S(Y)$, se cumple que $\mathrm{bd}_X(J) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J)$ y $\mathrm{bd}_Y(L) \subset \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y) - L)$. Así, por los incisos (1), (2) y (3), $L_m = M_m$. Entonces, $h(\langle \mathrm{int}_X(J_m)\rangle_2) = \langle \mathrm{int}_X(L_m)\rangle_2$. Como $x_m \in J_m - J$, entonces $J_m \neq J$. Por el Lema 3.65, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{int}_X(J_m) \cap \mathrm{int}_X(J) = \emptyset$. Por la biyectividad de h, $h(\langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_2 \cap \langle \mathrm{int}_X(J_m)\rangle_2) = h(\langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_2) \cap h(\langle \mathrm{int}_X(J_m)\rangle_2) = \langle \mathrm{int}_Y(L)\rangle_2 \cap \langle \mathrm{int}_Y(L_m)\rangle_2 = \emptyset$, es decir, $h(\langle \mathrm{int}_X(J_m)\rangle_2) = \langle \mathrm{int}_Y(L_m)\rangle_2 \subset Y - \langle \mathrm{int}_Y(L)\rangle_2$. Así, $L_m \neq L$, entonces por el Lema 3.65, $\mathrm{int}_Y(L_m) \cap \mathrm{int}_Y(L) = \emptyset$. Como $h(\{x_m\}) \in \langle \mathrm{int}_Y(L_m)\rangle_2$, entonces $h(\{x_m\}) \cap \mathrm{int}_Y(L_m) \neq \emptyset$ y $h(\{x_m\}) \subset \mathrm{int}_Y(L_m)$. Esto implica que, $h(\{x_m\}) \cap \mathrm{int}_Y(L) = \emptyset$, es decir, $h(\{x_m\}) \subset Y - \mathrm{int}_Y(L)$. Observemos que $C_2(Y - \mathrm{int}_Y(L))$ es un subespacio cerrado de $C_2(X)$. Como $\{h(\{x_m\})\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente de elementos de $C_2(Y - \mathrm{int}_Y(L))$, entonces $\lim h(\{x_m\}) \in C_2(Y - \mathrm{int}_Y(L))$.

Por lo tanto, $B = \lim h(\{x_m\}) \subset Y - \mathrm{int}_Y(L)$. De aquí, y como $B \subset L$, se sigue que $B \subset L \cap (Y - \mathrm{int}_Y(L))$, es decir, $B \subset \mathrm{bd}_Y(L)$.

Por los incisos (1) y (3), si J es una curva cerrada simple o $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, L es una curva cerrada simple o $L \in \mathfrak{A}_E(Y)$. En ambos casos, $\mathrm{bd}_X(J)$ y $\mathrm{bd}_Y(L)$ son conjuntos de un solo punto. Entonces, B es un conjunto conexo de un solo punto tal que $B \subset \mathrm{bd}_Y(L)$.

Ahora, supongamos que J es un arco y $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$. Entonces, por el inciso (2), L es un arco y $L \notin \mathfrak{A}_E(Y)$, por lo que $\mathrm{bd}_X(J) = \{r, s\}$ y $\mathrm{bd}_Y(L) = \{u, v\}$, con $r \neq s$ y $u \neq v$. Si $B = \{u\}$ o $B = \{v\}$, la prueba está terminada. Así, supongamos que $B = \{u, v\}$. Como $h(\mathcal{D}(J, J)) = \mathcal{D}(L, L)$, por el modelo descrito en (a), vemos que $\{p\}$ es un punto de no corte local de $\mathcal{D}(J, J)$. Pero, $B = h(\{p\}) = \{u, v\}$ es un punto de corte local de $\mathcal{D}(L, L)$, contradicción. Esto termina la prueba de este teorema. □

Teorema 4.22. *Sean X y Y continuos localmente conexos y casi enrejados. Si $C_2(X)$ es homeomorfo a $C_2(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y.*

Demostración. Cuando X es un arco o una curva cerrada simple, por [17, Teorema 4.1], el resultado es inmediato. Similarmente, si Y es un arco o una curva cerrada simple, el resultado se cumple. Supongamos que X y Y no son un arco ni una curva cerrada simple y sea $h\colon C_2(X) \to C_2(Y)$ un homeomorfismo. Como $\mathfrak{P}_2(X)$ está dado en términos de conceptos topológicos que se preservan bajo homeomorfismos, $h(\mathfrak{P}_2(X)) = \mathfrak{P}_2(Y)$. Por [19, Lema 2.1] las componentes de $\mathfrak{P}_2(X)$ son los conjuntos de la forma $\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$, donde $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Dados $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, como $h\left(\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right)$ es una componente de $\mathfrak{P}_2(Y)$, existen $L, M \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tales que $h\left(\langle \mathrm{int}_X(J), \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}\right)$ $= \langle \mathrm{int}_Y(L), \mathrm{int}_Y(M)\rangle_{C_2(Y)}$. Como X es casi enrejado, $\mathrm{bd}_X(J) \subset \mathrm{cl}_X(X - J) = \mathrm{cl}_X(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X)) - \mathrm{cl}_X(J))$
$\subset \mathrm{cl}_X(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J)) = \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J)$, es decir, $\mathrm{bd}_X(J) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - J)$. Similarmente, $\mathrm{bd}_X(K) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X) - K)$. Como Y también es casi enrejado, $\mathrm{bd}_Y(L) \subset \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y) - L)$ y $\mathrm{bd}_Y(M) \subset \mathrm{cl}_Y(\mathcal{FA}(Y) - M)$. Si $J = K$, por el Teorema 4.21 (1), (2), (3), $L = M$. Luego, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, existe $L_J \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h\left(\langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_{C_2(X)}\right) = \langle \mathrm{int}_Y(L_J)\rangle_{C_2(Y)}$. Notemos que la argumentación anterior, también se puede aplicar al homeomorfismo $h^{-1}\colon C_2(Y) \to C_2(X)$. Así, para cada $L \in \mathfrak{A}_S(Y)$, existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $h^{-1}\left(\langle \mathrm{int}_Y(L)\rangle_{C_2(Y)}\right) = \langle \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)}$, esto implica que $\langle \mathrm{int}_Y(L)\rangle_{C_2(Y)} = \langle \mathrm{int}_Y(L_J)\rangle_{C_2(Y)}$. Luego, $\mathrm{int}_Y(L) = \mathrm{int}_Y(L_J)$, por lo que $L = \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(L)) = \mathrm{cl}_Y(\mathrm{int}_Y(L_J)) = L_J$. Por lo tanto, $\bigcup\{L\colon L \in \mathfrak{A}_S(Y)\} = \bigcup\{L_J\colon L_J \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$.

Dados $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$, con $J \neq K$, por el Lema 3.65, $\mathrm{int}_X(J) \cap \mathrm{int}_X(K) = \emptyset$, entonces $\langle \mathrm{int}_X(J)\rangle_{C_2(X)} \cap \langle \mathrm{int}_X(K)\rangle_{C_2(X)} = \emptyset$. Utilizando que h es inyectiva, $h\left(\langle \mathrm{int}_X(J)_{C_2(X)}\right) \cap h\left(\mathrm{int}_X(K)_{C_2(X)}\right) = \emptyset$, es decir, $\langle \mathrm{int}_Y(L_J)\rangle_{C_2(Y)} \cap \langle \mathrm{int}_Y(L_K)\rangle_{C_2(Y)} = \emptyset$. Así, $L_J \neq L_K$.

Ahora, sea $p \in X - \bigcup\{\mathrm{int}_X(L)\colon L \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Afirmamos que $h(\{p\}) = \{y\}$, para algún $y \in Y - \bigcup\{\mathrm{int}_Y(K)\colon K \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$. Como $X = \mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))$, existe una sucesión $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ de $\mathcal{FA}(X)$ tal que $\lim p_m = p$. Por el Lema 3.74,

$\mathcal{FA}(X) = \bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$, así, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $p_m \in \mathrm{int}_X(J_m)$. Como X no es un arco ni una curva cerrada simple, para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos elegir $q_m \in \mathrm{bd}_X(J_m)$. Si $\{J_m\colon J_m \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ es finito, como $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión del conjunto cerrado $\bigcup\{J_m\colon J_m \in \mathfrak{A}_S(X)\}$, entonces $p \in \bigcup\{J_m\colon J_m \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Así, existe $J_s \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $p \in J_s$, por lo que $p \in \mathrm{bd}_X(J_s)$. Por el Teorema 4.21 (5), tenemos que $h(\{p\}) = \{y\}$, para algún $y \in \mathrm{bd}_Y(L_{J_s})$. Así, supongamos que $\{J_m\colon J_m \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ es infinito y $J_m \neq J_k$, si $m \neq k$. Por el Lema 3.69, $\lim J_m = \{p\}$, entonces por el Lema 2.35, $\lim q_m = p$, esto es, $\lim\{q_m\} = \{p\}$. Por el Teorema 4.21 (5), se tiene que $h(\{q_m\}) = \{w_m\}$, para algún $w_m \in \mathrm{bd}_Y(L_{J_m})$. Como h es continua, $\lim h(\{q_m\}) = \lim\{w_m\} = h(\{p\})$. Además, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{bd}_Y(L_{J_m}) \subset Y - \bigcup\{\mathrm{int}_Y(K)\colon K \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$, entonces $\{w_m\}$ es una sucesión del conjunto cerrado $Y - \bigcup\{\mathrm{int}_X(K)\colon K \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$. Así, existe $y \in Y - \bigcup\{\mathrm{int}_Y(K)\colon K \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$ tal que $\lim w_m = y$, por lo que $h(\{p\}) = \lim\{w_m\} = \{y\}$, para algún $y \in Y - \bigcup\{\mathrm{int}_Y(K)\colon K \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$. De esta forma, podemos considerar las funciones continuas $\Phi_X\colon X \to F_1(X)$ y $\Phi_Y\colon Y \to F_1(Y)$ que están dadas por $\Phi_X(x) = \{x\}$ y $\Phi_Y(y) = \{y\}$, respectivamente, y $g_1 = {\Phi_Y}^{-1} \circ h \circ \Phi_X\colon X - \bigcup\{\mathrm{int}_X(L)\colon L \in \mathfrak{A}_S(X)\} \to Y - \bigcup\{\mathrm{int}_Y(K)\colon K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ que es continua.

Si J es una curva cerrada simple, por el Teorema 4.21 (1),(5), L_J es una curva cerrada simple y $h(\{q_J\}) = \{q_{L_J}\}$, con $q_{L_J} \in \mathrm{bd}_Y(L_J)$, es decir, $g_1(q_J) = q_{L_J}$. Sea $g_J\colon J \to L_J$ un homeomorfismo tal que $g_J(q_J) = q_{L_J}$. Similarmente, si $J \in \mathfrak{A}_E(X)$, por el Teorema 4.21 (1), (3), $L_J \in \mathfrak{A}_E(Y)$ y $g_1(q_J) = q_{L_J} \in \mathrm{bd}_Y(L_J)$. Sea $g_J\colon J \to L_J$ un homeomorfismo tal que $g_J(q_J) = q_{L_J}$. Finalmente, si J es un arco y $J \notin \mathfrak{A}_E(X)$, entonces por el Teorema 4.21 (2), (5), L_J es un arco, $L_J \notin \mathfrak{A}_E(Y)$ y $h(\{p_J\})$, y $h(\{q_J\})$ son conjuntos de un solo punto contenidos en $\mathrm{bd}_Y(L_J) = \{p_{L_J}, q_{L_J}\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $h(\{p_J\}) = \{p_{L_J}\}$. Luego, $h(\{q_J\}) = \{q_{L_J}\}$. Así, $g_1(p_J) = p_{L_J}$ y $g_1(q_J) = q_{L_J}$. Sea $g_J\colon J \to L_J$ un homeomorfismo tal que $g_J(p_J) = p_{L_J}$ y $g_J(q_J) = q_{L_J}$. En cualquiera de los casos, $g_J(\mathrm{bd}_X(J)) = \mathrm{bd}_Y(L_J)$. Como $\{\mathrm{int}_X(J) : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ es una familia de subconjuntos abiertos y ajenos entre sí de X, por el Teorema 2.16, existe una única función continua $g_2\colon \bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\} \to Y$ tal que $g_2 \restriction_{\mathrm{int}_X(J)} = g_J \restriction_{\mathrm{int}_X(J)}$, para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Sea $g\colon X \to Y$ tal que $g \restriction_{X - \bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}} = g_1$ y $g \restriction_{\bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(Y)} = g_2$. Notemos que $g \restriction_J = g_J$ es continua para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Luego, para mostrar que g es continua, basta probar que g es continua en $\mathrm{bd}_X(\bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\})$.

Sea $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de $\bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ tal que $\lim p_m = p$, para algún $p \in X - \bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $J_m \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $p_m \in \mathrm{int}_X(J_m)$. Como X no es un arco ni una curva cerrada simple, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $q_m \in \mathrm{bd}_X(J_m)$. Si $\{J_m\colon J_m \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ es finito, entonces $p \in \bigcup\{J_m\colon J_m \in \mathfrak{A}_S(X)\}$. Por lo que, $p \in J_s$, para algún $J_s \in \mathfrak{A}_S(X)$. Luego, $p \in \mathrm{bd}_X(J_s)$. Así, supongamos que $J_m \neq J_k$, si $m \neq k$. Por el Lema 3.69, $\lim J_m = \{p\}$. Entonces por el Lema 2.35, $\lim q_{J_m} = p$, así, $\lim\{q_{J_m}\} = \{p\}$. Como para cada $m \in \mathbb{N}$, $q_{J_m} \in \mathrm{bd}_X(J_m)$, se sigue que $q_{J_m} \in X - \bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}$, luego $g(q_{J_m}) = g_1(q_{J_m}) = {\Phi_2}^{-1}(h(\{q_{J_m}\})) \in L_{J_m}$. Esto implica que, $\{g(q_{J_m})\} = \Phi_2(g(q_{J_m})) = h(\{q_{J_m}\})$. Por la continuidad de h, $\lim h(\{q_{J_m}\}) = h(\{p\}) = \{g(p)\} = \lim\{g(q_{J_m})\}$. Así, $\lim g(q_{J_m}) = g(p)$. Como $L_{J_m} \neq L_{J_k}$, si $J_k \neq J_m$, $g(q_{J_m}) = g_{J_m}(q_{J_m}) \in L_{J_m}$ y $\lim g(q_{J_m}) = g(p)$,

por el Lema 3.69, $\lim L_{J_m} = \{g(p)\}$. Además, $g(p_m) = g_{J_m}(p_m) \in L_{J_m}$, para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces por el Lema 2.35, $\lim g(p_m) = g(p)$. Esto demuestra que g es continua.

Por último, probemos que g es biyectiva. Notemos primero que $g(\bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}) = \bigcup\{\mathrm{int}_Y(L_J) : L_J \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$. Por la inyectividad de g_1, la inyectividad de $g_J = g \restriction J$ y $g_1(X - \bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}) \cap g_2(\bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\}) \subset (Y - \bigcup\{\mathrm{int}_X(L_J) : L_J \in \mathfrak{A}_S(Y)\}) \cap (\bigcup\{\mathrm{int}_X(L_J)\}\colon L_J \in \mathfrak{A}_S(Y))\} = \emptyset$, se sigue que g es inyectiva. Por otra parte, por el Lema 3.74, $\mathcal{FA}(Y) = \bigcup\{\mathrm{int}_Y(L_J)\colon L_J \in \mathfrak{A}_S(Y)\}$. Luego, $\mathcal{FA}(Y) \subset g(\mathrm{cl}_X(\bigcup\{\mathrm{int}_X(J)\colon J \in \mathfrak{A}_S(X)\})) = g(\mathrm{cl}_X(\mathcal{FA}(X))) = g(X)$, es decir, $\mathcal{FA}(Y) \subset g(X)$. Esto implica que, g es sobreyectiva. Por lo tanto, g es un homeomorfismo. □

Teorema 4.23. *Sean X y Y continuos localmente conexos y casi enrejados. Si $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces:*

(a) *si $n = 1$ y X no es un arco ni una curva cerrada simple, entonces X es homeomorfo a Y;*

(b) *si $n \neq 1$, entonces X es homeomorfo a Y.*

Demostración. (a) Cuando $n = 1$ y X es una gráfica finita distinta de un arco y una curva cerrada simple, por [18, Teorema 3.8 (a)], el resultado es inmediato. Así, podemos suponer que X no es un gráfica finita. Para utilizar el Teorema 4.14, probemos que Y no es un arco ni una curva cerrada simple. Supongamos que Y es un arco o una curva cerrada simple. Por la Proposición 2.17 y la Proposición 2.18, $C(Y)$ es una 2-celda. Como $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, por el Teorema 1.4, $C(X)$ es una 2-celda, así, $\dim(C(X)) < \infty$. Como X es localmente conexo, por [20, Teorema 72.2], X es una gráfica finita, lo que es una contradicción. Por lo tanto, Y no es un arco ni una curva cerrada simple. Por el Teorema 4.14, X es homeomorfo a Y.

(b) Cuando $n = 2$, por el Teorema 4.22, X es homeomorfo a Y y el resultado se cumple. El caso cuando $n \geq 3$, se sigue del Teorema 4.13. Así concluye la prueba del Teorema. □

Teorema 4.24. *Supongamos que X es un continuo enrejado. Si $n \neq 1$, entonces X tiene hiperespacio único $C_n(X)$. Si X no es un arco ni una curva cerrada simple, entonces X tiene hiperespacio único $C(X)$.*

Demostración. Supongamos que Y es un continuo tal que $C_n(X)$ es homeomorfo $C_n(Y)$, entonces existe $h\colon C_n(X) \to C_n(Y)$ un homeomorfismo. Como X es un continuo enrejado, por el Lema 4.14, X es localmente conexo. Entonces por [25, Teorema 3.2], $C_n(X)$ es un continuo localmente conexo. Como h es homeomorfismo, por [6, Proposición 8.25], $h(C_n(X)) = C_n(Y)$ es un continuo localmente conexo. Así, por [25, Teorema 3.2], Y es un continuo localmente conexo. Por otra parte, como $\mathfrak{F}_n(X)$ está dado en términos de conceptos topológicos y h es un homeomorfismo, se sigue que $h(\mathfrak{F}_n(X)) = \mathfrak{F}_n(Y)$. Como X es enrejado, por el Teorema 3.30, $\mathfrak{F}_n(X)$ es denso en $C_n(X)$, luego, como h conserva cerraduras por ser un homeomorfismo, tenemos que $C_n(Y) = h(C_n(X)) = h\left(\mathrm{cl}_{C_n(X)}(\mathfrak{F}_n(X))\right) = \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(h(\mathfrak{F}_n(X))) = \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(\mathfrak{F}_n(Y))$, es decir, $C_n(Y) = \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(\mathfrak{F}_n(Y))$. Esto muestra que $\mathfrak{F}_n(Y)$ es denso en $C_n(Y)$.

Entonces, por el Teorema 3.30, Y es un continuo enrejado. En particular, Y es un continuo casi enrejado. Así, X y Y son continuos localmente conexos y casi enrejados. Por lo tanto, si $n = 1$ y X no es un arco ni una curva cerrada simple, por el Teorema 4.23 (a), X tiene hiperespacio único $C(X)$. En otro caso, si $n \neq 1$ y X es cualquier continuo enrejado, por el Teorema 4.23 (b), X tiene hiperespacio único $C_n(X)$. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones

El estudio de la caracterización de los continuos localmente conexos con hiperespacio único $C_n(X)$ y $n \in \mathbb{N}$, inició en [19, Problema 3.2], cuando Alejandro Illanes presentó el siguiente problema:

Problema. Encontrar una caracterización de los elementos de la clase $\mathfrak{UH} = \{X \colon X$ es un continuo localmente conexo con hiperespacio único $C_n(X)$ y $n \in \mathbb{N}\}$.

Por [18, Teorema 3.8], $\mathfrak{UH}$ contiene las gráficas finitas distintas de un arco y una curva cerrada simple. Por [13, Teorema 10], [15, Teorema 5.7] y [19, Teorema 3.1], $\mathfrak{UH}$ contiene los elementos de la clase $\mathfrak{D}$ distintos de un arco. Por otro lado, por [13, Teorema 10] y por [2, Teorema 3.5], los elementos que no están en $\mathfrak{D}$, no tienen hiperespacio de subcontinuos único $C(X)$.

En respuesta al Problema, Rodrigo Hernández, Alejandro Illanes y Verónica Martínez de la Vega, en [12], introdujeron las clases de los continuos casi enrejados y enrejados, mediante los cuales presentaron algunas condiciones necesarias y también, suficientes para que un continuo X localmente conexo tenga hiperespacio único $C_n(X)$. Dichos resultados son los que hemos detallado a lo largo de este trabajo y que presentamos a continuación.

Por el Teorema 3.54, si X es un continuo localmente conexo que no es casi enrejado, entonces X no tiene hiperespacio único $C_n(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, para que un continuo X localmente conexo tenga hiperespacio único $C_n(X)$, necesitamos al menos que este sea casi enrejado. Así, tenemos una condición por descarte, para saber si un continuo X localmente conexo tiene hiperespacio único $C_n(X)$. Sin embargo, que un continuo X localmente conexo sea casi enrejado, no significa que tenga hiperespacio único $C_n(X)$; por ejemplo, por el Corolario 4.2, si X es un continuo localmente conexo y casi enrejado tal que $X - \mathcal{P}(X)$ es disconexo, entonces X no tiene hiperespacio único $C(X)$.

Por otra parte, por [16, Teorema 3.1], un continuo X localmente conexo es casi enrejado si y solo si X contiene arco libres de X. De modo que el problema de determinar si un continuo X localmente conexo tiene hiperespacio único $C_n(X)$, está abierto solo cuando X contiene algún arco libre. Por supuesto, que un continuo X localmente conexo tenga arcos libres, tampoco garantiza que su hiperespacio $C_n(X)$ sea único; por ejemplo, si $n = 1$ y X es el arco o la curva cerrada simple, entonces X no tiene hiperespacio único $C(X)$.

En cambio, si X es un continuo enrejado, por el Lema 3.19, X es un continuo localmente conexo, y por el Teorema 4.24, si $n = 1$ y X no es un arco ni una curva cerrada simple, X tiene hiperespacio único $C(X)$; si $n \neq 1$, X tiene hiperespacio único $C_n(X)$. Esto muestra que la clase de los continuos enrejados tienen n-ésimo hiperespacio único $C_n(X)$, excepto si $n = 1$ y X es un arco o una curva cerrada simple. Por lo tanto, el problema de determinar si un continuo X localmente conexo tiene hiperespacio único $C_n(X)$, esta abierto solo cuando X es casi enrejado pero no enrejado.

Por último, por el Teorema 3.41, la clase de las gráficas finitas, $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{LD}$, están contenidas en la clase de los continuos enrejados. De este modo, el Teorema 4.24, generaliza todos los casos conocidos de continuos localmente conexos que tienen n-ésimo hiperespacio único, véase [1], [2], [3], [13], [14], [15], [17], [18] y [19].

Referencias

[1] Gerardo Acosta, *Continua with unique hyperspace, in Continuum theory*, Lectures Notes Pure Applied Mathematics, 230 (2002), 33 – 49.

[2] Gerardo Acosta y David Herrera-Carrasco, *Dendrite without unique hyperspace*, Houston Journal of Mathematics, 35 (2009) 451 – 467.

[3] Gerardo Acosta, David Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero, *Local dendrites with unique hiperspaces $C(X)$*, Topology and its Applications, 157 (2010), 2069 – 2085.

[4] José Gerardo Ahuatzi Reyes, David Herrera-Carrasco y Fernado Macías-Romero, *Dimensión finita en el n-ésimo hiperespacio de continuos localmente conexos*, Capítulo 6, *Matemáticas y sus aplicaciones 5*, Fomento Editorial BUAP, primera edición, 2015.

[5] José Gerardo Ahuatzi Reyes, David Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero, *Continuos localmente conexos sin hiperespacio único $C_n(X)$*, Capítulo 9, *Matemáticas y sus aplicaciones 6*, Fomento Editorial BUAP, primera edición, 2015.

[6] Fidel Casarrubias-Segura y Ángel Tamariz-Mascarúa, *Elementos de topología de conjuntos*, 2011.

[7] Vianey Córdova Salazar, David Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero, *La topología de los hiperespacios*, Capítulo 26, *Matemáticas y sus aplicaciones 1*, Fomento Editorial BUAP, primera edición, 2011.

[8] Richard Davis Anderson, *On topological inifinite deficiency*, Michigan Math, J., 14, (1967), 365 – 383.

[9] James Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[10] Ryszard Engelking, *General topology*, Sigma series in pure mathematics, Heldermann Verlag, 1989.

[11] Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero, *Encajes*, Capítulo 19, *Matemáticas y sus aplicaciones 2*, Fomento Editorial BUAP, primera edición, 2013.

[12] Rodrigo Hernández-Gutiérrez, Alejandro Illanes y Verónica Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mountain Journal Of Mathematics, 43, (2013), 1583 – 1623.

[13] David Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace*, Houston Journal of Mathematics, 33 (2007), 795 – 805.

[14] David Herrera-Carrasco, Alejandro Illanes, María de Jesús López y Fernando Macías Romero, *Dendrites with unique hyperspace* $C_2(X)$, Topology and its Applications, 156 (2009), 549 – 557.

[15] David Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero, *Dendrites with unique n-fold hyperspace*, Topology Proceedings, 32 (2008), 321 – 337.

[16] David Herrera-Carrasco, Fernando Macías-Romero y Francisco Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*, Journal Of Mathematics Research, 4, (2012), 1 – 9.

[17] Alejandro Illanes, *The hyperspace* $C_2(X)$ *for a finite graph* X *is unique*, Glasnik Matematicki Series, 37 (2002), 347 – 363.

[18] Alejandro Illanes, *Finite graphs* X *have unique hyperspaces* $C_n(X)$, Topology Proceedings, 27 (2003), 179 – 188.

[19] Alejandro Illanes, *Dendrites with unique hyperspace* $C_2(X)$ II, Topology Proceedings, 34 (2009), 77 – 96.

[20] Alejandro Illlanes y Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspace fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216, Marcel Dekker, New York, 1999.

[21] Ignacio L. Iribarren, *Topología de espacios métricos*, Limusa, México, D.F., 2008.

[22] Janusz Jerzy Charatonik y Alejandro Illanes, *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 36 (2006), 811 – 856.

[23] Kazimierz Kuratowski, *Topology*, volume II. Academic Press, New York-London and PWN, Warszawa, 1968. New edition, revised and augmented. Translated from the French by A. Kirkor.

[24] Antonio de Jesús Libreros López, David Herrera-Carrasco y Fernando Macías-Romero, *On the uniqueness of the n-fold pseudo-hyperspace suspension for locally connected continua*, Topology and its Applications, 312 (2022), 108053.

[25] Sergio Macías, *On the hyperspaces* $C_n(X)$ *of a continuum* X, Topology and its Applications, 109 (2001), 237 – 256.

[26] Verónica Martínez-de-la-Vega, *Dimension of the n-fold hyperspaces of graphs*, Houston Journal of Mathematics, 32 (2006), 783 – 799.

[27] James R. Munkres, *Topología*, Segunda Edición, Prentice Hall, Madrid, España, 2002.

[28] Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, New York, 1978.

[29] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum theory, an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[30] Sam B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An Introduction with Exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, no.18, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.

[31] Iván Serapio Ramos, *Funciones punto medio en continuos* (Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas de la FCFM), Benemértita Universidad Autónoma de Puebla, México, 2016.

[32] M. Wojdysławski, *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, Fundamenta Mathematicae, 32 (1939), 184 – 192.

Índice alfabético

Arco, 7
Arco libre, 29
Arco libre maximal, 54

Casi enrejado, 31
Circunferencia libre, 54
Conexo en pequeño, 7
Continuo, 4
Continuo localmente conexo, 6
Cubo de Hilbert, 7
Curva cerrada simple, 37

Dendrita, 40
Dendrita D_n, 48
Dendrita local, 40
Descomposición simple, 55

Enrejado, 31
Extensión continua, 27
Extensor absoluto, 27
Extremo, 5

Frontera como variedad, 8

Gráfica finita, 30

Hiperespacio, 13
Hiperespacio de crecimiento, 23
Hiperespacio de los subcontinuos, 13

Interior como variedad, 8

Localmente conexo, 6
Límite inferior, 25
Límite superior, 25
Límite uniforme, 28

Métrica de Hausdorff, 14

N-celda, 7
N-variedad, 8
N-ésimo hiperespacio, 13
N-ódo simple, 41

Orden, 4
Ordinario, 5

punto de corte, 40
punto de no corte, 40

Ramificación, 5
Retracto, 27
Retracto absoluto, 27

Subcontinuo, 4

Vietórico, 14

Z-conjunto, 28
Z-función, 28

Árbol, 37