



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Parámetros de dispersión de índice de refracción con
interferogramas de desplazamiento radial generados por reflexión
en las dos interfaces de muestras dieléctricas homogéneas
plano-paralelas

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Ciencias (Física Aplicada)

por

Aaron Castillo Cardoso

asesorado por

Dr. Gustavo Rodríguez Zurita

Puebla Pue.
febrero 2017



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Parámetros de dispersión de índice de refracción con
interferogramas de desplazamiento radial generados por reflexión
en las dos interfaces de muestras dieléctricas homogéneas
plano-paralelas

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Ciencias (Física Aplicada)

por

Aaron Castillo Cardoso

asesorado por

Dr. Gustavo Rodríguez Zurita

Puebla Pue.
febrero 2017

Título: Parámetros de dispersión de índice de refracción con interferogramas de desplazamiento radial generados por reflexión en las dos interfaces de muestras dieléctricas homogéneas plano-paralelas

Estudiante: AARON CASTILLO CARDOSO

COMITÉ

Dr. Carlos I. Robledo Sánchez
Presidente

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez
Secretario

Dr. Cruz Meneses Fabián
Vocal

Suplente

Dr. Gustavo Rodríguez Zurita
Asesor

Índice general

Introducción	III
0.1. Objetivos	III
1. Interferómetros de Desplazamiento	1
1.1. Interferómetro de Desplazamiento Lateral	1
1.1.1. Placa con Caras Plano Paralelas	2
1.1.2. Cíclico Lateral	3
1.2. Interferómetro de Desplazamiento Radial	4
1.2.1. Cíclico radial	4
1.3. Anillos de Newton	5
1.4. Método de Mantravadi	5
2. Interferómetro de placas paralelas	9
2.1. Cálculo de la distancia de enfocamiento en la segunda superficie.	10
2.2. Cálculo exacto	11
3. Trabajo experimental	15
3.1. Obtención de datos experimentales y Procesamiento	17
3.2. Resultados	17
3.2.1. Muestra de vidrio Soda Lime	17
3.2.2. Muestra de vidrio BK7 (vidrio Borosilicatado)	19
3.2.3. Muestra de agua destilada	19
3.2.4. Muestra de BGO ($Bi_{12}GeO_{20}$)	21
3.2.5. Muestra de placa retardadora (SiO_2 Birrefringente)	21
4. Conclusiones	25
A. Programa para el Procesamiento de Datos.	29
B. Obtención de coeficientes de Cauchy	35

Introducción

En este trabajo se estudian algunos arreglos interferométricos para medir parámetros de dispersión del índice de refracción en muestras dieléctricas homogéneas, tanto sólidas como líquidas empleando un mismo esquema experimental. En particular, se pueden obtener los coeficientes de Cauchy correspondientes a dichas muestras.

Después de estudiar algunos esquemas interferométricos para su adaptación se encontró una variante conveniente por ser simple y no invasiva. Es además versátil porque puede aplicarse tanto a muestras sólidas como líquidas. Se encontró además, evidencia de poderse aplicar en materiales anisótropos tales como materiales birrefringentes. Una vez aplicado el arreglo experimental para distintas longitudes de onda dentro del rango visible se puede ajustar una curva tipo λ^{-2} y con ella determinar los coeficientes de Cauchy.

En este trabajo se describe la base del método propuesto, se muestran resultados experimentales y se discuten las ventajas sobre otros procedimientos previamente reportados por otros autores.

0.1. Objetivos

- Obtener un método que permita medir la dispersión en muestras homogéneas transparentes sólidas y líquidas.
- Determinar los coeficientes de Cauchy de dichas muestras.
- Presentar indicios de aplicación en materiales anisótropos.

Este trabajo de tesis queda organizado de la siguiente manera: el capítulo 1 contiene una revisión breve de los interferómetros de desplazamiento que sirven de base al trabajo experimental de este trabajo de tesis. El capítulo 2 hace la revisión de los conceptos que se utilizan para la justificación de los resultados experimentales de esta tesis. El capítulo 3 describe el trabajo experimental realizado y muestra los resultados obtenidos mediante los arreglos experimentales y se hace una comparación entre los resultados obtenidos experimentalmente y lo reportado en la literatura. En el capítulo 4 se presentan las conclusiones generales del trabajo. En los apéndices se muestran los programas y simulaciones usados en este trabajo de tesis.

Capítulo 1

Interferómetros de Desplazamiento

En los interferómetros de desplazamiento, el patrón de interferencia es producido por la superposición de dos imágenes del frente de onda bajo estudio. Este tipo de interferómetros tienen la ventaja de que no necesitan una referencia y de que con un sistema óptico muy simple y compacto se pueden estudiar grandes superficies.

Además, dado que ambos haces atraviesan casi el mismo camino óptico, el patrón de franjas es menos afectado por corrientes de aire y vibraciones en comparación con un interferómetro convencional. Sin embargo, los interferómetros de desplazamiento tienen la desventaja de que es necesario el análisis numérico del interferograma para conocer las perturbaciones (o errores) del frente de onda. Además, dado que se produce interferencia entre haces derivados de diferentes partes del frente de onda de prueba, es necesario utilizar una fuente de luz con un buen grado de coherencia espacial, tal como un láser.

Existen muchos tipos de interferómetros de desplazamiento que pueden describirse pero los mas comunes son: el de desplazamiento lateral y el de desplazamiento radial.

1.1. Interferómetro de Desplazamiento Lateral

En un interferómetro de desplazamiento lateral (LSI por sus siglas en ingles) dos imágenes de igual tamaño del frente de onda bajo estudio se superponen, con un pequeño desplazamiento lateral mutuo.

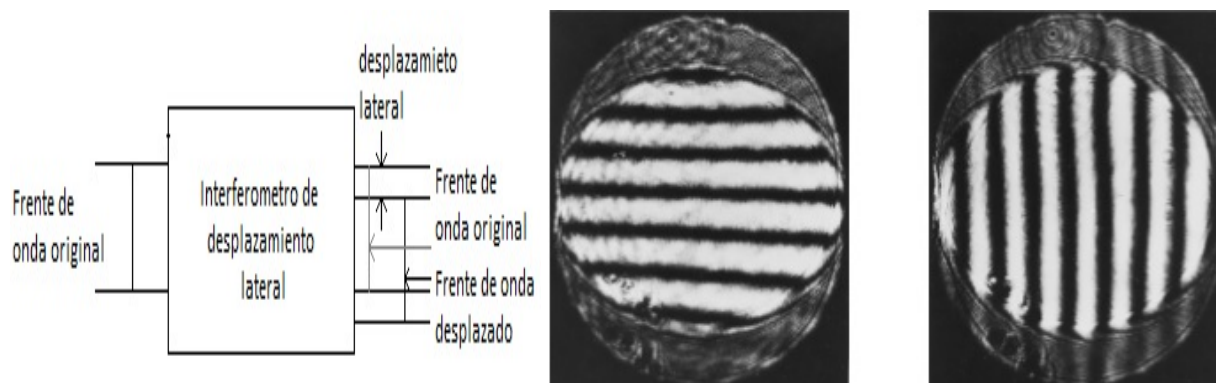


Figura 1.1: Diagrama esquemático que muestra un interferómetro de desplazamiento lateral (izquierda). interferogramas típicos obtenidos con un LSI

CAPÍTULO 1. INTERFERÓMETROS DE DESPLAZAMIENTO

1.1. INTERFERÓMETRO DE DESPLAZAMIENTO LATERAL

La figura anterior muestra los frentes de onda original y desplazado lateralmente, si asumimos que el frente de onda es casi plano de manera que el error (o distorsión) pueda considerarse como una pequeña desviación de ese plano, esta desviación puede escribirse como $W(x, y)$, donde (x, y) son las coordenadas de un punto arbitrario $P(x, y)$. Cuando este frente de onda es desplazado en la dirección x por una cantidad S , el error (desviación) en todo punto en el frente de onda desplazado es $W(x - S, y)$. La diferencia $\Delta W(x, y)$ de los frentes de onda original y desplazado en el punto $P(x, y)$ es $W(x, y) - W(x - S, y)$ esta diferencia es la que se encuentra al usar un interferómetro de desplazamiento lateral.

Cuando el desplazamiento S es cero, no hay diferencia en el frente de onda en cualquier punto y el error en el frente de onda no se puede medir. Ahora la diferencia $\Delta W(x, y)$ puede expresarse en términos de la longitud de onda de acuerdo a la siguiente expresión

$$\Delta W(x, y) = m\lambda \quad (1.1)$$

donde m es el orden de la franja de interferencia y λ es la longitud de onda usada, la parte izquierda de la ecuación anterior puede ser multiplicada por $\frac{S}{\delta x}$, cuando el desplazamiento S se hace cada vez mas pequeño y se aproxima a cero, el cambio en la diferencia del frente de onda sobre el cambio en el desplazamiento Δx se convierte en una deriva parcial por lo tanto la ecuación 1.1 se puede escribir como

$$\frac{\delta W(x, y)}{\delta x} S = m\lambda \quad (1.2)$$

Por lo tanto la información obtenida en el interferómetro de desplazamiento lateral es la deformación de los rayos $(\frac{\delta W}{\delta x})$ en unidades angulares. La exactitud de la ecuación 1.2 aumenta a medida que el desplazamiento S se aproxima a cero.

1.1.1. Placa con Caras Plano Paralelas

Una placa de cara plano paralelas es sin duda uno de los más simples interferómetros de desplazamiento lateral. En la figura 1.2 se muestra un interferómetro de desplazamiento lateral con una placa de caras plano paralelas.

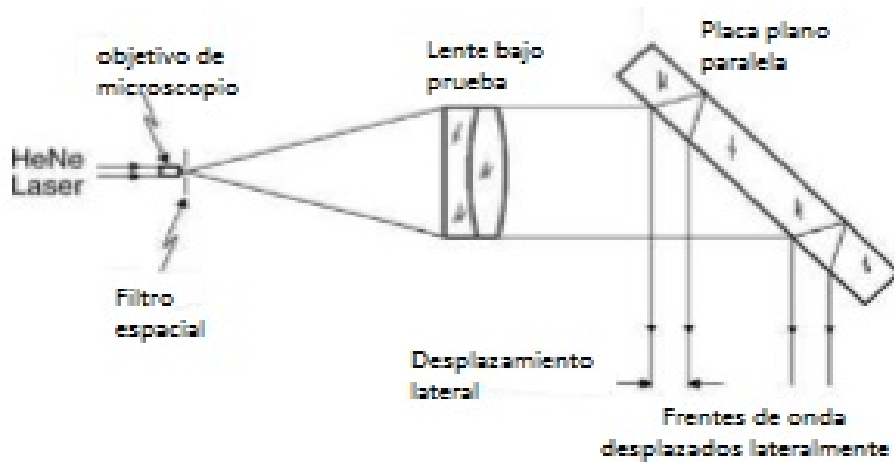


Figura 1.2: Esquema de un interferómetro de desplazamiento lateral con una placa de caras plano paralelas

Como se ve en la figura anterior la luz proveniente de un láser pasa a través de un objetivo de microscopio y de un filtro espacial (pinhole). Posteriormente, la lente bajo prueba colima el haz proveniente de la fuente e incide en una placa de caras plano paralelas inclinada que usualmente no tiene ningún recubrimiento en alguna de sus superficies. La luz es reflejada por la primera y segunda cara de la placa. El espesor de la

CAPÍTULO 1. INTERFERÓMETROS DE DESPLAZAMIENTO

1.1. INTERFERÓMETRO DE DESPLAZAMIENTO LATERAL

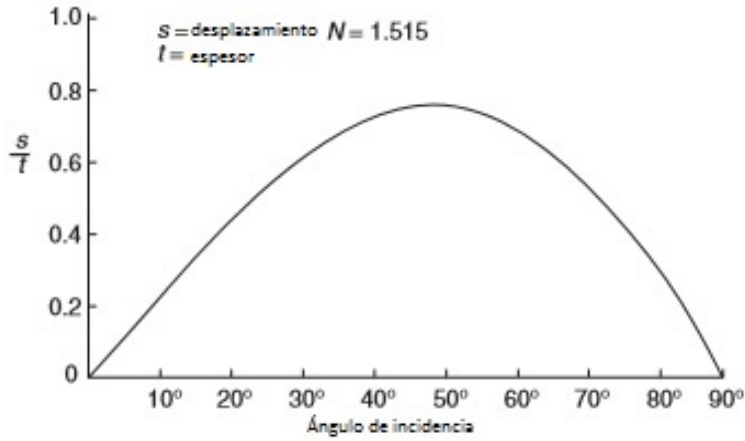


Figura 1.3: Gráfica de la relación de desplazamiento sobre el grosor de la placa ($\frac{S}{t}$) en función del ángulo de incidencia

placa y su índice de refracción producen un desplazamiento en el haz, esto es un desplazamiento lateral. El desplazamiento lateral S para una placa de espesor t , con un índice de refracción n y un ángulo de incidencia θ esta dado por[2]

$$\frac{S}{t} = \sin 2\theta (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}. \quad (1.3)$$

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de $\frac{S}{t}$ respecto al ángulo de incidencia θ para una placa de vidrio con índice de refracción $n = 1,515$ iluminado con luz de $632,8nm$. El ángulos de incidencia se mide de la normal a la superficie del vidrio justo como en la ley de Snell.

1.1.2. Cíclico Lateral

Un interferómetro cíclico se refiere al diseño donde dos haces que viajan en direcciones opuestas, encuentran en su camino los mismos componentes hasta que emergen para formar un patrón de interferencia. La figura 1.4 muestra un esquema de un interferómetro cíclico de configuración triangular.

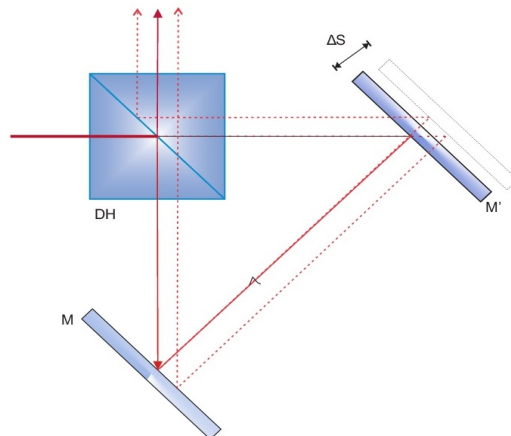


Figura 1.4: Diagrama de un interferómetro cíclico de configuración triangular

CAPÍTULO 1. INTERFERÓMETROS DE DESPLAZAMIENTO

1.2. INTERFERÓMETRO DE DESPLAZAMIENTO RADIAL

Como se observa en la figura anterior el desplazamiento lateral se produce cuando uno de los espejos (M') es desplazado una distancia ΔS perpendicular a la superficie de reflexión.

1.2. Interferómetro de Desplazamiento Radial

En un interferómetro de desplazamiento radial dos imágenes de diferente tamaño del frente de onda se superponen para obtener un patrón de interferencia.

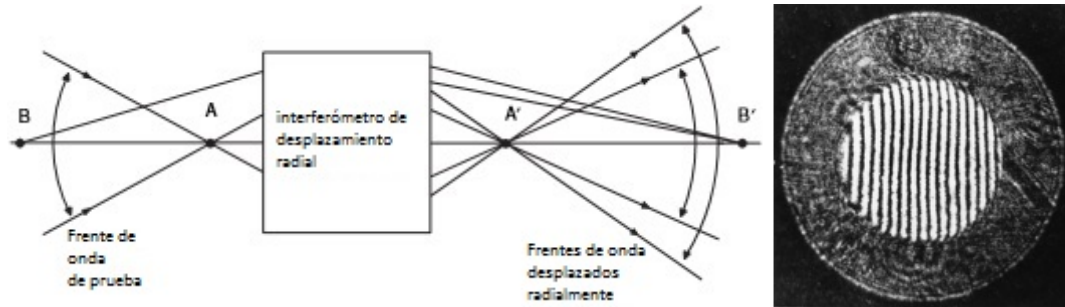


Figura 1.5: Diagrama esquemático que ilustra un interferómetro de desplazamiento radial (izquierda). Patrón de interferencia obtenido por el interferómetro de desplazamiento radial (derecha).

Este interferómetro puede considerarse como un sistema óptico que produce dos imágenes de un objeto situado en A con amplificación diferente en la posición A' . Este tipo de interferómetros muestran directamente las deformaciones del frente de onda, cuando el desplazamiento es grande pero incluso si el desplazamiento es pequeño son mas fáciles de interpretar que los interferómetros de desplazamiento lateral y a diferencia de estos proporcionan información en todas las direcciones, por lo que solo se necesita un interferograma para el estudio del frente de onda bajo prueba.

1.2.1. Cíclico radial

La siguiente figura nos muestra una configuración similar al de la figura 1.4 al que se le han agregado un par de lentes L_1 y L_2 para obtener dos haces de diferente diámetro con lo que se obtiene un interferómetro cíclico de desplazamiento radial. Cabe señalar que si en esta configuración se desplaza uno de los espejos tendremos un sistema que combina ambos interferómetros, el de desplazamiento lateral y el de desplazamiento radial.

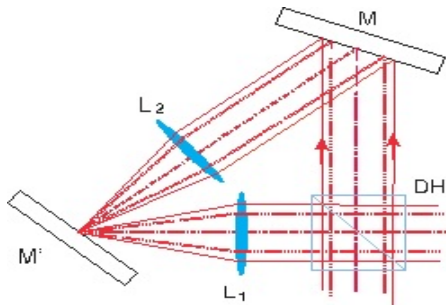


Figura 1.6: Diagrama de un interferómetro cíclico radial

1.3. Anillos de Newton

Los anillos de Newton son franjas de interferencia de igual espesor y pueden ser obtenidas mediante el contacto de una superficie convexa con una plana, formando así una película de aire entre las superficies en contacto, las franjas de interferencia se forman alrededor del punto de contacto, el punto O en la figura 1.7(b).

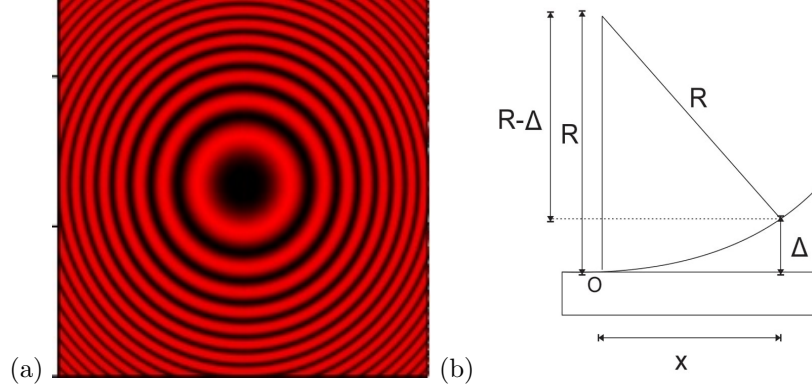


Figura 1.7: (a) Anillos de Newton. (b) Diagrama esquemático para calcular el radio de los anillos de Newton.

El radio de una franja oscura o de una franja brillante puede ser calculado en términos del radio de curvatura de la superficie convexa. En la figura 1.7 (b) el radio de curvatura de la superficie convexa es R y el radio de un anillo de Newton es x podemos relacionar estos parámetros de la siguiente manera:

$$R^2 = x^2 + (R - \Delta)^2 \quad (1.4)$$

por lo tanto

$$x^2 = \Delta(2R - \Delta) \quad (1.5)$$

y dado que $\Delta \ll R$ podemos escribir que

$$\Delta = \frac{x^2}{2R} \quad (1.6)$$

si se asume incidencia normal, entonces el radio para un anillo oscuro esta dado por:

$$x^2 = \frac{mR\lambda}{n}, m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

y el radio para un anillo brillante es:

$$x^2 = \frac{(m + \frac{1}{2})R\lambda}{n}, m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

donde n es el índice de refracción de la película de aire de las superficies en contacto ($n = 1$)

1.4. Método de Mantravadi

M. V. Mantravadi [2], propone un método para medir el índice de refracción de muestras de caras plano paralelas a través de un interferómetro como el que se ilustra en la figura 1.8.

CAPÍTULO 1. INTERFERÓMETROS DE DESPLAZAMIENTO

1.4. MÉTODO DE MANTRAVADI

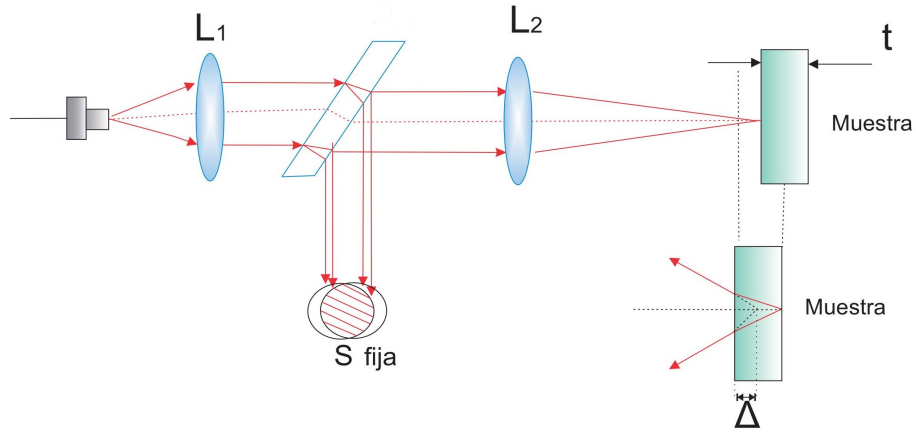


Figura 1.8: Esquema del interferómetro utilizado por Mantravadi para medir el índice de refracción de un material de caras plano-paralelas

En este interferómetro la lente L_2 se mueve de manera que el haz se enfoque en la primera cara y posteriormente enfoque en la segunda cara y así poder obtener la información para determinar el índice de refracción de la muestra, la diferencia entre las dos posiciones es

$$\Delta_m = \frac{t}{n} \quad (1.9)$$

donde t es el espesor de la placa y n es el índice de refracción, si el espesor de la placa es conocido entonces el índice de refracción es determinado fácilmente.

Cabe aclarar que la ecuación 1.9 es valida para el caso paraxial.

Para obtener la ecuación 1.9 nos fijamos en el siguiente esquema

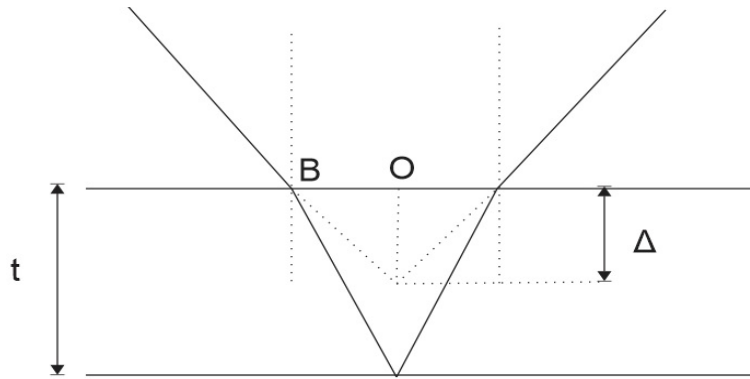


Figura 1.9: Esquema para la deducción de la ecuación 1.9

del esquema se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{OB}{\Delta_m} \\ \tan \theta' &= \frac{OB}{t} \end{aligned}$$

CAPÍTULO 1. INTERFERÓMETROS DE DESPLAZAMIENTO

1.4. MÉTODO DE MANTRAVADI

considerando la aproximación paraxial se obtiene

$$n\theta \approx n \frac{OB}{\Delta_m}$$
$$n' \theta' \approx n' \frac{OB}{t}$$

haciendo uso de la ley de Snell y despejando para Δ_m se obtiene la ecuación 1.9

$$\Delta_m = \frac{nt}{n'} = \frac{t}{n'} \quad \text{si} \quad n = 1$$

Capítulo 2

Interferómetro de placas paralelas

Un haz enfocado en la primera superficie de una placa plano paralela se refleja en ella y genera un segundo haz que se refleja en la segunda cara (fig. 2.1, esquema superior izquierdo). Este segundo haz se expande rumbo a la primera cara y, al salir de ella, se superpone con el haz inicialmente reflejado en esta superficie. Esta superposición produce un patrón de interferencia de muy buen contraste. Otras posibilidades se muestran en la misma figura. Se considerará sólo el esquema descrito.

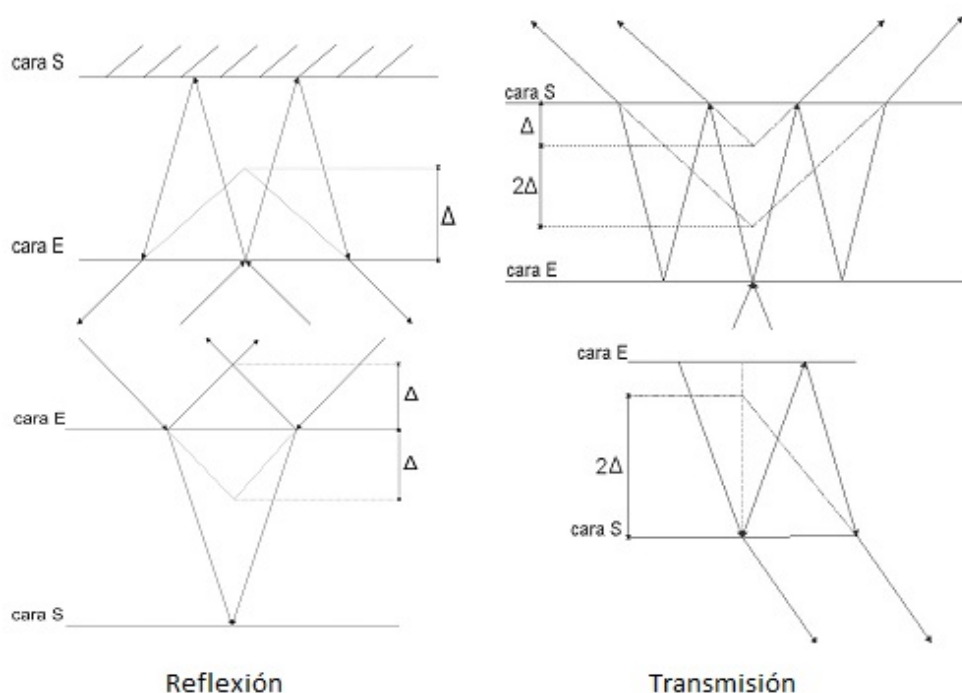


Figura 2.1: Esquemas de haces emergentes de una placa plano paralela

Si el paralelismo entre las caras de la placa es muy bueno (ángulo menor que los tres miliradianes), se tiene un interferómetro de desplazamiento radial. De lo contrario, se tendría un patrón como el generado por la mezcla de desplazamientos radial y lateral. Además no hay compensación en las aberraciones de los haces debido a que solo el segundo cruza por una frontera interdieléctrica plana (esfericidad). Con un buen paralelismo y si la abertura numérica del haz enfocado es baja como para considerarlo paraxial, se

CAPÍTULO 2. INTERFERÓMETRO DE PLACAS PARALELAS

2.1. CÁLCULO DE LA DISTANCIA DE ENFOCAMIENTO EN LA SEGUNDA SUPERFICIE.

puede considerar al patrón como de un interferómetro de desplazamiento puramente radial y compensado. El resultado es un patrón de anillos de Newton formado por dos frentes esféricos de radios de curvatura distintos. Su descripción está en la siguiente sección

2.1. Cálculo de la distancia de enfocamiento en la segunda superficie.

El cálculo de Δ es importante para este trabajo puesto que a partir de esta se hace un modelo de ajuste para poder obtener el índice de refracción correspondiente a cada longitud de onda ocupada con lo cual se obtiene la curva de dispersión lo que finalmente nos llevará a encontrar los coeficientes de Cauchy. Para hacer este cálculo nos apoyamos en el esquema de la figura 2.3:

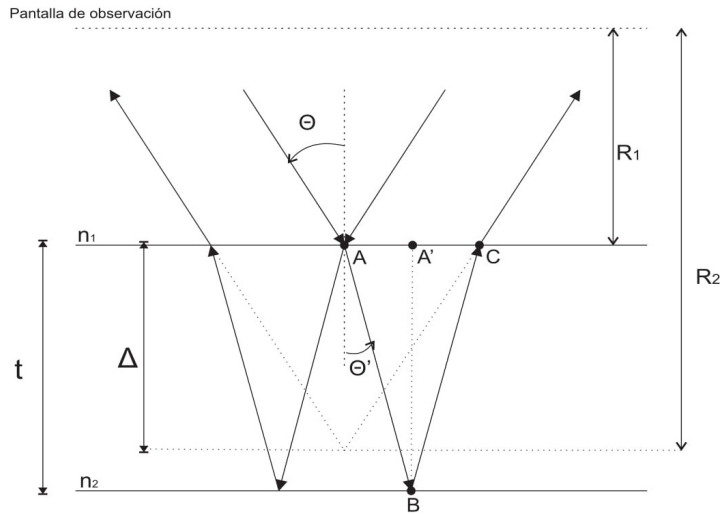


Figura 2.2: Esquema para el cálculo de Δ .

del esquema se observan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \tan\theta' &= \frac{AA'}{t} \\ \tan\theta &= \frac{AC}{\Delta} \\ 2AC &= AA' \end{aligned}$$

de las expresiones anteriores se obtiene lo siguiente:

$$n_2 \frac{AA'}{t} = n_1 \frac{AC}{\Delta} = n_1 \frac{2AA'}{\Delta} \Rightarrow \frac{n_2}{t} = \frac{2n_1}{\Delta}$$

despejando Δ y suponiendo que $n_1 = 1$ se obtiene:

$$\Delta = 2 \frac{t}{n_2} \quad (2.1)$$

Experimentalmente se observan anillos de Newton, por lo tanto podemos hacer una relación entre Δ y los radios de los anillos observados de la siguiente forma. De acuerdo a la ecuación 1.6 y al diagrama 2.3

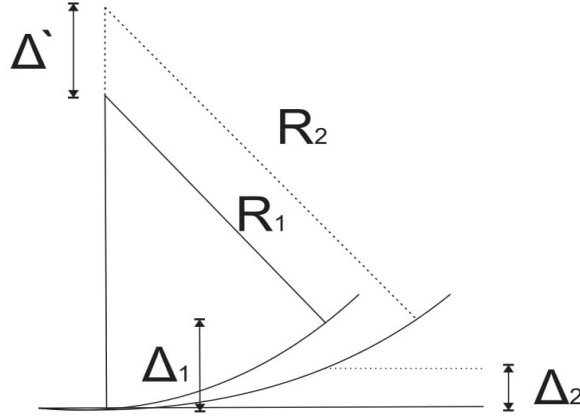


Figura 2.3: Esquema para determinar el radio de los anillos de Newton en presencia de dos frentes de onda esféricos.

se obtiene los siguiente:

$$\Delta_1 = \frac{x^2}{2R_1} \quad y \quad \Delta_2 = \frac{x^2}{2R_2}$$

de lo que se obtiene que:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \frac{x^2}{2R_2} - \frac{x^2}{2R_1} = \frac{x^2}{2R'} = m\lambda + \Delta' \quad \text{donde} \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}$$

por lo que el radio de los anillos esta dado por:

$$x^2 = 2mR'\lambda + 2R'\Delta' = 2mR'\lambda + 2R'\lambda \frac{\Delta'}{\lambda}$$

finalmente reescribiendo la ecuación anterior se tiene:

$$x_m = \sqrt{2R'\lambda} \sqrt{m + \frac{\Delta'}{\lambda}} = A_a (m + B)^2 \quad (2.2)$$

que es la expresión que nos permitirá hacer un ajuste de los radios de los anillos obtenidos experimentalmente.

2.2. Cálculo exacto

Ahora, hagamos un cálculo mas exacto del resultado obtenido en la ecuación 2.1, para ello nos apoyamos en el siguiente esquema.

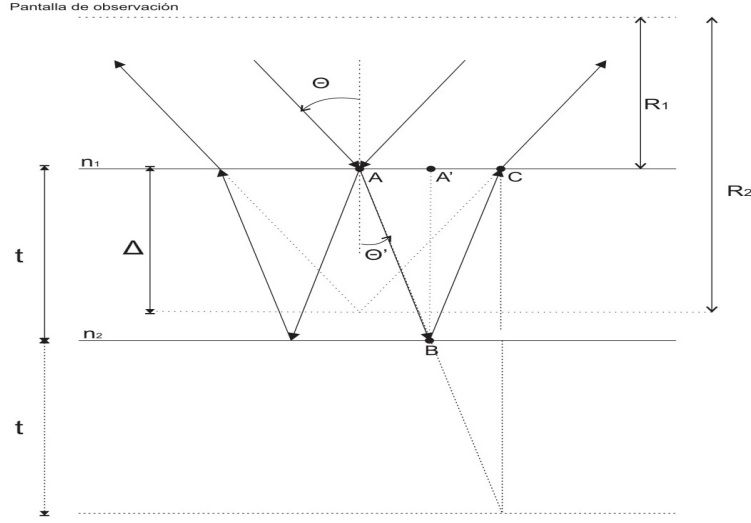


Figura 2.4: Esquema para el cálculo exacto.

del esquema anterior se observan los siguiente:

$$\sin\theta' = \frac{AA'}{\sqrt{(AA')^2 + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{t}{AA'}\right)^2}} = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta$$

$$\left(\frac{n_1}{n_2} \sin\theta\right)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{AA'}\right)^2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{t}{AA'}\right)^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2 \sin^2\theta}$$

$$\left(\frac{t}{AA'}\right)^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2 \sin^2\theta} - 1$$

con lo que finalmente se obtiene que:

$$(AA')^2 = \frac{t^2}{n_1^2 \sin^2\theta - 1} \quad (2.3)$$

de la figura del esquema 2.4 también es claro que se tienen las siguientes relaciones:

$$\sin\theta' = \sin \left[\text{atan} \left(\frac{AC}{2t} \right) \right]$$

$$\sin\theta = \sin \left[\text{atan} \left(\frac{AC}{\Delta} \right) \right]$$

utilizando las expresiones anteriores se obtiene lo siguiente:

$$n_2 \sin \left[\text{atan} \left(\frac{AC}{2t} \right) \right] = n_1 \sin \left[\text{atan} \left(\frac{AC}{\Delta} \right) \right]$$

$$\text{asin} \left\{ \frac{n_2}{n_1} \sin \left[\text{atan} \left(\frac{AC}{2t} \right) \right] \right\} = \text{atan} \left(\frac{AC}{\Delta} \right)$$

$$\frac{AC}{\Delta} = \tan \left\{ \text{asin} \left[\frac{n_2}{n_1} \sin \left(\text{atan} \frac{AC}{2t} \right) \right] \right\}$$

CAPÍTULO 2. INTERFERÓMETRO DE PLACAS PARALELAS

2.2. CÁLCULO EXACTO

con la que finalmente se obtiene:

$$\Delta = AC \left\{ \tan \left\{ \operatorname{asin} \left[\frac{n_2}{n_1} \sin \left(\operatorname{atan} \frac{AC}{2t} \right) \right] \right\} \right\}^{-1} \quad (2.4)$$

la expresión 2.4 nos da información de la distancia de separación entre los puntos de enfocamiento en la primera y segunda superficie de la placa de cara plano paralelas aclarando que esta distancia no es la distancia de separación entre las superficies.

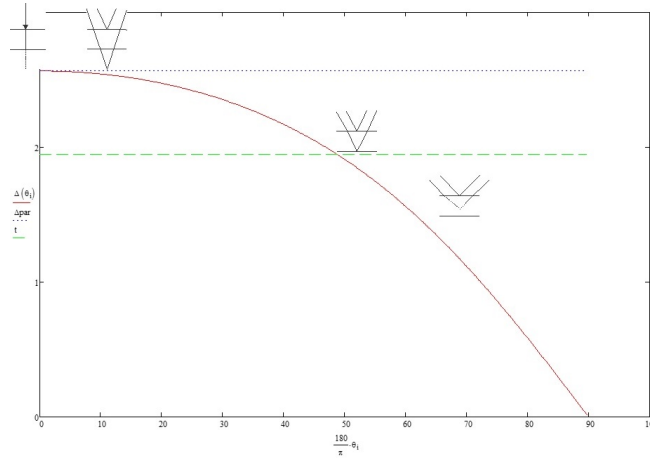


Figura 2.5: Gráfica de la separación entre los puntos de enfocamiento en función del ángulo de incidencia.

La curva de la figura 2.5 muestra el desplazamiento Δ (ligado al desplazamiento lateral de los frentes de onda) en función del ángulo de incidencia, si se compara con la gráfica de la figura 1.4 se observa que ambas figuras muestran una relación muy semejante. Las subgráficas que se ven en la curva representan puntos y regiones de gran interés, que se explican a continuación:

- El punto 0 se refiere a que el segundo punto de enfocamiento se encuentra en un punto indeterminado fuera de la placa plano paralela.
- La intersección de la curva con la línea punteada azul significa que nos encontramos en la región paraxial por lo tanto el segundo punto de enfocamiento se encuentra en una región fuera de las placas pero no tan lejano como en el caso con ángulo de incidencia igual a cero.
- La intersección con la línea punteada verde nos indica el ángulo de incidencia en el cual el segundo punto de enfocamiento se encuentra justo en la segunda cara de la placa plano paralela.
- Después del punto de intersección con la línea punteada verde se muestra la región en la cual el segundo punto de enfocamiento estará entre las caras de la placa plano paralela.

Los valores de la gráfica para $\Delta(\theta)$ tienen un error menor o igual al 0.1 %, para ángulos $\theta = \theta_{par} \leq 3^\circ$. Para el caso paraxial, $\Delta_{par} = \Delta(\theta_{par}) = \frac{n_1}{n_2} 2t$. Esta relación se usará para calcular n_2 , determinando Δ_{par} del patrón de interferencia y con $n_1 = 1$ (aire). La fórmula de Mantravadi para Δ_m es también paraxial ($\Delta_{par} = 2\Delta_m$). La justificación de usar la aproximación paraxial surge también de observar anillos de Newton como patrón de interferencia. De lo contrario, debe suponerse otro tipo de interferograma (como uno basado en el polinomio de aberraciones, por ejemplo).

Capítulo 3

Trabajo experimental

A fin de comprobar la ecuación 2.1 se probaron distintos arreglos experimentales con distintas muestras. Uno de los arreglos experimentales que se probó fue el que se ilustra a continuación:

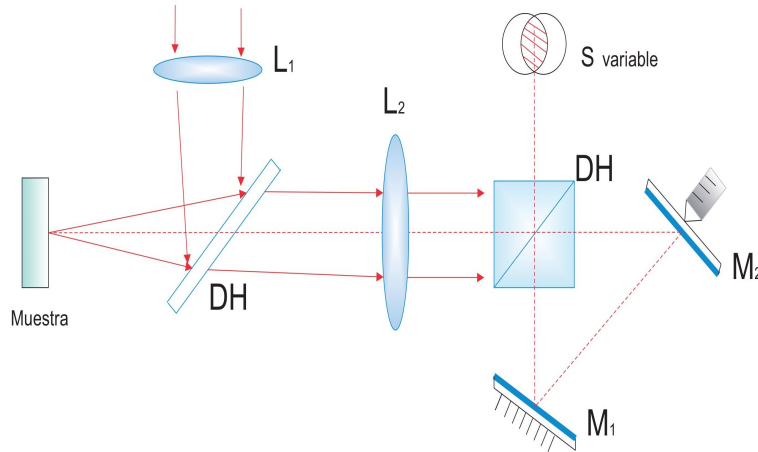


Figura 3.1: Interferómetro de Mantravadi aumentado con un interferómetro cíclico

El esquema de la figura 3.1 muestra una versión alternativa del interferómetro utilizado por Mantravadi (ver figura 1.8). A dicho interferómetro se le agregó un interferómetro cíclico para compensar la aberración de esfericidad que adquiere el haz al atravesar la muestra. El cíclico sustituye a la placa-paralela de Mantravadi. Para este arreglo se utilizó como muestra una placa de vidrio sumergida en agua en la cual incide un haz colimado. Se observa un borde de la muestra de vidrio. No se registra corrimiento de franjas apreciable en ambos lados del borde. Algunos patrones de interferencia obtenidos con un OPO (Optical Parametric Oscillator) se muestran en la figura 3.2.

Sin embargo estos interferogramas no fueron de utilidad puesto que presentaban gran incertidumbre en el procesamiento de datos para calcular Δ_m , por lo tanto se optó por modificar el sistema interferométrico, resultando en el interferómetro que se esquematiza en la figura 3.3.

Con esta configuración se obtienen patrones de interferencia como los que se muestran en la figura 3.4.

El arreglo experimental esquematizado en la figura 3.3 fue el que se utilizó para la obtención de los datos experimentales. Este arreglo experimental se trabajó con una lente colimadora de 2cm de diámetro, la

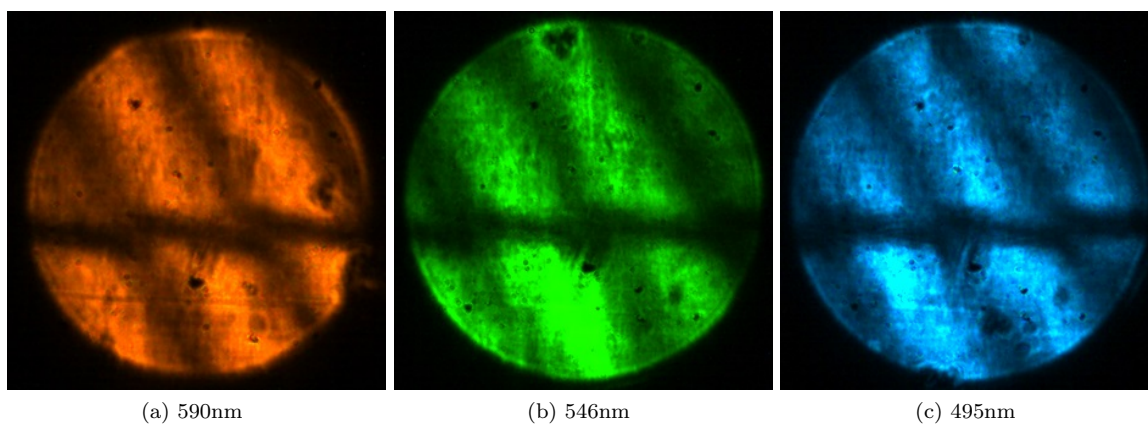


Figura 3.2: Interferogramas obtenidos con distintas longitudes de onda usando un OPO

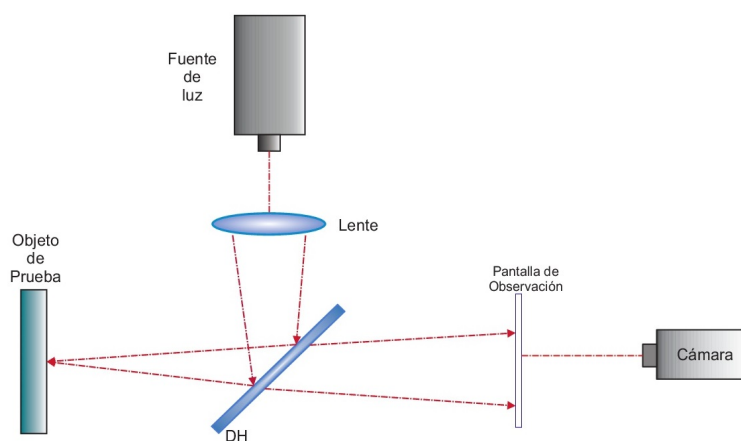


Figura 3.3: Esquema de arreglo experimental para la obtención de datos

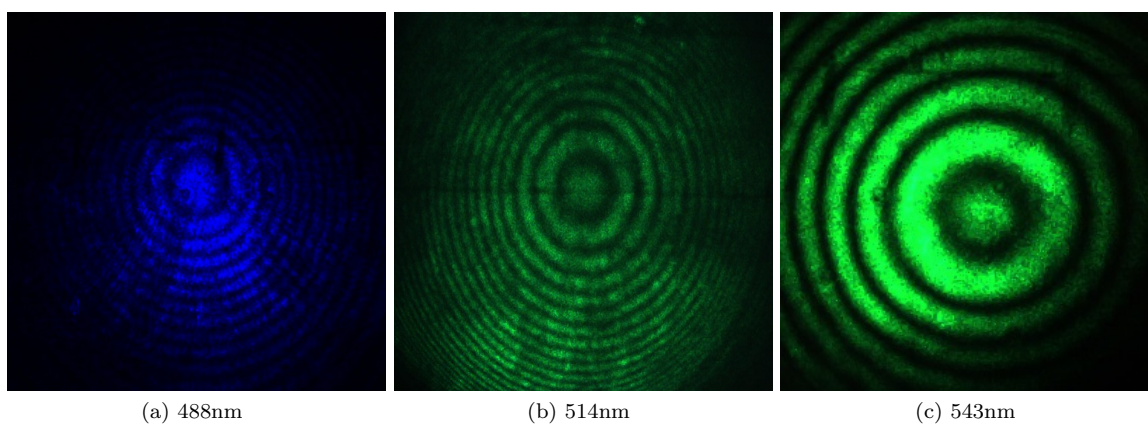


Figura 3.4: Patrones de Interferencia producidos por el esquema de la figura 3.3

CAPÍTULO 3. TRABAJO EXPERIMENTAL

3.1. OBTENCIÓN DE DATOS EXPERIMENTALES Y PROCESAMIENTO

lente de enfocamiento tiene una distancia focal 20cm, por lo que la abertura numérica fue de 0.05 rad o 3° .

3.1. Obtención de datos experimentales y Procesamiento

Una vez montado el arreglo experimental con la muestra que se quiere examinar (se usaron muestras de vidrio soda lime, vidrio BK7 y agua). Se procede a hacer incidir luz de distinta longitud de onda sobre la muestra procurando que el haz se enfoque en la primera superficie de la muestra y se captura el patrón de interferencia resultante para cada una de las longitudes de onda utilizadas.

Una vez obtenidos los patrones de interferencia se hace el procesamiento de estos para obtener los datos necesarios y se hace el ajuste de los datos con la ecuación 2.2 (ver apéndice A) para obtener los radios de los anillos de Newton y conocer el índice de refracción y obtener la curva de dispersión de la muestra bajo prueba.

Una vez que se tiene la curva de dispersión de la muestra se proceden a calcular los coeficientes de Cauchy (ver apéndice B).

3.2. Resultados

3.2.1. Muestra de vidrio Soda Lime

La primera muestra que se utilizó fue de vidrio soda-lime glass (soda-lime-silica glass) el cual es el tipo de vidrio mas frecuentemente utilizado en la fabricación de envases para bebidas y alimentos así como también es utilizado en los vidrios de las ventanas, este tipo de vidrio tiene la siguiente composición:

Compuesto	Porcentaje %
SiO_2	73
Na_2O	14
CaO	9
Al_2O_3	0.15
K_2O	0.03
MgO	4
Fe_2O_3	0.1
TiO_2	0.02

Con la muestra de vidrio Soda Lime con un espesor de 1.9 cm se obtuvieron las siguientes curvas de dispersión.

CAPÍTULO 3. TRABAJO EXPERIMENTAL

3.2. RESULTADOS

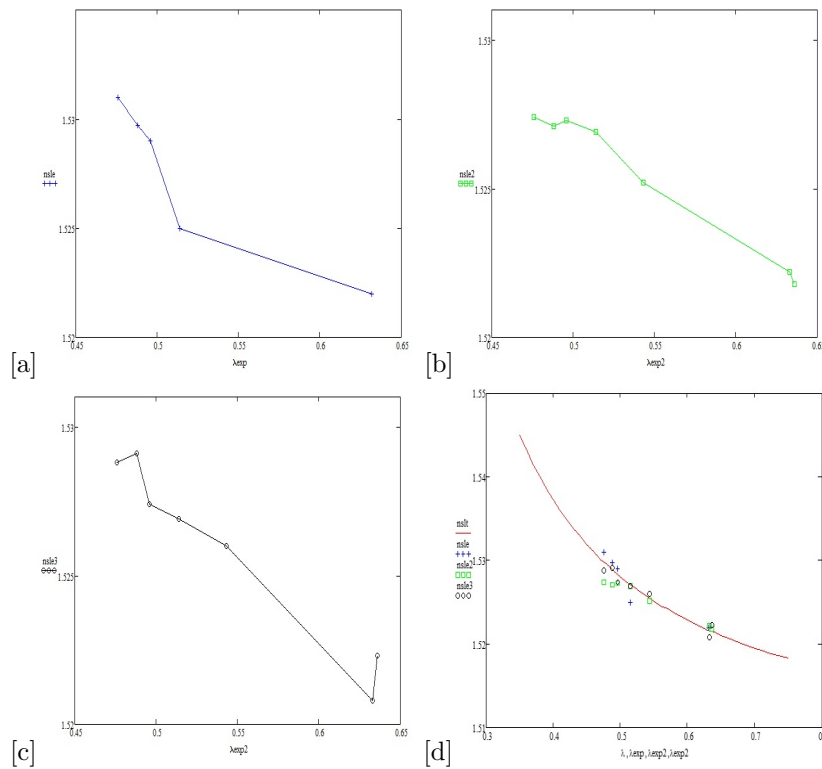


Figura 3.5: Curvas de dispersión obtenidas para una muestra de vidrio soda lime

Las gráficas anteriores muestra las curvas de dispersión ([a], [b], [c]) obtenidas a partir de los datos experimentales, también muestra una comparación entre las curvas obtenidas experimentalmente y la curva de dispersión reportada en la literatura[12] (línea continua roja en [d]).

Los siguiente tabla muestra los resultados del cálculo de los coeficientes de Cauchy obtenidos mediante el programa del apéndice B.

	A	B
Reportado en literatura	1.511	4.181×10^{-3}
Experimental 1	1.51	4.629×10^{-3}
Experimental 2	1.515	3.024×10^{-3}
Experimental 3	1.512	3.918×10^{-3}

Como se observa en la tabla anterior el coeficiente **A** es muy consistente hasta la segunda cifra significativa, para el coeficiente **B** se tiene que la discrepancia para el experimental 1 es de 9%, para el experimental 2 es de 27% y para el experimental 3 es de 6%.

La observación de anillos de Newton indican un excelente paralelismo entre las caras. Esto significa que el proceso de flotación involucrado en su fabricación produce este tipo de paralelismo de modo bastante común.

La observación de varias muestras de vidrio flotado indica que hay un rango de espesores t apropiados para la técnica propuesta. Para índices de refracción cercanos a 1.5 por ejemplo se observan anillos de Newton para espesores mayores de los 3mm y menores de los 2cm. Valores menores fuera de este rango proporcionan patrones de desplazamiento lateral y mayores de este rango usando aberturas numéricas

CAPÍTULO 3. TRABAJO EXPERIMENTAL

3.2. RESULTADOS

pequeñas proporcionan anillos microscópicos antes de que las diferencias de radios de curvatura excedan las longitudes de coherencia de las fuentes usadas, para los casos en que se obtengan anillos microscópicos se pueden usar ampliificaciones altas (de microscopios).

3.2.2. Muestra de vidrio BK7 (vidrio Borosilicatado)

Con una muestra de vidrio BK7 con un espesor de 1.9cm aproximadamente se obtuvo la siguiente curva de dispersión.

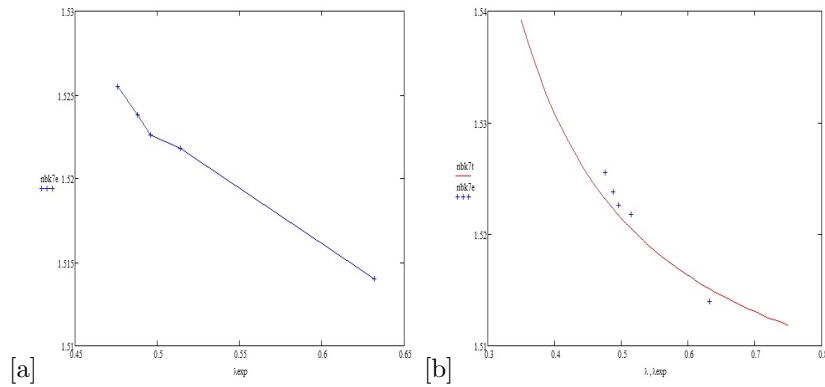


Figura 3.6: Curvas de dispersión obtenidas para una muestra de vidrio BK7

Las gráficas anteriores muestran las curvas de dispersión ([a]) obtenida a partir de los datos experimentales, también muestran una comparación entre la curva experimental y la curva de dispersión reportada en la literatura[11] (línea continua roja en [b]).

La siguiente tabla muestra los resultados del cálculo de los coeficientes de Cauchy obtenidos mediante el programa del apéndice B.

	A	B
Reportado en literatura	1.504	4.237×10^{-3}
Experimental	1.499	5.853×10^{-3}

De la tabla se observa que la discrepancia para el coeficiente **A** es de 0.3 % y para el coeficiente **B** es de 30 %.

3.2.3. Muestra de agua destilada

Con una muestra de agua con una profundidad de 1.1cm se obtuvieron las siguientes curvas de dispersión.

CAPÍTULO 3. TRABAJO EXPERIMENTAL

3.2. RESULTADOS

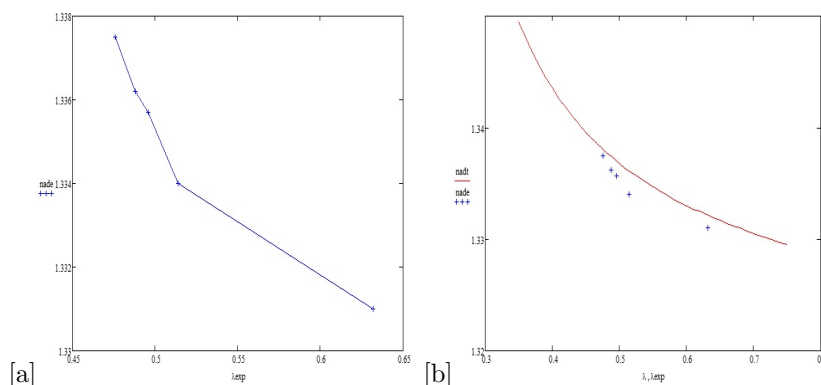


Figura 3.7: Curvas de dispersión obtenidas para una muestra de agua destilada

Las gráficas anteriores muestran la curva de dispersión ([a]) obtenida a partir de los datos experimentales, también muestran una comparación entre la curva experimental y la curva de dispersión reportada en la literatura (línea continua roja en [b]).

Los siguiente tabla muestra los resultados del cálculo de los coeficientes de Cauchy obtenidos mediante el programa del apéndice B.

	A	B
Reportado en literatura	1.324	3.088×10^{-3}
Experimental	1.323	3.234×10^{-3}

De la tabla se observa que la discrepancia para el coeficiente **A** es de 0.07% y para el coeficiente **B** es de 5%.

Los valores del índice de refracción del agua cambian con las condiciones ambientales considerablemente y la curva usada como referencia no tiene los datos de temperatura y presión para una mejor comparación.

La consecución de paralelismo de la superficie del líquido y el fondo no es difícil de lograr mediante una plataforma de inclinación variable. El reflejo del fondo debe ser especular. Si el fondo está hecho de una placa dieléctrica la condición anterior se cumple aunque se introduce otro patrón de interferencia por un reflejo de la segunda cara del fondo. Pero este patrón parásito es de bajo contraste por lo común y puede diferenciarse del de la muestra líquida muy fácilmente.

La estabilidad de la superficie líquida debe cuidarse trabajando en una superficie libre de vibraciones y limitando la influencia perturbadora del aire con cubiertas apropiadas. La altura del nivel del líquido sobre el fondo debe seguir prescripciones en sus valores semejantes a las mencionadas en las placas de vidrio. Ajustar la altura del nivel del líquido para permanecer dentro del rango adecuado no representa problema alguno. Es deseable hacer pruebas con más líquidos.

El modelo de dieléctrico con una interfaz reflectora y transmisora parece ser suficiente para líquidos. Es decir, hay influencia perceptible debida a la película de tensión superficial que requiera la consideración de fronteras adicionales dentro de la precisión del método (al menos para el agua).

3.2.4. Muestra de BGO ($Bi_{12}GeO_{20}$)

Un cristal BGO (o Germanato de Bismuto) es un piezoeléctrico con efectos electro-ópticos y acústico-ópticos por lo que tiene utilidad en la óptica para la fabricación de celdas Pockels, moduladores de luz espaciales, también se usan para la grabación de hologramas en tiempo real. Son de color café y pueden ser obtenidos mediante un proceso de flotación a partir de una mezcla de óxido de bismuto y óxido de germanio.

Para este trabajo experimental se utilizo una muestra de BGO de 2mm de espesor con el que se obtuvieron los siguientes resultados:

La siguiente tabla muestra los índices de refracción obtenidos para cada longitud de onda que se hizo incidir en la muestra.

λ_{nm}	índice de refracción
476	2.75948
480	2.7198
496	2.70924
514	2.6131
632	2.557

La siguiente gráfica muestra la curva de dispersión obtenida para este material.

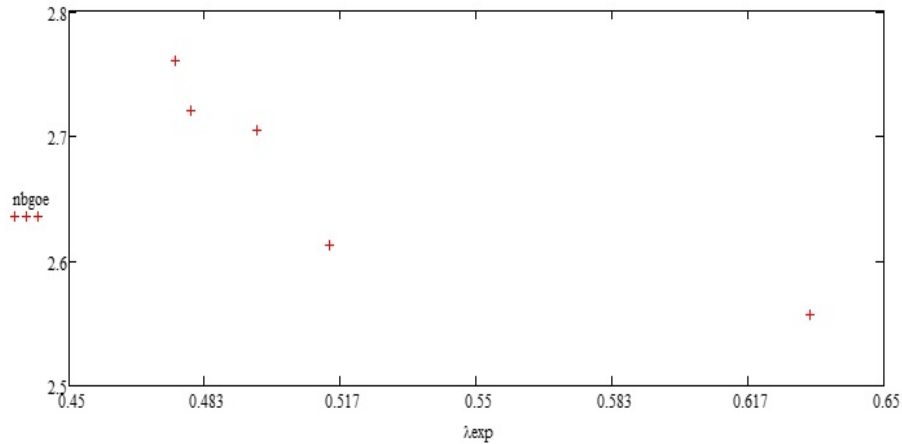


Figura 3.8: curva de dispersión obtenida experimentalmente para una muestra de BGO.

De la curva anterior se obtienen los siguientes coeficientes de Cauchy.

	A	B
Experimental	2.294	0.099

3.2.5. Muestra de placa retardadora (SiO_2 Birrefringente)

Se utilizó como muestra una placa retardadora de $\frac{\lambda}{2}$ de 2mm de espesor hecha de cuarzo el cual presenta birrefringencia. La tabla del cuadro 3.1 muestra índices de refracción para los ejes ordinario (no) y

CAPÍTULO 3. TRABAJO EXPERIMENTAL

3.2. RESULTADOS

extraordinario (ne) reportados en la literatura[9].

	Rojo	Amarillo	Verde	Azul	Violeta
no	1.5409	1.5442	1.5471	1.5497	1.5582
ne	1.5499	1.5533	1.5563	1.5584	1.5677

Cuadro 3.1: Tabla de valores del índice de refracción para los ejes ordinario y extraordinario del cuarzo encontrados en la literatura

La tabla del cuadro 3.2 muestra los valores de los índices de refracción obtenidos experimentalmente para el eje ordinario y el extraordinario.

λ_{nm}	no	ne
476	1.5422	1.55714
480	1.54422	1.55466
496	1.5416	1.5527
514	1.5414	1.557001
632	1.541	1.54933

Cuadro 3.2: resultados experimentales

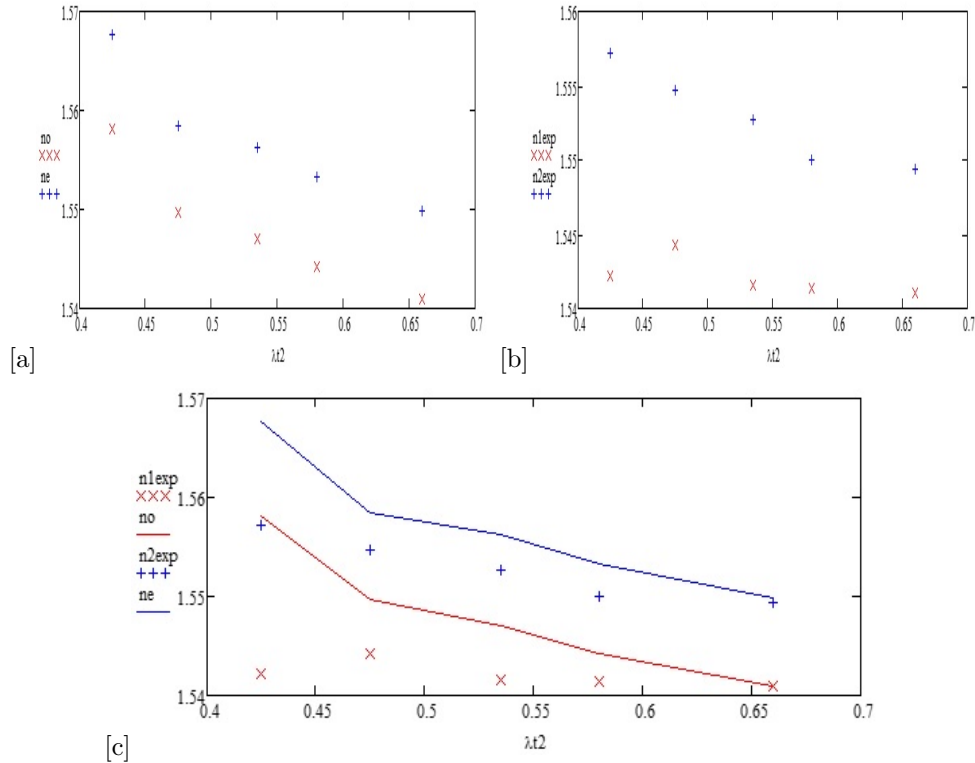


Figura 3.9: [a] curva de dispersión de los valores de no y ne encontrados en la literatura. [b] curva de dispersión de no y ne obtenida experimentalmente. [c] comparación entre los valores reportados en la literatura y los valores obtenidos experimentalmente.

CAPÍTULO 3. TRABAJO EXPERIMENTAL

3.2. RESULTADOS

La gráfica [a] de la figura 3.9 nos muestra dos series de datos el azul corresponde a los valores del índice de refracción en el eje extraordinario y el rojo al eje ordinario. En [b] se tiene la misma situación salvo que ahora las series de datos corresponden a valores encontrados experimentalmente. En [c] se hace una comparación de los datos obtenidos experimentalmente y los datos reportados en la literatura.

De las curvas de dispersión se obtuvieron los siguientes coeficientes de Cauchy.

	A	B
no	1.529	5.106×10^{-3}
ne	1.538	5.194×10^{-3}
noexp	1.538	1.04×10^{-3}
neexp	1.54	3.386×10^{-3}

Conviene aclarar que la muestra consta de dos retardadores de un cuarto segmentados. Esto hace que los resultados no sean representativos de una muestra homogénea y puede explicar la discrepancia observada en las curvas comparativas. Sin embargo la factibilidad del método para medir dispersiones de índices de refracción ordinario y extraordinario queda apoyada. La obtención de muestras homogéneas de cortes apropiados pondría mejor a prueba la efectividad del método propuesto.

Capítulo 4

Conclusiones

- El Método de Murty para calcular n con haces convergentes
 1. Ofrece una fórmula paraxial
 2. Ignora la ausencia de compensación en la aberración de esfericidad del haz que atraviesa la muestra.
 3. Requiere de dos mediciones mediadas por un desplazamiento para obtener un dato (en nuestra versión no se requiere de desplazamiento para obtener un dato)
- Se puede superar el inconveniente 2 con una versión que use un interferómetro cíclico con divisor de cubo y baja abertura numérica, pero nuestro arreglo mostró demasiada tolerancia en la determinación de Δ_m : el criterio de mínima frecuencia de franjas acarrea alta incertidumbre.
- En muestras homogéneas isotrópas con caras plano paralelas ≤ 3 min. arco, aparecen anillos de Newton de excelente contraste. Interpretados según esquema elegido, indican COLINEALIDAD y una diferencia en la aberración de esfericidad despreciable. En muestras cumpliendo ese paralelismo, puede calcularse $n(\lambda)$ con diversas longitudes de onda, pudiéndose determinar los coeficientes de Cauchy hasta en 6% para el coeficiente **B** (preliminarmente). Esta interferencia es como la de un interferómetro de desplazamiento radial prácticamente compensado ya que genera anillos de Newton.
- En muestras homogéneas isotrópas con caras plano paralelas ~ 3 min. arco (o un poco mayor) aparecen patrones tipo interferómetro de desplazamiento lateral (porta objetos). Se interpreta como NO COLINEALIDAD. Entonces, es una interferencia como proveniente de un interferómetro de desplazamientos combinados (radial y lateral). Entonces, se sugiere probar un ajuste del polinomio de aberraciones derivado respecto a la dirección de desplazamiento para determinar n . Es posible que en este caso, la aberración de esfericidad si deba compensarse. Para el eventual ajuste, pudiera bastar una línea del interferograma que pase por su centro.
- El método utilizado no es invasivo y dado que es de una sola medición, lo convierten en un método simple y robusto ya que puede aplicarse a materiales homogéneos transparentes sólidos y líquidos, además de que no solo se aplica a materiales isotrópos, sino también a materiales anisótropos, en especial a aquellos en los que los cortes de sus superficies son los adecuados respecto a sus indicatrices.

Bibliografía

- [1] Castillo C., Aaron. Caracteización de parámetros de dispersión lineal en muestras transparentes homogéneas por zonas con interferometría diferencial y barrido en Lambda, tesis de licenciatura, FCFM, 2014.
- [2] Mantravadi, M.V.R.K, Lateral Shearing Interferometers, Optical Shop Testing, Ed. D. Malacara, Wiley
- [3] Steel, W. H, Interferometry Cambridge Studies in Modern Optics, 2nd ed., sec 4.4. Shearing Interferometers, Cambridge University Press 1967, 1983
- [4] M. Born, E. Wolf, Principles of Optics, séptima edición, 1999
- [5] Hariharan, P. Basics of Interferometry, segunda edición, 2007
- [6] Hariharan, P. y Sen, D. Cyclic Shearing Interferometer, J. Sci. Instrum., 37, 374. (1960)
- [7] Hariharan, P. Lateral and Radial Shearing Interferometers: A Comparison, Appl. Opt, 27, 3594-3596 (1975)
- [8] P.J. Heaney, C.T. Prewitt y G.V. Gibbs, Reviews in Mineralogy, Vol.29, Mineralogical Society of America, 1994
- [9] Ichiro Sunagawa, Hideo Iwasaki, Fumiko Iwasaki, Growth and Morphology of Quartz Crystals: Natural and Synthetic Terrapub, Tokyo, 2009 ISBN 978-4-88704-146-2
- [10] G. M. Hale and M. R. Querry. Optical constants of water in the 200-nm to 200- μ m, wavelength region, Appl. Opt. 12, 555-563 (1973)
- [11] SCHOTT optical glass data sheets 2015-07-22
- [12] M. Rubin. Optical properties of soda lime silica glasses, Solar Energy Materials 12, 275-288 (1985)

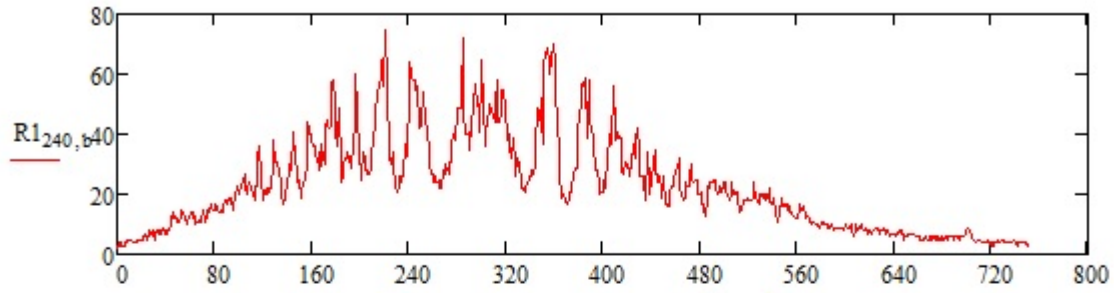
Apéndice A

Programa para el Procesamiento de Datos.

APÉNDICE A. PROGRAMA PARA EL PROCESAMIENTO DE DATOS.

$R1 := \text{READBMP}("C:\Users\Aaron\Desktop\TesisM3\programas T-A\22092016\1fs0002.bmp")$

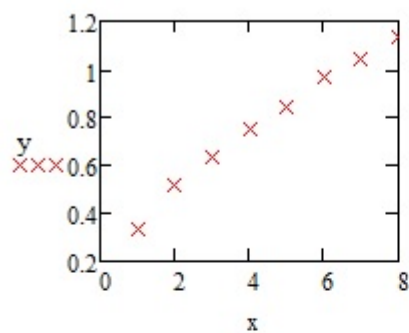
$a := 0.. \text{rows}(R1) - 1 \quad b := 0.. \text{cols}(R1) - 1 \quad a := 451$



$$H := \begin{pmatrix} 395 \\ 363 \\ 343 \\ 323 \\ 308 \\ 286 \\ 274 \\ 258 \end{pmatrix} \quad pp := \begin{pmatrix} |a - a| \\ |H_0 - a| \\ |H_1 - a| \\ |H_2 - a| \\ |H_3 - a| \\ |H_4 - a| \\ |H_5 - a| \\ |H_6 - a| \\ |H_7 - a| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 56 \\ 88 \\ 108 \\ 128 \\ 143 \\ 165 \\ 177 \\ 193 \end{pmatrix} \quad dracm := \begin{pmatrix} \frac{pp_0}{170} \\ \frac{pp_1}{170} \\ \frac{pp_2}{170} \\ \frac{pp_3}{170} \\ \frac{pp_4}{170} \\ \frac{pp_5}{170} \\ \frac{pp_6}{170} \\ \frac{pp_7}{170} \\ \frac{pp_8}{170} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.329 \\ 0.518 \\ 0.635 \\ 0.753 \\ 0.841 \\ 0.971 \\ 1.041 \\ 1.135 \end{pmatrix}$$

$$m := \begin{pmatrix} 1 & H_0 & pp_1 & dracm_1 \\ 2 & H_1 & pp_2 & dracm_2 \\ 3 & H_2 & pp_3 & dracm_3 \\ 4 & H_3 & pp_4 & dracm_4 \\ 5 & H_4 & pp_5 & dracm_5 \\ 6 & H_5 & pp_6 & dracm_6 \\ 7 & H_6 & pp_7 & dracm_7 \\ 8 & H_7 & pp_8 & dracm_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 395 & 56 & 0.329 \\ 2 & 363 & 88 & 0.518 \\ 3 & 343 & 108 & 0.635 \\ 4 & 323 & 128 & 0.753 \\ 5 & 308 & 143 & 0.841 \\ 6 & 286 & 165 & 0.971 \\ 7 & 274 & 177 & 1.041 \\ 8 & 258 & 193 & 1.135 \end{pmatrix}$$

$x := m^{(0)}$ $y := m^{(3)}$



$X := \sqrt{x}$ $Y := y$

Número de puntos de datos:

$n := \text{rows}(x)$ $n = 8$

Desviación estándar:

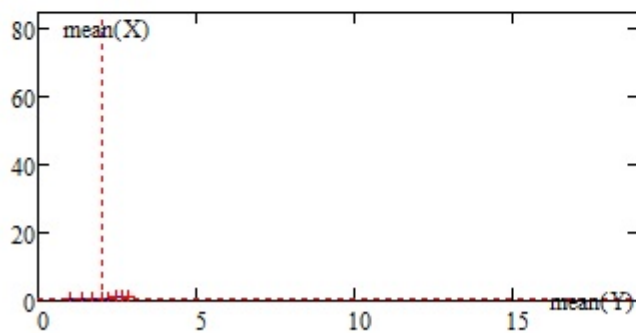
$$SD(x) := \text{stdev}(x) \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

	Coordenadas X	Coordenadas Y
Media	$\text{mean}(X) = 2.038$	$\text{mean}(Y) = 0.778$
Mediana	$\text{median}(X) = 2.118$	$\text{median}(Y) = 0.797$
Desv. estándar	$SD(X) = 0.628$	$SD(Y) = 0.275$
Varianza	$SD(X)^2 = 0.395$	$SD(Y)^2 = 0.075$

Estadísticas de regresión

Intercepto	$b_0 := \text{intercept}(X, Y)$	$b_0 = -0.112$
Inclinación	$b_1 := \text{slope}(X, Y)$	$b_1 = 0.437$
Coefic. de correlación	$\text{corr}(X, Y) = 0.9989$	
R^2	$\text{corr}(X, Y)^2 = 0.998$	
Covarianza	$\text{cvar}(X, Y) = 0.151$	
Error estándar	$\text{stderr}(X, Y) = 0.014$	
Gráficos	$r(x) := b_0 + b_1 \cdot x$	$\text{scale} := \max(r(X) - Y) \cdot 1.1$

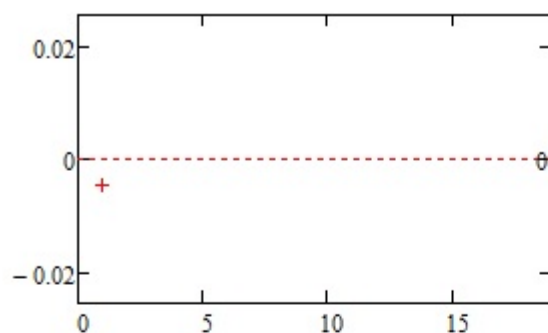
Regresión lineal de Y en X



+++ Datos X-Y

.... Ajuste de mínimos cuadrados

Gráfico residual

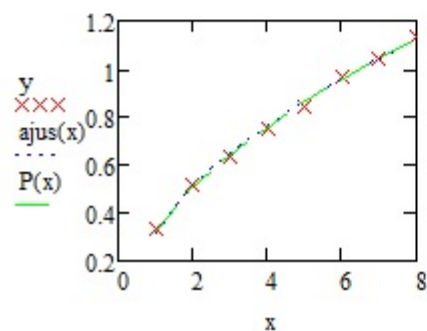


$$ll(c, Ap, Bp) := \begin{bmatrix} Ap \cdot (c + Bp)^{\frac{1}{2}} \\ (c + Bp)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{Ap}{2 \cdot (c + Bp)^{\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}$$

$$guess := \begin{pmatrix} .5 \\ .1 \end{pmatrix}$$

$$aj := \text{genfit}(x, y, guess, ll) \quad aj = \begin{pmatrix} 0.403 \\ -0.375 \end{pmatrix} \quad ajus(x) := aj_0 \cdot (x + aj_1)^{\frac{1}{2}}$$

$$P(x) := b_0 + b_1 \cdot \sqrt{x}$$



APÉNDICE A. PROGRAMA PARA EL PROCESAMIENTO DE DATOS.

$$R1 := 56 \quad b_1 = 0.437 \quad aj_0 = 0.403$$

$$R_p := \frac{(b_1)^2}{2 \cdot (6.328 \cdot 10^{-5})} \quad R_{pp} := \frac{(aj_0)^2}{2 \cdot (6.328 \cdot 10^{-5})}$$

$$R2p := \left(\frac{1}{R1} - \frac{1}{R_p} \right)^{-1} \quad R2pp := \left(\frac{1}{R1} - \frac{1}{R_{pp}} \right)^{-1}$$

$$\Delta := R2p - R1 = 2.163 \quad \Delta1 := R2pp - R1 = 2.551$$

$$np := 2 \cdot \frac{(1.95)}{\Delta} = 1.803 \quad npp := 2 \cdot \frac{(1.95)}{\Delta1} = 1.529$$

$$Nmc := \frac{np + np2 + np1 + np3 + np4 + np5 + np6 + np8 + np9 + np7}{10} = 1.79705$$

$$Npol := \frac{npp + npp1 + npp3 + npp4 + npp5 + npp6 + npp2 + npp8 + npp9 + npp7}{10} = 1.52718$$

$$dmc := \frac{\Delta + \Delta m1 + \Delta m2 + \Delta m3 + \Delta m4 + \Delta m5 + \Delta m6 + \Delta m7 + \Delta m8 + \Delta m9}{10} = 2.17$$

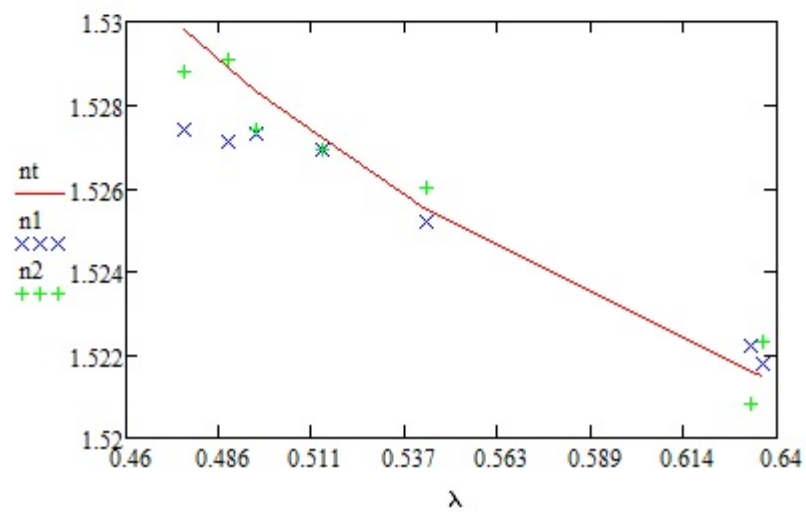
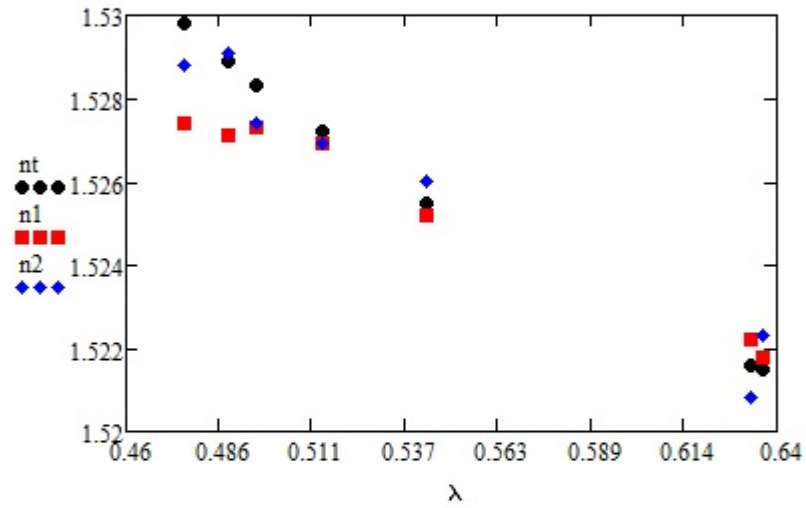
$$dpol := \frac{\Delta + \Delta m11 + \Delta m22 + \Delta m33 + \Delta m44 + \Delta m55 + \Delta m66 + \Delta m77 + \Delta m88 + \Delta m99}{10} = 2.515$$

Apéndice B

Obtención de coeficientes de Cauchy

$$n := \begin{pmatrix} .476 & 1.5298 & 1.5274 & 1.5288 \\ .488 & 1.5289 & 1.5271 & 1.5291 \\ .496 & 1.5283 & 1.5273 & 1.5274 \\ .514 & 1.5272 & 1.5269 & 1.5269 \\ .543 & 1.5255 & 1.5252 & 1.526 \\ .633 & 1.5216 & 1.5222 & 1.5208 \\ .636 & 1.5215 & 1.5218 & 1.5223 \end{pmatrix}$$

$$\lambda := n^{(0)} \quad nt := n^{(1)} \quad n1 := n^{(2)} \quad n2 := n^{(3)}$$



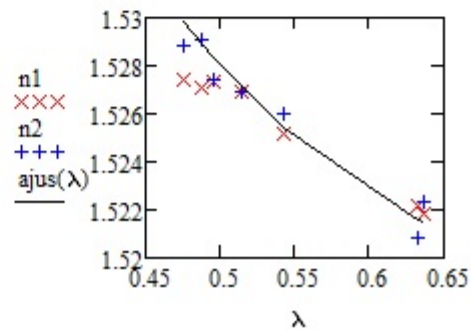
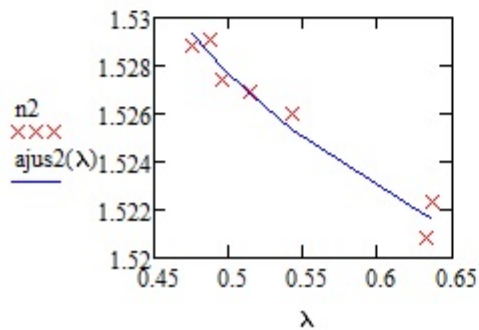
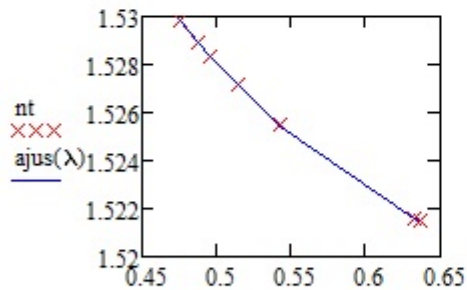
$$C(\lambda, A, B) := \begin{pmatrix} A + \frac{B}{\lambda^2} \\ 1 \\ \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{guess} := \begin{pmatrix} .5 \\ .1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ajt} := \text{genfit}(\lambda, \text{nt}, \text{guess}, C) \quad \text{ajt} = \begin{pmatrix} 1.511 \\ 4.28 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \text{ajus}(x) := \text{ajt}_0 + \frac{\text{ajt}_1}{x^2}$$

$$\text{aj1} := \text{genfit}(\lambda, \text{n1}, \text{guess}, C) \quad \text{aj1} = \begin{pmatrix} 1.515 \\ 3.024 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \text{ajus1}(x) := \text{aj1}_0 + \frac{\text{aj1}_1}{x^2}$$

$$\text{aj2} := \text{genfit}(\lambda, \text{n2}, \text{guess}, C) \quad \text{aj2} = \begin{pmatrix} 1.512 \\ 3.918 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \text{ajus2}(x) := \text{aj2}_0 + \frac{\text{aj2}_1}{x^2}$$



⌋