



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

**“RESTAURACIÓN DE IMÁGENES DIGITALES QUE
PRESENTAN EMBORRONAMIENTO Y RUIDO”**

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

PRESENTA:

ASTRID VIRIDIANA RAMÍREZ HERNÁNDEZ

ASESOR:

M.C. LUIS RENÉ MARCIAL CASTILLO



ENERO 2018

Gracias a mis padres y hermanos, responsables de lo que soy como persona, de los magníficos valores humanos que me han transmitido, de la fortaleza y la gran mentalidad trabajadora que he aprendido de ellos.

Gracias a mi asesor de tesis M.C. Luis René Marcial Castillo, a Dra. María de Lourdes Sandoval y a M.C. Marcela Rivera Martínez por el compromiso, tiempo y ayuda otorgada.

Gracias a todos mi amigos que cuando he necesitado de ellos han estado ahí de forma incondicional.

DEDICATORIA

A:

Dios

Por permitirme concluir una etapa más en mi vida.

Mis padres

Oscar y Arcelia, porque soy lo que soy por ellos, por la confianza, amor y apoyo.

Mis hermanos

Edgar y Lesly por hacer de cada momento algo inigualable.

Mis sobrinas

Gretel y Mariand, por demostrarme y enseñarme grandes lecciones de valor, responsabilidad y bondad a tan corta edad.

Tabla de contenido

1. Introducción y objetivo	1
1.1 Introducción a la restauración digital de imágenes	1
1.2 Conceptos de la restauración digital de imágenes	3
1.2.1 Emborronamiento y ruido	3
1.2.2 Representación de las imágenes.....	4
1.3 Objetivo y organización de la Tesis.....	6
1.4 Objetivos	7
1.4.1 Objetivos generales	7
1.4.2 Objetivos específicos.....	7
2 Paradigma bayesiano	8
2.1 Introducción.....	8
2.2 Conceptos Básicos.....	9
2.2.1 Paradigma bayesiano	9
2.2.2 Parámetro.....	9
2.2.3 Probabilidad a priori.....	9
2.2.4 Probabilidad a posteriori	9
2.2.5 Verosimilitud	9
2.3 Fundamentos	10
2.3.1 Teorema de Bayes	10
2.3.2 Estimador máximo a posteriori (MAP)	10
2.4 Descripción de la Estimación Bayesiana.....	11
3 Campos aleatorios Markovianos	12
3.1 Introducción.....	12
3.2 Etiquetado	13
3.3 Vecindarios	14
3.4 Cliques	15
3.5 Campo aleatorio y características locales	15

4	Programación no lineal sin restricciones	17
4.1	Introducción	17
4.2	Optimización	18
4.3	Condiciones necesarias y suficientes	19
4.4	Búsqueda lineal	19
4.5	Direcciones de búsqueda para métodos con búsqueda lineal	20
4.5.1	Dirección de mayor descenso	20
4.5.2	Gradientes conjugados	20
5	Algoritmo de restauración	22
5.1	Introducción	22
5.2	Emborronamiento	23
5.2.1	Emborronamiento por movimiento lineal uniforme	23
5.2.2	Emborronamiento por desenfoque uniforme	23
5.2.3	Emborronamiento uniforme bidimensional	24
5.2.4	Emborronamiento por turbulencia atmosférica	24
5.2.5	Emborronamiento Gaussiano	25
5.2.6	Emborronamiento por dispersión	25
5.3	Ruido	25
5.3.1	Ruido uniforme	26
5.3.2	Ruido de sal y pimienta	27
5.3.3	Ruido Gaussiano	27
5.4	Modelo de ruido y emborronamiento	29
5.5	Métodos de búsqueda lineal	31
5.5.1	Método de máximo descenso	31
5.5.2	Método de gradientes conjugados	32
6	Pruebas	34
6.1	Introducción	34
6.2	Experimento 1	36
6.3	Experimento 2	38
6.4	Experimento 3	40
6.5	Experimento 4	42

7 Conclusiones	44
7.1 Resumen.....	44
7.2 Conclusiones.....	45
7.3 Trabajos futuros	45
8 Bibliografía	46

Capítulo 1

Introducción y objetivo

1.1 Introducción a la restauración digital de imágenes

En los años de 1950 y 1960 se dió inicio a programas espaciales, tanto de los Estados Unidos como de la Unión Soviética, en los cuales, la principal misión era obtener imágenes de la tierra y otros planetas, facilitando así futuros viajes. Debido a las grandes limitaciones que existían por parte de las naves espaciales y los diferentes factores que disminuían la calidad de las imágenes se dió lugar a una nueva área de investigación conocida como *Restauración de imágenes* [17].

La *Restauración de imágenes digitales* es un campo de la ingeniería que estudia los métodos empleados para recuperar una imagen original a partir de unas observaciones degradadas [5].

Por el coste elevado que tenía el procesar millones de bits contenidos en una imagen, las primeras etapas de esta nueva disciplina fueron consideradas

como un lujo en ciertas áreas de aplicación, aunque los primeros algoritmos tuvieron muy buenos resultados mejorando notoriamente la calidad de las imágenes.

Con el tiempo, los algoritmos se fueron adaptando a la evolución de los equipos de cómputo así como de los equipos de adquisición de imágenes.

Su importancia radica en que es un campo de especial interés para varias disciplinas, tales como: matemáticas, astronomía, medicina, biología, geología, historia entre otras.

Un ejemplo de ello son las industrias del cine o la publicidad donde es común la necesidad de restaurar imágenes que, por el paso del tiempo y/o falta de cuidado se encuentran en un estado deteriorado. Dentro del campo del arte esta misma necesidad surge con determinadas obras.

En la astronomía, una de las aplicaciones más destacadas y que fue factor para el cambio en la consideración de esta ciencia, fue la puesta en órbita del telescopio espacial Hubble en 1990 y el problema hallado en un espejo que presentaba aberración esférica lo que provocaba imágenes desenfocadas y un fracaso en una inversión de casi 2000 millones de dólares [5][10]. Este hecho impulsó a la contribución de algoritmos para la solución a los defectos de las imágenes, un ejemplo de estos, es el algoritmo Richardson-Lucy aplicado sobre la figura 1.

Es así que su uso se extiende a diferentes disciplinas e industrias y su desarrollo ha aumentado enormemente en los últimos 40 años.

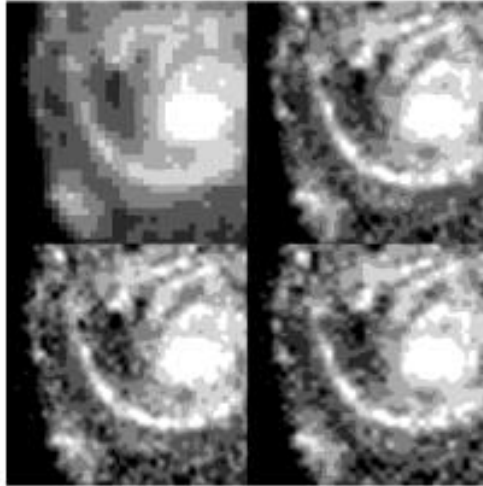


Figura 1. Restauración mediante el algoritmo Richardson-Lucy [5]

1.2 Conceptos de la restauración digital de imágenes

Antes de comenzar con la parte formal de este estudio es conveniente conocer ciertos datos que permitan tener una idea clara de cuál es la metodología más conveniente a emplear en el tratado de una imagen digital. Para dicho tratado la herramienta a usar serán las matemáticas, es por ello que se dará a conocer la forma en que será modelada la imagen y definiciones de degradación, como son el ruido y el emborronamiento.

Se tiene que tener en cuenta que la computadora y los algoritmos que se implementan sobre las imágenes digitales también tienen un papel muy importante en la manipulación de las imágenes.

1.2.1 Emborronamiento y ruido

La degradación de una imagen se debe a dos factores ambientales: *el ruido* y *el emborronamiento*, el cual está dado por [14][8]:

$$g = Hf + n, \quad (1.1)$$

donde:

g , f y n , son vectores columnas de tamaño $p \times 1$, con $p = mxn$

g , representa a la imagen emborronada y ruidosa con la que se parte.

f , es la imagen objetivo, a la cual se quiere llegar después de una restauración.

n , es el modelo de ruido, para este trabajo se emplea el ruido Gaussiano con media cero y varianza de forma $\sigma_w^2 = \beta^{-1}$.

H , representa la matriz de emborronamiento; esta se genera a partir de un filtro lineal e invariante a traslación siendo H de dimensión $(m \times n) \times (m \times n)$ pudiendo ser conocida o no, todo depende del método que se utiliza para realizar la restauración de la imagen.

Las imágenes son de tamaño $m \times n$ con $p = m \times n$.

1.2.2 Representación de las imágenes

El objetivo principal cuando se adquiere cualquier tipo de imagen, es poder representarla de manera que se sea capaz de procesar el tipo de información que la imagen proporciona.

Una imagen puede representarse matemáticamente como una función bidimensional $f(x, y)$, donde x y y son la representación de las “coordenadas espaciales” y la amplitud de f en cualquier par de coordenadas (x, y) es llamada intensidad o escala de grises de la imagen en ese punto. El término “escala de grises” es utilizado de una manera continua para referirse a la intensidad de las imágenes monocromáticas.

Se le llama “imagen digital” a la imagen cuando los valores de amplitud de x, y y f son cantidades discretas. Esto es posible mediante un proceso de “muestreo” y “cuantización” en la imagen, a este proceso se le conoce también con el nombre de “digitalización de la imagen” [21].

Una imagen digital es una imagen $f(x, y)$ que ha sido discretizada tanto en coordenadas espaciales como en luminosidad. Una imagen digital puede ser considerada como una matriz cuyos índices de renglón y columna identifican un punto (un lugar en el espacio bidimensional) en la imagen y el

correspondiente valor de elemento de matriz identifica el nivel de gris en aquel punto.

El resultado del muestreo y cuantización es una matriz de M filas y N columnas, y como en la teoría de matrices se le llama una matriz de $M \times N$, los valores de las coordenadas (x, y) de la imagen son convertidos en valores discretos y por claridad y conveniencia se utilizan números enteros para representar estos valores [1].

Para lograr la restauración de una imagen se tienen diversas técnicas de naturaleza matemática, en la que una imagen se descompone y se representa como un conjunto de datos manipulables (ver figura 2), donde cada coordenada representa la posición de los pixeles contenidos en la imagen, esto para la realización de diferentes operaciones, tales como:

- Modificación de algunas formas.
- Eliminación de ruido.
- Extraer información.
- Realzar, suavizar o detectar bordes.

Entre otras.

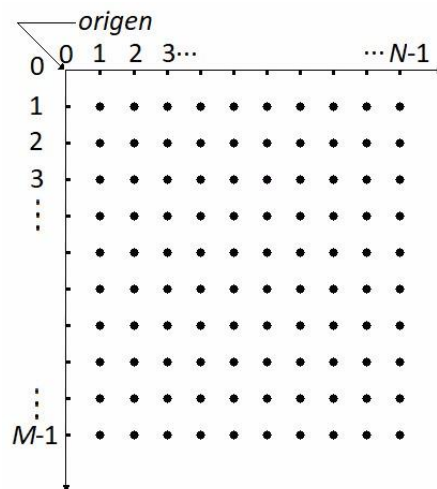


Figura 2. Representación de una Imagen digital en un plano [21]

Cada elemento en la imagen tiene un valor en particular, este número está relacionado con la temperatura de un circuito integrado, el valor asignado a cada elemento es convertido a una “escala de grises”, en donde el menor valor es representativo del negro y el valor más alto representa el color blanco, los valores intermedios son distintos niveles de grises [8].

En general, una imagen se puede considerar como una matriz, en donde cada elemento de esta representa un pixel de la imagen.

1.3 Objetivo y organización de la Tesis

El presente trabajo describe las técnicas usadas así como los resultados obtenidos en el proyecto de tesis dentro de la restauración digital de imágenes. En particular, la investigación se dirigió a la eliminación del ruido y emborronamiento en imágenes digitales creando un modelo de restauración basado en la estimación bayesiana y campos aleatorios Markovianos.

El esquema de la tesis es el siguiente:

El capítulo dos describe de forma detallada las etapas que forman el paradigma bayesiano, que es la base matemática en la que se apoyan las probabilidades de soluciones candidatas a este modelo de restauración. Se proporcionará una breve introducción de algunos conceptos matemáticos que ayudarán al entendimiento del tema.

En el tercer capítulo trata sobre los campos aleatorios Markovianos, su asociación con la distribución a priori y la aplicación en los posibles valores de cada pixel.

El cuarto capítulo se concentra en el estudio de la optimización sin restricciones, los métodos de máximo descenso y gradientes conjugados, los cuales ayudarán posteriormente a encontrar el mínimo de la función objetivo mediante una técnica de optimización no lineal.

En el capítulo cinco se muestra el modelo de restauración utilizado, así como la justificación de su obtención y los modelos de minimización generados en la implementación del algoritmo.

Dentro del capítulo seis se realizarán pruebas a distintas imágenes a color para comprobar y medir resultados.

En el capítulo siete se extraen las conclusiones de investigación y se plantean en base a los resultados obtenidos las mejoras obtenidas, así como trabajos futuros.

Finalmente, se listan las referencias que ayudaron en la investigación de este trabajo.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivos generales

Generar una aplicación que permita resolver un problema de restauración de imágenes digitales.

1.4.2 Objetivos específicos

Al analizar el problema de la restauración de imágenes, se mostrará:

- Entender la técnica de estimación bayesiana y enfocarla a la solución de problemas en el campo de la restauración digital.
- Entender los campos aleatorios Markovianos con el fin de construir el modelo de restauración digital.
- Diseñar el algoritmo de restauración.
- Implementar el algoritmo usando el lenguaje de programación MATLAB.
- Realizar las pruebas con imágenes a color.

Capítulo 2

Paradigma bayesiano

2.1 Introducción

El problema principal de la restauración de imágenes es obtener f , es decir, la imagen ideal a partir de una imagen que presenta ruido, imagen g . Para conseguir una buena estimación de la imagen original, los algoritmos de restauración digital necesitan incorporar conocimiento *a priori* sobre los tres elementos principales del modelo: el emborronamiento, el ruido y la propia imagen original.

En este capítulo se va a estudiar fundamentalmente cómo el modelo bayesiano actúa en la restauración de imágenes digitales.

La descripción del modelo de imagen empleado en este trabajo se aborda de manera específica en el capítulo 5.

La estructura del capítulo es la siguiente:

- Para lograr una mejor comprensión se comenzará con una inducción general de los conceptos principales.
- En el apartado 2.3 se sustentan las bases que permitirán realizar este trabajo.
- Para terminar, en la sección 2.4 se justifica la elección de la estadística bayesiana.

2.2 Conceptos Básicos

2.2.1 Paradigma bayesiano

El paradigma Bayesiano es un método de razonamiento aproximado, es decir, simula la capacidad de razonamiento en condiciones de incertidumbre, cuando no se conoce con absoluta certeza la verdad o falsedad en un enunciado o hipótesis.

Éste paradigma está basado en el teorema de Bayes, en donde se busca obtener las probabilidades de la hipótesis de independencia incondicional entre hipótesis y evidencia [3].

2.2.2 Parámetro

Un parámetro es visto como una variable aleatoria a la que, antes de la evidencia muestral, se le asigna una distribución a priori de probabilidad, con base en un cierto grado de creencia con respecto al comportamiento aleatorio. Cuando se obtiene la evidencia muestral, la distribución *a priori* es modificada y entonces surge una distribución *a posteriori* de probabilidad.

2.2.3 Probabilidad a priori

Dada una cantidad p desconocida, la distribución de probabilidad a priori es donde se parte antes de efectuar un experimento que pueda arrojar nueva información sobre dicha probabilidad, expresa alguna incertidumbre acerca de p antes de tomar en cuenta los "datos"[15].

2.2.4 Probabilidad a posteriori

Es aquella probabilidad que consiste en encontrar el valor después de repetirse el experimento un número considerable de veces [15].

2.2.5 Verosimilitud

Permite realizar inferencias acerca de su valor a partir de un conjunto de observaciones [15].

2.3 Fundamentos

2.3.1 Teorema de Bayes

El teorema de Bayes permite determinar las probabilidades a posteriori y revisar probabilidades previamente calculadas cuando se posee nueva información [15] [26].

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)} \quad (2.1)$$

donde:

$P(A_i)$, es la probabilidad a priori.

$P(B/A_i)$, es la probabilidad condicional.

$P(B)$, representa la probabilidad total.

$P(A_i/B)$, es la probabilidad a posteriori.

2.3.2 Estimador máximo a posteriori (MAP)

Una que vez que se definen los elementos necesarios para realizar el análisis basado en el paradigma bayesiano $p(\alpha, \beta, f, g)$, se puede realizar este análisis en la moda a posteriori (MAP). Este análisis realiza la estimación de la imagen y los hiperparámetros de forma simultánea integrando $p(\alpha, \beta, f, g)$ sobre los hiperparámetros, α y β , para obtener la verdadera verosimilitud y maximizando esta verosimilitud en f [13].

La definición del estimador máximo posteriori se obtiene a través de la siguiente ecuación:

$$\hat{F} = \mathit{arg}_F(\mathit{máx} P_{F|G}(F)) \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) es muy empleada en el procesamiento digital de imágenes, con ella se obtienen los parámetros más probables.

Dado que se pueden encontrar una gran cantidad de valores que se aproximen a la función objetivo, es necesario introducir el conocimiento a priori de la imagen f , es decir, se deben poner restricciones en A (representado en la figura 3).

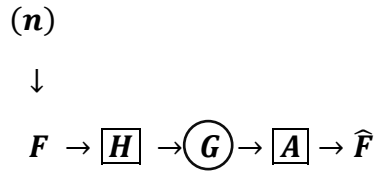


Figura 3. Modelo de restauración de una imagen [18]

En la figura 3 F representa la imagen inicial; H el dispositivo de adquisición; n el ruido introducido; G la imagen resultante; A el filtro para eliminar el ruido, \hat{F} la imagen restaurada.

2.4 Descripción de la Estimación Bayesiana

El paradigma Bayesiano se ha empleado en muchas áreas con relación al análisis de imágenes gracias a que se basa en una aproximación estadística y se integra el uso de información a priori sobre las imágenes que estamos tratando.

Los métodos bayesianos parten de una distribución a priori, ésta distribución es donde se incorpora información sobre la estructura esperada en una imagen y la combina con información proveniente de los datos de la imagen observada por el sistema de captación para construir la probabilidad a posteriori de f dada g .

Los pasos a seguir son los siguientes [3]:

1. Definir la función de verosimilitud $P_{G|F}(F) = P_n(G - H_F)$.
2. Definir la distribución a priori $P_F(F)$.
3. Resumir la información de la Regla de Bayes para obtener la distribución a posteriori.
4. Definir la función de costo $C(F, \hat{F})$.
5. Encontrar el estimador Bayesiano óptimo.

Capítulo 3

Campos aleatorios Markovianos

3.1 Introducción

En este capítulo se estudia el uso de los campos aleatorios Markovianos como modelo a priori de las imágenes en problemas de restauración de imágenes.

Como se vió en los elementos del paradigma Bayesiano, el conjunto de imágenes \hat{f} resultante es bastante grande, es por ello que generar restricciones a la probabilidad a priori es fundamental si se quiere que éste conjunto sólo considere como posibles soluciones aquellas imágenes que tengan una mayor probabilidad de ser f , esto puede ser posible mediante los campos aleatorios Markovianos.

Los campos aleatorios Markovianos habitualmente se usan para etiquetar y segmentar secuencias de datos o extraer información de documentos, proporcionan medidas de probabilidad sobre un dominio ya sean espaciales o contextuales.

Para esta tesis se trabaja con relaciones de tipo espacial, ya que, al realizar un cambio al valor de un punto en f , se busca considerar los valores de sus vecinos y no sólo el valor en sí.

3.2 Etiquetado

Para lograr un óptimo modelado de los campos aleatorios Markovianos es necesario plantear el problema como un problema de etiquetado, es decir, la configuración de cada etiqueta significará una solución.

Dentro de la terminología de campos aleatorios, un conjunto específico de etiquetas recibe el nombre *configuración* [16].

Cada píxel recibe el nombre de *site*. Cuando todos los *sites* tienen el mismo conjunto posible de etiquetas de D (conjunto de etiquetas que puede tomar cada *site*), al conjunto de todas las configuraciones recibe el nombre del *espacio de configuraciones* [9].

Se pueden distinguir dos factores que determinan la probabilidad de una configuración:

- La probabilidad a priori de cada estado.
- La conjunta con sus vecinos.

Una *etiqueta* no es más que una clasificación que se asigna a los píxeles de la imagen especificándolas dentro de un conjunto de estados y un conjunto de etiquetas, visto de otra manera, una malla de puntos, donde el estado de cada punto depende del estado de sus vecinos[9].

En el caso de las imágenes digitales, la distribución geométrica de los píxeles corresponde a una malla o rejilla denominada *lattice*.

Sea d un conjunto discreto de m estados

$$d = \{1, \dots, m\} \quad (3.1)$$

Se define D como un conjunto de etiquetas, que serán asignadas a cada estado en d .

Una etiqueta puede ser continua o discreta. En el caso de ser continua, como el cálculo de profundidad en un par de imágenes estereoscópicas, el valor de la etiqueta asignado a i está dentro de un intervalo real, es decir:

$$f_i \in D = [x_i, x_r] \quad (3.2)$$

Si la etiqueta es continua existe un número infinito de etiquetas.

En el caso de las etiquetas discretas, por ejemplo, en la segmentación de una imagen en 5 clases, se asume un valor discreto, es decir,

$$f_i \in D = [1, \dots, m] \quad (3.3)$$

Sea $F = \{F_1, \dots, F_m\}$ una familia de variables aleatorias definidas en d , donde cada variable aleatoria F_i toma valores D . Una intersección de eventos $F_1 = \{f_1, \dots, F_m = f_m\}$, abreviado como $F = f$ es una ejecución de F donde $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ es llamada una configuración de F . Una configuración puede representar una imagen. Para el conjunto de todas las configuraciones es:

$$S = \underbrace{D^m}_{m \text{ veces}} = D \times D \times \dots \times D \quad (3.4)$$

El espacio de soluciones posibles puede ser idéntico a S o si son impuestas restricciones adicionales, un subconjunto de S . Una configuración de f puede ser interpretada como una de las dos siguientes formas [12]:

- Como un mapeo $f: d \rightarrow D$, o como un etiquetado $\{f_1, \dots, f_m\}$ de los estados.
- Un conjunto de estados puede ser categorizado en términos de su homogeneidad y un conjunto de etiquetas en términos de su continuidad, bajo estos términos podemos clasificar los etiquetados en cuatro niveles:

Nivel 1. Estados homogéneos con etiquetas continuas.

Nivel 2. Estados homogéneos con etiquetas discretas.

Nivel 3. Estados no homogéneos con etiquetas continuas.

Nivel 4. Estados no homogéneos con etiquetas discretas.

La restauración de imágenes en escala de grises, pertenece al nivel 1. Un conjunto d de estados corresponden a los pixeles en la imagen y un conjunto D de etiquetas es un intervalo real.

3.3 Vecindarios

Un sistema de vecindad para S se define como [12]:

$$V = \{V_i | A_i \in S\} \quad (3.5)$$

Y tiene que cumplir con las siguientes dos propiedades:

- Un sitio no es vecino de sí mismo.
- La relación de vecindad es mutua.

Se pueden tener diferentes “vecindades” (primer orden, segundo orden, etc.)

Para una malla regular, la vecindad de orden i con radio r se define como:

$$V_i = \{ v_i \in S \mid \text{dist}(i, v_i) \leq r \} \quad (3.6)$$

donde

$\text{dist}(x, y)$ es la distancia euclidiana entre x e y .

r es un número entero.

Con base en esto se introduce el concepto de conectividad, que constituye una relación de vecindad espacial entre un *site* y sus próximos vecinos. En un sistema de vecindad de primer orden, cada sitio (interior) tiene 4 vecinos, en uno de segundo orden, 8 vecinos: en uno de tercer orden, 12 vecinos etc.

3.4 Cliques

El par (d, N) formado por el conjunto de *sites* S y la vecindad N constituye un grafo. La vecindad establece la relación de los nodos formados por los *sites*. Un clique c para (d, N) es un subconjunto de píxeles en d tal que c consiste de un solo estado $c = \{i\}$, o un par de estados vecinos $c = \{i, j\}$, o tres estados vecinos $c = \{i, j, k\}$, y así sucesivamente [12].

3.5 Campo aleatorio y características locales

Un campo aleatorio es una colección de variables indexadas por sitios [12].

Se considera un conjunto de variables aleatorias $F = \{F_1, \dots, F_m\}$, asociadas a cada sitio del sistema de sitios S . Cada variable toma un valor f_i de un conjunto de posibles valores L . Entonces, F es un campo aleatorio.

Un campo aleatorio de Markov es un campo con la propiedad de “localidad”.

Debe satisfacer las siguientes propiedades:

- $P(f) > 0$ – *positivo*
- $P(f_i | f_s - i) = P(f_i | \text{vec}(f_i))$ (3.7)

donde

$\text{vec}(f_i)$ son los vecinos de f_i .

Ahora bien, para un campo aleatorio se puede definir un tipo de probabilidad condicionada denominada característica local del campo definida para $A \subseteq S$ como:

- Las características locales siempre están definidas gracias a la propiedad de positividad de los campos aleatorios. Dicha propiedad, dice que cualquier subimagen tendrá una probabilidad con valor positivo, que depende del resto de la imagen.
- Las dependencias en S en general son locales, es decir, que en una imagen un píxel va a depender de los píxeles cercanos.

Capítulo 4

Programación no lineal sin restricciones

4.1 Introducción

En este capítulo se hablará de los tópicos de visión computacional que permitirán construir el modelo de restauración de imágenes digitales y posteriormente encontrar su minimizador mediante una técnica de optimización no lineal, de este modo se obtendrá la restauración digital de la imagen ruidosa que se nos presente.

Dicha optimización es de gran importancia ya que se trabajará con la caracterización y localización de máximos y mínimos en funciones no lineales para la selección del mejor elemento.

Para tener un enfoque claro se comenzará definiendo la teoría de la optimización, la cual es una rama aplicada que estudia la solución de problemas cuantitativos [9], es decir, en los que se pretende obtener un resultado numérico.

Según la naturaleza de los datos, de las variables tiempo, de los objetivos del problema, linealidad, entre otros factores, existen diferentes modelos de optimización [19]:

- Modelos deterministas.
- Modelos estocásticos.

- Modelos estáticos.
- Modelos dinámicos.
- Modelos de un único objetivo.
- Modelos multiobjetivos.
- Modelos lineales y no lineales.
- Modelos continuos.
- Modelos discretos.

Por lo cual, es importante reconocer las características de un problema para identificar una técnica apropiada de solución.

4.2 Optimización

Un problema de optimización puede ser representado como [9]:

Dada una función $f: A \rightarrow R$.

Buscar un elemento x_0 en A tal que

$f(x_0) \leq f(x)$ para todo x en A (minimización) o tal que

$f(x_0) \geq f(x)$ para todo x en A (maximización).

Típicamente, A es algún subconjunto del espacio euclídeo R^n , con frecuencia delimitado por un conjunto de restricciones, igualdades o desigualdades que los elementos de A tienen que satisfacer. El dominio A de f es llamado el espacio de búsqueda o el conjunto de elección, mientras que los elementos de A son llamados soluciones candidatas o soluciones factibles.

Los métodos de programación no lineal tratan de resolver lo siguiente:

$$\min_{x \in R^n} f: R^n \rightarrow R \quad (4.1)$$

donde

f , es una función de valores reales con derivadas continuas de orden 2 que se desea minimizar y recibe el nombre de función objetivo o función de costo.

Definición:

Sea $f: R^n \rightarrow R$ una función definida en $\Omega \subseteq R^n$. Un punto $x^* \in \Omega$ es un **minimizador local** de f en Ω si existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(x^*)$ para toda $x \in \Omega \setminus \{x^*\}$ y $\|x - x^*\| < \varepsilon$.

Sea $f: R^n \rightarrow R$ una función definida en $\Omega \subseteq R^n$. Un punto $x^* \in \Omega$ es un **minimizador global** de f en Ω si $f(x) \geq f(x^*)$ para toda $x \in \Omega \setminus \{x^*\}$.

Observación:

Si en las dos definiciones anteriores reemplazamos \geq con $>$ se tiene un minimizador local estricto o minimizador global estricto.

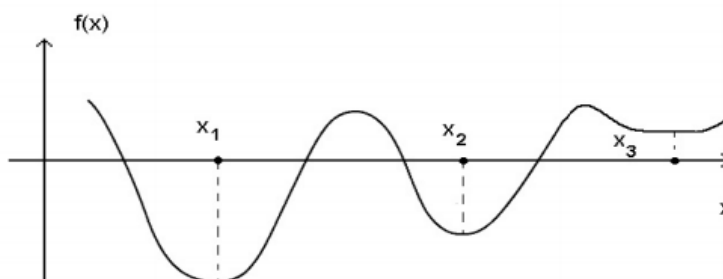


Figura 4. Ejemplos de mínimos: x_1 mínimo global, x_2 mínimo local estricto, x_3 mínimo local no estricto.

4.3 Condiciones necesarias y suficientes.

Para comprobar si un punto dado es mínimo o no se declararán condiciones algebraicas. Estas condiciones son [7]:

1. Condición necesaria de primer orden.

Si x^* es un mínimo local y f es continuamente diferenciable en una vecindad abierta de x^* , entonces $\nabla f(x^*) = 0$.

2. Condición necesaria de segundo orden

Si x^* es un mínimo local de $f(x)$, entonces $\nabla^2 f(x^*) = H(x)$ es semidefinida positiva.

3. Condición suficiente de segundo orden

Si $\nabla^2 f(x^*)$ es definida positiva, entonces x^* es un mínimo local.

Cuando la función objetivo es convexa, los mínimos locales y globales son fáciles de caracterizar.

4.4 Búsqueda lineal

Una de las herramientas básicas para la minimización de problemas por medio de técnicas iterativas es la búsqueda lineal.

Con la búsqueda lineal lo que se pretende es encontrar una serie de soluciones prueba que conduzcan hacia una solución óptima en cada iteración, a través de las iteraciones se realiza una búsqueda que culmina en la identificación de una nueva solución prueba mejorada.

Es aquí donde se elige un punto inicial, una dirección de movimiento y se realiza una búsqueda lineal para determinar el siguiente paso. El algoritmo elige una dirección descendente d_k , busca a lo largo de esa dirección desde el punto actual a un nuevo punto con menor valor de la función objetivo. En cada nuevo punto se calcula una nueva dirección descendente de búsqueda y un nuevo paso y se repite el proceso hasta que se encuentre un mínimo.

4.5 Direcciones de búsqueda para métodos con búsqueda lineal

Como se mencionó en el apartado anterior, una vez elegido el punto inicial es hora de definir la dirección de movimiento y esto se hará de acuerdo a algún algoritmo, dicho algoritmo dará a la función objetivo una dirección en la que se reduzca.

Una dirección de descenso d está definida como una a través de la cual la derivada direccional es negativa [11].

$$g(x)^T d < 0, \quad (4.2)$$

De donde se puede escribir la siguiente aproximación:

$$f(x + \alpha d) - f(x) \approx \alpha g(x)^T d, \quad (4.3)$$

con lo anterior se asegura que un valor menor para la función puede ser encontrado por medio de d para α suficientemente pequeño.

Existen diversos métodos para la elección de la dirección de búsqueda. A continuación se listan los empleados en este trabajo para determinar la dirección de descenso d_k :

4.5.1 Dirección de mayor descenso

La dirección de d_k , de entre todas las direcciones en las que puede haber movimiento desde x_k donde f decrece más de prisa, es denotado por [11]:

$$d_k = -\nabla f(x_k) \quad (4.4)$$

4.5.2 Gradientes conjugados

Es un método iterativo que busca minimizar funciones cuadráticas convexas $R^n \rightarrow R$, resolviendo un problema algebraico $Ax = b$, donde la matriz A es simétrica y definida positiva.

En este caso la dirección tiene la forma [7]:

$$d_k = -\nabla f(x_k) + \beta_k d_{k-1} \quad (4.5)$$

donde:

β_k , es un escalar que asegura que d_k y d_{k-1} son conjugados, es decir, que d_k y d_{k-1} con respecto a una matriz A son iguales a 0, con $d_k \neq d_{k-1}$.

Capítulo 5

Algoritmo de restauración

5.1 Introducción

Como se vió, la finalidad de este trabajo de tesis es la eliminación del ruido y emborronamiento por medio de un modelo de restauración que ha sido obtenido utilizando estimación bayesiana y campos aleatorios Markovianos.

Para llegar a la solución es necesario la optimización de la función objetivo, esto será logrado por medio del máximo descenso y gradientes conjugados.

Se dará un breve recorrido por los tipos de ruido y emborronamiento más utilizados con el objetivo de reunir los elementos necesarios para definir el modelo del que se partirá para obtener la función objetivo.

5.2 Emborronamiento

Son varias las fuentes deterministas que producen el emborronamiento, así como muchos los tipos, a continuación se resumen los más comunes.

5.2.1 Emborronamiento por movimiento lineal uniforme

Se pueden distinguir muchos tipos de emborronamiento por movimiento, debido al movimiento relativo entre el dispositivo de captación y el objeto. Este movimiento puede aparecer en forma de traslación, rotación o por un repentino camino de escala o cualquier combinación de estas causas. Aquí sólo se estudiará el caso de traslación (movimiento lineal uniforme).

Cuando el objeto se traslada a velocidad constante, V , bajo un ángulo dado, φ durante el intervalo de exposición $[0, T]$, la distorsión es unidimensional [5]. Denotado por:

$$h(i, j; L, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{si } \sqrt{j^2 + i^2} \leq L/2 \text{ y } i/j = -\tan \varphi \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.1)$$

En este caso, la función de dispersión de punto (*psf*) espacialmente invariante, aunque también se puede dar el caso en que sólo una parte de la imagen esté sometida al movimiento de traslación, en cuyo caso la distorsión general será obviamente espacialmente variante.

5.2.2 Emborronamiento por desenfoque uniforme

Cuando una escena tridimensional es captada mediante una cámara en un plano bidimensional, algunas partes de la escena se encuentran en el foco, mientras que otras no pueden encontrarse en él. El grado de desenfoque dependerá de la longitud focal, de la apertura de la lente y de la distancia entre la cámara y el objeto.

Si el grado de desenfoque es grande en relación a las longitudes de onda consideradas, se puede emplear una aproximación geométrica que da lugar a una distribución de intensidad uniforme. La *pfs* de este emborronamiento por desenfoque uniforme con radio R está dado por [21]:

$$h(i, j; R) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{si } \sqrt{i^2 + j^2} \leq R \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.2)$$

5.2.3 Emborronamiento uniforme bidimensional

Ésta es una forma severa de degradación por emborronamiento que aproxima el emborronamiento por desenfoque y se emplea en un gran número de simulaciones. Su expresión es [21]:

$$h(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{L^2}, & \text{si } -\frac{L}{2} \leq i, j \leq \frac{L}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.3)$$

5.2.4 Emborronamiento por turbulencia atmosférica

El emborronamiento se produce en teledetección y astronomía debido al cambio en las condiciones de refracción de la atmosfera terrestre. Debido a que el emborronamiento producido depende de múltiples factores como la temperatura, el tiempo de exposición o las condiciones meteorológicas, no se puede conocer una expresión analítica que describa la forma de la *pfs* [21]. Sin embargo, estudios previos [18] [14] han sugerido una aproximación radialmente simétrica de la forma:

$$h(r) = \left\{ \frac{\beta/\pi R^2}{[1 + (\frac{r}{R})^2]^\beta} \propto [1 + (\frac{r}{R})^2]^{-\beta} \right\} \quad (5.4)$$

donde:

r , es la distancia de la fuente al píxel receptor.

R y β , son parámetros que se pueden estimar a partir de fuentes puntuales que contenga la imagen [3].

5.2.5 Emborronamiento Gaussiano

Algunas fuentes [21] aproximan el emborronamiento por turbulencia atmosférica mediante una función gaussiana:

$$h(i, j) = C_{exp} \left\{ -\frac{i^2 + j^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (5.5)$$

Esta aproximación se puede emplear para exposiciones prolongadas, algo frecuente en observaciones astronómicas. C es una constante de normalización y σ determinará la severidad del emborronamiento [21].

5.2.6 Emborronamiento por dispersión

Las imágenes de rayos X muestra la distinta cantidad de radiación absorbida por el objeto que estaba siendo irradiado. Sin embargo, parte de la emisión también resulta dispersada de su camino de incidencia, dando lugar a una distribución de radiación alrededor de un punto. Hay muchos factores que intervienen en la $pdfs$ resultante de esta dispersión, aunque para los rangos de energía empleados en diagnóstico médico ésta se puede describir como [21]:

$$h(i, j) = \frac{1}{\beta^2 + (i^2 + j^2)^{3/2}} \quad (5.6)$$

donde:

β determina la severidad del emborronamiento.

5.3 Ruido

El ruido en las imágenes se manifiesta como un aumento en la brillantez de algunos pixeles más que en otros, es un problema común y complicado de resolver. El ruido puede estar presente en diferentes formas, de acuerdo al agente que lo genere.

Entre las formas más comunes se encuentran:

5.3.1 Ruido uniforme

El ruido uniforme se modela de acuerdo a una distribución estadística en particular, la distribución uniforme es una distribución de probabilidad cuyos valores tienen la misma probabilidad. La función de densidad del ruido uniforme está dada por la siguiente ecuación:

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq z \leq b \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (5.7)$$

La media y la varianza para esta función de densidad están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\mu = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (5.8)$$

La gráfica de la función de densidad del Ruido Uniforme es mostrada en la figura 5.

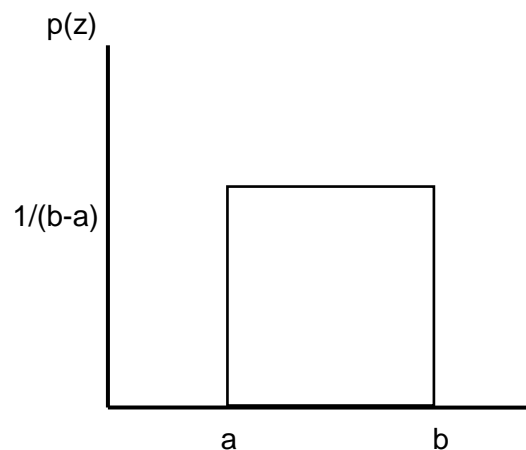


Figura 5. Densidad Ruido Uniforme [21]

El ruido puede utilizarse para generar cualquier tipo de distribución de ruido y es comúnmente utilizado con el fin de degradar imagen para la evaluación de algoritmos de restauración de imágenes digitales.

5.3.2 Ruido de sal y pimienta

Es causado principalmente por fallas en el funcionamiento de los sensores encargados de capturar una imagen o por errores de tiempo cuando se produce el proceso de digitalización de la imagen. Su función de densidad está dada por la ecuación:

$$p(z) = \begin{cases} P_a & \text{para } z = a \\ P_b & \text{para } z = b \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (5.9)$$

Si $b > a$, puntos claros aparecerán en la imagen y si $b < a$, aparecerán puntos oscuros corrompiendo la imagen. En el caso de que P_a y P_b sean cero, el ruido recibe el nombre de “unipolar” y si ninguna de las probabilidades es cero y sí son aproximaciones iguales, la imagen se encontrara contaminada por puntos claros y oscuros, es por ello que recibe el nombre de “Sal y Pimienta”.

5.3.3 Ruido Gaussiano

Se le llama gaussiano debido a que la distribución del ruido es semejante a una distribución gaussiana de una determinada media y varianza. Puede decirse que esta distribución es la distribución continua de probabilidad más importante en todo el campo de la estadística y su curva describe con mucha exactitud muchos de los fenómenos que ocurren en la naturaleza, entre estos se encuentran los efectos del ruido en una imagen dada. Los modelos de ruido basados en esta distribución son utilizados frecuentemente debido a su conveniencia matemática. El ruido gaussiano tiene una función de densidad dada por la ecuación [8]:

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (5.10)$$

donde:

z , representa el nivel de gris.

μ , es la media de valor de z .

σ , es la desviación estándar.

La gráfica de la distribución gaussiana se muestra en la Figura 6

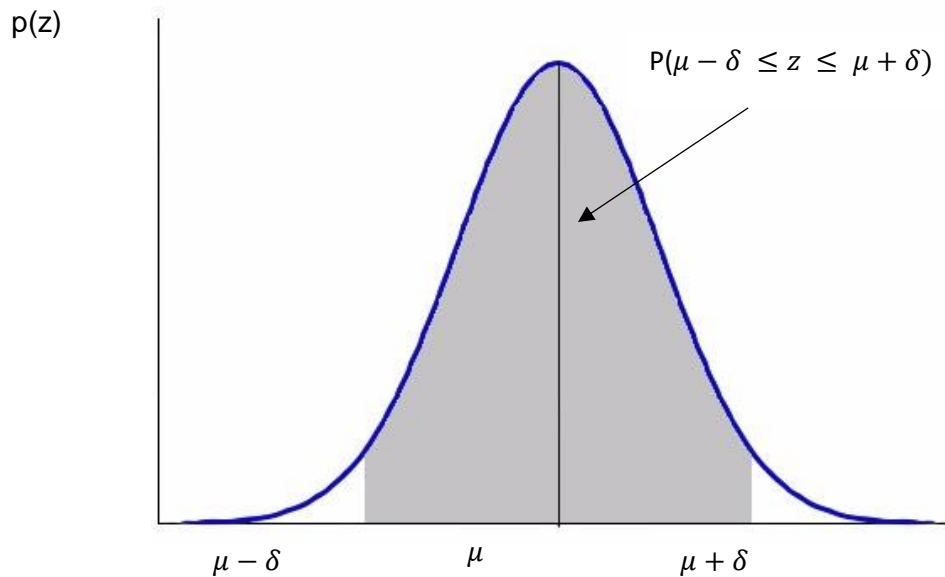


Figura 6. Distribución Gaussiana [21]

Una representación matemática de este fenómeno (ruido) se puede hacer de la siguiente forma [8]:

$$G_{x,y} = F_{x,y} + n_{x,y} \quad (5.11)$$

donde:

$G_{x,y}$, es la imagen observada.

$F_{x,y}$, es la imagen original

$n_{x,y}$, es el ruido

La nitidez es la ausencia de ruido, entre más nítida sea una imagen menos ruido tiene.

La siguiente imagen es una imagen sin ruido.



Figura 7. Imagen sin ruido [24]

Con el fin de poder observar los efectos del ruido gaussiano en una imagen dada (figura 7) es posible utilizar el programa de cómputo *MATLAB* [2] y su función “imnoise” para poder agregar ruido a una imagen digital.



Figura 8. Efectos del Ruido en las imágenes digitales

5.4 Modelo de ruido y emborronamiento

Se comenzará definiendo la matriz de emborronamiento así como el modelo final de ruido.

Para el emborronamiento, se supone es producido por un filtro invariante y lineal a traslación por lo cual es posible implementar el operador de convolución representado de la siguiente forma:

Para las dos imágenes digitales $f(i, j)$ y $h(i, j)$ de dimensiones $m_1 \times n_1$ y $m_2 \times n_2$ respectivamente, se extienden dichas imágenes de forma que las nuevas imágenes $f_e(i, j)$ y $h_e(i, j)$ ambas de dimensiones $(m_1 \times n_1 - 1) \times (m_2 \times n_2 - 1)$ se forman con sus respectivas $f(i, j)$ y $h(i, j)$, donde se rellena con ceros para complementar las dimensiones, es decir,

$$f_e(i, j) = \begin{cases} f(i, j) & 1 \leq i \leq m_1, 1 \leq j \leq n_1 \\ 0 & m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2, n_1 + 1 \leq j \leq n_1 + n_2 + 1, \end{cases} \quad (5.12)$$

y

$$h_e(i, j) = \begin{cases} h(i, j) & 1 \leq i \leq m_2, 1 \leq j \leq n_2 \\ 0 & m_2 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2, n_1 - 1 \leq j \leq n_1 + n_2 - 1, \end{cases} \quad (5.13)$$

Dadas las funciones extendidas si son tratadas como funciones periódicas con periodos $m_1 + m_2 - 1$ en la dirección de la coordenada x , y periodo $n_1 + n_2 - 1$ en la dirección de la coordenada y , entonces se tiene que la convolución de esas dos funciones es dada por la expresión:

$$g_e(i, j) = \sum_{m=1}^{m_1+m_2-1} \sum_{n=1}^{n_1+n_2-1} f_e(i, j) h_e(i - m, j - n), 1 \leq i \leq m_1 + m_2 - 1, 1 \leq j \leq n_1 + n_2 - 1 \quad (5.14)$$

Se plantea la solución del problema como un sistema de ecuaciones de alta dimensión, es decir, para encontrar $f(i, j)$ se tendrá que resolver este sistema.

Se llegó a dicha solución ya que tanto la función $g_e(i, j)$, como las funciones $f_e(i, j)$ y $h_e(i, j)$ son periódicas y comparten el mismo periodo.

Para la implementación del algoritmo se trabaja con la matriz:

$$h(i, j) = e^{-2(i/3)^2 - 2(j/3)^2} \quad (5.15)$$

La cual es truncada a dimensión 7×7 .

Con fines prácticos se trabajará con ruido Gaussiano con media 0 y varianza σ^2 , por lo que el modelo final se puede escribir de la siguiente manera:

$$J(f) = \frac{1}{2} \|Hf - g\|_2^2 + \lambda \frac{1}{2} \|Cf\|_2^2. \quad (5.16)$$

donde:

C , es el operador Laplaciano usando una 8-vecindad, es decir [19]:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

5.5 Métodos de búsqueda lineal

Los métodos para la minimización de una función objetivo arbitraria $f(x)$ de n variables independientes sin restricciones forman el principal campo de estudio de la optimización no lineal [9].

En base a la definición del capítulo 4, se puede expresar cada iteración de la búsqueda lineal como:

$$f_{k+1} = f_k + \alpha_k d_k \quad (5.18)$$

donde:

α_k , se obtiene a partir de una búsqueda lineal (mencionada en el capítulo anterior).

Se calcula una dirección de búsqueda d_k , al inicio de la k – ésima se denota a f_k como el estimado del mínimo actual, a partir del cual se obtiene un nuevo estimado f_{k+1} , tal como se expresó.

5.5.1 Método de máximo descenso

Las técnicas del gradiente, así como los métodos de máximo descenso permiten optimizar funciones continuas que son dos veces diferenciables, es decir, de alta dimensión. La idea general de este método es generar puntos sucesivos comenzando en un punto inicial dado, en la dirección de más rápido aumento de la función.

La dirección de descenso en el método de máximo descenso es el anti-gradiente de la función $J(f)$ de la ecuación (8), de modo que d_k tiene la expresión siguiente [11]:

$$d_k = -grad_k = -(H^T(Hf - g) + \lambda C^T C) \quad (5.19)$$

El tamaño de paso α_k es el mínimo de la función $J(f_k + \alpha d_k)$ con respecto a la variable α , el óptimo tiene la expresión siguiente [11]:

$$\alpha_k = \frac{\|grad_k\|_2^2}{\|Hd_k\|_2^2 + \lambda \|Cd_k\|_2^2} \quad (5.20)$$

Por lo que el algoritmo básico de máximo descenso es [11]:

Dado f_0

Calcular $grad_0$ mediante la ecuación (5.19)

Poner $d_0 = -grad_0$ y $k = 0$.

Mientras $grad_0 \neq 0$

Calcular α_k mediante la ecuación (5.20)

$$f_{k+1} = f_k + \alpha_k d_k$$

Calcular $grad_{k+1}$ mediante la ecuación (5.19)

Poner $d_{k+1} = -grad_{k+1}$ y $k = k + 1$

Fin de Mientras

5.5.2 Método de gradientes conjugados

Cómo ya se mencionó, los métodos de gradientes conjugados son una alternativa a solución de problemas de optimización de alta dimensión. Estos métodos fueron propuestos inicialmente por Hestenes y Stiefel en el año 1952 con el propósito de resolver problemas de ecuaciones lineales, posteriormente, en el año 1964 Fletcher y Reeves realizaron la aplicación en la optimización [6].

Para este método la primera iteración es la misma que en el método de Descenso de Gradiente, quedando las iteraciones de la siguiente forma [6]:

$$d_k = \begin{cases} -g_k & \text{para } k = 1, \\ -g_k + \beta_k d_{k-1} & \text{para } k \geq 2 \end{cases} \quad (5.21)$$

$$f_{k+1} = f_k + \alpha_k d_k \quad (5.22)$$

donde:

β_k , es un escalar

α_k , es el tamaño de paso obtenido mediante una búsqueda unidimensional [6].

Los métodos de gradientes conjugados tienen el esquema siguiente:

Dado f_0

Calcular $grad_0$ mediante la ecuación (5.19)

Poner $d_0 = -grad_0$ y $k = 0$.

Mientras $grad_0 \neq 0$

Calcular α_k mediante la ecuación (5.20)

$$f_{k+1} = f_k + \alpha_k d_k$$

Calcular $grad_{k+1}$ mediante la ecuación (5.19)

Poner $d_{k+1} = -grad_{k+1} + \beta^k d_k$ y $k = k + 1$

Fin de Mientras

Para el cálculo de β^k fueron implementadas las fórmulas de Fletcher-Reeves (FR) [6], [7], Polak-Ribiere (PR) [6], [7], Hestenes-Stiefel (HS)[6], [7], mostradas a continuación:

1. La expresión de Fletcher y Reeves.

$$\beta^{FR} = \frac{\|grad_{k+1}\|_2^2}{\|grad_k\|_2^2} \quad (5.23)$$

2. La expresión de Polak y Ribiere.

$$\beta^{PR} = \frac{grad_{k+1}^T (grad_{k+1} - grad_k)}{\|grad_k\|_2^2} \quad (5.24)$$

3. La expresión de Hestenes y Stiefel.

$$\beta^{HS} = \frac{grad_{k+1}^T (grad_{k+1} - grad_k)}{(grad_{k+1} - grad_k)^T d_k} \quad (5.25)$$

Capítulo 6

Pruebas

6.1 Introducción

Se llevó a cabo un número considerable de experimentos usando varias imágenes, en esta sección se presentan cuatro de ellas así como las pruebas que muestran la efectividad y verifican la calidad de restauración. Como se explicó en la sección anterior, en términos de convergencia se trabajó con los algoritmos máximo descenso y gradientes conjugados con las formas de Fletcher-Reeves, Polak-Ribiere y Hestenes-Stiefel para la selección de β^k pero sólo se muestra la expresión de Fletcher-Reeves debido a que no es notoria la diferencia entre tales elecciones.

Las pruebas se realizaron a imágenes a color cuyos valores son reales de 0 a 1. Dichas imágenes se obtuvieron de [4][22][23][25]. La primera imagen que se muestra es la de leucocitos, la segunda imagen muestra la estructura del ADN, la tercera imagen muestra

las células sanguíneas transformadas en cáncer y por último, una imagen de plaquetas sanguíneas. Todas las imágenes se emborronaron con la h dada por la ecuación 5.4 y son además contaminadas con ruido gaussiano de media 0 y desviación estándar 0.1.

Se utilizó $\lambda = 0.25$ en un tiempo de 60 segundos con intervalos de un segundo, con este valor, el desempeño en la mayoría de algoritmos fue óptimo.

Las métricas de restauración utilizadas en los experimentos fue la razón señal a ruido ($PSNR$) [20], la cual define la relación entre la máxima energía posible de una señal y el ruido que afecta a su representación fidedigna, es una métrica óptima para cuantificar la calidad de la reconstrucción de una señal y se expresa en unidades de decibeles (dB).

El parámetro $PSNR$ es una medida relativa de la calidad de una imagen. Se basa en el MSE (Mean Squared Error) el cual mide el error cuadrático medio de la imagen ya procesada y se calcula de la siguiente manera [5]:

$$MSE = \frac{\sum [f(i,j) - F(i,k)]^2}{N^2} \quad (6.1)$$

donde

$f(i, j)$, es la imagen original con i, j elementos.

$F(i, j)$, es la imagen procesada con i, j elementos.

N^2 , es el número total de elementos.

El modelo matemático del $PSNR$ se define en la ecuación 6.2 [5].

$$PSNR = 20 * \log_{10} \frac{b}{rmse}, \quad (6.2)$$

donde

b es el valor más grande que puede tomar la imagen, típicamente 255.

$rmse$ es la raíz cuadrada de la ecuación 6.1.

$PSNR$ proporciona sus valores en decibeles (dB).

Hay muchas versiones de razones señal a ruido, pero la $PSNR$ es muy común en procesamiento digital de imágenes.

Se implementó una aplicación usando *MATLAB*, software idóneo dado que todas las formulas y modelos del capítulo han sido planteadas en formato matricial. La aplicación

recibe el nombre de *Restlma* y es capaz de leer imágenes en formatos: “.bmp”, “.tif”, “.jpg”, “.jpeg”.

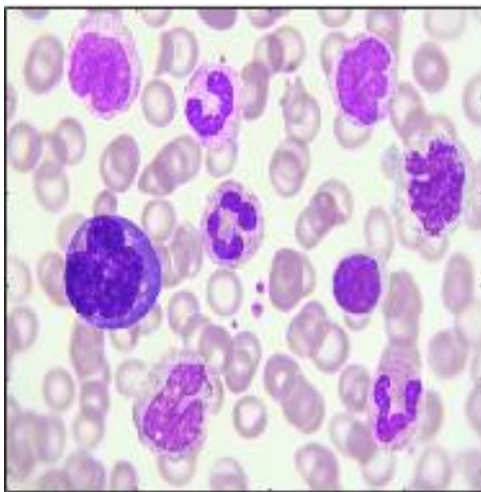
Finalmente, se indica que los experimentos fueron ejecutados sobre un ordenador personal con sistema operativo Windows 10, procesador Intel i5, 2.3Ghz, memoria de 6.0 GB, monitor PnP genérico 14” y un disco duro de 750GB.

6.2 Experimento 1

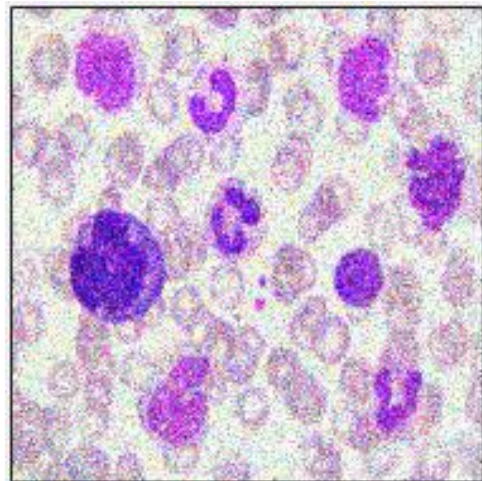
Para el primer experimento se utilizó la imagen de Leucocitos que tiene tamaño de 720 x 523.

Se agregó ruido Gaussiano con media 0 y desviación estándar 0.1.

La figura muestra la imagen original y la imagen con ruido.



(a)



(b)

Figura 9. (a) Imagen original (b) Imagen con ruido [23]

Una vez añadido el ruido gaussiano se aplicaron los métodos por un lapso de 60 segundos o hasta que la norma del gradiente al cuadrado sea menor a $1.0e - 10$.

Como se dijo, se trabajó con Gradientes conjugados y máximo descenso. A continuación, se muestra la evolución en la restauración de la imagen experimentada.

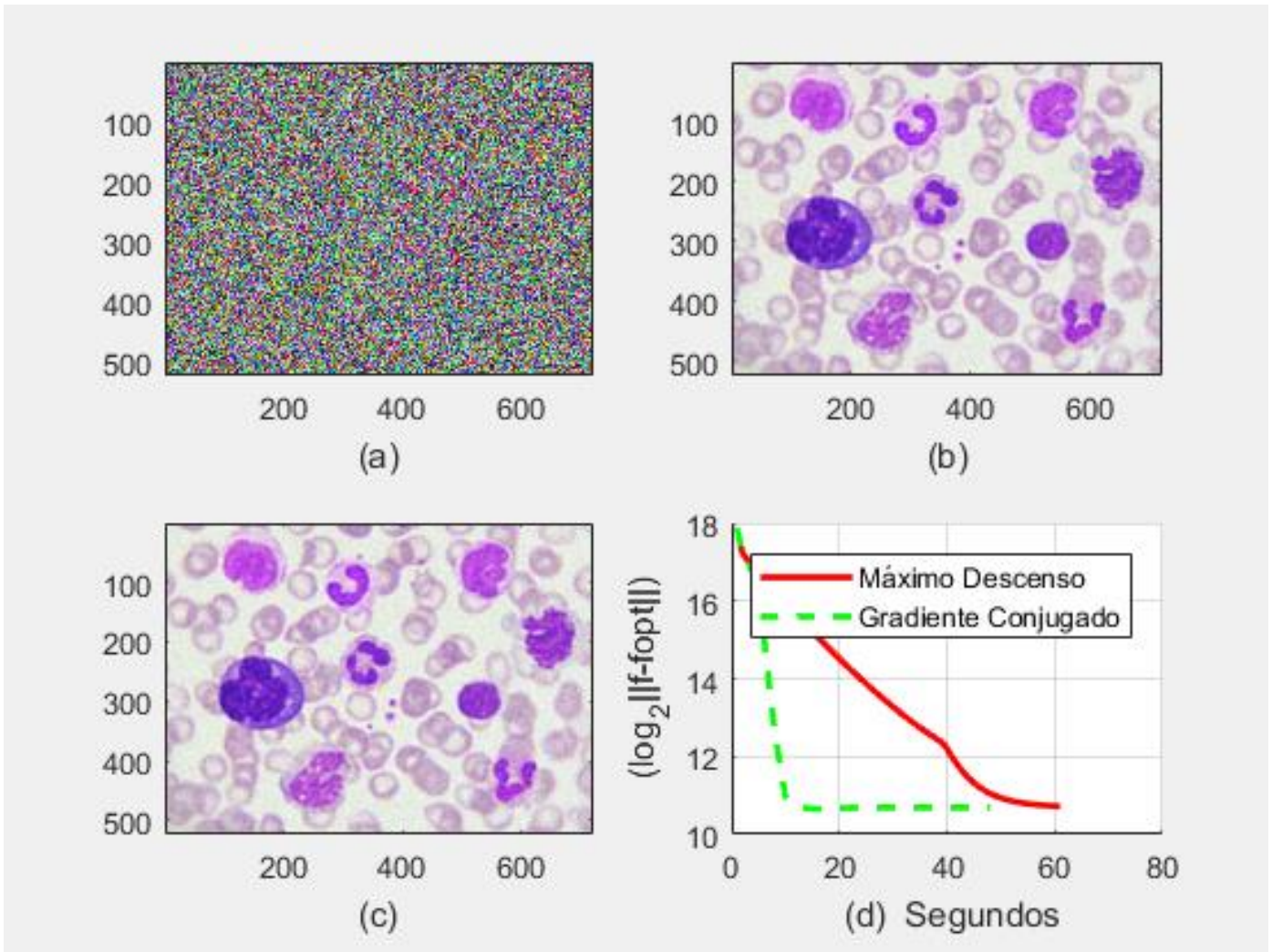


Figura 10. (a) imagen inicial para los métodos (b) imagen encontrada por máximo descenso (c) imagen encontrada por gradientes conjugados (d) máximo descenso contra gradientes conjugados comparados por tiempo

Finalmente, la tabla 1 nos enseña la señal a ruido según la ecuación 6.1, que, como se puede observar, el ruido fue eliminado en un porcentaje óptimo, dado que se cumple un nivel mayor de PSNR para la imagen con ruido que para las de Gradientes conjugados y máximo descenso.

Tabla 1. PSNR de cada uno de los métodos

Medida	Gradientes conjugados	Máximo descenso	Imagen inicial	Imagen con ruido
PSNR	82.3830	82.331	20.2922	54.4186

6.3 Experimento 2

Para el siguiente experimento se trabajó con la imagen que muestra la estructura del ADN [4].

Al igual que en la anterior se aplicó ruido gaussiano y se ejecutó el programa por un minuto con intervalos de un segundo para cada iteración.

Los resultados obtenidos se observan a continuación.



(a)



(b)

Figura 11. (a) Imagen original (b) Imagen con ruido [4]

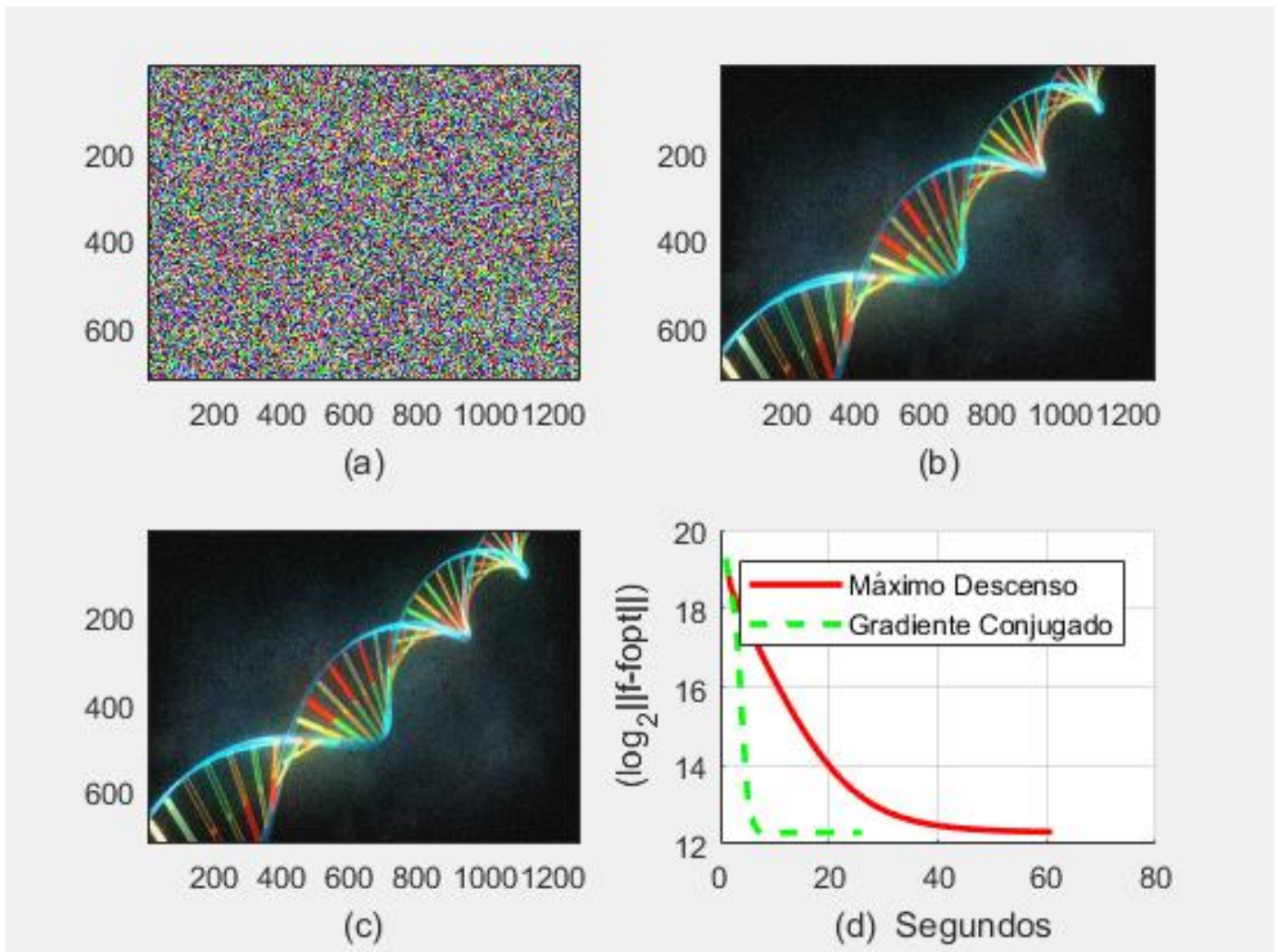


Figura 12. (a) imagen inicial para los métodos (b) imagen encontrada por máximo descenso (c) imagen encontrada por gradientes conjugados (d) máximo descenso contra gradientes conjugados comparados por tiempo

En la tabla 2 se muestran los PSNR obtenidos en cada caso: gradientes conjugados máximo descenso, así como los de la imagen inicial (f) y la imagen con ruido (g).

Tabla 2. PSNR de cada uno de los métodos

Medida	Gradientes conjugados	Máximo descenso	Imagen inicial	Imagen con ruido
PSNR	80.2457	80.2147	19.2257	55.1467

6.4 Experimento 3

La imagen de test ahora es la imagen de las células sanguíneas transformadas en cáncer de tamaño "700x396", con un ruido Gaussiano de media 0 y varianza 0.2.

Nuevamente se toman como métodos comparativos a los métodos de máximo descenso y gradiente conjugado.

En la imagen 10 mostramos la imagen original y con ruido, respectivamente.

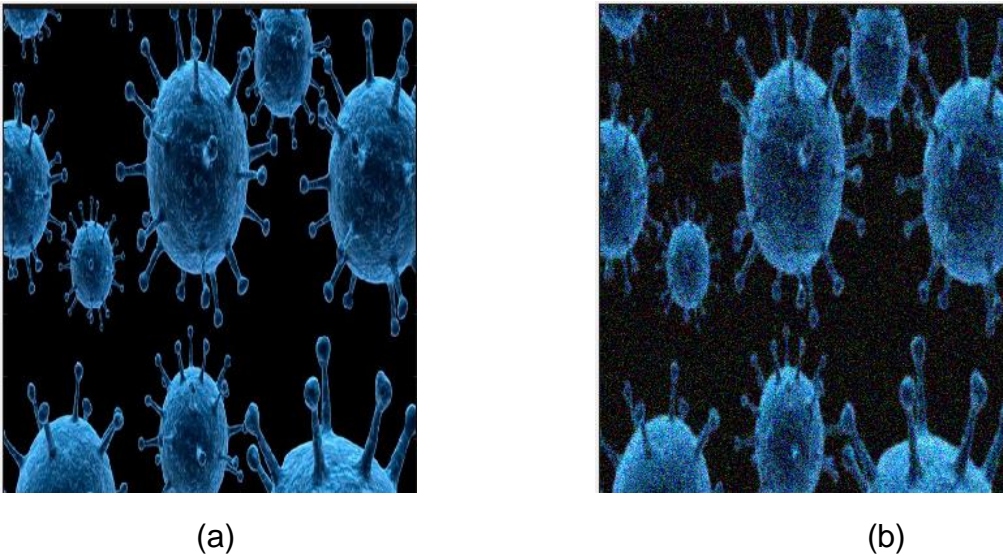


Figura 13. (a) Imagen original (b) Imagen con ruido [25]

Generado el ruido, se presentan los resultados evaluando el rendimiento de ambos métodos de reducción.

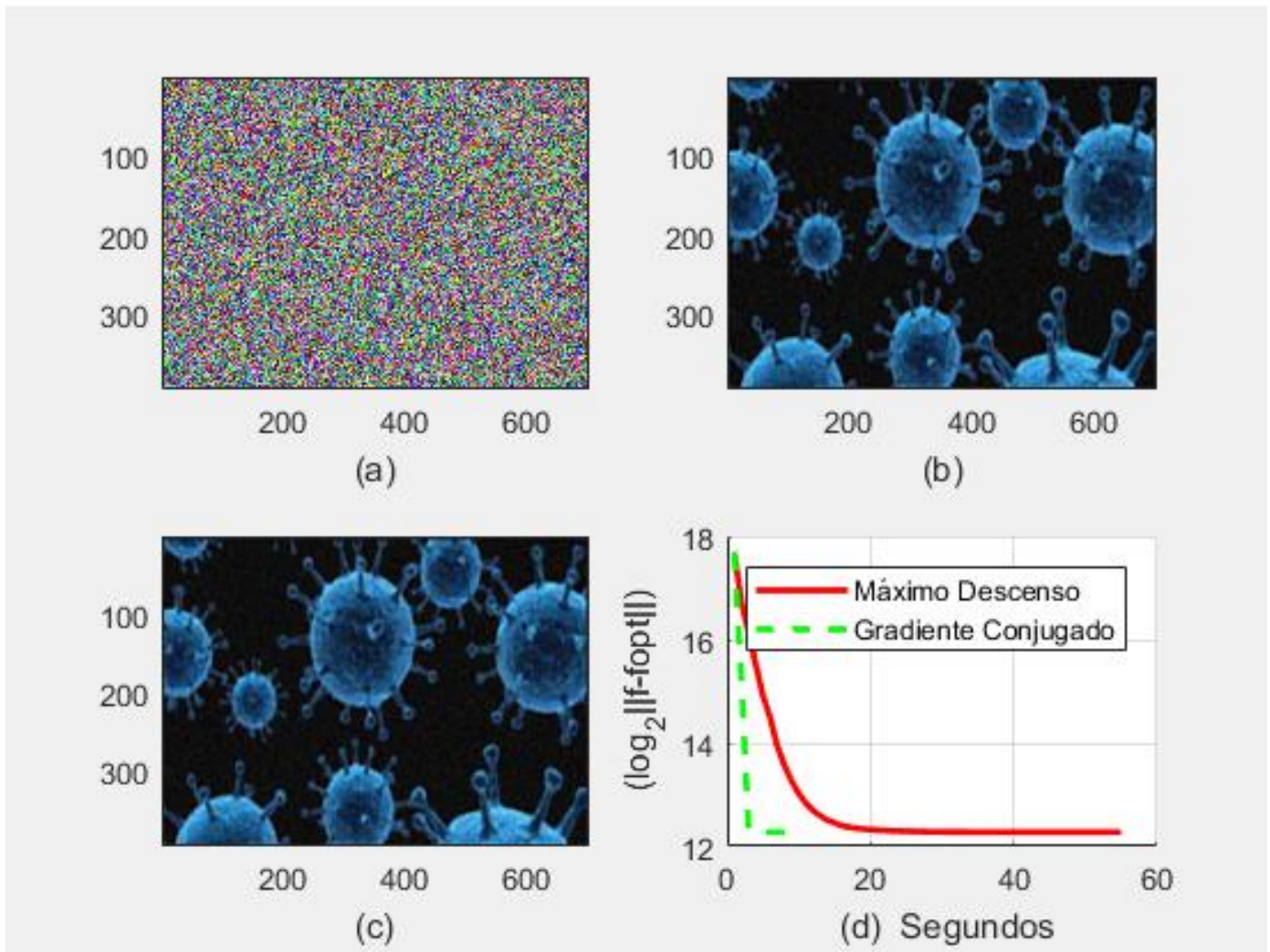


Figura 14. (a) imagen inicial para los métodos (b) imagen encontrada por máximo descenso (c) imagen encontrada por gradientes conjugados (d) máximo descenso contra gradientes conjugados comparados por tiempo

Nuevamente, se dan a conocer los resultados que arroja el PSNR de las imágenes iniciales y de prueba para comprobar la eficacia de ambos métodos.

Tabla 3. PSNR de cada uno de los métodos

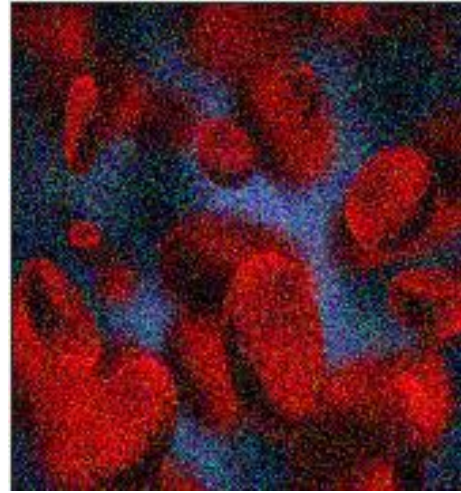
Medida	Gradientes conjugados	Máximo descenso	Imagen inicial	Imagen con ruido
PSNR	67.4518	67.4432	17.8268	53.7178

6.5 Experimento 4

Se ejecuta el algoritmo propuesto en la última imagen de experimento, las plaquetas sanguíneas de tamaño 650x487, con ruido Gaussiano de 0 y desviación estándar de 0.1.



(a)



(b)

Figura 15. (a) Imagen original (b) Imagen con ruido [22]

Teniendo la imagen con ruido se aplican los algoritmos y se muestran los resultados.

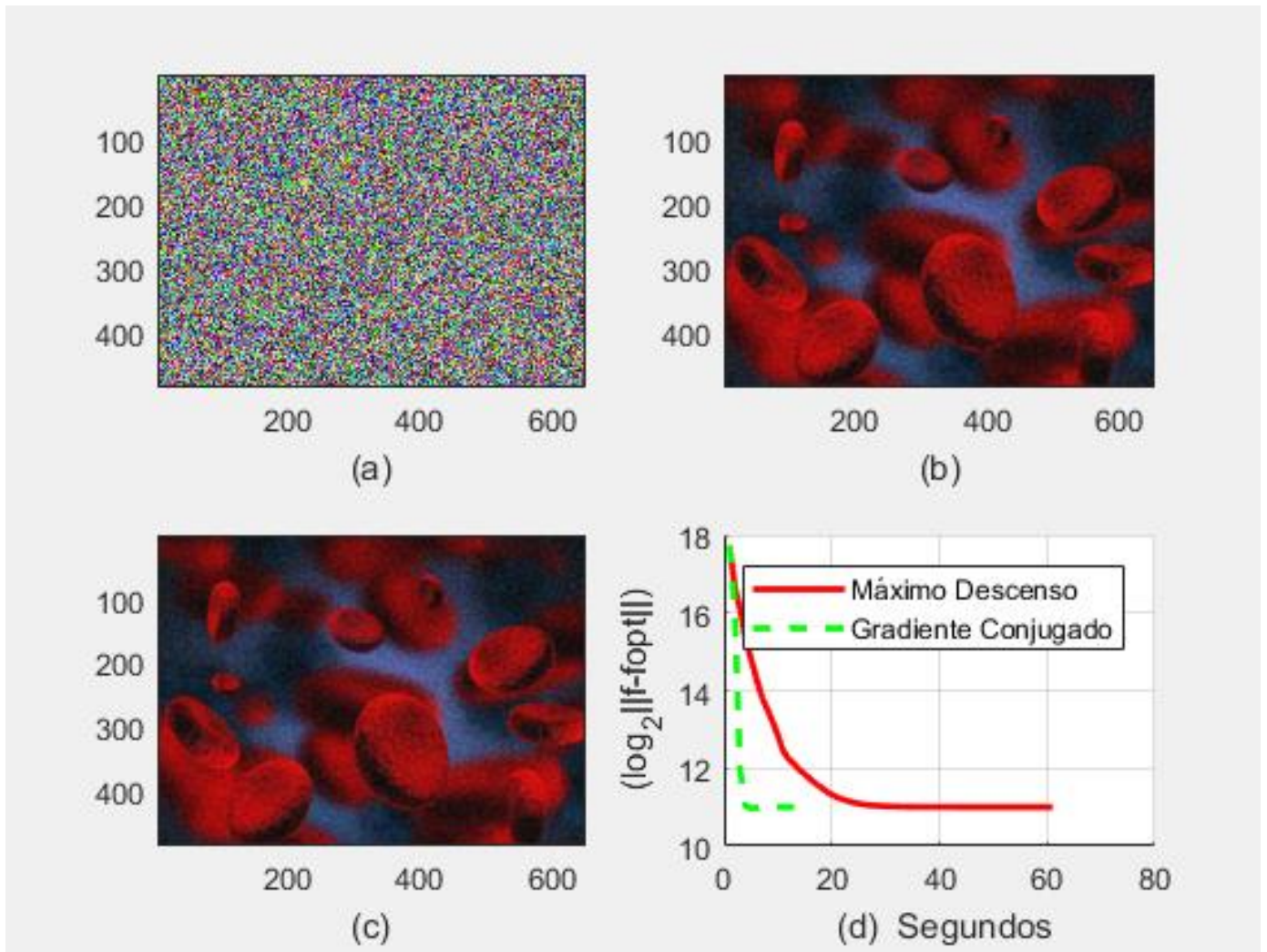


Figura 16. (a) imagen inicial para los métodos (b) imagen encontrada por máximo descenso (c) imagen encontrada por gradientes conjugados (d) máximo descenso contra gradientes conjugados comparados por tiempo

Las PSNR obtenidas se pueden observar en la tabla 4.

Tabla 4. PSNR de cada uno de los métodos

Medida	Gradientes conjugados	Máximo descenso	Imagen inicial	Imagen con ruido
PSNR	78.3213	78.2972	19.4398	55.2871

Capítulo 7

Conclusiones

El capítulo final de este trabajo comprende y resume los principales resultados que arrojaron los distintos experimentos.

7.1 Resumen

Esta tesis dirigió su investigación a la eliminación del ruido y emborronamiento.

Se presentó un método para suprimir el ruido gaussiano en imágenes a color, proponiendo un modelo de restauración basado en la estimación bayesiana y campos aleatorios Markovianos y minimizando la función objetivo con los métodos de máximo descenso y gradientes conjugados.

Se compararon los resultados obtenidos con el método de gradientes conjugados y el método de máximo descenso.

7.2 Conclusiones

Una vez realizadas las implementaciones en imágenes a color:

- En todos los escenarios probados, los resultados fueron más eficaces con el método de gradientes conjugados. El algoritmo demostró llegar a la restauración de la imagen en menor tiempo, además de producir buenas reconstrucciones de las imágenes de alta resolución, estimando de forma precisa los parámetros y mejorando, tanto visualmente como a nivel de PSNR.
- Los resultados fueron analizados a través de *Peak signal to noise ratio* (PSNR), que como ya se mencionó es una de las métricas más comunes para comparar la calidad entre dos imágenes luego de un proceso de restauración.
- Retomando el tema de gradientes conjugados, éste se implementó con las formas de Fletcher-Reeves, Polak-Ribiere y Hestenes-Stiefel para la selección de β^k , en las que los resultados fueron bastante similares y poco notorias las diferencias en cuestión de velocidad de convergencia y visualmente.
- Las pruebas se realizaron aplicando un valor fijo de λ , el cual fue 0.25, donde se pudo apreciar que entre mayor es el valor de λ mayor será el efecto de “suavizado” que tendrá la imagen resultante, es decir, la imagen tendrá un aspecto cada vez más liso.

7.3 Trabajos futuros

Concluido el trabajo presentado sobre ambos métodos de minimización de la función objetivo, quedan abiertas diferentes cuestiones que permiten plantearse trabajos futuros.

Uno de ellos, es la necesidad de un análisis comparativo entre el modelo aquí propuesto y diversos algoritmos con igual objetivo y estrategia, pero utilizando múltiples tipos de ruidos con el fin de abordar de manera más amplia el problema y sus posibles aplicaciones.

Bibliografía

- [1] Aja-Fernandez, S., Niethammer, M., Kubicki, M. E., & Westin, C. (2008). Restoration of DWI Data Using a Rician LMMSE Estimator. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1389-1403.
- [2] Alasdair, M. (2004). *Introduction image processing with MATLAB, Course Tecnology a part of engage learning*.
- [3] Babacan, S., Molina, R., & Katsaggelos, A. (2009). Variational Bayesian blind deconvolution using a total variation prior. *IEEE Transacions on Image Processing*, 12-26.
- [4] *blogthinkbig*. (Noviembre de 2017). Obtenido de <https://blogthinkbig.com/aniversario-estructura-adn>
- [5] Cabello, M. Á. (2011). *Restauración de imágenes con desensibilización de estimaciones*. Madrid: Tesis Doctoral.
- [6] Chen, X., & Zhou, W. (2010). Smoothing nonlinear conjugate gradient method for image restoration using nonsmooth nonconvex minimization. *SIAM JOURNAL*, 765-790.
- [7] Gilbert, J. C., & Nocedal, J. (1992). Global Convergence Properties of Conjugate Gradient Methods for Optimization. *SIAM JOURNAL Optimization*, 21-42.
- [8] Gonzalez , R., & Woods, P. (2002). *Digital Image Processing*. Boston, Massachusetts: Addison Wesley.
- [9] Grath, M. (2003). Markov Random Field Image Modelling. *Tesis para el grado de Maestro en Ciencias en la Universidad del Cabo Sudafrica* , 38-53.
- [10] Hecht, E. (2000). *Óptica*. Madrid: Addison Wesley Iberoamericana.
- [11] Hunter, D., & Lange, K. (2004). A tutorial on MM algorithms. *The American Statistician*, 30-37.
- [12] Jeng, F. C., & Woods, J. (1991). Compound Gauss-Markov Models for Image Processing. *Springer Series in Information Science* , 89-108.
- [13] Krizhevsky , A. (Septiembre de 2017). *Deep Learning Using Bayesian Optimization*. Obtenido de The Mathworks Inc: www.mathworks.com
- [14] L, H. J. (1966). Image evaluation and restoration. *Journal of the Optical Society of America*, 569-570.

- [15] Molina, R., Katsaggelos, A., & Mateos, J. (1999). Bayesian and Regularization Methods for Hyperparameter Estimation in Image Restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 125-149.
- [16] Molina, R., Katsaggelos, A., Mateos, J., & Abad, J. (1996). Compound Gauss-Markov Random Fields for Astronomical Image Restoration. *Vistas in Astronomy. Special Issue on Vision Modelling and Information Coding*, 539-546.
- [17] Molina, R., Nuñez, J., Cortijo, F., & Mateos, J. (2001). Image Restoration in Astronomy. A Bayesian review. *Signal Processing Magazine*, 11-29.
- [18] Nagel, M. (1978). Introduction to evaluation of motion degraded images. *Proc. Of NASA Electronics Research Center Seminar*, 7-21.
- [19] Nagy, J. G., Palmer, K., Palmer, K., & Perrone, L. (2004). Iterative methods for image deblurring: A Matlab object-oriented approach. *Numerical Algorithms*, 73-93.
- [20] Nikolova, M., Ng, M. K., Zhang, S., & Ching, W. (2006). Efficient Reconstruction of Piecewise Constant Images Using Nonsmooth Nonconvex Minimization. *SLAM JOURNAL Imaging Sciences* 1, 2-25.
- [21] Ortega, J. A. (Julio, 2003). *Restauración y Reconstrucción Bayesianas de imágenes usando descomposiciones multibanda*. Granada: Tesis Doctoral.
- [22] *pngtree*. (Diciembre de 2017). Obtenido de https://es.pngtree.com/freebackground/vector-medical-background-hospital-platelet-blood-cells_788745.html
- [23] *TuChequeo.com*. (Noviembre de 2017). Obtenido de <https://tuchequeo.com/leucocitos-altos-en-sangre-leucositosis-causas/>
- [24] *Universia España*. (Noviembre de 2017). Obtenido de <http://noticias.universia.es/tiempo-libre/noticia/2012/08/23/960804/10-habitos-esenciales-personas-positivas.html>
- [25] *VT Actual*. (Diciembre de 2017). Obtenido de <https://www.vtactual.com/es/conoce-como-las-celulas-sanguineas-se-transforman-en-cancer/>
- [26] Walpole, R. (1998). *Probabilidad y Estadística para ingenieros*. USA: mcGraw-Hill.

