



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

“APROXIMACIÓN POLINOMIAL MEDIANTE BANDAS DE AMPLITUDES VARIANTES”

T E S I S

Presentada para obtener el título de:

DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

presenta:

M. C. Ivonne Lilian Martínez Cortés

Asesor de Tesis:

Dr., Dr. Sc. Prof. Miguel Antonio Jiménez Pozo

Puebla, Pue., Noviembre de 2009.

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**“APROXIMACIÓN POLINOMIAL
MEDIANTE BANDAS DE AMPLITUDES
VARIANTES”**

T E S I S

Presentada para obtener el título de:

DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

presenta:

M. C. Ivonne Lilian Martínez Cortés

Asesor de Tesis:

Dr., Dr. Sc. Prof. Miguel Antonio Jiménez Pozo

Puebla, Pue., Noviembre de 2009.



DRA. ESPERANZA GUZMÁN OVANDO
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

IVONNE LILIAN MARTÍNEZ CORTÉS

estudiante del Doctorado en Ciencias Matemáticas, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 18 de SEPTIEMBRE de 2009, con la tesis titulada:

***"APROXIMACIÓN POLINOMIAL MEDIANTE
BANDAS DE AMPLITUDES VARIANTES"***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E
H. Puebla de Z., 28 de octubre de 2009



DR. JOSÉ RAMÓN ENRIQUE ARRAZOLA RAMÍREZ
COORDINADOR DEL POSTGRADO EN MATEMÁTICAS.

DR REC/mar

*Existen tres personas en la vida que definitivamente
son los responsables de que yo haya llegado hasta aquí:*

*Mi mamá, Maura, quien a pesar de proceder de una familia
verdaderamente humilde, siempre creyó firmemente que el estudio,
es el camino más decente, leal y correcto para ser alguien de bien en la
vida y así nos lo inculcó a cada uno de sus hijos.
...Mami, tu eres la creadora de todo lo que tus hijos hemos
logrado, siéntete orgullosa de ello.*

*Y mis hijos, Eduardo y Valeria, cuando sentía
que no podía más, me bastaba verlos
para motivarme y seguir adelante.
...Todo lo que logre en esta vida, será inspirado por
el profundo amor que les tengo.*

Agradecimientos

A Dios, por todas las bendiciones que me ha dado en la vida.

A VIEP-SEP, por apoyar e impulsar proyectos en los que he participado.

A mi asesor, el Dr. Miguel Antonio Jiménez Pozo. No pude ser más afortunada al trabajar bajo la dirección de un hombre con tanto prestigio en el mundo de las matemáticas, pues además de serlo, es un excelente ser humano.

A la FCFM, a sus profesores, en especial al cuerpo académico de Análisis Matemático, a los Doctores Bustamante y Djordjevic, espero haber aprendido mucho de ustedes.

A mis compañeros y amigos de generación, una de las cosas más valiosas que llevare siempre conmigo, será su amistad.

A mi familia, mis hermanos: Hugo, René, Carlos y Luis, por siempre brindarme su apoyo y ser mi soporte en los momentos difíciles.

Al CONACYT, Institución forjadora de sueños, pues sin su apoyo recibido hubiera sido imposible la continuación de mis estudios.

Introducción

En la segunda mitad de la década de 1981-90, en un trabajo realizado para la industria del petróleo, el Dr. Jiménez, Director de esta tesis, se enfrentó al problema de cómo obtener un polinomio algebraico de dos variables reales, para describir convenientemente la superficie de un estrato de petróleo dado. Se conocen valores aproximados de la función que describe la superficie en puntos definidos por los pozos de petróleo. También son conocidos valores estadísticos de la función en otros puntos, así como sus pesos probabilísticos. Entonces se define el polinomio deseado, como aquél que resuelve el problema de mínimos cuadrados dado por los valores estadísticos, de entre los que satisfacen aproximadamente los valores medidos. Se podrían discutir otros métodos para solucionar este problema, obviamente, pero en aquel momento se programó un diálogo computacional interactivo por medio del cual los ingenieros, basados en criterios geológicos, elegían el polinomio. Para hacer esto, ellos debían dar conjuntos de grandes pesos en los puntos definidos por los pozos de petróleo de manera tal que el problema de mínimos cuadrados con restricciones se transformara en uno libre. Para justificar la validez del programa entregado a la industria del petróleo, era necesario demostrar la existencia de algún peso que permitiera esta transformación. Esto fue logrado mediante una inesperada aplicación de los multiplicadores de Lagrange obtenidos del teorema clásico de Karush-Kunh-Tucker (KKT), resultado bien conocido en la teoría de Optimización [21]. Aunque el modelo y el programa propuestos fueron suficientes para los propósitos de la industria, quedó abierta la pregunta teórica acerca de la existencia de una medida de Borel positiva como peso para datos infinitos, que surge cuando los puntos de medida son sustituidos por vecindades.

El estudio de tales problemas requirió de versiones generalizadas del teorema de KKT, así como de resultados de la teoría de programación semi-

infinita. Por otro lado, la teoría de interpolación polinomial en dos variables presenta varias dificultades insalvables, como por ejemplo la no unicidad de soluciones. Todo esto motivó a restringir el estudio teórico del problema general a únicamente una variable real. El estudio de este problema fue realizado y posteriormente publicado en [8]. Ese artículo no sólo dio luz sobre problemas fuertemente relacionados con la programación semi-infinita tales como [10], [11] y [14], que a su vez generaron otros estudios y artículos, sino que sorprendentemente también estaba relacionado al teorema de alternancia de Chebyshev, [3], [4], [5], [6] y [30]. De hecho este es el caso en el que cualquier peso nos conduce al mismo polinomio.

Desde el punto de vista de la Teoría de Optimización Semi-infinita la principal pregunta que surgía era por qué la generalización del teorema de KKT es aplicable, dado que por las hipótesis en el problema, se tiene una violación en las condiciones de restricción de cualificación extendidas de Mangasarian-Fromovitz, para programación semi-infinita, que está relacionado a la propiedad de estabilidad de los conjuntos factibles. Se demostró en [9], (ver también [7]), que esto ocurre debido a que bajo ciertas hipótesis, el conjunto factible de polinomios consta de un solo elemento. De esta manera no sólo se tenía una explicación a dicho fenómeno sino también una versión extendida del teorema de alternancia de Chebyshev.

En efecto, las restricciones al problema de optimización que se deseaba estudiar, venían dadas por el conjunto factible M que por hipótesis, se supone no vacío

$$M = \left\{ (t_j) \in \mathbb{R}^{n+1} : -h_1(x) + f(x) \leq \sum_{j=0}^n t_j x^j \leq h_2(x) + f(x) \right\},$$

donde $h_1, h_2, f \in C(X)$, $h_1, h_2 > 0$ y $X \subset \mathbb{R}$ es un compacto con al menos $n + 2$ elementos. Al considerar los gradientes de las restricciones activas, se tiene el conjunto de vectores

$$K = \{ \pm (1, x_j, \dots, x_j^n) \in \mathbb{R}^{n+1}, j = 0, \dots, n \}.$$

Como consecuencia del lema de Caratheodory y del hecho que $n + 1$ vectores diferentes $(1, x_j, \dots, x_j^n)$, $j = 0, \dots, n$, son linealmente independientes, se verifica que $0 \notin \partial Conv(K)$, donde $Conv(K)$ denota la envoltura convexa compacta de K y ∂ la frontera; es decir, o bien

$$0 \in intConv(K) \text{ o } 0 \in Conv(K)^c,$$

(ver [8] y [9], para esto y apuntes siguientes).

Para demostrar la existencia de la medida que permitiera la transformación del problema con condiciones de interpolación a uno libre, era necesario analizar los casos antes mencionados.

Si $0 \notin \text{Conv}(K)$, esto conduce a través del teorema de separación de conjuntos convexos, a la existencia de $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ que satisface

$$\forall c \in \text{Conv}(K), \quad c^T \xi < 0.$$

Esto permite aplicar ciertos criterios de regularidad que admiten la utilización de una forma generalizada de teorema de KKT [29], con lo cual se demuestra la existencia de la medida. Ahora bien, si $0 \in \text{intConv}(K)$ entonces no existe tal $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$. En tal situación, a pesar de que no contaremos con la restricción de cualificación extendida de Mangasarian-Fromovitz, se puede aplicar nuevamente KKT para demostrar la existencia de la medida [8]. Esto se debe a que en tal situación M es un singleton [9], lo cual constituye una forma extendida del teorema de alternancia de Chebyshev, enunciado a continuación.

Teorema 0.0.1 *Sea $t^* = (t_0, \dots, t_n) \in M$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes*

- i) $M = \{t^*\}$.*
- ii) Existen $n + 2$ puntos en $x_i \in X$, $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$ tales que el polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^n t_j x^j$, alcanza los valores $f(x_i) + h_2(x_i)$ y $f(x_i) - h_1(x_i)$ (o $f(x_i) - h_1(x_i)$ y $f(x_i) + h_2(x_i)$) alternadamente para $i = 0, \dots, n + 1$.*
- iii) $0 \in \text{intConv}(K)$.*

El resultado precedente fue una de las motivaciones principales para el estudio del método con el cual medimos la aproximación de funciones que aquí presentamos, en el cual se mide la aproximación a una función dada, mediante la variación de la banda limitada por los grafos de $f + h_2$ y $f - h_1$, lo que se obtiene al multiplicar tanto a h_1 como a h_2 por un parámetro $\lambda \geq 0$. Definimos así los conjuntos que podemos denotar M_λ , donde $M = M_1$, y la aproximación la medimos como el ínfimo de estos λ , para los cuales $M_\lambda \neq \emptyset$. El teorema extendido de Chebyshev permite estudiar problemas de unicidad como en el caso clásico en que las funciones de error son idénticamente iguales a 1. Resultará conveniente agregar que aunque aparentemente teníamos un

método nuevo de medir la aproximación, con el tiempo descubrimos que este método que hubimos de introducir (ver [12] y [13]), puede ser incluido dentro del denominado como *aproximación con normas asimétricas*. Una norma asimétrica es un funcional ρ sobre un espacio vectorial, que verifica las condiciones de una norma, con la excepción de que, en general, $\rho(-f) \neq \rho(f)$, sino que existe una constante universal $C \geq 0$, tal que $\rho(-f) \leq C\rho(f)$.

Desafortunadamente, los artículos sobre el tema contienen información sólo parcial sobre notas históricas, pues existen otras denominaciones para los conceptos, así como omisión a referencias entre autores. Ello nos ha llevado a una búsqueda inesperada, prolongada y cuidadosa de información que ha retrasado nuestros proyectos de publicaciones y que eventualmente pudiera ser todavía incompleta; pero que al menos contribuirá internacionalmente -esperemos- a precisar la autoría y poner en su orden cronológico, los diferentes resultados y ha vincularlos entre sí, independientemente de la denominación o el enfoque que se haya adoptado originalmente por los autores.

Según lo que hemos encontrado, el problema que abordamos fue primeramente considerado por Moursund en 1966, [22], bajo la óptica de funciones de peso generalizado. El considera un peso $w(x, y)$, donde $x \in X$, está en el dominio de las funciones y y es un número real. Esta definición es extremadamente general y mucho más amplia que todas las que hemos revisado hasta ahora. El propio Moursund individualmente [23] o como coautor [18], [24], se ocupa de aspectos computacionales de la aproximación pesada generalizada que había introducido y enriquece o aplica su concepto de aproximación pesada en diversas situaciones. Un poco más adelante, Loeb, Schumaker, Taylor y el propio Moursund, en el año 1969, [19], presentan un notable estudio del nuevo concepto. La noción de aproximación mediante normas asimétricas ha sido y es estudiada activamente por las escuelas rusa y ucraniana. El primer esfuerzo en Oriente en esta dirección puede localizarse en [15], en 1973. Aunque en forma relativamente simple, el enfoque allí empleado es similar al de bandas de amplitudes variantes que nosotros utilizamos. Como referencias posteriores, bajo el punto de vista de pesos generalizados, consulte la amplia colección de resultados de Dolzhenko y de Sevast'yanov, unificada en forma de survey en [7], los resultados de Babenko a partir de 1982 en [1], que todavía continúan hoy en día y están más bien conectados con funciones integrables y funciones de error constantes, y de autores más recientes como, [16], [17] y [26].

En 1998, una nueva terminología fue introducida por la escuela rusa,

donde el método fue llamado *aproximación con peso sensible al signo*. En efecto, es fácil verificar que si $h_1 = h_2 = h$, e introducimos el peso $w = 1/h$, entonces el valor ínfimo de λ que determina la mejor aproximación mediante el método de bandas de amplitudes variantes, es equivalente a la mejor aproximación uniforme usual con peso w . Es decir

$$\inf_p \sup_x |(f(x) - p(x)) w(x)|.$$

La idea de un peso generalizado

$$w = (w_1, w_2), \quad w_1(x) = 1/h_1(x), \quad w_2(x) = 1/h_2(x),$$

con w_1 y w_2 superiormente semicontinuas, conduce a definir la mejor aproximación uniforme relativa a estos pesos, mediante

$$\inf_p \sup_x (f(x) - p(x))^+ w_2(x) + (f(x) - p(x))^- w_1(x),$$

donde g^+ y g^- denotan las variaciones positivas y negativas de g , respectivamente. Esto da lugar a la denominación de peso sensible al signo.

Hay que destacar la flexibilidad de este método, que permite sustituir fácilmente la norma *sup* por la correspondiente a los L^p , $1 \leq p < \infty$.

La aproximación pesada sensible al signo y la aproximación de amplitud variante son conceptos más o menos equivalentes, cuando consideramos la norma del supremo. Cualquier resultado obtenido con uno de los dos métodos se debe poder obtener con el otro.

Regresando a la idea original de Moursund, encontramos que él define un peso todavía más general $w(x, y)$, con x en el dominio de las funciones y $-\infty \leq y \leq +\infty$, pues, por ejemplo, $w(x, y)$ puede ser $(f(x) - p(x)) w_2(x)$ si $y \geq 0$ o $(f(x) - p(x)) w_1(x)$ si $y \leq 0$.

Más recientemente Pokrovskii, [25], estudió la aproximación en el sentido de funcionales positivos homogéneos, una amplia categoría que incluye muchos aspectos de la aproximación aquí descrita, y a la cual dedica mucho espacio en cuanto a los delicados problemas de unicidad en elementos de la mejor aproximación.

Ante lo expuesto anteriormente uno se debe preguntar, qué se ha ganado con este método de variación de amplitud de bandas, aunque su origen

haya sido independiente y motivado por aplicaciones industriales. En nuestra opinión, el sentido geométrico de las técnicas del método de amplitud variante provee un mejor entendimiento para algunos problemas, como se verá más tarde.

En este trabajo presentamos los resultados obtenidos con el método de aproximación de bandas de amplitud variante. En el Capítulo 1, como preámbulo, presentamos una breve recopilación de resultados sobre la aproximación polinomial uniforme clásica, y posteriormente definimos el concepto de la mejor aproximación en bandas de amplitudes variantes y el polinomio de la mejor aproximación, se obtienen resultados de existencia, unicidad y caracterización de la mejor aproximación polinomial, que aunque no son novedosos, si lo son la técnica aquí empleada para sus demostraciones.

El Capítulo 2 lo dedicamos al estudio y desarrollo de una extensión del algoritmo de Remez, que fue propuesta por nosotros y que nos permite calcular el polinomio de la mejor aproximación polinomial en el contexto de bandas variantes. Se presenta un resultado que sustenta la convergencia de dicho algoritmo y presentamos ejemplos realizados con su programación en Matlab. La contribución de nuestro trabajo en este tópico, es la presentación de una demostración cualitativa nueva, sencilla que se apoya en la idea geométrica del problema.

En el Capítulo 3 nos dedicamos al estudio de la mejor aproximación polinomial en bandas de amplitudes variantes y condiciones de interpolación tipo Hermite, aquí cabe mencionar que la teoría desarrollada en el Capítulo 1, fue suficiente para demostrar la existencia y unicidad del polinomio de la mejor aproximación, no siendo necesario desarrollar otra teoría alterna para este tema. Asimismo la extensión del algoritmo de Remez, hecha en el Capítulo 2, se puede readaptar para este caso. Exhibimos ejemplos obtenidos con nuestro programa en Matlab del algoritmo de Remez extendido.

El Capítulo 4 contiene los resultados concernientes a existencia, unicidad y cálculo de la mejor aproximación polinomial con bandas de amplitudes variantes, en el caso extremo en que h_1 y h_2 pueden anularse en un número finito de puntos de X . En este capítulo los conceptos y resultados son todos novedosos.

Presentamos una serie de conclusiones acerca de este trabajo de tesis y finalizamos con la bibliografía empleada en su desarrollo.

Índice general

1. Aproximación polinomial mediante bandas de amplitudes variantes	3
1.1. Aproximación uniforme clásica de Chebyshev	4
1.2. Aproximación polinomial con bandas de amplitudes variantes .	6
1.2.1. Definición de la mejor aproximación y polinomio de mejor aproximación mediante bandas de amplitudes variantes	6
1.2.2. Existencia, caracterización y unicidad del polinomio de mejor aproximación	12
2. Cálculo de la mejor aproximación polinomial en el contexto de bandas de amplitudes variantes	20
2.1. Descripción del algoritmo de Remez para bandas de amplitudes variantes	21
2.2. Convergencia del algoritmo	27
2.3. Diagrama de flujo	33
2.4. Ejemplos gráficos	35
3. Aproximación polinomial con bandas de amplitudes variantes y condiciones de interpolación	43
3.1. Existencia y unicidad del polinomio de la mejor aproximación con bandas de amplitudes variantes y condiciones de interpolación	44
3.2. Ejemplos gráficos	49
4. Aproximación polinomial con bandas de amplitudes variantes y funciones de error con ceros	53

4.1. Ejemplos de no existencia de polinomios de mejor aproximación polinomial con bandas de amplitudes variantes	55
4.2. Condiciones de suficiencia para la existencia y unicidad de la mejor aproximación polinomial	58
4.2.1. Condición de Holgura	58
4.2.2. Teoremas de Existencia y Unicidad	61
Conclusiones	66
Bibliografía	68

Capítulo 1

Aproximación polinomial mediante bandas de amplitudes variantes

El objetivo de este primer capítulo, es el de extender resultados obtenidos en la teoría de aproximación polinomial clásica uniforme o de Chebyshev, al contexto de "bandas de amplitudes variantes". Iniciaremos definiendo este concepto pues será recurrentemente utilizado en el presente trabajo.

Para funciones continuas f , h_1 y h_2 , sobre un conjunto compacto K , con h_1 y h_2 positivas y un escalar $\lambda > 0$, consideramos la banda o región cerrada del plano que denominaremos *de amplitud variante* y que está limitada por los grafos, sobre K , de las funciones $f - \lambda h_1$ y $f + \lambda h_2$, a las cuales llamaremos bordes de la banda. Para el caso particular en el que $h_1 = h_2 = 1$, nos referiremos a la banda como *uniforme*.

A manera de breve introducción, en el primer epígrafe revisaremos resultados conocidos sobre la existencia del polinomio de mejor aproximación polinomial a una función continua en un intervalo cerrado, así como la unicidad y caracterización de dicho polinomio (Teorema de Alternancia de Chebyshev). Posteriormente, generalizaremos el concepto de mejor aproximación y polinomio de mejor aproximación uniforme al concepto de bandas de amplitudes variantes. Se presentarán resultados que responden satisfactoriamente las preguntas que usualmente se formulan en la Teoría de la Aproximación, garantizándose la existencia, unicidad y caracterización del polinomio de la mejor aproximación polinomial en bandas de amplitudes variantes.

1.1. Aproximación uniforme clásica de Chebyshev

En este epígrafe recordaremos algunos resultados clásicos.

Sean (X, d) un espacio métrico y $Y \subset X, Y \neq \emptyset$, dado $x \in X$, el problema que se plantea es encontrar un elemento $y^* \in Y$ tal que $d(y^*, x) \leq d(y, x)$ para todo $y \in Y$.

No siempre es posible encontrar tales elementos; pero cuando existen se les denomina como de *mejor aproximación* de Y a x . Sin embargo, aún teniendo demostrada la existencia, no siempre se puede garantizar la unicidad de estos elementos.

En este primer epígrafe, $Y := P_n[a, b]$, el conjunto de los polinomios de grado a lo más n sobre $[a, b]$ y $X := C[a, b]$. La norma aquí considerada es la uniforme, definida por

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Bajo estas condiciones se estudia la existencia, unicidad y caracterización del polinomio de la mejor aproximación.

Para demostrar la existencia del polinomio de la mejor aproximación a una función continua, utilizaremos un resultado bien conocido dentro de la Teoría de Aproximación, enunciado en el teorema siguiente.

Teorema 1.1.1 (de Existencia) *Si X es un espacio normado y $Y \subset X$ un subespacio de X de dimensión finita, entonces dado $x \in X$ existe $y^* \in Y$ tal que*

$$\|x - y^*\| \leq \|x - y\| \quad \text{para todo } y \in Y.$$

En nuestro caso, $X = C[a, b]$ y $Y = P_n(x)$, satisfacen las hipótesis del teorema y por tanto se desprende de manera inmediata la existencia del polinomio de mejor aproximación a una función dada.

La demostración del teorema precedente es muy sencilla (vea [5] y [28]), pues se reduce al hecho de que una función real continua sobre un compacto, no vacío, alcanza sus valores extremos.

Dados $f \in C[a, b]$ y $n \in \mathbb{N}$, si p_n^* es un polinomio de mejor aproximación de P_n a f se verifica que $E_n = d(f, p_n^*)_{[a, b]}$, donde E_n esta definido como

$$E_n = E_n(f; [a, b]) := d(f, P_n)_{[a, b]}.$$

En seguida damos la definición de conjunto alternante, fundamental para enunciar y demostrar el teorema de caracterización.

Definición 1.1.2 *Un conjunto de $k + 1$ puntos $x_0, \dots, x_k \in [a, b]$, tales que $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_k \leq b$, es llamado conjunto alternante para la función $h \in C[a, b]$, si*

$$|h(x_j)| = \|h\|, \quad j = 0, \dots, k$$

y

$$h(x_j) = -h(x_{j+1}), \quad j = 0, \dots, k - 1.$$

Teorema 1.1.3 (de Alternancia de Chebyshev [4], [3]) *Dados $n \in \mathbb{N}$ y $f \in C[a, b]$; p_n^* es un polinomio de mejor aproximación de P_n a f , si y sólo si, existe un conjunto alternante de $n + 2$ puntos para la función $f - p_n^*$.*

Demostraciones contemporáneas de este teorema pueden encontrarse en diversos textos, aunque para nosotros es más cómodo tenerlo como un caso particular de [9] y de uno de nuestros resultados del epígrafe siguiente.

Lo que este teorema asevera, es que si tenemos una función continua f sobre un intervalo $[a, b]$ y consideramos la banda generada por las funciones $f \pm E_n$, entonces dentro de ésta se encuentra el grafo de un y sólo un polinomio de grado a lo más n , que se caracteriza por tomar valores coincidentes con los bordes de la banda, de manera alternada, en $n + 2$ puntos de $[a, b]$. Con un lenguaje más sencillo y aunque sea menos exacto diremos que la banda limitada por $f \pm E_n$, contiene un y sólo un polinomio de grado a lo más n y que éste toca arriba y abajo los bordes de la banda, de manera alternada, en $n + 2$ puntos del intervalo.

A partir de la caracterización de los polinomios de mejor aproximación se demuestra:

Teorema 1.1.4 (de Unicidad) *Dados $f \in C[a, b]$ y $n \in \mathbb{N}$, el polinomio p_n^* de la mejor aproximación de P_n a f es único.*

Como consecuencia del Teorema de Weiesstras, se deduce:

Teorema 1.1.5 *Dada $f \in C[a, b]$, si consideramos la sucesión de mejores aproximaciones polinomiales (p_n^*) a f , entonces la sucesión (p_n^*) converge uniformemente a f .*

Resultado que garantiza la convergencia uniforme de la sucesión de polinomios de mejores aproximaciones, a la función a la que aproximan.

1.2. Aproximación polinomial con bandas de amplitudes variantes

A continuación estudiaremos el problema de aproximación polinomial en el caso en el que la banda antes formada por las funciones f más menos la función constante E_n , se forme ahora al sumar y restar funciones estrictamente positivas. Antes daremos una definición generalizada a este nuevo contexto, del elemento de mejor aproximación y estudiaremos también aquí los problemas de existencia, caracterización y unicidad de la mejor aproximación.

Estos resultados extienden los expuestos en el epígrafe precedente. Además consideraremos ahora funciones definidas sobre conjuntos compactos de \mathbb{R} no necesariamente intervalos.

Esta última extensión es importante aún para la aproximación polinomial sobre intervalos, pues ofrece, como veremos, una alternativa al lema de la Vallée-Poussin al justificar el algoritmo de Rémez.

1.2.1. Definición de la mejor aproximación y polinomio de mejor aproximación mediante bandas de amplitudes variantes

Consideremos la banda delimitada por las funciones $f - \lambda h_1$ y $f + \lambda h_2$, donde h_1, h_2 y f son continuas, $h_1, h_2 > 0$, y $\lambda > 0$. La finalidad de introducir el parámetro λ , es el de expandir o contraer la banda, tanto como sea necesario, para "manipular" la entrada de polinomios de un grado determinado. Ver Fig. 1.1.

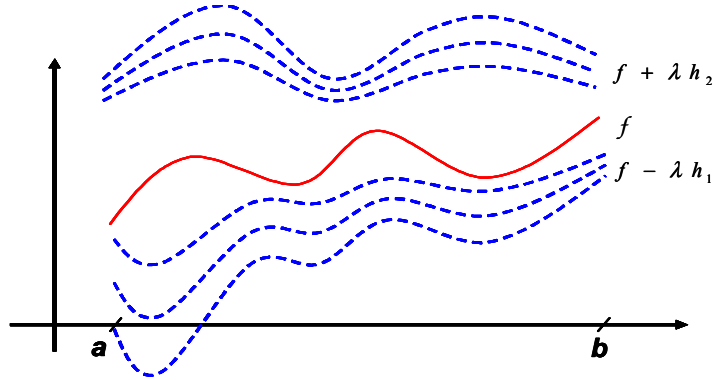


Fig. 1.1. El parámetro $\lambda \geq 0$ hace el efecto de abrir o cerrar la banda tanto como se necesite.

Planteemos ahora el problema de optimizar este parámetro a manera de generalizar la idea de la mejor aproximación uniforme.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y un conjunto $K \subset \mathbb{R}$ compacto, con al menos $n + 2$ elementos. Para $f, h_1, h_2 \in C(K)$, tales que $h_1, h_2 > 0$ y para cada escalar $\lambda \geq 0$, definimos el conjunto $M_\lambda = M_\lambda(n, f, h_1, h_2) \subset P_n$, el espacio de los polinomios algebraicos de grado a lo más n , como sigue:

$$M_\lambda := \{p \in P_n : \forall x \in K, (f - \lambda h_1)(x) \leq p(x) \leq (f + \lambda h_2)(x)\}.$$

Observemos que si $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$, entonces $M_{\lambda_1} \subset M_{\lambda_2}$, es decir $(M_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ es una familia creciente de conjuntos. Por otro lado, para cada $\lambda \geq 0$ podemos identificar M_λ con un subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} , a partir de los coeficientes de los polinomios, el cual resulta ser cerrado y acotado, como puede comprobarse fácilmente, por tanto compacto, con lo que tendríamos que M_λ también lo es.

Proposición 1.2.1 Sean $f, h_1, h_2 \in C(K)$, tales que $h_1, h_2 > 0$. Dado $n \in \mathbb{N}$, afirmamos que $M_\lambda \neq \emptyset$ para un valor de λ suficientemente grande.

Demostración. En efecto, sea $p \in P_n$. Consideremos la función $p - f$, la cual es continua y por tanto alcanza sus valores máximo y mínimo en el compacto K , es decir, para todo $x \in K$,

$$m \leq (p - f)(x) \leq M,$$

en donde $m = \min_{x \in K} (p - f)(x)$ y $M = \max_{x \in K} (p - f)(x)$. Por ser $h_1, h_2 > 0$ y continuas, existe $\lambda^* \geq 0$, tal que

$$-\lambda^* h_1 \leq m \quad \text{y} \quad M \leq \lambda^* h_2,$$

por tanto

$$f - \lambda^* h_1 \leq p \leq f + \lambda^* h_2.$$

Así, existe $\lambda \geq 0$ tal que $M_\lambda \neq \emptyset$. ■

Introduzcamos ahora las definiciones de mejor aproximación y polinomio de mejor aproximación en este contexto.

Definición 1.2.2 Sean $f, h_1, h_2 \in C(K)$, con $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ dados. Definimos la mejor aproximación de P_n a f , relativo a h_1 y h_2 , como el número

$$E_n = E_n(f, h_1, h_2) := \inf \{ \lambda \geq 0 : M_\lambda \neq \emptyset \}. \quad (1.1)$$

El valor de E_n está asociado al conjunto

$$M_{E_n} := \bigcap_{M_\lambda \neq \emptyset} M_\lambda.$$

Si el conjunto M_{E_n} es no vacío, a sus elementos se les denominará polinomios de mejor aproximación de P_n a f relativos a h_1 y h_2 o polinomios de mejor aproximación de P_n a f relativos al par (h_1, h_2) , cuando queremos enfatizar el hecho que h_1 actúa en el borde inferior de la banda y h_2 lo hace en el superior.

Dadas estas últimas definiciones, surge de manera natural una forma de calcular una norma llamada *asimétrica* sobre $C(K)$ relativa a las funciones h_1 y h_2 , dada de la manera siguiente :

Sean $h_1, h_2 : C(K) \rightarrow \mathbb{R}$, con $h_1, h_2 > 0$. Definimos la función

$$\rho : C(K) \rightarrow [0, \infty),$$

para $f \in C(K)$ como sigue:

$$\rho(f) := \rho_{h_1, h_2}(f) = \inf \{ \lambda > 0 : \forall x \in K, -\lambda h_1(x) \leq f(x) \leq \lambda h_2(x) \}.$$

Esta definición es conveniente desde un punto de vista analítico para describir el algoritmo que calcula la mejor aproximación en bandas variantes, tema que será abordado en el siguiente capítulo.

El funcional ρ satisface las propiedades que enumeramos en el teorema siguiente.

Teorema 1.2.3 *Dadas funciones $h_1, h_2 \in C(K)$ positivas, la función ρ_{h_1, h_2} , previamente definida, satisface lo siguiente:*

i) *Para cada $f \in C(K)$ se alcanza el ínfimo.*

ii) *La función ρ es subaditiva, esto es, para cada $f, g \in C(K)$*

$$\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g).$$

iii) *Existe $C > 0$, tal que cualquiera sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y cualquiera sea $f \in C(K)$,*

$$\rho(\alpha f) \leq C |\alpha| \rho(f).$$

iv) *Existen constantes $C_1, C_2 > 0$, tales que cualquiera sea $f \in C(K)$*

$$C_1 \|f\|_\infty \leq \rho(f) \leq C_2 \|f\|_\infty.$$

v) *Existe $C' > 0$ tal que cualesquiera sean $f, g \in C(K)$,*

$$|\rho(f) - \rho(g)| \leq C' \rho(f - g).$$

vi) *Si $(f_n) \subset C(K)$ es una sucesión que converge uniformemente a f , entonces*

$$\rho(f_n - f) \rightarrow 0 \wedge \rho(f_n) \rightarrow \rho(f).$$

Demostración.

i) Veamos que

$$A_\lambda := \{\lambda > 0 : \forall x \in K, -\lambda h_1(x) \leq f(x) \leq \lambda h_2(x)\},$$

es un subconjunto cerrado de \mathbb{R} . En efecto, sea (λ_n) una sucesión de A_λ , tal que $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$, luego

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in K \quad -\lambda_n h_1(x) \leq f(x) \leq \lambda_n h_2(x),$$

tomado límite se tiene que

$$\forall x \in K, -\lambda h_1(x) \leq f(x) \leq \lambda h_2(x) ;$$

luego $\lambda \in A_\lambda$.

Por otro lado, el conjunto A_λ es acotado superiormente pues tanto f como h_1 y h_2 son continuas sobre el compacto K . Así que A_λ es compacto por lo que el ínfimo se alcanza.

ii) Sean $f, g \in C(K)$, se tiene que

$$-\rho(f)h_1 \leq f \leq \rho(f)h_2$$

y

$$-\rho(g)h_1 \leq g \leq \rho(g)h_2.$$

Sumando ambas desigualdades

$$-(\rho(f) + \rho(g))h_1 \leq f + g \leq (\rho(f) + \rho(g))h_2;$$

esto implica que

$$\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g).$$

iii) Si $\alpha = 0$, $\alpha f = 0$ y

$$-0h_1 \leq 0 \leq 0h_2,$$

por tanto $\rho(\alpha f) \leq 0$, pero $\rho(\alpha f) \geq 0$, luego $\rho(\alpha f) = 0$, por lo que el resultado se cumple.

Tenemos que

$$-\rho(f)h_1 \leq f \leq \rho(f)h_2, \tag{1.2}$$

ahora bien, si $\alpha > 0$,

$$-\alpha\rho(f)h_1 \leq \alpha f \leq \alpha\rho(f)h_2,$$

es así que $\rho(\alpha f) \leq \alpha\rho(f)$. Por otro lado

$$-\rho(\alpha f)h_1 \leq \alpha f \leq \rho(\alpha f)h_2,$$

dividiendo por $\alpha > 0$

$$-(\rho(\alpha f)/\alpha)h_1 \leq f \leq (\rho(\alpha f)/\alpha)h_2$$

obtenemos que $\alpha\rho(f) \leq \rho(\alpha f)$. Por lo tanto $\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f)$.
Si $\alpha < 0$, multiplicando (1.2) por α , tenemos que

$$\alpha\rho(f)h_2 \leq \alpha f \leq -\alpha\rho(f)h_1,$$

sean $C_1 = \|h_1/h_2\|$ y $C_2 = \|h_2/h_1\|$, luego

$$\alpha\rho(f)C_2h_1 \leq \alpha\rho(f)h_2 \leq \alpha f \leq -\alpha\rho(f)h_1 \leq -\alpha\rho(f)C_1h_2,$$

tomando $C = \max\{C_1, C_2\}$, se tiene

$$\alpha C\rho(f)h_1 \leq \alpha f \leq -\alpha C\rho(f)h_2,$$

de aquí que $\rho(\alpha f) \leq |\alpha|C\rho(f)$. Por tanto el resultado se tiene para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv) Primero, sean

$$K_1 = \|1/h_1\|_\infty, \quad K_2 = \|1/h_2\|_\infty, \\ K'_1 = \max\{K_1, K_2\} \quad \text{y} \quad K'_2 = \max\{\|h_2\|_\infty, \|h_1\|_\infty\}.$$

Como

$$-\|f\|_\infty \leq f \leq \|f\|_\infty,$$

tenemos entonces que

$$-K'_1\|f\|_\infty h_1 \leq f \leq K'_1\|f\|_\infty h_2.$$

Es así que $\rho(f) \leq K'_1\|f\|_\infty$.

Por otro lado

$$-\rho(f)h_1 \leq f \leq \rho(f)h_2,$$

entonces

$$-K'_2\rho(f) \leq f \leq K'_2\rho(f);$$

luego $\|f\|_\infty \leq K'_2\rho(f)$.

v) Se tiene que:

$$\rho(f) = \rho(f - g + g) \leq \rho(f - g) + \rho(g),$$

luego

$$\rho(f) - \rho(g) \leq \rho(f - g),$$

intercambiando f con g obtenemos

$$\rho(g) - \rho(f) \leq \rho(g - f) = \rho((-1)(f - g)) \leq C_1\rho(f - g);$$

tomando $C = \max\{1, C_1\}$, tenemos el resultado deseado.

vi) Son consecuencias inmediatas de v) y vi).

■

Debido a la propiedad iii), ρ se denomina *norma asimétrica* y aunque ciertamente fue estudiada por Nudel'man y Krein, [15], no parece acertado atribuirles la denominación pues lo cierto es que, ya desde su primer trabajo en 1966, Moursund utilizó explícitamente la clasificación *asimétrica*.

1.2.2. Existencia, caracterización y unicidad del polinomio de mejor aproximación

Estamos ahora en la posibilidad de enunciar y demostrar los resultados que garantizan la existencia, unicidad y caracterización del polinomio de mejor aproximación, en el contexto de bandas de amplitudes variantes.

Teorema 1.2.4 (de Existencia) *Dados $f, h_1, h_2 \in C(K)$, $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto $M_{E_n} \neq \emptyset$. En particular el mínimo se alcanza en (1.1) y es mayor que 0, excepto que la función f coincida con un polinomio de P_n sobre K .*

Demostración. Para cada $\lambda \geq 0$, M_λ es compacto y la familia $(M_\lambda)_{\lambda < \lambda'}$, $\lambda' \geq 0$ tal que $M_{\lambda'} \neq \emptyset$, es decreciente, cuando λ decrece. Entonces tenemos una familia decreciente de conjuntos compactos no vacíos contenidos en un compacto $M_{\lambda'}$, por lo que su intersección es no vacía. ■

Notas:

1. Igualmente se pudo deducir la demostración desde i) del Teorema 1.2.2.
2. Observemos que este teorema es igualmente válido cuando sustituimos P_n por otras clases de funciones aproximantes donde podamos definir conjuntos M_λ compactos; y no vacíos para λ suficientemente grandes. Tales ejemplos de estas clases pueden ser subconjuntos cerrados de P_n , algunos tipos de splines, clases de funciones racionales, etc. Por otra parte, la condición de compacidad del dominio puede suplirse en ocasiones con hipótesis complementarias, lo que conviene tener en mente.

Bajo las condiciones ya mencionadas para f, h_1, h_2 y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que si $p^* \in P_n$ es un polinomio de mejor aproximación a f relativo a h_1 y h_2 , entonces existen al menos dos puntos $x_0, x_1 \in K$ tales que

$$(p^* - f)(x_0) = E_n h_2(x_0), \quad y \quad (p^* - f)(x_1) = -E_n h_1(x_1).$$

En efecto, si lo asegurado no fuese cierto, debido a la continuidad de p^*, f, h_1 y h_2 sobre el compacto K , la distancia entre las funciones $p^* - f$ y $-E_n h_1$ o de $p^* - f$ y $E_n h_2$ sería un número $m > 0$. Luego utilizando el polinomio $p^* - m/2$ o el polinomio $p^* + m/2$; obtendríamos que la mejor aproximación no es E_n . Lo cual queda formalizado en el lema siguiente.

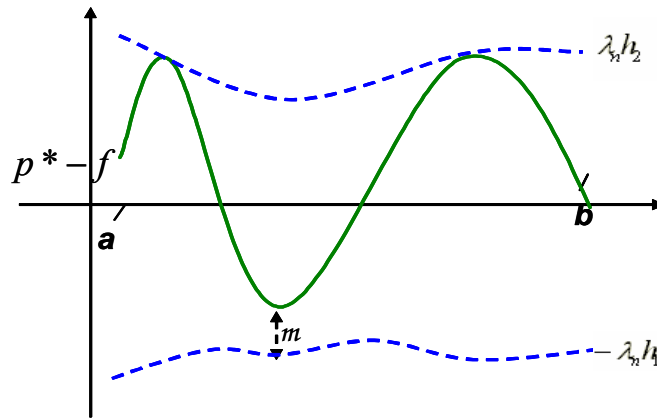


Fig. 1.2. Si la función $p^* - f$ no toca el borde inferior de la banda entonces $d(p^* - f, -E_n h_1) = m > 0$.

Lema 1.2.5 Sean $f, h_1, h_2 \in C(K)$, $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Sea $p^* \in P_n$ un polinomio de mejor aproximación a f relativo a h_1 y h_2 . Entonces existen al menos dos puntos $x_0, x_1 \in K$ tales que

$$(p^* - f)(x_0) = E_n h_2(x_0), \quad y \quad (p^* - f)(x_1) = -E_n h_1(x_1).$$

Antes de enunciar el teorema de caracterización demos la definición de conjunto alternante relativo al par (h_1, h_2) .

Definición 1.2.6 Sean $h_1, h_2 \in C(K)$ con $h_1, h_2 > 0$. Un conjunto de $k + 1$ puntos $x_0, \dots, x_k \in K$ tales que $x_0 < x_1 < \dots < x_k$, es llamado conjunto alternante para la función $h \in C(K)$ relativo al par (h_1, h_2) , si el valor de $\rho(h, h_1, h_2)$ es alcanzado en cada uno de estos puntos; pero alterna en signo con cada incremento de índice de i a $i + 1$.

A continuación enunciamos el teorema de caracterización del polinomio de la mejor aproximación polinomial, mediante el método de bandas de amplitudes variantes.

Teorema 1.2.7 (de Caracterización) Sean $f, h_1, h_2 \in C(K)$, $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. El polinomio, p_n^* , de grado a lo más n es de mejor aproximación a f relativo a h_1 y h_2 , si y sólo si, existe un conjunto alternante de $n + 2$ puntos, para la función $p_n^* - f$, relativo al par $(-E_n h_1, E_n h_2)$.

Demostración. Primero demostraremos que no se pierde generalidad al suponer que K es un intervalo. Si no lo fuese, sean p_n^* y E_n un polinomio de mejor aproximación y la mejor aproximación relativa a h_1 y h_2 , respectivamente.

Sea $[a, b]$ el menor intervalo cerrado que contiene a K . Por la compacidad de K se tiene que $a, b \in K$. Ahora, $[a, b] \setminus K$ es un conjunto abierto y del teorema de Cantor se sigue que este puede ser expresado como la unión de a lo más una colección numerable de intervalos abiertos disjuntos $K_m :=]a_m, b_m[$, $m = 1, 2, \dots$

Si esta colección no es vacía, o sea, si K no es ya un intervalo, prolongamos f sobre cada K_m de manera afín, uniendo los puntos $(a_m, f(a_m))$ y $(b_m, f(b_m))$. También definimos h_2 sobre K_m como una función lineal a trozos cuya gráfica una los puntos $(a_m, h_2(a_m))$ y $(b_m, h_2(b_m))$ y tal que $p_n^* - f < E_n h_2$, sobre cada K_m . Esto es posible hacerlo dado que $a_m, b_m \in K$, $(p_n^* - f)(a_m) \leq E_n h_2(a_m)$, $(p_n^* - f)(b_m) \leq E_n h_2(b_m)$ y la velocidad de crecimiento de $p_n^* - f$ sobre $[a_m, b_m]$ es acotado puesto que $p_n^* - f$ es un polinomio de grado a lo más $\max(n, 1)$ sobre $[a_m, b_m]$. De manera similar se define h_1 sobre cada K_m . Con estas prolongaciones f, h_1, h_2 son funciones continuas sobre $[a, b]$ y la desigualdad

$$-\lambda h_1(x) \leq (p_n^* - f)(x) \leq \lambda h_2(x)$$

se satisface para cada $x \in [a, b]$, además que $(p_n^* - f)(x) = -E_n h_1(x)$ o $(p_n^* - f)(x) = E_n h_2(x)$ son posibles sólo si $x \in K$.

Demostremos entonces el teorema bajo esta nueva hipótesis sobre K .

\Rightarrow) Sea \mathcal{C} la clase de todos los conjuntos alternantes, $\{x_0, \dots, x_k\} \subset [a, b]$, de la función $p_n^* - f$ relativa a $(E_n h_1, E_n h_2)$. Por el lema previo, existe un elemento en \mathcal{C} con al menos dos elementos. Para cada $\{x_0, \dots, x_k\} \in \mathcal{C}$ se satisface

$$(p_n^* - f)(x_j) = E_n h_2(x_j)$$

y

$$(p_n^* - f)(x_{j+1}) = -E_n h_1(x_{j+1}),$$

$j = 0, 2, \dots$; o bien

$$(p_n^* - f)(x_j) = -E_n h_1(x_j)$$

y

$$(p_n^* - f)(x_{j+1}) = E_n h_2(x_{j+1}),$$

$j = 0, 2, \dots$. Afirmamos que alguno de los conjuntos alternantes en la clase \mathcal{C} , tiene $n + 2$ o más elementos. En efecto, si no fuere así, consideremos un conjunto alternante cualquiera de los que tienen el máximo de elementos posibles $\{x_0, \dots, x_k\}$, $1 \leq k \leq n$.

Sin pérdida de generalidad supondremos que

$$(p_n^* - f)(x_0) = E_n h_2(x_0).$$

Los conjuntos

$$A := [p_n^* - f = E_n h_2] \text{ y } B := [p_n^* - f = -E_n h_1]$$

son compactos, dada la continuidad de las funciones involucradas, así que $A \cap [a, x_0]$ es compacto y por tanto este conjunto de números reales tiene un mínimo x'_0 y un máximo x''_0 . Observemos que no existe $z \in B$, tal que $x'_0 < z < x''_0$ pues entonces el conjunto $\{z, x_0, \dots, x_k\}$ sería un conjunto alternante con más de $k + 1$ elementos

Igualmente, $B \cap [x''_0, x_2]$ tiene un mínimo en x'_1 y un máximo x''_1 y no existe $x'_1 < z < x''_1$, $z \in A$. Por inducción tenemos una sucesión de puntos

$$a \leq x'_0 \leq x''_0 < x'_1 \leq x''_1 < \dots < x'_k \leq x''_k \leq b.$$

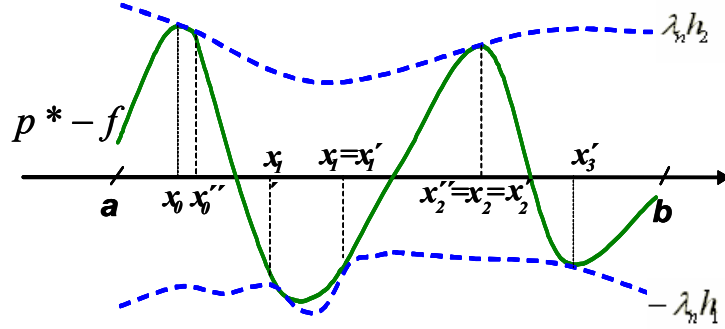


Fig. 1.3. Distribución de los puntos $x'_0, x''_0, \dots, x'_k, x''_k$ en $[a, b]$.

Además si $I_j = [x'_j, x''_j]$, $0 \leq j \leq k$, tenemos que $A \subset I_0 \cup I_2 \cup \dots \cup I_r$ y $B \subset I_1 \cup I_3 \cup \dots \cup I_s$, r par y s impar; $\max(r, s) = k$ y

$$(I_0 \cup I_2 \cup \dots \cup I_r) \cap (I_1 \cup I_3 \cup \dots \cup I_s) = \phi.$$

Tomemos z_j tal que $x''_{j-1} < z_j < x'_j$, $1 \leq j \leq k$ y consideremos el polinomio $q \in P_n$,

$$q(x) := (z_1 - x) \cdots (z_k - x),$$

es claro que $p_n^* - f$ y q tienen el mismo signo sobre cada I_j . En cada intervalo $[z_i, z_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k$, donde $z_0 = a$ y $z_{k+1} = b$ se tiene que

$$\min \{(E_n h_2 - p_n^* + f)(x) : x \in [z_i, z_{i+1}]\} = \alpha_i > 0$$

o

$$\min \{(E_n h_1 + p_n^* - f)(x) : x \in [z_i, z_{i+1}]\} = \alpha_i > 0.$$

Tomemos ahora

$$M := \max_{a \leq x \leq b} |q(x)|,$$

y elegimos $\mu > 0$ tal que

$$\mu M < \min(\alpha_i : i = 1, \dots, k).$$

Consideremos $p(x) = p_n^*(x) - \mu q(x)$, polinomio de grado a lo más n y observemos que p está en la banda generada por $-E_n h_1$ y $E_n h_2$, es decir, es un polinomio de la mejor aproximación. Pero no toca a los bordes, por una observación anterior, esto no es posible.

\Leftrightarrow) Para n fijo, sean $p \in P_n$ y $\lambda > 0$, con $p \in M_\lambda$ y para el cual existen $n + 2$ puntos distintos, $x_0, \dots, x_{n+1} \in [a, b]$ tales que

$$(p - f)(x_i) = -\lambda h_1(x_i)$$

y

$$(p - f)(x_{i+1}) = \lambda h_2(x_{i+1}),$$

o bien

$$(p - f)(x_i) = \lambda h_2(x_i)$$

y

$$(p - f)(x_{i+1}) = -\lambda h_1(x_{i+1}),$$

para $i = 0, 2, 4, \dots$; supongamos que $(p - f)(x_0) = -\lambda h_1(x_0)$.

Si $p \in P_n$ no es un polinomio de mejor aproximación, entonces $E_n < \lambda$ y $p \neq p_n^*$.

Luego

$$(p - f)(x_i) < (p_n^* - f)(x_i)$$

y

$$(p_n^* - f)(x_{i+1}) < (p - f)(x_{i+1}),$$

para $i = 0, 2, 4, \dots$; esto implica que la función continua

$$((p_n^* - f) - (p - f)) = p_n^* - p,$$

cambia de signo en al menos $n + 2$ puntos distintos de $[a, b]$, pero $p_n^* - p \in P_n$, luego tiene $n + 1$ ceros en $[a, b]$; entonces debe ser $p_n^* - p \equiv 0$, contradictoriamente a lo supuesto. ■

Dadas $f, h_1, h_2 \in C(K)$, $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, acabamos de ver que los polinomios de grado a lo más n de mejor aproximación a f , relativos a h_1 y h_2 , se caracterizan por tocar a los bordes de la banda en $n + 2$ puntos de K de manera alternada. Esto último y el resultado obtenido por los doctores Guerra y Jiménez [9], nos dan la unicidad del polinomio de mejor aproximación que formalizaremos en el teorema siguiente.

Teorema 1.2.8 (de Unicidad) Sean $f, h_1, h_2 \in C(K)$, $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces el polinomio de mejor aproximación de grado a lo más n a f relativo a h_1 y h_2 es único.

Demostración. Sea p_n^* un polinomio de mejor aproximación a f relativo a h_1 y h_2 . Por el Teorema 1.2.6, $p_n^* - f$ toca en $n + 2$ puntos distintos de K y de manera alternada a las funciones $-E_n h_1$ y $E_n h_2$. Por el resultado Guerra-Jiménez, [9], se debe tener que $M_{E_n} = \{p_n^*\}$. ■

Observemos que en el caso particular en que $h_1 = h_2 = 1$ y K es un intervalo cerrado, los últimos resultados son compatibles con los de la aproximación polinomial clásica uniforme.

Enunciamos a continuación el teorema del cual se desprende la convergencia de los polinomios de mejores aproximaciones en el contexto de bandas de amplitudes variantes, dado que así lo hacen en el caso de la aproximación clásica uniforme.

Estamos interesados en comparar la sucesión $E_n(f, h_1, h_2)$, de mejores aproximaciones relativas a h_1 y h_2 ; con la sucesión $E_n(f, 1, 1)$ de la mejor aproximación uniforme tradicional.

Definamos

$$M = \max_{i=1,2} \left\{ \max_{x \in K} \{h_i(x)\} \right\}$$

y

$$m = \min_{i=1,2} \left\{ \min_{x \in K} \{h_i(x)\} \right\}.$$

Se tiene $0 < m \leq M < \infty$.

Teorema 1.2.9 Para $f, h_1, h_2 \in C(K)$, $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene,

$$\frac{E_n(f, 1, 1)}{M} \leq E_n(f, h_1, h_2) \leq \frac{E_n(f, 1, 1)}{m}$$

o equivalentemente

$$mE_n(f, h_1, h_2) \leq E_n(f, 1, 1) \leq ME_n(f, h_1, h_2).$$

Demostración. Fijemos n . No perdemos generalidad si suponemos que f no es ella misma un polinomio de grado a lo más n , en cuyo caso $E_n(f, 1, 1) = E_n(f, h_1, h_2) = 0$. Sean p_n^* y q_n^* , los polinomios de mejor aproximación a f , de grado a lo sumo n , relativos a h_1 y h_2 y a la aproximación uniforme; respectivamente. Tenemos

$$-E_n(f, h_1, h_2)h_1(x) \leq (p_n^* - f)(x) \leq E_n(f, h_1, h_2)h_2(x),$$

luego

$$-E_n(f, h_1, h_2)M \leq (p_n^* - f)(x) \leq E_n(f, h_1, h_2)M,$$

entonces

$$E_n(f, 1, 1) \leq ME_n(f, h_1, h_2)(f).$$

Por otro lado

$$-E_n(f, 1, 1) \leq (q_n^* - f)(x) \leq E_n(f, 1, 1),$$

así

$$-\frac{E_n(f, 1, 1)}{m}h_1(x) \leq (q_n^* - f)(x) \leq \frac{E_n(f, 1, 1)}{m}h_2(x),$$

de aquí

$$E_n(f, h_1, h_2) \leq \frac{E_n(f, 1, 1)}{m},$$

con lo cual concluimos la demostración. ■

En el capítulo siguiente presentamos una versión mejorada del algoritmo de Remez por medio de la cual calculamos la mejor aproximación polinomial en bandas de amplitudes variantes.

Capítulo 2

Cálculo de la mejor aproximación polinomial en el contexto de bandas de amplitudes variantes

Analizamos ahora el delicado problema de cómo calcular al menos aproximadamente, el polinomio de la mejor aproximación ante un problema particular dado.

El algoritmo de Remez es un procedimiento mediante el cual se sugiere como calcular polinomios, de grado a lo más n , que sean buenas aproximaciones al de mejor aproximación uniforme clásica (o de Chebyshev), p_n^* , a una función continua f dada sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.

Es un algoritmo recursivo que consiste en seleccionar $n + 2$ puntos $X : a \leq x_0 < \dots < x_{n+1} \leq b$ y aproximar p_n^* por el polinomio $p(x) = \sum_0^n a_j x^j$ que mejor aproxima a f sobre el conjunto $\{x_0, \dots, x_{n+1}\}$ y que satisfaga una propiedad de alternancia sobre dicha partición. El polinomio p se obtiene de resolver el sistema:

$$\sum_0^n a_j x_i^j + (-1)^i \lambda = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n + 1, \quad (2.1)$$

con incógnitas a_j , $j = 0, \dots, n$ y λ . Se definen sucesiones de $n + 2$ puntos y polinomios de mejores aproximaciones de manera recursiva en cada iteración

de la manera siguiente: Sea y un punto donde

$$|(f - p)(y)| = \|f - p\|,$$

en la etapa k -ésima. La sucesión X_{k+1} es obtenida de X_k reemplazando uno de los puntos $x_i \in X_k$ por y y dejando todos los otros puntos sin cambios. La elección de i se hace de tal manera que $f - p$ alterne en signo en los puntos de la nueva partición. Existen formas generalizadas del algoritmo en el cual se cambian varios puntos de la tabla k , pero la forma arriba descrita es la que utilizaremos. Como referencia del algoritmo clásico y sus variantes pueden consultarse [5], [6] y [27].

En [19] se presenta una extensión del algoritmo de Remez para calcular polinomios de mejor aproximación pesada en sentido general con restricciones de interpolación. En este capítulo retomaremos este tema y presentamos una versión extendida del algoritmo que posee las ventajas siguientes:

- No necesita hipótesis de suavidad de las funciones de error.
- Es práctico, en el sentido de que puede ser programado tal y como lo hemos hecho, de lo cual presentamos ejemplos al final de este capítulo.
- Aunque está dirigido al cálculo aproximado del polinomio de la mejor aproximación mediante bandas de amplitudes variantes, se adapta fácilmente, como explicaremos y ejemplificaremos posteriormente, al caso de la aproximación con condiciones de interpolación.

En lo que sigue se supone que f no es ella misma un polinomio de grado a lo sumo n .

2.1. Descripción del algoritmo de Remez para bandas de amplitudes variantes

En efecto, siguiendo la idea del algoritmo de Remez y contando con una versión general del teorema de alternancia, proponemos adaptar el algoritmo

al caso de bandas de amplitudes variantes mediante el cambio del sistema de ecuaciones (2.1), por

$$\begin{cases} \sum_0^n a_j x_i^j + \lambda h_1(x_j) = f(x_j), & j \text{ par} \\ \sum_0^n a_j x_i^j - \lambda h_2(x_j) = f(x_j), & j \text{ impar} \end{cases}, \quad (2.2)$$

o por

$$\begin{cases} \sum_0^n a_j x_i^j + \lambda h_1(x_j) = f(x_j), & j \text{ impar} \\ \sum_0^n a_j x_i^j - \lambda h_2(x_j) = f(x_j), & j \text{ par} \end{cases}, \quad (2.3)$$

según el sistema del cual resulte $\lambda > 0$. Esta situación quedará plenamente analizada enseguida.

Posteriormente escogeremos $y \in [a, b]$ como el punto donde se alcance $\rho_{h_1, h_2}(p - f)$ y de manera análoga a la anterior, generamos la nueva partición intercambiando un x_j por y , escogiendo k de manera tal que la nueva sucesión de puntos siga conservando la propiedad de alternancia de $p - f$. Ver Fig. (2.1).

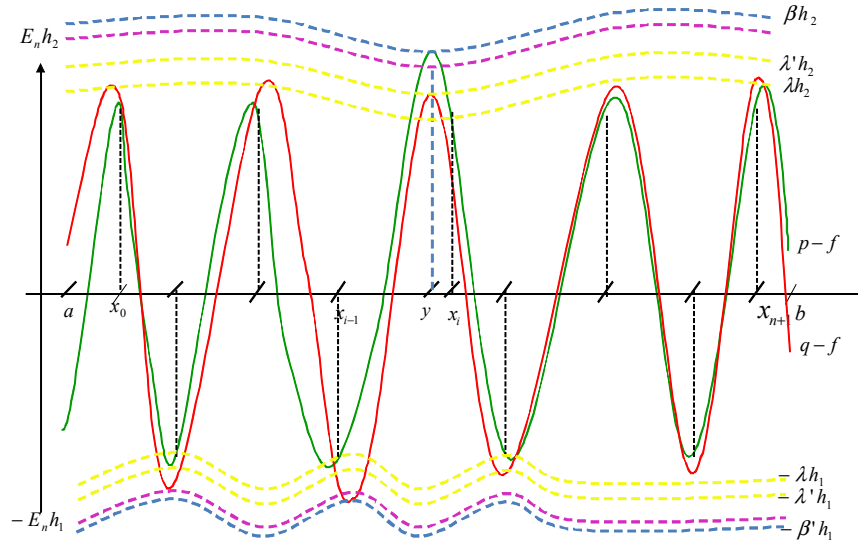


Fig. 2.1. Idea gráfica de una iteración del algoritmo de Remez.

Veamos que sucede: Al seleccionar un conjunto ordenado $X \in [a, b]$ de $n + 2$ elementos, la restricción de f a X , es continua (¡incluso si f no fuese continua sobre $[a, b]$!). Por los teoremas de existencia y unicidad, válidos para compactos reales con $n + 2$ puntos o más, existe un polinomio $p \in P_n$ y sólo uno, de mejor aproximación a $f|_X$ relativo a las funciones de error $h_1|_X$ y $h_2|_X$ sobre X . Si $f \in P_n|_{[a,b]}$, obviamente p_n^* es el único polinomio en P_n tal que $p_n^*|_{[a,b]} = f$ y la única ocasión en la cual $E_n(f, h_1, h_2) = 0$, por ello hemos excluido este caso trivial.

Pudiese ocurrir, sin embargo, que existiese $q_n^* \in P_n$, tal que $q_n^*|_X = f|_X$ y en este caso $E_n(f|_X, h_1|_X, h_2|_X) = 0$. En una tal situación teórica, como suponemos $f|_{[a,b]} \notin P_n|_{[a,b]}$, existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $q_n^*(\bar{x}) \neq f(\bar{x})$. Sustituimos un punto $x_i \in X$ por \bar{x} , tal que el nuevo conjunto Y continúe siendo ordenado. Reiniciamos el proceso con Y y con ello se garantiza que $E_n(f|_Y, h_1|_Y, h_2|_Y) \neq 0$. Una vez que esto ocurre, la mejor aproximación ya nunca volverá a ser cero en los pasos sucesivos. Para simplificar las notaciones, continuaremos denotando X al conjunto ordenado de partida y suponiendo que $f|_X \notin P_n|_X$. Denotamos por λ a $E_n(f|_X, h_1|_X, h_2|_X)$. Tenemos que $p \in P_n$ es la mejor aproximación polinomial a f en X si y sólo si p y λ satisfacen uno y sólo uno de los sistemas (2.2) o (2.3). Ningún teorema o criterio nos permite saber si

$$p(x_0) = f(x_0) - \lambda h_1(x_0)$$

o si

$$p(x_0) = f(x_0) + \lambda h_2(x_0).$$

Pero sabemos que $\lambda > 0$, con lo cual discriminaremos el sistema conveniente a partir del lema siguiente.

Lema 2.1.1 *Si en una iteración del algoritmo de Remez al resolver el sistema de ecuaciones (2.2), para X , se obtiene $\lambda < 0$, entonces*

$$-\lambda = E_n(f|_X, h_2|_X, h_1|_X);$$

es decir las ecuaciones (2.2) serían las adecuadas para el estudio del problema en el que las funciones error corresponden al par (h_2, h_1) . Por el contrario, si $\lambda > 0$, entonces

$$\lambda = E_n(f|_X, h_1|_X, h_2|_X).$$

Una situación similar ocurre con el sistema (2.3) y en uno y sólo un sistema $\lambda > 0$.

Demostración. Sea $X := \{x_0, \dots, x_{n+1}\}$, puede ocurrir que el polinomio óptimo, p , de la mejor aproximación a f sobre X , relativo al par (h_1, h_2) , empiece tocando al borde inferior de la banda o bien que toque al superior, analicemos por casos.

Para el caso en el que se empieza tocando a $f - \lambda h_1$, p debe satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} p(x_j) + \lambda h_1(x_j) = f(x_j), & j \text{ par} & (1) \\ p(x_j) - \lambda h_2(x_j) = f(x_j), & j \text{ impar} & (2) \end{cases},$$

con $\lambda > 0$.

Para el caso en el que empieza tocando a $f + \lambda h_2$, p es solución al sistema

$$\begin{cases} p(x_j) - \lambda h_2(x_j) = f(x_j), & j \text{ par} & (3) \\ p(x_j) + \lambda h_1(x_j) = f(x_j), & j \text{ impar} & (4) \end{cases},$$

con $\lambda > 0$.

Analicemos ahora el problema recíproco, en el que las funciones error corresponden al par (h_2, h_1) . Nuevamente el polinomio óptimo tiene dos posibilidades; comienza tocando el borde inferior o el superior de la banda. Empezando con $f - \lambda h_2$, se debe satisfacer:

$$\begin{cases} p(x_j) + \mu h_2(x_j) = f(x_j), & j \text{ par} & (5) \\ p(x_j) - \mu h_1(x_j) = f(x_j), & j \text{ impar} & (6) \end{cases},$$

Empezando a tocar a $f + \lambda h_1$, el sistema correspondiente es:

$$\begin{cases} p(x_j) - \mu h_1(x_j) = f(x_j), & j \text{ par} & (7) \\ p(x_j) + \mu h_2(x_j) = f(x_j), & j \text{ impar} & (8) \end{cases}.$$

Observemos que (7) y (8) tienen la misma solución de (1) y (2), con $\lambda = -\mu$, y que (5) y (6) tienen la misma solución de (3) y (4) para $\lambda = -\mu$.

Puesto que algún sistema (1)-(2) o (3)-(4) es cierto, si al resolver (1)-(2) se obtiene $\lambda < 0$, entonces se tiene la mejor aproximación a f sobre X relativa al par (h_2, h_1) y la información de que p comienza alcanzando el borde superior de la banda. Ahora bien si $\lambda < 0$ para las ecuaciones (3)-(4) entonces tenemos la mejor aproximación a f sobre X relativa al par (h_2, h_1) pero que p empieza tocando el borde inferior de la banda, $f - \lambda h_2$. Concluimos que

bajo el supuesto $\lambda < 0$, estamos en el problema de aproximación polinomial con funciones de error (h_2, h_1) . ■

De acuerdo al algoritmo antes descrito, para cada sucesión de puntos $X : a \leq x_0 < \dots < x_{n+1} \leq b$, denotamos por $Y : a \leq y_0 < \dots < y_{n+1} \leq b$ a la siguiente. Definimos:

i) α tal que

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n a_i x_j^i + \alpha h_1(x_j) = f(x_j), & j \text{ par} \\ \sum_{i=0}^n a_i x_j^i - \alpha h_2(x_j) = f(x_j), & j \text{ impar} \end{cases}, \quad (2.4)$$

con incógnitas $a_j, j = 0, \dots, n$ y α . Si $\alpha > 0$, definimos $\lambda := \alpha$ y consideramos el sistema de ecuaciones (2.4) para calcular λ en la siguiente iteración; si $\alpha < 0$ entonces consideramos el sistema

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n a_i x_j^i + \lambda h_1(x_j) = f(x_j), & j \text{ impar} \\ \sum_{i=0}^n a_i x_j^i - \lambda h_2(x_j) = f(x_j), & j \text{ par.} \end{cases}. \quad (2.5)$$

Hacer esto al principio de cada iteración nos permitirá tener $\lambda > 0$ en cada secuencia del algoritmo.

Por otro lado λ es la mejor aproximación de P_n a f , respecto de h_1 y h_2 sobre el conjunto $X \subseteq [a, b]$, por lo tanto $E_n(f, h_1, h_2)$, la mejor aproximación de P_n a f , respecto de h_1 y h_2 sobre $[a, b]$, satisface:

$$\lambda \leq E_n(f, h_1, h_2). \quad (2.6)$$

ii) Dado un polinomio algebraico $p \in P_n$, denotamos como

$$\beta = \beta(p) := \rho_{h_1, h_2}(p - f)$$

Por construcción, β satisface la desigualdad

$$\forall x \in [a, b], \quad (f - \beta h_1)(x) \leq p(x) \leq (f + \beta h_2)(x)$$

luego

$$\beta \geq E_n(f, h_1, h_2). \quad (2.7)$$

Se verifica fácilmente que

$$\beta = \max \left\{ \max_{x \in [a, b]} \left(\frac{p - f}{h_2} \right) (x), \max_{x \in [a, b]} \left(\frac{f - p}{h_1} \right) (x) \right\}.$$

Así el punto y que entra en la nueva tabla es un punto del intervalo en el que el valor de β es alcanzado.

Por las desigualdades (2.6) y (2.7) tenemos que

$$\lambda \leq E_n(f, h_1, h_2) \leq \beta. \quad (2.8)$$

A continuación demostramos la convergencia del algoritmo aquí presentado, dicha demostración es novedosa, aún para el caso clásico. La nuestra es una demostración cualitativa, es relativamente sencilla y comprensible, dada la idea geométrica seguida. Es una demostración destinada a probar la convergencia, no a estimar el orden de convergencia del algoritmo, aunque conjeturamos que podría demostrarse que éste es similar a la del algoritmo usual, debido a que básicamente sólo modificamos una columna del sistema de ecuaciones por el cual calculamos los coeficientes del polinomio de la mejor aproximación uniforme. Sin embargo la complejidad computacional de nuestro algoritmo y el clásico es la misma, por esta misma razón, debido a que el número de operaciones realizadas por la computadora en el algoritmo de Remez usual y el propuesto por nosotros es el mismo.

Denotaremos con λ' el valor correspondiente a λ en la siguiente iteración del algoritmo, así como q y y_0, \dots, y_{n+1} denotarán el polinomio y tabla de la siguiente iteración del algoritmo, respectivamente.

En lo que sigue asumiremos que la primera tabla del algoritmo satisface el sistema de ecuaciones (2.4), con $\alpha > 0$, es decir el polinomio, p , de la mejor aproximación a f sobre X , relativo al par (h_1, h_2) , empieza tocando el borde inferior de la banda. Para el otro caso se pueden realizar demostraciones análogas.

2.2. Convergencia del algoritmo

A continuación demostraremos la convergencia del algoritmo de Remez, para el cálculo de la mejor aproximación polinomial en el contexto de bandas variantes, previamente probaremos algunos lemas y un teorema que sustentarán dicho resultado. Enunciemos y demostremos el siguiente resultado que es herramienta fundamental para su uso posterior.

Lema 2.2.1 *Sean dados $p_1, p_2 \in P_n$ y $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$ tales que $p_1(x_k) \leq p_2(x_k)$ para k par y $p_2(x_k) \leq p_1(x_k)$ para k impar. Entonces $p_1 \equiv p_2$.*

Demostración. Los polinomios p_1 y p_2 tienen un cero común en cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n$. Si en dos subintervalos consecutivos $[x_k, x_{k+1}]$ y $[x_{k+1}, x_{k+2}]$, $k = 0, \dots, n-1$, no tuviéramos dos ceros distintos de $p_1 - p_2$, ello determinaría que $p_1 - p_2$ no cambia de signo en $[x_k, x_{k+2}]$. Luego el cero común en x_{k+1} es doble. Así $p_1 - p_2$ tiene al menos $n + 1$ ceros contando multiplicidad y por tanto $p_1 \equiv p_2$. ■

Observación: Es trivial; pero conveniente enfatizar que los papeles de p_1 y p_2 pueden intercambiarse. Luego el lema es válido igualmente si

$$p_2(x_k) \leq p_1(x_k),$$

para k par y

$$p_1(x_k) \leq p_2(x_k),$$

para k impar.

Teorema 2.2.2 *La sucesión (λ_m) , generada por el algoritmo de Remez para el cálculo de la mejor aproximación polinomial mediante bandas de amplitudes variantes, es creciente y convergente.*

Demostración. Si $\lambda = \beta$, debido a (2.8) tendríamos $\lambda = E(f, h_1, h_2)$ y tanto el valor como el polinomio de mejores aproximaciones habrían sido encontrados en ese paso de iteración. Con ello no solamente el teorema sino la convergencia del algoritmo son demostrados. Si $\lambda \neq \beta$, entonces $p \neq q$. Por ello $\lambda \neq \lambda'$; pues si $\lambda = \lambda'$ tendríamos $p = q$ en $n + 1$ puntos distintos y por ende en todo $[a, b]$. Asumamos entonces la hipótesis $\lambda \neq \lambda'$.

A continuación demostraremos que (λ_m) es estrictamente creciente, esto es $\lambda' > \lambda$. Supongamos que $0 < \lambda' < \lambda$, entonces

$$\begin{aligned} q(y_j) - f(y_j) &= -\lambda' h_1(y_j), & j \text{ par} \\ q(y_j) - f(y_j) &= \lambda' h_2(y_j), & j \text{ impar} \end{aligned} ,$$

y

$$\begin{aligned} p(x_j) - f(x_j) &= -\lambda h_1(x_j), & j \text{ par} \\ p(x_j) - f(x_j) &= \lambda h_2(x_j), & j \text{ impar} \end{aligned} ,$$

de aquí que

$$q(y_j) - f(y_j) \geq p(x_j) - f(x_j), \quad j \text{ par}, j \neq k$$

y

$$q(y_j) - f(y_j) \leq p(x_j) - f(x_j), \quad j \text{ impar } j \neq k,$$

donde k es el índice del nodo que va a ser cambiado. Pero $y_j = x_j$, para $j \neq k$. así

$$q(x_j) \geq p(x_j), \quad j \text{ par}, j \neq k$$

y

$$p(x_j) \geq q(x_j), \quad j \text{ impar } j \neq k.$$

Por definición, en el punto y_k se alcanza el valor β , es decir:

$$(p - f)(y_k) = \beta h_2(y_k),$$

o bien

$$(p - f)(y_k) = -\beta h_1(y_k).$$

Supóngase ahora que ocurre lo primero, entonces

$$\begin{aligned} (p - f)(y_k) &= \beta h_2(y_k) \\ &\geq \lambda h_2(y_k) \\ &> \lambda' h_2(y_k) \\ &= (q - f)(y_k). \end{aligned}$$

Si ocurre lo segundo entonces

$$\begin{aligned} (p - f)(y_k) &= -\beta h_1(y_k) \\ &\leq -\lambda h_1(y_k) \\ &< -\lambda' h_1(y_k) \\ &= (q - f)(y_k). \end{aligned}$$

Luego el polinomio $p - q$, de grado a lo más n , cambia de signo en $n + 2$ puntos distintos, por el lema anterior se debe tener que $p \equiv q$, esto implicaría que $\lambda' = \lambda$, pero hemos descartado este caso previamente. Es así que $\lambda > \lambda'$, es decir, la sucesión (λ_m) es estrictamente creciente.

Por otro lado, según la desigualdad (2.6), la sucesión (λ_m) es acotada superiormente por $E_n(f)$.

Dado que (λ_m) es creciente y acotada superiormente debe converger a algún valor λ . ■

Consideremos ahora la sucesión de vectores $(X)^m := ((x_0^m, \dots, x_{n+1}^m))$ generada en el algoritmo con cada λ_m , demostraremos en el lema siguiente que la distancia entre los elementos de cada vector X^m siempre se mantiene mayor o igual a un número fijo.

Lema 2.2.3 *Existe $\eta > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, $(x_{i+1}^m - x_i^m) > \eta$, $i = 0, \dots, n$.*

Demostración. Primero mostraremos que cualquier subsucesión convergente de la sucesión de vectores $(X)^m := ((x_0^m, \dots, x_{n+1}^m))$, generada en el algoritmo con cada λ_m , converge a un vector con coordenadas diferentes. Sean $(X)^{\alpha(m)} \subset (X)^m$ convergente, $(\lambda_{\alpha(m)})$ la subsucesión correspondiente a dicha subsucesión y

$$X := (x_0, \dots, x_{n+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} (X)^{\alpha(m)}.$$

Supongamos que X tiene una o más coordenadas iguales, existe entonces al menos un polinomio q , con $\text{grad}(q) \leq n$, que interpola a f en la tabla de coordenadas X . Siendo f y q uniformemente continuas sobre $[a, b]$, existe $\delta > 0$ tal que si $y_1, y_2 \in [a, b]$ son tales que $|y_1 - y_2| < \delta$, entonces

$$|q(y_1) - q(y_2)| < \lambda/4C,$$

y

$$|f(y_1) - f(y_2)| < \lambda/4C,$$

donde $C = \max \{1/\|h_1\|_\infty, 1/\|h_2\|_\infty\}$. Como la convergencia de una sucesión de vectores de $n + 2$ coordenadas, es equivalente a la convergencia coordenada a coordenada, tendremos para m grande que cada $x_j^{\alpha(m)}$ dista en menos de δ a x_j . Para este m sea j tal que:

$$\begin{aligned} \rho \left(q \left(x_j^{\alpha(m)} \right) - f \left(x_j^{\alpha(m)} \right) \right) &\geq \max_{0 \leq s \leq n+1} \rho \left(p_n \left(x_s^{\alpha(m)} \right) - f \left(x_s^{\alpha(m)} \right) \right) \\ &\geq E_n (f, h_1, h_2)_{X^{\alpha(m)}} \\ &= \lambda_{\alpha(m)}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \left| q \left(x_j^{\alpha(m)} \right) - f \left(x_j^{\alpha(m)} \right) \right| &\leq \left| q \left(x_j^{\alpha(m)} \right) - p_n \left(x_p \right) \right| + \left| q \left(x_p \right) - f \left(x_p \right) \right| \\ &\quad + \left| f \left(x_p \right) - f \left(x_j^{\alpha(m)} \right) \right| \\ &\leq \lambda_{\alpha(m)}/4C + 0 + \lambda_{\alpha(m)}/4C \\ &= \lambda_{\alpha(m)}/2C. \end{aligned}$$

Por el teorema 1.2.3 v),

$$\begin{aligned} \rho \left(q \left(x_j^{\alpha(m)} \right) - f \left(x_j^{\alpha(m)} \right) \right) &\leq C \left| q \left(x_j^{\alpha(m)} \right) - f \left(x_j^{\alpha(m)} \right) \right| \\ &\leq \lambda_{\alpha(m)}/2 \\ &< \lambda_{\alpha(m)}. \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, por lo que X debe tener todas sus coordenadas distintas.

Por otro lado, si la tesis no se cumpliera para cada m tomamos una subsucesión $(X^{\alpha(m)})$ de (X^m) tal que,

$$\left| x_j^{\alpha(m)} - x_{j+1}^{\alpha(m)} \right| \leq 1/n,$$

esta subsucesión de vectores no satisface lo ya demostrado. ■

Consideremos ahora $L_Y \in P_n$, el polinomio de Lagrange que interpola los puntos

$$\begin{aligned} (y_j, -h_1(y_j)), \quad j \neq k, \quad j \text{ par} \\ (y_j, h_2(y_j)), \quad j \neq k, \quad j \text{ impar}, \end{aligned}$$

entonces el polinomio $q_L := p + \Delta\lambda L_Y$, con $\Delta\lambda := \lambda' - \lambda$, satisface

$$\begin{aligned} q_L(y_j) &= p(y_j) + \Delta\lambda L_Y(y_j) \\ &= \begin{cases} p(y_j) - \Delta\lambda h_1(y_j) & j \neq k, j \text{ par} \\ p(y_j) + \Delta\lambda h_2(y_j) & j \neq k, j \text{ impar} \end{cases}, \end{aligned}$$

pero $y_j = x_j$, para $j \neq k$, así

$$\begin{aligned} q_L(y_j) &= \begin{cases} p(x_j) - \Delta\lambda h_1(x_j) & j \neq k, j \text{ par} \\ p(x_j) + \Delta\lambda h_2(x_j) & j \neq k, j \text{ impar} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x_j) - \lambda h_1(x_j) - \Delta\lambda h_1(x_j) & j \neq k, j \text{ par} \\ f(x_j) + \lambda h_2(x_j) + \Delta\lambda h_2(x_j) & j \neq k, j \text{ impar} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x_j) - \lambda' h_1(x_j) & j \neq k, j \text{ par} \\ f(x_j) + \lambda' h_2(x_j) & j \neq k, j \text{ impar} \end{cases}. \end{aligned}$$

Entonces q_L y $q \in P_n$ toman el mismo valor en $n + 1$ puntos, por lo tanto $q \equiv q_L$

$$q(x) = p(x) + \Delta\lambda L_Y(x), \quad x \in [a, b]. \quad (2.9)$$

Con ayuda de los lemas previos y la nueva representación para el polinomio $q \in P_n$ se demuestra el siguiente teorema que verifica la convergencia del algoritmo de Remez en este caso general.

Teorema 2.2.4 *Las sucesiones (λ_m) y (β_m) convergen a $E_n(f, h_1, h_2)$. Asimismo la sucesión de polinomios de buenas aproximaciones, (p_m) , generada por el algoritmo de Remez, para el cálculo de la mejor aproximación polinomial mediante bandas de amplitudes variantes, converge uniformemente a p_n^* , el polinomio de mejor aproximación a f relativa a h_1 y h_2 .*

Demostración. De $q(x) = p(x) + \Delta\lambda L_Y(x)$ restamos en ambos lados la función f y evaluando en el punto y_k , obtenemos

$$\begin{aligned} q(y_k) - f(y_k) &= p(y_k) - f(y_k) + \Delta\lambda L_Y(y_k) \\ \lambda' h_2(y_k) &= \beta h_2(y_k) + \Delta\lambda L_Y(y_k) \end{aligned}$$

o

$$(\lambda + \Delta\lambda) h_2(y_k) = \beta h_2(y_k) + \Delta\lambda L_Y(y_k),$$

luego

$$(\beta - \lambda) = \Delta\lambda \left(\frac{h_2(y_k) - L_Y(y_k)}{h_2(y_k)} \right). \quad (2.10)$$

Afirmamos que $h_2(y_k) - L_Y(y_k) / h_2(y_k)$ es acotado sobre $[a, b]$, y la cota no depende de la tabla Y . Para ver esto es suficiente probar que L_Y lo es, pues dado que la función h_2 es continua y estrictamente positiva sobre $[a, b]$, existen constantes $0 < m \leq M < \infty$ tales que

$$\forall x [a, b], m \leq h_2(x) \leq M.$$

Por definición

$$L_Y(x) = \sum_{\substack{i \text{ impar} \\ i \neq k}} h_2(x_i) l_i(x) - \sum_{\substack{i \text{ par} \\ i \neq k}} h_1(x_i) l_i(x),$$

donde

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Hemos visto que h_2 es acotada e igualmente h_1 , entonces L_Y es acotado, y la cota no depende de Y si y sólo si cada l_i así lo es, veamos pues que

$$\begin{aligned} |l_i(x)| &= \prod_{j \neq i} \frac{|x - x_j|}{|x_i - x_j|} \\ &\leq \frac{(b-a)^n}{\eta^n}, \end{aligned}$$

donde la existencia del número $\eta > 0$, que no depende de la iteración del algoritmo en la que fue calculado el vector X , se demostró en el lema anterior.

De la desigualdad (2.10), tenemos que

$$0 \leq E_n(f, h_1, h_2) - \lambda \leq \beta - \lambda,$$

generalizando

$$0 \leq E_n(f, h_1, h_2) - \lambda_m \leq C\Delta\lambda_m,$$

pero por el Teorema 2.2.2, $\Delta\lambda_m \Rightarrow 0$, Esto último implica que $(\lambda_m) \Rightarrow E_n$ y así mismo $(\beta_m) \Rightarrow E_n$.

Finalmente demostremos que la sucesión (p_m) generada por el algoritmo de Rémez converge uniformemente al polinomio de mejor aproximación de grado a lo más n . Observemos primero que (p_k) es acotada.

$$\begin{aligned}\rho(p_m) &\leq \rho(p_m - f) + \rho(f) \\ &\leq \beta_m + C \|f\| \\ &\leq C',\end{aligned}$$

pues (β_m) es una sucesión convergente y f es continua sobre $[a,b]$.

Es así que (p_m) tiene una subsucesión convergente. Elijamos cualquier subsucesión convergente $(p_{\alpha(m)})$ de (p_m) y sea $p_{\alpha(m)} \rightarrow p$, entonces

$$\begin{aligned}\rho(f - p) &\leq \rho(f - p_{\alpha(m)}) + \rho(p_{\alpha(m)} - p) \\ &= \beta_{\alpha(m)} + \rho(p_{\alpha(m)} - p) \\ &\leq \beta_{\alpha(m)} + C \|p_{\alpha(m)} - p\|.\end{aligned}$$

Tomando limite cuando $m \rightarrow \infty$, obtenemos que

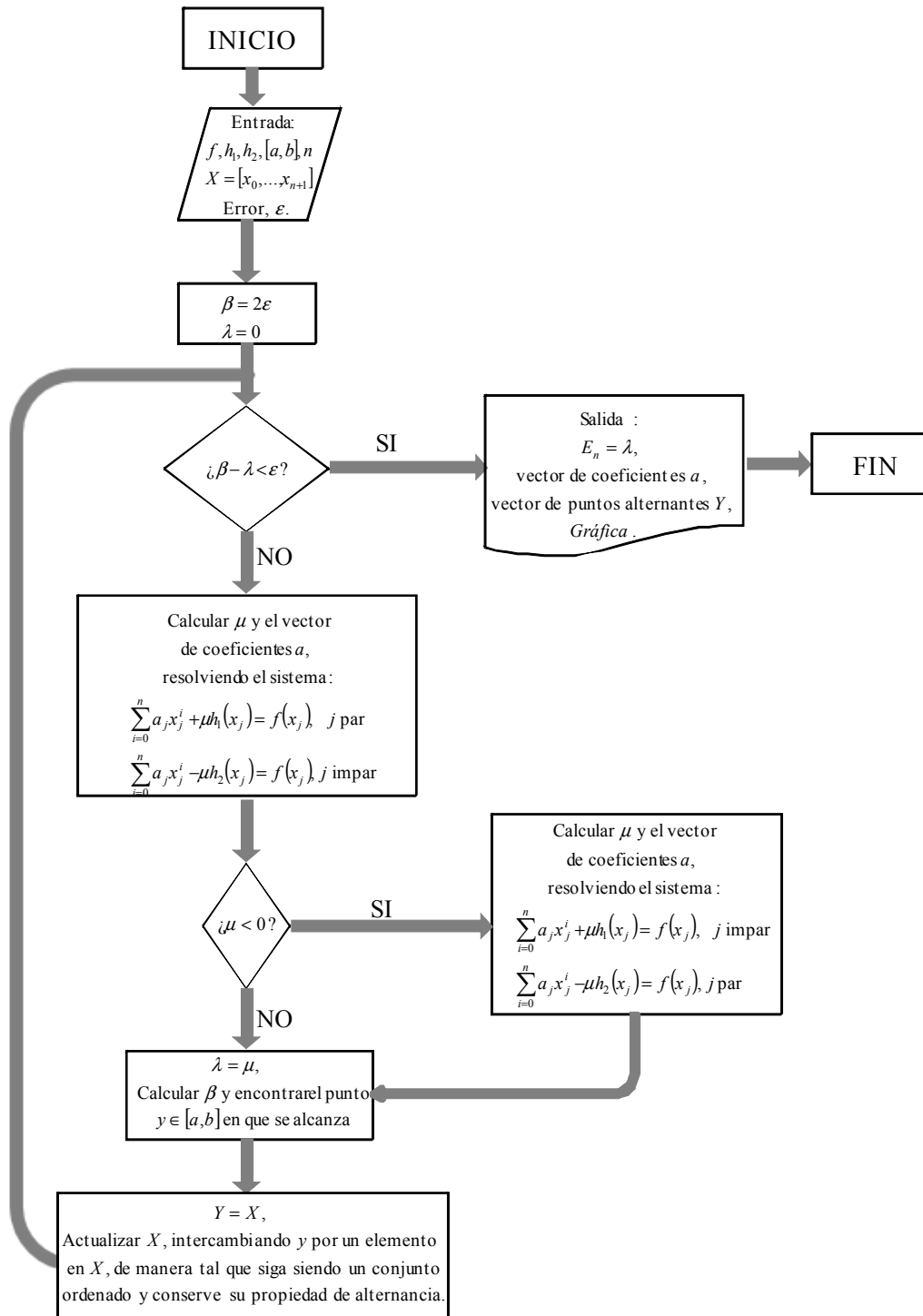
$$\rho(f - p) \leq E_n(f, h_1, h_2).$$

Por unicidad de mejor aproximación, se debe tener que $p = p^*$. De aquí que (p_m) debe converger y lo hace a p_n^* . ■

Observe que si tenemos un conjunto finito X , sobre el cual queremos ajustar una función dada de manera uniforme por un polinomio de grado compatible con el número de elementos de X , podríamos utilizar el algoritmo de Rémez. En este caso la demostración anteriormente expuesta concluiría al demostrar que (λ_m) es creciente; pues el número de pasos a realizar es finito.

2.3. Diagrama de flujo

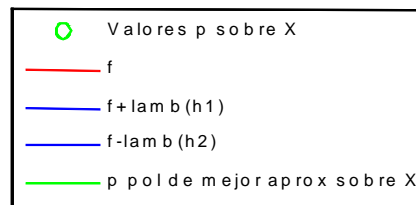
A continuación presentamos el diagrama de flujo para el algoritmo anteriormente descrito.



2.4. Ejemplos gráficos

Finalmente mostremos algunos ejemplos gráficos preparados con este algoritmo ya programado en Matlab.

Denotaremos por $C = [c_0, \dots, c_1]$, al vector de coeficientes del polinomio $p(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j$, y las gráficas de las funciones corresponde en color según:



Ejemplo 2.3.1 Sean $f(x) = |x|$, $[a, b] = [-1, 1]$, $h_1 = h_2 = 1$.

En el primer ejemplo mostraremos los resultados obtenidos por nuestro programa del algoritmo de Rémez, iteración por iteración.

Primera iteración:

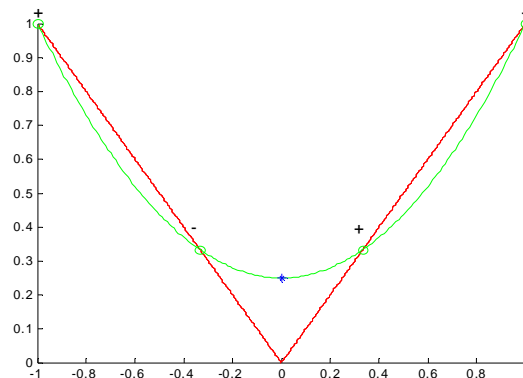
$$x = [-1.0000 \quad -0.3333 \quad 0.3333 \quad 1.0000],$$

$$C = [0.25 \quad 0 \quad 0.75],$$

$$\lambda = 4.1633e-017,$$

$$\beta = 0.2499,$$

$$y = 0.0001.$$



Segunda iteración:

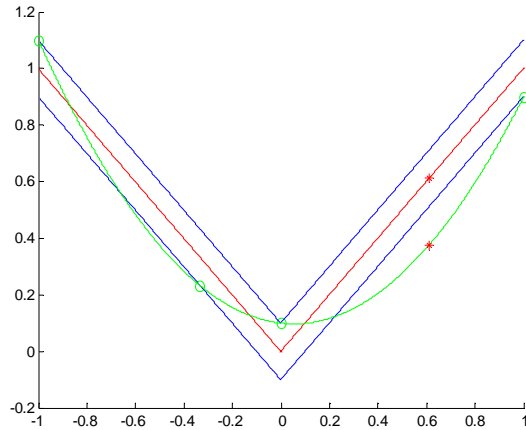
$$X = [-1.0000 \quad -0.3333 \quad 0.0001 \quad 1.0000],$$

$$C = [0.1001 \quad -0.1000 \quad 0.8999],$$

$$\lambda = 0.1,$$

$$\beta = 0.2360,$$

$$y = 0.6112,$$



Tercera iteración:

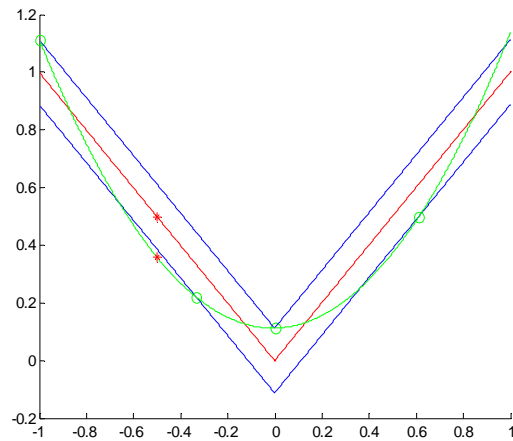
$$X = [-1.0000 \quad -0.3333 \quad 0.0001 \quad 0.6112]$$

$$C = [0.1126 \quad 0.0128 \quad 1.0127],$$

$$\lambda = 0.1125,$$

$$\beta = 0.1406,$$

$$y = -0.4999,$$



Cuarta iteración:

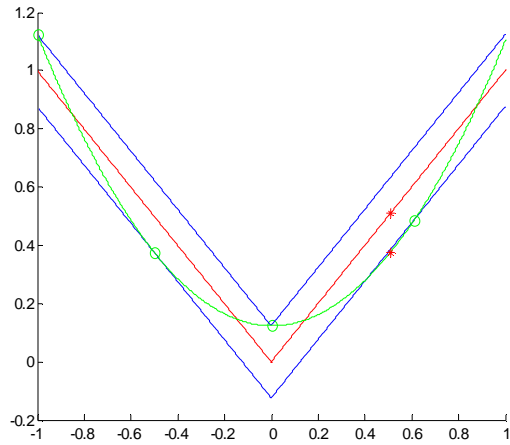
$$X = [-1.0000 \quad -0.4999 \quad 0.0001 \quad 0.6112]$$

$$C = [0.1238 \quad -0.01 \quad 0.9899],$$

$$\lambda = 0.1237,$$

$$\beta = 0.1338,$$

$$y = .5102,$$



Quinta iteración:

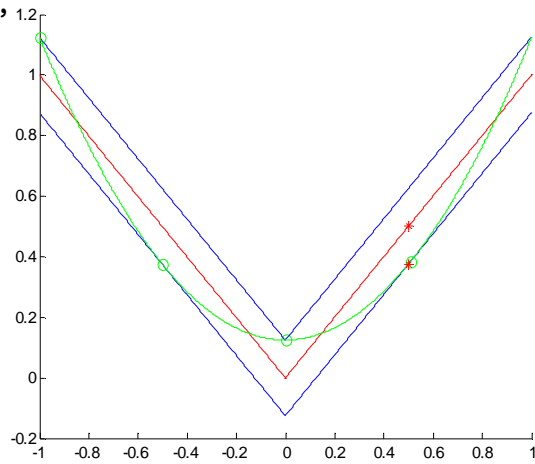
$$X = [-1.0000 \quad -0.4999 \quad 0.0001 \quad 0.5102]$$

$$C = [0.1251 \quad -0.0001 \quad 0.9998],$$

$$\lambda = 0.1249,$$

$$\beta = 0.1349,$$

$$y = 0.5002,$$



Sexta iteración:

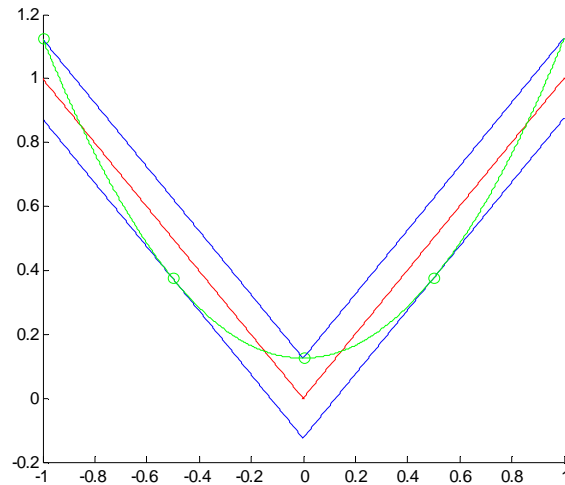
$$X = [-1.0000 \quad -0.4999 \quad 0.0001 \quad 0.5002]$$

$$C = [0.1251 \quad 0 \quad 0.9999],$$

$$\lambda = 0.1250,$$

$$\beta = 0.1250,$$

$$y = 0,$$



Para este ejemplo, nuestro programa del algoritmo de Remez, se detuvo en la sexta iteración pues el error $\beta - \lambda = 0$.

La aproximación calculada por el algoritmo de Remez modificado es en efecto la mejor aproximación polinomial relativa a las funciones h_1 y h_2 .

En el siguiente ejemplo nuevamente ejecutamos nuestro programa con la función valor absoluto sobre el intervalo $[-1, 1]$, pero con una de las funciones error diferente de una constante. Veamos:

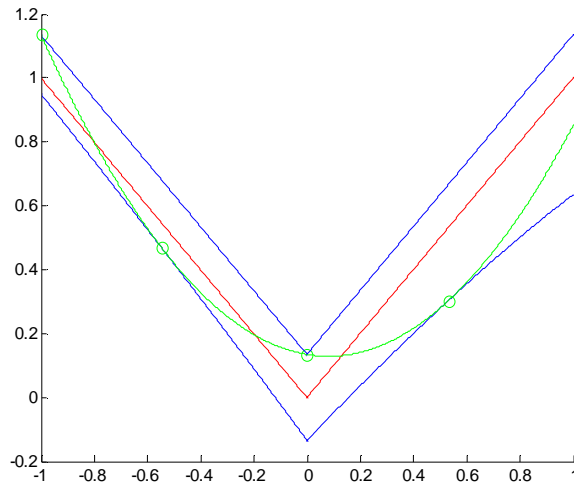
Ejemplo 2.3.2 Sean:

$$f(x) = |x|,$$

$$h_1 = e^x, h_2 = 1,$$

$$[a, b] = [-1, 1],$$

$$n = 2.$$



$X = [-1.0000 \quad -0.5456 \quad -0.0001 \quad 0.5312]$
 $C = [0.1348 \quad -0.1413 \quad 0.8586],$
 $E_n = 0.1347,$

Número de iteraciones= 7.

Ejemplo 2.3.3 Sean

$$f(x) = \begin{cases} |x + 1|, & x \leq 0 \\ |x - 1|, & x > 0 \end{cases},$$

$$[a, b] = [-2, 2],$$

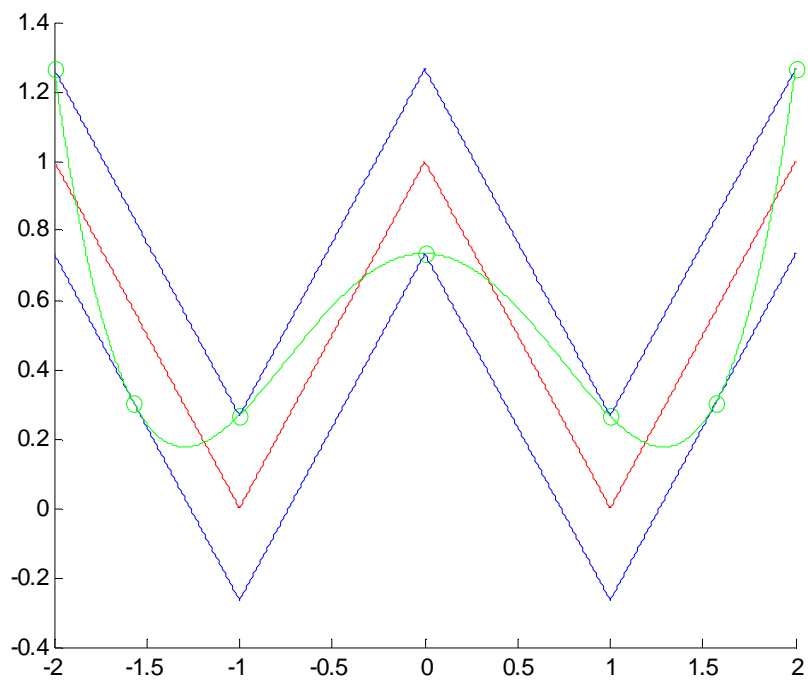
$$h_1 = h_2 = 1$$

a) Para $n = 5$.

$X = [-2.0000 \quad -1.5696 \quad -0.9999 \quad 0 \quad 0.9999 \quad 1.5696 \quad 2.0000],$
 $C = [0.7340 \quad -0.0000 \quad -0.6682 \quad 0.0000 \quad 0.2003$
 $\quad -0.0000],$

$$E_n = 0,2660.$$

Gráfica:



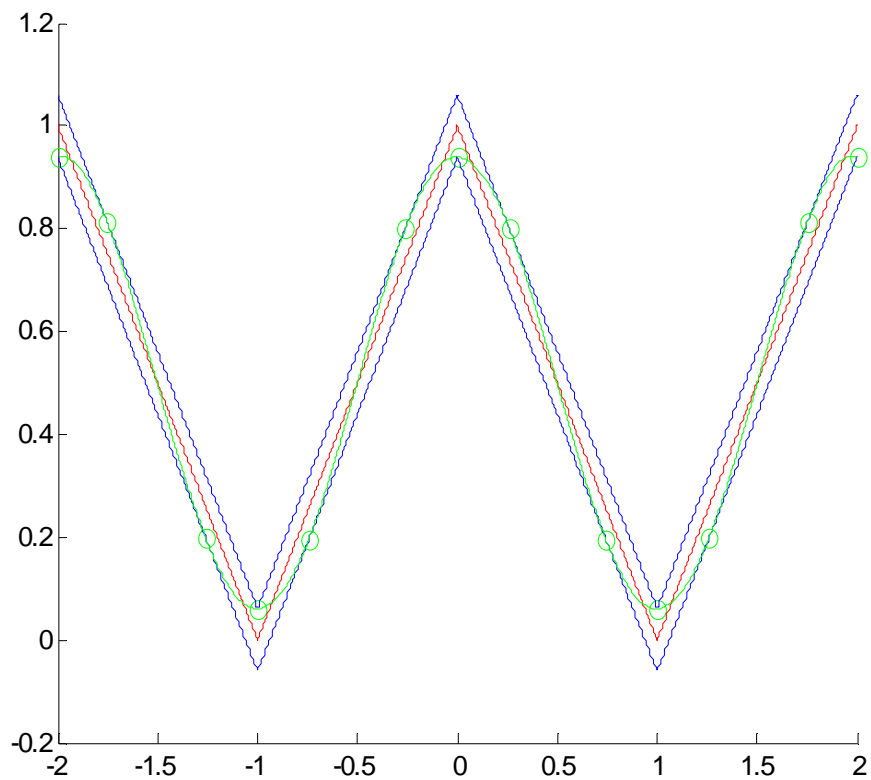
b) Con $n = 11$.

$$X = [-2.0000 \quad -1.7540 \quad -1.2599 \quad -1.0000 \quad -0.7423 \quad -0.2582 \quad 0 \quad 0.2582 \\ 0.7423 \quad 1.0000 \quad 1.2599 \quad 1.7540 \quad 2.0000],$$

$$C = [0.9392 \quad -0.0000 \quad -2.1639 \quad 0.0000 \quad 1.7657 \quad -0.0000 \quad -0.5594 \\ -0.0000 \quad 0.0845 \quad 0.0000 \quad -0.0053 \quad -0.0000],$$

$$E_n = 0.0608.$$

Gráfica:



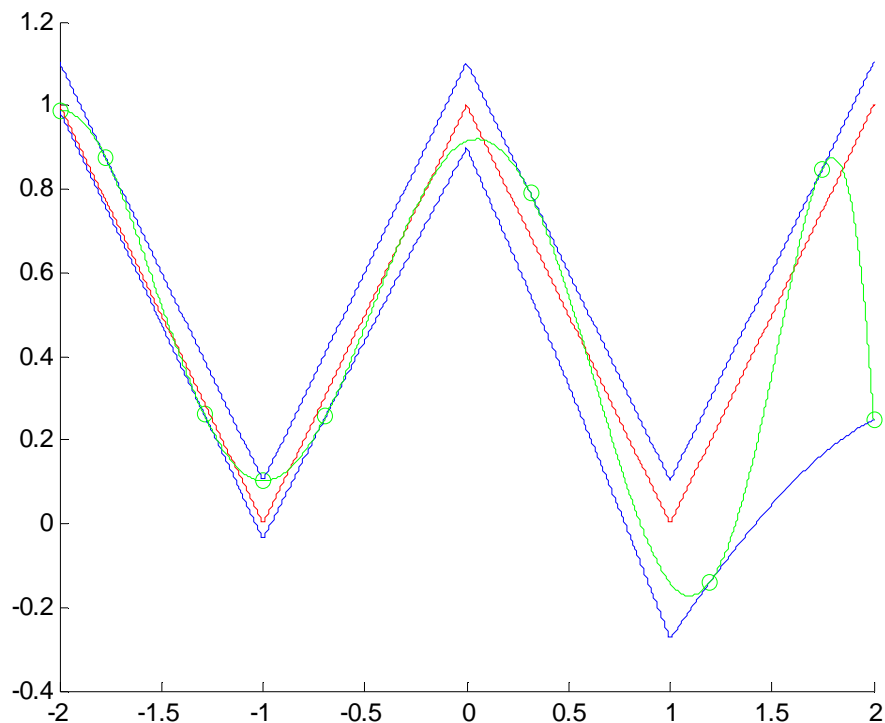
c) Si consideramos ahora las funciones error $h_1(x) = e^x$, $h_2(x) = 1$ y para $n = 7$;

$X = [-2.0000 \ -1.7708 \ -1.2887 \ -0.9999 \ -0.6927 \ 0.3134 \ 1.1959 \ 1.7440 \ 2.0000]$,

$C = [0.9133 \ 0.2173 \ -1.8858 \ -0.6335 \ 1.1195 \ 0.3485 \ -0.1666 \ -0.0538]$,

$E_n = 0.1018$.

Gráfica:



Los ejemplos escogidos corresponden a funciones cuyas gráficas tienen picos, debido a que éstos son precisamente los ejemplos prueba del algoritmo de Remez tradicional, en los que frecuentemente se localizan dificultades al ejecutar el programa. Sin embargo, nosotros hemos quedado satisfechos con los resultados obtenidos por nuestro programa, basándonos en la gráfica de las funciones y en el teorema de caracterización para el polinomio de la mejor aproximación en el contexto de bandas variantes.

En el capítulo siguiente realizamos el estudio concerniente a la aproximación e interpolación con el método de bandas de amplitudes variantes.

Capítulo 3

Aproximación polinomial con bandas de amplitudes variantes y condiciones de interpolación

En el año 1969 Loed, Moursund, Schumaker y Taylor, basados en el concepto de pesos generalizados desarrollado por Moursund, [22], estudian el problema de la aproximación polinomial con pesos generalizados y condiciones de interpolación [19], con lo que obtienen resultados de existencia, caracterización y unicidad de la mejor aproximación, así como un teorema de unicidad fuerte para este método de aproximación y el desarrollo de un algoritmo para el cálculo de la mejor aproximación. Si bien podemos establecer una correspondencia entre este método y el de bandas de amplitudes variantes, una diferencia notable entre ambos consiste en los supuestos iniciales en cada problema; mientras nosotros pedimos continuidad de las funciones; en el otro método la definición de pesos generalizados involucra la continuidad de una derivada parcial, por lo que esta condición pudiera excluir a una familia importante de pesos.

En 2002, inspirado en los pesos generalizados de Moursund, Bokhari estudia el problema de la aproximación polinomial en bandas uniformes con condiciones de interpolación tipo Hermite, [2], y presenta resultados sobre la existencia, unicidad y caracterización; así mismo demuestra la convergencia uniforme de la sucesión de mejores aproximaciones con condiciones de interpolación tipo Hermite a la función que aproximan y como aspecto novedoso ofrece estimados de la velocidad de esa convergencia.

En el presente capítulo nos dedicaremos al estudio de la mejor aproximación polinomial con condiciones de interpolación tipo Hermite y el método de amplitudes variantes.

3.1. Existencia y unicidad del polinomio de la mejor aproximación con bandas de amplitudes variantes y condiciones de interpolación

Consideremos nuevamente $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$, con $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ dados. Deseamos encontrar un polinomio p , de grado a lo más n y un escalar $\lambda \geq 0$, tales que:

$$\forall x \in [a, b], (f - \lambda h_1)(x) \leq p(x) \leq (f + \lambda h_2)(x),$$

además de que para k puntos dados en $[a, b]$, $a \leq a_1 < \dots < a_k \leq b$; p satisfaga las siguientes condiciones de interpolación tipo Hermite:

$$H := \{p(a_i) = f(a_i), p^{(j)}(a_i) = a_{ij}, \quad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq n_i - 1\}; \quad (3.1)$$

donde $n_i \in \mathbb{N}$, $n \geq r - 1$, $r = \sum n_i$ y los valores a_{ij} están prefijados, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n_i - 1$.

En otras palabras, encontrar $\lambda \geq 0$ y un polinomio algebraico p , de grado a lo más n , en la clase

$$P_n^H[a, b] := \left\{ p \in P_n[a, b] : \begin{array}{l} p(a_i) = f(a_i), \quad p^{(j)}(a_i) = a_{ij}, \\ 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq n_i - 1 \end{array} \right\},$$

y que se encuentre dentro de la banda de amplitud variante generada por las funciones $f - \lambda h_1$ y $f + \lambda h_2$.

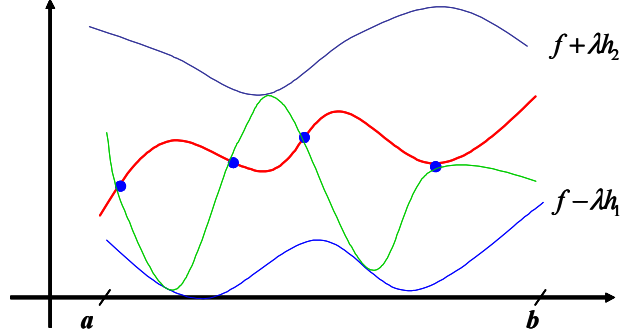


Fig. 3. 1. Deseamos encontrar un polinomio dentro de la banda que satisfaga condiciones interpolación dadas.

Como anteriormente lo hicimos, planteamos el problema de optimizar el parámetro λ , para definir la mejor aproximación polinomial en bandas de amplitudes variantes con condiciones de interpolación.

Para cada $\lambda \geq 0$ se definen los conjuntos

$$M_\lambda := \{p \in P_n^H : \forall x \in [a, b], (f - \lambda h_1)(x) \leq p(x) \leq (f + \lambda h_2)(x)\}.$$

Nuevamente se puede demostrar que dado $n \in \mathbb{N}$, existe λ suficientemente grande tal que $M_{\lambda_n} \neq \emptyset$. Asimismo, $(M_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ es una familia creciente de conjuntos compactos.

Definimos la mejor aproximación polinomial con condiciones de interpolación en bandas variantes, de manera análoga a la antes realizada.

Definición 3.1.1 Sean $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$, con $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ dados. Definimos la mejor aproximación de P_n^H a f , relativo a h_1 y h_2 , como

$$E_n^H = E_n^H(f, h_1, h_2) := \inf \{\lambda > 0 : M_\lambda \neq \emptyset\}.$$

El valor E_n^H esta asociado al conjunto

$$M_{E_n^H} := \bigcap_{\substack{\lambda < \lambda', \\ M_\lambda \neq \emptyset}} M_\lambda.$$

Sí el conjunto $M_{E_n^H}$ es no vacío, se le denomina a sus elementos como polinomios de mejor aproximación de P_n^H a f relativo a h_1 y h_2 .

Teorema 3.1.2 (de Existencia) *Dados $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$, $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $M_{E_n^H} \neq \emptyset$.*

Demostración. Dado que $P_n^H \subset P_n$ es cerrado, la tesis del teorema es consecuencia de un criterio de compacidad similar al aplicado para el caso sin condiciones de interpolación, Teorema 1.2.6. ■

Por otro lado, la unicidad se demuestra mediante una extensión que construiremos a partir de la solución del problema sin condiciones de interpolación, sobre conjuntos compactos de \mathbb{R} no necesariamente intervalos, según veremos.

Antes observemos lo siguiente:

$$P_n^H = \{p \in P_n : p = p^H + qW\},$$

donde p^H es el polinomio de Hermite de grado a lo más $r - 1$, que satisface las condiciones de interpolación (3.1), $q \in P_{n-r}$ y $W \in P_r$ esta definido como

$$W(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i)^{n_i}.$$

Por lo que el problema de encontrar el mínimo $\lambda \geq 0$ para el cual exista $p \in P_n^H$ tal que

$$\forall x \in [a, b], (f - \lambda h_1)(x) \leq p(x) \leq (f + \lambda h_2)(x),$$

es equivalente al de optimizar $\lambda \geq 0$ para el cual existe un polinomio $q \in P_{n-r}$, tal que

$$\forall x \in [a, b], ((f - p^H) - \lambda h_1)(x) \leq qW(x) \leq ((f - p^H) + \lambda h_2)(x). \quad (3.2)$$

Teorema 3.1.3 (de Unicidad) *Sean $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$, $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces el polinomio de mejor aproximación a f , de grado a lo más n , relativo a h_1 y h_2 , que satisface las condiciones de interpolación (3.1) es único.*

Demostración. Supongamos primero que $f \notin P_n^H$, entonces

$$\lambda_n^H := E_n^H(f, h_1, h_2) > 0.$$

Por el teorema de existencia, existe un polinomio $p_{H,n} \in P_n^H$ de mejor aproximación a f relativa a h_1 y h_2 ; luego

$$p_{H,n}(x) = p^H(x) + q_{n-r}W(x),$$

donde p^H, q_{n-r} y W fueron descritos anteriormente.

Observemos que para cada $i = 1, \dots, k$,

$$(f - p^H)(x_i) = 0,$$

$$h_1(x_i) \neq 0 \text{ y } h_2(x_i) \neq 0,$$

además $\lambda_n^H > 0$, entonces existen vecindades abiertas, V_{x_i} , de cada x_i , $i = 1, \dots, K$, para las cuales existen constantes $m_i, M_i, n_i, N_i > 0$ tales que

$$\forall x \in V_{x_i}, -M_i \leq (f - p^H - \lambda_n^H h_1)(x) \leq -m_i,$$

y

$$\forall x \in V_{x_i}, n_i \leq (f - p^H + \lambda_n^H h_2)(x) \leq N_i;$$

ahora bien,

$$\lim_{x \rightarrow x_i} W(x) = 0,$$

por tanto

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \left| \frac{(f - p^H - \lambda_n^H h_1)(x)}{W(x)} \right| = \infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \left| \frac{(f - p^H + \lambda_n^H h_2)(x)}{W(x)} \right| = \infty.$$

Sea $M > \|q_{n-r}\|$, entonces existen $B_{\delta_i}(x_i)$, bolas abiertas centradas en x_i y radio δ_i , $i = 1, \dots, k$, tales que para cada $x \in B_{\delta_i}(x_i)$

$$\left| \frac{(f - p^H - \lambda_n^H h_1)(x)}{W(x)} \right| > M$$

y

$$\left| \frac{(f - p^H + \lambda_n^H h_2)(x)}{W(x)} \right| > M,$$

si tomamos $\delta \leq \delta_i$, $i = 1, \dots, k$, tal que

$$B_\delta(x_i) \cap B_\delta(x_{i+1}) = \emptyset, \quad i = 1, \dots, k-1,$$

entonces para cada $x \in B_\delta(x_i)$

$$\frac{(f - p^H - \lambda_n^H h_1)(x)}{|W(x)|} < -M < (q_{n-r})(x) < M < \frac{(f - p^H + \lambda_n^H h_2)(x)}{|W(x)|}. \quad (3.3)$$

Denotemos por $I_i := [x_i + \delta, x_{i+1} - \delta]$, $i = 1, \dots, k-1$, $I_0 = [a, x_1 - \delta]$, $I_k = [x_k + \delta, b]$ y por K a

$$K := \bigcup_{i=0}^k I_i,$$

es claro que K es compacto; también observemos que sobre cada I_k , $i = 0, \dots, k$,

$$W(x) > 0 \text{ o bien } W(x) < 0,$$

además que para $x \in K$, $W(x) \neq 0$.

Definamos sobre K las funciones siguientes:

$$F(x) := \frac{f - p^H}{W}(x),$$

además de H_1 y H_2 , definidas sobre cada I_k , $i = 0, \dots, k$, de la manera siguiente:

$$H_1(x) := \begin{cases} \frac{h_1}{W}(x), & \text{si } W(x) > 0 \text{ en } I_k \\ -\frac{h_2}{W}(x), & \text{si } W(x) < 0 \text{ en } I_k \end{cases}$$

y

$$H_2(x) := \begin{cases} -\frac{h_1}{W}(x), & \text{si } W(x) < 0 \text{ en } I_k \\ \frac{h_2}{W}(x), & \text{si } W(x) > 0 \text{ en } I_k \end{cases}.$$

Observemos que $F, H_1, H_2 \in C(K)$ y $H_1, H_2 > 0$, sobre K . Entonces por la desigualdad (3.3), $q_{n-r}(x)$ es polinomio de mejor aproximación de P_n^H a f relativa a h_1 y h_2 , sobre $[a, b]$, si y sólo si, lo es para la función F relativa a H_1 y H_2 , sobre K .

Por el teorema 1.2.8, existe un único polinomio q_{n-r}^* de mejor aproximación polinomial a F relativa a H_1 y H_2 , sobre K . Luego $q_{n-r}^* \equiv q_{n-r}$ y por lo tanto $p_{H,n} \in P_n^H$ es único, ver Fig 3.2. ■

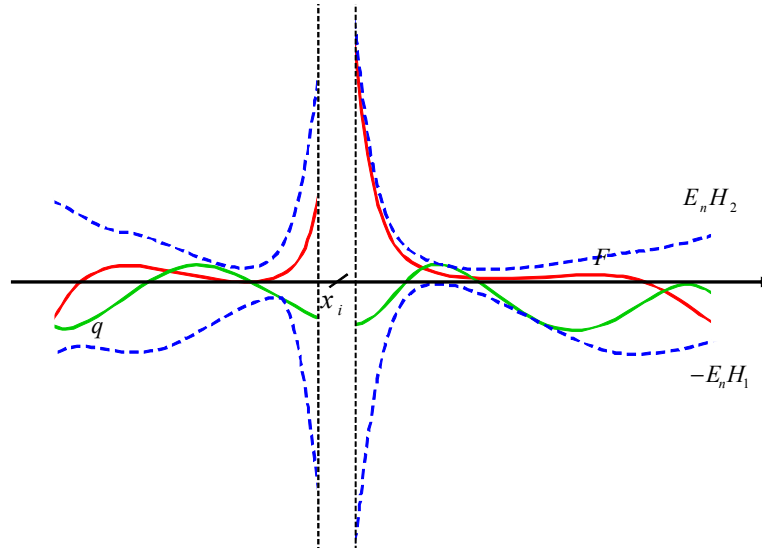


Fig. 3.2. Existe una vecindad U de x_i en la cual la gráfica del polinomio de la mejor aproximación a F , $p_{n-m,U}$, relativa a H_1 y H_2 quede totalmente contenida dentro del interior de la banda.

Nota: La demostración de la unicidad nos deja dos puntos a resaltar:

i) El proceso de reducción del problema con restricciones de interpolación al problema libre, pasa por el método de aproximación mediante bandas variantes, incluso aunque el problema se refiriese a la aproximación uniforme clásica, como fue tratado por Bokhari. O sea, hemos realizado una aplicación teórica del método de bandas variantes que no parece posible con el método clásico de aproximación uniforme de Chebyshev.

ii) El proceso constructivo de reducción del problema con restricciones de interpolación, nos facilita el método para el cálculo. En efecto, hay que aplicar el algoritmo de Rémez con las nuevas funciones definidas.

3.2. Ejemplos gráficos

Ejemplo 3.2.1 Sean $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \leq 0 \\ |x-1|, & x > 0 \end{cases}$, $[a, b] = [-2, 2]$, $h_1 = h_2 = 1$. Utilizando el algoritmo de Rémez, calculemos un polinomio,

p , de "buena" aproximación a f , de grado a lo más 7 relativo a h_1 y h_2 ; con las condiciones de interpolación siguientes:

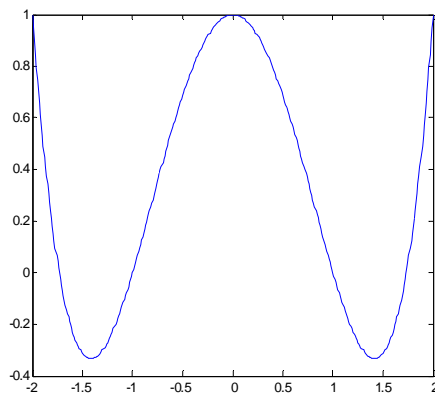
$$p(-2) = p(2) = p(0) = 1 \text{ y } p(-1) = p(1) = 0.$$

Los polinomios de Hermite p^H y W para este problema son

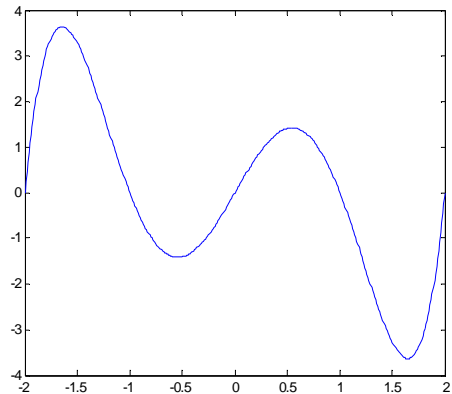
$$p^H(x) = (x^2 - 1) (1/3x^2 - 1) \text{ y } W(x) = x (x^2 - 1) (x^2 - 4),$$

cuyas gráficas son:

Polinomio de Hermite

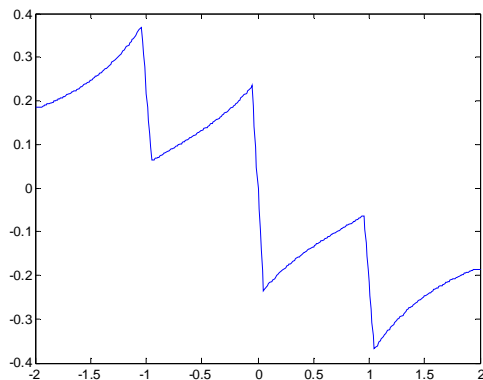


Polinomio W

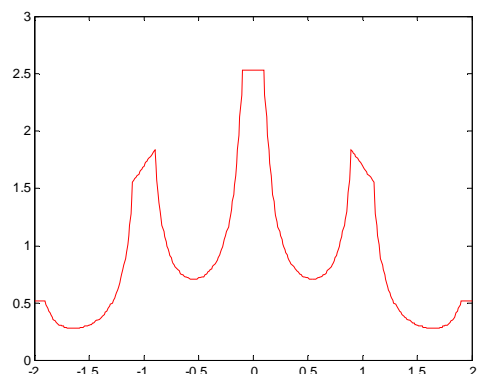


Construimos las funciones F , H_1 y H_2 , que en este caso $H_1 = H_2$, cuyos gráficos vemos a continuación.

Función F



Función $H_1 = H_2$



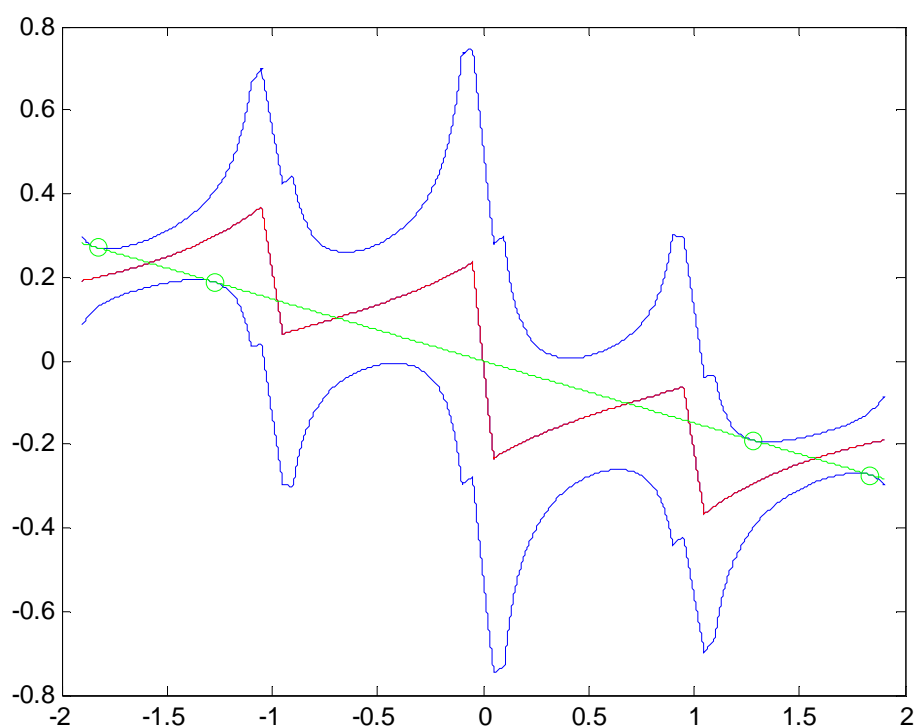
Al correr el programa para F , H_1 , H_2 y $n = 2$, obtenemos:

$X = [-1.8316 \ -1.2786 \ 1.2771 \ 1.8289]$,

$C = [0.0000 \ -0.1484 \ 0.0000]$,

$E_n = 0.2032$.

Gráfica:

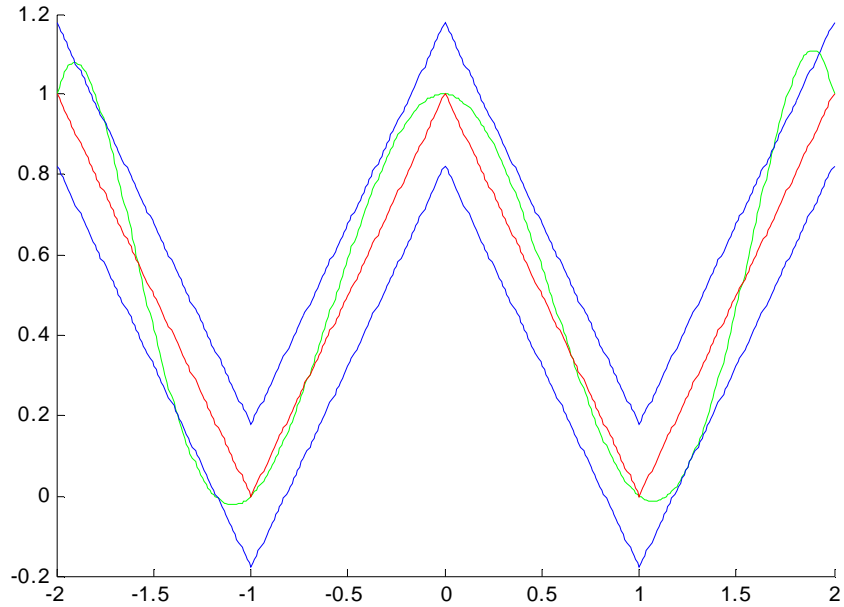


Entonces

$$p_{H,n}^*(x) = p^H(x) + qW(x),$$

con $q(x) = -0,1484x$.

Al graficar la banda generada por las funciones error del problema original y a f , así como el polinomio de la mejor aproximación obtenemos:



Cabe mencionar que el error computacional que se obtiene al ejecutar el programa, en el caso en el que se tienen condiciones de interpolación, está relacionado con las vecindades de cada nodo que se elijan, ya que no disponemos de ningún criterio que nos permita hacer una buena elección de ellas y por el momento sólo nos basamos en la experiencia con nuestro programa y en la particularidad de cada problema.

El Capítulo 4 lo dedicamos al estudio del problema de aproximación mediante bandas de amplitudes variantes cuando las funciones h_1 y h_2 tienen ceros.

Capítulo 4

Aproximación polinomial con bandas de amplitudes variantes y funciones de error con ceros

En este capítulo estudiamos el problema de encontrar la mejor aproximación y el polinomio de mejor aproximación con bandas de amplitudes variantes, pero ahora bajo el supuesto de que h_1 y h_2 tienen ceros en el dominio de estudio. Sin embargo, como lo mostramos tempránamente (ver [12], [13]), por esta vía se presentan dificultades que pueden ser insalvables, como lo es que el problema ahora planteado puede no tener solución en el sentido de que para todo λ , los conjuntos M_λ sean vacíos. Aún definiendo un criterio de suficiencia bajo el cual se puede garantizar en algunos casos la existencia de polinomios de mejor aproximación; no siempre se puede garantizar la unicidad.

Supongamos que las funciones de error h_1 y h_2 , son mayores o iguales que cero y éstas tienen un número finito de ceros coincidentes. Los polinomios que estén incluidos en la banda correspondiente tendrán que interpolar a la función f que se aproxima, en cada cero común de h_1 y h_2 . Bajo condiciones adicionales, podría lograrse interpolar con una suavidad predeterminada, y se obtendría una interpolación tipo Hermite en bandas de amplitudes variantes.

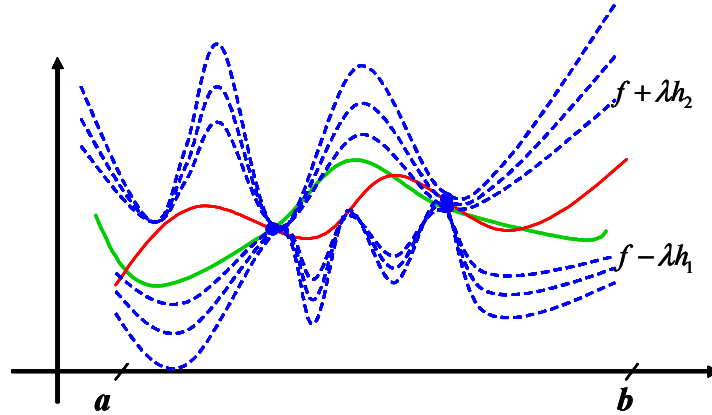


Fig. 4.1 P interpola a f en los puntos donde h_1 y h_2 tienen ceros comunes.

El planteamiento del problema es el siguiente. Se tienen $h_1, h_2, f \in C[a, b]$, $h_1, h_2 \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Nos preguntamos si existen un escalar $\lambda \geq 0$ y un polinomio $p \in P_n$ tales que

$$\forall x \in [a, b], \quad (f - \lambda h_1)(x) \leq p(x) \leq (f + \lambda h_2)(x). \quad (4.1)$$

Antes que todo, destaquemos un caso excepcional: Si una de las funciones h_i , $i = 1, 2$, es idénticamente nula y la otra no tiene ceros, se estaría generalizando la aproximación lateral (superior si $h_1 \equiv 0$ e inferior si $h_2 \equiv 0$). Obviamente siempre existe una solución, es decir, existen tales escalares, para todo polinomio de grado arbitrario n y $f \in C[a, b]$ dados. También aquí se tienen los resultados de existencia, unicidad, caracterización de la mejor aproximación polinomial y algoritmos de cálculo. Las demostraciones serían las mismas que hemos ya realizado para funciones de error estrictamente positivas.

Si ambas funciones poseen un número infinito de ceros, podemos encontrarnos con situaciones insalvables o con una única solución trivial. Por ejemplo, la interpolación en un conjunto numerable de puntos podría tener interés en la teoría de variable compleja. Pero para el caso de la aproximación polinomial real, si las funciones de error h_i , $i = 1, 2$, se anulasen simultáneamente

en un conjunto infinito de puntos, podría haber solución, o sea $M_\lambda \neq \phi$, sólo si la función objeto de estudio f , coincidiese sobre ese conjunto con un polinomio p , de grado N exactamente. En tal caso, podría existir $\lambda^* > 0$ que fuese solución de (4.1) con $n \geq N$. Si así fuere, p sería la única solución para todo $\lambda \geq \lambda^*$ y todo $n \geq N$ y no habría solución si $n < N$.

Por tanto, dedicaremos nuestro estudio al caso en el cual los ceros comunes de h_1 y h_2 constituyen un número finito.

4.1. Ejemplos de no existencia de polinomios de mejor aproximación polinomial con bandas de amplitudes variantes

Consideramos nuevamente los conjuntos M_λ ,

$$M_\lambda := \{p \in P_n : \forall x \in [a, b], (f - \lambda h_1)(x) \leq p(x) \leq (f + \lambda h_2)(x)\}.$$

Recordemos que cuando se definen estos conjuntos con $h_1, h_2 > 0$ se demuestra para cada $n \in \mathbb{N}$, la existencia de un $\lambda \geq 0$ para el cual $M_\lambda \neq \phi$; a lo cual nos referimos informalmente como existencia de solución del problema. Es precisamente esta propiedad la que nos permite definir la mejor aproximación y polinomios de mejor aproximación relativas a h_1 y h_2 . Sin embargo, para el caso en que h_1 y h_2 tienen ceros, aunque tan solo sea un número finito, no siempre es posible aseverar ésto. Veamos algunos ejemplos de diferentes casos.

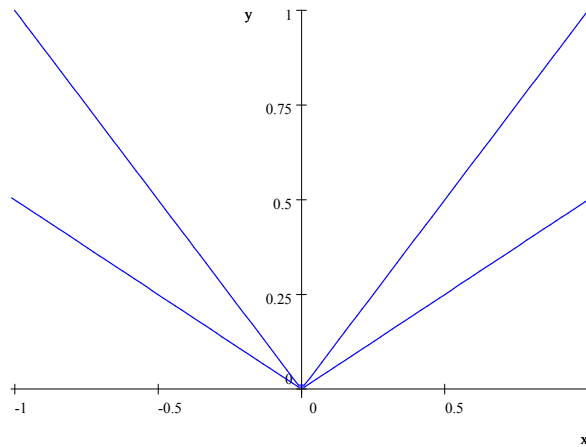
Ejemplo 4.1.1 Sean $[a, b] = [-1, 1]$, $f = h_2 = |x|/2$ y $h_1 \equiv 0$. Supongamos que deseamos encontrar un polinomio p , tal que

$$f - \lambda h_1 \leq p \leq f + \lambda h_2,$$

es decir,

$$\forall x \in [-1, 1], \frac{|x|}{2} \leq p(x) \leq (1 + \lambda) \frac{|x|}{2}.$$

En este caso la banda generada por las gráficas de las funciones correspondientes al problema, se muestra en la figura siguiente:



De la gráfica podemos predecir que no existe solución. Analíticamente, se debe a que cualquier polinomio dentro de la banda deberá ser de grado mayor o igual a 2 y tener un cero múltiple en 0, lo cual es incompatible con la desigualdad $|x|/2 \leq p(x)$ en una vecindad del cero.

El ejemplo precedente nos condujo a pensar que la falta de polinomios dentro de la banda, para este problema en particular, estaba relacionada directamente con la suavidad de las funciones f , h_1 y h_2 o inclusive en otros casos, con la presencia de infinitos ceros en al menos una de las funciones de error. Sin embargo, el ejemplo siguiente demuestra que aún con funciones suaves y un solo cero, puede no haber solución.

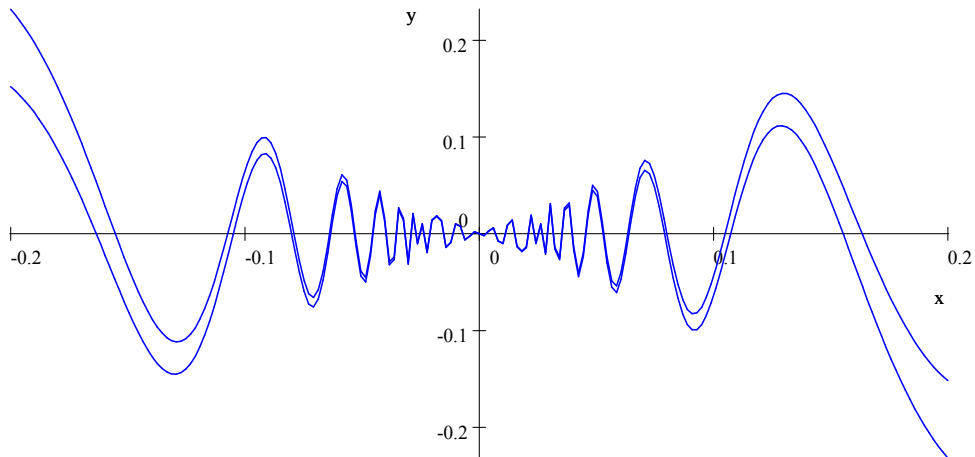
Ejemplo 4.1.2 Sean

$$\begin{aligned} [a.b] &= [-1, 1], \\ h_1 &= h_2 = x^2 \end{aligned}$$

y

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{3/2} \operatorname{sen} \frac{1}{|x|^{1/4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

la idea gráfica de la banda de amplitud variante en este caso sería:



Notemos que $f, h_1, h_2 \in C^1[-1, 1]$, que h_1 y h_2 tienen un único cero y sin embargo no existe polinomio alguno que satisfaga

$$\forall x \in [-1, 1], (f - \lambda h_1)(x) \leq p(x) \leq (f + \lambda h_2)(x),$$

independientemente del valor de λ y del grado del polinomio. En efecto, sean (x_n) y (y_n) definidas por

$$\frac{1}{|x_n|^{1/4}} = \frac{4n+3}{2}\pi \quad \text{y} \quad \frac{1}{|y_n|^{1/4}} = \frac{4n+1}{2}\pi$$

tanto $x_n \rightarrow 0$ como $y_n \rightarrow 0$ y las sucesiones están intercaladas de manera que

$$\text{sen}\left(\frac{1}{|x_n|^{1/4}}\right) = -1 \quad \text{y} \quad \text{sen}\left(\frac{1}{|y_n|^{1/4}}\right) = 1.$$

Dado $\lambda > 0$ tendríamos que buscar $p \in P_n$, tal que, en particular, se tenga

$$p(x_n) \leq \lambda x_n^2 - x_n^{3/2}$$

y

$$p(y_n) \geq -\lambda y_n^2 + y_n^{3/2}.$$

Pero, para n suficientemente grande se tendrá

$$\lambda x_n^2 - x_n^{3/2} \leq \frac{-x_n^{3/2}}{2}$$

y

$$-\lambda y_n^2 + y_n^{3/2} \geq \frac{y_n^{3/2}}{2}.$$

Es decir, en cualquier vecindad de cero, p tendría infinitos máximos y mínimos y no es constante. Luego p no puede ser un polinomio. En este caso el comportamiento oscilante de f afectó el problema de existencia.

4.2. Condiciones de suficiencia para la existencia y unicidad de la mejor aproximación polinomial

Ejemplos como los expuestos en el epígrafe anterior, nos motivan a introducir un concepto nuevo que nos permite asegurar que al menos un polinomio y para algún grado determinado se satisfaga (4.1), mismo que a continuación describiremos.

4.2.1. Condición de Holgura

Nos referiremos al trío $\tau(f, h_1, h_2)$, cuando estén dadas las funciones f, h_1 y h_2 , y h_1 y h_2 tengan ambas un cero común aislado en un punto x_0 del dominio.

Definición 4.2.1 Sea $\tau(f, h_1, h_2)$ un trío (relativo a nuestro problema de interpolación) Decimos que un polinomio algebraico $p \in P_m$, admite holgura a partir de su n -ésimo coeficiente; o simplemente para abreviar, que admite holgura a partir de n en el punto de interpolación $x_0 = 0$, si se cumple las condiciones siguientes:

i) $m \geq n$.

ii) Existe una vecindad U de cero, de manera que para todo polinomio algebraico q tal que para cada $x \in U$ se satisface:

$$(p - q)(x) = O(|x|^n), \quad (4.2)$$

se puede asegurar la existencia de un número $\lambda > 0$, tal que

$$\forall x \in U, (f - \lambda h_1)(x) \leq q(x) \leq (f + \lambda h_2)(x). \quad (4.3)$$

Observaciones:

- Tomando $p = q$ se cumple (4.2) por tanto el propio p satisface (4.3).
- Si $N > n$ y $(q - p)(x) = O(|x|^N)$, entonces igualmente

$$(q - p)(x) = O(|x|^n)$$

y q satisface (4.3). Significa que si p tiene holgura a partir de n , también la tiene a partir de N , como era de esperar.

Definición 4.2.2 La limitación de holgura del punto $x_0 = 0$, respecto del trío τ , es n si:

- i) Existe un polinomio p , que admite holgura a partir de n en $x_0 = 0$,
- ii) Si otro polinomio admite holgura desde m en $x_0 = 0$, entonces $m \geq n$.

Denotaremos la limitación de holgura como $H(\tau, x_0) = H(x_0)$.

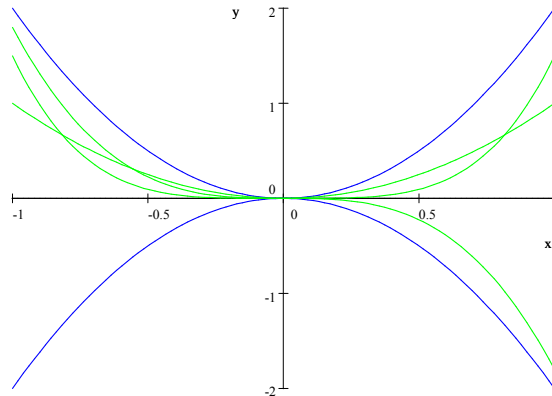
Teorema 4.2.3 Sea τ un trío con limitación de holgura $H(x_0)$ en x_0 . Entonces existe un polinomio p^* , de grado no mayor que $H(x_0) - 1$, unívocamente definido, tal que cualquier polinomio q , con $q \neq p^*$ y alguna holgura en x_0 , es de la forma

$$q(x) = p^*(x) + \sum_{k=H(x_0)}^m a_k x^k. \quad (4.4)$$

Demostración. Tomemos un polinomio cualquiera p , de los que satisfacen la definición de limitación de holgura y formemos p^* , considerando sus $H(x_0)$ primeros términos.

Sean $r = H(x_0) - 1$, $p^*(x) = \sum_{k=0}^r b_k x^k$ y $q(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$. Los coeficientes a_0 y b_0 tienen que coincidir, pues tanto p como p^* deben interpolar a f en $x_0 = 0$. Si $H(x_0) = 1$, el teorema estaría demostrado. Si no fuera así, sea j el primer subíndice en que $a_j = b_j$. El conjunto Q de los polinomios que satisfacen (4.3), es convexo. Luego para todo μ , $0 \leq \mu \leq 1$, se tiene que $q_\mu = (1 - \mu)p^* + \mu q \in Q$. En particular se tendría que cualquier polinomio q' tal que $|q' - q_{\frac{1}{2}}| = O(|x|^j)$, satisfaría (4.3) y por tanto, $q_{\frac{1}{2}}$ admitiría holgura en x_0 desde j , lo que obliga a que $j \geq H(x_0) > r$. ■

Ejemplo 4.2.4 Sea $f \equiv 0$ en una vecindad de cero y $h_1(x) = h_2(x) = x^2$. Entonces este trío tiene una limitación de holgura $H(0) = 2$ y $p^*(x) = 0 + 0x$.



4.2. Para polinomio $p(x) = x^2 * q(x)$ existe un $\lambda \geq 0$ tal que $p \in M_\lambda$.

La holgura de un polinomio p en un punto $x_0 \neq 0$, $x_0 \in [a, b]$, $a < b$, así como la limitación de holgura del trío τ en x_0 , se define trasladando las funciones al intervalo $[a - x_0, b - x_0]$ y considerando nuevamente el punto cero.

Dados estos conceptos, estamos en disposición de enunciar y demostrar los teoremas de existencia y unicidad de la mejor aproximación polinomial.

4.2.2. Teoremas de Existencia y Unicidad

El caso en que el punto x_0 es un extremo del intervalo, está incluido en lo ya analizado, con la única observación de que el entorno U es relativo.

Puede ocurrir que para un trío dado, no hubiese holgura alguna en x_0 , en ese caso definimos $H(x_0) = \infty$. Por el contrario, si x_0 no fuese un punto de interpolación, es decir, $h_1(x_0) \neq h_2(x_0)$, entonces no habría un trío propiamente; podría decirse que no hay limitación de holgura y convenir en que $H(x_0) = 0$. Continuaremos analizando sólo el caso de limitaciones finitas.

Teorema 4.2.5 (de Existencia) Sean h_1, h_2 y f como anteriormente tales que $x_1, \dots, x_k \in [a, b]$ son los ceros aislados y además comunes de h_1 y h_2 . Si el trío $\tau(f, h_1, h_2)$ admite limitación de holgura $H(x_i) = n_i$ en x_i , $1 \leq i \leq k$, entonces existe una solución de grado a lo más $n = \sum_{i=1}^k n_i - 1$ de (4.1).

Demostración. Dado que el trío $\tau(f, h_1, h_2)$ admite limitación de holgura a partir de $H(x_i) = n_i$ en x_i , $1 \leq i \leq k$, entonces existen $p_i^* \in P_{n_i-1}$, únicos en el sentido de que para cualesquiera otros polinomios p_i , con holgura en x_i y $p_i \neq p_i^*$, son de la forma

$$p_i(x) = p_i^*(x) + \sum_{k=H(x_i)}^{n_i} a_{ik}x^k, \quad 1 \leq i \leq k,$$

utilizando la interpolación de tipo Hermite encontramos una solución p^H , de grado menor o igual a n , tal que

$$(p^H)^{(j)}(x_i) = (p_i^*)^{(j)}(x_i), \quad 0 \leq j \leq n_i - 1, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (4.5)$$

Luego, por el teorema de Taylor, para cada x_i , $1 \leq i \leq k$, existe una vecindad de x_i en la cual

$$\begin{aligned} p^H(x) &= p^H(x_i) + (p^H)'(x_i)(x - x_i) + \dots + (p^H)^{(n_i)}(x_i) \frac{(x - x_i)^{n_i}}{n!} + \dots \\ &\quad + (p^H)^{(s-1)}(x_i) \frac{(x - x_i)^{s-1}}{(n + m)!} \\ &= p_i^*(x) + \sum_{j=n_i+1}^n (p^H)^{(j)}(x_i) \frac{(x - x_i)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$p^H(x) - p_i^*(x) = \sum_{j=n_i+1}^n (p^H)^{(j)}(x_0) \frac{(x-x_0)^j}{j!} = O(x-x_0)^{n_i}$$

y dado que p_i^* admite holgura a partir de n_i , entonces existen vecindades V_{x_i} de x_i y escalares $\lambda_i > 0$ tales que

$$\forall x \in V_{x_i}, (f - \lambda_i h_1)(x) \leq p^H(x) \leq (f + \lambda_i h_2)(x),$$

$1 \leq i \leq k$.

Sea $\delta_i > 0$ tal que

$$B(x_i, \delta_i) \subset V_{x_i}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

y consideremos el conjunto

$$A = \left(\bigcup_{i=1}^k B(x_i, \delta_i) \right)^c \cap [a, b],$$

que es compacto en \mathbb{R} , la función $p^H - f$ continua y $h_1, h_2 > 0$ en A , por tanto existe $\lambda_n > 0$ con

$$-\lambda_n h_1 \leq p^H - f \leq \lambda_n h_2.$$

Escogiendo $\lambda = \max \{ \lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_n \}$, tenemos

$$f - \lambda h_1 \leq p^H \leq f + \lambda h_2$$

en $[a, b]$. Que es lo que queríamos demostrar. ■

Con el teorema anterior tenemos condiciones bajo las cuales podemos asegurar que para algún $n \in \mathbb{N}$, existe $\lambda > 0$ para el cual $M_\lambda \neq \emptyset$. Estamos en la posibilidad de definir la mejor aproximación polinomial en bandas variantes con $h_1, h_2 \geq 0$.

Definición 4.2.6 Sean $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$, $h_1, h_2 \geq 0$ y tales que el trío $\tau(f, h_1, h_2)$ admite limitación de holgura $n_i \in \mathbb{N}$, en cada cero de las funciones error. Para cada $n \geq \sum_i n_i - 1$ definimos la mejor aproximación, $E_n(f, h_1, h_2)$, de P_n a f relativa a h_1 y h_2 , como

$$E_n = E_n(f, h_1, h_2) := \inf \{ \lambda > 0 : M_\lambda \neq \emptyset \}.$$

El valor E_n está asociado al conjunto

$$M_{E_n} = \bigcap_{\substack{\lambda < \lambda', \\ M_\lambda \neq \emptyset}} M_\lambda.$$

Por un criterio de compacidad sobre los M'_λ s, similar a los expuestos anteriormente, este conjunto M_{E_n} es no vacío y a sus elementos se les denominará polinomios de mejor aproximación a f relativo a h_1 y h_2 .

Aún logrando definir convenientemente la mejor aproximación y obtener polinomios de mejor aproximación, tenemos ejemplos en los cuales el polinomio de mejor aproximación no es único. Veamos:

Ejemplo 4.2.7 Para $[a, b] = [-1, 1]$. Analicemos la desigualdad

$$f - \lambda h_1 \leq p \leq f + \lambda h_2,$$

para $h_1 = f = |x|$ y $h_2 = 2|x|$. Tenemos

$$\forall x \in [-1, 1], (1 - \lambda)|x| \leq p \leq 2(2\lambda + 1)|x|.$$

En este caso $E_n(f, h_1, h_2) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$ o $n = 1$, el polinomio de mejor aproximación es la constante cero. Si $n > 1$, ya se pierde la unicidad, Vea Fig. 4.3.

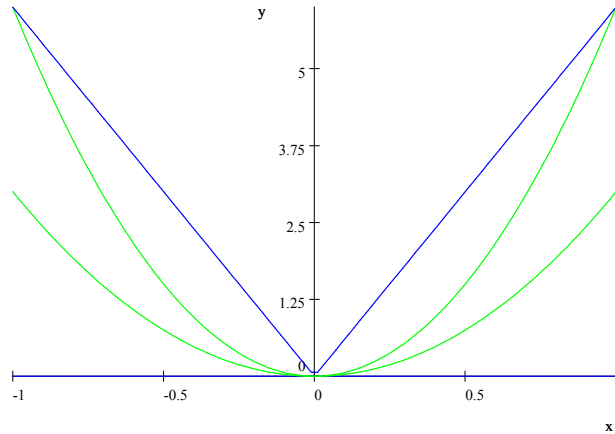


Fig. 4.3. A manera de ilustración, para este ejemplo en particular y $n = 2$ y todo $a \geq 0$, los polinomios $p(x) = ax^2$, son de la mejor aproximación.

Dadas h_1, h_2 y f como anteriormente, con $x_1, \dots, x_k \in [a, b]$ los ceros de h_1 y h_2 y tales que el trío $\tau(f, h_1, h_2)$ admite limitación de holgura $H(x_i) = n_i$ en $x_i, 1 \leq i \leq k$, el ejemplo anterior muestra que no siempre se puede garantizar la unicidad de los polinomios de mejor aproximación, sin embargo, de la demostración del Teorema 4.2.5 se puede deducir que si p es un polinomio de mejor aproximación a f , relativa al par h_1 y h_2 entonces se puede expresar como

$$p(x) = p^H(x) + qW(x),$$

donde p^H es el polinomio de Hermite que satisface las condiciones 4.5 y

$$W(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i)^{n_i},$$

por lo que pudiéramos aplicar una técnica similar a la que se utilizó para demostrar el Teorema 3.1.3, del capítulo anterior, para probar la unicidad del polinomio de mejor aproximación. Sin embargo, el éxito de dicha técnica radicó en la posibilidad de escoger vecindades de cada x_i , en las cuales tanto $\|(f - p^H - E_n h_1)/W\|$ como $\|f - p^H + E_n h_2/W\|$ se pueden tomar tan grandes como se desee, pero no siempre es posible esto. Ver Fig. 4.1.

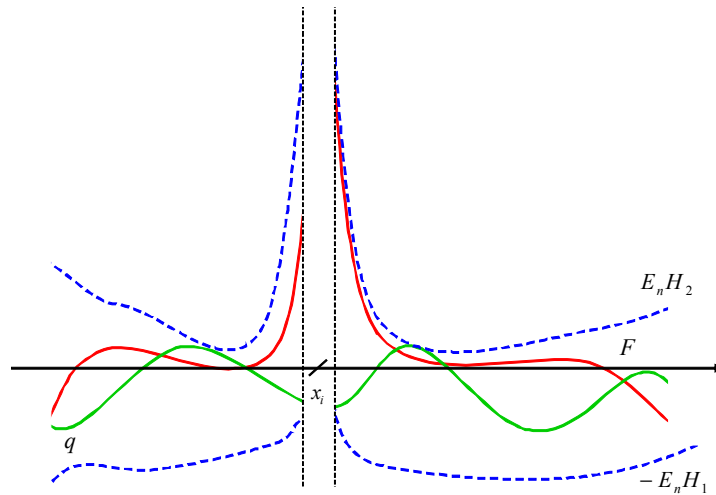


Fig 4.2. Puede ocurrir que en cada vecindad U de x_i la gráfica de $q_{m-n,U}$ el polinomio de mejor aproximación a F , quede fuera de la banda.

Ilustremos con el Ejemplo 4.2.7, $h_1 = f = |x|$ y $h_2 = 2|x|$. La limitación de la holgura en $x_0 = 0$ es $H(x_0) = 1$, $p^H \equiv 0$ y $W(x) = x$, luego para $n \geq 2$;

$$\left| \frac{(f - p^H - E_n h_1)(x)}{W(x)} \right| = |1 - E_n|$$

y

$$\left| \frac{(f - p^H + E_n h_2)(x)}{W(x)} \right| = |1 + 2E_n|.$$

Es así que esta técnica nos provee de un criterio de suficiencia bajo el cual podemos asegurar la unicidad, expresado en el teorema siguiente.

Teorema 4.2.8 *Dadas $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$, $h_1, h_2 \geq 0$ y $x_1, \dots, x_k \in [a, b]$ los ceros de h_1 y h_2 tales que el trío $\tau(f, h_1, h_2)$ admite limitación de holgura $H(x_i) = n_i$ en x_i , $1 \leq i \leq k$, sea $p(x) = p^H(x) + qW(x) \in P_m$, un polinomio de mejor aproximación a f relativa a h_1 y h_2 ; donde $m \geq n = \sum_{i=1}^k n_i - 1$ y los polinomios p^H y W fueron descritos anteriormente. Entonces una condición suficiente para que p sea único es que se satisfaga lo siguiente:*

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \left| \frac{(f - p^H - E_n h_1)(x)}{W(x)} \right| = \infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \left| \frac{(f - p^H + E_n h_2)(x)}{W(x)} \right| = \infty.$$

En efecto, en tal caso la demostración puede proseguir como lo realizamos en el capítulo anterior.

Conclusiones

Dadas $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$, hemos introducido un método para medir la aproximación de f por otras clases de funciones aproximantes, en particular por polinomios algebraicos de un grado determinado, variando la amplitud de la banda generada por las funciones $f - \lambda h_1$ y $f + \lambda h_2$, mientras que esta contenga elementos de la clase aproximante.

En este trabajo de tesis se presentan resultados obtenidos en la aproximación polinomial uniforme mediante el método de bandas de amplitud variante. En el Capítulo 1, además de hacer una breve recopilación de resultados sobre la aproximación polinomial uniforme clásica, para el caso $h_1, h_2 > 0$, presentamos resultados de existencia, unicidad y caracterización de la mejor aproximación polinomial en bandas de amplitud variante. y pese a que ésta y la aproximación pesada sensible al signo son conceptos equivalentes, como ya antes lo habíamos mencionado, los resultados aunque no son novedosos, sí lo es la técnica empleada, que permite además tener un mejor entendimiento gráfico de ciertos problemas.

En el Capítulo 2 se propone una extensión del algoritmo de Rémez, que permite calcular el polinomio de la mejor aproximación polinomial en el contexto de bandas variantes. Se demuestra la convergencia del mismo y se presentan ejemplos realizados con su programación en Matlab. Destaquemos que en [19], Loeb, Moursund, Schumaker y Taylor, apoyados en trabajos previos de Moursund, presentan una adaptación muy general del algoritmo de Rémez aplicables al caso del peso generalizado, bajo ciertas hipótesis de regularidad del peso, para el cálculo del polinomio de la mejor aproximación incluso bajo condiciones de interpolación. En 1970, en oriente, Rémez y Gavriyuk presentan independientemente mejoras al algoritmo tradicional de Rémez y facilitan su uso para la aproximación polinomial tradicional, pero también con restricciones de interpolación, [27]. Nuestra contribución aquí, es la pre-

sentación de una demostración cualitativa nueva, relativamente muy sencilla al apoyarse en ideas geométricas, para la aproximación polinomial en bandas de amplitud variante, que además tiene la ventaja de readaptarse al caso de polinomios con restricciones de interpolación; caso que se estudió y los resultados obtenidos se muestran en el Capítulo 3. Asimismo se exhiben ejemplos de este caso, obtenidos con el programa en Matlab del algoritmo de Rémez extendido, estudiado previamente.

El caso $h_1, h_2 \geq 0$ presenta diferentes facetas y requirió de nuevas definiciones, como la de condición de holgura, para tener resultados sobre la existencia y unicidad de los polinomios de mejor aproximación, los cuales conforman el Capítulo 4 de la tesis. Estos capítulos 2, 3 y 4, contienen resultados no sólo novedosos desde el punto de vista de las demostraciones sino que enriquecen igualmente aquellos que eran conocidos. En el capítulo 4, los resultados son todos originales.

En resumen, en la tesis introducimos un método para medir la aproximación de funciones por otras clases de funciones aproximantes, que denominamos aproximación mediante bandas de amplitudes variantes. Concentrándonos en la tesis en la aproximación polinomial algebraica, resolvemos los problemas tradicionales de existencia de la mejor aproximación, unicidad, caracterización y algoritmo de cálculo, incluso para polinomios de aproximación con restricciones de interpolación. Programamos los algoritmos y calculamos polinomios de mejor aproximación en diferentes casos que aquí presentamos como ilustración.

Aunque el método presentado se incluye en el de pesos generalizados de Moursund y es similar al de pesos sensibles al signo de las escuelas ucranianas y rusas, el mismo ofrece ventajas geométricas que permiten mejorar algunos resultados conocidos o encontrar otros nuevos, sobre todo en lo concerniente a la aproximación con condiciones de interpolación.

Quedan pendientes para futuros trabajos, el orden de convergencia del algoritmo de Rémez para bandas de amplitudes variantes, que conjeturamos debe ser igual al del algoritmo de Rémez tradicional. Así mismo, un análisis formal sobre la estabilidad de dicho algoritmo y su mejoramiento para una programación más accesible y de mejores resultados.

Bibliografía

- [1] Babenko V. F., *Aproximación no simétrica en espacios de funciones sumables*, Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 734, 4, 1982, pp. 407-416. (En ruso).
- [2] Bokhari M. A., *On constrained uniform approximation*, IJMMS, Hindawi Publishing Corp., Vol. 31, 2, 2002, pp. 103-108.
- [3] Chebyshev P. L., *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*. Mém. Prés. Acad. Imp. Sci. Pétersb. Divers Savants, 1854, VII, pp. 539-568.
- [4] Chebyshev P. L., *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions*. Mém. Prés. Acad. Imp. Sci. Pétersb. (6), Sci. Math. Phys. VII, 1859, pp. 199-291.
- [5] Cheney, E. W., *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [6] DeVore R. A., Lorentz G. G., *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [7] Dolzhenko E. P., Sevast'yanov, *Sing-sensitive approximation*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 91, 5, 1998, pp. 3205-3257.
- [8] Guerra F., Jiménez M. A., *A semi-infinite programming approach to a mixed approximation problem*, Parametric Optimization and Related Topics IV, J.Guddat et al, series Approximation and Optimization, Peter Lang Verlag, Frankfurt, 1997, pp. 135-143.
- [9] Guerra F., Jiménez M. A., *On feasible sets defined through Chebyshev approximation*, Mathematical Methods of Operations Research, Vol. 47, 2, 1998, pp. 255-264.

- [10] Hassouni A., Oettli W., *On regularity and optimality in nonlinear semi-infinite programming*. Recent advances, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Nonconvex Optim. Appl. 57 (2001), pp. 59-74.
- [11] Jiménez M. A., Juárez E. L, Guerra F., *Transformation of some mixed approximation problems by optimization methods*, Optimization, Vol. 5, 1, 2002, pp. 175-190.
- [12] Jiménez M. A., Martínez I. L., *Mejor aproximación polinomial en bandas no uniformes*, Tópicos de Teoría de Aproximación II, Textos Científicos, Puebla, México, 2007, pp. 97-109.
- [13] Jiménez M. A., Martínez I. L., *Varying amplitude as degree of approximation*, International conference on approximation methods and numerical modeling in environment and natural resources, MAMERN'07, Book of abstracts, Granada, España, 2006, pp. 85-88.
- [14] Jiménez M. A., Todorov M. I., *Unicity of the solutions of infinite linear inequality systems*. Comptes Rendus de l'Académie bulgare des Sciences Tome 54, Nr. 6, 2001, pp. 17-20.
- [15] Krein M. G., Nudel'man A. A., *The Markov moment problem and extremal problems. Ideas and problems of P. L. Chebyshev and A. A. Markov and their further development*, Nauka, Moscow 1973.
- [16] Kozko A. I., *Desigualdades análogas a las de Jackson-Nikolskii para polinomios trigonométricos en espacios con norma asimétrica*, Matem. Zametki, Vol. 61, 5, 1997, pp. 687-699. (En ruso).
- [17] Kozko A. I., *Desigualdades multidimensionales de métricas mixtas en espacios de normas asimétricas*, Matem. Sb., Vol. 189, 5, 1998, pp. 88-106.
- [18] Loeb H. L., Moursund D. G., Taylor G. D., *Uniform rational weighted approximation having restricted ranges*, Journal on Approximation Theory, Vol. 1, 1968, pp. 401-411.
- [19] Loeb H. L., Moursund D. G., Schumaker L. L., Taylor G. D., *Uniform generalized weight function polynomial approximation with interpolation*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 6, 2, 1969, pp. 284-293.

- [20] Lorentz G. G., *Distribution of alternation points in uniform polynomial approximation*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 92, 3, 1984, pp. 401-403.
- [21] Márquez J., *Fundamentos de Teoría de Optimización*, Ed. Limusa, México, 1987.
- [22] Moursund D. G., *Chebyshev approximation using a generalized weight function*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 3, 3, 1966, pp. 435-450.
- [23] Moursund G. D., *Computational aspects of Chebyshev approximation using a generalized weight function*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 5, 1968, pp. 126-137.
- [24] Moursund D. G. and G. D. Taylor, *Uniform rational approximation using a generalized weight function*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 5, 1968, pp. 882-889.
- [25] Pokrovskii A. V., *The best asymmetric approximation in spaces of continuous functions*, Izvestiya Mathematics, Vol. 70, 4, 2006, pp. 809-839.
- [26] Ramazanov A., *Polinomios ortogonales con peso sensitivo al signo*, Matem. Zametki, Vol. 59, 5, 1996, pp. 737-752. (En ruso)
- [27] Remez E. Ya., Gavriilyuk V. T., *Construccion of Chebyshev approximations using functions of interpolation classes*, Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 23,1,1970, pp. 25-33.
- [28] Rivlin T. J., *An introduction to the approximation of functions*, Blaisdell Publishing Company, Massachusetts, 1969.
- [29] Tapia R. A., Trosset M.W., *An extension of the Karush-Kuhn-Tucker necessity conditions to infinite programming*, SIAM Review, Vol. 36, 1, 1994, pp. 1-17.
- [30] Tikhomirov V. M. *Commentary on the article by V. L. Goncharov, The theory of best approximation of functions*, Journal of Approximation Theory, 106, 2000, pp. 58-65.