



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Desarrollo de sensores usando fibra óptica y su aplicación en  
la detección de acetona

Tesis presentada al

**Posgrado en Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS**

por

Juan Omar Alcocer Victorín

Director de tesis:

Dra. Georgina Beltrán Pérez

Asesorado por

Dra. Georgina Beltrán Pérez

Dr. Severino Muñoz Aguirre

Puebla Pue.  
Julio de 2025





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Desarrollo de sensores usando fibra óptica y su aplicación en  
la detección de acetona

Tesis presentada al

**Posgrado en Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS**

por

Juan Omar Alcocer Victorín

Director de tesis:

Dra. Georgina Beltrán Pérez

Asesorado por

Dra. Georgina Beltrán Pérez

Dr. Severino Muñoz Aguirre

Puebla Pue.  
Julio de 2025



**Título:** Desarrollo de sensores usando fibra óptica y su aplicación en la detección de acetona

**Estudiante:** JUAN OMAR ALCOCER VICTORÍN

COMITÉ

---

Dr. Juan Castillo Mixcóatl  
Presidente

---

Dr. Víctor Manuel Altúzar Aguilar  
Secretario

---

Dr. Salvador Alcántara Iniesta  
Vocal

---

Dr. Marcos Rodríguez Torres  
Suplente

---

Dra. Georgina Beltrán Pérez  
Asesor

---

Dr. Severino Muñoz Aguirre  
Asesor



# Agradecimientos

A mis asesores:

A la Dr. Georgina y al Dr. Severino por su constante apoyo académico al impartir sus conocimientos siempre que lo necesitaba. Por su orientación, paciencia y comprensión en la resolución de dudas y guía en los procesos de investigación. Por velar por mi bienestar académico y formación como investigador.

\*

A mi familia:

A mi madre y padre por apoyarme, aconsejarme y acompañarme a lo largo de mi formación académica incluso en la distancia. Por estar presentes y siempre pendientes de mi bienestar y salud. Por siempre recibirme con los brazos abiertos.

\*

A mi pareja:

A Gabriela por permanecer a mi lado incluso en la distancia y frente a diversas adversidades. Por impulsarme a ser mejor persona y a desempeñarme lo mejor posible en todo lo que me proponga. Por siempre estar presente, escucharme y comprenderme. Por sus consejos, llamadas, planes, sentimientos, confianza, comprensión y amor brindados a lo largo de estos 2 años de maestría y muchos más.

\*

A mis amigos:

A Alejandro, Roberto, Elías, Miguel, Carlos y Leonardo por las risas y momentos amenos compartidos, por los consejos brindados y la hermandad formada desde hace muchos años. Por la confianza otorgada y su constante presencia.

\*

Al cuerpo académico de Optoelectrónica y Fotónica por brindar apoyo en diversas instancias tanto en lo teórico como experimental. Por brindar herramientas que me permitieron realizar mis estudios de investigación y desempeñarme de forma productiva. Por proporcionar un ambiente de respeto y solidaridad en donde sentía la comodidad de expresar mis dudas y pedir ayuda.

\*

A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (Secihti, antes Conahcyt) por el apoyo institucional de *Becas nacionales para estudios de posgrado 2023*, permitiendo continuar mi formación académica y la de muchos otros estudiantes, con el fin de utilizar mis conocimientos para mejorar la calidad de vida de nuestra sociedad.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>XVII</b>
<b>Introducción</b>	<b>XIX</b>
Antecedentes . . . . .	XIX
Compuestos orgánicos volátiles como biomarcadores de enfermedades y enfoques para su detección . . . . .	XIX
Acetona . . . . .	XIX
Enfoques utilizados para la detección de acetona en el aliento . . . . .	XX
Sensores de fibra óptica en la detección de COV's . . . . .	XX
Tipo de sensores de fibra óptica en la detección de COV's . . . . .	XX
Técnicas de grabado de las RPL . . . . .	XXI
Configuraciones de MZI en fibras ópticas . . . . .	XXI
MZI en fibras ópticas empleando RPL . . . . .	XXII
Sensor con MZI de doble paso . . . . .	XXII
Objetivos . . . . .	XXII
Objetivo general . . . . .	XXII
Objetivos específicos . . . . .	XXII
<b>1. Teoría de fibra óptica</b>	<b>1</b>
1.1. Óptica Geométrica . . . . .	1
1.1.1. La fibra óptica . . . . .	1
1.1.2. Introducción . . . . .	1
1.1.3. Reflexión y refracción de la luz en una superficie . . . . .	1
1.1.4. Reflexión total interna . . . . .	2
1.1.5. La apertura numérica . . . . .	4
1.1.6. Rayos oblicuos . . . . .	6
1.2. Teoría Electromagnética . . . . .	6
1.2.1. Ondas electromagnéticas y ecuaciones de Maxwell . . . . .	6
1.2.2. Derivación de la ecuación de onda . . . . .	7
1.2.3. Ecuaciones de onda en coordenadas cartesianas . . . . .	9
1.2.4. Ecuaciones de onda en coordenadas cilíndricas . . . . .	11
1.2.5. Solución de las ecuaciones de onda en coordenadas cilíndricas . . . . .	14
1.3. Propagación de ondas en fibras de núcleo uniforme con índice escalonado . . . . .	16
1.3.1. Modos propagados en la fibra óptica . . . . .	16
1.3.2. Campos electromagnéticos en el núcleo y cubierta . . . . .	17
1.3.3. Clasificación de modos . . . . .	20
1.3.4. Constantes de propagación de los modos: Soluciones exactas . . . . .	20
1.3.5. Constantes de propagación de los modos: Soluciones con la aproximación de guiado débil . . . . .	22
1.3.6. Expresión unificada para las constantes de propagación . . . . .	23

1.3.7.	Frecuencias de corte . . . . .	24
1.3.8.	Modos LP . . . . .	24
1.3.9.	Índice de refracción efectivo . . . . .	26
1.4.	Rejillas de Periodo Largo . . . . .	26
1.5.	Interferómetro de Mach-Zehnder con RPL en fibra óptica . . . . .	26
1.6.	Interferómetro de Mach-Zehnder de doble paso con RPL en fibra óptica . . . . .	27
1.7.	Sensor MZI de doble paso en fibra óptica para la detección de acetona utilizando una película sensible . . . . .	27
<b>2.</b>	<b>Desarrollo in silico del sensor MZI de doble paso en fibra óptica</b>	<b>29</b>
2.1.	Expresión de la reflectancia . . . . .	29
2.2.	Obtención de los índices de refracción efectivos . . . . .	32
2.3.	Medio externo de la fibra . . . . .	34
2.4.	Cálculo del espectro de reflexión . . . . .	34
2.5.	Parámetros utilizados en la simulación . . . . .	34
<b>3.</b>	<b>Métodos Experimentales</b>	<b>37</b>
3.1.	Elaboración del sensor MZI de doble paso con película sensible . . . . .	37
3.1.1.	Método de grabado de las RPL . . . . .	37
3.1.2.	Depósito de la película reflejante . . . . .	38
3.1.3.	Propiedades y depósito de las películas sensibles . . . . .	40
3.2.	Sistema estático . . . . .	43
3.3.	Sistema dinámico . . . . .	44
3.4.	Análisis de datos . . . . .	47
3.4.1.	Matriz de características . . . . .	47
3.4.2.	Estandarización . . . . .	47
3.4.3.	Análisis de Componentes Principales (PCA) . . . . .	47
3.4.4.	Regresión de Componentes Principales (PCR) . . . . .	48
3.4.5.	Proyección a Estructuras Latentes (PLS) . . . . .	49
3.4.6.	Regresión de Proyección a Estructuras Latentes (PLSR) . . . . .	50
3.4.7.	LOD y sensibilidad del sensor . . . . .	50
3.4.8.	Validación cruzada . . . . .	50
<b>4.</b>	<b>Resultados</b>	<b>51</b>
4.1.	Desarrollo in silico del sensor MZI de doble paso . . . . .	51
4.1.1.	Solución de las relaciones de dispersión . . . . .	51
4.1.2.	Espectros de reflexión y reflectancia . . . . .	54
4.1.3.	PCA . . . . .	56
4.1.4.	PLS . . . . .	58
4.2.	Sistema Estático . . . . .	60
4.2.1.	Espectros de reflexión . . . . .	60
4.2.2.	PCA . . . . .	61
4.2.3.	PLS . . . . .	63
4.2.4.	PCR y PLSR . . . . .	64
4.2.5.	LOD . . . . .	67
4.2.6.	Sensibilidad . . . . .	70
4.2.7.	Validación cruzada . . . . .	74
4.2.8.	Humedad relativa y temperatura . . . . .	76
4.3.	Sistema Dinámico . . . . .	78
4.3.1.	Espectros de reflexión . . . . .	78
4.3.2.	Longitud de onda de resonancia y su Potencia . . . . .	78
4.3.3.	PCA y PLS . . . . .	80

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IX
4.3.4. PCR y PLSR . . . . .	83
4.3.5. Validación cruzada . . . . .	84
4.3.6. Humedad relativa y temperatura . . . . .	85
<b>5. Conclusiones</b>	<b>87</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>89</b>



# Índice de figuras

1.1. Rayo incidente y rayo reflejado, con el plano de incidencia formado. . . . .	2
1.2. Los dos tipos de refracción: (a) externa, (b) interna. . . . .	2
1.3. Rayos de luz incidentes en una interfaz de índice alto a bajo: (a) refracción; (b) el caso límite de refracción con un rayo en un ángulo crítico $\phi_c$ ; (c) reflexión total interna cuando $\phi > \phi_c$ . . . . .	3
1.4. Propagación de la luz dentro de una fibra óptica por medio de la reflexión total interna. . . . .	4
1.5. Ángulo de aceptación $\theta_a$ del rayo incidente y que se propaga en el núcleo de la fibra. . . . .	4
1.6. Trayectoria propuesta de un rayo meridional incidiendo en el núcleo de la fibra. . . . .	5
1.7. Trayectoria helicoidal de un rayo oblicuo en una fibra óptica: (a) a lo largo de la fibra; (b) vista transversal de la fibra. . . . .	6
1.8. Gráficas de las funciones de Bessel: (a) de primer tipo; (b) modificadas de segundo tipo. . . . .	16
1.9. Modos de propagación de la luz en fibra óptica. . . . .	17
1.10. Perfil del índice de refracción escalonado de una fibra de núcleo uniforme. . . . .	17
1.11. Campo evanescente que decae exponencialmente en la cubierta de la fibra. . . . .	18
1.12. Diagrama esquemático de un MZI con dos RPL en cascada. . . . .	26
1.13. Diagrama esquemático de un MZI de doble paso con RPL en cascada. . . . .	27
1.14. Diagrama esquemático de un sensor MZI de doble paso con película sensible para la detección de acetona. . . . .	28
2.1. Diagrama esquemático del arreglo de matrices para un MZI de doble paso. . . . .	30
2.2. Diagrama esquemático de una sección transversal de la geometría propuesta de la fibra. . . . .	32
3.1. Sistema de grabado de las RPL. . . . .	37
3.2. Diagrama esquemático del grabado de las RPL. . . . .	38
3.3. Arreglo para el depósito de la plata en la punta de la fibra. . . . .	39
3.4. Vista 20x con microscopio óptico Oxion Inverso Euromex de la película reflejante de plata depositada en una fibra. . . . .	39
3.5. Vista 50x con microscopio óptico Oxion Inverso Euromex de la película reflejante de plata depositada en una fibra. . . . .	40
3.6. Diagrama esquemático del depósito por atomización ultrasónica en la fibra. . . . .	42
3.7. Sistema de depósito por atomización ultrasónica. . . . .	42
3.8. Sección de la fibra expuesta a la niebla. . . . .	43
3.9. Diagrama esquemático del sistema estático empleado. . . . .	43
3.10. Sistema estático de medición de fibras ópticas. . . . .	44
3.11. Diagrama esquemático del sistema dinámico empleado. . . . .	44
3.12. Sistema dinámico: (a) primera parte; (b) segunda parte. . . . .	45
3.13. Modelo de la cámara de medición del sistema dinámico desde vista: (a) lateral; (b) frontal. . . . .	46
4.1. Solución de la ecuación característica en el núcleo a longitud de onda: (a) 1000 nm; (b) 1700 nm. . . . .	51

4.2. Solución de la ecuación característica en la cubierta a longitud de onda: (a) 1000 nm; (b) 1700 nm. . . . .	52
4.3. Curvas de dispersión de los índices de refracción efectivos obtenidas para: (a) el núcleo; (b) la cubierta. . . . .	52
4.4. Curvas de dispersión de los índices de refracción efectivos obtenidas para: (a) la mezcla PDMS-Acetona al 0 %; (b) la mezcla PDMS-Acetona al 10 %. . . . .	53
4.5. Curvas de la diferencia entre los índices efectivos obtenidos de la mezcla al 10 % y al 1 %. . . . .	53
4.6. Espectros de reflectancia de las mezclas: (a) del 0 % al 1 %; (b) del 0 % al 10 %. . . . .	54
4.7. Espectros de reflexión de las mezclas: (a) del 0 % al 1 %; (b) del 0 % al 10 %. . . . .	55
4.8. PC1 contra PC2 contra PC3 de la mezcla PDMS-Acetona del: (a) 0 % al 1 %; (b) 0 % al 10 %. . . . .	56
4.9. PC1 contra PC2 de la mezcla PDMS-Acetona del: (a) 0 % al 1 %; (b) 0 % al 10 %. . . . .	57
4.10. LSC1 contra LSC2 contra LSC3 de la mezcla PDMS-Acetona del: (a) 0 % al 1 %; (b) 0 % al 10 %. . . . .	58
4.11. LSC1 contra LSC2 de la mezcla PDMS-Acetona del: (a) 0 % al 1 %; (b) 0 % al 10 %. . . . .	59
4.12. Espectros de reflexión de las distintas etapas de los sensores con: (a) PDMS; (b) PMMA; (c) ApT; (d) ApL. . . . .	60
4.13. Espectros de reflexión durante las mediciones usando los sensores con: (a) PDMS; (b) PMMA; (c) ApT; (d) ApL. . . . .	61
4.14. PC1 contra PC2 de las mediciones con: (a) PDMS; (b) PMMA; (c) ApT; (d) ApL. . . . .	62
4.15. LSC1 contra LSC2 de las mediciones con: (a) PDMS; (b) PMMA; (c) ApT; (d) ApL. . . . .	63
4.16. Concentración Predicha contra Experimental para el sensor con PDMS usando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes. . . . .	65
4.17. Concentración Predicha contra Experimental para el sensor con PMMA usando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes. . . . .	65
4.18. Concentración Predicha contra Experimental para el sensor con ApT usando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes. . . . .	66
4.19. Concentración Predicha contra Experimental para el sensor con ApL usando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes. . . . .	66
4.20. LOD contra Tiempo en la medición del sensor con PDMS y empleando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes. . . . .	69
4.21. LOD contra Tiempo en la medición del sensor con PMMA y empleando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes. . . . .	69
4.22. LOD contra Tiempo en la medición del sensor con ApT y empleando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes. . . . .	70
4.23. LOD contra Tiempo en la medición del sensor con ApL y empleando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes. . . . .	70
4.24. Valores contra concentración de acetona de sensores con PDMS de: (a) PC1; (b) LSC1. . . . .	73
4.25. Valores contra concentración de acetona de sensores con PMMA de: (a) PC1; (b) LSC1. . . . .	73
4.26. Valores contra concentración de acetona de sensores con ApT de: (a) PC1; (b) LSC1. . . . .	74
4.27. Valores contra concentración de acetona de sensores con ApL de: (a) PC1; (b) LSC1. . . . .	74
4.28. Validación cruzada con PCR y PLSR de los sensores con: (a) PDMS; (b) PMMA; (c) ApT; (d) ApL. . . . .	75
4.29. Datos de humedad relativa y temperatura de la medición del sensor con: (a) PDMS; (b) PMMA; (c) ApT; (d) ApL. . . . .	77
4.30. Espectros de reflexión del sensor con PDMS por inmersión en el sistema dinámico. . . . .	78
4.31. Cambios sufridos en el pico máximo inicial durante la medición en: (a) potencia; (b) longitud de onda de resonancia. . . . .	79
4.32. Valores obtenidos para las primeras tres componentes en el sistema dinámico por medio de: (a) PCA; (b) PLS. . . . .	80
4.33. Valores contra Tiempo en la medición del sistema dinámico de: (a) PC1; (b) PC3. . . . .	81
4.34. Valores contra Tiempo en la medición del sistema dinámico de: (a) LSC1; (b) LSC3. . . . .	82

4.35. Concentración Predicha contra Experimental en el sistema dinámico usando: (a) PCR; (b) PLSR. . . . .	83
4.36. Concentración Predicha contra Tiempo en el sistema dinámico usando: (a) PCR; (b) PLSR.	83
4.37. Flujo Predicho contra Tiempo en el sistema dinámico usando: (a) PCR; (b) PLSR. . . . .	84
4.38. Validación cruzada realizada para el sistema dinámico usando: (a) PCR; (b) PLSR. . . . .	85
4.39. Datos de humedad relativa y temperatura durante la medición en el sistema dinámico. . . . .	86



# Índice de tablas

1.1. Relación entre las designaciones tradicionales y LP de los diez modos $LP_{lm}$ más bajos. . .	25
1.2. Distribución del campo eléctrico y de intensidad de $E_x$ para los tres modos $LP_{lm}$ más bajos. . .	25
3.1. Flujos empleados en la medición realizada en el sistema dinámico. . . . .	46
3.2. Algoritmo empleado para la etapa de calibración de PLS (NIPALS). . . . .	49
4.1. Coeficientes de la regresión obtenidos por medio de PCR y PLSR, usando hasta tres componentes. . . . .	64
4.2. LOD de los sensores con PDMS usando hasta tres componentes. . . . .	67
4.3. LOD de los sensores con PMMA usando hasta tres componentes. . . . .	67
4.4. LOD de los sensores con ApT usando hasta tres componentes. . . . .	68
4.5. LOD de los sensores con ApL usando hasta tres componentes. . . . .	68
4.6. Sensibilidad y coeficiente de determinación de los sensores con PDMS usando PCA y PLS. . . . .	71
4.7. Sensibilidad y coeficiente de determinación de los sensores con PMMA usando PCA y PLS. . . . .	71
4.8. Sensibilidad y coeficiente de determinación de los sensores con ApT usando PCA y PLS. . . . .	71
4.9. Sensibilidad y coeficiente de determinación de los sensores con ApL usando PCA y PLS. . . . .	72
4.10. LOD obtenido con la mayor cantidad de componentes permitida antes de un sobreajuste. . . . .	76



# Resumen

En este trabajo se desarrollaron e implementaron sensores de fibra óptica para la detección de acetona en un sistema estático y dinámico, empleando un interferómetro de Mach-Zehnder de doble paso por medio de rejillas de periodo largo, una película reflejante de plata y una película sensible (PDMS, PMMA, ApT, ApL). Recopilando los espectros de reflexión y utilizando técnicas de análisis multivariantes como el análisis de componentes principales, la proyección a estructuras latentes y sus regresiones, se buscaron relaciones en los datos y se calcularon los límites de detección de los sensores.

Apoyándonos en una simulación del comportamiento del interferómetro de doble paso se obtuvieron los espectros de reflexión *in silico* y aplicando las mismas técnicas de análisis se obtuvieron resultados comparables con los experimentales.

La simulación y el sistema dinámico fueron implementados con éxito para estos sensores de fibra óptica. El LOD más bajo obtenido en el sistema estático fue de 1.2674 ppm con tres componentes para PLSR con PMMA.

**Palabras clave:** *fibra óptica, acetona, rejilla de periodo largo, interferómetro de Mach-Zehnder, análisis de componentes principales, proyección a estructuras latentes, regresión, in silico, sistema estático, sistema dinámico.*



# Introducción

## Antecedentes

### Compuestos orgánicos volátiles como biomarcadores de enfermedades y enfoques para su detección

El aliento de una persona tiene alrededor de 500 compuestos orgánicos volátiles (COV's), típicamente estando en el rango de partes por millón (ppm), partes por billón (ppb) o incluso en partes por trillón (ppt) [1]. Algunos de estos COV's son utilizados como biomarcadores que nos indican la presencia de distintas enfermedades, como por ejemplo cáncer de pulmón, asma, enfermedad pulmonar obstructiva crónica, cáncer de mama y diabetes [2, 3, 4, 5, 6].

La acetona es uno de los biomarcadores para la diabetes, debido a que las personas con este padecimiento tienden a tener una concentración más alta de este COV en su aliento comparada con la que presentan las personas sanas. El rango de acetona exhalada para personas sanas es de 0.2-1.8 ppm, y para personas con diabetes 1.25-2.5 ppm, llegando incluso hasta 25 ppm para diabetes tipo 1 [7, 8]. Se han estudiado métodos no invasivos para el monitoreo de la diabetes, esto con el objetivo de reducir los factores de riesgo presentes al momento de realizar un análisis de sangre, entre estos métodos se encuentra la detección de acetona exhalada en el aliento de una persona.

Las técnicas convencionales utilizadas para la detección con este método se basan en espectrometría de masas, lo que requiere de equipo especializado, robusto, de limitado acceso y de conocimiento profundo para su manejo, además de ser muy caro y consumir mucho tiempo. Por estas razones, algunas técnicas basadas en la miniaturización tales como narices electrónicas o sensores individuales han ido ganando relevancia en este ámbito [9].

## Acetona

La acetona ( $C_3H_6O$ ) es un metabolito de la grasa corporal y la glucosa la cual puede ser encontrada en el aliento. La concentración de acetona en el aliento es asociada con la concentración de glucosa en la sangre. En grandes concentraciones puede provocar dolor de cabeza, fatiga, sequedad en la boca, náuseas, pérdida del habla coordinada y mareos [10].

Algunas propiedades de la acetona se enumeran a continuación:

1. Es altamente soluble en sangre y en agua.
2. Es un disolvente orgánico polar.
3. Es disolvente de grasas, aceites, ceras, resinas, caucho, plásticos y barnices.
4. Es un líquido incoloro el cual se evapora rápidamente y es inflamable.
5. Tiene un punto de fusión de  $-95\text{ }^{\circ}C$  y punto de ebullición de  $56\text{ }^{\circ}C$  a 1 atm [8, 11].

## Enfoques utilizados para la detección de acetona en el aliento

Se han reportado diferentes tipos de sensores para la detección de acetona, entre estos están:

- Basados en óxidos metálicos.
- A base de materiales orgánicos sensibles a la acetona.
- Electroquímicos.
- Ópticos.

Los sensores con menores límites de detección (LOD por sus siglas en inglés) pertenecen a los basados en óxidos metálicos, alcanzando valores de hasta 0.01 ppm, sin embargo, la mayor restricción que presentan es que deben de operar a temperaturas muy altas, desde 100 °C hasta más de 600 °C; actualmente se están implementando nuevos métodos para asistir estos sensores, entre los cuales se encuentran la iluminación ultravioleta y la preconcentración de gases [9].

## Sensores de fibra óptica en la detección de COV's

Enfocándonos en los sensores ópticos basados en fibra óptica para la detección de COV's, primero se enlistan algunas propiedades de las fibras ópticas que la hacen óptima para su implementación en sensores:

1. Dimensiones compactas.
2. Alta sensibilidad y precisión.
3. Bajo costo.
4. No se ve afectada por la interferencia electromagnética.
5. Permite monitoreo y detección en tiempo real.
6. Permite una rápida transferencia de información.
7. Permite operarla de forma remota.

Los sensores de fibra óptica utilizados para la detección de COV se basan en los cambios que sufre la luz propagada en la fibra debido a varias concentraciones de COV en el entorno que interactúan con los diferentes materiales depositados en la fibra, para luego analizar estas variaciones.

La respuesta de los sensores ópticos puede ser medida por medio de 2 técnicas:

- Intensity interrogation technique: Se monitorean los cambios en la intensidad de la luz propagada.
- Wavelength interrogation technique: Se monitorean los cambios en el espectro de salida correspondientes a los cambios en el entorno. Se requiere el desplazamiento en la longitud de onda del espectro para medir la sensibilidad del sensor [9].

## Tipo de sensores de fibra óptica en la detección de COV's

Los sensores de fibra óptica para la detección de COV's se pueden dividir en 4 categorías dependiendo de la técnica de detección:

1. **Basados en interferometría:**
  - Interferómetro de Fabry-Perot (FPI),
  - Interferómetro de Michelson (MI),
  - Interferómetro de Sagnac (SI),

- Interferómetro de Mach-Zehnder (MZI): En este se tiene un láser propagado en la fibra óptica el cual es separado igualmente en 2 brazos, uno es el brazo sensor y otro el brazo de referencia, en el punto de salida estos 2 rayos se recombinan para formar un patrón de interferencia, el cual puede cambiar debido a ajustes realizados en el brazo sensor o a cambios en el entorno donde se encuentra la fibra.
- 2. **Fibra óptica microestructurada (MOF):** Estas fibras están compuestas de múltiples agujeros distribuidos a lo largo de su longitud, su distribución determina el índice de refracción efectivo de la estructura, así como los modos de propagación específicos.
- 3. **Basados en absorción:** La detección se realiza monitoreando la variación en la intensidad de la luz debido a la interacción con los COV's.
- 4. **Basados en rejillas grabadas:** Se producen por medio de diferentes técnicas de grabado, introduciendo una variación periódica del índice de refracción del núcleo a lo largo de la fibra. Dependiendo del periodo de las rejillas, se pueden categorizar en:
  - Rejilla de periodo corto o rejilla de Bragg (FBG).
  - Rejilla de periodo largo (RPL): Su periodo por lo general se encuentra entre  $110 \mu m$  y  $1 mm$ , permitiendo el acoplamiento entre el modo fundamental del núcleo y los modos de la cubierta en co-propagación. Cuando estos sensores son expuestos a distintas concentraciones de COV's, sus propiedades ópticas como el índice de refracción son alteradas. Estas alteraciones pueden ser estudiadas desde los modos de la cubierta de la RPL, manifestadas como cambios de amplitud y/o en la longitud de onda de resonancia en el espectro de transmisión [9].

## Técnicas de grabado de las RPL

Las técnicas por medio las cuales se pueden grabar las RPL se clasifican en:

- **Basada en láser UV:** Permite una alta repetibilidad y posibilidad de alcanzar periodos muy pequeños, con las desventajas de necesitar equipos especializados y caros, como fibras ópticas fotosensibles.
- **Basadas en otros métodos:**
  - Con láseres de  $CO_2$ ,
  - Con láseres infrarrojos de femtosegundos,
  - Por medio de descarga de arco eléctrico [9].

## Configuraciones de MZI en fibras ópticas

Se han reportado múltiples procesos para el grabado de interferómetros de Mach-Zehnder en fibras ópticas:

- Vahid (2015) reportó el uso de una máquina de afilado personalizada basada en una flama a  $900 \text{ }^\circ C$  para fibras monomodo estándar.
- Li (2012) propuso un sensor de fibra óptica con una estructura monomodo-multimodo-adelgazada-monomodo (SMTS).
- Liu (2013) presentó un sensor de fibra óptica con una estructura monomodo-multimodo-monomodo-adelgazada-monomodo (SMSTS) [9].

## **MZI en fibras ópticas empleando RPL**

Por medio del grabado de 2 RPL en cascada en el núcleo de la fibra empleando una empalmadora Fitel S176 la cual utiliza el arco eléctrico, se construye un MZI en la fibra. Esto siguiendo el mismo principio explicado anteriormente, donde parte de la luz propagada en el modo fundamental del núcleo al pasar por la primera RPL se acopla con los modos de la cubierta, para luego viajar a lo largo de la separación entre las RPL y cambiar sus propiedades al interactuar con los alrededores, y finalmente acoplarse de vuelta al modo del núcleo creando un patrón de interferencia, el cual cambia debido a cambios en el entorno.

La configuración del MZI utilizando RPL se escogió debido a que se reporta una mayor sensibilidad respecto a los sensores que solo utilizan una RPL, además de que el método de grabado utilizando el arco eléctrico es poco reportado y presenta menor costo y mayor facilidad en la realización de estos sensores, así como una mejor manipulación sin que este se rompa o sufra cambios [12]. Muchos de los sensores con MZI en fibra óptica reportados utilizan equipos especializados para su desarrollo o su configuración es compleja y difícil de manipular sin que se rompa la fibra óptica, por lo que, al implementar los métodos trabajados se esperan obtener sensores baratos y que puedan ser utilizados de forma comercial [13, 14, 15, 16].

## **Sensor con MZI de doble paso**

Se ha reportado el uso del método de reflexión en una fibra óptica con MZI cortada al final de una RPL y empleando películas reflejantes para aumentar la sensibilidad y mejorar la respuesta de los sensores, además, esta forma permite una manipulación más fácil y sencilla permitiendo posibles mediciones in situ con menores alteraciones a la fibra como su compresión o doblamiento [17].

## **Objetivos**

### **Objetivo general**

Desarrollar un sensor de MZI fabricado en fibra óptica para la detección de bajas concentraciones de acetona ( $\sim 1$  ppm).

### **Objetivos específicos**

1. Desarrollo de sensores basados en interferómetros de Mach-Zehnder (MZI) compuestos por 2 rejillas de periodo largo conectadas en cascada utilizando los espectros de transmisión y reflexión para medir concentraciones bajas de acetona ( $\sim 1$  ppm).
2. Estudio experimental del sensor de MZI para diferentes películas sensibles a la acetona en modo reflexión utilizando una película reflejante y realizar la medición de la respuesta en un sistema estático a la acetona.
3. Estudio experimental del sensor de MZI para diferentes películas sensibles a la acetona en modo reflexión y realizar la medición de la respuesta en un sistema dinámico a la acetona.
4. Realizar la simulación de los sensores con MZI.

# Capítulo 1

## Teoría de fibra óptica

### 1.1. Óptica Geométrica

#### 1.1.1. La fibra óptica

La fibra óptica es una guía de ondas dieléctrica con forma cilíndrica basada en el fenómeno de reflexión total interna. Se trabajó con la fibra óptica SMF-28, la cual es una fibra monomodo estándar con índice de refracción de perfil escalonado, compuesta por un núcleo (core) de radio  $4.1 \mu m$  con un índice de refracción  $n_1$ , una cubierta (cladding) de radio  $62.5 \mu m$  con un índice de refracción  $n_2$ , tal que  $n_1 > n_2$ , y un revestimiento de radio  $122.5 \mu m$  de capas duales de acrilato diseñado para ser removido mecánicamente [18].

Las fibras de vidrio de sílice ( $SiO_2$ ) son comúnmente consideradas, en las cuales se puede usar algún dopante para disminuir o aumentar su índice de refracción, teniendo como ejemplo el germanio ( $GeO_2$ ) utilizada para aumentar el índice de refracción, siendo entonces posible tener un núcleo de sílice dopada con germanio y una cubierta de sílice pura [19].

#### 1.1.2. Introducción

La óptica geométrica u óptica de rayos es el modelo de la luz que describe su propagación cuando las dimensiones del sistema físico son mucho mayores que la longitud de onda, por lo que, esta se puede describir mediante rayos que obedecen un conjunto de reglas geométricas. Así, el concepto de rayo luminoso se utiliza para caracterizar la luz, y el de índice de refracción para caracterizar los medios materiales por los que la luz se propaga.

El índice de refracción se define como:

$$n = \frac{c}{v}, \quad (1.1.2.1)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $v$  es la velocidad de la luz en el medio. Esto indica que  $n \geq 1$ . Tomando en consideración la **ecuación** 1.1.2.1 se puede obtener el tiempo  $t$  en el que tarda la luz en recorrer una distancia  $s$ , siendo este:

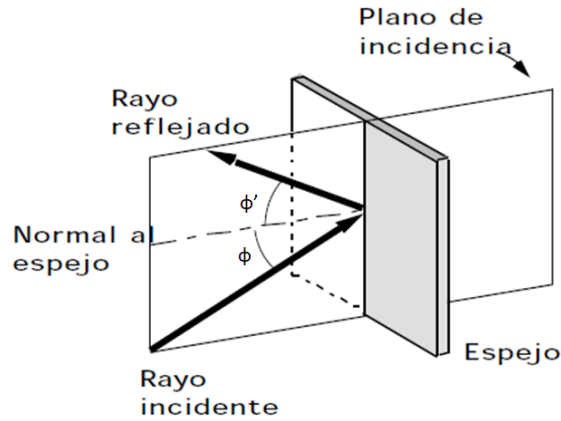
$$t = \frac{s}{v} = \frac{s}{\frac{c}{n}} = \frac{ns}{c}, \quad (1.1.2.2)$$

donde  $ns$  lo definimos como camino óptico (CO) [20].

#### 1.1.3. Reflexión y refracción de la luz en una superficie

Existen dos tipos de reflexión, la más común es la reflexión difusa, en la cual la luz se refleja en todas direcciones. La otra es la reflexión especular o regular, en la cual un estrecho haz de luz se refleja en una dirección única. En esta última se determina el plano de incidencia por medio del rayo incidente y la normal

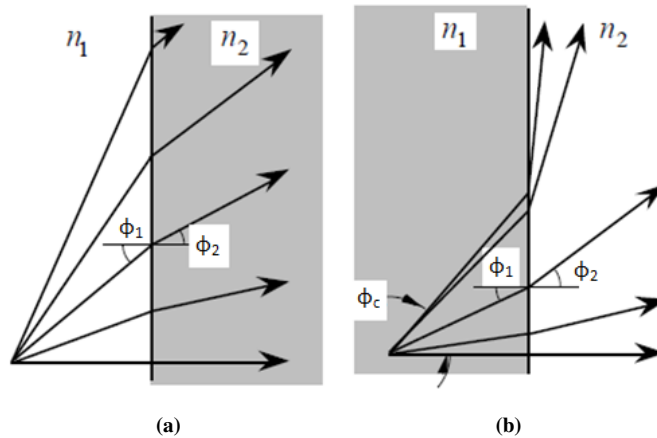
a la superficie, y se cumple que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, como se muestra a continuación en la **figura 1.1**:



**Figura 1.1:** Rayo incidente y rayo reflejado, con el plano de incidencia formado.

Cuando un rayo incide en la interfaz entre dos medios dieléctricos de diferente índice de refracción el fenómeno de refracción ocurre.

Si se considera que la luz se propaga del medio 1 con índice de refracción  $n_1$  y con un ángulo  $\phi_1$  respecto de la normal a la superficie de la interfaz, hacia otro medio 2 con índice de refracción  $n_2$  y con un ángulo  $\phi_2$  respecto de la normal, pueden existir dos casos de refracción: refracción externa, que ocurre cuando  $n_1 < n_2$  y entonces  $\phi_1 > \phi_2$ , y la refracción interna, que ocurre cuando  $n_1 > n_2$  y entonces  $\phi_1 < \phi_2$ , mostradas en la **figura 1.2** [20]:



**Figura 1.2:** Los dos tipos de refracción: (a) externa, (b) interna.

Estos índices de refracción y ángulos están relacionados por medio de la Ley de Snell:

$$n_1 \text{ sen } (\phi_1) = n_2 \text{ sen } (\phi_2). \quad (1.1.3.1)$$

#### 1.1.4. Reflexión total interna

En el caso de la refracción interna, debido a que  $\phi_1 < \phi_2$ , existe la situación en la que  $\phi_2 = 90^\circ$  y  $\phi_1 < 90^\circ$ , teniendo entonces un caso límite donde al ángulo de incidencia se le conoce como ángulo crítico

$\phi_1 = \phi_c$ , ilustrando estas situaciones en la **figura 1.3**, sustituyendo esto en la **ecuación 1.1.3.1** se tiene:

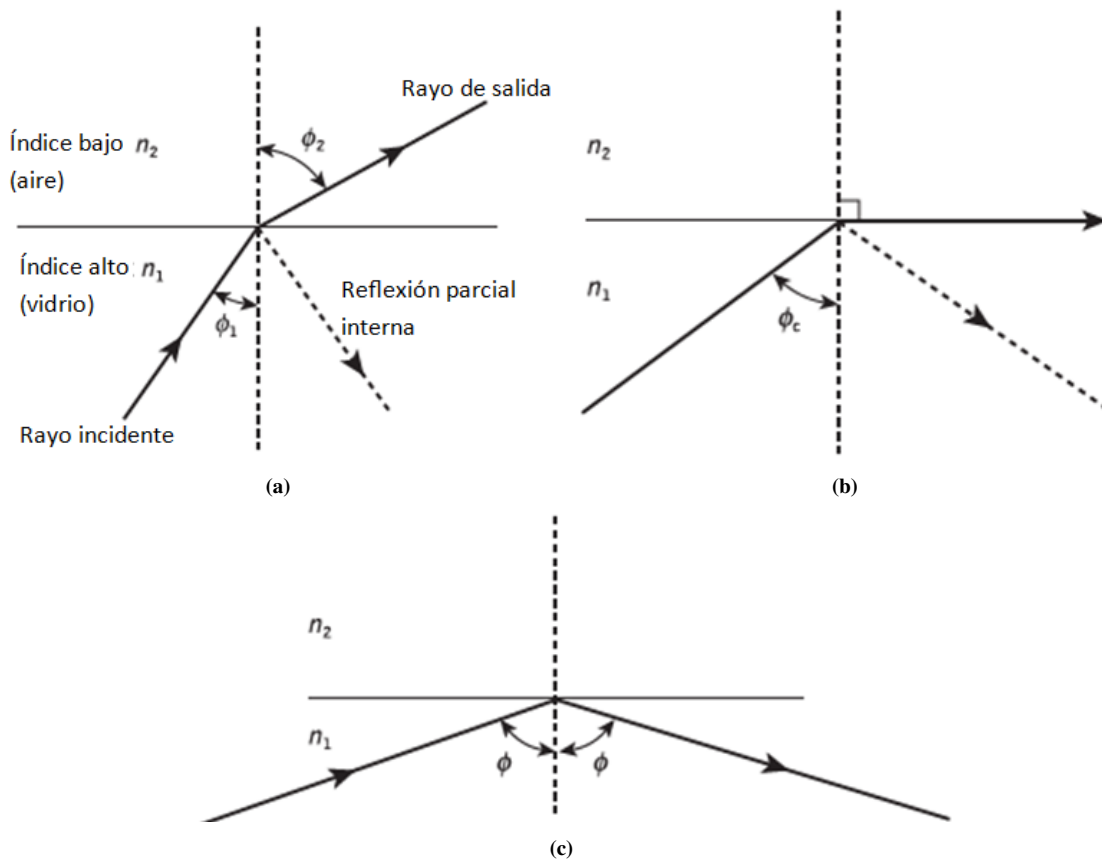
$$n_1 \text{ sen } (\phi_c) = n_2 \text{ sen } (90^\circ) = n_2, \quad (1.1.4.1)$$

donde el valor del ángulo crítico está dado por:

$$\text{sen } (\phi_c) = \frac{n_2}{n_1}, \quad (1.1.4.2)$$

o equivalentemente:

$$\phi_c = \text{arc sen } \left( \frac{n_2}{n_1} \right). \quad (1.1.4.3)$$



**Figura 1.3:** Rayos de luz incidentes en una interfaz de índice alto a bajo: (a) refracción; (b) el caso límite de refracción con un rayo en un ángulo crítico  $\phi_c$ ; (c) reflexión total interna cuando  $\phi > \phi_c$ .

Por lo tanto, para ángulos de incidencia que sean mayores que este ángulo crítico la luz será reflejada devuelta hacia el medio de donde provino, provocando el fenómeno llamado reflexión total interna. Este es el principio por el cual la luz se propaga a lo largo de una fibra óptica, por medio de una serie de reflexiones totales internas producto del índice de refracción del núcleo ligeramente mayor que el de la cubierta de la fibra, como se muestra a continuación en la **figura 1.4** [21]:

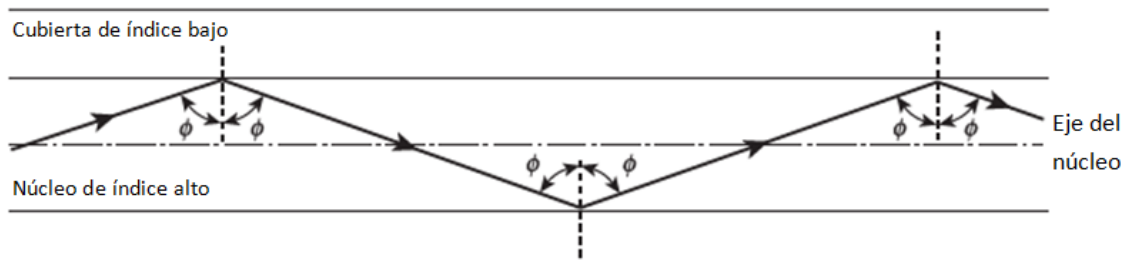


Figura 1.4: Propagación de la luz dentro de una fibra óptica por medio de la reflexión total interna.

### 1.1.5. La apertura numérica

Para este análisis se considerará que el rayo luminoso que se propaga a lo largo de la fibra es un rayo meridional, esto es, que pasa por el eje del núcleo de la fibra.

Si el rayo meridional pasa del medio 1, el cual es el aire, al medio 2, siendo este el núcleo de la fibra, a un ángulo  $\theta_a$  respecto del eje de la fibra, este se refracta en la interfaz aire-núcleo de tal forma que se transmitirá con un ángulo crítico  $\phi_c$  a la interfaz núcleo-cubierta. Por lo tanto, para que un rayo se propague dentro del núcleo de la fibra por reflexión total interna es necesario que el ángulo de incidencia esté dentro de lo que se llama cono de aceptación, definido por el medio ángulo cónico  $\theta_a$ , al cual se le conoce como ángulo de aceptación o máximo ángulo de aceptación, ilustrando esto en la figura 1.5:

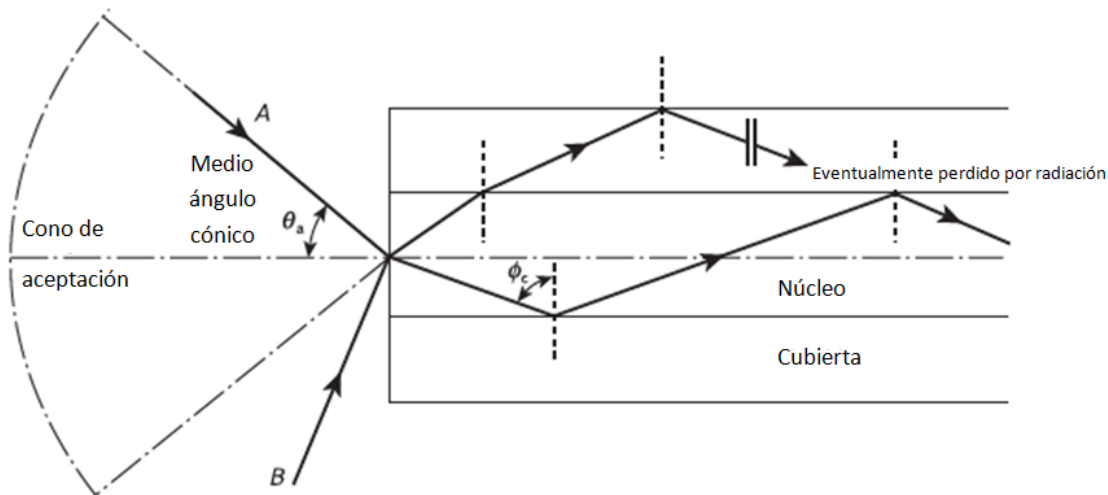
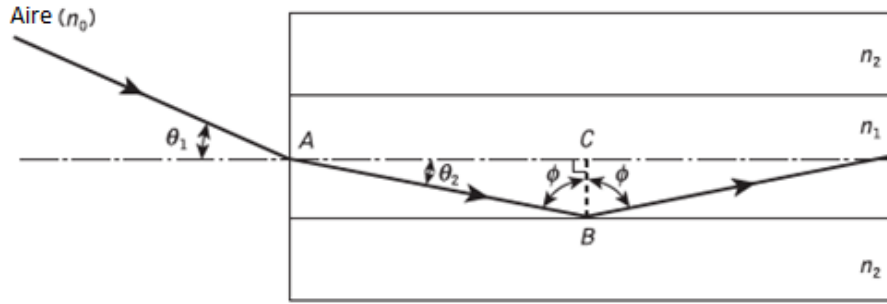


Figura 1.5: Ángulo de aceptación  $\theta_a$  del rayo incidente y que se propaga en el núcleo de la fibra.

Considerando ahora un rayo incidente desde el aire, con índice de refracción  $n_0$ , al núcleo de la fibra, con índice de refracción  $n_1$ , en un ángulo  $\theta_1$  menor al ángulo de aceptación  $\theta_a$ , este se transmitirá en el núcleo de la fibra con un ángulo  $\theta_2$  respecto del eje del núcleo, y con un ángulo  $\phi$  respecto de la normal, siendo este mayor al ángulo crítico, como se muestran en la figura 1.6 [21]:



**Figura 1.6:** Trayectoria propuesta de un rayo meridional incidiendo en el núcleo de la fibra.

Usando la ley de Snell dada por la **ecuación** 1.1.3.1, tenemos:

$$n_0 \sen(\theta_1) = n_1 \sen(\theta_2), \quad (1.1.5.1)$$

viendo que la relación entre los ángulos está dada por:

$$\theta_2 + \phi = \frac{\pi}{2}, \quad (1.1.5.2)$$

despejando  $\theta_2$  se tiene:

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \phi, \quad (1.1.5.3)$$

usando las relaciones trigonométricas,  $\sen(\alpha - \beta) = \sen(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sen(\beta)$ , y  $\sen^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1 \rightarrow \cos^2(\phi) = 1 - \sen^2(\phi)$ , se obtiene [22]:

$$\sen(\theta_2) = \sen\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\phi) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sen(\phi) = \cos(\phi), \quad (1.1.5.4)$$

por lo que, se puede escribir la **ecuación** 1.1.5.1 como:

$$n_0 \sen(\theta_1) = n_1 \cos(\phi), \quad (1.1.5.5)$$

y la **ecuación** 1.1.5.5 a su vez se puede escribir como:

$$n_0 \sen(\theta_1) = n_1 [1 - \sen^2(\phi)]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.1.5.6)$$

considerando que se tiene el caso límite, entonces  $\phi = \phi_c$  y  $\theta_1 = \theta_a$ , por lo que, la **ecuación** 1.1.5.6 toma la forma:

$$n_0 \sen(\theta_a) = n_1 [1 - \sen^2(\phi_c)]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.1.5.7)$$

usando la **ecuación** 1.1.4.2 se obtiene:

$$n_0 \sen(\theta_a) = n_1 \left[1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[n_1^2 - n_1^2 \left(\frac{n_2^2}{n_1^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1.5.8)$$

Esta relación nos permite definir la apertura numérica:

$$NA = n_0 \sen(\theta_a) = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.1.5.9)$$

si se toma que la fibra está en el aire, entonces  $n_0 = 1$ , por lo que la **ecuación** 1.1.5.9 toma la forma:

$$NA = \sen(\theta_a) = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1.5.10)$$

Otra forma de escribir la apertura numérica es utilizando la definición de la diferencia relativa del índice de refracción entre el núcleo y la cubierta de la fibra, la cual es:

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}, \quad (1.1.5.11)$$

que cuando  $\Delta \ll 1$  se puede escribir como:

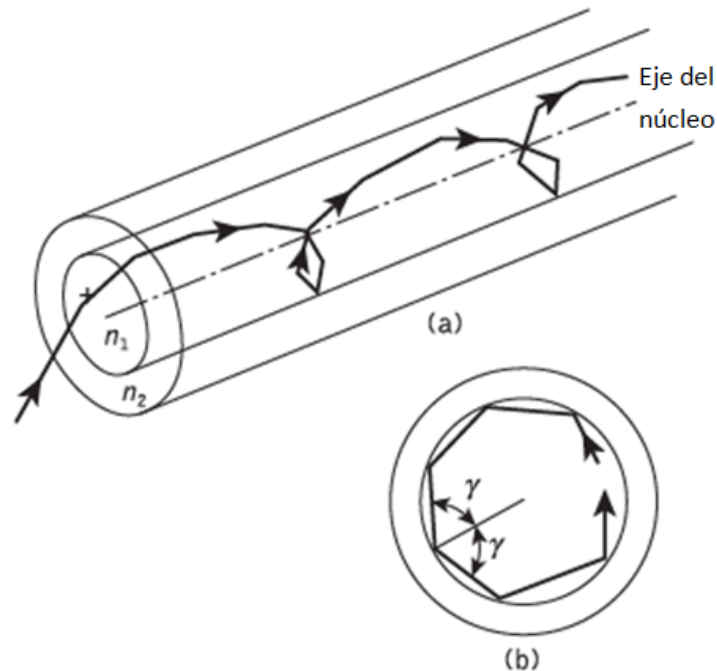
$$\Delta \simeq \frac{n_1 - n_2}{n_1}, \quad (1.1.5.12)$$

entonces, la **ecuación** 1.1.5.9 queda como [21]:

$$NA = (2\Delta n_1^2)^{\frac{1}{2}} = n_1 (2\Delta)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1.5.13)$$

### 1.1.6. Rayos oblicuos

Los rayos oblicuos, o «skew rays» en inglés, son los rayos que se transmiten a lo largo de la fibra sin que estos pasen por su eje. Estos se presentan en mayor cantidad que los rayos meridionales y siguen una trayectoria helicoidal a lo largo de la fibra, ilustrándolos en la **figura** 1.7 [21]:



**Figura 1.7:** Trayectoria helicoidal de un rayo oblicuo en una fibra óptica: (a) a lo largo de la fibra; (b) vista transversal de la fibra.

Se tendrá interés solamente por los rayos meridionales en este trabajo.

## 1.2. Teoría Electromagnética

### 1.2.1. Ondas electromagnéticas y ecuaciones de Maxwell

La luz al ser una onda electromagnética se propaga en forma de dos ondas vectoriales mutuamente acopladas, una correspondiente al campo eléctrico  $\vec{E}$  y otra correspondiente al campo magnético  $\vec{B}$ , este

estudio permitirá obtener un mejor modelo para la propagación de la luz en la fibra óptica.

Para describir la propagación de estas ondas en la fibra óptica, se deben de resolver las ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas, debido a la forma de la fibra [20]. Se considera a la fibra como un medio dieléctrico, isotrópico y lineal, donde no se tienen cargas libres ni corrientes, entonces, las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.2.1.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.2.1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (\text{Sin cargas libres}), \quad (1.2.1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Sin polos libres}), \quad (1.2.1.4)$$

donde  $\vec{E}$  es el vector de intensidad del campo eléctrico,  $\vec{H}$  es el de intensidad del campo magnético,  $\vec{D}$  es el de densidad de flujo eléctrico y  $\vec{B}$  es el de densidad de flujo magnético.

Los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  están relacionados por

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (1.2.1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (1.2.1.6)$$

donde  $\epsilon$  es la permitividad dieléctrica y  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio [21]. El rotacional en coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  está definido como:

$$\nabla \times \vec{V} = \hat{x} \left( \frac{\partial}{\partial y} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_y \right) + \hat{y} \left( \frac{\partial}{\partial z} V_x - \frac{\partial}{\partial x} V_z \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial}{\partial x} V_y - \frac{\partial}{\partial y} V_x \right), \quad (1.2.1.7)$$

y en coordenadas cilíndricas  $(\rho, \varphi, z)$  como:

$$\nabla \times \vec{V} = \hat{\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_\varphi \right) + \hat{\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial z} V_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} V_z \right) + \hat{z} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right]. \quad (1.2.1.8)$$

## 1.2.2. Derivación de la ecuación de onda

Tomando el rotacional de las **ecuaciones** 1.2.1.1 y 1.2.1.2 se tiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}), \quad (1.2.2.1)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \times \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{D}), \quad (1.2.2.2)$$

usando la propiedad de que las derivadas espaciales y temporales conmutan [22]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \times \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (1.2.2.3)$$

Sustituyendo  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$  en las **ecuaciones** 1.2.2.1 y 1.2.2.2 usando las relaciones establecidas en 1.2.1.5 y 1.2.1.6:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times (\mu \vec{H})] = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), \quad (1.2.2.4)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times (\epsilon \vec{E})] = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right), \quad (1.2.2.5)$$

asumiendo que  $\mu$  y  $\epsilon$  son constantes y no funciones del espacio [19], obteniendo las siguientes relaciones:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (1.2.2.6)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (1.2.2.7)$$

Si se considera que  $\vec{E}$  es una función sinusoidal en el tiempo, esta se puede representar por un vector complejo o fasor:

$$\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t - \phi) = \text{Re} [E_0 e^{j(\omega t - \phi)}] = \text{Re} [E_0 e^{-j\phi} e^{j\omega t}] = \text{Re} (\vec{E}_0 e^{j\omega t}), \quad (1.2.2.8)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular del campo y la velocidad angular a la que rota el fasor,  $t$  es el tiempo,  $\phi$  es el ángulo de fase y  $\vec{E}_0$  es el vector complejo al tiempo  $t = 0$  que representa a  $\vec{E}(t)$ , es decir un fasor. Si se emplea la expresión compleja dada por  $\vec{E}_0 e^{j\omega t}$ , tal que  $\vec{E}_c(t) = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$ , se ve que [23]:

$$\frac{d\vec{E}_c(t)}{dt} = \frac{d(\vec{E}_0 e^{j\omega t})}{dt} = \vec{E}_0 \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = \vec{E}_0 e^{j\omega t} (j\omega) = j\omega \vec{E}_c(t). \quad (1.2.2.9)$$

Considerando entonces las expresiones complejas de  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$ , la derivada parcial respecto al tiempo,  $\frac{\partial}{\partial t}$ , puede ser reemplazada por  $j\omega$  [19]. Por lo tanto, las **ecuaciones** 1.2.1.1, 1.2.1.2, 1.2.2.6 y 1.2.2.7 pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} = -j\omega \mu \vec{H}, \quad (1.2.2.10)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} = j\omega \epsilon \vec{E}, \quad (1.2.2.11)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -(j\omega)^2 \mu \epsilon \vec{E} = \omega^2 \mu \epsilon \vec{E}, \quad (1.2.2.12)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = -(j\omega)^2 \mu \epsilon \vec{H} = \omega^2 \mu \epsilon \vec{H}. \quad (1.2.2.13)$$

Utilizando la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{Y}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{Y}) - \nabla^2 (\vec{Y}), \quad (1.2.2.14)$$

y las condiciones de divergencia de las **ecuaciones** 1.2.1.3 y 1.2.1.4, podemos escribir:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 (\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon} \nabla (\nabla \cdot \vec{D}) - \nabla^2 (\vec{E}) = -\nabla^2 (\vec{E}), \quad (1.2.2.15)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 (\vec{H}) = \frac{1}{\mu} \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 (\vec{H}) = -\nabla^2 (\vec{H}), \quad (1.2.2.16)$$

obteniendo así las ecuaciones de ondas no dispersivas:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E}, \quad (1.2.2.17)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{H}, \quad (1.2.2.18)$$

o equivalentemente:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad (1.2.2.19)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0, \quad (1.2.2.20)$$

las cuales existen de forma idéntica para  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$ , siendo  $\nabla^2$  el operador Laplaciano. Aquí,  $k$  es el llamado número de onda, donde  $k = |\vec{k}|$  siendo  $\vec{k}$  el vector de propagación que da la dirección de propagación y la tasa de cambio de fase con la distancia;  $k$  está definida aquí como:

$$k = \omega (\mu\epsilon)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.2.2.21)$$

pero también se puede definir utilizando la longitud de onda óptica  $\lambda$  [21]:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (1.2.2.22)$$

Para las coordenadas cartesianas y cilíndricas, las **ecuaciones** 1.2.2.17 y 1.2.2.18 se cumplen para cada componente del espacio vectorial, esto es, satisfaciendo la ecuación de onda escalar:

$$\nabla^2 \psi = -\omega^2 \mu\epsilon \psi = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (1.2.2.23)$$

donde  $\psi$  representa un componente del campo  $\vec{E}$  o  $\vec{H}$  y  $v_p$  es la velocidad de fase en el medio dieléctrico, esta es la velocidad de propagación de un punto en la onda de fase constante, definida como:

$$v_p = \frac{1}{(\mu\epsilon)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.2.2.24)$$

donde  $\mu_r$  y  $\epsilon_r$  son la permeabilidad y permitividad relativa del medio dieléctrico respectivamente, y  $\mu_0$  y  $\epsilon_0$  son la permeabilidad y permitividad del vacío respectivamente, por lo que, la velocidad de la luz en el vacío puede escribirse como [21]:

$$c = \frac{1}{(\mu_0 \epsilon_0)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.2.2.25)$$

### 1.2.3. Ecuaciones de onda en coordenadas cartesianas

Considerando una onda electromagnética sinusoidal en el tiempo con frecuencia angular  $\omega$  que se propaga en la dirección  $z$  con una constante de fase  $\beta$ , los campos eléctrico y magnético se pueden expresar de la siguiente forma [19]:

$$\vec{E} = \text{Re} \left[ \vec{E}_0(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} \right], \quad (1.2.3.1)$$

$$\vec{H} = \text{Re} \left[ \vec{H}_0(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} \right]. \quad (1.2.3.2)$$

Empleando las componentes cartesianas de la **ecuación** 1.2.2.10 dadas en 1.2.1.7 se obtiene:

$$\left\{ \nabla \times \vec{E} \right\}_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega \mu H_x, \quad (1.2.3.3)$$

utilizando ahora la expresión compleja de la **ecuación** 1.2.3.1, se observa que:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \vec{E}_0(x, y) \frac{\partial [e^{j(\omega t - \beta z)}]}{\partial z} = \vec{E}_0(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} (-j\beta) = -j\beta \vec{E}, \quad (1.2.3.4)$$

por lo que, la derivada parcial respecto a  $z$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$ , puede ser reemplazada por  $-j\beta$ , obteniendo:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega \mu H_x, \quad (1.2.3.5)$$

aplicando el mismo análisis a las demás componentes se obtiene:

$$\left\{ \nabla \times \vec{E} \right\}_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y, \quad (1.2.3.6)$$

$$\left\{ \nabla \times \vec{E} \right\}_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z. \quad (1.2.3.7)$$

Haciendo lo mismo para  $\vec{H}$  se obtiene:

$$\left\{ \nabla \times \vec{H} \right\}_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\epsilon E_x, \quad (1.2.3.8)$$

$$\left\{ \nabla \times \vec{H} \right\}_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y, \quad (1.2.3.9)$$

$$\left\{ \nabla \times \vec{H} \right\}_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z. \quad (1.2.3.10)$$

Si se sustituye la expresión de  $H_y$  obtenida en la **ecuación** 1.2.3.6 en la **ecuación** 1.2.3.8 se obtiene:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\beta}{\omega\mu} \left( j\beta E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = j\omega\epsilon E_x, \quad (1.2.3.11)$$

resolviendo para  $E_x$  se ve que:

$$E_x \left( j\omega\epsilon - \frac{j\beta^2}{\omega\mu} \right) = \frac{j}{\omega\mu} E_x (\omega^2\mu\epsilon - \beta^2) = \frac{j}{\omega\mu} E_x (k^2 - \beta^2) = \frac{j}{\omega\mu} E_x (k_0^2 n^2 - \beta^2), \quad (1.2.3.12)$$

donde  $k_0$  es el número de onda en el vacío y  $n$  es el índice de refracción del medio, dados por:

$$k_0 = \omega (\mu_0\epsilon_0)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.2.3.13)$$

$$n = (\mu_r\epsilon_r)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.2.3.14)$$

y definiendo:

$$\beta_t^2 = k_0^2 n^2 - \beta^2, \quad (1.2.3.15)$$

siendo  $\beta_t$  la constante de fase transversal o número de onda transversal, se tiene que:

$$E_x = \frac{\omega\mu}{j\beta_t^2} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) + \frac{\omega\mu\beta}{j\omega\mu\beta_t^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = -\frac{j}{\beta_t^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right). \quad (1.2.3.16)$$

Para obtener la expresión de  $E_y$  se sustituye la **ecuación** 1.2.3.5 en la **ecuación** 1.2.3.9:

$$\frac{-j\beta}{-j\omega\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y \right) - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y, \quad (1.2.3.17)$$

entonces:

$$E_y = \frac{\omega\mu}{j\beta_t^2} \left( \frac{\beta}{\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = -\frac{j}{\beta_t^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right). \quad (1.2.3.18)$$

Para  $H_x$  se sustituye la **ecuación** 1.2.3.9 en la **ecuación** 1.2.3.5:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{j\beta}{j\omega\epsilon} \left( -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = -j\omega\mu H_x, \quad (1.2.3.19)$$

entonces:

$$H_x = \frac{-\omega\epsilon}{j\beta_t^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\beta}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = -\frac{j}{\beta_t^2} \left( \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} - \omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \right). \quad (1.2.3.20)$$

Y para  $H_y$  se sustituye la **ecuación** 1.2.3.8 en la **ecuación** 1.2.3.6:

$$\frac{j\beta}{j\omega\epsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y \right) + \frac{\partial E_z}{\partial x} = j\omega\mu H_y, \quad (1.2.3.21)$$

entonces:

$$H_y = \frac{\omega\epsilon}{j\beta_t^2} \left( \frac{\beta}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = -\frac{j}{\beta_t^2} \left( \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right). \quad (1.2.3.22)$$

Si ahora se sustituyen las expresiones obtenidas en las **ecuaciones** 1.2.3.20 y 1.2.3.22 en la **ecuación** 1.2.3.10 se ve que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{j\beta}{\beta_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{j\omega\epsilon}{\beta_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{j\beta}{\beta_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{j\omega\epsilon}{\beta_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) = j\omega\epsilon E_z, \quad (1.2.3.23)$$

esto es:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \beta_t^2 E_z = 0. \quad (1.2.3.24)$$

De igual forma, sustituyendo las **ecuaciones** 1.2.3.16 y 1.2.3.18 en la **ecuación** 1.2.3.7:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{j\beta}{\beta_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{j\omega\mu}{\beta_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{j\beta}{\beta_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{j\omega\mu}{\beta_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) = -j\omega\mu H_z, \quad (1.2.3.25)$$

esto es:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \beta_t^2 H_z = 0, \quad (1.2.3.26)$$

siendo las **ecuaciones** 1.2.3.24 y 1.2.3.26 las ecuaciones de onda en coordenadas cartesianas.

## 1.2.4. Ecuaciones de onda en coordenadas cilíndricas

Para el análisis de la propagación de ondas en fibras ópticas las cuales son axialmente simétricas, las ecuaciones de onda se reescriben en términos de las coordenadas cilíndricas, donde se tiene:

$$\vec{E} = \text{Re} \left[ \vec{E}_0(\rho, \varphi) e^{j(\omega t - \beta z)} \right], \quad (1.2.4.1)$$

$$\vec{H} = \text{Re} \left[ \vec{H}_0(\rho, \varphi) e^{j(\omega t - \beta z)} \right]. \quad (1.2.4.2)$$

Recordando las relaciones básicas entre coordenadas:

$$x = \rho \cos(\varphi), \quad (1.2.4.3)$$

$$y = \rho \sin(\varphi), \quad (1.2.4.4)$$

$$\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.2.4.5)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right), \quad (1.2.4.6)$$

$$E_\rho = E_x \cos(\varphi) + E_y \sin(\varphi), \quad (1.2.4.7)$$

$$E_\varphi = -E_x \sin(\varphi) + E_y \cos(\varphi), \quad (1.2.4.8)$$

$$H_\rho = H_x \cos(\varphi) + H_y \sin(\varphi), \quad (1.2.4.9)$$

$$H_\varphi = -H_x \sin(\varphi) + H_y \cos(\varphi), \quad (1.2.4.10)$$

se puede escribir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\partial [\tan^{-1}(\frac{y}{x})]}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \\ &= \frac{x}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (1.2.4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} &= \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial y} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\partial [\tan^{-1}(\frac{y}{x})]}{\partial y} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \\ &= \frac{y}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{x}{\rho^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (1.2.4.12)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}, \quad (1.2.4.13)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{x}{\rho^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}, \quad (1.2.4.14)$$

de tal forma que al sustituir las **ecuaciones** (1.2.4.11 - 1.2.4.14) en las respectivas **ecuaciones** 1.2.3.16, 1.2.3.18, 1.2.3.20 y 1.2.3.22, se obtenga:

$$E_x = -\frac{j}{\beta_t^2} \left[ \beta \left( \frac{x}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) + \omega\mu \left( \frac{y}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{x}{\rho^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \right], \quad (1.2.4.15)$$

$$E_y = -\frac{j}{\beta_t^2} \left[ \beta \left( \frac{y}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{x}{\rho^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) - \omega\mu \left( \frac{x}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \right], \quad (1.2.4.16)$$

$$H_x = -\frac{j}{\beta_t^2} \left[ \beta \left( \frac{x}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) - \omega\epsilon \left( \frac{y}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{x}{\rho^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) \right], \quad (1.2.4.17)$$

$$H_y = -\frac{j}{\beta_t^2} \left[ \beta \left( \frac{y}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{x}{\rho^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) + \omega\epsilon \left( \frac{x}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) \right], \quad (1.2.4.18)$$

si ahora se sustituyen las **ecuaciones** 1.2.4.15 y 1.2.4.16 en las **ecuaciones** 1.2.4.7 y 1.2.4.8 se tiene:

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{j}{\beta_t^2} \left\{ \beta \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \left( \frac{x}{\rho} \cos \varphi + \frac{y}{\rho} \sin \varphi \right) + \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \left( -\frac{y}{\rho^2} \cos \varphi + \frac{x}{\rho^2} \sin \varphi \right) \right] + \dots \right. \\ &\quad \left. + \omega\mu \left[ \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \left( \frac{y}{\rho} \cos \varphi - \frac{x}{\rho} \sin \varphi \right) + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \left( \frac{x}{\rho^2} \cos \varphi + \frac{y}{\rho^2} \sin \varphi \right) \right] \right\} \\ &= -\frac{j}{\beta_t^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \omega\mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (1.2.4.19)$$

$$\begin{aligned} E_\varphi &= -\frac{j}{\beta_t^2} \left\{ \beta \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \left( -\frac{x}{\rho} \sin \varphi + \frac{y}{\rho} \cos \varphi \right) + \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \left( \frac{y}{\rho^2} \sin \varphi + \frac{x}{\rho^2} \cos \varphi \right) \right] + \dots \right. \\ &\quad \left. + \omega\mu \left[ \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \left( -\frac{y}{\rho} \sin \varphi - \frac{x}{\rho} \cos \varphi \right) + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \left( -\frac{x}{\rho^2} \sin \varphi + \frac{y}{\rho^2} \cos \varphi \right) \right] \right\} \\ &= -\frac{j}{\beta_t^2} \left( \beta \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (1.2.4.20)$$

y sustituyendo las **ecuaciones** 1.2.4.17 y 1.2.4.18 en las **ecuaciones** 1.2.4.9 y 1.2.4.10:

$$\begin{aligned}
 H_\rho &= -\frac{j}{\beta_t^2} \left\{ \beta \left[ \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \left( \frac{x}{\rho} \cos \varphi + \frac{y}{\rho} \operatorname{sen} \varphi \right) + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \left( -\frac{y}{\rho^2} \cos \varphi + \frac{x}{\rho^2} \operatorname{sen} \varphi \right) \right] + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \omega \epsilon \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \left( -\frac{y}{\rho} \cos \varphi + \frac{x}{\rho} \operatorname{sen} \varphi \right) + \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \left( -\frac{x}{\rho^2} \cos \varphi - \frac{y}{\rho^2} \operatorname{sen} \varphi \right) \right] \right\} \quad (1.2.4.21) \\
 &= -\frac{j}{\beta_t^2} \left( \beta \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \omega \epsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_\varphi &= -\frac{j}{\beta_t^2} \left\{ \beta \left[ \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \left( -\frac{x}{\rho} \operatorname{sen} \varphi + \frac{y}{\rho} \cos \varphi \right) + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \left( \frac{y}{\rho^2} \operatorname{sen} \varphi + \frac{x}{\rho^2} \cos \varphi \right) \right] + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \omega \epsilon \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \left( \frac{y}{\rho} \operatorname{sen} \varphi + \frac{x}{\rho} \cos \varphi \right) + \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \left( \frac{x}{\rho^2} \operatorname{sen} \varphi - \frac{y}{\rho^2} \cos \varphi \right) \right] \right\} \quad (1.2.4.22) \\
 &= -\frac{j}{\beta_t^2} \left( \beta \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right).
 \end{aligned}$$

Aplicando ahora las segundas derivadas parciales correspondientes a las **ecuaciones** (1.2.4.11 - 1.2.4.14) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \dots \\
 &\quad + \frac{x}{\rho} \left( \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho \partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \dots \quad (1.2.4.23) \\
 -\frac{y}{\rho^2} \left( \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho \partial \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) &= \left( \frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{x}{\rho} \left( \frac{x}{\rho} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho \partial \varphi} \right) + \dots \\
 &\quad + \frac{2xy}{\rho^4} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{y}{\rho^2} \left( \frac{x}{\rho} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{x}{\rho^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \dots \\
 &\quad + \frac{y}{\rho} \left( \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho \partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \dots \quad (1.2.4.24) \\
 + \frac{x}{\rho^2} \left( \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho \partial \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= \left( \frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{y}{\rho} \left( \frac{y}{\rho} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{x}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho \partial \varphi} \right) - \dots \\
 &\quad - \frac{2xy}{\rho^4} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \frac{x}{\rho^2} \left( \frac{y}{\rho} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{x}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} &= \left( \frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{x}{\rho} \left( \frac{x}{\rho} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho \partial \varphi} \right) + \dots \\
 &\quad + \frac{2xy}{\rho^4} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{y}{\rho^2} \left( \frac{x}{\rho} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} \right), \quad (1.2.4.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} &= \left( \frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{y}{\rho} \left( \frac{y}{\rho} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{x}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho \partial \varphi} \right) - \dots \\
 &\quad - \frac{2xy}{\rho^4} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \frac{x}{\rho^2} \left( \frac{y}{\rho} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{x}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} \right). \quad (1.2.4.26)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en las **ecuaciones** 1.2.4.23 y 1.2.4.24 en la **ecuación** 1.2.3.24 se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\rho} - \frac{x^2 + y^2}{\rho^3}\right) \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \left(\frac{x^2 + y^2}{\rho^2}\right) \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \left(-\frac{2xy}{\rho^3} + \frac{2xy}{\rho^3}\right) \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho \partial \varphi} + \dots \\ + \left(\frac{2xy}{\rho^4} - \frac{2xy}{\rho^4}\right) \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \left(\frac{x^2 + y^2}{\rho^4}\right) \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \beta_t^2 E_z = 0, \end{aligned} \quad (1.2.4.27)$$

esto es:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \beta_t^2 E_z = 0, \quad (1.2.4.28)$$

y sustituyendo las expresiones obtenidas en las **ecuaciones** 1.2.4.25 y 1.2.4.26 en la **ecuación** 1.2.3.26 se obtiene:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \beta_t^2 H_z = 0, \quad (1.2.4.29)$$

siendo las **ecuaciones** 1.2.4.28 y 1.2.4.29 las ecuaciones de onda en coordenadas cilíndricas.

### 1.2.5. Solución de las ecuaciones de onda en coordenadas cilíndricas

Para obtener las componentes axiales  $E_z$  y  $H_z$  y así obtener las componentes transversales restantes, se deben de resolver las **ecuaciones** diferenciales 1.2.4.28 y 1.2.4.29. Estas soluciones generales son bien conocidas, considerando la expresión del campo eléctrico axial (o del campo magnético):

$$E_z \quad (\text{o } H_z) = R_z(\rho)\Theta_z(\varphi), \quad (1.2.5.1)$$

y sustituyéndola en la **ecuación** 1.2.4.28 se ve que:

$$\Theta_z(\varphi) \frac{\partial^2 R_z(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{\Theta_z(\varphi)}{\rho} \frac{\partial R_z(\rho)}{\partial \rho} + \frac{R_z(\rho)}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Theta_z(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \beta_t^2 R_z(\rho)\Theta_z(\varphi) = 0, \quad (1.2.5.2)$$

dividiendo esto por  $\frac{R_z(\rho)\Theta_z(\varphi)}{\rho^2}$  se obtiene:

$$\frac{\rho^2}{R_z(\rho)} \frac{\partial^2 R_z(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{R_z(\rho)} \frac{\partial R_z(\rho)}{\partial \rho} + \rho^2 \beta_t^2 + \frac{1}{\Theta_z(\varphi)} \frac{\partial^2 \Theta_z(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (1.2.5.3)$$

puesto que la suma se puede separar en 2 expresiones dependientes de variables distintas y está igualada a una constante, cada una de estas expresiones deben de ser iguales a una constante, esto es:

$$\frac{1}{\Theta_z(\varphi)} \frac{\partial^2 \Theta_z(\varphi)}{\partial \varphi^2} = \eta^2, \quad (1.2.5.4)$$

$$\frac{\rho^2}{R_z(\rho)} \frac{\partial^2 R_z(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{R_z(\rho)} \frac{\partial R_z(\rho)}{\partial \rho} + \rho^2 \beta_t^2 = \alpha^2, \quad (1.2.5.5)$$

donde:

$$\eta^2 = -\alpha^2, \quad (1.2.5.6)$$

donde  $\eta$  y  $\alpha$  son constantes reales, o equivalentemente:

$$\frac{\partial^2 \Theta_z}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 \Theta_z = 0, \quad (1.2.5.7)$$

$$\frac{\partial^2 R_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R_z}{\partial \rho} + \left(\beta_t^2 - \frac{\alpha^2}{\rho^2}\right) R_z = 0, \quad (1.2.5.8)$$

siendo la **ecuación** 1.2.5.8 la ecuación diferencial de Bessel. Las soluciones de estas dos ecuaciones son las siguientes:

$$\Theta_z(\varphi) = \begin{cases} \cos(\alpha\varphi + \theta) \\ \text{sen}(\alpha\varphi + \theta) \end{cases} \quad (\theta = \text{const.}), \quad \begin{matrix} (1.2.5.9a) \\ (1.2.5.9b) \end{matrix}$$

$$R_z(\rho) = \begin{cases} AJ_\alpha(\beta_t\rho) + A'N_\alpha(\beta_t\rho) & (\text{cuando } \beta_t \text{ es real}), \\ C'I_\alpha(|\beta_t|\rho) + CK_\alpha(|\beta_t|\rho) & (\text{cuando } \beta_t \text{ es imaginario}), \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.2.5.10a) \\ (1.2.5.10b) \end{matrix}$$

donde  $\alpha$  es el número del modo azimutal,  $A$ ,  $A'$ ,  $C$  y  $C'$  son constantes arbitrarias,  $J_\alpha$ ,  $N_\alpha$ ,  $I_\alpha$  e  $K_\alpha$  denotan las funciones de Bessel de orden  $\alpha$  de primer y segundo tipo y las funciones de Bessel modificadas de orden  $\alpha$  de primer y segundo tipo, respectivamente [19].

Las funciones de Bessel están definidas de la siguiente manera:

$$J_\alpha(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(s + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2s}, \quad (1.2.5.11)$$

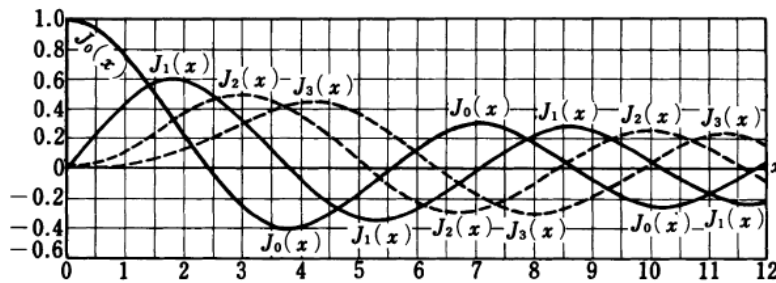
$$N_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\text{sen}(\alpha\pi)}, \quad (1.2.5.12)$$

$$I_\alpha(x) = j^{-\alpha} J_\alpha(jx) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!\Gamma(s + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2s}, \quad (1.2.5.13)$$

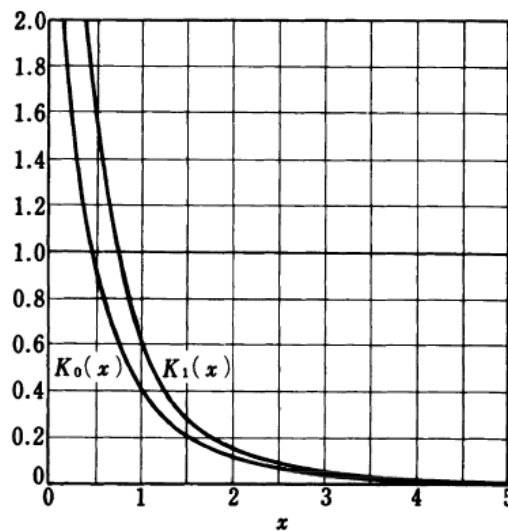
$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} j^{\alpha+1} [J_\alpha(jx) + jN_\alpha(jx)] = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\text{sen}(\alpha\pi)}, \quad (1.2.5.14)$$

donde  $\Gamma(z)$  es la función Gamma [24, 22].

Las funciones de Bessel de primer tipo  $J_q$  (donde  $q$  es entero) son oscilatorias con respecto a  $\rho$  y presentan un amortiguamiento gradual, ilustrado en la **figura** 1.8a, mientras que las funciones de Bessel modificadas de segundo tipo  $K_q$  decaen exponencialmente con  $\rho$ , ilustrado en la **figura** 1.8b:



(a)



(b)

**Figura 1.8:** Gráficas de las funciones de Bessel: (a) de primer tipo; (b) modificadas de segundo tipo.

Las funciones  $N_q$  e  $I_q$  no son discutidas ya que no son relevantes en la teoría de fibras ópticas.

## 1.3. Propagación de ondas en fibras de núcleo uniforme con índice escalonado

### 1.3.1. Modos propagados en la fibra óptica

Un modo es una distribución espacial de fotones en una cavidad o guía de ondas la cual es solución a las ecuaciones de Maxwell/Helmholtz.

Los modos de una fibra óptica son las distribuciones de luz que pueden ser transmitidas a través de la fibra, ilustrados en la **figura 1.9**; una fibra monomodo solo puede transmitir luz paralela al eje mientras que una fibra multimodo puede transmitir luz con diferentes longitudes de onda (diferentes longitudes de onda, aperturas numéricas y modos tienen diferentes trayectorias de transmisión) [25]:

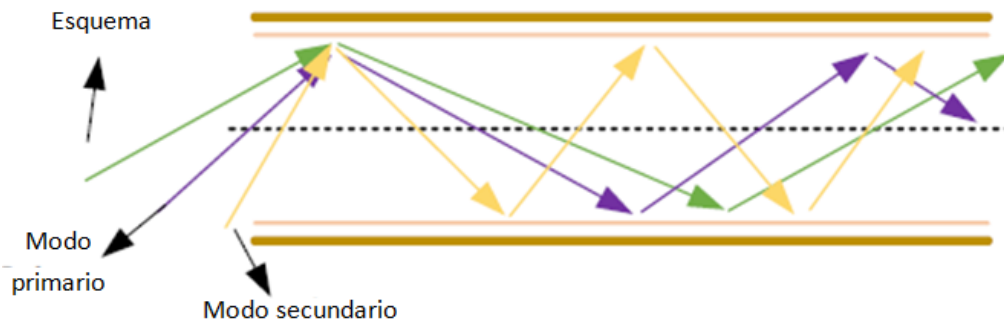


Figura 1.9: Modos de propagación de la luz en fibra óptica.

Las ondas propagadas en la fibra óptica se pueden clasificar en los siguientes modos:

- TE (ondas transversales eléctricas) en las cuales  $E_z = 0$  pero  $H_z \neq 0$ ,
- TM (ondas transversales magnéticas) en las cuales  $H_z = 0$  pero  $E_z \neq 0$ ,
- EH y HE los cuales son los llamados "modos híbridos" que presentan ambos campos axiales eléctrico y magnético, esto es  $E_z \neq 0$  y  $H_z \neq 0$ .

### 1.3.2. Campos electromagnéticos en el núcleo y cubierta

Considerando una fibra de núcleo uniforme con índice de refracción escalonado, los índices de refracción en el núcleo y en la cubierta y el radio del núcleo se denotan por  $n_1$ ,  $n_2$  y  $a$ , respectivamente, como se muestra a continuación en la figura 1.10:

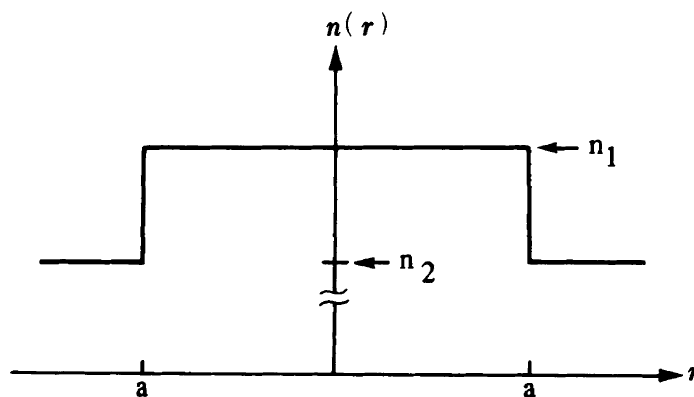


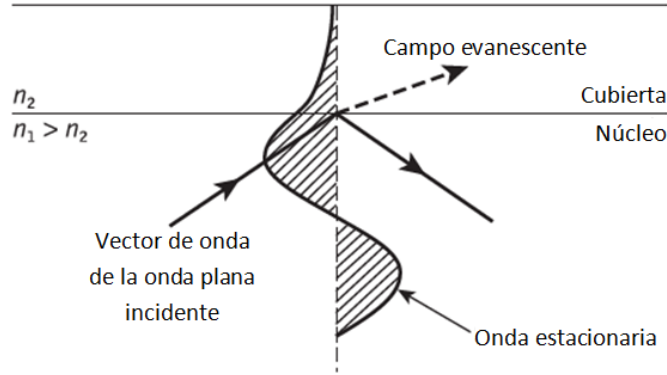
Figura 1.10: Perfil del índice de refracción escalonado de una fibra de núcleo uniforme.

Las soluciones de campo se obtienen primero de forma independiente para las regiones del núcleo y la cubierta y se conectan posteriormente en la frontera núcleo-cubierta para satisfacer las condiciones de frontera (condiciones para la continuidad de los campos). Dos parámetros deben de ser dados para cada modo propagado a través de las dos regiones: el número del modo azimutal  $q$  (entero, pues las soluciones deben de ser de valor único) y la constante de fase axial  $\beta$ .

Para determinar las soluciones tanto en el núcleo como en la cubierta se deben de tomar en cuenta las condiciones de frontera correspondientes a cada caso.

En la región de la cubierta la amplitud del campo se comporta esencialmente como una función que

decae exponencialmente conforme se aleja del eje de la fibra; a este tipo de campo cuya amplitud decae exponencialmente se le conoce como campo evanescente, ilustrado en la **figura 1.11** [21]:



**Figura 1.11:** Campo evanescente que decae exponencialmente en la cubierta de la fibra.

Por lo tanto, la función del campo radial,  $R_z(\rho)$ , debe ser de la forma de la **ecuación 1.2.5.10b**, donde se debe de tener que  $C' = 0$  pues la función  $I_q$  diverge para  $\rho \rightarrow \infty$ .

En la región del núcleo soluciones proporcionales a las funciones  $N_q$  o  $K_q$  no pueden estar presentes debido a que estas funciones divergen en el eje ( $\rho = 0$ ). Evaluando la posibilidad de que la solución sea proporcional a  $I_q$ , se observa que si este fuera el caso el campo no tendría continuidad en la frontera núcleo-cubierta puesto que las funciones  $I_q$  (núcleo) y  $K_q$  (cubierta) no pueden conectarse suavemente, esto ya que  $\frac{I'_q}{I_q}$  es positivo en todas partes y  $\frac{K'_q}{K_q}$  es negativo en todas partes (donde la prima denota una diferenciación). Entonces,  $R_z(\rho)$  debe ser proporcional a  $J_q$  en el núcleo y a  $K_q$  en la cubierta. De esto y de las **ecuaciones 1.2.5.10a** y **1.2.5.10b** se ve que  $\beta_t$  es real en el núcleo e imaginario en la cubierta, y se sigue de la **ecuación 1.2.3.15** que:

$$\beta_{t1} = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \beta < k_0 n_1 \quad (\text{núcleo}), \quad (1.3.2.1)$$

$$\beta_{t2} = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \beta > k_0 n_2 \quad (\text{cubierta}), \quad (1.3.2.2)$$

esto es:

$$k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1, \quad (1.3.2.3)$$

donde los subíndices 1 y 2 denotan las regiones del núcleo y de la cubierta, respectivamente.

Analizando primeramente las soluciones del tipo TM y TE se tiene:

$$E_z = \begin{cases} A J_q(\beta_{t1} \rho) \text{ sen}(q\varphi) & (\text{para } r \leq a), \\ C K_q(|\beta_{t2}| \rho) \text{ sen}(q\varphi) & (\text{para } r \geq a), \end{cases} \quad (1.3.2.4a)$$

$$(1.3.2.4b)$$

$$H_z = 0 \quad (\text{en todas las regiones}), \quad (1.3.2.5)$$

y:

$$H_z = \begin{cases} B J_q(\beta_{t1} \rho) \text{ cos}(q\varphi) & (\text{para } r \leq a), \\ D K_q(|\beta_{t2}| \rho) \text{ cos}(q\varphi) & (\text{para } r \geq a), \end{cases} \quad (1.3.2.6a)$$

$$(1.3.2.6b)$$

$$E_z = 0 \quad (\text{en todas las regiones}), \quad (1.3.2.7)$$

notando que la constante de rotación  $\theta$  en las **ecuaciones 1.2.5.9a** y **1.2.5.9b** se ha omitido por simplicidad y que la función de campo azimutal se supone que es  $\text{sen}(q\varphi)$  en el caso TM y  $\text{cos}(q\varphi)$  en el caso TE, esto para facilitar la conexión de los campos en la frontera núcleo-cubierta en los casos de "modos híbridos", los

cuales se discuten a continuación.

En fibras ópticas los modos TM y TE existen solo cuando  $q = 0$ , cuando  $q \neq 0$  las condiciones de frontera en la interfaz núcleo-cubierta solo pueden ser satisfechas cuando se escoge una combinación lineal de los modos TM y TE en el núcleo y otra combinación lineal de los modos TM y TE en la cubierta, estos modos compuestos son llamados "modos híbridos". Las expresiones generales de las componentes de los campos que incorporan todos los modos TM, TE e híbridos son obtenidas al sustituir las **ecuaciones** (1.3.2.4a - 1.3.2.7) en las respectivas **ecuaciones** (1.2.4.19 - 1.2.4.22).

En la región del núcleo, se puede definir:

$$u = \beta_{t1} a = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} a, \quad (1.3.2.8)$$

llamada constante de fase transversal normalizada (o constante de propagación radial) en el núcleo, obteniendo:

$$E_z = A J_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) \text{sen}(q\varphi), \quad (1.3.2.9)$$

$$H_z = B J_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) \text{cos}(q\varphi), \quad (1.3.2.10)$$

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{j}{\left(\frac{u}{a}\right)^2} \left\{ \beta \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ A J_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) \text{sen}(q\varphi) \right] + \omega \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ B J_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) \text{cos}(q\varphi) \right] \right\} \\ &= \left[ -A \frac{j\beta}{\frac{u}{a}} J'_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) + B \frac{j\omega \mu_0}{\left(\frac{u}{a}\right)^2} \frac{q}{\rho} J_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) \right] \text{sen}(q\varphi), \end{aligned} \quad (1.3.2.11)$$

$$\begin{aligned} E_\varphi &= -\frac{j}{\left(\frac{u}{a}\right)^2} \left\{ \beta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ A J_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) \text{sen}(q\varphi) \right] - \omega \mu \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ B J_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) \text{cos}(q\varphi) \right] \right\} \\ &= \left[ -A \frac{j\beta}{\left(\frac{u}{a}\right)^2} \frac{q}{\rho} J_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) + B \frac{j\omega \mu_0}{\frac{u}{a}} J'_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) \right] \text{cos}(q\varphi), \end{aligned} \quad (1.3.2.12)$$

$$\begin{aligned} H_\rho &= -\frac{j}{\left(\frac{u}{a}\right)^2} \left\{ \beta \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ B J_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) \text{cos}(q\varphi) \right] - \omega \epsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ A J_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) \text{sen}(q\varphi) \right] \right\} \\ &= \left[ A \frac{j\omega \epsilon_1}{\left(\frac{u}{a}\right)^2} \frac{q}{\rho} J_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) - B \frac{j\beta}{\frac{u}{a}} J'_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) \right] \text{cos}(q\varphi), \end{aligned} \quad (1.3.2.13)$$

$$\begin{aligned} H_\varphi &= -\frac{j}{\left(\frac{u}{a}\right)^2} \left\{ \beta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ B J_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) \text{cos}(q\varphi) \right] + \omega \epsilon \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ A J_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) \text{sen}(q\varphi) \right] \right\} \\ &= \left[ -A \frac{j\omega \epsilon_1}{\frac{u}{a}} J'_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) + B \frac{j\beta}{\left(\frac{u}{a}\right)^2} \frac{q}{\rho} J_q \left( \frac{u\rho}{a} \right) \right] \text{sen}(q\varphi), \end{aligned} \quad (1.3.2.14)$$

aquí  $\mu = \mu_0$  tanto en el núcleo como en la cubierta debido a las propiedades de la fibra óptica y  $\epsilon = \epsilon_1$  en el núcleo y  $\epsilon = \epsilon_2$  en la cubierta [25].

En la región de la cubierta, se puede definir:

$$w = |\beta_{t2}| a = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{\frac{1}{2}} a, \quad (1.3.2.15)$$

llamada constante de atenuación transversal normalizada (o parámetro de decaimiento de la cubierta), obteniendo:

$$E_z = C K_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) \text{sen}(q\varphi), \quad (1.3.2.16)$$

$$H_z = D K_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) \text{cos}(q\varphi), \quad (1.3.2.17)$$

$$\begin{aligned}
 E_\rho &= -\frac{j}{\left(\frac{jw}{a}\right)^2} \left\{ \beta \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ CK_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) \text{sen}(q\varphi) \right] + \omega\mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ DK_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) \text{cos}(q\varphi) \right] \right\} \\
 &= \left[ C \frac{j\beta}{\frac{w}{a}} K'_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) - D \frac{j\omega\mu_0}{\left(\frac{w}{a}\right)^2} \frac{q}{\rho} K_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) \right] \text{sen}(q\varphi),
 \end{aligned} \tag{1.3.2.18}$$

$$\begin{aligned}
 E_\varphi &= -\frac{j}{\left(\frac{jw}{a}\right)^2} \left\{ \beta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ CK_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) \text{sen}(q\varphi) \right] - \omega\mu \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ DK_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) \text{cos}(q\varphi) \right] \right\} \\
 &= \left[ C \frac{j\beta}{\left(\frac{w}{a}\right)^2} \frac{q}{\rho} K_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) - D \frac{j\omega\mu_0}{\frac{w}{a}} K'_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) \right] \text{cos}(q\varphi),
 \end{aligned} \tag{1.3.2.19}$$

$$\begin{aligned}
 H_\rho &= -\frac{j}{\left(\frac{jw}{a}\right)^2} \left\{ \beta \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ DK_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) \text{cos}(q\varphi) \right] - \omega\epsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ CK_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) \text{sen}(q\varphi) \right] \right\} \\
 &= \left[ -C \frac{j\omega\epsilon_2}{\left(\frac{w}{a}\right)^2} \frac{q}{\rho} K_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) + D \frac{j\beta}{\frac{w}{a}} K'_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) \right] \text{cos}(q\varphi),
 \end{aligned} \tag{1.3.2.20}$$

$$\begin{aligned}
 H_\varphi &= -\frac{j}{\left(\frac{jw}{a}\right)^2} \left\{ \beta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ DK_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) \text{cos}(q\varphi) \right] + \omega\epsilon \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ CK_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) \text{sen}(q\varphi) \right] \right\} \\
 &= \left[ C \frac{j\omega\epsilon_2}{\frac{w}{a}} K'_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) - D \frac{j\beta}{\left(\frac{w}{a}\right)^2} \frac{q}{\rho} K_q \left( \frac{w\rho}{a} \right) \right] \text{sen}(q\varphi),
 \end{aligned} \tag{1.3.2.21}$$

recordando que aquí  $\beta_{t2}$  es imaginario.

### 1.3.3. Clasificación de modos

Los modos se clasifican primero según el número del modo azimutal  $q$ , luego por las designaciones de los modos TE, TM e híbridos (EH y HE), y finalmente por el número del modo radial.

Como se mencionó anteriormente, la clasificación por  $q$  y los modos TE, TM e híbridos se describe de la siguiente manera:

#### 1. Casos cuando $q = 0$ :

- a) Asumiendo que  $B = D = 0$ , entonces  $E_\varphi = H_\rho = H_z = 0$ , por lo que solo  $E_z$ ,  $E_\rho$  y  $H_\varphi$  están presentes, estos son los modos TM (cuando el número del modo radial es  $m$ , el modo es llamado  $\text{TM}_{0m}$ ).
- b) Asumiendo que  $A = C = 0$ , entonces  $H_\varphi = E_\rho = E_z = 0$ , por lo que solo  $H_z$ ,  $H_\rho$  y  $E_\varphi$  están presentes, estos son los modos TE (cuando el número del modo radial es  $m$ , el modo es llamado  $\text{TE}_{0m}$ ).

#### 2. Casos cuando $q \geq 1$ :

Las condiciones de frontera solo puedes ser satisfechas por los modos híbridos, los cuales se clasifican en los modos EH y HE.

### 1.3.4. Constantes de propagación de los modos: Soluciones exactas

Las constantes de propagación  $(u, w, \beta)$  son determinadas por las condiciones de frontera en  $\rho = a$  (en la frontera núcleo-cubierta), siendo estas las siguientes:

$$E_z^{\text{núcleo}} = E_z^{\text{cubierta}}, \tag{1.3.4.1}$$

$$E_\varphi^{\text{núcleo}} = E_\varphi^{\text{cubierta}}, \tag{1.3.4.2}$$

$$H_z^{\text{núcleo}} = H_z^{\text{cubierta}}, \quad (1.3.4.3)$$

$$H_\varphi^{\text{núcleo}} = H_\varphi^{\text{cubierta}}, \quad (1.3.4.4)$$

$$\epsilon_1 E_\rho^{\text{núcleo}} = \epsilon_2 E_\rho^{\text{cubierta}}, \quad (1.3.4.5)$$

$$\mu_1 H_\rho^{\text{núcleo}} = \mu_2 H_\rho^{\text{cubierta}}, \quad (1.3.4.6)$$

donde  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ .

Escribiendo  $\rho = a$  en las **ecuaciones** (1.3.2.9 - 1.3.2.14) y en las **ecuaciones** (1.3.2.16 - 1.3.2.21) y sustituyendo esto en las **ecuaciones** (1.3.4.1 - 1.3.4.6) se obtiene que los coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  deben de satisfacer lo siguiente:

$$E_z^{\text{núcleo}} - E_z^{\text{cubierta}} = AJ_q(u) - CK_q(w) = 0, \quad (1.3.4.7)$$

$$H_z^{\text{núcleo}} - H_z^{\text{cubierta}} = BJ_q(u) - DK_q(w) = 0, \quad (1.3.4.8)$$

$$\begin{aligned} E_\varphi^{\text{cubierta}} - E_\varphi^{\text{núcleo}} &= A \frac{j\beta}{\left(\frac{u}{a}\right)^2} \frac{qJ_q(u)}{a} - B \frac{j\omega\mu_0}{\frac{u}{a}} J'_q(u) \\ &+ C \frac{j\beta}{\left(\frac{w}{a}\right)^2} \frac{qK_q(w)}{a} - D \frac{j\omega\mu_0}{\frac{w}{a}} K'_q(w) = 0, \end{aligned} \quad (1.3.4.9)$$

$$\begin{aligned} H_\varphi^{\text{cubierta}} - H_\varphi^{\text{núcleo}} &= A \frac{j\omega\epsilon_1}{\frac{u}{a}} J'_q(u) - B \frac{j\beta}{\left(\frac{u}{a}\right)^2} \frac{qJ_q(u)}{a} \\ &+ C \frac{j\omega\epsilon_2}{\frac{w}{a}} K'_q(w) - D \frac{j\beta}{\left(\frac{w}{a}\right)^2} \frac{qK_q(w)}{a} = 0, \end{aligned} \quad (1.3.4.10)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_2 E_\rho^{\text{cubierta}} - \epsilon_1 E_\rho^{\text{núcleo}} &= A \frac{j\beta\epsilon_1}{\frac{u}{a}} J'_q(u) - B \frac{j\omega\mu_0\epsilon_1}{\left(\frac{u}{a}\right)^2} \frac{qJ_q(u)}{a} \\ &+ C \frac{j\beta\epsilon_2}{\frac{w}{a}} K'_q(w) - D \frac{j\omega\mu_0\epsilon_2}{\left(\frac{w}{a}\right)^2} \frac{qK_q(w)}{a} = 0, \end{aligned} \quad (1.3.4.11)$$

$$\begin{aligned} H_\rho^{\text{núcleo}} - H_\rho^{\text{cubierta}} &= A \frac{j\omega\epsilon_1}{\left(\frac{u}{a}\right)^2} \frac{qJ_q(u)}{a} - B \frac{j\beta}{\frac{u}{a}} J'_q(u) \\ &+ C \frac{j\omega\epsilon_2}{\left(\frac{w}{a}\right)^2} \frac{qK_q(w)}{a} - D \frac{j\beta}{\frac{w}{a}} K'_q(w) = 0, \end{aligned} \quad (1.3.4.12)$$

de lo cual, tomando las **ecuaciones** (1.3.4.7 - 1.3.4.10) por conveniencia y unificándolas en la siguiente forma matricial:

$$[M] \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = 0, \quad (1.3.4.13)$$

donde:

$$[M] = \begin{bmatrix} J_q(u) & 0 & -K_q(w) & 0 \\ 0 & J_q(u) & 0 & -K_q(w) \\ \frac{j\beta}{\left(\frac{u}{a}\right)^2} \frac{qJ_q(u)}{a} & -\frac{j\omega\mu_0}{\frac{u}{a}} J'_q(u) & \frac{j\beta}{\left(\frac{w}{a}\right)^2} \frac{qK_q(w)}{a} & -\frac{j\omega\mu_0}{\frac{w}{a}} K'_q(w) \\ \frac{j\omega\epsilon_1}{\frac{u}{a}} J'_q(u) & -\frac{j\beta}{\left(\frac{u}{a}\right)^2} \frac{qJ_q(u)}{a} & \frac{j\omega\epsilon_2}{\frac{w}{a}} K'_q(w) & -\frac{j\beta}{\left(\frac{w}{a}\right)^2} \frac{qK_q(w)}{a} \end{bmatrix}, \quad (1.3.4.14)$$

se puede obtener la solución no trivial para el vector columna  $[A, B, C, D]$ , la cual existe cuando:

$$\det [M] = 0, \quad (1.3.4.15)$$

cuya solución lleva a la ecuación característica:

$$\left[ \frac{J'_q(u)}{uJ_q(u)} + \frac{K'_q(w)}{wK_q(w)} \right] \left[ \frac{\epsilon_1 J'_q(u)}{\epsilon_2 uJ_q(u)} + \frac{K'_q(w)}{wK_q(w)} \right] = q^2 \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right), \quad (1.3.4.16)$$

esta es una ecuación trascendental la cual generalmente se resuelve usando técnicas numéricas, su solución para cualquier modo particular proporcionará todas las características de ese modo.

Resolviendo la **ecuación** 1.3.4.16 simultáneamente con la siguiente relación entre  $u$  y  $w$ :

$$\begin{aligned} V^2 = u^2 + w^2 &= (k_0^2 n_1^2 - \beta^2) a^2 + (\beta^2 - k_0^2 n_2^2) a^2 \\ &= k_0^2 a^2 (n_1^2 - n_2^2) = k_0^2 n_1^2 a^2 2\Delta, \end{aligned} \quad (1.3.4.17)$$

donde  $V$  es la frecuencia normalizada y  $\Delta$  es la diferencia relativa del índice de refracción, dada por:

$$\Delta \equiv \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \simeq \frac{n_1 - n_2}{n_1}, \quad (1.3.4.18)$$

se puede determinar  $u$  y  $w$ , y por lo tanto  $\beta$ , para cada modo. Las soluciones para cada grupo de modos se muestra a continuación:

1. Modos TM:

Puesto que para estos modos  $B = D = 0 = q$ , las **ecuaciones** 1.3.4.16, 1.3.4.7 y 1.3.4.10 llevan a:

$$\frac{\epsilon_1 J'_0(u)}{\epsilon_2 uJ_0(u)} + \frac{K'_0(w)}{wK_0(w)} = 0. \quad (1.3.4.19)$$

2. Modos TE:

Puesto que para estos modos  $A = C = 0 = q$ , las **ecuaciones** 1.3.4.16, 1.3.4.8 y 1.3.4.9 llevan a:

$$\frac{J'_0(u)}{uJ_0(u)} + \frac{K'_0(w)}{wK_0(w)} = 0. \quad (1.3.4.20)$$

3. Modos híbridos:

Cuando  $q \geq 1$  dos conjuntos de soluciones de las **ecuaciones** 1.3.4.16 y 1.3.4.17 son obtenidos, correspondientes a los modos EH y HE. Estas soluciones se obtendrán a continuación utilizando la aproximación de guiado débil.

### 1.3.5. Constantes de propagación de los modos: Soluciones con la aproximación de guiado débil

La aproximación de guiado débil asume que  $\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1} \ll 1$ , o de forma equivalente que  $\Delta \ll 1$ , entonces la **ecuación** 1.3.4.16 puede aproximarse a:

$$\frac{J'_q(u)}{uJ_q(u)} + \frac{K'_q(w)}{wK_q(w)} = \pm n \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right), \quad (1.3.5.1)$$

ya que  $\epsilon_1 \simeq \epsilon_2$ .

Se obtiene que:

1. Modos TM y TE:

Las constantes de propagación de los modos TM obtenidas con la **ecuación** 1.3.4.19 se aproximan a las obtenidas para los modos TE con la **ecuación** 1.3.4.20. Empleando las siguientes relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel:

$$J'_0(u) = -J_1(u), \quad (1.3.5.2)$$

$$K'_0(w) = -K_1(w), \quad (1.3.5.3)$$

se puede reescribir la **ecuación** 1.3.4.20 (la cual ahora se considera contiene ambos modos TM y TE) obteniendo:

$$-\frac{J_1(u)}{uJ_0(u)} = \frac{K_1(w)}{wK_0(w)}. \quad (1.3.5.4)$$

## 2. Modos híbridos:

Para obtener las constantes de propagación de los modos híbridos, se utilizan las siguientes fórmulas y relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel:

$$J_{q+1}(u) + J_{q-1}(u) = \frac{2q}{u} J_q(u), \quad (1.3.5.5)$$

$$K_{q+1}(w) - K_{q-1}(w) = \frac{2q}{w} K_q(w), \quad (1.3.5.6)$$

$$2J'_q(u) = J_{q-1}(u) - J_{q+1}(u), \quad (1.3.5.7)$$

$$-2K'_q(w) = K_{q-1}(w) + K_{q+1}(w), \quad (1.3.5.8)$$

observando que la **ecuación** 1.3.5.1 da dos conjuntos de soluciones para los signos positivo y negativo. Usando las **ecuaciones** (1.3.5.5 - 1.3.5.8) se pueden derivar las siguientes relaciones:

$$\frac{J'_q(u)}{uJ_q(u)} = \frac{J_{q-1}(u)}{uJ_q(u)} - \frac{q}{u^2} = -\frac{J_{q+1}(u)}{uJ_q(u)} + \frac{q}{u^2}, \quad (1.3.5.9)$$

$$\frac{K'_q(w)}{wK_q(w)} = -\frac{K_{q-1}(w)}{wK_q(w)} - \frac{q}{w^2} = -\frac{K_{q+1}(w)}{wK_q(w)} + \frac{q}{w^2}, \quad (1.3.5.10)$$

y sustituyendo las **ecuaciones** 1.3.5.9 y 1.3.5.10 en la **ecuación** 1.3.5.1, se obtiene que cuando el signo es positivo:

$$-\frac{J_{q+1}(u)}{uJ_q(u)} = \frac{K_{q+1}(w)}{wK_q(w)}, \quad (1.3.5.11)$$

los modos cuyas constantes de propagación son dadas como la solución de las **ecuaciones** 1.3.5.11 y 1.3.4.17 son llamados modos EH. Cuando el signo es negativo se obtiene:

$$\frac{J_{q-1}(u)}{uJ_q(u)} = \frac{K_{q-1}(w)}{wK_q(w)}, \quad (1.3.5.12)$$

los modos cuyas constantes de propagación son dadas como la solución de las **ecuaciones** 1.3.5.12 y 1.3.4.17 son llamados modos HE.

### 1.3.6. Expresión unificada para las constantes de propagación

Empleando la aproximación de guiado débil es posible obtener una expresión unificada para las constantes de propagación, esto de la **ecuación** 1.3.5.4 para los modos TM y TE, de la **ecuación** 1.3.5.11 para los modos EH y de la **ecuación** 1.3.5.12 para los modos HE.

Analizando el caso de los modos HE, se puede tomar el inverso de ambos lados de la **ecuación** 1.3.5.12 y usando las **ecuaciones** 1.3.5.5 y 1.3.5.6 con un subíndice  $q - 1$  en lugar de  $q$ , se obtiene:

$$\frac{u \left[ \frac{2(q-1)}{u} J_{q-1}(u) - J_{q-2}(u) \right]}{J_{q-1}(u)} = \frac{w \left[ \frac{2(q-1)}{w} K_{q-1}(w) + K_{q-2}(w) \right]}{K_{q-1}(w)}, \quad (1.3.6.1)$$

la cual conduce a:

$$-\frac{uJ_{q-2}(u)}{J_{q-1}(u)} = \frac{wK_{q-2}(w)}{K_{q-1}(w)} \rightarrow -\frac{J_{q-1}(u)}{uJ_{q-2}(u)} = \frac{K_{q-1}(w)}{wK_{q-2}(w)}, \quad (1.3.6.2)$$

como otra forma de expresar la **ecuación** 1.3.5.12.

Comparando las **ecuaciones** 1.3.5.4, 1.3.5.11 y 1.3.6.2, se puede definir un nuevo parámetro:

$$l = \begin{cases} 1 & \text{(para modos TM y TE),} \\ q + 1 & \text{(para modos EH),} \\ q - 1 & \text{(para modos HE),} \end{cases} \quad (1.3.6.3a)$$

$$l = \begin{cases} 1 & \text{(para modos TM y TE),} \\ q + 1 & \text{(para modos EH),} \\ q - 1 & \text{(para modos HE),} \end{cases} \quad (1.3.6.3b)$$

$$l = \begin{cases} 1 & \text{(para modos TM y TE),} \\ q + 1 & \text{(para modos EH),} \\ q - 1 & \text{(para modos HE),} \end{cases} \quad (1.3.6.3c)$$

pudiendo reescribir estas ecuaciones en la forma unificada siguiente:

$$\frac{uJ_{l-1}(u)}{J_l(u)} = -\frac{wK_{l-1}(w)}{K_l(w)}. \quad (1.3.6.4)$$

Si se llegara a tener una función de Bessel con subíndice negativo, se pueden utilizar las siguientes relaciones para cambiarlo:

$$J_{-q}(u) = (-1)^q J_q(u), \quad (1.3.6.5)$$

$$K_{-q}(w) = K_q(w). \quad (1.3.6.6)$$

### 1.3.7. Frecuencias de corte

De las **ecuaciones** 1.3.2.3 y 1.3.2.15 se observa que  $w$  es real y finita cuando  $k_0 n_2 < \beta$ , lo que implica que la energía electromagnética está confinada en el núcleo. Sin embargo, analizando cuando:

$$\beta = k_0 n_2, \quad (1.3.7.1)$$

se ve que  $w = 0$ , lo que implica que la energía ya no puede estar confinada en el núcleo. La **ecuación** 1.3.7.1 es llamada la condición de corte, y la frecuencia de la luz a la que se cumple esta condición es llamada la frecuencia de corte.

En fibras ópticas, la transmisión de energía mediante un modo específico es posible en frecuencias superiores a la frecuencia de corte, los modos de transmisión en tales frecuencias son llamados modos de propagación [19].

### 1.3.8. Modos LP

De las **ecuaciones** 1.3.6.3 y 1.3.6.4 se observa que, dentro de la aproximación de guiado débil, todos los modos caracterizados por un conjunto común de  $l$  y  $m$  satisfacen la misma ecuación característica. Esto significa que esos modos son degenerados, pues tienen una constante de fase en común.

Estos modos degenerados son llamados "modos  $LP_{lm}$ ", donde LP significa "linealmente polarizado",  $l$  es el nuevo parámetro establecido el cual denota el número de variaciones de  $E_x$  (o  $E_y$ ) observadas en una rotación ( $\varphi = 0 \sim 2\pi$ ), y  $m$  es el número del modo radial el cual denota la  $m$ -ésima raíz más pequeña de  $u$  a partir de la cual se calculan las constantes de propagación del modo.

Se les conoce como linealmente polarizados debido a que para estructuras de guiado débil la teoría modal proporciona componentes de campo transversales dominantes, esto es que el campo transversal se encontrará casi por completo ya sea en  $E_x$  o en  $E_y$ , por lo tanto, soluciones aproximadas para los modos TM, TE, HE y EH pueden ser dadas por dos componentes linealmente polarizadas [21].

Todos los modos caracterizados por un conjunto común de  $l$  y  $m$  son llamados modos  $LP_{lm}$  independientemente de sus configuraciones de campo TM, TE, EH o HE. A continuación se presenta la relación entre las designaciones tradicionales de los modos (TM, TE, EH, HE) y las designaciones de los primeros diez modos  $LP_{lm}$ , en la **tabla** 1.1:

**Tabla 1.1:** Relación entre las designaciones tradicionales y LP de los diez modos  $LP_{lm}$  más bajos.

Designación modos-LP	Designación modos-Tradicionales y número de modos	Número de modos degenerados
$LP_{01}$	$HE_{11} \times 2$	2
$LP_{11}$	$TE_{01}, TM_{01}, HE_{21} \times 2$	4
$LP_{21}$	$EH_{11} \times 2, HE_{31} \times 2$	4
$LP_{02}$	$HE_{12} \times 2$	2
$LP_{31}$	$EH_{21} \times 2, HE_{41} \times 2$	4
$LP_{12}$	$TE_{02}, TM_{02}, HE_{22} \times 2$	4
$LP_{41}$	$EH_{31} \times 2, HE_{51} \times 2$	4
$LP_{22}$	$EH_{12} \times 2, HE_{32} \times 2$	4
$LP_{03}$	$HE_{13} \times 2$	2
$LP_{51}$	$EH_{41} \times 2, HE_{61} \times 2$	4

viendo que todos los modos EH y HE tienen dos componentes linealmente independientes expresados por  $\sin(q\varphi)$  y  $\cos(q\varphi)$ . Ahora se muestra la distribución del campo eléctrico y la distribución de intensidad de  $E_x$  para los primeros tres modos  $LP_{lm}$  en la **tabla 1.2** [19]:

**Tabla 1.2:** Distribución del campo eléctrico y de intensidad de  $E_x$  para los tres modos  $LP_{lm}$  más bajos.

Designación modos-LP	Designación Tradicional	Distribución del campo eléctrico	Distribución de intensidad de $E_x$
$LP_{01}$	$HE_{11} \begin{cases} q = 1 \\ l = 0 \\ m = 1 \end{cases}$		
$LP_{11}$	$TE_{01} \begin{cases} q = 0 \\ l = 1 \\ m = 1 \end{cases}$		
	$TM_{01} \begin{cases} q = 0 \\ l = 1 \\ m = 1 \end{cases}$		
	$HE_{21} \begin{cases} q = 2 \\ l = 1 \\ m = 1 \end{cases}$		
$LP_{21}$	$EH_{11} \begin{cases} q = 1 \\ l = 2 \\ m = 1 \end{cases}$		
	$HE_{31} \begin{cases} q = 3 \\ l = 2 \\ m = 1 \end{cases}$		

### 1.3.9. Índice de refracción efectivo

El índice de refracción efectivo  $n_{\text{eff}}$  puede ser expresado de la siguiente manera:

$$n_{\text{eff}} = \frac{\beta}{k_0}, \quad (1.3.9.1)$$

donde  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  es el número de onda en el vacío,  $\lambda_0$  es la longitud de onda de la luz en el vacío y  $\beta$  es la constante de fase del modo. Hay diferentes índices de refracción efectivos para los modos. Sustituyendo la ecuación 1.3.9.1 en la ecuación 1.3.2.3 se obtiene el rango de variación del índice de refracción efectivo:

$$n_2 < n_{\text{eff}} < n_1. \quad (1.3.9.2)$$

## 1.4. Rejillas de Periodo Largo

Una rejilla de periodo largo (RPL o LPFG por sus siglas en inglés) es una modulación periódica del índice de refracción del núcleo de la fibra inducida utilizando diversas técnicas, como por ejemplo exposición a láseres ultravioleta, de  $CO_2$  o infrarrojo, por medio de implantación de un haz de iones, aguafuerte (etching), arreglos mecánicos, ondas acústicas, descargas eléctricas (arco eléctrico), etc. La periodicidad de la rejilla es del orden de cientos de micrómetros [26].

La función de las RPL es el acoplamiento entre la luz que hay en el modo del núcleo y los modos de la cubierta de una fibra óptica, presenta varias ventajas como lo es la facilidad de fabricación, baja pérdida de inserción y compacidad. Se han utilizado como sensores para parámetros físicos como la temperatura, tensión, índice de refracción y curvatura.

El espectro de transmisión resultante consta de distintas bandas de pérdida resonantes que se deben al acoplamiento del modo fundamental del núcleo ( $LP_{01}$ ) con los modos de la cubierta con propagación hacia adelante ( $LP_{0m}$ ). La longitud de onda de resonancia,  $\lambda_{\text{res}}$ , de una RPL con periodo  $\Lambda$  es determinada por la condición de coincidencia de fases [27]:

$$\lambda_{\text{res}} = \left( n_{01}^{\text{eff,co}} - n_{0m}^{\text{eff,cl}} \right) \Lambda, \quad (1.4.0.1)$$

donde  $n_{01}^{\text{eff,co}}$  y  $n_{0m}^{\text{eff,cl}}$  son los índices de refracción efectivos del modo fundamental del núcleo y del m-ésimo modo de la cubierta, respectivamente. Las respuestas diferenciales de los índices de refracción efectivos de los modos del núcleo y de la cubierta a la temperatura, tensión, curvatura y al índice de refracción del medio se manifiestan como cambios en las longitudes de onda centrales de las bandas de pérdida resonantes [28].

## 1.5. Interferómetro de Mach-Zehnder con RPL en fibra óptica

Al conectar en cascada dos RPL idénticas, es posible formar un interferómetro de Mach-Zehnder (MZI por sus siglas en inglés) de fibra óptica intrínseco, donde la luz acoplada a la cubierta por la primera RPL es acoplada nuevamente al núcleo por la segunda RPL para interferir con la luz que se propagó a través del núcleo de la fibra, como se ilustra a continuación en la figura 1.12:

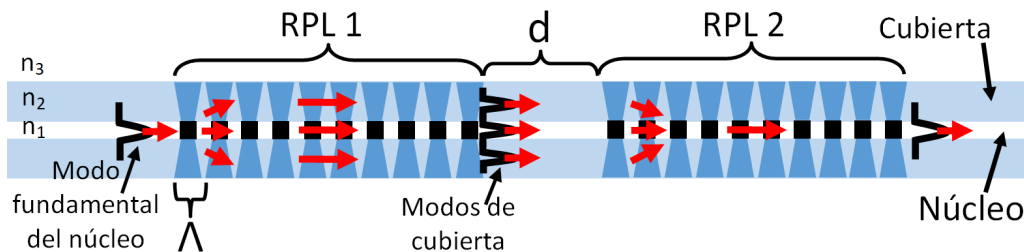


Figura 1.12: Diagrama esquemático de un MZI con dos RPL en cascada.

donde  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  son los índices de refracción del núcleo, de la cubierta y del medio externo, respectivamente, y  $d$  es la distancia que existe entre el final de la primera RPL y el inicio de la segunda RPL (la separación entre las RPL). Esto conduce a que el espectro de transmisión resultante sea una superposición de muchos patrones de interferencia y a que se produzca un espectro canalizado sinusoidal dentro de las bandas de pérdida resonantes.

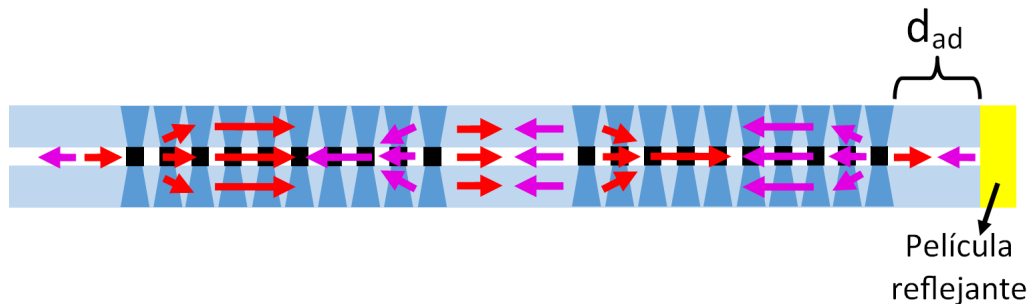
La fase,  $\phi$ , del espectro canalizado depende de la diferencia en las longitudes de los caminos ópticos de la luz que se propaga en los modos del núcleo y de la cubierta, de acuerdo a lo siguiente:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \left( n_{01}^{\text{eff.co}} - n_{0m}^{\text{eff.cl}} \right) d_c, \quad (1.5.0.1)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda y  $d_c$  es la distancia de centro a centro entre las dos RPL. La perturbación de la sección  $d$  de la fibra resulta en un cambio en la fase del espectro canalizado dentro de la envolvente de la banda de pérdida resonante [28].

## 1.6. Interferómetro de Mach-Zehnder de doble paso con RPL en fibra óptica

Una alta sensibilidad siempre es deseada en los sensores. Usando la configuración del MZI en la fibra, uno de los métodos propuestos para lograr esta alta sensibilidad es el del doble paso, el cual consiste en el corte de la fibra al final de la segunda RPL y la adición de un espejo (o película reflejante) en este extremo para reflejar la luz transmitida y hacer que pase a través del MZI una segunda vez, como se ilustra a continuación en la **figura 1.13** [17]:



**Figura 1.13:** Diagrama esquemático de un MZI de doble paso con RPL en cascada.

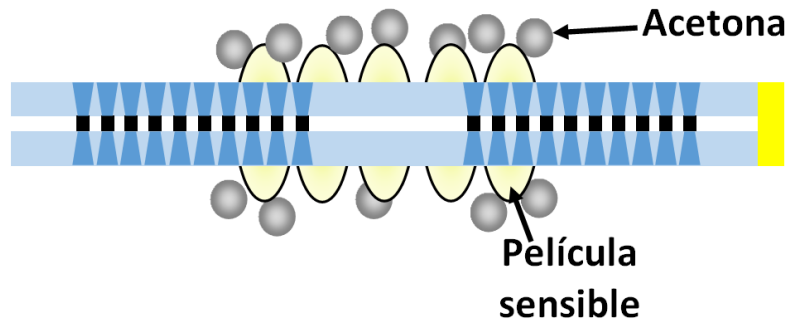
donde  $d_{ad}$  es la distancia que puede existir entre la segunda RPL y la película reflejante.

## 1.7. Sensor MZI de doble paso en fibra óptica para la detección de acetona utilizando una película sensible

Empleando el principio de funcionamiento del MZI en la fibra se pueden estudiar los cambios resultantes en el espectro obtenido debido a perturbaciones en el medio externo de la sección  $d$  de la fibra, específicamente a cambios en su índice de refracción [28]. Depositando una película sensible en esta sección y haciéndola interactuar con el COV deseado, en este caso acetona, es posible cambiar el índice de refracción de la película y así obtener un cambio en el espectro de reflexión, como se ilustra a continuación en la **figura 1.14**:

1.7 Sensor MZI de doble paso en fibra óptica para la detección de acetona utilizando una película sensible

---



**Figura 1.14:** Diagrama esquemático de un sensor MZI de doble paso con película sensible para la detección de acetona.

## Capítulo 2

# Desarrollo in silico del sensor MZI de doble paso en fibra óptica

El estudio del sensor MZI de doble paso in silico es de gran importancia, debido a que permite tener un mejor entendimiento del comportamiento del sensor, la comparación entre resultados obtenidos por medio de simulaciones y de forma experimental posibilita el análisis de la respuesta del sensor ante variaciones en los parámetros del sistema.

El objetivo del siguiente desarrollo es la obtención del espectro de reflexión del sensor MZI, siendo este al que se le aplicará su respectivo análisis.

### 2.1. Expresión de la reflectancia

Para obtener una expresión de la reflectancia en el MZI de doble paso, se utiliza la teoría propuesta por Y. Liu, et al. [29], donde se establece que el campo eléctrico de la luz acoplada entre los modos del núcleo y de la cubierta está dado por:

$$E(z) = [A_{01}^{\text{co}}(z)e^{-j\delta_m z}] e^{j\beta_{01}^{\text{co}} z} + [A_m^{\text{cl}}(z)e^{j\delta_m z}] e^{j\beta_m^{\text{cl}} z}, \quad (2.1.0.1)$$

donde  $A_{01}^{\text{co}}(z)$  y  $A_m^{\text{cl}}(z)$  son las amplitudes de entrada del modo fundamental del núcleo  $\text{LP}_{01}$  y del modo de la cubierta acoplado  $\text{LP}_{0m}$  a lo largo de la longitud de la RPL ( $0 \leq z \leq L$ ), respectivamente,  $L$  es la longitud de la RPL,  $\beta_{01}^{\text{co}}$  y  $\beta_m^{\text{cl}}$  son las respectivas constantes de fase,  $\delta_m = \frac{1}{2} [\beta_{01}^{\text{co}} - \beta_m^{\text{cl}} - \frac{2\pi}{\Lambda}]$  es la desintonización de la longitud de onda de resonancia y  $\Lambda$  es el periodo de la RPL. Entonces, las ecuaciones de los modos acoplados de las RPL se expresan de la siguiente forma:

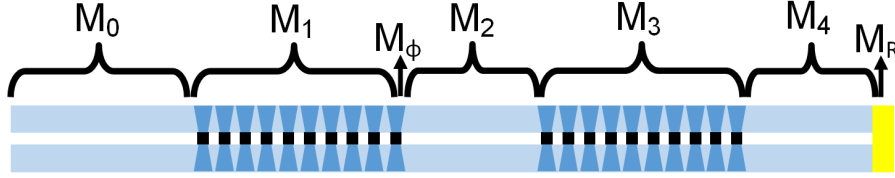
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_{01}^{\text{co}}(z)}{dz} = j [\delta_m A_{01}^{\text{co}}(z) + \kappa_m A_m^{\text{cl}}(z)], \\ \frac{dA_m^{\text{cl}}(z)}{dz} = j [-\delta_m A_m^{\text{cl}}(z) + \kappa_m A_{01}^{\text{co}}(z)], \end{array} \right. \quad (2.1.0.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_{01}^{\text{co}}(z)}{dz} = j [\delta_m A_{01}^{\text{co}}(z) + \kappa_m A_m^{\text{cl}}(z)], \\ \frac{dA_m^{\text{cl}}(z)}{dz} = j [-\delta_m A_m^{\text{cl}}(z) + \kappa_m A_{01}^{\text{co}}(z)], \end{array} \right. \quad (2.1.0.2b)$$

donde  $\kappa_m$  es la constante de acoplamiento del modo  $\text{LP}_{0m}$  de la cubierta y  $\kappa_m L$  es llamada fuerza de acoplamiento. Aquí se tiene una RPL compuesta, la cual es tratada simplemente como dos RPL ( $\text{RPL}_1$  y  $\text{RPL}_2$ , las cuales tienen una longitud de  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente) separadas por un cambio de fase ( $\phi_{\text{cf}}$ ) y un tramo de fibra ( $d$ ). Cuando  $\phi_{\text{cf}} = 0$  y  $d = 0$  se tiene una RPL convencional, cuando  $d = 0$  y  $\phi_{\text{cf}} \neq 0$  se tiene una RPL desfasada, y cuando  $d \neq 0$  se tiene una RPL en cascada. En una RPL en cascada se tendrán las respectivas constantes y fuerzas de acoplamiento correspondientes a cada RPL, estas últimas dadas por  $\kappa_m L_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Considerando las condiciones de frontera  $A_{01}^{\text{co}}(0) = 1$  y  $A_m^{\text{cl}}(0) = 0$ , la amplitud de la transmitancia ( $t$ ) y la

razón de acoplamiento del modo  $LP_{0m}$  de la cubierta ( $r$ ) son resueltas a partir de la **ecuación** 2.1.0.2, de tal forma que pueden ser escritas como el producto de las matrices que representan la propagación de los modos en las diferentes regiones dentro de la fibra [30], como se ilustra a continuación en la **figura** 2.1:



**Figura 2.1:** Diagrama esquemático del arreglo de matrices para un MZI de doble paso.

donde:

$$M_0 = \begin{bmatrix} A_{01}^{\text{co}}(0) \\ A_m^{\text{cl}}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.1.0.3)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} t_1 & r_1 \\ r_1 & t_1^* \end{bmatrix}, \quad (2.1.0.4)$$

$$M_\phi = \begin{bmatrix} e^{j\frac{\phi_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-j\frac{\phi_1}{2}} \end{bmatrix}, \quad (2.1.0.5)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} e^{j\pi(n_{01}^{\text{eff,co}} - n_{0m}^{\text{eff,cl}})\frac{d}{\lambda}} & 0 \\ 0 & e^{-j\pi(n_{01}^{\text{eff,co}} - n_{0m}^{\text{eff,cl}})\frac{d}{\lambda}} \end{bmatrix}, \quad (2.1.0.6)$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} t_2 & r_2 \\ r_2 & t_2^* \end{bmatrix}, \quad (2.1.0.7)$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} e^{j\pi(n_{01}^{\text{eff,co}} - n_{0m}^{\text{eff,cl}})\frac{d_{\text{ad}}}{\lambda}} & 0 \\ 0 & e^{-j\pi(n_{01}^{\text{eff,co}} - n_{0m}^{\text{eff,cl}})\frac{d_{\text{ad}}}{\lambda}} \end{bmatrix}, \quad (2.1.0.8)$$

$$M_R = \begin{bmatrix} \frac{n_{01}^{\text{eff,co}} - n_{\text{me}}^{\text{eff}}}{n_{01}^{\text{eff,co}} + n_{\text{me}}^{\text{eff}}} e^{-j\phi_p} & 0 \\ 0 & \frac{n_{01}^{\text{eff,co}} - n_{\text{me}}^{\text{eff}}}{n_{01}^{\text{eff,co}} + n_{\text{me}}^{\text{eff}}} e^{-j\phi_s} \end{bmatrix}, \quad (2.1.0.9)$$

aquí  $n_{\text{me}}^{\text{eff}}$  es el índice de refracción efectivo del medio externo de la punta de la fibra y  $\phi_p$  y  $\phi_s$  son los cambios de fase ocurridos en dirección paralela y ortogonal al plano de incidencia debido a la reflexión, respectivamente [31]. Se puede observar que  $M_1$  y  $M_3$  representan la propagación en las RPL,  $M_2$  y  $M_4$  fuera de las RPL,  $M_\phi$  introduce el desfase entre las RPL y  $M_R$  corresponde a la reflexión de los modos en la punta de la fibra. Cabe resaltar que la **ecuación** 2.1.0.9 para  $M_R$  es la correspondiente a un MZI de doble paso sin película reflejante [30].

Por lo tanto, las expresiones para la amplitud de la transmitancia y la razón de acoplamiento son dadas con la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} t_{\text{bp}} \\ r_{\text{bp}} \end{bmatrix} = M_1 M_\phi M_2 M_3 M_4 M_R M_4 M_3 M_2 M_\phi M_1 M_0, \quad (2.1.0.10)$$

donde  $t = t_{\text{bp}}$  y  $r = r_{\text{bp}}$ .

Resolviendo la **ecuación 2.1.0.10** se obtiene:

$$t_{bp} = \frac{n_{01}^{\text{eff,co}} - n_{me}^{\text{eff}}}{n_{01}^{\text{eff,co}} + n_{me}^{\text{eff}}} \left\{ t_1^2 t_2^2 e^{j \left[ \frac{2\pi \Delta n_{\text{co,cl}}^{\text{eff}}}{\lambda} (d+d_{ad}) + \phi_{cf} - \phi_p \right]} + 2t_1 t_2 r_1 r_2 e^{j \left[ \frac{2\pi \Delta n_{\text{co,cl}}^{\text{eff}}}{\lambda} d_{ad} - \phi_p \right]} + \dots \right. \\ \left. + t_1^2 r_2^2 e^{j \left[ \frac{2\pi \Delta n_{\text{co,cl}}^{\text{eff}}}{\lambda} (d-d_{ad}) + \phi_{cf} - \phi_s \right]} + 2t_1 t_2^* r_1 r_2 e^{-j \left[ \frac{2\pi \Delta n_{\text{co,cl}}^{\text{eff}}}{\lambda} d_{ad} + \phi_s \right]} + \dots \right. \\ \left. + r_1^2 r_2^2 e^{-j \left[ \frac{2\pi \Delta n_{\text{co,cl}}^{\text{eff}}}{\lambda} (d-d_{ad}) + \phi_{cf} + \phi_p \right]} + r_1^2 t_2^{*2} e^{-j \left[ \frac{2\pi \Delta n_{\text{co,cl}}^{\text{eff}}}{\lambda} (d+d_{ad}) + \phi_{cf} + \phi_s \right]} \right\}, \quad (2.1.0.11)$$

donde  $\Delta n_{\text{co,cl}}^{\text{eff}} = n_{01}^{\text{eff,co}} - n_{0m}^{\text{eff,cl}}$ . Utilizando la definición del valor absoluto de un número complejo,  $|z| = \sqrt{\text{Re}^2(z) + \text{Im}^2(z)}$ , para escribir [22]:

$$|e^{jx}| = |\cos(x) + i \text{sen}(x)| = \sqrt{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)} = 1 \\ \rightarrow \left| e^{j \left[ \frac{2\pi \Delta n_{\text{co,cl}}^{\text{eff}}}{\lambda} (d+d_{ad}) + \phi_{cf} + \phi_s \right]} \right| = 1, \quad (2.1.0.12)$$

definiendo:

$$\Delta \text{CO}_d = \frac{\pi \Delta n_{\text{co,cl}}^{\text{eff}} d}{\lambda}, \quad (2.1.0.13)$$

$$\Delta \text{CO}_{d_{ad}} = \frac{\pi \Delta n_{\text{co,cl}}^{\text{eff}} d_{ad}}{\lambda}, \quad (2.1.0.14)$$

$$\Delta \phi^{\text{eff}} = \phi_p - \phi_s, \quad (2.1.0.15)$$

donde  $\Delta \text{CO}_d$ ,  $\Delta \text{CO}_{d_{ad}}$  y  $\Delta \phi^{\text{eff}}$  representan la diferencia en el camino óptico en la sección  $d$  y  $d_{ad}$  y el cambio de fase efectivo debido a la reflexión, respectivamente, y asumiendo que  $n_{01}^{\text{eff,co}} \approx n_{0m}^{\text{eff,cl}}$ , se tendrá que la potencia de la transmitancia en propagación hacia atrás, o reflectancia, es dada por:

$$R_T = T_{bp} = |t_{bp}|^2, \quad (2.1.0.16)$$

la cual, al multiplicar el valor absoluto de la **ecuación 2.1.0.11** por la **ecuación 2.1.0.12**, queda expresada como:

$$R_T = \left| \frac{n_{01}^{\text{eff,co}} - n_{me}^{\text{eff}}}{n_{01}^{\text{eff,co}} + n_{me}^{\text{eff}}} \left\{ t_1^2 t_2^2 e^{j[4(\Delta \text{CO}_d + \Delta \text{CO}_{d_{ad}}) + 2\phi_{cf} - \Delta \phi^{\text{eff}}]} + \dots \right. \right. \\ \left. + 2t_1 r_1 r_2 \left[ t_2 e^{j(2\Delta \text{CO}_d + 4\Delta \text{CO}_{d_{ad}} + \phi_{cf} - \Delta \phi^{\text{eff}})} + t_2^* e^{j(2\Delta \text{CO}_d + \phi_{cf})} \right] + \dots \right. \\ \left. + t_1^2 r_2^2 e^{j(4\Delta \text{CO}_d + 2\phi_{cf})} + r_1^2 r_2^2 e^{j(4\Delta \text{CO}_{d_{ad}} - \Delta \phi^{\text{eff}})} + r_1^2 t_2^{*2} \right\} \right|^2. \quad (2.1.0.17)$$

Si se supone que  $\phi_{cf} = 0$  y  $d_{ad} = 0$  (esto significa que no hay desfaseamiento entre las RPL y que el corte realizado en la fibra está justo al final de la segunda RPL), entonces se obtendrán las mismas expresiones que Meneses-Mijares, et al. en [30].

De este modo,  $t_i$  y  $r_i$  describen la razón de transmisión del modo del núcleo y la razón de acoplamiento del modo de cubierta de la rejilla convencional RPL<sub>*i*</sub> ( $i = 1, 2$ ), y son resueltas de la **ecuación 2.1.0.2** como:

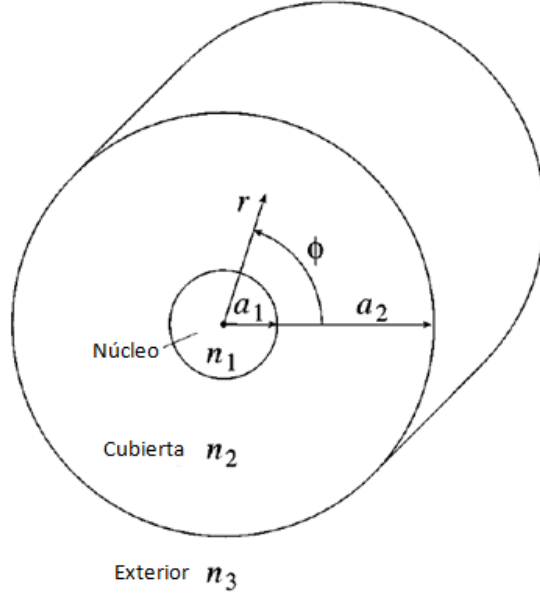
$$\left\{ \begin{array}{l} t_i = \cos(S_m L_i) + j \frac{\delta_m}{S_m} \text{sen}(S_m L_i), \\ r_i = j \frac{\kappa_m}{S_m} \text{sen}(S_m L_i), \end{array} \right. \quad (2.1.0.18a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_i = \cos(S_m L_i) + j \frac{\delta_m}{S_m} \text{sen}(S_m L_i), \\ r_i = j \frac{\kappa_m}{S_m} \text{sen}(S_m L_i), \end{array} \right. \quad (2.1.0.18b)$$

siendo  $S_m = \sqrt{\kappa_m^2 + \delta_m^2}$  la desintonización efectiva.

## 2.2. Obtención de los índices de refracción efectivos

Para poder obtener el espectro de reflectancia dado por la **ecuación 2.1.0.17** es necesario primero calcular los índices de refracción efectivos de los modos propagados en la fibra. Esto se logra empleando la teoría, nomenclatura y geometría propuesta por Erdogan, en [32]. Observando el diagrama de la **figura 2.2**:



**Figura 2.2:** Diagrama esquemático de una sección transversal de la geometría propuesta de la fibra.

se establece el sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  como los índices de refracción del núcleo, la cubierta y el medio externo de la fibra, respectivamente, y  $a_1$  y  $a_2$  como los radios del núcleo y de la cubierta, respectivamente. Aquí se emplea la ecuación de Sellmeier para definir al índice de refracción como una función de la longitud de onda, tal que la forma habitual de esta ecuación para los vidrios es la siguiente:

$$n^2(\lambda_0) = 1 + \frac{B_1\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - C_1} + \frac{B_2\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - C_2} + \frac{B_3\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - C_3}, \quad (2.2.0.1)$$

donde  $n$  es el índice de refracción,  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el vacío y  $B_{1,2,3}$  y  $C_{1,2,3}$  son coeficientes de Sellmeier determinados experimentalmente (estos coeficientes suelen expresarse para  $\lambda_0$  en micrómetros). Esta ecuación se utiliza para determinar la dispersión de la luz en un medio y establece una relación empírica entre el índice de refracción y la longitud de onda para un medio transparente particular [33].

Utilizando la aproximación de guiado débil, donde  $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$  es la diferencia normalizada entre el índice del núcleo y de la cubierta, siendo esta muy pequeña, se tiene que la relación de dispersión (o la ecuación característica) que se debe de resolver para obtener el índice de refracción efectivo del modo  $LP_{01}$  es:

$$V\sqrt{1-b} \frac{J_1(V\sqrt{1-b})}{J_0(V\sqrt{1-b})} = V\sqrt{b} \frac{K_1(V\sqrt{b})}{K_0(V\sqrt{b})}, \quad (2.2.0.2)$$

donde  $J$  es la función de Bessel de primer tipo,  $K$  es la función de Bessel modificada de segundo tipo,  $V = \frac{2\pi}{\lambda} a_1 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$  es el número  $V$  de la fibra a una longitud de onda  $\lambda$  y  $b$  es el índice efectivo normalizado dado por  $b = \frac{n_{\text{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$ . Aquí el eje  $z$  está a lo largo del eje de la fibra y  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} n_{\text{eff}}$  es la constante de propagación. Es importante notar que la constante de propagación es obtenida en una geometría donde

## Desarrollo in silico del sensor MZI de doble paso en fibra óptica

### 2.2 Obtención de los índices de refracción efectivos

la cubierta es infinita ( $a_2 \rightarrow \infty$ ), implicando que el modo  $LP_{01}$  que se propaga en el núcleo no detecta la presencia de la interfaz cubierta-exterior.

Para los modos de la cubierta se deben de considerar todas las interfaces, por lo que su análisis es más complicado. La relación de dispersión para un modo de cubierta con dependencia azimutal  $e^{\pm il\phi}$ , para el cual por definición  $n_3 < n_{\text{eff}} < n_2$  y  $l$  es el número del modo azimutal, está dada por:

$$\zeta_0 = \zeta'_0, \quad (2.2.0.3)$$

donde:

$$\zeta_0 = \frac{1}{\sigma_2} \frac{u_2 \left( \mathbb{J}\mathbb{K} + \frac{\sigma_1 \sigma_2 u_{21} u_{32}}{n_2^2 a_1 a_2} \right) p_l(a_2) - \mathbb{K}q_l(a_2) + \mathbb{J}r_l(a_2) - \frac{1}{u_2} s_l(a_2)}{-u_2 \left( \frac{u_{32}}{n_2^2 a_2} \mathbb{J} - \frac{u_{21}}{n_1^2 a_1} \mathbb{K} \right) p_l(a_2) + \frac{u_{32}}{n_1^2 a_2} q_l(a_2) + \frac{u_{21}}{n_1^2 a_1} r_l(a_2)}, \quad (2.2.0.4)$$

$$\zeta'_0 = \sigma_1 \frac{u_2 \left( \frac{u_{32}}{a_2} \mathbb{J} - \frac{n_2^2 u_{21}}{n_2^2 a_1} \mathbb{K} \right) p_l(a_2) - \frac{u_{32}}{a_2} q_l(a_2) - \frac{u_{21}}{a_1} r_l(a_2)}{u_2 \left( \frac{n_3^2}{n_2^2} \mathbb{J}\mathbb{K} + \frac{\sigma_1 \sigma_2 u_{21} u_{32}}{n_1^2 a_1 a_2} \right) p_l(a_2) - \frac{n_3^2}{n_1^2} \mathbb{K}q_l(a_2) + \mathbb{J}r_l(a_2) - \frac{n_2^2}{n_1^2 u_2} s_l(a_2)}, \quad (2.2.0.5)$$

teniendo las siguientes definiciones:

$$\sigma_1 \equiv il \frac{n_{\text{eff}}}{Z_0}, \quad (2.2.0.6)$$

$$\sigma_2 \equiv il n_{\text{eff}} Z_0, \quad (2.2.0.7)$$

$$u_{21} \equiv \frac{1}{u_2^2} - \frac{1}{u_1^2}, \quad (2.2.0.8)$$

$$u_{32} \equiv \frac{1}{w_3^2} + \frac{1}{u_2^2}, \quad (2.2.0.9)$$

siendo:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\Omega, \quad (2.2.0.10)$$

$$u_j^2 \equiv \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (n_j^2 - n_{\text{eff}}^2) \quad [j \in (1, 2)], \quad (2.2.0.11)$$

$$w_3^2 \equiv \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (n_{\text{eff}}^2 - n_3^2), \quad (2.2.0.12)$$

$$\mathbb{J} \equiv \frac{J'_l(u_1 a_1)}{u_1 J_l(u_1 a_1)}, \quad (2.2.0.13)$$

$$\mathbb{K} \equiv \frac{K'_l(w_3 a_2)}{w_3 K_l(w_3 a_2)}, \quad (2.2.0.14)$$

$$p_l(r) \equiv J_l(u_2 r) N_l(u_2 a_1) - J_l(u_2 a_1) N_l(u_2 r), \quad (2.2.0.15)$$

$$q_l(r) \equiv J_l(u_2 r) N'_l(u_2 a_1) - J'_l(u_2 a_1) N_l(u_2 r), \quad (2.2.0.16)$$

$$r_l(r) \equiv J'_l(u_2 r) N_l(u_2 a_1) - J_l(u_2 a_1) N'_l(u_2 r), \quad (2.2.0.17)$$

$$s_l(r) \equiv J'_l(u_2 r) N'_l(u_2 a_1) - J'_l(u_2 a_1) N'_l(u_2 r), \quad (2.2.0.18)$$

aquí  $Z_0$  es la impedancia electromagnética en el vacío,  $N$  es la función de Bessel de segundo tipo y la notación primada indica diferenciación con respecto al argumento total. Las relaciones de dispersión dadas por las **ecuaciones** 2.2.0.2 y 2.2.0.3 se resuelven numéricamente.

### 2.3. Medio externo de la fibra

Debido a que la película sensible es depositada en la sección  $d$  de la fibra y esta a su vez interactúa con la acetona, el medio externo será tomado como la mezcla entre la película sensible y la acetona, cuyo índice de refracción efectivo se obtiene usando la teoría de Maxwell-Garnett [34]:

$$\begin{aligned} n_3^{\text{eff}} &= \sqrt{\epsilon_3^{\text{eff}}} = \sqrt{\epsilon_{r,c} \left[ 1 - \frac{3f(\epsilon_{r,c} - \epsilon_{r,d})}{2\epsilon_{r,c} + \epsilon_{r,d} + f(\epsilon_{r,c} - \epsilon_{r,d})} \right]} \\ &= \sqrt{n_{r,c}^2 \left[ 1 - \frac{3f(n_{r,c}^2 - n_{r,d}^2)}{2n_{r,c}^2 + n_{r,d}^2 + f(n_{r,c}^2 - n_{r,d}^2)} \right]}, \end{aligned} \quad (2.3.0.1)$$

donde  $\epsilon_3^{\text{eff}}$  es la constante dieléctrica efectiva del medio externo,  $f$  es la porosidad (fracción de la mezcla) y  $\epsilon_{r,c}$ ,  $\epsilon_{r,d}$ ,  $n_{r,c}$  y  $n_{r,d}$  son la constante dieléctrica e índice de refracción de las fases continua (película sensible) y dispersa (acetona), respectivamente.

### 2.4. Cálculo del espectro de reflexión

La reflectancia es un parámetro utilizado para cuantificar la habilidad de cuerpos, materiales o superficies de reflejar la radiación que les llega. Se define como la relación entre el flujo radiante reflejado desde una superficie (espectro reflejado) y el flujo radiante incidente (espectro incidente):

$$R_T = \frac{E_r}{E_i}, \quad (2.4.0.1)$$

donde  $E_r$  es el espectro reflejado y  $E_i$  es el espectro incidente [35]. Resolviendo para el espectro reflejado o espectro de reflexión se obtiene:

$$E_r = R_T E_i. \quad (2.4.0.2)$$

Este espectro incidente se obtiene de forma experimental.

### 2.5. Parámetros utilizados en la simulación

Los modos estudiados fueron los primeros diez modos LP de orden  $l = 0$  en el rango de longitud de onda de 1000 nm a 1700 nm.

Para obtener las respectivas constantes de fase de cada modo y con esto los índices de refracción efectivos para el núcleo y la cubierta, es necesario calcular  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$ . En el caso de  $n_1$  se emplean los siguientes coeficientes de Sellmeier correspondientes a sílice dopada con germanio con una concentración del 3.5 mol %:

$$n_1(\lambda_0) = \sqrt{1 + \frac{0.907405\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 97.9339} + \frac{0.416003\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 0.0166823} + \frac{0.704204\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 0.00264623}}, \quad (2.5.0.1)$$

donde  $\lambda_0$  se expresa en micrómetros y  $B_1^{\text{co}} = 0.907405$ ,  $B_2^{\text{co}} = 0.416003$ ,  $B_3^{\text{co}} = 0.704204$ ,  $C_1^{\text{co}} = 97.9339$ ,  $C_2^{\text{co}} = 0.0166823$  y  $C_3^{\text{co}} = 0.00264623$  [36]. En el caso de  $n_2$  se emplean los coeficientes correspondientes a sílice pura:

$$n_2(\lambda_0) = \sqrt{1 + \frac{0.897479\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 97.934} + \frac{0.407943\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 0.0135586} + \frac{0.696166\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 0.00467915}}, \quad (2.5.0.2)$$

## Desarrollo in silico del sensor MZI de doble paso en fibra óptica

### 2.5 Parámetros utilizados en la simulación

donde  $\lambda_0$  se expresa en micrómetros y  $B_1^{cl} = 0.897479$ ,  $B_2^{cl} = 0.407943$ ,  $B_3^{cl} = 0.696166$ ,  $C_1^{cl} = 97.934$ ,  $C_2^{cl} = 0.0135586$  y  $C_3^{cl} = 0.00467915$  [37]. En el caso de  $n_3$  se tendrá:

$$n_3 = \sqrt{n_{pdms}^2 \left[ 1 - \frac{3f(n_{pdms}^2 - n_{acet}^2)}{2n_{pdms}^2 + n_{acet}^2 + f(n_{pdms}^2 - n_{acet}^2)} \right]}, \quad (2.5.0.3)$$

donde  $n_{r,c} = n_{pdms}$  y  $n_{r,d} = n_{acet}$  es el índice de refracción de la película sensible escogida (en este caso el polidimetilsiloxano o PDMS) y el de la acetona, respectivamente. Los coeficientes de Sellmeier correspondientes al PDMS en la cubierta son los siguientes:

$$n_{pdms}(\lambda_0) = \sqrt{1 + \frac{16.9101\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 8770.2} + \frac{0.3522\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 0.0114} + \frac{0.6055\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 0.0114}}, \quad (2.5.0.4)$$

donde  $\lambda_0$  se expresa en micrómetros y  $B_1^{pdms} = 16.9101$ ,  $B_2^{pdms} = 0.3522$ ,  $B_3^{pdms} = 0.6055$ ,  $C_1^{pdms} = 8770.2$ ,  $C_2^{pdms} = 0.0114$  y  $C_3^{pdms} = 0.0114$  [38]. Para calcular el índice de refracción de la acetona se emplea la fórmula de dispersión de Cauchy:

$$n(\lambda_0) = A + \frac{D}{\lambda_0^2} + \frac{E}{\lambda_0^4}, \quad (2.5.0.5)$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el vacío expresada en micrómetros y  $A$ ,  $D$  y  $E$  son constantes, las cuales para la acetona son las siguientes:

$$n_{acet}(\lambda_0) = 1.34979 + \frac{0.00306}{\lambda_0^2} + \frac{0.00006}{\lambda_0^4}, \quad (2.5.0.6)$$

siendo  $A^{acet} = 1.34979$ ,  $D^{acet} = 0.00306$  y  $E^{acet} = 0.00006$  [39]. El parámetro  $f$  en la **ecuación** 2.5.0.3 fue variado primeramente de 0 a 0.01 en intervalos de 0.001 y posteriormente de 0 a 0.1 en intervalos de 0.01. Los radios del núcleo y de la cubierta son los siguientes, respectivamente:

$$a_1 = 4.1 \mu m, \quad (2.5.0.7)$$

$$a_2 = 62.5 \mu m. \quad (2.5.0.8)$$

Una vez obtenidos los índices de refracción efectivos, se establecen los siguientes valores:

$$L_1 = L_2 = 10.45 \text{ mm}, \quad (2.5.0.9)$$

$$\Lambda = 550 \mu m, \quad (2.5.0.10)$$

$$\kappa_{m1} = \kappa_{m2} = \frac{\pi}{4L_1} = \frac{\pi}{4L_2}, \quad (2.5.0.11)$$

$$\phi_{cf} = \frac{\pi}{4}, \quad (2.5.0.12)$$

$$d = 5 \text{ mm}, \quad (2.5.0.13)$$

$$d_{ad} = 1 \text{ mm}, \quad (2.5.0.14)$$

$$\phi_p = \frac{\pi}{2}, \quad (2.5.0.15)$$

$$\phi_s = \frac{\pi}{8}, \quad (2.5.0.16)$$

$$n_{me}^{eff} = 1 \quad (\text{aire}), \quad (2.5.0.17)$$

para resolver la **ecuación** 2.1.0.17.



## Capítulo 3

# Métodos Experimentales

### 3.1. Elaboración del sensor MZI de doble paso con película sensible

#### 3.1.1. Método de grabado de las RPL

El primer paso en la elaboración de los sensores MZI de doble paso es el grabado de las RPL, esto se llevó a cabo empleando el método de descarga de arco eléctrico por medio de una empalmadora Fitel S176CF y utilizando un actuador lineal y un micrómetro para mover la fibra óptica, como se muestra en las figuras 3.1 y 3.2:

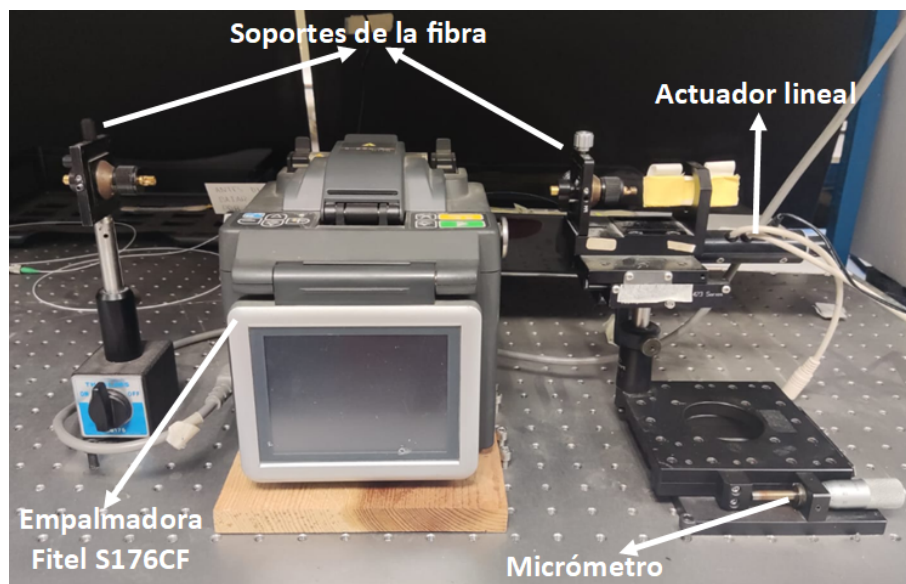


Figura 3.1: Sistema de grabado de las RPL.

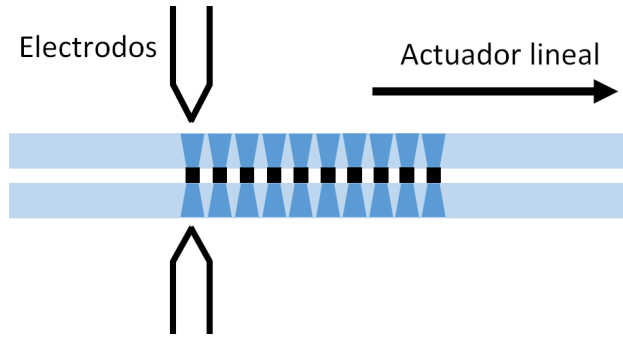


Figura 3.2: Diagrama esquemático del grabado de las RPL.

Los parámetros de grabado fueron los siguientes:

$$\text{Descargas por RPL} = 20, \quad (3.1.1.1)$$

$$\Lambda = 550 \mu m, \quad (3.1.1.2)$$

$$d = 5 mm, \quad (3.1.1.3)$$

$$\text{Potencia de arco} = 70, \quad (3.1.1.4)$$

$$\text{Duración de arco} = 250 ms. \quad (3.1.1.5)$$

Después del grabado de las RPL se realiza un corte lo más cercano posible al final de la segunda RPL con una cortadora de fibra óptica.

### 3.1.2. Depósito de la película reflejante

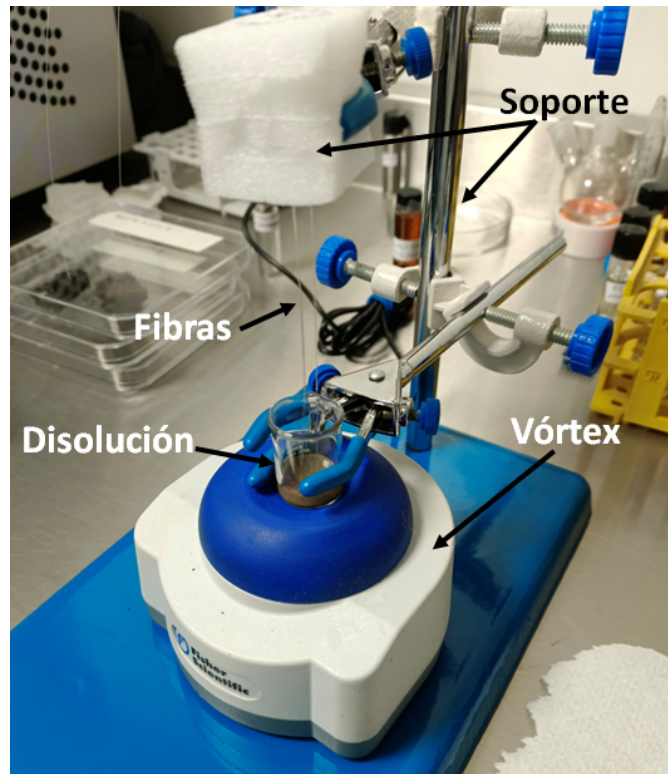
Debido a que la cantidad de luz que se refleja en la punta de la fibra es muy pequeña a comparación de la que se transmite, se propone el depósito de una película reflejante de plata (Ag) en esta, siguiendo el método propuesto por G. Quero, et al. [40].

Primero se limpió la punta de la fibra, esto utilizando una disolución piraña a una razón 3 : 2, esto es, 3 ml de ácido sulfúrico ( $H_2SO_4$ ) y 2 ml de peróxido de hidrógeno ( $H_2O_2$ ,  $C_{p/p} = 30\%$  p/p en  $H_2O$ ), en la cual se dejó sumergida por 5 minutos, donde  $C_{p/p}$  es la concentración porcentual en peso y % p/p es el porcentaje peso por peso. Posteriormente, la punta se retiró y dejó secar por otros 5 minutos, pasado el tiempo de secado se realizó una limpieza de residuos usando agua desionizada, etanol absoluto y secado con nitrógeno.

Lo siguiente fue la realización de disoluciones de nitrato de plata ( $AgNO_3$ , Desarrollo de Especialidades Químicas, No. catálogo: DEQP232000005,  $C_M = 0.1 M$ ,  $V = 640 \mu L$ ), hidróxido de potasio (KOH, CAS No.: 1310-58-3, Sigma-Aldrich,  $C_M = 0.8 M$ ,  $V = 440 \mu L$ ) y dextrosa ( $C_6H_{12}O_6$ , Laboratorios PiSA,  $C_M = 0.25 M$ ,  $V = 64 \mu L$ ), donde  $C_M$  es la concentración molar,  $M$  es la molaridad y  $V$  es el volumen de la disolución. De igual forma se utilizó amoníaco en solución acuosa o hidróxido de amonio ( $NH_4OH$ ,  $C_{p/p} = 30\%$  p/p como  $NH_3$ ,  $V = 100 \mu L$ ).

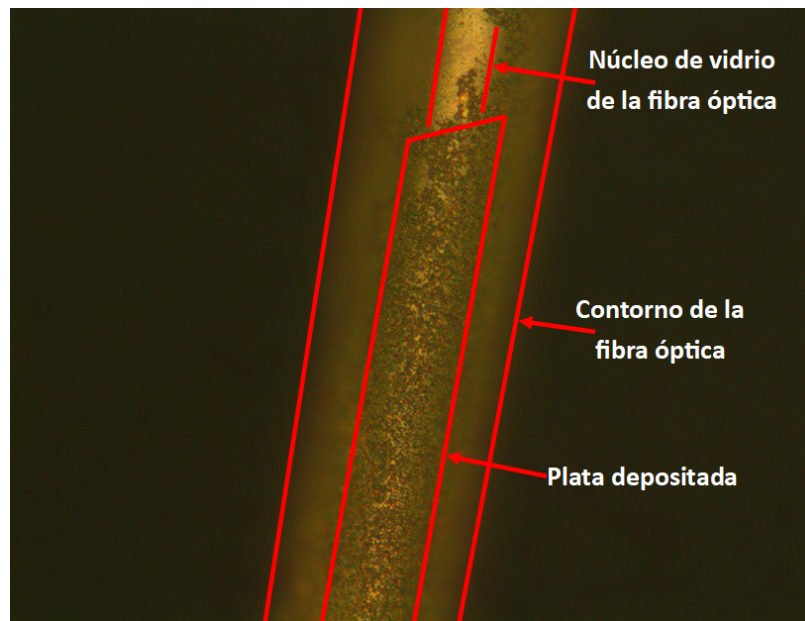
Usando soluciones frescas y un vaso de precipitado de 5 ml (Kimax), el nitrato de plata e hidróxido de potasio fueron agitados y mezclados usando un vórtex hasta observar un precipitado marrón, mostrado en la figura 3.3, seguidamente se agregó el amoníaco y se agitó la mezcla nuevamente hasta la desaparición del precipitado. Finalmente, se colocó la punta de la fibra en la mezcla antes de agregar la dextrosa para garantizar el depósito de la plata en esta y luego de su agregación se agitó de nuevo la mezcla con el vórtex.

La punta de la fibra se dejó sumergida por 15 minutos, tras lo cual se retiró y dejó secar por otros 15 minutos. El depósito de la película reflejante de plata se muestra a continuación en la figura 3.3:

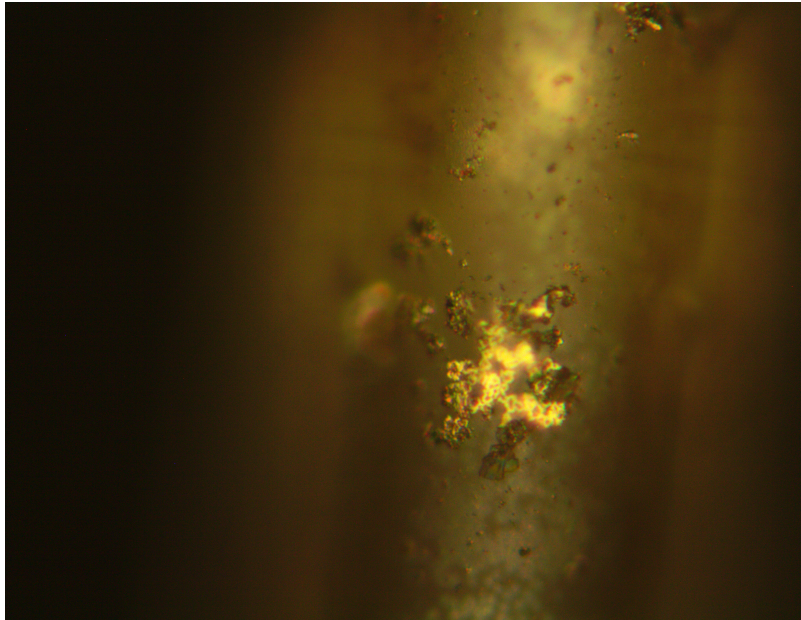


**Figura 3.3:** Arreglo para el depósito de la plata en la punta de la fibra.

Se presentan fotografías de la película depositada de plata adquiridas por medio de un microscopio óptico Oxion Inverso Euromex en las **figuras 3.4 y 3.5:**



**Figura 3.4:** Vista 20x con microscopio óptico Oxion Inverso Euromex de la película reflejante de plata depositada en una fibra.



**Figura 3.5:** Vista 50x con microscopio óptico Oxion Inverso Euromex de la película reflejante de plata depositada en una fibra.

### 3.1.3. Propiedades y depósito de las películas sensibles

Los materiales utilizados para la detección de acetona y algunas de sus propiedades se enlistan a continuación:

■ Polidimetilsiloxano (PDMS):

1. Fórmula química:  $(\text{H}_3\text{C})_3\text{SiO}[\text{Si}(\text{CH}_3)_2\text{O}]_n\text{Si}(\text{CH}_3)_3$ .
2. Es una silicona consistente en una estructura de siloxano con grupos metil. Se ha mostrado que tiene la capacidad de cambiar su índice de refracción al interactuar con vapores orgánicos tales como acetona.
3. Esencialmente es no irritante y no tóxico.
4. La retención de compuestos polares da como resultado la disolución en lugar de la adsorción.
5. Es más inerte respecto a compuestos polares (menos reactivo) que otros sorbentes (Tenax TA, Chromosorb 101, Carbotrap 300).
6. Es selectivo respecto a ciertos COV's (retiene COV's polares).
7. No introduce ni absorbe residuos adicionales o agua en la concentración del analito (acetona).
8. Su momento dipolar neto es de  $0.6 - 0.9 D$  [10, 41, 42, 43, 44].

■ Polimetilmetacrilato (PMMA):

1. Fórmula química:  $(\text{C}_5\text{O}_2\text{H}_8)_n$ .
2. Es un polímero orgánico amorfo que pertenece a la familia de los acrilatos.
3. Presenta muy buena estabilidad térmica, soportando temperaturas desde  $-70\text{ }^\circ\text{C}$  hasta  $100\text{ }^\circ\text{C}$ , a partir de la cual cambia por su temperatura de transición vítrea ( $T_g$ ).
4. Presenta un buen grado de compatibilidad con el tejido humano.

5. No se ve afectado por la solución acuosa de la mayoría de los químicos de laboratorio, sin embargo, tiene baja resistencia a hidrocarburos clorados y aromáticos, a ésteres y a cetonas.
6. Se ve atacado fuertemente por la acetona debido a su absorción, resultando en su hinchazón y disolución, lo que cambia su índice de refracción (originalmente de 1.490).
7. Su momento dipolar neto es de  $1.323 - 1.457 D$  [45, 46].

■ Apiezon-T (ApT):

1. Es una grasa a base de hidrocarburos.
2. Se desempeña bien a temperaturas desde  $10\text{ }^{\circ}C$  hasta  $120\text{ }^{\circ}C$ .
3. Su uso reduce la contaminación en las muestras y superficies adyacentes.
4. Proporciona amortiguación adicional entre superficies acopladas, absorbiendo vibraciones.
5. Presenta un gran poder de absorción, particularmente para otras moléculas de hidrocarburos.
6. Es soluble en disolventes de hidrocarburos. No es soluble en alcoholes o cetonas (acetona).
7. Presenta afinidad a alcanos e hidrocarburos [47].

■ Apiezon-L (ApL)

1. Es una grasa a base de hidrocarburos desarrollada específicamente para uso al vacío.
2. Su uso reduce la contaminación en las muestras y superficies adyacentes.
3. Es libre de halógenos y por lo tanto muestra un grado de resistencia a la radiación.
4. Se recomienda su uso a temperatura ambiente.
5. Presenta un gran poder de absorción, particularmente para otras moléculas de hidrocarburos.
6. Es soluble en disolventes de hidrocarburos. No es soluble en alcoholes o en cetonas.
7. Presenta afinidad a alcanos e hidrocarburos [48].

El depósito de las películas sensibles se llevó a cabo empleando el método de la atomización ultrasónica, esto con el fin de lograr una capa fina y uniforme.

El atomizador ultrasónico (como los usados en nebulizadores) se colocó en la parte inferior de un contenedor lleno con agua hasta una altura  $h$ , los materiales de detección son disueltos en el solvente correspondiente y la solución es colocada en un matraz de tres bocas el cual se sitúa directamente sobre el atomizador, lo que resulta en una fina niebla de la solución producida debido a las vibraciones ultrasónicas que le llegan al matraz.

Con un flujo de aire regulado por un rotámetro, la niebla es llevada hacia la fibra a través de una manguera de teflón, al evaporarse el disolvente, el material de detección queda depositado como una película delgada en el lugar deseado. El tamaño de las partículas de la niebla es determinado por la frecuencia de vibración del atomizador [49].

El diagrama esquemático de la atomización ultrasónica se muestra en la **figura 3.6**:

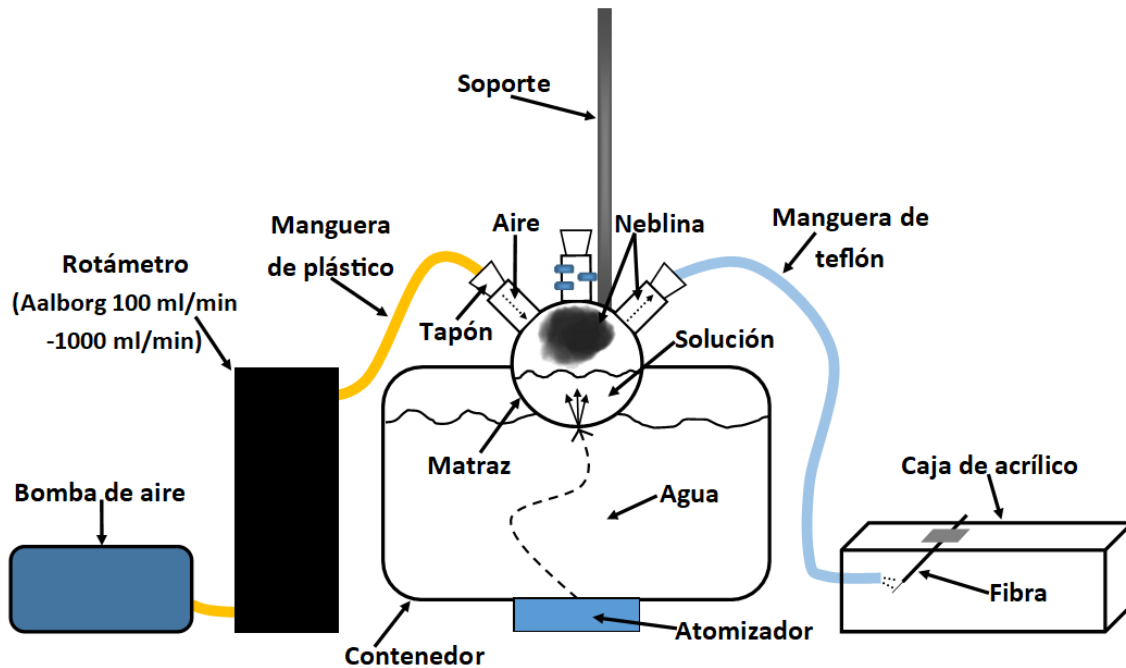


Figura 3.6: Diagrama esquemático del depósito por atomización ultrasónica en la fibra.

El depósito se llevó a cabo utilizando un flujo de  $100 \frac{\text{ml}}{\text{min}}$  y colocando la fibra a una distancia de  $\approx 1.5 \text{ mm}$ , exponiendo solamente la sección  $d$  de la fibra a la niebla. Para el PDMS se realizó una solución usando hexano ( $\text{C}_6\text{H}_{14}$ ) como disolvente con una relación 1 : 1, la fibra fue expuesta a la niebla por 1 minuto dejando al hexano evaporarse por 3 minutos y repitiendo este proceso 3 veces, siendo el tiempo de exposición 3 minutos en total. Para el PMMA, ApT y ApL se realizaron soluciones usando cloroformo ( $\text{CHCl}_3$ ) como disolvente con una relación 1 : 1, la fibra fue expuesta a la niebla por 1 minuto dejando al cloroformo evaporarse por 1 minuto y repitiendo este proceso 3 veces, siendo el tiempo de exposición 3 minutos en total. El arreglo experimental se muestra en las figuras 3.7 y 3.8:

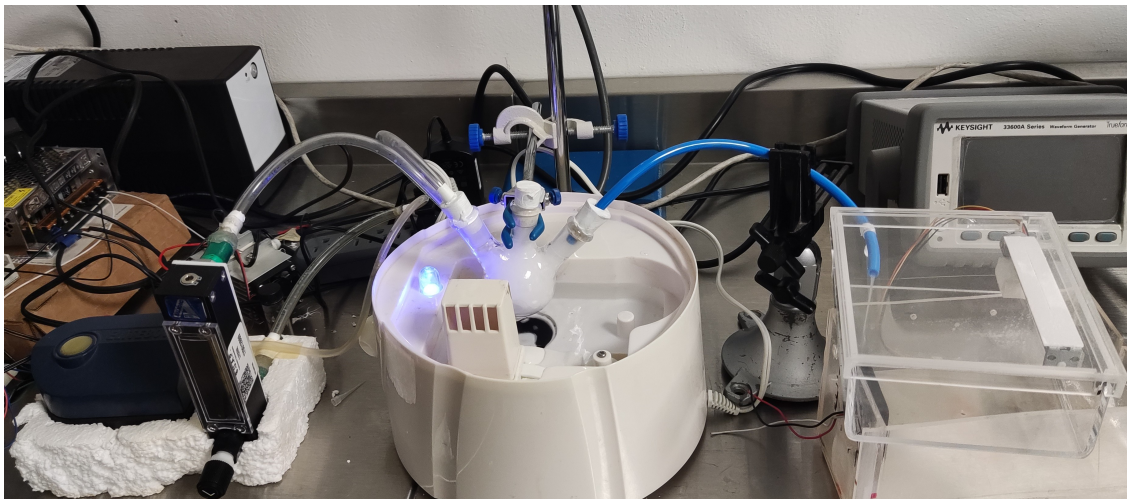


Figura 3.7: Sistema de depósito por atomización ultrasónica.

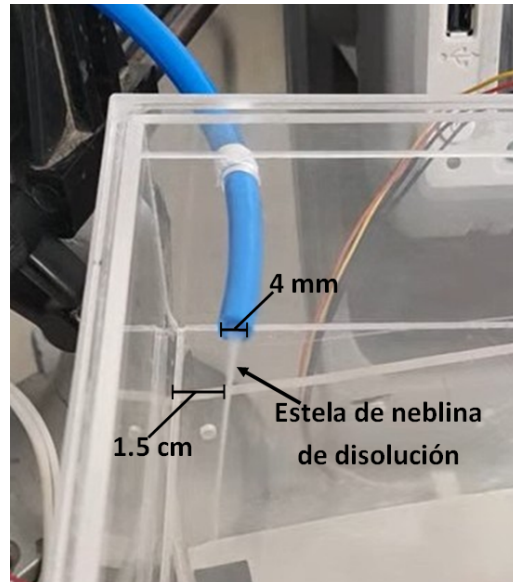


Figura 3.8: Sección de la fibra expuesta a la niebla.

### 3.2. Sistema estático

El sistema estático consiste en una cámara de gas sellada de 1 L de capacidad en la cual se coloca la fibra para ser expuesta a un volumen específico de acetona inyectada por medio de una jeringa microlítica. 1  $\mu\text{L}$  de acetona en su total fue inyectado a lo largo de 110 minutos de medición, este proceso se llevó a cabo por medio de 10 inyecciones, esto es, 0.1  $\mu\text{L}$  de acetona cada 10 minutos, hasta obtener el volumen total descrito.

Por medio de un analizador de espectro óptico (OSA por sus siglas en inglés, AQ6317B, Ando Electric Co., resolución: 2 nm), un diodo superluminiscente (SLD1450S, Thorlabs), un circulador (PICT-1550-S, Oyokoden Lab. Co., LDT.) y una computadora personal (PC), se obtuvieron los espectros de reflexión de cada minuto de medición. De igual forma se empleó un sensor HIH8121 de humedad y temperatura colocado dentro de la cámara para recabar esta información cada segundo de medición. Un diagrama esquemático y foto del sistema se muestran en las figuras 3.9 y 3.10:

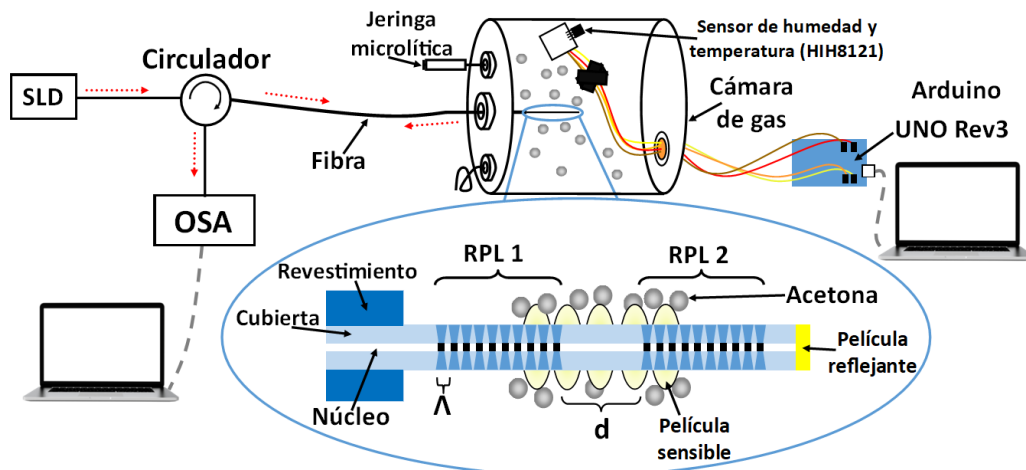


Figura 3.9: Diagrama esquemático del sistema estático empleado.

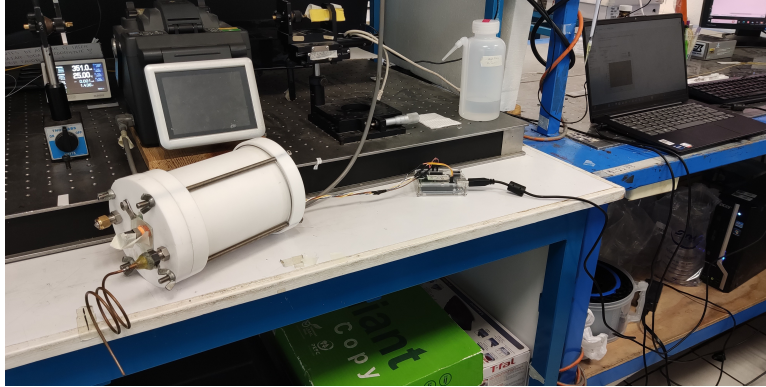


Figura 3.10: Sistema estático de medición de fibras ópticas.

La relación entre el volumen de acetona líquida inyectada y la concentración total en ppm está dada por [50]:

$$C_{\text{ppm}} = \frac{22.4T_a\rho_aV_l}{273M_wV_c} \times 10^3, \quad (3.2.0.1)$$

donde  $T_a$  es la temperatura de la cámara de gas en  $K$ ,  $\rho_a$  la densidad de la acetona en  $\frac{g}{mL}$ ,  $V_l$  el volumen de la acetona líquida inyectada en  $\mu L$ ,  $M_w$  el peso molecular de la acetona en  $\frac{g}{mol}$ ,  $V_c$  el volumen de la cámara de gas en  $L$  y  $22.4 \frac{L}{mol}$  el volumen de un mol de gas a condiciones estándar ( $1 \text{ atm}$  y  $273 \text{ K}$ ). Tomando las siguientes condiciones:  $T_a = 298 \text{ K}$ ,  $\rho_a = 0.79 \frac{g}{mL}$ ,  $V_l = 1 \mu L$ ,  $M_w = 58.08 \frac{g}{mol}$ ,  $V_c = 1 \text{ L}$ , se obtiene que  $1 \mu L$  inyectado corresponde a  $332 \text{ ppm}$ .

### 3.3. Sistema dinámico

El sistema dinámico consiste en una cámara de medición en la cual se coloca la fibra para ser expuesta a flujos cambiantes de aire y acetona controlados por medio de flujómetros. Un diagrama esquemático y fotos del sistema se muestran en las figuras 3.11 y 3.12:

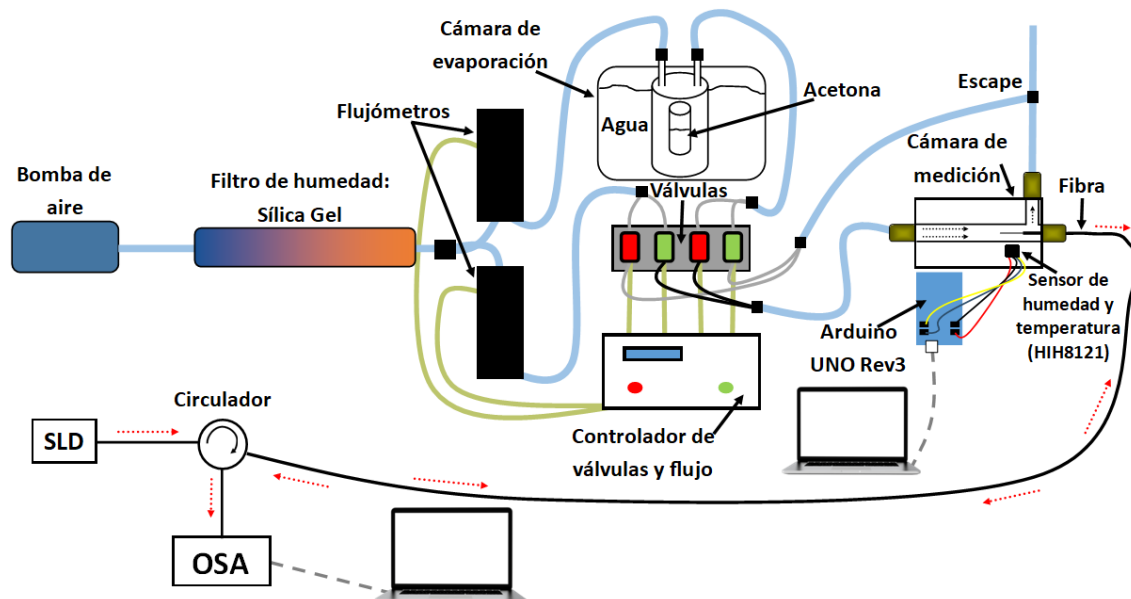
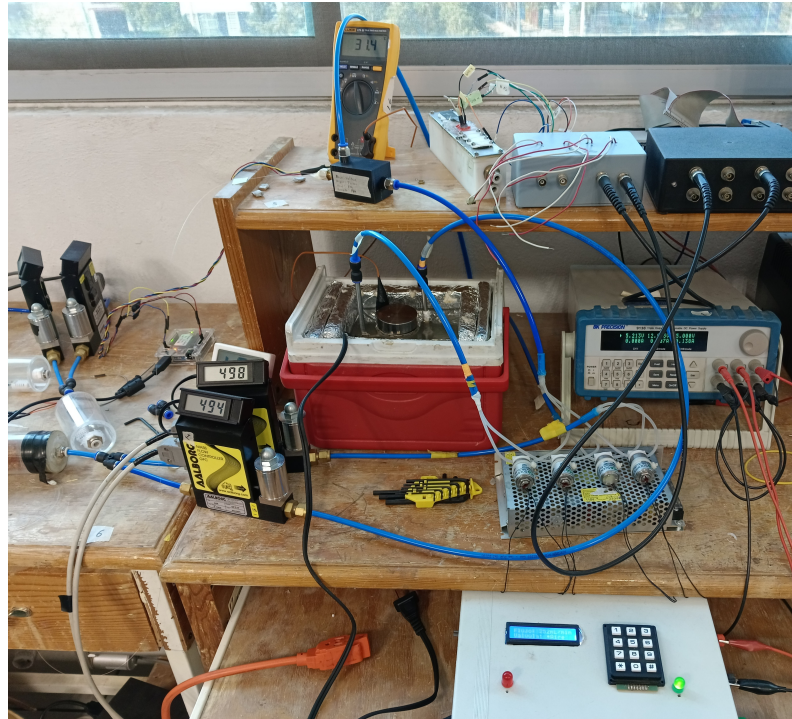
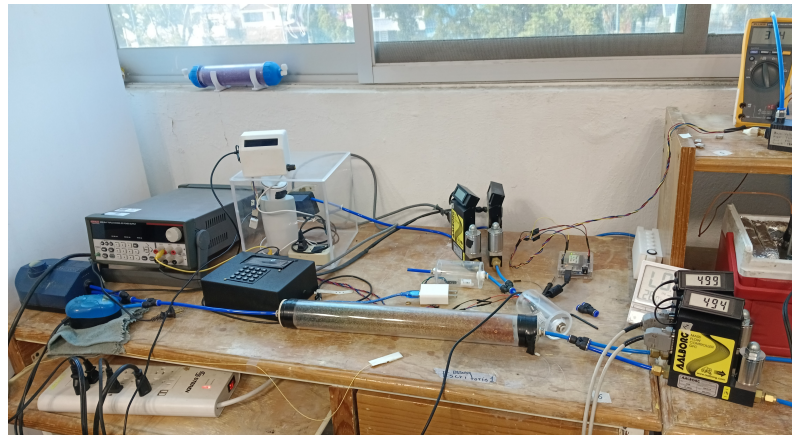


Figura 3.11: Diagrama esquemático del sistema dinámico empleado.



(a)



(b)

**Figura 3.12:** Sistema dinámico: (a) primera parte; (b) segunda parte.

La concentración de acetona en ppm a la que fue expuesta la fibra se calculó por medio de la técnica de peso perdido, la cual consiste en obtener la velocidad de evaporación de la acetona a un volumen y temperatura determinados empleando lo siguiente [51]:

$$C_g = \frac{kD_r \times 10^3}{F} \text{ ppm}, \quad (3.3.0.1)$$

donde  $D_r$  es la velocidad de evaporación de la acetona,  $k$  es un factor de conversión y  $F$  es la magnitud del flujo utilizado para el transporte de la acetona, dadas por:

$$D_r = \frac{m \times 10^6}{t}, \quad (3.3.0.2)$$

siendo  $m$  el cambio de masa en gramos y  $t$  el tiempo de evaporación en minutos; y:

$$k = \left( \frac{22.4}{M_w} \right) \left( \frac{273 + T}{273} \right) \left( \frac{p}{760} \right), \quad (3.3.0.3)$$

siendo  $22.4 \frac{g}{mol}$  la masa molar de un mol de gas a condiciones estándar,  $M_w$  el peso molecular de la acetona,  $T$  es la temperatura de la cámara de evaporación en  $^{\circ}C$  y  $p$  es la presión atmosférica en mmHg.

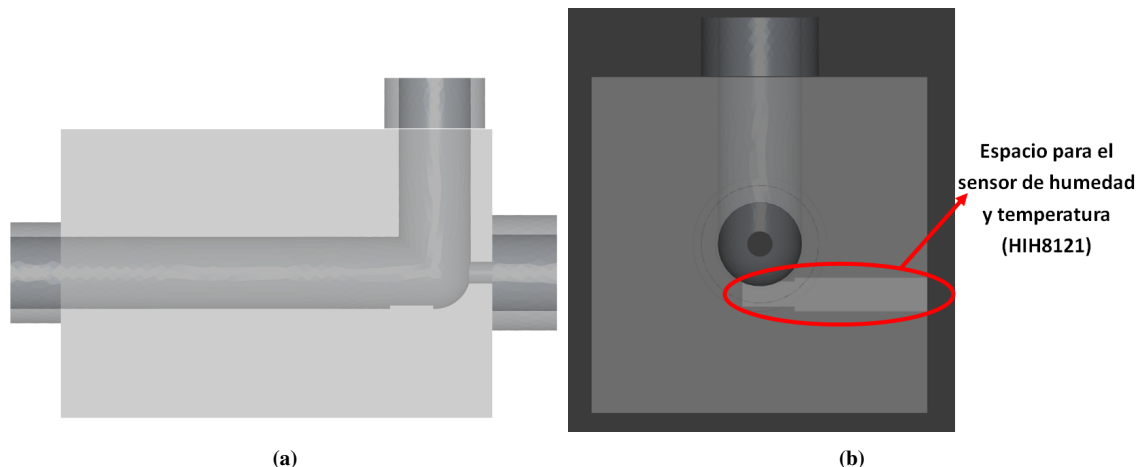
Para esto, se empleó una cámara de evaporación en la que se colocó un vial con un volumen determinado de acetona, controlando la temperatura de la cámara con una resistencia. Se calculó la concentración de acetona para varios flujos a una temperatura de  $30^{\circ}C$ .

Fueron realizadas tres mediciones de prueba, sin embargo, la más representativa y que engloba lo realizado en dos de las mediciones fue la tercera, la cual consistió en exponer la fibra a los flujos presentados en la **tabla 3.1** en su respectivo orden:

**Tabla 3.1:** Flujos empleados en la medición realizada en el sistema dinámico.

Número de flujo	Tiempo de exposición (minutos)	Magnitud del flujo (ml/min)	Concentración de acetona (ppm)
1	5	500	0
2	5	500	2417.73
3	5	400	0
4	5	400	3082.43
5	5	300	0
6	5	300	3995.32
7	5	500	0

Todas las mediciones se realizaron con la cámara de evaporación a una temperatura de  $30^{\circ}C$ . Se obtuvieron los espectros de reflexión de forma continua lo más rápido permitido por el sistema (cada 21.45 segundos aproximadamente) a lo largo de las mediciones. De igual forma se empleó un sensor HIH8121 de humedad y temperatura como en el sistema estático. El modelo de la cámara de medición se muestra en la **figura 3.13**:



**Figura 3.13:** Modelo de la cámara de medición del sistema dinámico desde vista: (a) lateral; (b) frontal.

## 3.4. Análisis de datos

### 3.4.1. Matriz de características

Los espectros de reflexión obtenidos tanto in silico como en el sistema estático y dinámico fueron agrupados en una sola matriz  $X$  llamada matriz de características, en la cual cada renglón corresponde a un espectro obtenido y cada columna a una característica de los espectros:

$$X = \begin{bmatrix} \text{Espec1-Carac1} & \text{Espec1-Carac2} & \dots & \text{Espec1-CaracN} \\ \text{Espec2-Carac1} & \text{Espec2-Carac2} & \dots & \text{Espec2-CaracN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{EspecM-Carac1} & \text{EspecM-Carac2} & \dots & \text{EspecM-CaracN} \end{bmatrix}. \quad (3.4.1.1)$$

En todos los casos, tanto in silico como en el sistema estático y dinámico, los primeros renglones corresponde a los espectros con menor concentración de acetona, mientras que los últimos corresponden a los espectros con mayor concentración de acetona.

### 3.4.2. Estandarización

Los datos obtenidos en el sistema estático e in silico fueron estandarizados, esto es:

$$X_{\text{std}} = \frac{X - \text{promedio}(X)}{\text{desviación estándar}(X)} \rightarrow X_{\text{std}_{ij}} = \frac{X_{ij} - \mu_j}{s_j}, \quad (3.4.2.1)$$

donde ( $i = 1, 2, \dots$ , m-ésima Medición;  $j = 1, 2, \dots$ , n-ésima Característica) y el promedio  $\mu$  y la desviación estándar  $s$  se obtienen sobre cada columna de  $X$  (resultando en vectores renglón del promedio y desviación estándar):

$$\mu_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{ij}, \quad (3.4.2.2)$$

$$s_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (X_{ij} - \mu_j)^2}{m - 1}}. \quad (3.4.2.3)$$

Primero a todos los renglones de  $X$  se le resta la característica correspondiente del renglón promedio y luego a todos los renglones resultantes se les divide entre la característica correspondiente del renglón de la desviación estándar.

### 3.4.3. Análisis de Componentes Principales (PCA)

El análisis de componentes principales (PCA por sus siglas en inglés) es un método de análisis multivariable que se ocupa de explicar la estructura de varianza-covarianza de un conjunto de variables a través de unas pocas combinaciones lineales de estas variables. Sus objetivos generales son la reducción de datos y su interpretación.

Si se tiene un conjunto  $p$  de variables, a menudo es posible explicar gran parte de la variabilidad total del sistema por medio de un pequeño número de componentes principales, esto es, hay casi la misma información en estas componentes que en las variables originales. Este análisis permite revelar relaciones e interpretaciones ordinariamente ocultas.

Las componentes principales son combinaciones lineales particulares de las variables. Estas combinaciones lineales representan la selección de un nuevo sistema coordenado, en el cual los nuevos ejes representan las direcciones con variabilidad máxima y proporcionan una descripción más simple de la estructura de

covarianza [52].

Para aplicar este método a la matriz  $X$ , primero se calcula su matriz de covarianza:

$$\text{Cov}(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.4.3.1)$$

donde la covarianza está dada por:

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_{ij} - \mu_j)(X_{ik} - \mu_k), \quad (3.4.3.2)$$

con ( $k = 1, 2, \dots, n$ -ésima Característica). Después, se calculan los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de covarianza. Finalmente, se obtienen las componentes principales al multiplicar la matrix  $X$  por la matriz de eigenvectores y con los eigenvalores es posible calcular el porcentaje de varianza que hay en cada componente principal.

De esta forma, se obtiene una nueva matriz en la cual cada renglón corresponde a un espectro medido y cada columna a un componente principal (ordenados de mayor a menor porcentaje de varianza).

### 3.4.4. Regresión de Componentes Principales (PCR)

El análisis de regresión es la metodología estadística para predecir valores de una o más variables de respuesta (dependientes) a partir de una colección de valores de variables predictoras (independientes). Uno de los objetivos del análisis de regresión es desarrollar una ecuación que permita predecir la respuesta para valores dados de las variables predictoras.

Una forma de efectuar el análisis de regresión es por medio de la estimación de mínimos cuadrados, en la cual se escogen valores de prueba  $b$  para los coeficientes de regresión  $\beta$  de tal forma que se minimice  $S(b) = \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 z_{j1} - \cdots - b_r z_{jr})^2$ , donde  $y_j$  son los valores predichos propuestos o experimentales de las variables de respuesta y  $z_{jr}$  son los valores conocidos de las variables predictoras. El modelo será de la forma:

$$\hat{y} = Z\hat{\beta} + \hat{\varepsilon}, \quad (3.4.4.1)$$

donde  $\hat{y}$  es el vector columna de valores predichos estimados,  $Z$  es la matriz de valores de las variables predictoras,  $\hat{\beta}$  es el vector columna de valores estimados de  $\beta$  y  $\hat{\varepsilon}$  es el vector columna de valores residuales estimados [52].

De esta forma, para realizar la regresión sobre los valores previamente obtenidos con PCA, se propone:

$$\hat{y}_{\text{PCA}} = \text{PCA} \cdot W_{\text{PCA}} = w_0 + w_1 \cdot \text{PC1} + w_2 \cdot \text{PC2} + \cdots + w_n \cdot \text{PCn}, \quad (3.4.4.2)$$

donde PCA es la matriz de componentes principales a la cual se le adjunta una primera columna de unos y  $W_{\text{PCA}}$  es el vector columna de los coeficientes de regresión estimados.

Una forma de medir la calidad del ajuste del modelo es por medio del coeficiente de determinación, el cual da la proporción de la variación total en los valores predichos explicada por las variables predictoras, mientras más cercano sea a 1 mejor es el ajuste del modelo:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \bar{y})^2}{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}, \quad (3.4.4.3)$$

donde  $\hat{y}_j$  son los valores predichos estimados,  $y_j$  son los valores predichos experimentales y  $\bar{y}$  es el promedio de los valores predichos experimentales [52].

Para el sistema estático se propuso emplear solamente las componentes principales de los espectros obtenidos

a un tiempo específico en la medición (por ejemplo, a los 10 minutos después de cada inyección) como valores predictores y la concentración total de acetona inyectada hasta ese tiempo como valores predichos experimentales. Para el sistema dinámico se propuso emplear toda la matriz de PCA como valores predictores y las concentraciones de acetona utilizadas en cada momento como valores predichos experimentales.

### 3.4.5. Proyección a Estructuras Latentes (PLS)

El método de mínimos cuadrados parciales o proyección a estructuras latentes (PLS por sus siglas en inglés) está relacionado con el PCA, de tal forma que el sistema o proceso estudiado depende de un número pequeño de variables o estructuras latentes las cuales son estimadas como combinaciones lineales de las variables observadas. Se establece una representación de la matriz de características  $X$  en términos de las estructuras latentes:

$$X = TP^T + E, \quad (3.4.5.1)$$

donde  $T$  es la matriz de 'resultados' o 'scores' (columnas correspondientes a las estructuras latentes obtenidas como combinaciones lineales de las variables en  $X$ ),  $P^T$  es la matriz transpuesta de las 'cargas' o 'loadings' (renglones correspondientes a coeficientes que definen una combinación lineal de estructuras latentes que aproximan las variables predictoras originales) y  $E$  es la matriz residual. Por lo tanto, la matriz  $X$  queda descompuesta en un número de estructuras latentes, cada una caracterizada por un vector  $t$  y  $p^T$ .

De esta forma, la matriz  $X$  se puede representar por medio de la matriz  $T$  que tiene un número menor de columnas, de modo que las primeras estructuras latentes (columnas  $t_1, t_2, \dots$ ) son las más importantes para explicar a la variable de respuesta  $y$ . Otros vectores calculados durante la etapa de calibración (o cálculo de las estructuras latentes) son  $w^T$  el cual es un vector columna transpuesto de los 'pesos' en el espacio de  $X$  (coeficientes para la determinación de  $T$  a través de la matriz  $X$ ) y  $b$  el cual es un vector columna de las 'sensibilidades' (coeficientes estimados para el modelo de regresión de PLS). El algoritmo para la calibración (nonlinear iterative partial least squares o NIPALS) se muestra en la **tabla 3.2** [53]:

**Tabla 3.2:** Algoritmo empleado para la etapa de calibración de PLS (NIPALS).

<p><math>\mathbf{X}</math> y el vector <math>\mathbf{y}</math> son previamente centrados y escalados a varianza 1</p>	
<p><math>\mathbf{f}_0 = \mathbf{y}; \mathbf{E}_0 = \mathbf{X}</math></p>	
<p>Para la iteración <math>h</math> (con <math>h = 1, 2, \dots, a</math>, donde <math>a</math> es el número de variables latentes):</p>	
<p>(1) <math>\mathbf{w}_h^T = \mathbf{f}_{h-1}^T \mathbf{E}_{h-1} / \mathbf{f}_{h-1}^T \mathbf{f}_{h-1}</math></p>	<p>(5) <math>\mathbf{t}_h = \mathbf{t}_h / \ \mathbf{p}_h^T\ </math></p>
<p>(2) <math>\mathbf{w}_h^T = \mathbf{w}_h^T / \ \mathbf{w}_h^T\ </math> (normalización)</p>	<p>(6) <math>\mathbf{w}_h^T = \mathbf{w}_h^T / \ \mathbf{p}_h^T\ </math></p>
<p>(3) <math>\mathbf{t}_h = \mathbf{E}_{h-1} \mathbf{w}_h / \mathbf{w}_h^T \mathbf{w}_h</math></p>	<p>(7) <math>\mathbf{p}_h^T = \mathbf{p}_h^T / \ \mathbf{p}_h^T\ </math> (normalización)</p>
<p>(4) <math>\mathbf{p}_h^T = \mathbf{t}_h^T \mathbf{E}_{h-1} / \mathbf{t}_h^T \mathbf{t}_h</math></p>	<p>(8) <math>b_h = \mathbf{f}_h^T \mathbf{t}_h / \mathbf{t}_h^T \mathbf{t}_h</math></p>
	<p>(9) <math>\mathbf{E}_h = \mathbf{E}_{h-1} - \mathbf{t}_h \mathbf{p}_h^T</math> (Cálculo de los residuales de <math>\mathbf{X}</math>)</p>
	<p>(10) <math>\mathbf{f}_h = \mathbf{f}_{h-1} - b_h \mathbf{t}_h</math> (Cálculo de los residuales de <math>\mathbf{y}</math>)</p>
	<p>(11) <math>h = h + 1</math></p>
	<p>De aquí se vuelve al paso (1)</p>

Se observa que los cálculos realizados son parte de un proceso iterativo en el que participan los valores predictores, los valores predichos experimentales y los residuales, de tal forma que con cada iteración se tenga menos información.

### 3.4.6. Regresión de Proyección a Estructuras Latentes (PLSR)

Del cuadro anterior se tiene que el cálculo de las estructuras latentes y de los coeficientes estimados para el modelo de regresión se realiza utilizando la información uno del otro, por lo que, se obtiene un proceso más robusto estableciendo una relación entre estos datos. Aunque esto implica que se debe proporcionar la misma cantidad de valores predictores y de valores predichos experimentales para obtener las estructuras latentes (si se quiere calcular respecto a la concentración inyectada de acetona en el sistema estático se deben de escoger espectros obtenidos a un tiempo específico como se hace en PCR).

Una vez obtenida la matriz  $T$  de estructuras latentes, se le aplica el mismo análisis de regresión que en PCR, esto con el fin de obtener coeficientes de regresión estimados equivalentes y poder comparar ambos métodos:

$$\hat{y}_{\text{PLS}} = \text{PLS} \cdot W_{\text{PLS}} = w_0 + w_1 \cdot \text{LSC1} + w_2 \cdot \text{LSC2} + \dots + w_n \cdot \text{LSCn}, \quad (3.4.6.1)$$

donde LSC son las estructuras latentes (columnas de la matriz PLS, a esta se le adjunta una primera columna de unos). Los datos usados para esto se escogieron bajo el mismo criterio que los de PCR.

### 3.4.7. LOD y sensibilidad del sensor

Para evaluar la respuesta de los sensores se calculó su LOD y la sensibilidad. El LOD se define como el valor más pequeño (en ppm) que se puede medir con el sensor de forma confiable y se calcula por medio del error cuadrático medio entre los valores predichos experimentales y los valores predichos estimados:

$$\text{LOD ppm} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{(\hat{y}_j - y_j)^2}{n}} \text{ ppm}. \quad (3.4.7.1)$$

La sensibilidad se define como la relación que existe entre la variación de la magnitud de entrada (la concentración inyectada de acetona) y la variación de la magnitud de salida (en este caso los valores obtenidos de PC1 y LSC1 para los espectros medidos a los 10 minutos después de cada inyección). Realizando un ajuste lineal entre estos valores de PC1 (LSC1) y los valores inyectados de acetona, se obtiene la sensibilidad del sensor calculando la pendiente de la recta resultante.

### 3.4.8. Validación cruzada

Debido a que tanto PCA como PLS calculan un gran número de componentes (establecido por el número de características que tenga  $X$ ), es necesario saber que cantidad es posible utilizar antes de llegar a un sobreajuste, esto es, obligar a los valores predichos estimados a ajustarse al modelo, lo que puede llevar a resultados erróneos.

Por esta razón se implementa la validación cruzada, siendo una técnica que permite evaluar el modelo obtenido (con datos de entrenamiento) al introducir nueva información (datos de validación) y ver su comportamiento. Para aplicarla se utilizan los renglones impares de la matriz PCA (PLS) como datos de entrenamiento, realizando la regresión, obteniendo los coeficientes de regresión y el LOD de entrenamiento. Se utilizan los renglones pares como datos de validación, empleando los coeficientes obtenidos en el entrenamiento para calcular el LOD de validación.

Al comparar ambos LOD se espera que conforme más componentes se utilicen el de entrenamiento disminuya mientras que el de validación aumente, cuando esto suceda se tendrá un sobreajuste y ya no será factible emplear más componentes.

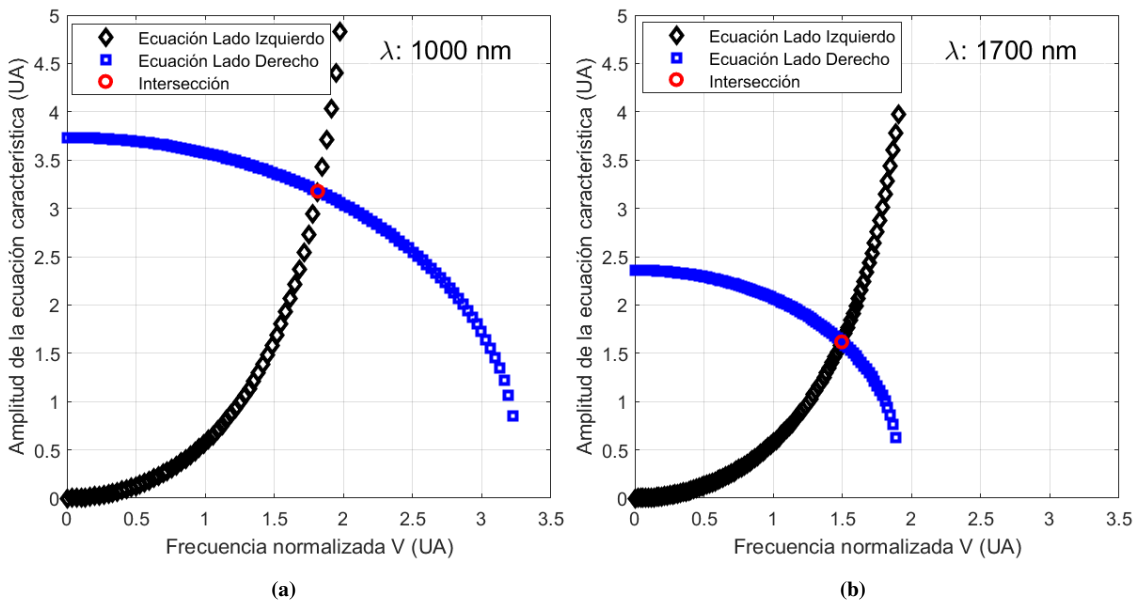
# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Desarrollo in silico del sensor MZI de doble paso

#### 4.1.1. Solución de las relaciones de dispersión

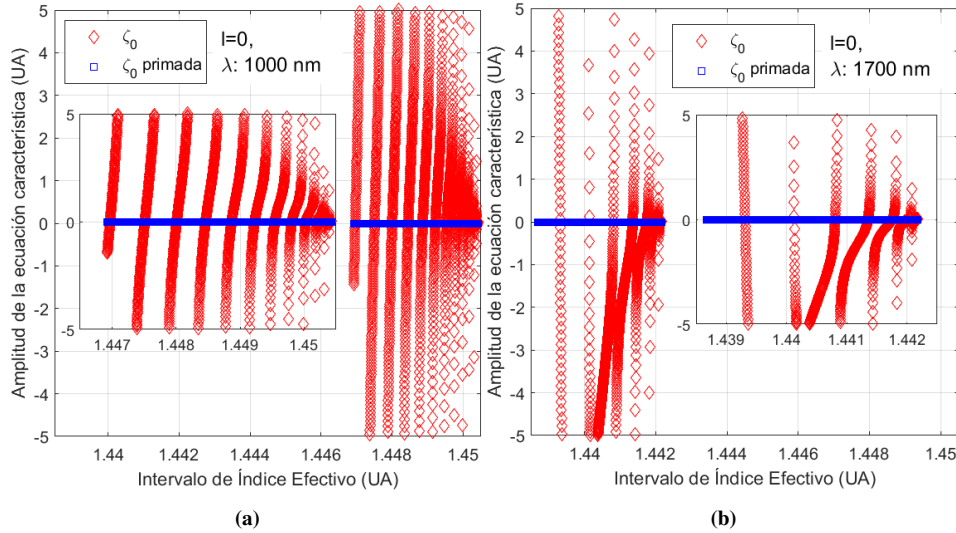
La solución de la relación de dispersión dada por la **ecuación 2.2.0.2** calculada para una longitud de onda de 1000 nm y 1700 nm se presenta en las **figuras 4.1a** y **4.1b**, respectivamente:



**Figura 4.1:** Solución de la ecuación característica en el núcleo a longitud de onda: (a) 1000 nm; (b) 1700 nm.

En la **figura 4.1** se muestra para el núcleo la intersección de la relación de Bessel de primer tipo (lado izquierdo) y la relación de Bessel modificada de segundo tipo (lado derecho), esta describe la propagación de la luz en el núcleo y permite obtener el índice de refracción efectivo del modo fundamental  $LP_{01}$  dependiente de la longitud de onda empleada en los cálculos. Para la **figura 4.1a** se tiene un valor de  $V$  de 1.8136 y para la **figura 4.1b** se tiene una  $V$  de 1.4947, mostrando un diferente punto de intersección de las ecuaciones al emplear distintas longitudes de onda, lo que significa tener diferentes valores de índice de refracción efectivo en función de  $\lambda$ .

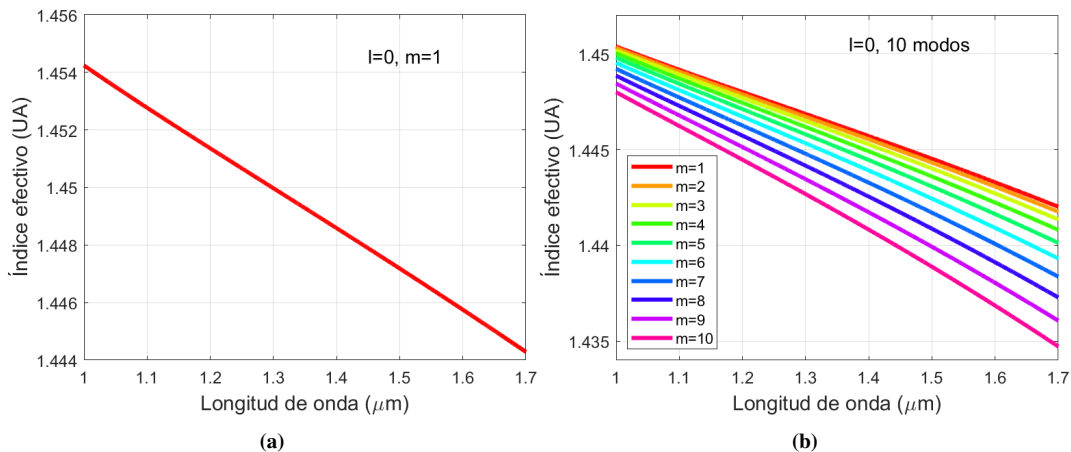
Las soluciones de la relación de dispersión dada por la **ecuación 2.2.0.3** para los modos  $LP_{0m}$  y una longitud de onda de 1000 nm y 1700 nm se presentan en la **figura 4.2a** y **4.2b**, respectivamente:



**Figura 4.2:** Solución de la ecuación característica en la cubierta a longitud de onda: (a) 1000 nm; (b) 1700 nm.

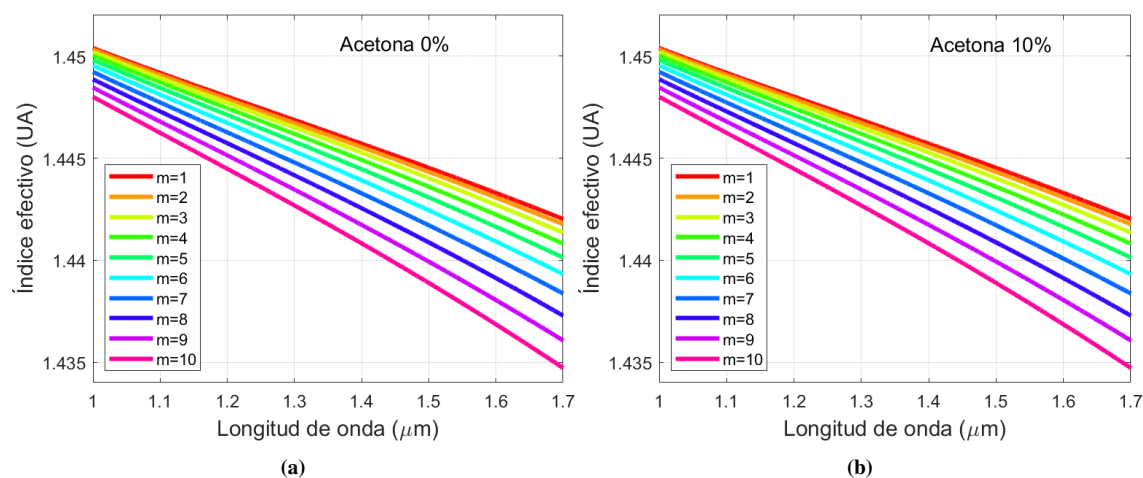
En la **figura 4.2** se tiene para la cubierta que cada intersección es una solución de la relación de dispersión ( $\zeta_0 = \zeta'_0$ , siendo la curva roja  $\zeta_0$  y la curva azul  $\zeta'_0$ ), las cuales contienen la información de la propagación de los modos  $LP_{0m}$  en la cubierta y permite obtener los respectivos índices de refracción efectivos en función de la longitud de onda. Se observa que las intersecciones mostradas en la **figura 4.2a** se encuentran en el lado derecho de la gráfica (presentando un acercamiento de éstas) mientras que en la **figura 4.2b** las intersecciones se encuentran en el lado izquierdo (de igual forma presentando un acercamiento), esto muestra una diferencia en los valores de intersección y por lo tanto diferentes valores de índice de refracción efectivo en función de  $\lambda$  para los distintos modos de cubierta.

Debido a que para cada valor de longitud de onda se obtienen los índices efectivos, estos se calculan en un rango dado, estableciéndolo de  $1 \mu m$  a  $1.7 \mu m$ . A continuación se muestran las curvas de dispersión del modo fundamental  $LP_{01}$  del núcleo y de los primeros diez modos  $LP_{0m}$  de cubierta en las **figuras 4.3a** y **4.3b**, respectivamente, esto es, la variación en los valores de los índices efectivos respecto a la longitud de onda:



**Figura 4.3:** Curvas de dispersión de los índices de refracción efectivos obtenidas para: (a) el núcleo; (b) la cubierta.

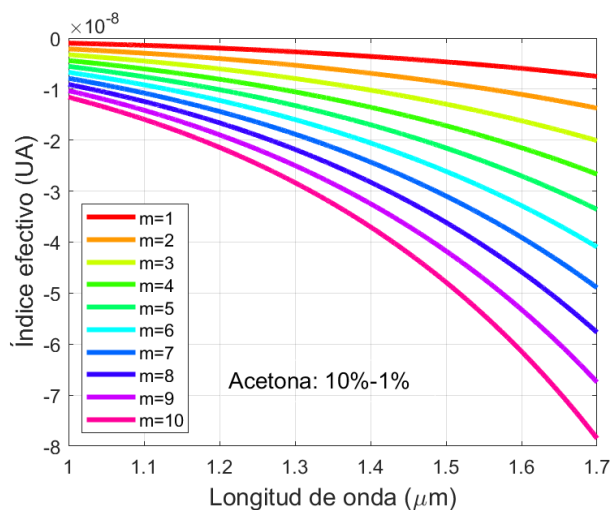
De igual forma se realizó este cálculo para la luz propagada en la cubierta envuelta por la mezcla PDMS-Acetona, mostrando en la **figura 4.4a** las curvas de dispersión de los primeros diez modos  $LP_{0m}$  de la mezcla con 0% de acetona y en la **figura 4.4b** las curvas de dispersión de la mezcla con 10% de acetona:



**Figura 4.4:** Curvas de dispersión de los índices de refracción efectivos obtenidas para: (a) la mezcla PDMS-Acetona al 0%; (b) la mezcla PDMS-Acetona al 10%.

Cada curva de dispersión es diferente y representa el comportamiento del índice efectivo para cada modo propagado según la longitud de onda que se utilice.

A pesar de que las curvas de dispersión de la **figura 4.4** parecen ser iguales entre sí, realizando una diferencia entre los valores obtenidos usando el 10% con los de 1% de mezcla, se obtiene la **figura 4.5**:



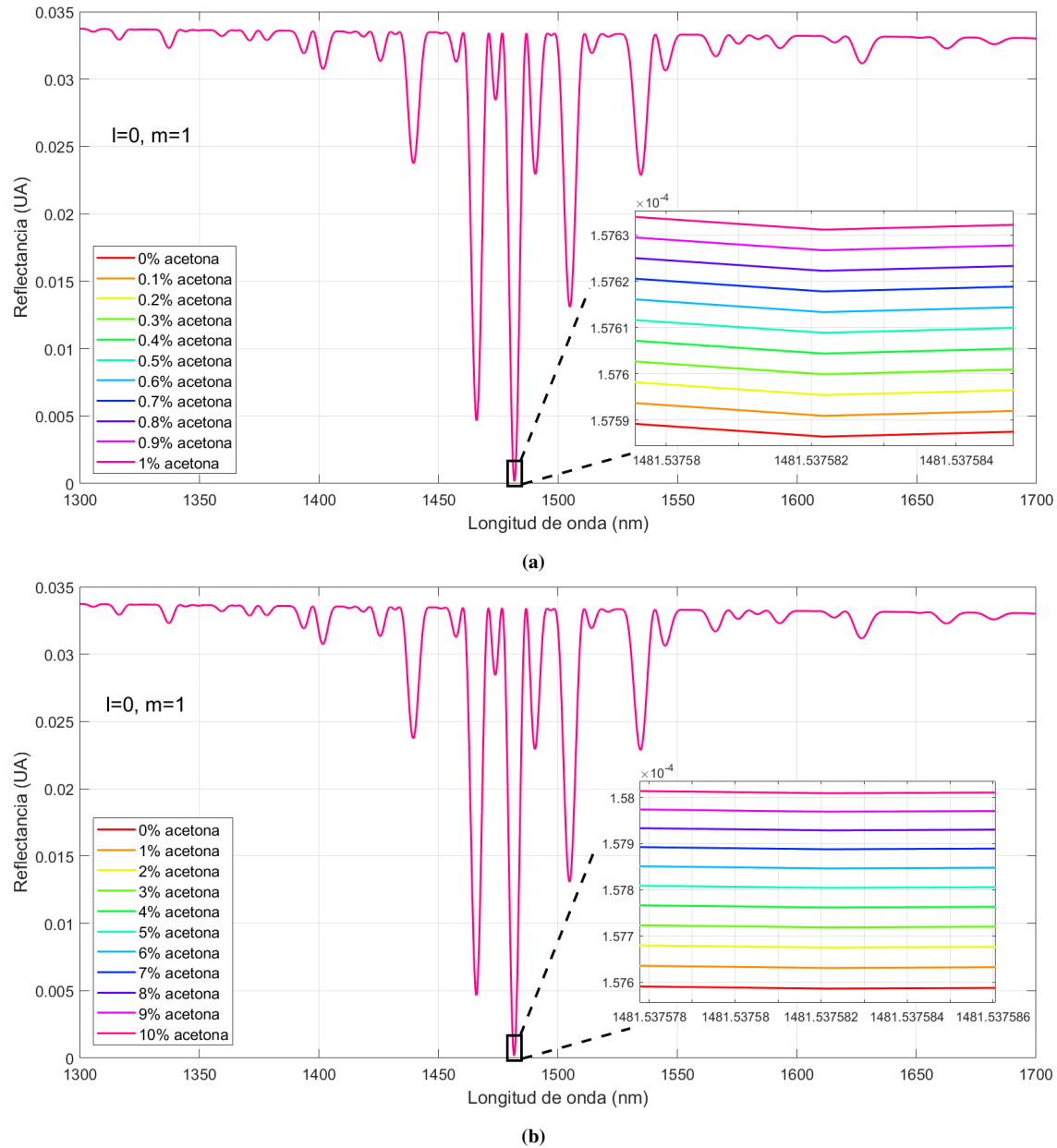
**Figura 4.5:** Curvas de la diferencia entre los índices efectivos obtenidos de la mezcla al 10% y al 1%.

Observando que existen diferencias muy pequeñas pero presentes entre las curvas de dispersión de cada modo propagado en la cubierta con distinto porcentaje de acetona en la mezcla.

Se realizó el cálculo de las curvas de dispersión de los primeros diez modos  $LP_{0m}$  para la luz propagada en la cubierta envuelta por la mezcla PDMS-Acetona, variando el porcentaje de acetona en la mezcla de dos formas: del 0% al 1% en intervalos de 0.1% y del 0% hasta el 10% en intervalos de 1% (dada por la porosidad  $f$  en la **ecuación 2.3.0.1**), y calculando los índices efectivos para cada porcentaje.

### 4.1.2. Espectros de reflexión y reflectancia

Utilizando los índices de refracción efectivos anteriormente calculados para el modo fundamental  $LP_{01}$  acoplado del núcleo a la cubierta, se resuelve la **ecuación** para la reflectancia del MZI de doble paso sin película reflejante 2.1.0.17 considerando una  $d_{ad} = 1\text{ mm}$ , obteniendo la reflectancia in silico para diferentes porcentajes de acetona y agrupando estas en una matriz  $X$ , una matriz del 0% al 1%, mostradas en la **figura** 4.6a, y otra del 0% al 10% mostradas en la **figura** 4.6b:

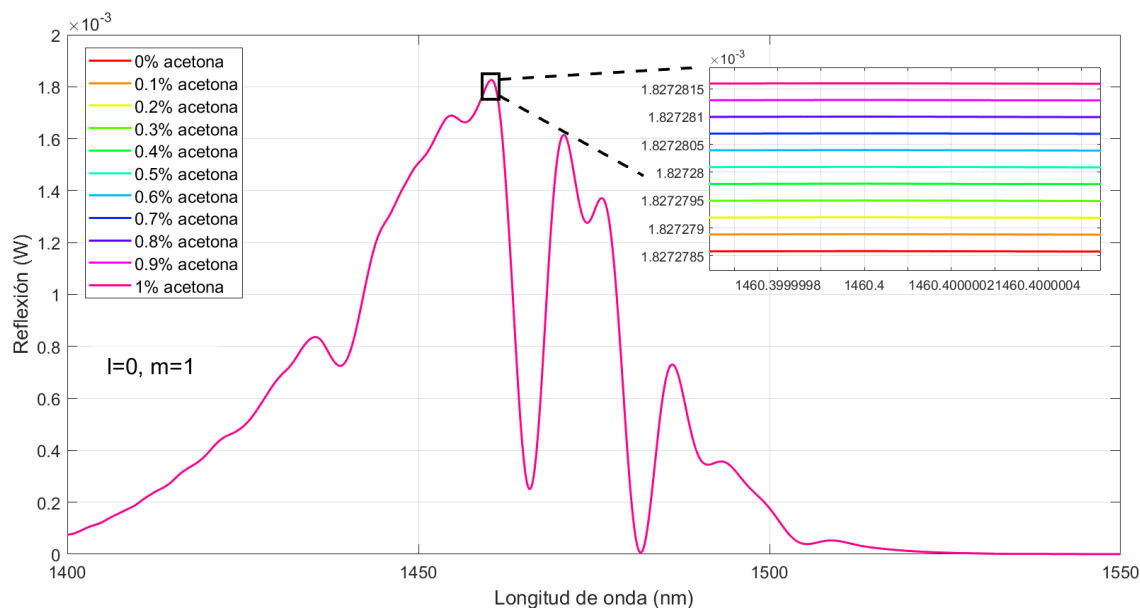


**Figura 4.6:** Espectros de reflectancia de las mezclas: (a) del 0% al 1%; (b) del 0% al 10%.

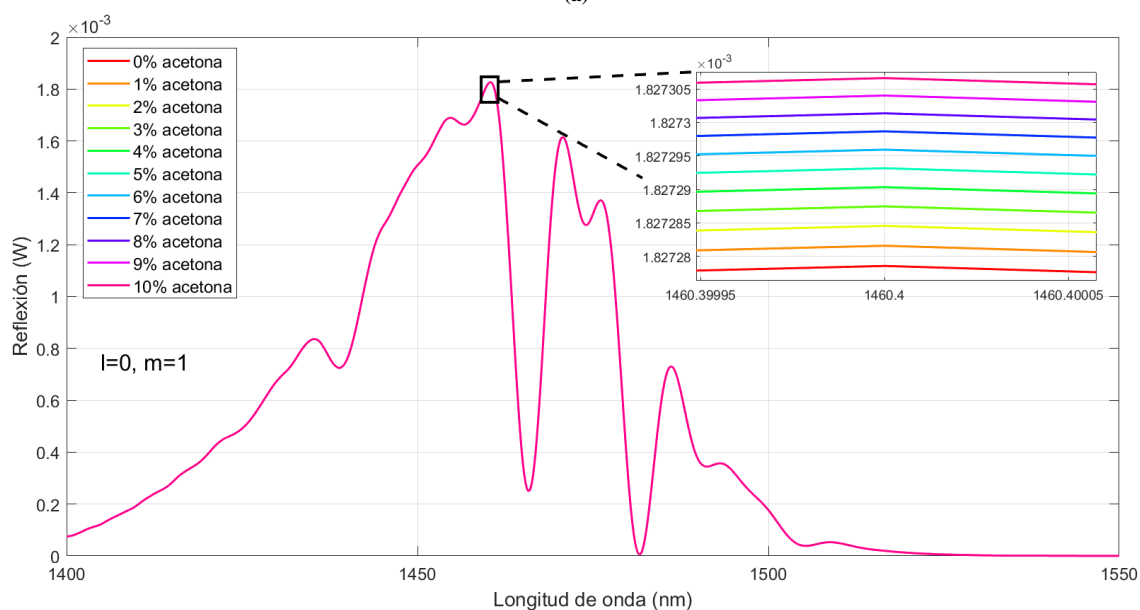
La **figura** 4.6 muestra los espectros de reflectancia in silico obtenidos con 11 porcentajes de acetona en la mezcla calculados en el rango completo de  $1\ \mu\text{m}$  a  $1.7\ \mu\text{m}$  (la **figura** 4.6a del 0% al 1% y la **figura** 4.6b del 0% al 10%), de igual forma se muestra el pico mínimo de la reflectancia, con el fin de observar la

magnitud de los cambios entre cada uno.

Tomando las matrices de reflectancia in silico correspondientes y multiplicándolas por el espectro inicial experimental de la fibra se obtiene la matriz de reflexión in silico por medio de la **ecuación 2.4.0.2** (cada característica se multiplica por su columna correspondiente). Debido a que el rango de operación de los espectros de reflexión experimentales es de  $1400\text{ nm}$  a  $1550\text{ nm}$ , los siguientes espectros de reflexión in silico se obtienen en este rango, habiendo tomado la sección correspondiente de la reflectancia para este cálculo, se muestran los espectros del 0% al 1% en la **figura 4.7a** y del 0% al 10% en la **figura 4.7b**:



(a)



(b)

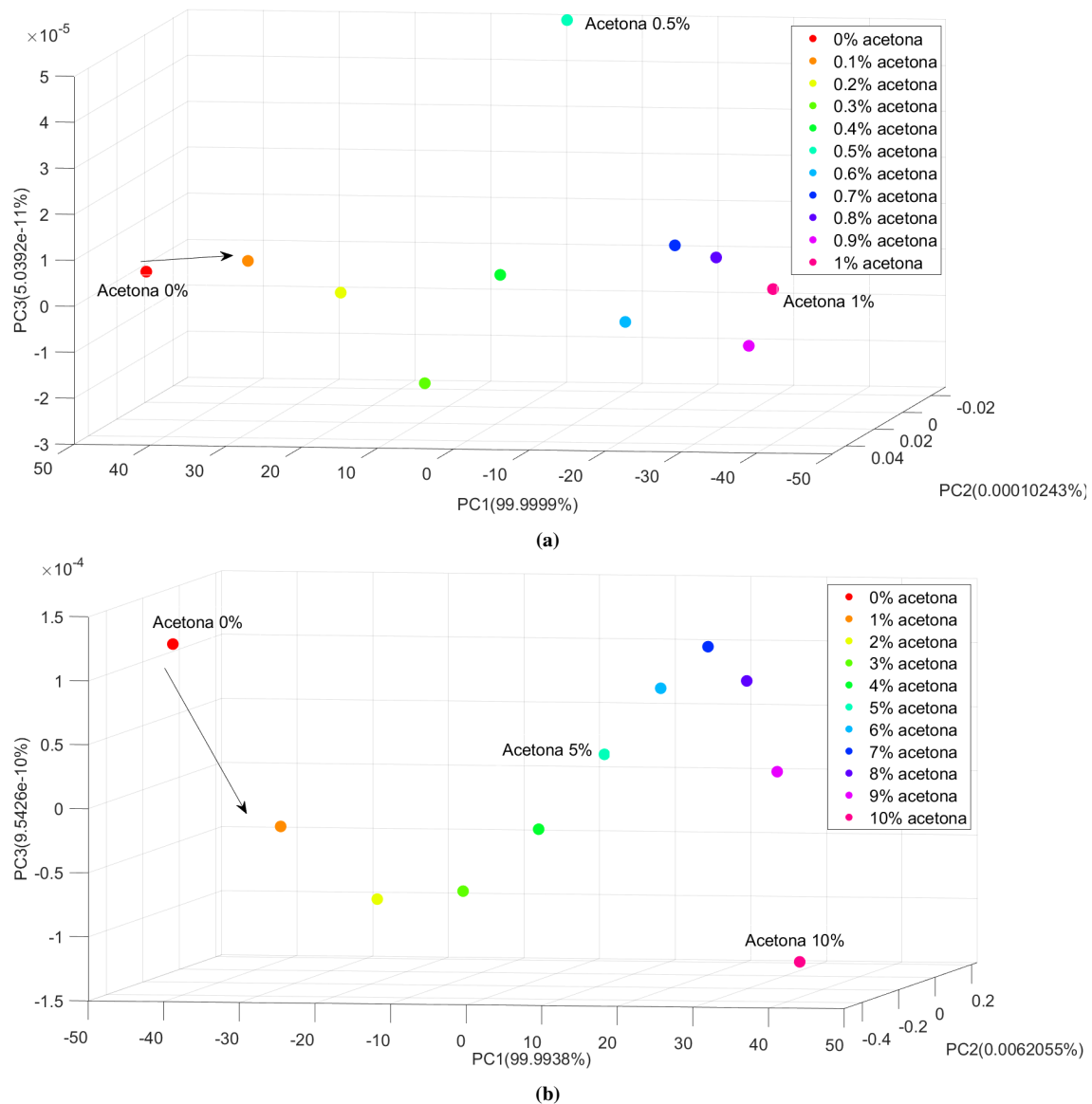
**Figura 4.7:** Espectros de reflexión de las mezclas: (a) del 0% al 1%; (b) del 0% al 10%.

Cada espectro de reflexión se obtiene con un porcentaje diferente de acetona en la mezcla (de la misma

forma que los espectros de reflectancia), mostrando los cambios ocurridos en su pico máximo. Se obtiene que los picos máximos de potencia de los espectros de reflexión presentan variaciones entre sí del orden de  $3 \times 10^{-10}$  W (0.3 nW) en el caso del 1 % y de  $3 \times 10^{-9}$  W (3 nW) en el caso del 10 %, teniendo cambios de mayor magnitud con mayor porcentaje de acetona en la mezcla.

### 4.1.3. PCA

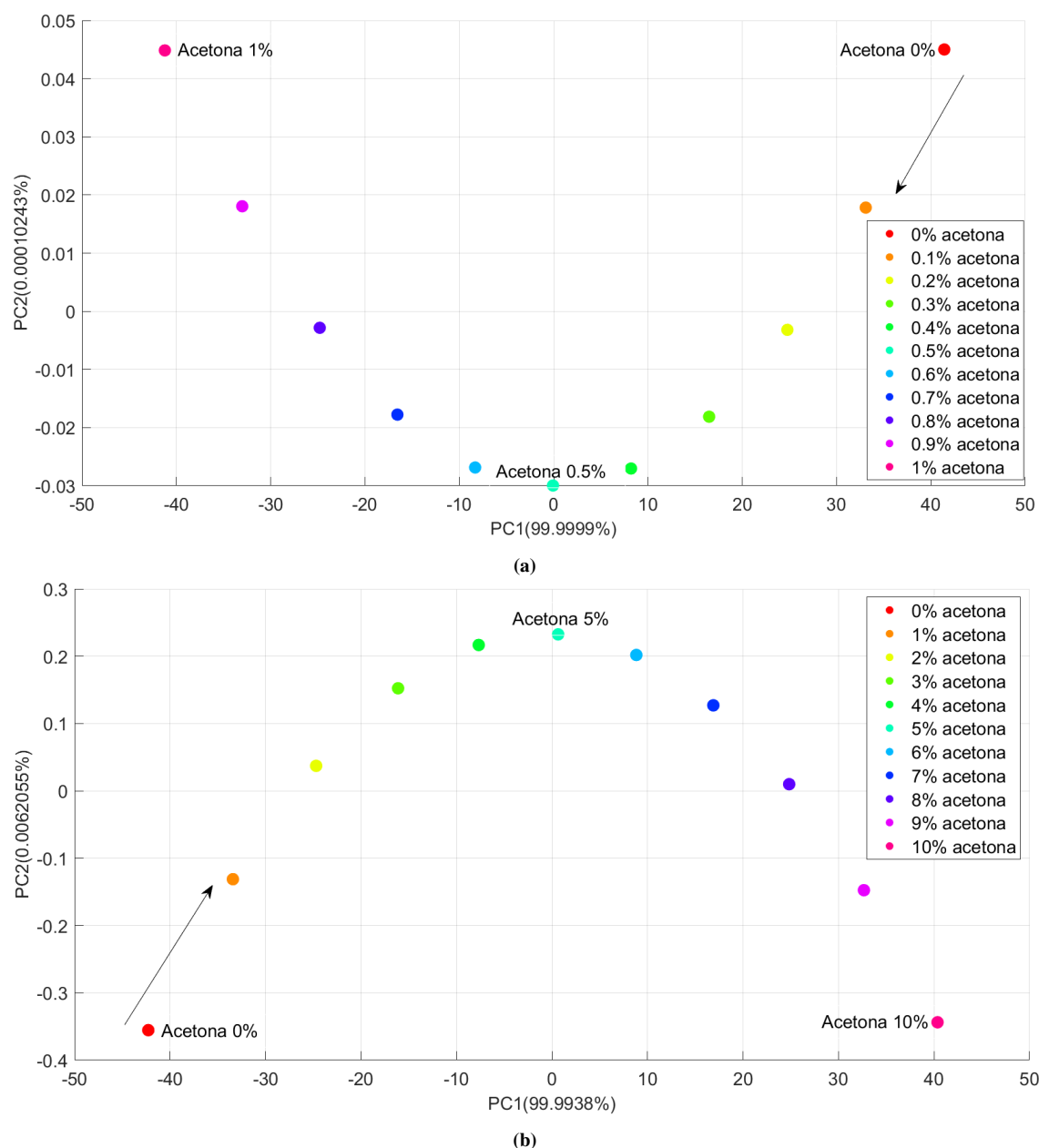
Empleando las matrices  $X$  de los espectros de reflexión in silico conseguidos (donde los renglones corresponden a los espectros y las columnas a las características), estandarizándolas y finalmente aplicándoles PCA, se consiguen y grafican los valores de las primeras tres componentes principales, las cuales contienen el mayor porcentaje de varianza, esto es, la mayor cantidad de información de los espectros, en la **figura 4.8a** se muestran los correspondientes del 0 % al 1 % y en la **figura 4.8b** del 0 % al 10 %:



**Figura 4.8:** PC1 contra PC2 contra PC3 de la mezcla PDMS-Acetona del: (a) 0 % al 1 %; (b) 0 % al 10 %.

Cada punto en el espacio de PCA representa la información contenida en un espectro, de tal forma que se puedan observar similitudes y diferencias de una manera más fácil y completa. Así, los cambios ocurridos en los espectros se manifiestan como desplazamientos que pueden o no mostrar un comportamiento.

También se grafican las primeras dos componentes principales para tener otra perspectiva, en la **figura 4.9a** del 0 % al 1 % y en la **figura 4.9b** del 0 % al 10 %:



**Figura 4.9:** PC1 contra PC2 de la mezcla PDMS-Acetona del: (a) 0 % al 1 %; (b) 0 % al 10 %.

En ambos casos la primera componente tiene casi todo el porcentaje de varianza, a pesar de esto, con mayor porcentaje de acetona disminuye la varianza en esta. La magnitud del desplazamiento de las componentes principales es mayor cuando se tiene más porcentaje de acetona. Las gráficas de las primeras dos componentes (**figura 4.9**) presentan el mismo comportamiento y forma para

bólica pero con diferente orientación, sin embargo, analizando las gráficas de las primeras tres componentes (figura 4.8) se observa que la correspondiente al 10 % exhibe una forma mejor definida.

#### 4.1.4. PLS

Para realizar la calibración de las matrices de estructuras latentes, se utilizan las concentraciones de acetona empleadas en el sistema estático (de 0 a 332 ppm en intervalos de 33.2 ppm) como valores predichos propuestos, asociando cada concentración a su espectro correspondiente, de tal forma que se pudiera visualizar el método PLS como el de PCA. A continuación se grafican los valores de las primeras tres componentes de estructuras latentes, que de igual forma contienen el mayor porcentaje de varianza, mostrando en la figura 4.10a lo correspondiente del 0 % al 1 % y en la figura 4.10b del 0 % al 10 %:

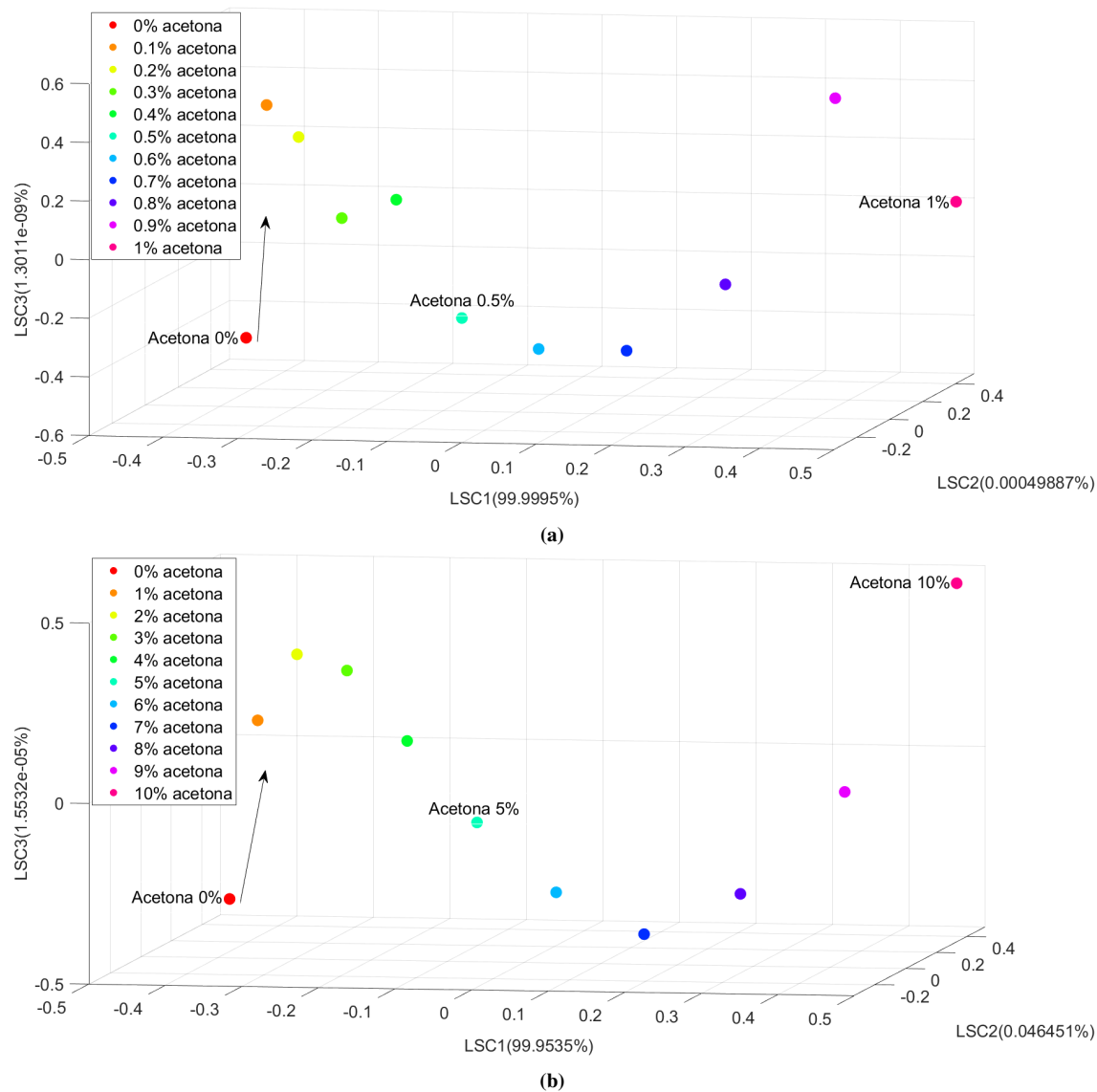
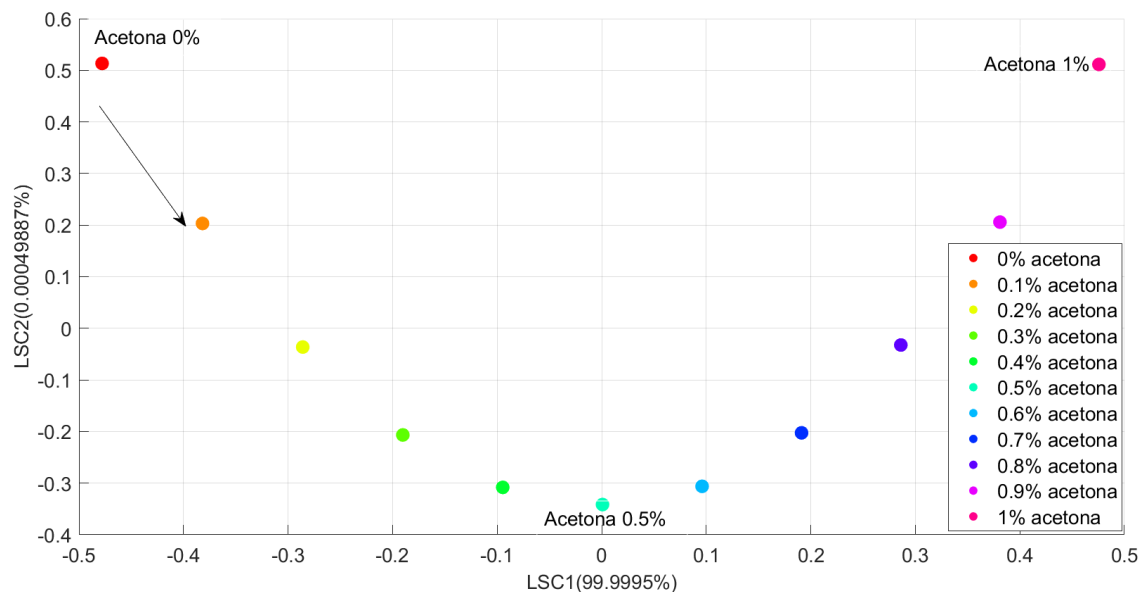


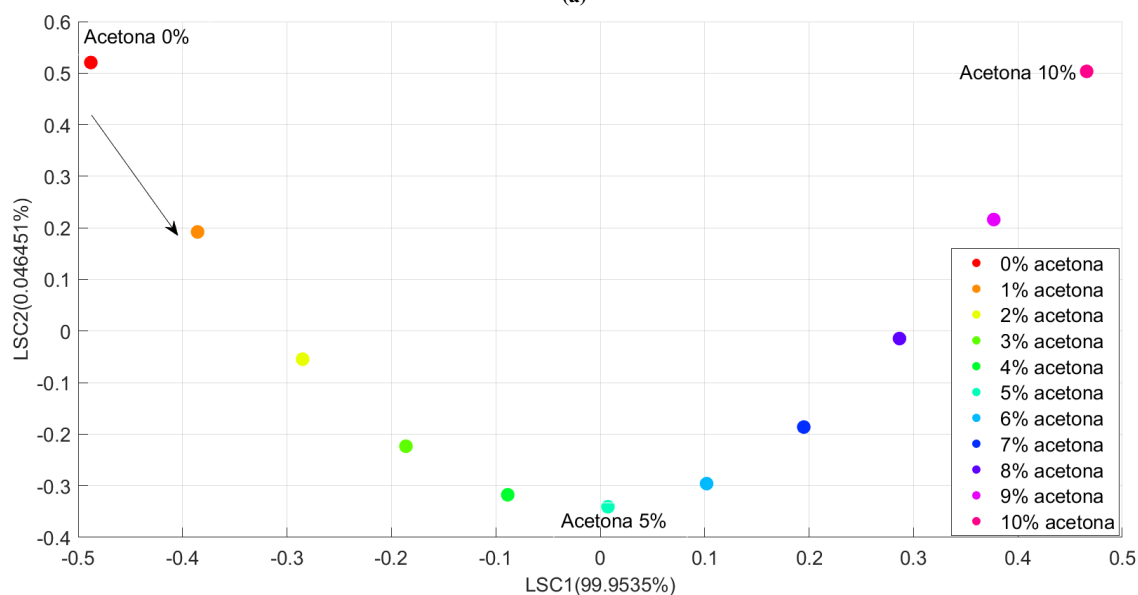
Figura 4.10: LSC1 contra LSC2 contra LSC3 de la mezcla PDMS-Acetona del: (a) 0 % al 1 %; (b) 0 % al 10 %.

Así como con PCA, cada punto en el espacio de PLS representa la información contenida en un espectro, obteniendo resultados bastante similares a los conseguidos con PCA.

También se grafican las primeras dos componentes de estructuras latentes, mostrando en la **figura 4.11a** lo correspondiente del 0 % al 1 % y en la **figura 4.11b** del 0 % al 10 %:



(a)



(b)

**Figura 4.11:** LSC1 contra LSC2 de la mezcla PDMS-Acetona del: (a) 0 % al 1 %; (b) 0 % al 10 %.

Al igual que con PCA, la primera componente de estructuras latentes presenta casi todo el porcentaje de varianza, disminuyendo conforme se aumenta la acetona en la mezcla, y las gráficas de la **figura 4.11** parecen ser idénticas (incluso con la misma orientación) y al comparar las de la **figura 4.10** se observa que la correspondiente al 10 % muestra una curva mejor definida y comportada. Tanto con PCA como con PLS parece exhibirse la misma curva.

Las magnitudes de los desplazamientos de las estructuras latentes son iguales en ambos casos de porcentaje de acetona, en contraste con lo visto con PCA.

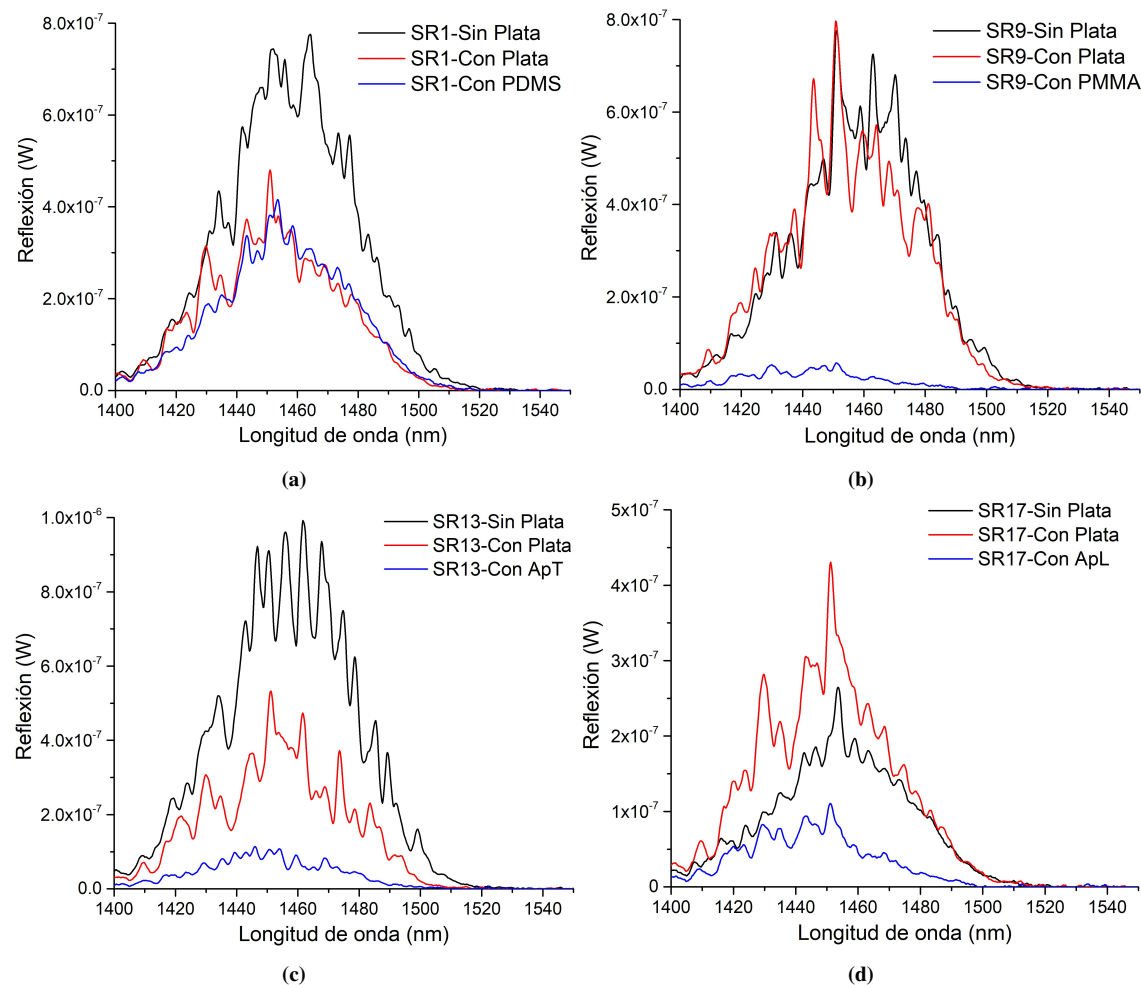
Estos fueron los resultados obtenidos de la simulación del comportamiento de un MZI de doble paso sin película reflejante, permitiendo analizar los cambios sufridos en los espectros de reflexión in silico debido a varios porcentajes de acetona en la mezcla con PDMS, así como el comportamiento exhibido en las componentes principales y estructuras latentes bajo estas circunstancias.

## 4.2. Sistema Estático

Se elaboraron y caracterizaron 20 sensores, 5 con cada película sensible. A continuación se mostrarán los resultados obtenidos para los sensores más representativos, uno por cada película sensible (sensor 1 con PDMS, sensor 9 con PMMA, sensor 13 con ApT y sensor 17 con ApL).

### 4.2.1. Espectros de reflexión

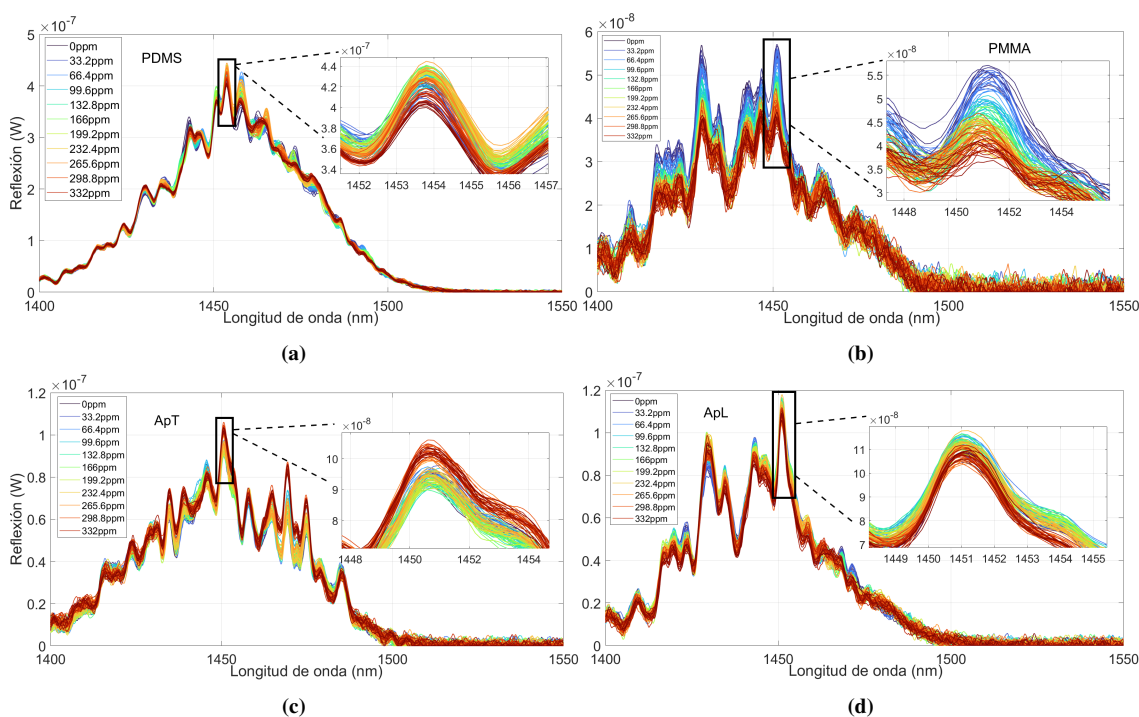
A lo largo del proceso de elaboración de los sensores se obtuvieron los espectros de reflexión en tres etapas: antes de depositar la plata, luego de depositar la plata y luego de depositar la película sensible por atomización. En la **figura 4.12** se muestran estos espectros de reflexión a modo de comparación, del sensor con PDMS (**figura 4.12a**), PMMA (**figura 4.12b**), ApT (**figura 4.12c**) y ApL (**figura 4.12d**):



**Figura 4.12:** Espectros de reflexión de las distintas etapas de los sensores con: (a) PDMS; (b) PMMA; (c) ApT; (d) ApL.

Se puede observar que los espectros originales de los MZI de doble paso son muy diferentes entre sí, lo que indica que el método de grabado y corte de la fibra dificulta la repetibilidad. A pesar de esto, el depósito de la película reflejante de plata arroja espectros más uniformes, lo que podría proporcionar una alternativa para su repetibilidad. Sin embargo, como se puede apreciar en los espectros con película sensible, la potencia decae significativamente, lo que puede ser resultado de la oxidación de la plata (sulfuro de plata), por lo que sería necesario encontrar una alternativa para la película reflejante.

Los espectros mostrados en la **figura 4.13** corresponden a los obtenidos durante cada minuto en las mediciones y son los que se agrupan en las matrices  $X$  para su análisis (de 0 a 332 ppm), presentando los de PDMS en la **figura 4.13a**, PMMA en la **figura 4.13b**, ApT en la **figura 4.13c** y ApL en la **figura 4.13d**:



**Figura 4.13:** Espectros de reflexión durante las mediciones usando los sensores con: (a) PDMS; (b) PMMA; (c) ApT; (d) ApL.

Estos espectros presentan variaciones y corrimientos entre sí atribuidos a la acetona que se pueden apreciar a lo largo del rango de longitud de onda, mostrando un acercamiento a un pico para observar mejor estos cambios, siendo más pronunciados con la película de PMMA, aunque cabe recalcar que el espectro de este sensor exhibe menor potencia que los demás.

Los espectros de los sensores con PMMA y ApL presentan similitudes con los obtenidos in silico. Los métodos tradicionales de análisis espectral solamente se enfocan y estudian el pico que presenta un mayor corrimiento, lo que provoca la pérdida de la información contenida en el resto del espectro, por esta razón se optó por emplear métodos que utilizaran toda la información disponible en los espectros, tales como el PCA y PLS.

#### 4.2.2. PCA

Empleando y agrupando los espectros de reflexión mostrados en la **figura 4.13** en sus correspondientes matrices  $X$ , estandarizándolas y aplicándoles PCA, se obtienen las componentes principales y sus varianzas. En la **figura 4.14** se presentan las gráficas de los valores de las primeras dos componentes principales (que

presentan mayor porcentaje de varianza) para el PDMS (figura 4.14a), PMMA (figura 4.14b), ApT (figura 4.14c) y ApL (figura 4.14d):

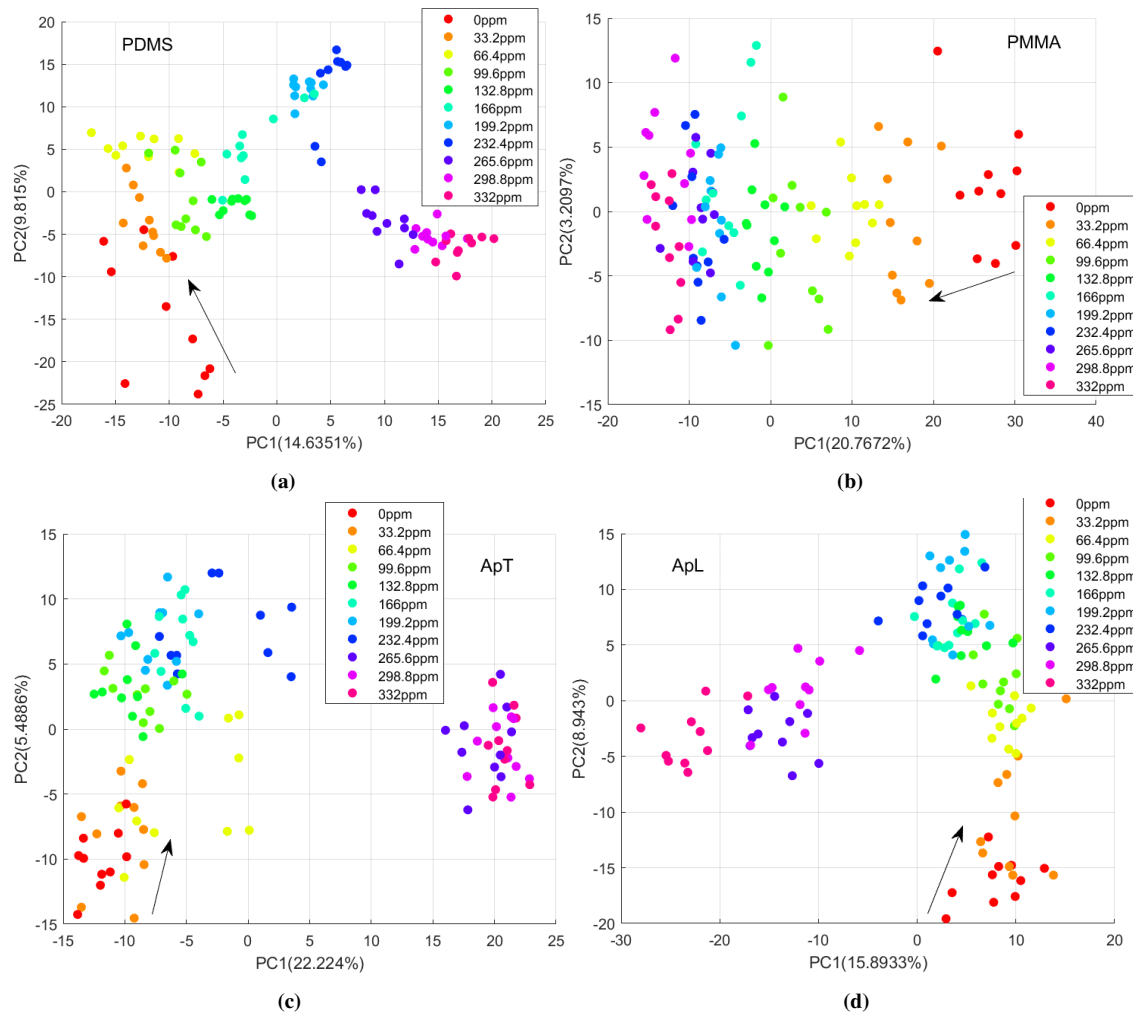


Figura 4.14: PC1 contra PC2 de las mediciones con: (a) PDMS; (b) PMMA; (c) ApT; (d) ApL.

Se muestran de un mismo color los valores correspondientes con la misma concentración de acetona inyectada en total hasta ese momento, logrando observar regiones que contienen una cierta concentración inyectada.

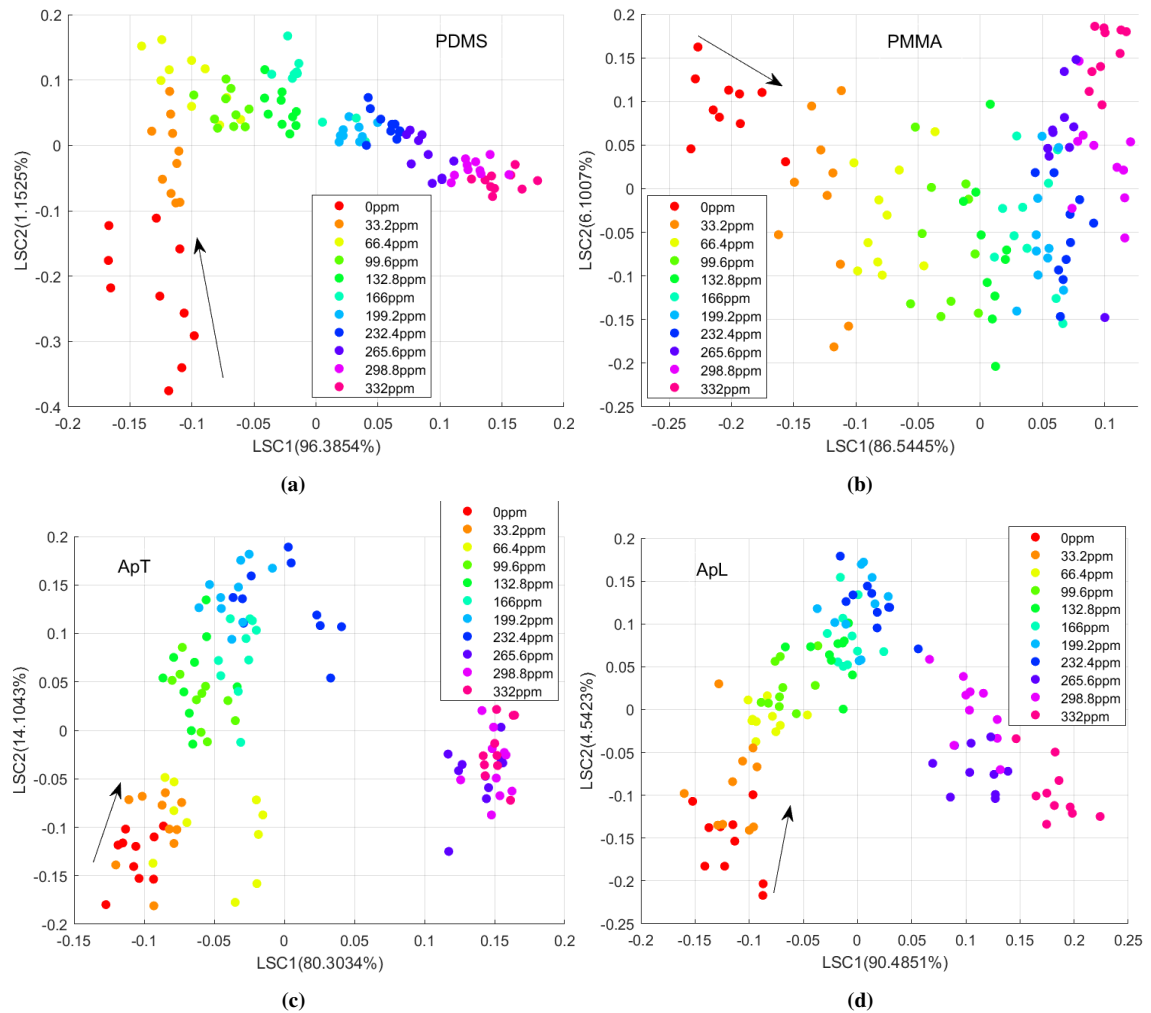
Se pueden observar porcentajes de varianza bajos en las componentes comparándolos con lo obtenido in silico, esto se piensa se debe a que hay poca relación entre los cambios en los espectros.

A pesar de no mostrar un comportamiento bien definido como el de in silico, es posible distinguir las regiones correspondientes a las diferentes concentraciones de acetona, sobre todo para el PDMS y ApL. Las gráficas de PC1 contra PC2 correspondientes a las mediciones con PDMS, ApT y ApL presentan una forma y comportamiento parecidos a los exhibidos in silico.

En el caso del sensor con PMMA se observa una mayor separación entre los puntos y regiones menos definidas, esto se considera que se debe a los cambios grandes y a la poca potencia presentada en sus espectros, sin embargo, se presenta la misma tendencia exhibida en los demás sensores, la cual consiste en que los valores comiencen en un lado de la gráfica y terminen en el lado opuesto.

### 4.2.3. PLS

Para poder graficar las estructuras latentes se emplearon todos los datos de la matriz  $X$  correspondiente, se estandarizó y se realizó la calibración tomando como valores predichos propuestos a la concentración de acetona presente en la cámara de medición en cada momento de la medición, esto con el fin de visualizar el método PLS como el de PCA. En la **figura 4.15** se presentan las gráficas de los valores de las primeras dos componentes de estructuras latentes (que presentan mayor porcentaje de varianza) para el PDMS (**figura 4.15a**), PMMA (**figura 4.15b**), ApT (**figura 4.15c**) y ApL (**figura 4.15d**):



**Figura 4.15:** LSC1 contra LSC2 de las mediciones con: (a) PDMS; (b) PMMA; (c) ApT; (d) ApL.

Así como con PCA, se muestran de un mismo color los valores correspondientes a una misma concentración de acetona inyectada en total, esto con el fin de observar las regiones con diferentes concentraciones. Las formas exhibidas por las estructuras latentes tienen una gran similitud con las de las componentes principales, sin embargo, las estructuras latentes parecen mostrar una pequeña mejora en la separación de las regiones de diferente concentración de acetona. Al igual que con PCA, las gráficas de LSC1 contra LSC2 correspondientes a las mediciones con PDMS, ApT y ApL presentan una forma parecida a la vista in silico. El porcentaje de varianza existente en las primeras dos estructuras latentes es de aproximadamente un 93 %, mientras que para las primeras dos componentes principales es de aproximadamente un 24 %, por lo que se tiene mucha más información en las primeras estructuras latentes que en las primeras componentes

principales.

Cabe recalcar que este análisis se realizó con la matriz  $X$  estandarizada completa con el fin de visualizar las estructuras latentes, mientras que en el análisis posterior se emplearán espectros o valores predictores específicos de la matriz  $X$  estandarizada para realizar las regresiones, obteniendo matrices de estructuras latentes diferentes para ambos casos.

#### 4.2.4. PCR y PLSR

Para realizar la regresión de PCA se emplearon los valores de las componentes principales correspondientes a los espectros obtenidos un tiempo específico en la medición (los renglones de la matriz PCA correspondientes a estos tiempos) como valores predictores, y la concentración de acetona presente en la cámara de medición en los tiempos escogidos como valores predichos propuestos (de 0 ppm a 332 ppm en intervalos de 33.2 ppm). Para la regresión de PLS se emplearon los espectros estandarizados correspondientes a los de los mismos tiempos usados para PCA, realizando la calibración y obtención de la matriz de PLS con estos, usando esta matriz resultante como valores predictores y los mismos valores predichos propuestos que con PCA.

Los siguientes resultados presentados para PCR y PLSR fueron calculados usando los valores predictores obtenidos con los espectros medidos a los 10 minutos después de cada inyección de acetona. En la **tabla 4.1** se muestran los coeficientes de la regresión encontrados con PCR y PLSR usando hasta tres componentes junto a sus respectivos coeficientes de determinación:

**Tabla 4.1:** Coeficientes de la regresión obtenidos por medio de PCR y PLSR, usando hasta tres componentes.

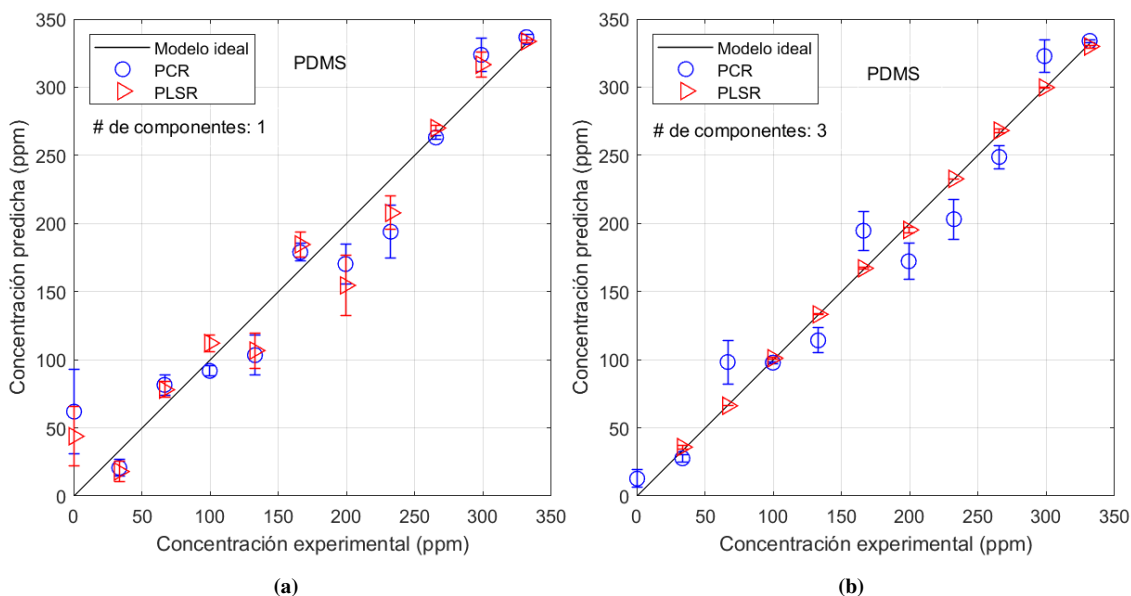
Sensor	Número de componentes	Coeficientes de la regresión (Matriz Estandarizada)									
		PCR					PLSR				
		$w_0$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$R^2$	$w_0$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$R^2$
1 (PDMS)	1	0.465	0.0288	x	x	0.9317	0.5	1.0207	x	x	0.9471
	2	0.465	0.0295	0.0048	x	0.9419	0.5	1.0207	0.2308	x	0.9956
	3	0.4609	0.0302	0.0071	0.0063	0.9601	0.5	1.0207	0.2308	0.0664	0.9996
9 (PMMA)	1	0.4457	-0.0277	x	x	0.8811	0.5	0.9948	x	x	0.8996
	2	0.406	-0.0305	0.0111	x	0.9054	0.5	0.9948	0.3114	x	0.9878
	3	0.4171	-0.0304	0.0092	0.0025	0.9063	0.5	0.9948	0.3114	0.1102	0.9989
13 (ApT)	1	0.476	0.0212	x	x	0.7072	0.5	1.0046	x	x	0.9175
	2	0.4483	0.0185	0.0239	x	0.9575	0.5	1.0046	0.2905	x	0.9942
	3	0.4594	0.018	0.023	-0.0045	0.9626	0.5	1.0046	0.2905	0.0773	0.9996
17 (Apl)	1	0.5015	-0.0287	x	x	0.7334	0.5	1.0375	x	x	0.9787
	2	0.4822	-0.0282	0.0171	x	0.9326	0.5	1.0375	0.1409	x	0.9968
	3	0.4956	-0.0279	0.0162	0.0135	0.9506	0.5	1.0375	0.1409	0.0529	0.9993

La cantidad de coeficientes de regresión calculados depende del número de componentes empleados para la regresión, de tal forma que al utilizar mayor número de componentes (valores de ajuste) se obtiene mayor cantidad de coeficientes (las x en la **tabla 4.1** simbolizan que no se obtienen los correspondientes coeficientes usando el número dado de componentes).

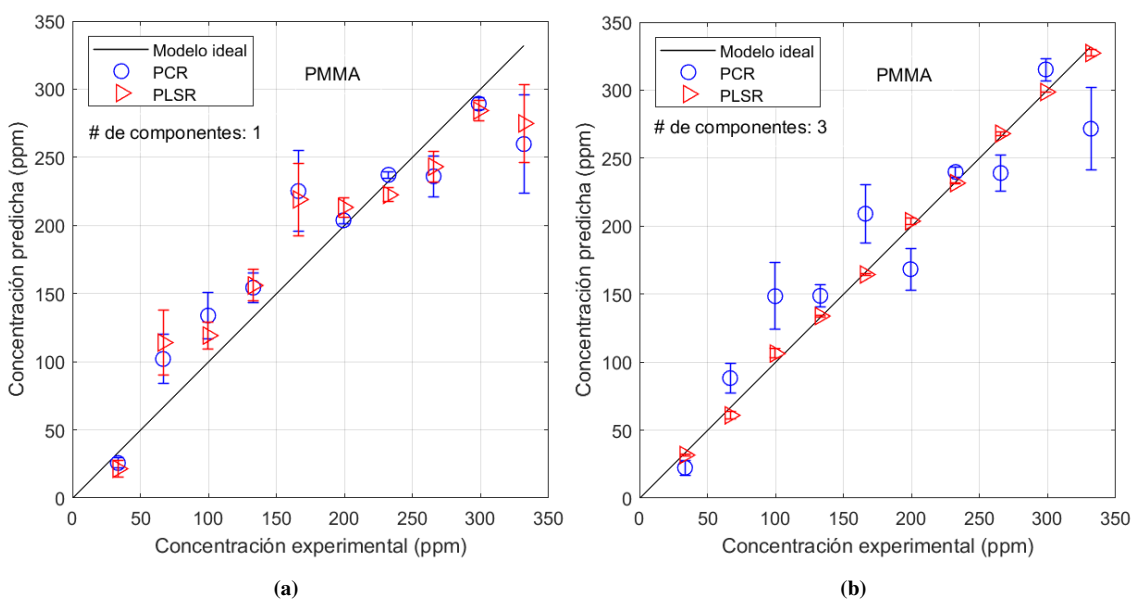
Dada una matriz PCA (PLS) de nuevos datos del sensor correspondiente, estos coeficientes permitirían encontrar las concentraciones de acetona deseadas. El coeficiente de determinación es mayor si se emplean más componentes en la regresión, además, se acerca mucho más a 1 en el caso del PLSR, lo que indica que se tiene un mejor modelo con este método y conforme se empleen más componentes para el ajuste.

Utilizando las **ecuaciones** de ajuste 3.4.4.2 y 3.4.6.1 se obtiene la concentración de acetona predicha estimada por cada sensor dada una cantidad escogida de componentes. Las concentraciones de acetona predichas usando una y tres componentes con ambos métodos se muestran contra las concentraciones experimentales y se comparan a continuación (los círculos siendo las predicciones

con PCR y los triángulos con PLSR), donde se contrasta con la recta del modelo ideal, para el sensor con PDMS (figura 4.16), PMMA (figura 4.17), ApT (figura 4.18) y ApL (figura 4.19):



**Figura 4.16:** Concentración Predicha contra Experimental para el sensor con PDMS usando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes.



**Figura 4.17:** Concentración Predicha contra Experimental para el sensor con PMMA usando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes.

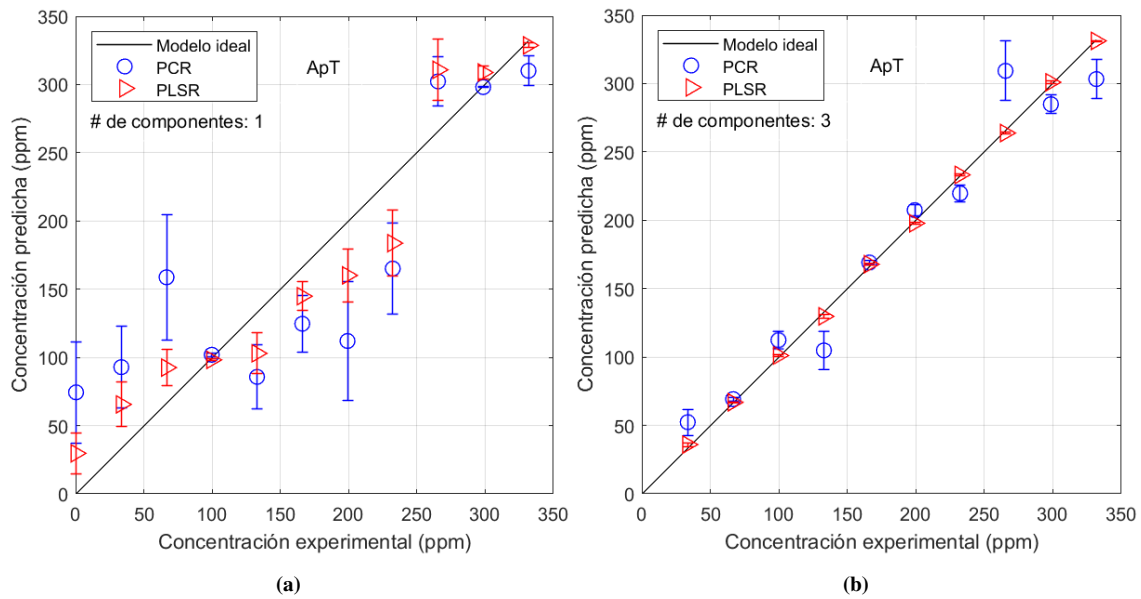


Figura 4.18: Concentración Predicha contra Experimental para el sensor con ApT usando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes.

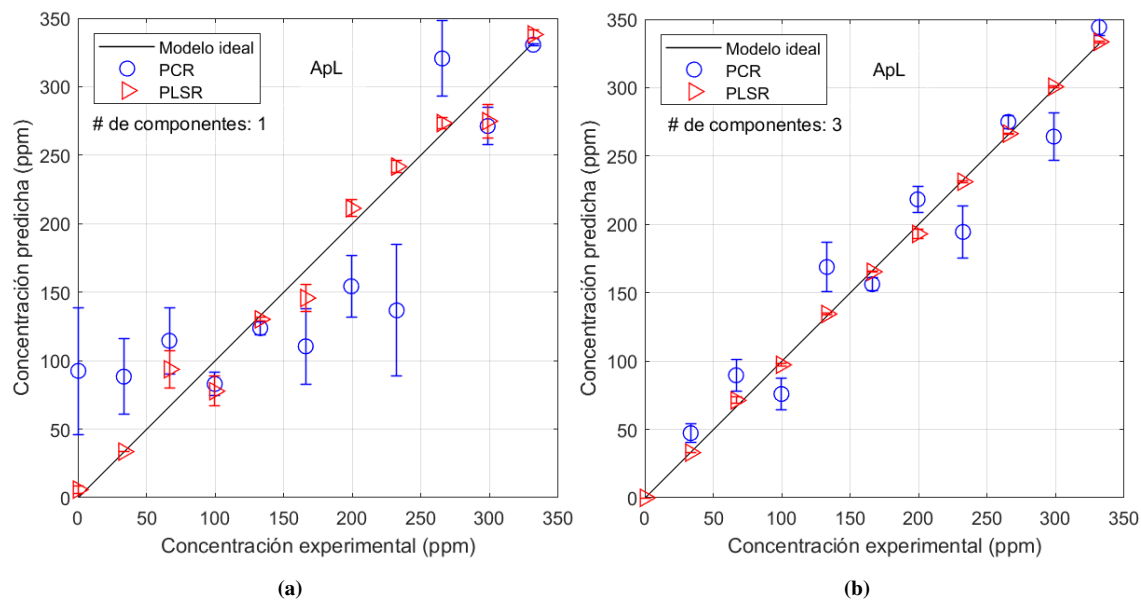


Figura 4.19: Concentración Predicha contra Experimental para el sensor con ApL usando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes.

En todos los casos se observa que al utilizar un mayor número de componentes se tiene un mejor ajuste al modelo ideal, asimismo, se ve que el ajuste de PLSR siempre es superior al de PCR, esto se traduce a que las concentraciones predichas estimadas se acercarán más a las concentraciones propuestas para la regresión.

### 4.2.5. LOD

Usando valores predichos estimados calculados de la misma forma que en la **sección** anterior (4.2.4) con PCR y PLSR se consiguieron los LOD a tiempos específicos (usando espectros en un tiempo específico en la medición), esto es, un LOD obtenido con valores predictores correspondientes a 1 minuto después de cada inyección (LOD de espectros 1 minuto después de cada inyección), otro LOD obtenido con valores predictores 2 minutos después de cada inyección (LOD de espectros 2 minutos después de cada inyección), etc.

El LOD de los sensores fue calculado como el promedio de los LOD obtenidos para cada minuto en la medición, de tal forma que se utilizaran todos los datos disponibles.

A continuación se muestran las tablas con los LOD obtenidos para todos los sensores utilizando hasta tres componentes con PCR y PLSR, la **tabla 4.2** para los sensores con PDMS, **tabla 4.3** con PMMA, **tabla 4.4** con ApT y **tabla 4.5** con ApL:

**Tabla 4.2:** LOD de los sensores con PDMS usando hasta tres componentes.

Sensor con PDMS	LOD (ppm) (Matriz Estandarizada)					
	1C		2C		3C	
	PCR	PLSR	PCR	PLSR	PCR	PLSR
1	27.05	16.79	20.5	7.03	14.49	2.43
2	32.7	21.19	17.83	7.01	12.42	1.96
3	35.71	20.68	29.39	6.08	23.7	1.61
4	38.02	23.81	33.83	6.13	32.14	1.9
5	25.41	21.41	23.46	6.13	21.67	1.65

**Tabla 4.3:** LOD de los sensores con PMMA usando hasta tres componentes.

Sensor con PMMA	LOD (ppm) (Matriz Estandarizada)					
	1C		2C		3C	
	PCR	PLSR	PCR	PLSR	PCR	PLSR
6	42.42	29.57	40.41	8.97	38.49	2.27
7	42.93	29.7	36.29	8.69	34.17	2.33
8	24.65	20.03	24.28	4.61	21.1	1.26
9	38.46	29.08	37.41	8.23	35.08	2.32
10	34.04	21.73	31.99	7.58	30.5	2.66

**Tabla 4.4:** LOD de los sensores con ApT usando hasta tres componentes.

Sensor con ApT	LOD (ppm) (Matriz Estandarizada)					
	1C		2C		3C	
	PCR	PLSR	PCR	PLSR	PCR	PLSR
11	62.73	40.09	44.01	14.91	37.77	4.03
12	41.92	29.11	40.31	9.48	29.12	3.49
13	56.01	35.55	30.37	11.12	24.85	3.46
14	15.29	14.33	14.93	5.65	11.7	2.29
15	31.64	18.8	30.28	5.77	28.1	1.45

**Tabla 4.5:** LOD de los sensores con ApL usando hasta tres componentes.

Sensor con ApL	LOD (ppm) (Matriz Estandarizada)					
	1C		2C		3C	
	PCR	PLSR	PCR	PLSR	PCR	PLSR
16	26.52	15.57	15.02	5.58	13.78	2.05
17	51.97	23.21	23.46	7.82	21.82	2.24
18	34.61	23.97	24.54	9.32	16.72	3.41
19	40.94	20.46	38.67	5.06	36.32	1.51
20	104.32	31.74	43.31	16.56	40.12	4.84

Los LOD disminuyen significativamente al emplear más componentes de estructuras latentes, mientras que con las componentes principales la disminución es mucho menor, por lo tanto, los LOD alcanzados con PLSR se acercan más a lo deseado (~ 1 ppm).

Se obtiene que en promedio, empleando PLSR, los sensores con PDMS alcanzan un menor LOD (1.91 ppm), seguidos por los sensores con PMMA (2.17 ppm), luego por los de ApL (2.82 ppm) y finalmente los de ApT (2.94 ppm). Este comportamiento es el esperado, ya que el PDMS y PMMA reaccionan mejor a la acetona que el ApT y ApL. Estos valores se acercan bastante a lo deseado y presentan diferencias de alrededor de 1 ppm entre sí.

El menor LOD alcanzado es de 1.26 ppm conseguido con el sensor 8 con PMMA y empleando tres componentes de estructuras latentes, llegando a los límites deseados.

Como información adicional se muestran gráficas de los LOD obtenidos con los datos a diferentes tiempos de la medición usando una y tres componentes con PCR y PLSR, siendo correspondientes al sensor con PDMS las de la **figura 4.20** (con una componente se obtuvo un LOD promedio de 27.05 ppm con PCR y 16.79 ppm con PLSR y con tres componentes de 14.49 ppm con PCR y 2.43 ppm con PLSR), con PMMA las de la **figura 4.21** (con una componente se obtuvo un LOD promedio de 38.46 ppm con PCR y 29.08 ppm con PLSR y con tres componentes de 35.08 ppm con PCR y 2.32 ppm con PLSR), con ApT las de la **figura 4.22** (con una componente se obtuvo un LOD promedio de 56.01 ppm con PCR y 35.55 ppm con PLSR y con tres componentes de 24.85 ppm con PCR y 3.46 ppm con PLSR) y con ApL las de la **figura 4.23** (con una componente se obtuvo un LOD promedio de 51.97 ppm con PCR y 23.21 ppm con PLSR y con tres componentes de 21.82 ppm con PCR y 2.24 ppm con PLSR):

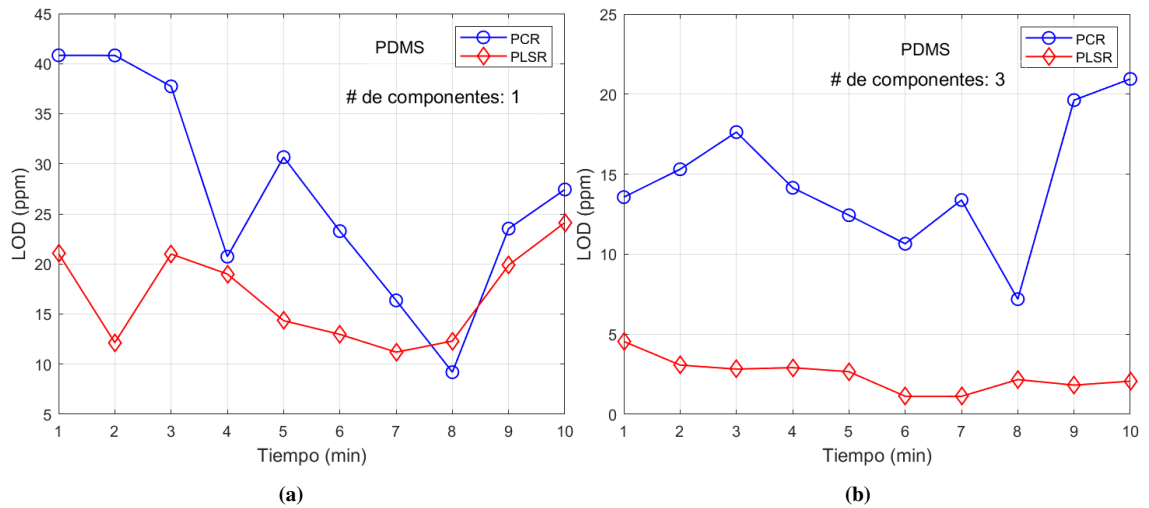


Figura 4.20: LOD contra Tiempo en la medición del sensor con PDMS y empleando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes.

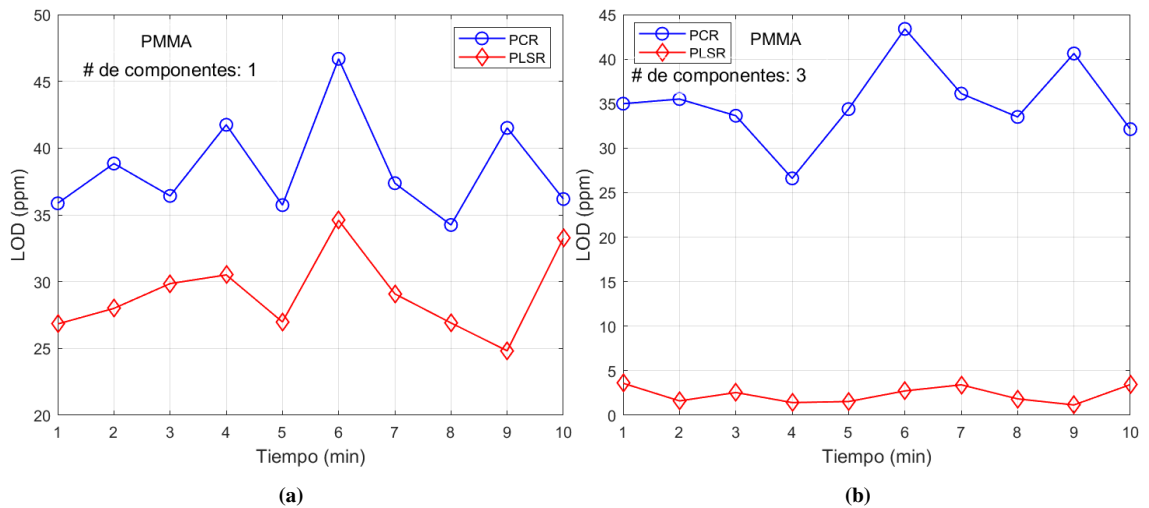


Figura 4.21: LOD contra Tiempo en la medición del sensor con PMMA y empleando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes.

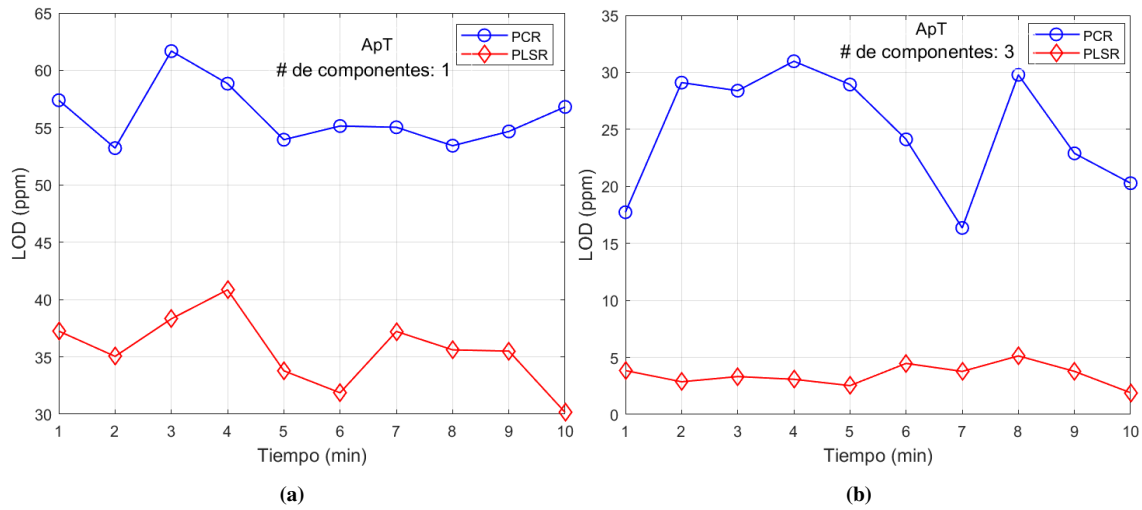


Figura 4.22: LOD contra Tiempo en la medición del sensor con ApT y empleando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes.

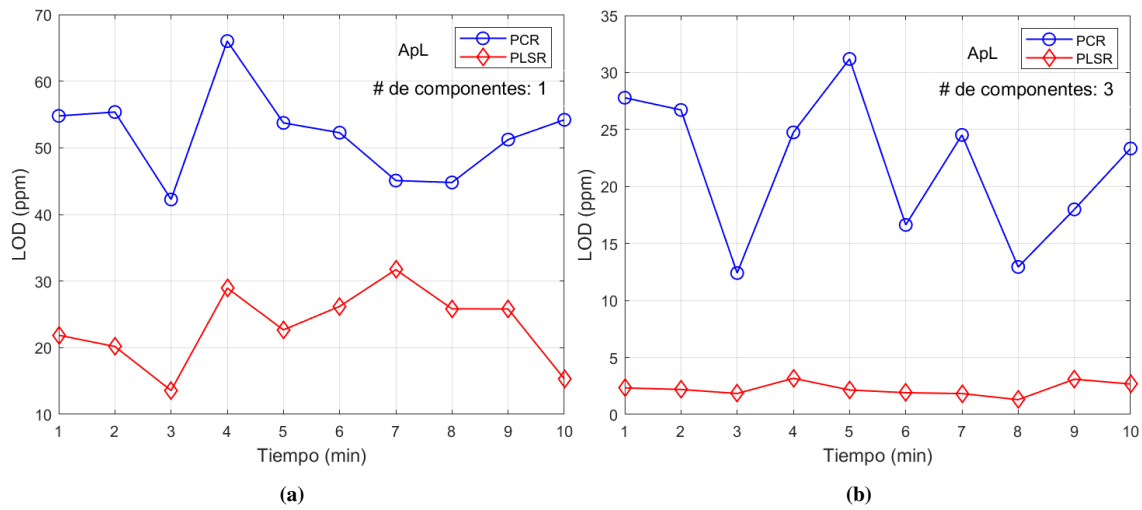


Figura 4.23: LOD contra Tiempo en la medición del sensor con ApL y empleando: (a) 1 componente; (b) 3 componentes.

Esto nos permite visualizar la diferencia que existe entre los LOD obtenidos con PCR y PLSR, tanto con una como con tres componentes.

Los LOD calculados con PLSR son menores que con PCR en la mayoría de los casos, tanto cuando se emplea una componente como cuando se emplean tres.

#### 4.2.6. Sensibilidad

Calculando y usando los valores de la primera componente (PC1, LSC1) correspondientes a los obtenidos por medio de los espectros medidos a los 10 minutos después de cada inyección de acetona, haciendo que empiecen desde el origen y calculando su valor absoluto, se realiza un ajuste lineal entre estos valores y las concentraciones de acetona propuestas, obteniendo una recta cuya pendiente es la sensibilidad del sensor correspondiente.

Usando este proceso se obtienen las siguientes sensibilidades de los sensores y su respectivo coeficiente de

determinación, siendo la **tabla 4.6** la correspondiente a los sensores con PDMS, **tabla 4.7** con PMMA, **tabla 4.8** con ApT y **tabla 4.9** con ApL:

**Tabla 4.6:** Sensibilidad y coeficiente de determinación de los sensores con PDMS usando PCA y PLS.

Sensor con PDMS	Sensibilidad (1/ppm)		R <sup>2</sup>	
	PC1	LSC1	PC1	LSC1
1	7.53E-02	2.30E-03	0.949	0.9742
2	1.46E-01	3.00E-03	0.9724	0.9926
3	8.48E-02	2.60E-03	0.9698	0.9859
4	7.66E-02	2.50E-03	0.9612	0.9768
5	8.77E-02	2.60E-03	0.975	0.9852

**Tabla 4.7:** Sensibilidad y coeficiente de determinación de los sensores con PMMA usando PCA y PLS.

Sensor con PMMA	Sensibilidad (1/ppm)		R <sup>2</sup>	
	PC1	LSC1	PC1	LSC1
6	5.17E-02	2.00E-03	0.9332	0.9693
7	1.15E-01	3.10E-03	0.9129	0.9783
8	8.96E-02	2.60E-03	0.9856	0.9883
9	1.24E-01	3.40E-03	0.9579	0.9629
10	8.87E-02	2.90E-03	0.9533	0.9822

**Tabla 4.8:** Sensibilidad y coeficiente de determinación de los sensores con ApT usando PCA y PLS.

Sensor con ApT	Sensibilidad (1/ppm)		R <sup>2</sup>	
	PC1	LSC1	PC1	LSC1
11	1.22E-01	2.90E-03	0.8684	0.9586
12	1.31E-01	2.70E-03	0.9426	0.9702
13	8.46E-02	2.50E-03	0.8472	0.9683
14	1.28E-01	2.30E-03	0.982	0.9718
15	7.79E-02	2.70E-03	0.9685	0.9948

**Tabla 4.9:** Sensibilidad y coeficiente de determinación de los sensores con ApL usando PCA y PLS.

Sensor con ApL	Sensibilidad (1/ppm)		R <sup>2</sup>	
	PC1	LSC1	PC1	LSC1
16	1.24E-01	2.65E-03	0.9728	0.9923
17	5.55E-02	2.81E-03	0.8063	0.9936
18	1.32E-01	2.89E-03	0.9621	0.9833
19	6.21E-02	2.66E-03	0.9588	0.983
20	4.32E-02	2.82E-03	0.2672	0.9892

La sensibilidad nos permite saber cómo el sensor responde a la interacción con la acetona de tal forma que al momento de hacerlo se presenten cambios, en este caso en los valores de la primera componente, a mayor sensibilidad mejor será la respuesta del sensor a la acetona.

La sensibilidad obtenida con PC1 presenta mayor magnitud respecto a la obtenida con LSC1, lo que podría indicar una sensibilidad y respuestas más grandes, sin embargo, sus valores son más variados que con LSC1, además, los coeficientes de determinación indican que con PLS se obtiene un mejor ajuste al modelo. Debido a esto, se interpreta que se deben de comparar las sensibilidades entre sí solamente si se obtuvieron con el mismo método, ya sea PCR o PLSR, pues las magnitudes son muy diferentes.

Se observa que el sensor 2 es el que presenta mayor sensibilidad con ambos métodos respecto a PDMS; el sensor 9 con ambos métodos respecto a PMMA; el sensor 18 con ambos métodos respecto a ApL; y el sensor 12 con PC1 y el sensor 11 con LSC1 respecto a ApT, siendo este el único caso que no presenta con ambos métodos un mismo sensor con la mayor sensibilidad.

Analizando lo obtenido con LSC1, se tiene que en promedio los sensores con mayor sensibilidad son los que tienen PMMA  $\left(2.8 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{ppm}}\right)$ , seguidos de ApL  $\left(2.7660 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{ppm}}\right)$ , luego ApT  $\left(2.62 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{ppm}}\right)$  y finalmente PDMS  $\left(2.6 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{ppm}}\right)$ , lo que contrasta con lo esperado, sin embargo, las diferencias entre estos promedios son muy pequeñas. La mayor sensibilidad alcanzada con los valores de LSC1 es de  $3.4 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{ppm}}$  conseguida con el sensor 9 con PMMA.

A continuación se presentan las gráficas de PC1 (LSC1) contra concentración de acetona de todos los sensores, mostrando de igual forma la recta obtenida (empleadas para obtener las sensibilidades), siendo la **figura 4.24** correspondiente a los sensores con PDMS, **figura 4.25** con PMMA, **figura 4.26** con ApT y **figura 4.27** con ApL:

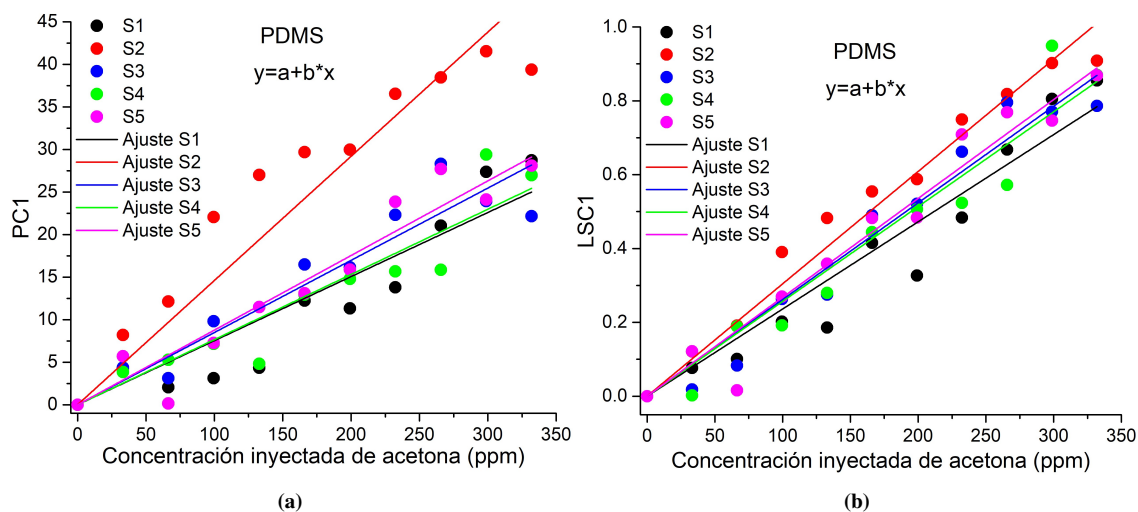


Figura 4.24: Valores contra concentración de acetona de sensores con PDMS de: (a) PC1; (b) LSC1.

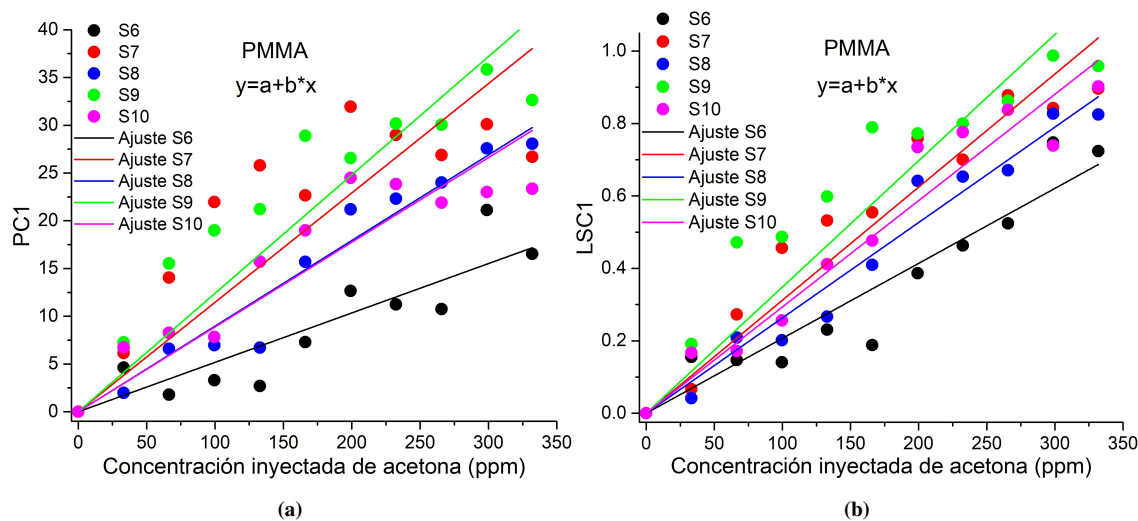


Figura 4.25: Valores contra concentración de acetona de sensores con PMMA de: (a) PC1; (b) LSC1.

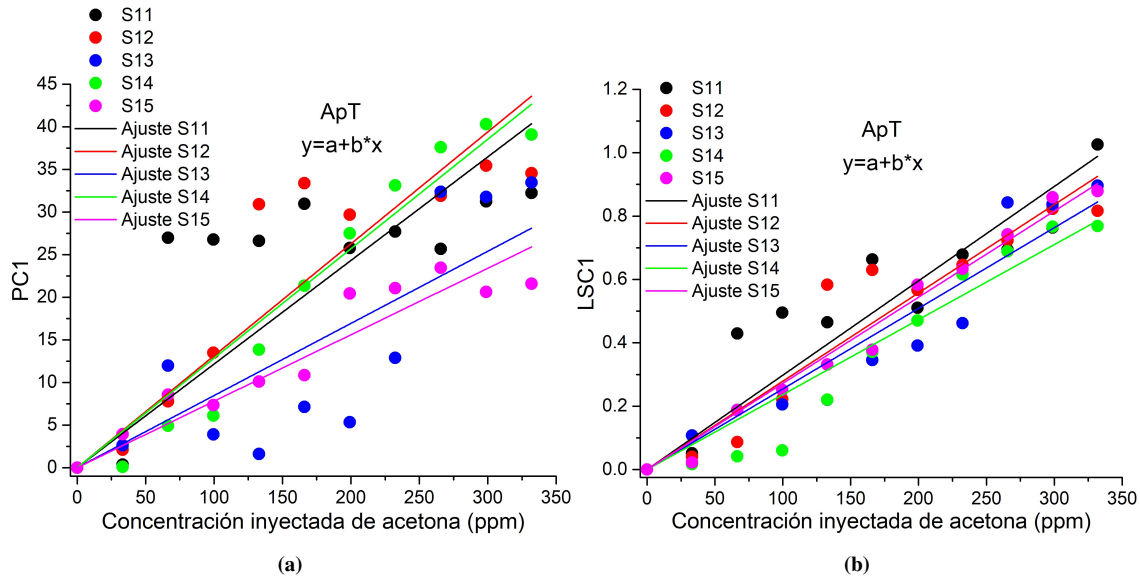


Figura 4.26: Valores contra concentración de acetona de sensores con ApT de: (a) PC1; (b) LSC1.

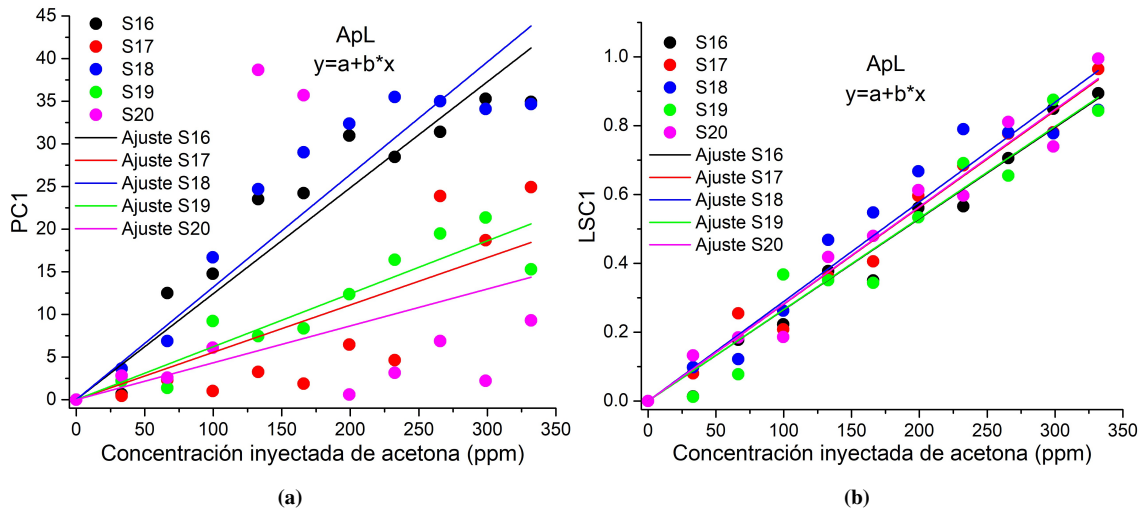


Figura 4.27: Valores contra concentración de acetona de sensores con ApL de: (a) PC1; (b) LSC1.

Las rectas conseguidas con PC1 presentan pendientes muy variadas entre sí a comparación de las obtenidas con LSC1, analizando sensores con una misma película sensible, lo que puede llegar a indicar que empleando PLS se obtienen sensores con respuestas a la acetona muy parecidas.

En general con PC1 se observan comportamientos que parecen no ser lineales, mientras que con LSC1 los valores parecen ajustarse mejor a la recta obtenida.

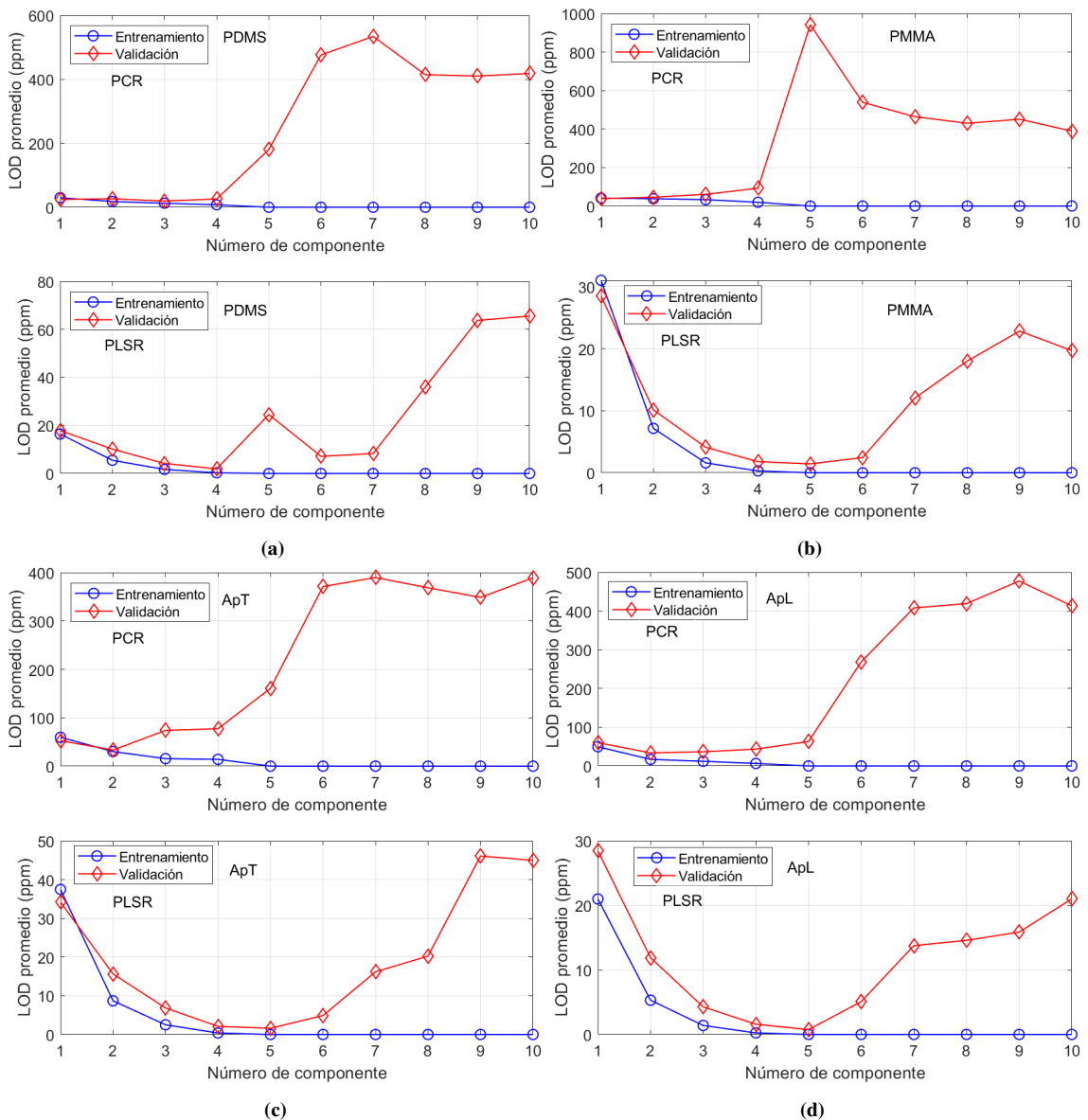
#### 4.2.7. Validación cruzada

Los LOD de entrenamiento se obtienen de la misma forma que los presentados en las tablas de la sección 4.2.5, realizando el mismo proceso de cálculo para el LOD promedio que el empleado ahí, con la única diferencia siendo que solamente se emplean los renglones impares de la matriz PCA o PLS para la regresión

(junto con los valores predichos propuestos impares), de igual forma se guardan los coeficientes de regresión correspondientes.

Los LOD de validación son luego obtenidos empleando los renglones pares de las matrices (junto con los valores predichos propuestos pares) y usando los coeficientes de regresión del entrenamiento (como los presentados en la **tabla 4.1**) para obtener los valores predichos estimados.

Estos LOD se obtienen y registran usando cada vez mayor cantidad de componentes, mostrando esto para PCR y PLSR en la **figura 4.28**, específicamente con PDMS en la **figura 4.28a**, PMMA en la **figura 4.28b**, ApT en la **figura 4.28c** y ApL en la **figura 4.28d**, donde los círculos azules corresponden al LOD de entrenamiento y los diamantes rojos al LOD de validación, respecto al número de componentes:



**Figura 4.28:** Validación cruzada con PCR y PLSR de los sensores con: (a) PDMS; (b) PMMA; (c) ApT; (d) ApL.

El sobreajuste se presenta de tal forma que el LOD de entrenamiento sigue disminuyendo mientras que el LOD de validación aumenta de forma considerable, esto debido a que la validación ya no se ajusta al modelo de entrenamiento y por lo tanto no es viable usar más componentes.

En el caso de PCR se observa que alrededor de la quinta componente el LOD de validación comienza a aumentar en gran medida, por lo que, se interpreta que hasta con cuatro componentes no se presenta sobreajuste. En el caso de PLSR alrededor de la sexta componente es que el LOD de validación comienza a aumentar, interpretando que hasta con cinco componentes no se presenta sobreajuste.

Como resultado adicional se muestra el LOD obtenido con la mayor cantidad de componentes permitidas antes de llegar al sobreajuste, tanto para PCR como PLSR (de los sensores representativos), en la **tabla 4.10**:

**Tabla 4.10:** LOD obtenido con la mayor cantidad de componentes permitida antes de un sobreajuste.

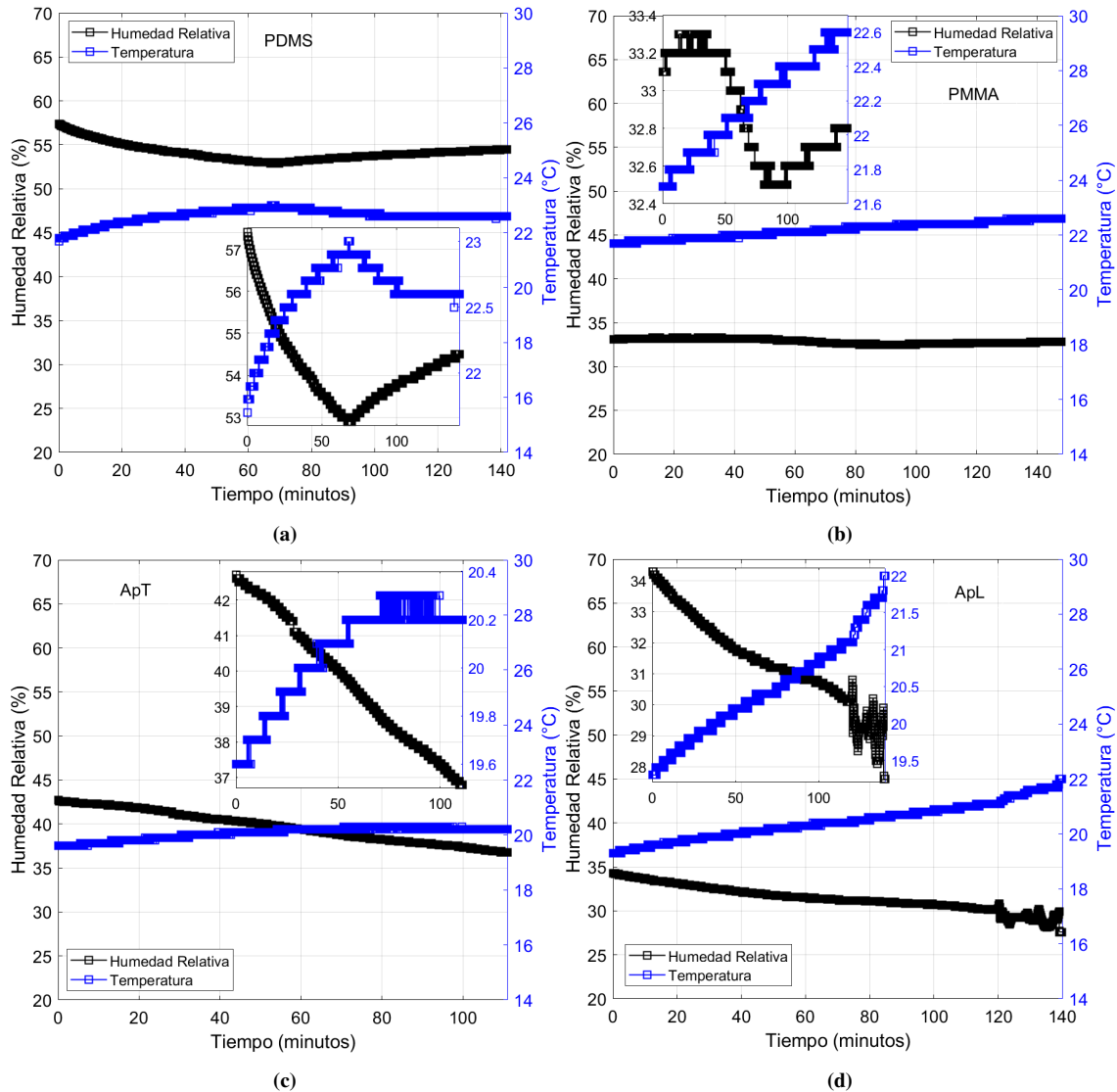
Sensor	LOD (ppm) (Matriz Estandarizada)		
	4 Componentes		5 Componentes
	PCR	PLSR	PLSR
<b>1 (PDMS)</b>	13.87	0.73	0.22
<b>9 (PMMA)</b>	29.72	0.66	0.14
<b>13 (ApT)</b>	21.8	0.93	0.19
<b>17 (ApL)</b>	20.27	0.54	0.11

A pesar de que con PCR no se muestra una gran disminución del LOD, con PLSR es evidente la mejoría. Esto plantea la cuestión de que con 4 componentes ya puede existir un sobreajuste, pudiendo ser posible debido a los pocos datos empleados para realizar la validación cruzada, sin embargo, analizando todos estos resultados, se considera que con tres componentes no se llega al sobreajuste.

#### 4.2.8. Humedad relativa y temperatura

Los datos de humedad relativa y temperatura fueron recolectados cada segundo a lo largo de las mediciones por medio del sensor HIH8121, obteniendo las siguientes gráficas mostradas en la **figura 4.29**, donde la escala es pequeña para mostrar el cambio a través del tiempo (los valores mínimos y máximos de los ejes se escogieron de esa manera ya que fueron los límites alcanzados por algunos de los sensores, como referencia), siendo el eje negro del lado izquierdo correspondiente a la humedad relativa y el eje azul del lado derecho a la temperatura, de igual forma se muestra un acercamiento de los cambios presentados.

Los datos de humedad relativa y temperatura contra el tiempo del sensor con PDMS se muestran en la **figura 4.29a**, con PMMA en la **figura 4.29b**, con ApT en la **figura 4.29c** y con ApL en la **figura 4.29d**:



**Figura 4.29:** Datos de humedad relativa y temperatura de la medición del sensor con: (a) PDMS; (b) PMMA; (c) ApT; (d) ApL.

La humedad relativa presenta una variación total de aproximadamente 6 % y la temperatura de 2 °C a lo largo de la medición, las cuales se desarrollan de forma gradual. Debido a esto, se descarta cualquier posible efecto que estos parámetros pudieran tener en las mediciones (si sus variaciones fueran mayores), sin embargo, es necesario realizar un estudio en el futuro acerca de estos efectos.

Estos fueron los resultados obtenidos en el sistema estático. Se logró la elaboración de 20 sensores con distintas películas sensibles y una película reflejante de plata, consiguiendo su caracterización con distintas concentraciones de acetona y empleando métodos como el PCA y PLS y sus regresiones (PCR y PLSR) para un análisis más completo.

Se implementó la validación cruzada para evitar un sobreajuste y un sensor de humedad relativa y temperatura para conocer estos parámetros.

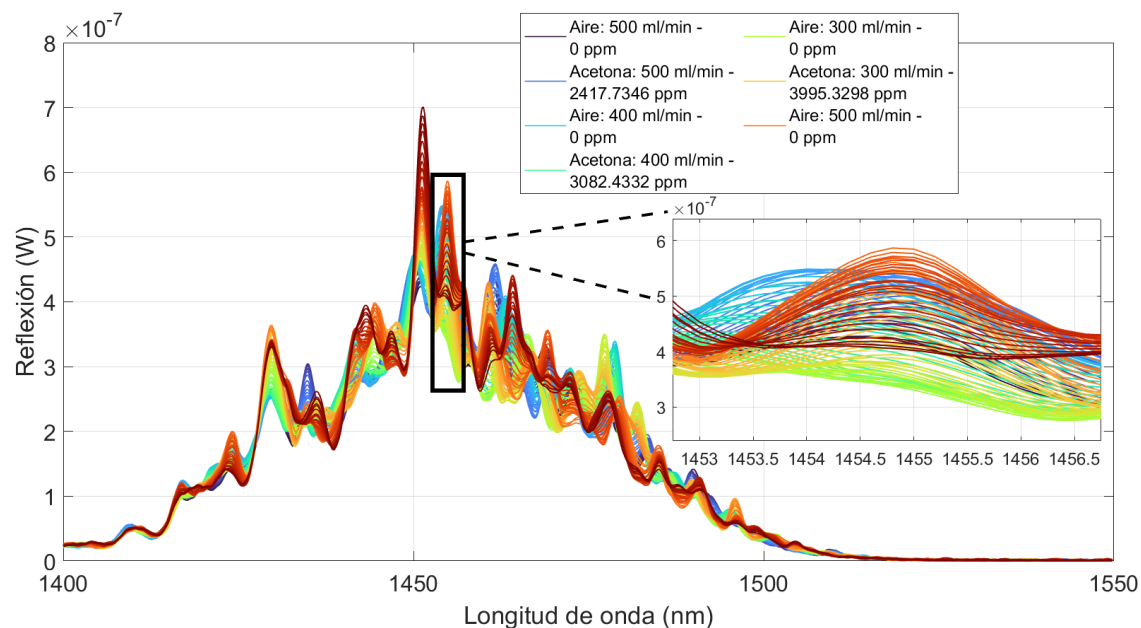
Los menores LOD se obtuvieron usando 3 componentes con PLSR, llegando hasta 1.2674 ppm, lo que se encuentra muy cerca del valor deseado de 1 ppm.

### 4.3. Sistema Dinámico

Tomando esto como un primer acercamiento a la implementación del sistema dinámico con sensores MZI de doble paso, se quisieron utilizar cuatro de los sensores empleados en el sistema estático para realizar las pruebas de medición, sin embargo, al momento de las mediciones estos sensores llevaban ya guardados alrededor de 5 meses, por lo que es posible que las películas sensibles se hayan degradado. Por esta razón, se depositó una nueva película de PDMS por medio de inmersión en un MZI de doble paso sin película reflejante de plata para realizar las mediciones correspondientes, los resultados presentados son los de este nuevo sensor.

#### 4.3.1. Espectros de reflexión

Los espectros de reflexión fueron obtenidos durante toda la medición, de aproximadamente 35 minutos en total, lo más rápido permitido por el sistema de medición, esto es, alrededor de cada 21.45 segundos, con el propósito de observar los cambios provocados por los flujos de aire y acetona lo más inmediato posible. En la **figura 4.30** se muestran los 110 espectros de reflexión obtenidos junto con un acercamiento para observar los cambios de mejor manera:



**Figura 4.30:** Espectros de reflexión del sensor con PDMS por inmersión en el sistema dinámico.

Los cambios que se presentan en los espectros son más pronunciados y constantes que los vistos en el sistema estático, además, se exhiben a lo largo de la longitud de onda. De igual forma, los espectros parecen presentar un desfase producto del MZI, esto debido a que los cambios en el pico máximo parecen tener el comportamiento de una ola.

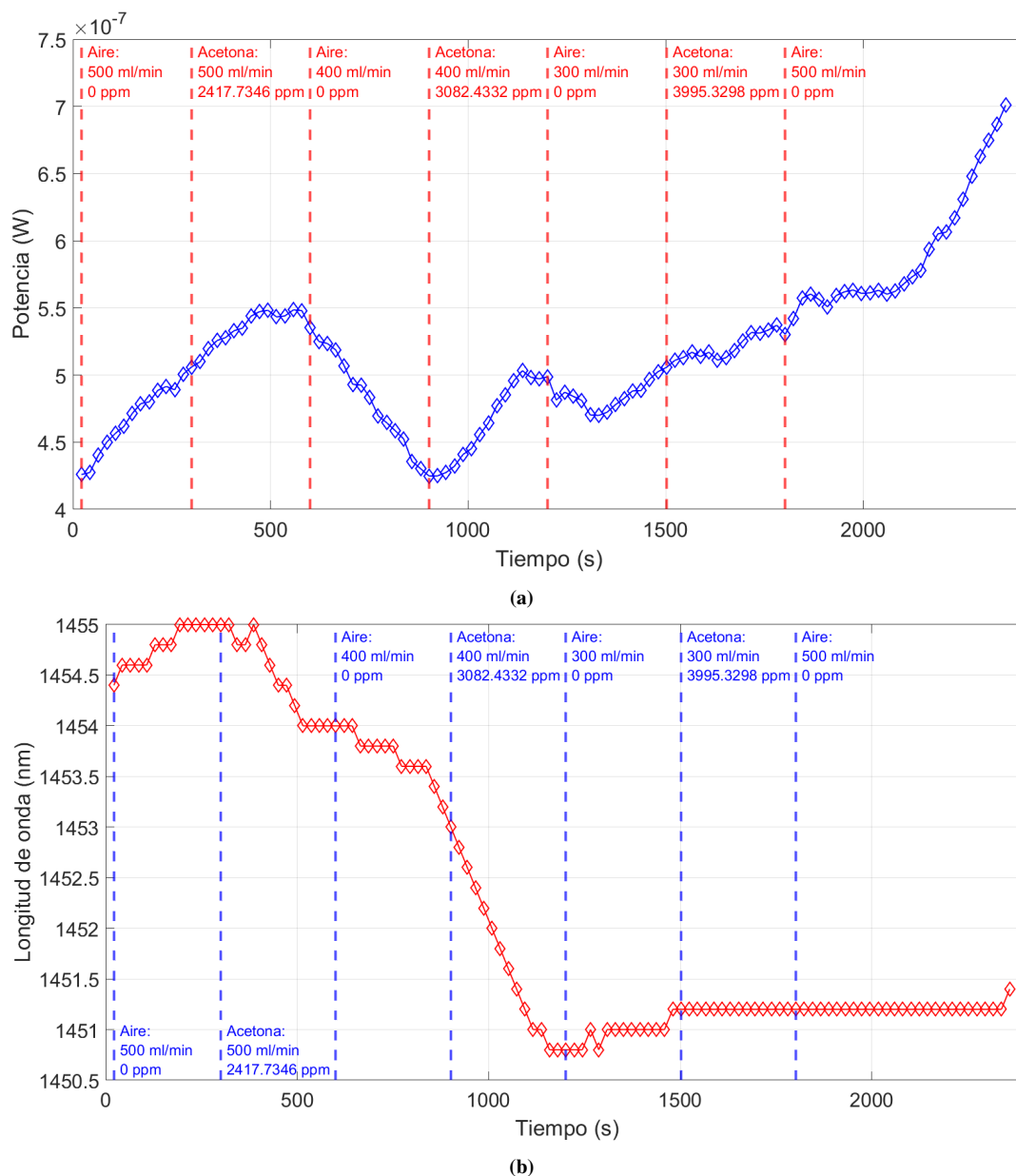
Esto puede deberse al método de depósito del PDMS y a los flujos a los que se somete la fibra.

Estos espectros fueron agrupados en una matriz  $X$  para el siguiente análisis de datos.

#### 4.3.2. Longitud de onda de resonancia y su Potencia

Enfocándose en el pico máximo de potencia del primer espectro medido y siguiéndolo a lo largo de la medición, se obtienen y grafican los cambios que sufre en su potencia y longitud de onda de resonancia a lo largo del tiempo en la **figura 4.31**, delimitando las secciones con diferente concentración de acetona por

medio de una línea vertical, mostrando en la **figura 4.31a** la variación de la potencia y en la **figura 4.31b** la variación de la longitud de onda:



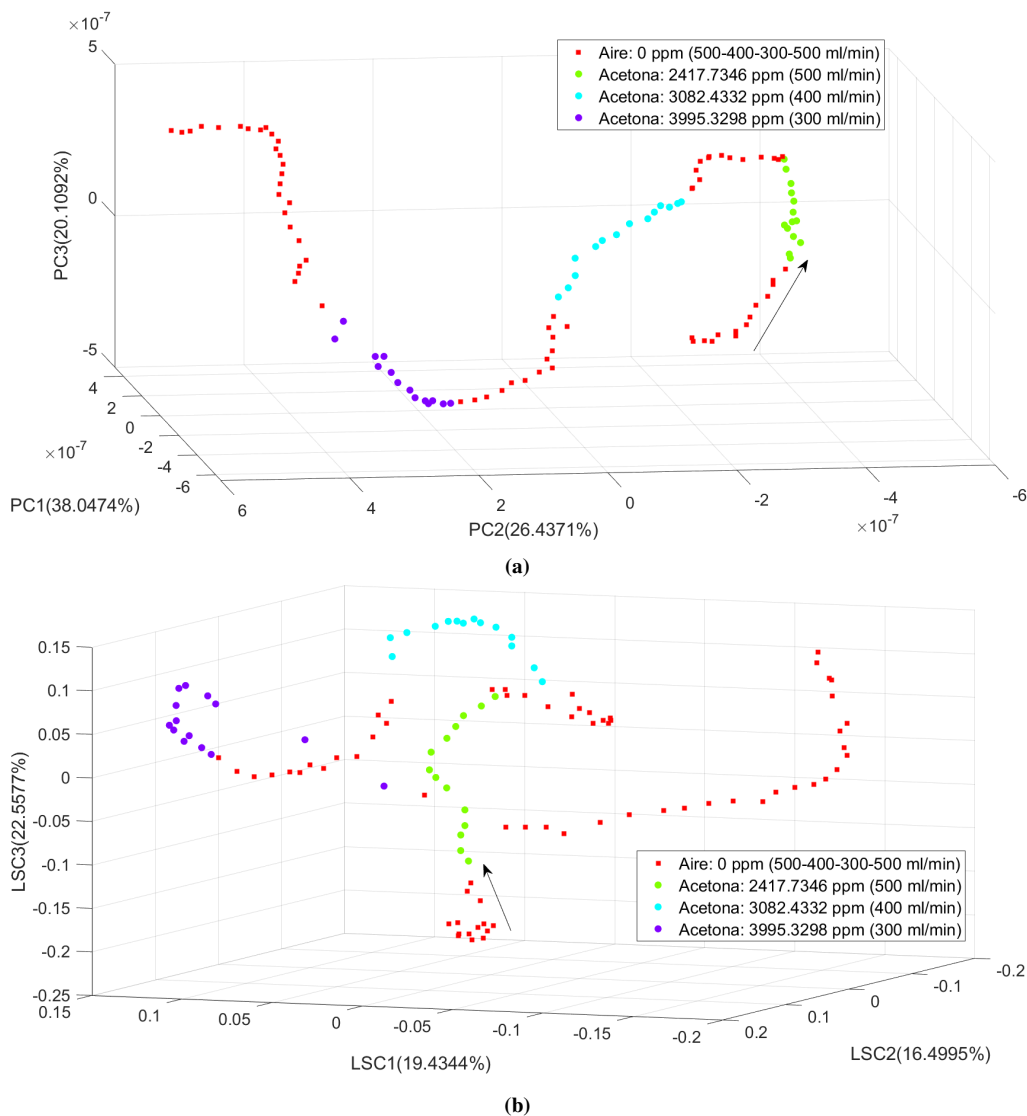
**Figura 4.31:** Cambios sufridos en el pico máximo inicial durante la medición en: (a) potencia; (b) longitud de onda de resonancia.

Se observa que tanto la potencia como la longitud de onda de resonancia están en constante cambio, a pesar de no presentar un patrón o comportamiento atribuible a los cambios de concentración de acetona.

Este análisis espectral es el realizado de forma tradicional para observar corrimientos en la longitud de onda de resonancia y los cambios presentados en el pico máximo, sin embargo, esto ignora los cambios en el resto del espectro, por lo cual es necesario emplear métodos como PCA y PLS para utilizar toda la información disponible.

### 4.3.3. PCA y PLS

Empleando la matriz  $X$  completa y las concentraciones de acetona utilizadas como los valores predichos propuestos (0 ppm, 2417.73 ppm, 0 ppm, 3082.43 ppm, 0 ppm, 3995.32 ppm y 0 ppm, en ese orden) para la calibración, se obtienen las matrices de PCA y PLS, consiguiendo y graficando las primeras tres componentes principales en la **figura 4.32a** y de estructuras latentes en la **figura 4.32b** (con el mayor porcentaje de varianza):



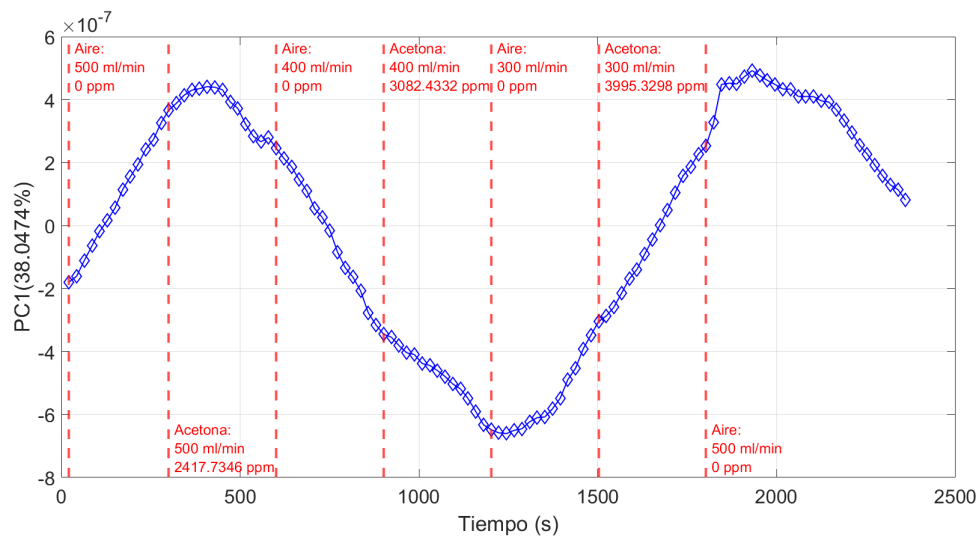
**Figura 4.32:** Valores obtenidos para las primeras tres componentes en el sistema dinámico por medio de: (a) PCA; (b) PLS.

En esta ocasión se muestran los puntos con diferentes concentraciones de acetona de distintos colores, siendo los rectángulos rojos los que tienen 0 ppm, esto nos permite delimitar las regiones de concentración y también de la magnitud de los flujos empleados. En ambos casos se observan regiones separadas y delimitadas para las diferentes concentraciones de acetona y una forma bien definida, lo que indica un cambio constante durante la medición. Además, la dirección de los valores parece cambiar respecto a los  $\frac{\text{ml}}{\text{min}}$  utilizados en los flujos, lo que puede indicar una estrecha relación entre la magnitud del flujo y los cambios mostrados. La

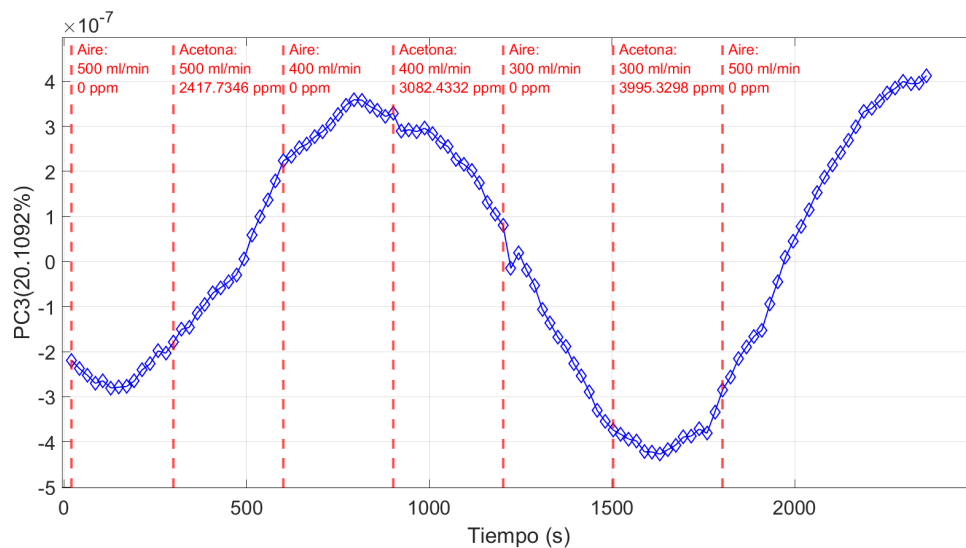
forma presentada por las componentes principales se asemeja a la obtenida in silico.

El porcentaje de varianza mostrado en las componentes principales es de aproximadamente el 84 % mientras que en las estructuras latentes es de aproximadamente el 58 %, lo que indica que hay más información en las primeras componentes principales que en las estructuras latentes. Además, se nota que la tercera estructura latente presenta más porcentaje de varianza que las primeras dos, lo cuál no debería de ocurrir. Esto podría deberse a que el método PLS no encuentra relación entre los cambios en los espectros y las diferentes concentraciones de acetona.

En la **figura 4.33** se presentan los valores de la primera y tercera componente principal y en la **figura 4.34** los valores de la primera y tercera estructura latente, a lo largo del tiempo de medición, esto representaría una mejor versión del cambio de potencia en el pico máximo (de la **figura 4.31a**) debido a que aquí se emplea todo el espectro para el análisis en el tiempo, lo cual permitiría observar los cambios ocurridos en las diferentes regiones de concentración de acetona (separadas por una línea vertical) y establecer posibles explicaciones para estos:



(a)



(b)

**Figura 4.33:** Valores contra Tiempo en la medición del sistema dinámico de: (a) PC1; (b) PC3.

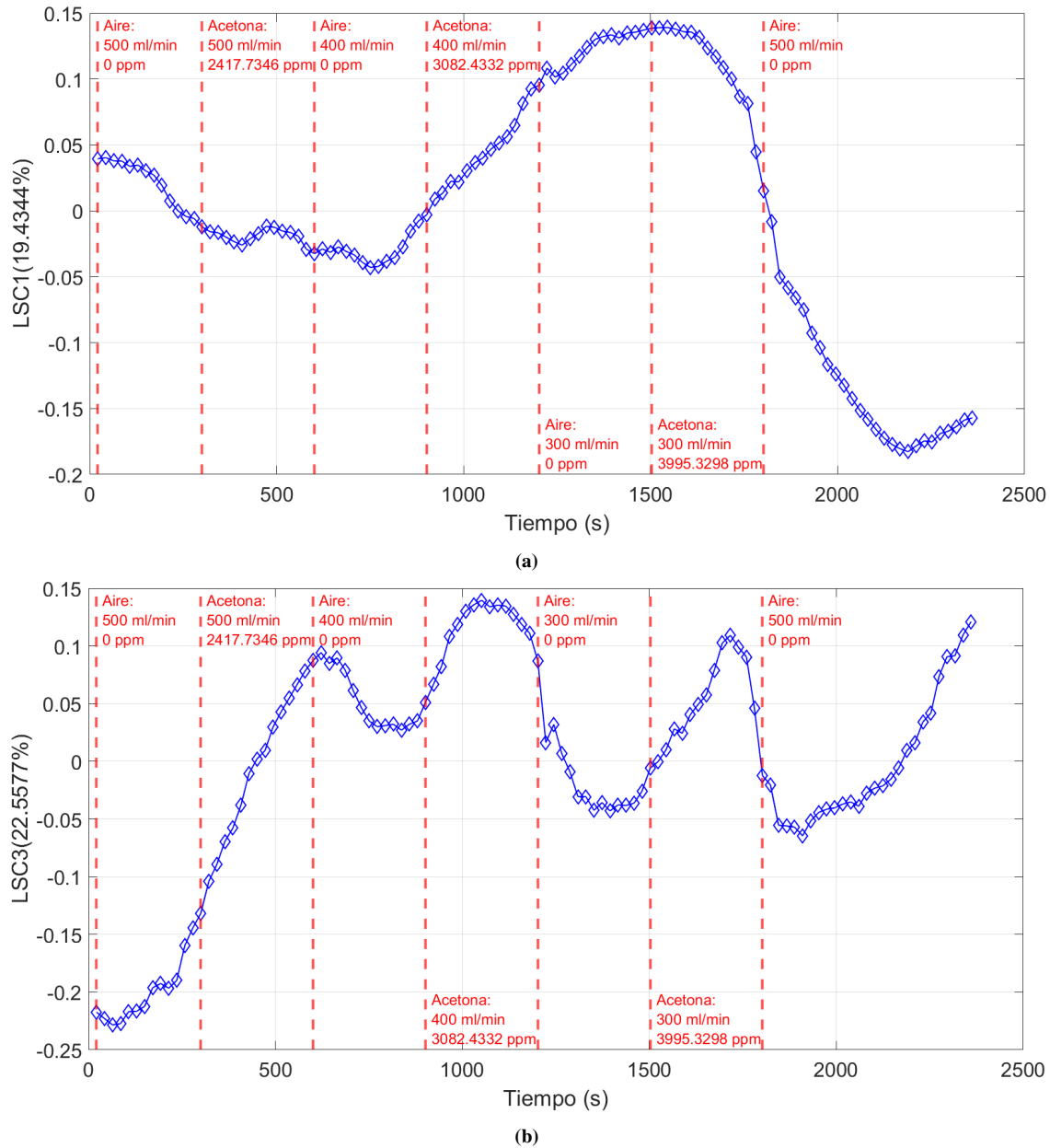


Figura 4.34: Valores contra Tiempo en la medición del sistema dinámico de: (a) LSC1; (b) LSC3.

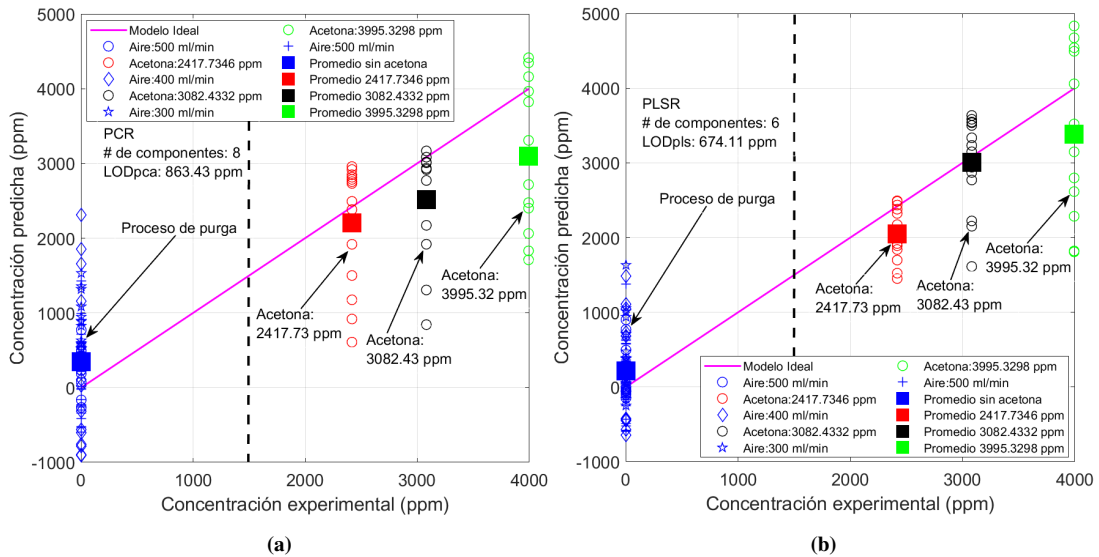
Los valores de las componentes principales parecen tener un comportamiento sinusoidal, lo que indica un cambio constante y recurrente que puede deberse a la variación de magnitud en los flujos, pues se presentan cambios en su dirección cerca de estas variaciones.

Los valores de las estructuras latentes no presentan este comportamiento, sin embargo, en la tercera componente se logra apreciar que los cambios ocurren al momento de realizar el intercambio entre aire y acetona en los flujos, lo que puede significar que esta información está contenida en distintas estructuras latentes y se puede utilizar para demostrar que algunas variaciones se deban a la concentración de acetona utilizada.

Además de que esta componente es la que presenta mayor porcentaje de varianza entre las tres primeras estructuras latentes, conteniendo más información.

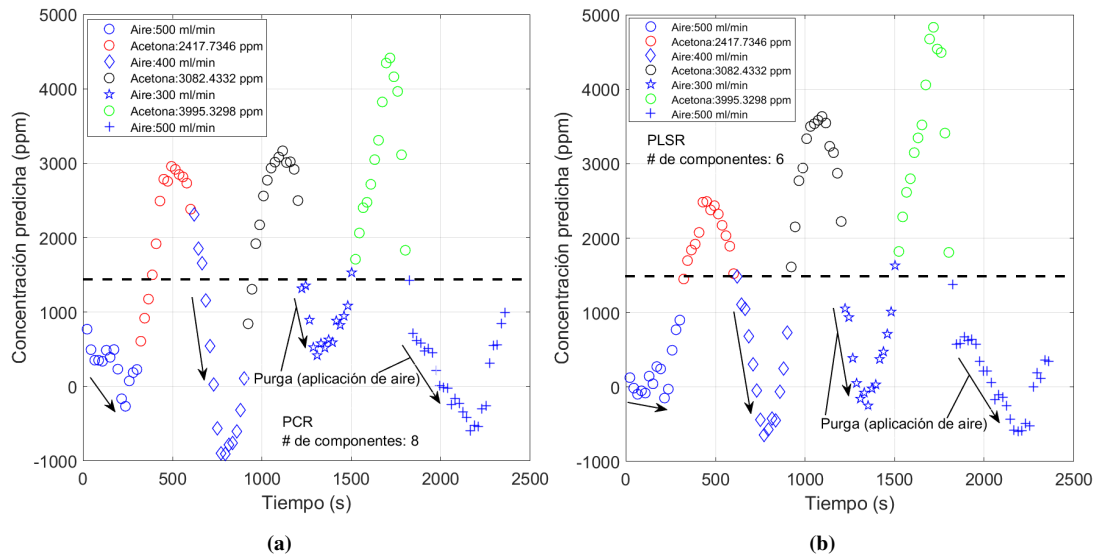
#### 4.3.4. PCR y PLSR

Empleando las matrices completas de PCA y PLS obtenidas en la **sección 4.3.3** y las concentraciones de acetona como valores predichos propuestos (las mismas que se emplearon para la calibración de la matriz PLS en la **sección 4.3.3**), se realizan las regresiones correspondientes (PCR y PLSR), presentando en la **figura 4.35** las concentraciones predichas estimadas con ambos métodos contra las concentraciones experimentales, mostrando el promedio de cada concentración y comparándolos con el modelo ideal:



**Figura 4.35:** Concentración Predicha contra Experimental en el sistema dinámico usando: (a) PCR; (b) PLSR.

Para el PCR se emplearon ocho componentes y para PLSR seis componentes, esto debido a los resultados de la validación cruzada que se mostrarán en su respectiva **sección 4.3.5**. Los promedios de las concentraciones estimadas por medio de PLSR se ajustan mejor al modelo, lo que implica un mejor desempeño. En la **figura 4.36** se muestran las gráficas de estas concentraciones estimadas obtenidas contra el tiempo:



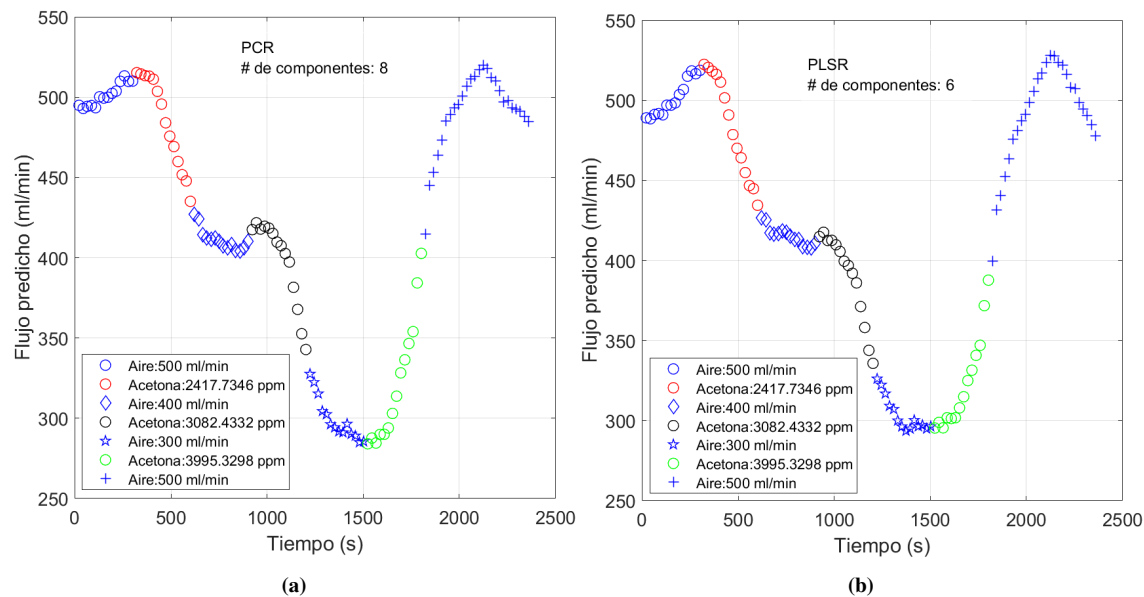
**Figura 4.36:** Concentración Predicha contra Tiempo en el sistema dinámico usando: (a) PCR; (b) PLSR.

En ambos casos se muestra la misma evolución de las concentraciones estimadas a lo largo del tiempo, teniendo con PLSR una forma mejor definida (debido a un mejor ajuste) y con PCR unas preferibles etapas transitorias entre concentraciones, esto significando que se presentan comportamientos deseados tales como el aumento gradual en la concentración al momento de cambiar el flujo a acetona, o que parece que se llega a una estabilidad con la acetona antes de cambiar el flujo a aire.

De igual forma se observan los cambios en la concentración al momento de aplicar aire durante la purga, pudiendo delimitar una región sin acetona y otra con las distintas concentraciones empleadas.

Como información adicional, se realizó una segunda regresión con las matrices completas de PCA y PLS (las mismas que usaron para el análisis anterior), esta vez empleando como valores predichos propuestos a la magnitud de los flujos empleados ( $500 \frac{\text{ml}}{\text{min}}$ ,  $400 \frac{\text{ml}}{\text{min}}$ ,  $300 \frac{\text{ml}}{\text{min}}$  y  $500 \frac{\text{ml}}{\text{min}}$ , en ese orden), calculando así los flujos estimados por PCR y PLSR. Este cálculo es realizado debido a la relación que parece existir entre los cambios ocurridos y la magnitud del flujo presente.

En la **figura 4.37** se muestran estos flujos predichos estimados contra el tiempo, obtenidos con ocho componentes para PCR (**figura 4.37a**) y seis componentes para PLSR (**figura 4.37b**):



**Figura 4.37:** Flujo Predicho contra Tiempo en el sistema dinámico usando: (a) PCR; (b) PLSR.

Se observa cierta similitud con las formas obtenidas en la **figura 4.33**, lo que puede indicar la existencia de alguna relación entre los cambios en los valores de las componentes principales y el cambio en la magnitud del flujo empleado.

### 4.3.5. Validación cruzada

La validación cruzada se llevó a cabo empleando toda la matriz de PCA y PLS, utilizando los renglones impares como datos de entrenamiento y los renglones pares como datos de validación, asimismo, se usaron las concentraciones de acetona (mismas que se emplearon para los análisis previos) impares para el entrenamiento y las concentraciones pares para la validación. Realizando la regresión y calculando los coeficientes y el LOD de entrenamiento, se utilizan estos coeficientes para obtener los valores estimados y el LOD de validación, adquiriendo y guardando los LOD conseguidos cada vez con un mayor número de componentes, mostrando en la **figura 4.38** lo obtenido con PCR (**figura 4.38a**) y PLSR (**figura 4.38b**):

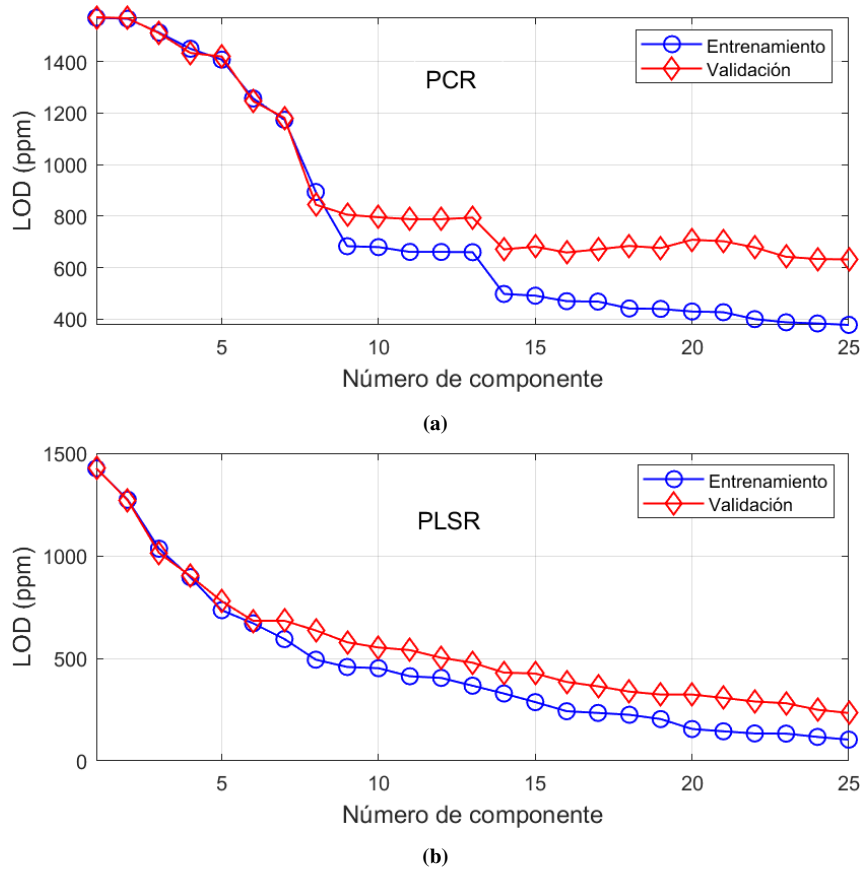


Figura 4.38: Validación cruzada realizada para el sistema dinámico usando: (a) PCR; (b) PLSR.

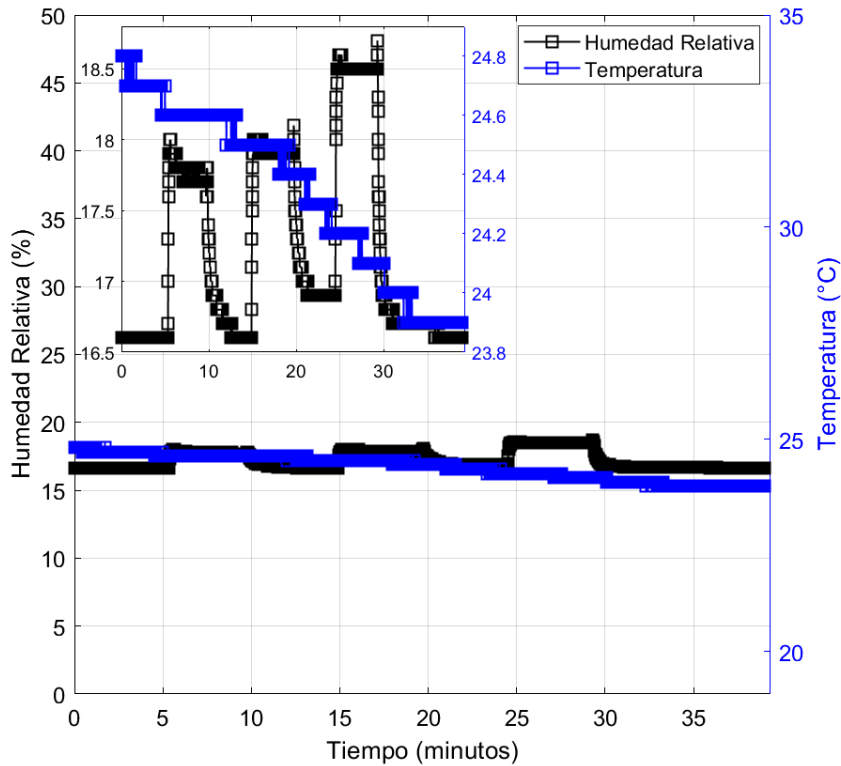
En esta ocasión al emplear toda la matriz de PCA y PLS solamente se obtuvo un LOD de entrenamiento y un LOD de validación (en contraste con los LOD del sistema estático, calculados como un promedio).

A diferencia de lo visto en el sistema estático, a pesar de que el LOD de validación es mayor que el de entrenamiento, su valor no aumenta de forma significativa, lo que puede deberse a que se utiliza un mayor número de datos para la validación cruzada en el sistema dinámico, requiriendo entonces más componentes para mostrar el comportamiento visto en el sistema estático.

En el caso de PCR comienza a presentarse el sobreajuste a partir de la novena componente, y en el caso de PLSR a partir de la séptima componente, pues el LOD de entrenamiento y de validación comienzan a separarse a partir de esas componentes.

#### 4.3.6. Humedad relativa y temperatura

Los datos de humedad relativa y temperatura fueron recolectados durante la medición de la misma forma que se hizo en el sistema estático, presentándolos a continuación en la figura 4.39 junto con un acercamiento para observar mejor los cambios:



**Figura 4.39:** Datos de humedad relativa y temperatura durante la medición en el sistema dinámico.

La humedad relativa y temperatura se presentan a pequeña escala para observar los cambios a lo largo de la medición, sobre todo en la humedad relativa, el acercamiento permite apreciar la forma de estos cambios. La temperatura presenta una variación total de aproximadamente  $1^{\circ}\text{C}$  a lo largo de la medición. La humedad relativa presenta variaciones abruptas producidas por los cambios de flujo, mostrando que al hacer pasar la acetona esta aumenta, de igual forma que lo hace al disminuir la magnitud del flujo. Estas variaciones son de hasta 2%, lo cual no es muy elevado, sin embargo, la rapidez con la que se presentan puede llegar a introducir algún efecto en las mediciones, por lo que esto debe de ser analizado en el futuro.

Estos fueron los resultados obtenidos en el sistema dinámico. Se logró la implementación de los sensores MZI de doble paso en este sistema, recabando los datos lo más rápido posible, aplicando los métodos de análisis como PCA, PLS y sus regresiones (PCR y PLSR) de distintas formas para observar el comportamiento de los espectros, logrando encontrar posibles relaciones entre los cambios observados y los parámetros empleados, y teniendo un primer acercamiento al manejo del sistema dinámico y todo lo que esto implica.

## Capítulo 5

# Conclusiones

La realización de la simulación del comportamiento de un MZI de doble paso se llevó a cabo empleando la teoría de fibras ópticas, así como la propuesta por Liu, et al. y Erdogan, considerando por primera vez un medio externo dado por una mezcla de PDMS-acetona, lo que permitió adquirir los espectros de reflexión deseados, posibilitando el análisis de un sensor de este tipo in silico empleando las técnicas propuestas de PCA y PLS, al igual que la variación de los parámetros con el fin de observar los cambios consecuentes en el sistema y la comparación de resultados con los datos experimentales, encontrando similitudes en ciertos casos. Todo esto abre las puertas hacia la construcción de un modelo más complejo y realista que permita una mejor comparación con los sensores experimentales.

Se estableció el proceso de elaboración de los sensores, logrando la creación de hasta veinte sensores con película reflejante de plata y película sensible, existiendo oportunidad para la optimización de este proceso. Sensores con diferentes películas sensibles fueron caracterizados en el sistema estático empleando los métodos de análisis de datos como PCA y PLS, con los cuales se presentó un mayor porcentaje de varianza en las primeras componentes de estructuras latentes, esto es, mayor cantidad de información en las primeras componentes de PLS, a pesar de esto, las tendencias obtenidas en los valores de ambos métodos son similares. De igual forma se emplearon sus regresiones, PCR y PLSR, con las cuales se obtuvo un LOD teórico de hasta 1.26 ppm con tres componentes para PLSR, lo que se encuentra en el rango deseado ( $\sim 1$  ppm). Las películas de PDMS y PMMA presentan menores LOD, lo que es congruente con el hecho de que son fuertemente afectados por la acetona, mientras que el ApT y ApL no lo son. La sensibilidad obtenida con los valores de LSC1 es casi la misma para todos los sensores.

Se implementó la validación cruzada la cual nos permitió emplear hasta tres componentes para el cálculo de los LOD sin presentar un sobreajuste, consiguiendo con esto LOD en el rango deseado por medio de PLSR.

Se realizó con éxito un primer acercamiento a la implementación del sistema dinámico con sensores de fibra óptica en modo reflexión, consiguiendo la recolección y guardado de los espectros por medio del desarrollo de un programa que lo permitiera, estableciendo parámetros de medición y métodos de análisis para los datos obtenidos pues esto se llevó a cabo desde cero, y encontrando potenciales relaciones entre perturbaciones en el sistema y los cambios observados.

Este sistema y el análisis de datos se pueden optimizar, ya sea en la mejora de la cámara de medición, en la variación de los tiempos de exposición, en los métodos de análisis multivariable empleados o en el depósito de las películas sensibles, todo esto para lograr alcanzar mejores respuestas de los sensores.

Como trabajo a futuro se planea enfocarse en la optimización del sistema dinámico, así como en la implementación de métodos de análisis que permitan exhibir las relaciones deseadas, con la intención de observar las respuestas de los sensores en estado estable y sus etapas transitorias. De igual forma se analizará la respuesta a diferentes humedades, con el propósito de emplear humedades cercanas a las presentadas en el aliento humano.



# Bibliografía

- [1] B. Buszewski et al. «Detection of volatile organic compounds as biomarkers in breath analysis by different analytical techniques». En: *Bioanalysis* 5.18 (2013), págs. 2287-2306. DOI: 10.4155/bio.13.183. URL: <https://doi.org/10.4155/bio.13.183>.
- [2] Y. Saalberg y M. Wolff. «VOC breath biomarkers in lung cancer». En: *Clin. Chim. Acta* 459 (2016), págs. 5-9. DOI: 10.1016/j.cca.2016.05.013. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cca.2016.05.013>.
- [3] L.D. Bos, P.J. Sterk y S.J. Fowler. «Breathomics in the setting of asthma and chronic obstructive pulmonary disease». En: *J. Allergy Clin. Immunol.* 138.4 (2016), págs. 970-976. DOI: 10.1016/j.jaci.2016.08.004.
- [4] C. Anders et al. «A systematic review of breath analysis and detection of volatile organic compounds in COPD». En: *J. Breath Res.* 10.3 (2016), pág. 034002. DOI: 10.1088/1752-7155/10/3/034002.
- [5] O. Herman-Saffar et al. «Early non-invasive detection of breast cancer using exhaled breath and urine analysis». En: *Comput. Biol. Med.* 96 (2018), págs. 227-232. DOI: 10.1016/j.combiomed.2018.04.002. URL: <https://doi.org/10.1016/j.combiomed.2018.04.002>.
- [6] T.D.C. Minh, D.R. Blake y P.R. Galassetti. «The clinical potential of exhaled breath analysis for diabetes mellitus». En: *Diabetes Res. Clin. Pract.* 97.2 (2012), págs. 195-205. DOI: 10.1016/j.diabres.2012.02.006.
- [7] A. Rydosz. «A negative correlation between blood glucose and acetone measured in healthy and type-1 diabetes mellitus patient breath». En: *J. Diabetes Sci. Technol.* 9.4 (2015), págs. 881-884. DOI: 10.1177/1932296815572366. URL: <https://doi.org/10.1177/1932296815572366>.
- [8] A. Amann y D. Smith. *Volatile Biomarkers: Non-Invasive Diagnosis in Physiology and Medicine*. 1a. Elsevier, mayo de 2013, págs. 346-349. ISBN: 978-0-444-62613-4. URL: <https://doi.org/10.1016/C2012-0-01274-4>.
- [9] A. Rydosz. «Sensors for Enhanced Detection of Acetone as a Potential Tool for Noninvasive Diabetes Monitoring». En: *Sensors* 18.7 (2018), pág. 2298. DOI: 10.3390/s18072298. URL: <https://doi.org/10.3390/s18072298>.
- [10] A.K. Pathak y C. Viphavakit. «A review on all-optical fiber-based VOC sensors: Heading towards the development of promising technology». En: *Sensors and Actuators: A. Physical* 338 (2022), pág. 113455. URL: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2022.113455>.
- [11] National Center for Biotechnology Information. *PubChem Compound Summary for CID 180, Acetone*. <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/compound/Acetone>. Accedido: 2025-06-01. 2025.
- [12] F. Esposito. «(INVITED)Chemical sensors based on long period fiber gratings: A review». En: *Results in Optics* 5 (2021), pág. 100196. URL: <https://doi.org/10.1016/j.rio.2021.100196>.
- [13] A. Cusano et al. «Coated Long-Period Fiber Gratings as High-Sensitivity Optochemical Sensors». En: *Journal of Lightwave Technology* 24.4 (2006), págs. 1776-1786. DOI: 10.1109/JLT.2006.871128.

- [14] V. Ahsani et al. «Tapered Fiber-Optic Mach-Zehnder Interferometer for Ultra-High Sensitivity Measurement of Refractive Index». En: *Sensors* 19.7 (2019), pág. 1652. DOI: 10.3390/s19071652. URL: <https://doi.org/10.3390/s19071652>.
- [15] L. Li et al. «All-fiber Mach-Zehnder interferometers for sensing applications». En: *Optics Express* 20.10 (2012), págs. 11109-11120. DOI: 10.1364/OE.20.011109. URL: <https://doi.org/10.1364/OE.20.011109>.
- [16] Y. Liu et al. «Fiber-optic Mach-Zehnder interferometric sensor for high-sensitivity high temperature measurement». En: *Optics Communications* 300 (2013), págs. 194-198. URL: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2013.02.054>.
- [17] Y. Li et al. «Double-Pass In-Line Fiber Taper Mach-Zehnder Interferometer Sensor». En: *IEEE Photonics Technology Letters* 22.23 (2010), págs. 1750-1752. DOI: 10.1109/LPT.2010.2080316.
- [18] *Corning SMF-28 Optical Fiber: Product Information*. PI1036. Corning Optical Fiber Products. Corning. Abr. de 2002.
- [19] T. Okoshi. *Optical Fibers*. 1a. Elsevier, mayo de 1982. ISBN: 978-0-12-525260-7. URL: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-525260-7.X5001-X>.
- [20] A. Vázquez. *Fundamentos de Óptica para Ingeniería Informática*. 1a. Universidad de Alicante, dic. de 1996. ISBN: 84-7908-278-X.
- [21] J. Senior. *Optical Fiber Communications: Principles and Practice*. 3a. Pearson, dic. de 2008. ISBN: 978-0-13-032681-2.
- [22] G. Arfken y H. Weber. *Mathematical methods for physicists*. 6a. Elsevier, jun. de 2005. ISBN: 978-0120885848.
- [23] R. Cannon. *Dynamics of Physical Systems*. Dover. Dover Publications, mayo de 2012, págs. 273-279. ISBN: 978-0486139692.
- [24] J. Jackson. *Classical Electrodynamics*. 2a. John Wiley & Sons, oct. de 1975. ISBN: 978-0471431329.
- [25] X. Ke. *Spatial Optical-Fiber Coupling Technology in Optical-Wireless Communication*. 1a. Springer Singapore, jul. de 2023. ISBN: 978-981-99-1525-5. URL: <https://doi.org/10.1007/978-981-99-1525-5>.
- [26] G. Rego. «Arc-Induced Long Period Fiber Gratings». En: *Journal of Sensors* 2016.1 (2016), pág. 3598634. URL: <https://doi.org/10.1155/2016/3598634>.
- [27] X. Shu, L. Zhang e I. Bennion. «Sensitivity characteristics of long-period fiber gratings». En: *Journal of Lightwave Technology* 20.2 (2002), págs. 255-266. DOI: 10.1109/50.983240.
- [28] S.W. James et al. «A long period grating-based chemical sensor insensitive to the influence of interfering parameters». En: *Optics express* 22 (2014), págs. 8012-8023. DOI: 10.1364/OE.22.008012. URL: <https://doi.org/10.1364/OE.22.008012>.
- [29] Y. Liu et al. «Phase shifted and cascaded long-period fiber gratings». En: *Optics Communications* 164.1-3 (1999), págs. 27-31. URL: [https://doi.org/10.1016/S0030-4018\(99\)00191-1](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(99)00191-1).
- [30] J. Meneses-Mijares et al. «Application of principal component regression in Mach-Zehnder interferometer optical fiber sensors in reflection mode for acetone detection as biomarker of diabetes mellitus». En: *Optics and Laser Technology* 177 (2024), pág. 111196. URL: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2024.111196>.
- [31] B. Saleh y M. Teich. *Fundamentals of Photonics*. 3a. John Wiley & Sons, feb. de 2019, págs. 525-540. ISBN: 9781119506874.
- [32] T. Erdogan. «Cladding-mode resonances in short- and long-period fiber grating filters». En: *Journal of the Optical Society of America* 14.8 (1997), págs. 1760-1773. URL: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.14.001760>.

- [33] J. W. Gooch. *Encyclopedic Dictionary of Polymers*. 2a. Springer New York, mayo de 2011, págs. 653-654. ISBN: 978-1-4419-6247-8. DOI: 10.1007/978-1-4419-6247-8\_10447. URL: [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6247-8\\_10447](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6247-8_10447).
- [34] M. Braun y L. Pilon. «Effective optical properties of non-absorbing nanoporous thin films». En: *Thin Solid Films* 496.2 (2006), págs. 505-514. URL: <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2005.08.173>.
- [35] P. Heller (Ed.). *The Performance of Concentrated Solar Power (CSP) Systems*. 1a. Woodhead Publishing, mayo de 2017, págs. 67-98. ISBN: 978-0-08-100447-0. URL: <https://doi.org/10.1016/C2014-0-03695-7>.
- [36] T. Huynh y L. Binh. *Technical Report: Dispersion in Photonic Systems*. Inf. téc. MECSE-10-2004. Clayton 3168, Australia: Monash University, Department of Electrical and Computer Systems Engineering, oct. de 2004.
- [37] I. H. Malitson. «Interspecimen Comparison of the Refractive Index of Fused Silica». En: *Journal of the Optical Society of America* 55.10 (1965), págs. 1205-1209. URL: <https://doi.org/10.1364/JOSA.55.001205>.
- [38] A. Kolezynski (Ed.) y M. Król (Ed.). *Molecular Spectroscopy - Experimental and Theory*. 1a. Springer Cham, oct. de 2018, pág. 407. ISBN: 978-3-030-01355-4. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-01355-4>.
- [39] J. Rheims, J. Köser y T. Wriedt. «Refractive-index measurements in the near-IR using an Abbe refractometer». En: *Meas. Sci. Technol.* 8.6 (1997), pág. 601. DOI: 10.1088/0957-0233/8/6/003. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0957-0233/8/6/003>.
- [40] G. Quero et al. «Long period fiber grating working in reflection mode as valuable biosensing platform for the detection of drug resistant bacteria». En: *Sensors and Actuators B: Chemical* 230 (2016), págs. 510-520. URL: <https://doi.org/10.1016/j.snb.2016.02.086>.
- [41] E. Baltussen et al. «Sorption Tubes Packed with Polydimethylsiloxane: A New and Promising Technique for the Preconcentration of Volatiles and Semi-Volatiles from Air and Gaseous Samples». En: *Journal of High Resolution Chromatography* 21.6 (1998), págs. 332-340. URL: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-4168\(19980601\)21:6%3C332::AID-JHRC332%3E3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-4168(19980601)21:6%3C332::AID-JHRC332%3E3.0.CO;2-V).
- [42] M.J. Owen. «Why silicones behave funny». En: *Chemtech* 11.288 (1981). Revisado y reimpresso en *Chimie Nouvelle* 85.27 (2004).
- [43] C. Martínez-Hipatl et al. «Detection of volatile organic compounds by an interferometric sensor». En: *Sensors and Actuators: B Chem.* 147.1 (2010), págs. 37-42. URL: <https://doi.org/10.1016/j.snb.2010.03.042>.
- [44] A. Razak, P. Szabo y A. Skov. «Enhancement of dielectric permittivity by incorporating PDMS-PEG multiblock copolymers in silicone elastomers». En: *RSC Advances* 5.65 (2015), pág. 53054. DOI: 10.1039/c5ra09708h. URL: <https://doi.org/10.1039/C5RA09708H>.
- [45] U. Ali, J.-BT. Karim y N.-A. Buang. «A Review of the Properties and Applications of Poly (Methyl Methacrylate) (PMMA)». En: *Polymer Reviews* 55.4 (2015), págs. 678-705. URL: <https://doi.org/10.1080/15583724.2015.1031377>.
- [46] M. Shima et al. «Dipole Moments of Isotactic and Syndiotactic Poly(methyl methacrylate) and Their Temperature Dependence». En: *Polymer Journal* 26.5 (1994), págs. 579-585. URL: <https://doi.org/10.1295/polymj.26.579>.
- [47] *Apiezon T Grease: Medium Temperature Vacuum Grease*. Apiezon. Ene. de 2018.
- [48] *Apiezon L, M & N Greases: Ultra High and High Vacuum Greases*. Apiezon. Ene. de 2018.
- [49] S. Muñoz-Aguirre, T. Nakamoto y T. Moriizumi. «Study of deposition of gas sensing films on quartz crystal microbalance using an ultrasonic atomizer». En: *Sensors and Actuators B: Chemical* 105.2 (2005), págs. 144-149. URL: <https://doi.org/10.1016/j.snb.2004.05.063>.

- [50] J.L. Garciapiña et al. «Application of the principal components analysis technique to optical fiber sensors for acetone detection». En: *Optics and Laser Technology* 143 (2021), pág. 107314. URL: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2021.107314>.
- [51] O. Sosa-Ramos et al. «Study of the effect of relative humidity on the classification of volatile organic compounds for a quartz crystal microbalance sensors array». En: *Sensors and Actuators A: Physical* 387 (2025), pág. 116465. URL: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2025.116465>.
- [52] R. Johnson y D. Wichern. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 6a. Pearson, abr. de 2007. ISBN: 978-0-13-187715-3.
- [53] C. Alciaturi et al. «Partial least squares (PLS) regression and its application to coal analysis». En: *Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia* 26.3 (2003), págs. 197-204. ISSN: 0254-0770.