



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

**Estudio de las propiedades de la
helicidad magnética en plasmas**

Tesis Presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito para la obtención del grado de

Maestra en Física Aplicada

por

Ana María Iglesias Reséndiz

asesorado por

Dr. José Julio Emilio Herrera
Velázquez y Dra. Mercedes Paulina
Velázquez Quesada

Puebla, Pue.
diciembre de 2023

Estudio de las propiedades de la helicidad magnética en plasmas

Tesis

Ana María Iglesias Reséndiz Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez y Dra. Mercedes Paulina
Velázquez Quesada



Facultad de Ciencias
Físico Matemáticas

Título: Estudio de las propiedades de la helicidad magnética en plasmas.

Estudiante: Ana María Iglesias Reséndiz

COMITÉ

Dr. Francisco Gerardo Torres del Castillo
Presidente

Dra. Ana Aurelia Avilez López
Secretario

Dra. Maria Isabel Pedraza Morales
Vocal

Dr. Marco Antonio Martínez Fuentes
Suplente

Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez y Dra. Mercedes Paulina Velázquez
Quesada
Asesores

Agradecimientos

A mis padres y familia que me apoyaron en todas mis decisiones, que estuvieron conmigo en momentos difíciles siempre viendo por mi bienestar, a Frida que estuvo conmigo en los momentos más críticos de la escritura de este trabajo, y finalmente a ti, Manuel, por ayudarme en todo cuanto has podido y recordarme que soy capaz de hacer cuánto mi voluntad anhele.

Índice general

1. Fundamentos de física de Plasma	3
1.1. Introducción	4
1.1.1. Dinámica de partículas individuales	4
1.2. Invariantes adiabáticos	9
1.2.1. Momento magnético μ	11
1.3. Modelo cinético	14
1.4. Modelo de fluidos	15
1.4.1. Primer momento	17
1.4.2. Segundo momento	18
1.5. Magnetohidrodinámica	19
1.5.1. MHD ideal	21
1.5.2. Equilibrio axisimétrico	23
1.5.3. Ecuación de Grad Shafranov	27
1.6. Estabilidad MHD	29
1.6.1. Inestabilidad de rizo	32
1.7. Reconexión magnética	35
2. Sistemas toroidales	39

2.0.1.	Reversed Field Pinch	39
2.0.2.	Tokamak	41
2.1.	Stellarators	42
3.	Rompimiento de axisimetría en sistemas toroidales	45
3.1.	Observaciones experimentales	45
3.1.1.	Tokamak	47
3.1.2.	Reversed Field Pinch	52
4.	Helicidad e interpretación topológica	55
4.1.	Ligadura de Gauss	55
4.2.	Invariantes topológicos	57
4.2.1.	Invariante de Hopf	58
4.2.2.	Invariancia topológica de la helicidad cruzada	61
4.2.3.	Helicidad magnética	62
4.2.4.	Helicidad cruzada	64
4.3.	Interpretación topológica de la helicidad	67
4.3.1.	Helicidad de torcimiento	68
4.3.2.	Relajación de Woltjer-Taylor	70
4.3.3.	Ecuación del campo libre de fuerzas.	73
4.3.4.	Comparación de la energía magnética con la helicidad magnética. . .	80
4.3.5.	Geometría tridimensional	81
4.3.6.	Inestabilidad de rizo con twist y writhe	88
4.3.7.	Helicidad y reconexión magnética	89
5.	Contribuciones de la helicidad magnética	91
5.1.	Discusión del ángulo de Hannay en el marco de la helicidad magnética . . .	92

5.2. Estudio de la helicidad mediante los vectores de Frenet	98
5.3. Efecto Aharonov-Bohm con helicidad magnética	105
6. Conclusiones	109

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo hacer un análisis de la helicidad magnética como invariante topológica y encontrar algunas de sus propiedades que permiten un estudio más amplio de las superficies magnéticas.

En el primer capítulo se dan todos los fundamentos de la física de plasma necesaria para usos de este trabajo, en caso de conocer del tema, puede saltarse directamente al capítulo 3. Se parte de la dinámica de partículas individuales en presencia de campos magnéticos, de donde nos basamos para arribar al modelo cinético y al de fluidos, el primero da seguimiento a la evolución temporal de la distribución de iones y electrones, el segundo considera que el plasma tiene un fluido positivo y uno negativo haciendo posible caracterizar el plasma con la velocidad promedio del fluido positivo y, haciendo ciertas consideraciones se revisa el modelo magnetohidrodinámico (MHD). Con este modelo se hace el cálculo del equilibrio en sistemas axisimétricos de fusión nuclear tipo Tokamak y Reversal Field Pinch (RFP). Después se revisa la estabilidad de tales sistemas, tópico importante para el confinamiento magnético con fines de fusión, para ello se plantearon las inestabilidades más comunes en física de plasma. Finalmente se llega al fenómeno de la reconexión magnética, que es de nuestro particular interés pues la helicidad se mantiene invariante ante este fenómeno a diferencia de la energía magnética, lo que hace que esta cantidad sea más robusta y pueda proveer más información del fenómeno.

En el capítulo 2 se hace un pequeño resumen sobre los tipos de dispositivos de confinamiento magnéticos, sus características y las propiedades de los campos magnéticos helicoidales bidimensionales y tridimensionales. En el capítulo 3 se hace una recopilación de los resultados experimentales descritos por Cooper en donde se pone ex profeso el hecho de que pese a tener sistemas diseñados para la axisimetría, ésta tenderá, experimentalmente, a transformarse al menos de manera local en sistemas no axisimétricos, con el eje retorcido. En el capítulo 4 se explora la helicidad como invariante topológica, se da la demostración en términos de geometría diferencial para el caso general, posteriormente se revisan individualmente la helicidad magnética y cruzada. Y con ello se llega al análisis topológico

de la helicidad magnética para sistemas de confinamiento magnético axisimétricos y no axisimétricos. En el capítulo 5 presentan cálculos que hacen ver algunos alcances de la helicidad magnética en distintas geometrías. Finalmente el capítulo 6 arriba a las conclusiones. Los objetivos son los siguientes:

- Revisar la helicidad magnética como invariante topológica.
- Revisar la información que tal cantidad da al análisis de los campos magnéticos de los dispositivos con fines de fusión.
- Encontrar una aplicación a la robustez de la helicidad magnética a sistemas no axisimétricos y ver las implicaciones del cambio de topología en los campos magnéticos.

Introducción

En 1927 Mark Oliphant cuando realizaba estudios con un acelerador de partículas, disparando núcleos de ${}^2\text{H}^+$ contra blancos, descubrió que el He^3 y el H^3 reaccionan entre sí y fue la primera demostración de la fusión nuclear. Para 1929 Atkinson y Houtemans plantearon la posibilidad de obtener energía a partir de la fusión, tomando los textos de Einstein, con su famosa ecuación $E = mc^2$, que relaciona la masa con la energía y con ello se explicó el modo en que las estrellas irradian energía en términos de luz y calor.

Posterior a la segunda guerra mundial, en 1952 se empezó a desarrollar el proyecto Sherwood, que planteaba el uso comercial de la fusión para obtener energía barata e inagotable de la mano de Lyman Spitzer, quien ideó un reactor de confinamiento magnético **Stellarator** con campos helicoidales en 1951, pero hasta 1953 no se puso en operación. Mientras en la URSS en 1950 Oleg Lavrentiev hacía los primeros bosquejos de lo que sería uno de los primeros reactores de confinamiento magnético. En 1951 se crea el generador magnético implosivo (MK1) cuyo funcionamiento se basaba en la compresión de campos magnéticos por medio de explosiones, dos años más tarde se realizó el MK2 un afinamiento del MK1 (1953). Ya para 1956 Igor Tam y Andréi Sájarov logran el primer **Tokamak** (cámara toroidal con bobinas magnéticas, por sus siglas en ruso) que consistió en una cámara de vacío toroidal que contenía hidrógeno y un dispositivo que por grandes descargas eléctricas ionizaba el gas y un campo magnético helicoidal confinaba el plasma. Estos, el Stellarator y el Tokamak, son los dos reactores de fusión más estudiados hasta el momento, y de los cuales el proyecto más grande y ambicioso hasta el momento es el **ITER** (International Thermonuclear Experimental Reactor) que es un reactor tipo Tokamak, que se está construyendo en Francia y en el cual participan varios países como la Unión Europea, Japón, Rusia, China, EE.UU., Corea del sur e India. Se le considera el proyecto científico más complejo de la historia, ya que se ha tenido que realizar por partes, que luego se deben ensamblar en una provincia francesa, en una superficie de 42 hectáreas. El primer plasma que generará este coloso será para diciembre de 2025 e inaugurará el experimento más grande hasta ahora en materia energética.

Todos estos dispositivos tienen problemas con inestabilidades en el confinamiento magnético que no permiten que la fusión nuclear se convierta en una fuente de energía comercial, por lo que es menester estudiar estas inestabilidades con el fin de minimizarlas. En particular, gracias a la topología de los campos magnéticos en sistemas de fusión, éstos poseen una cantidad llamada helicidad magnética, que es una propiedad intrínseca de sistemas con torcimientos y retorcimientos. Esta cantidad fue estudiada primeramente por Gauss, con su integral de ligadura, en la que se calcula la cantidad de intersecciones que pueden tener los sistemas con tubos ligados, que además, es una invariante topológica. Posteriormente Calugareanu en 1956 encuentra un resultado fundamental en la geometría de listones en bucles cerrados y torcidos: define el número de ligadura de Gauss como la suma de la torsión, medida de cuánto se tuerce la cinta, y del *writhe* (retorcimiento) que es la medida de la no planaridad de la cinta. Posteriormente Woltjer [35] demuestra para el caso de los sistemas tipo RFP, que la helicidad magnética juega un papel fundamental en los procesos relajación del plasma. Moffat [26] en 1992 hace un estudio de esta invariante topológica aplicada en campos magnéticos solenoidales, clasificándolos en tres: ligaduras, torcimiento y retorcimiento. Con estos trabajos es posible observar la robustez de la helicidad magnética, pues al ser un invariante topológico ésta ante procesos de relajación se mantiene invariante, a diferencia de la energía magnética que se difunde en el plasma, por lo que esta cantidad es sustancial para la investigación de plasmas con fines de fusión.

Capítulo 1

Fundamentos de física de Plasma

En este capítulo se dará una introducción a la física de plasmas de fusión y confinamiento magnético, es importante recalcar que este capítulo y el siguiente se hicieron pensando en las personas que no están relacionadas con esta rama de la física. Quien esté enterado del tema puede ir directamente al capítulo 3.

Partiremos primeramente del movimiento de partículas individuales en diferentes configuraciones de campo magnético [8], donde empezarán a aparecer las derivas, posteriormente encontraremos los tres invariantes adiabáticos originados por la naturaleza oscilatoria de las partículas cargadas en campos magnéticos [6].

Posteriormente se plantearán los diferentes modelos que se pueden utilizar para estudiar el movimiento de iones y electrones y llegar finalmente a la MHD ideal. El primer modelo, el cinético, es el más detallado, en él se da seguimiento a la evolución temporal de la función de distribución de cada especie de partículas. El siguiente modelo, el de fluidos, no es tan detallado pues considera que existen dos fluidos: uno de iones y otro de electrones, con ello se enfoca en un régimen específico de física cuyas ecuaciones son más simples de resolver. Posteriormente se hace una aproximación, haciendo algunas consideraciones en la magnitud de las velocidades, frecuencias, escalas de interés y en las ecuaciones de Maxwell. Finalmente se llega a la MHD ideal, donde únicamente se elimina la resistividad y se llega a su formulación conservativa.

Por último se hace una revisión del equilibrio para sistemas axisimétricos llegando a la ecuación de Grad-Shafranov, seguida de una introducción a la estabilidad haciendo hincapié en la inestabilidad tipo rizo y culminando con una síntesis esquemática del fenómeno

de reconexión magnética.

1.1. Introducción

El plasma es el cuarto estado de la materia, en el cual la energía cinética de los átomos es tan alta que al colisionar se desprenden electrones, lo que a diferencia de un gas convencional, lo ioniza. Por lo que tiene características intrínsecas, es conductor y por lo tanto reactivo a campos eléctricos y magnéticos, es cuasineutro, por lo general un volumen de cualquier sustancia, en promedio es neutra, ya que posee la misma cantidad de partículas positivas y negativas, pero tiene la particularidad de que se comporta como un fluido sin carga si es visto de manera externa, al estudiar su comportamiento como el conjunto de partículas cargadas se toma como fluido cuasineutro, ya que hay una pequeña diferencia en la cantidad de partículas positivas y negativas. Otra característica es su comportamiento colectivo, ya que el plasma en su conjunto es capaz de generar campos magnéticos y eléctricos los cuales a su vez pueden reaccionar, además de que el efecto de la fuerza eléctrica es de muy largo alcance y hace que las partículas estén acopladas en todo momento, por lo que puede responder colectivamente a cualquier alteración. Para usos de fusión el plasma es confinado magnéticamente, por lo que es conveniente en primera instancia describir la dinámica de partículas individuales en presencia de diferentes configuraciones de campos magnéticos.

Enseguida se calcularán los invariantes adiabáticos, que nos proveen de cantidades conservadas en movimientos periódicos. Después de ello, se revisará el comportamiento colectivo del plasma, lo más directo es el modelo de la función de distribución de probabilidad con seis dimensiones espaciales y una temporal $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$, aunque el rango de escalas de tiempo y espacio es muy amplio en las descripciones más generales y su solución numérica es muy compleja. Lo que hace necesario encontrar otras aproximaciones con el propósito de hacer que la solución numérica sea más sencilla al restringir las escalas de tiempo y espacio.

1.1.1. Dinámica de partículas individuales

Revisaremos las ecuaciones de movimiento de partículas cargadas en presencia de campos magnéticos y eléctricos para verificar cómo es que se comportaría de manera general el plasma, para después con los modelos más sofisticados y dotarle de las características propias de un fluido cargado.

Campos uniformes

El caso más sencillo es en el que tanto el campo magnético y eléctrico son uniformes ($\vec{E} = E(\hat{x} + \hat{z}), \vec{B} = B_0\hat{z}$), por lo que la partícula simplemente tendrá un movimiento circular con un radio de Larmor ($r_L = v_\perp/\omega_c$) y una deriva del centro guía. Escribimos su ecuaciones de fuerza:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.1)$$

Haciendo algunos cálculos obtenemos:

$$\begin{aligned} v_x &= v_\perp e^{i\omega_c t}, \\ v_y &= \pm i v_\perp e^{i\omega_c t} - \frac{E_x}{B}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde v_\perp es la velocidad perpendicular al campo, $\omega_c = |q|B/m$ es la frecuencia del ciclotron.

Lo que interpretamos de las ecuaciones 4.126 es que la dinámica se rige por la superposición del movimiento de Larmor (parte exponencial de las velocidades) y el movimiento generado por el campo eléctrico E_x/B del centro guía en la dirección $-y$. Ahora para obtener la forma general de este movimiento, de la ecuación 1.1 omitimos la parte izquierda pues sólo da la dinámica circular de la frecuencia sincrotrónica ω_c , por lo que:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0, \quad (1.3)$$

de donde, tomando el producto cruz de la ecuación anterior y hacemos algunos cálculos, encontramos la velocidad del centro guía:

$$v_{cg} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \equiv v_e, \quad (1.4)$$

donde v_e es la velocidad de deriva del centro guía debido al campo eléctrico, esto es la velocidad que una partícula alcanza debido a un campo. Ahora, anexando la presencia de campos gravitatorios, si reemplazamos $q\vec{E}$ de la ecuación 1.1 por una fuerza genérica \vec{F} la deriva causada por esta fuerza sería:

$$v_f = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (1.5)$$

Por lo que, si en particular hacemos $F = mg$ la deriva gravitatoria resulta:

$$v_g = \frac{m}{g} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (1.6)$$

Con lo anterior, podemos suponer la existencia de una densidad de corriente en el plasma dada por:

$$\vec{j} = n(M + m) \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}, \quad (1.7)$$

n es el número de partículas, M es la masa de un ión y m la masa del electrón.

Una vez entendido el movimiento en campos uniformes, ahora podemos introducir las ecuaciones cuando estos no son uniformes.

Campos no uniformes

$$\nabla B \perp B$$

Las líneas de campo son rectas pero su densidad aumenta en una dirección arbitraria, esto hace que el radio de Larmor sea más grande en la parte de abajo del ciclo que en la de arriba, lo que deja un desplazamiento perpendicular a \vec{B} y $\nabla \vec{B}$, la velocidad será proporcional a r_L/L y v_\perp , donde L **la escala longitudinal de la inhomogeneidad** y r_L es el radio de Larmor. Considerando ahora, la fuerza de Lorentz promediada a un giro, donde el gradiente esta en el eje y obtenemos:

$$F_y = -qv_x B_z(y) = -qv_\perp \cos \omega_c t B_z(y), \quad (1.8)$$

donde podemos calcular B_z con una expansión en serie de Taylor, con \vec{x} el movimiento de giro de la partícula no perturbado:

$$B_z = B_0 + (\vec{x} \cdot \nabla) B + \dots \quad (1.9)$$

Haciendo los cálculos pertinentes, tomando únicamente los primeros dos términos de la serie obtenemos

$$F_y = -qv_{B_0 t} \cos(\omega_c t) \left[B_0 \pm r_L (\cos \omega_c t) \frac{\partial B_z}{\partial y} \right]. \quad (1.10)$$

La cual requiere que $\frac{r_L}{L} \ll 1$, promediando nos queda:

$$\bar{F}_y = \pm qv_\perp r_L \frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial y}. \quad (1.11)$$

Para encontrar la deriva asociada a la fuerza 1.11 podemos usar la ecuación 1.5, lo que resulta en:

$$v_{F_y} = \pm \frac{v_\perp r_L}{2B} \frac{\partial B_z}{\partial y}. \quad (1.12)$$

Notemos que arbitrariamente elegimos el eje del gradiente, pero podemos generalizar el resultado como sigue:

$$v_{\nabla B} = \pm \frac{1}{q} \frac{\nabla \vec{B} \times \vec{B}}{B^2} \frac{1}{2} v_{\perp} r_L. \quad (1.13)$$

\vec{B} curvo

Las líneas de fuerza tienen un radio de curvatura constante R considerando $|\vec{B}| = cte$. En este tipo de campo la ley de Ampere es igual a cero, por lo que en la práctica la deriva del gradiente tendrá añadido el efecto de curvatura. Surge de la fuerza centrífuga que sienten las partículas cuando se mueven a lo largo de las líneas de fuerza; si v_{\parallel}^2 denota el promedio del cuadrado de la componente de alguna velocidad a lo largo de B , el promedio de la fuerza centrípeta es:

$$F_{cf} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c} \hat{r} = mv_{\parallel}^2 \frac{\vec{R}_c}{R_c^2}. \quad (1.14)$$

Usando 1.5 obtenemos:

$$v_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2}. \quad (1.15)$$

Obtendremos la deriva $\nabla \vec{B}$ que acompaña a la anterior cuando se considera un decrecimiento de $|\vec{B}|$ de acuerdo al radio. En coordenadas cilíndricas $\nabla \times \vec{B}$ tiene una sola componente en z . Ya que B sólo tiene una componente en φ y $\nabla \vec{B}$ sólo una componente en r :

$$(\nabla \times \vec{B}_z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_{\varphi}) = 0, \quad (1.16)$$

Entonces:

$$|B| \propto \frac{1}{R_c}, \quad \frac{\nabla |\vec{B}|}{|\vec{B}|} = -\frac{\vec{R}_c}{R_c^2}. \quad (1.17)$$

Usando la ecuación 1.13 resulta:

$$v_{\nabla B} = \pm \frac{m}{q} \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{B^2 R_c^2}. \quad (1.18)$$

Añadiendo a la ecuación anterior a 1.15 tendremos la deriva total de un campo curvado en el vacío:

$$v_R + v_{\nabla B} = \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c B^2} \frac{m}{q} (v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2). \quad (1.19)$$

Esta adición es desafortunada, si se curva el campo hasta hacer un toro con el fin de confinar a las partículas, éstas se desviarán hacia las paredes, tal como se ve en la ecuación 1.19. Para una distribución de Maxwell:

$$E_{av} = \frac{1}{4} mv^2 = 2K_B T, \quad (1.20)$$

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DE FÍSICA DE PLASMA

con K_B la constante de Boltzmann. Por cada grado de libertad tenemos un término como el anterior, por lo que indicando que \bar{v}_{\parallel} y $\frac{1}{2}v_{\perp}^2$ cada una es igual a $\frac{KT}{m}$, y sabiendo que la velocidad perpendicular involucra 2 grados de libertad, las ecuaciones de ω_c nos permiten escribir el promedio de la deriva de curvatura como:

$$\overline{v_{R+\nabla B}} = \pm \frac{r_L^2}{R_c} \left(\frac{2KT}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{i}, \quad (1.21)$$

\hat{i} es la dirección del producto cruz $\vec{R}_c \times \vec{B}$, podemos notar que el signo aquí depende de las cargas y no de las masas.

$$\nabla \vec{B} \parallel \vec{B}$$

Consideramos un campo magnético que es puntiagudo en el eje z y cuya magnitud varía cerca de la dirección z , es axisimétrico con respecto de z , $B_{\theta} = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$, donde F es una función arbitraria, es decir θ es una coordenada despreciable por lo que cualquier parcial respecto a esta coordenada es cero. Las líneas de fuerza necesariamente están en B_r . Mostraremos que esto es favorecedor al confinamiento.

Usamos la divergencia para obtener B_r :

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (1.22)$$

Si $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ no varía mucho con r , integramos:

$$r B_r = - \int_0^r r \frac{\partial B_z}{\partial z} dr \approx - \frac{1}{2} r^2 \left[\frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_r = 0 = - \frac{1}{2} r C(r), \quad (1.23)$$

$\frac{\partial B_z}{\partial z}$ es una constante en términos de z ya que sólo depende de r que ya escribimos como $C(r)$. Tomando la fuerza de Lorentz y descomponiéndola obtenemos:

$$\begin{aligned} F_r &= q(v_{\theta} B_z - v_z B_{\theta}) = q(v_{\theta} B_z), \\ F_{\theta} &= q(B_r v_z - v_r B_z), \\ F_z &= q(v_r B_{\theta} - B_r v_{\theta}) = q(-B_r v_{\theta}). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Notemos que F_r y $-q v_r B_z$ originan el giro de Larmor, además este segundo término no interviene en el eje z , si $v_z \neq 0$ habrá una deriva a lo largo del radio. Analicemos F_z :

$$F_z = q(-B_r v_{\theta}) = \frac{1}{2} v_{\theta} r C(r). \quad (1.25)$$

1.2. Invariantes adiabáticos

Promediando sobre el giro $v_\theta = \pm v_\perp$, dependiendo del signo de q , para un giro tenemos:

$$F_z = \pm \frac{1}{2} q v_\perp r_L \frac{\partial B_z}{\partial z} = \pm \frac{v_\perp}{2} \frac{m v_\perp}{q B} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{m v_\perp^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mu \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (1.26)$$

$$\mu = \frac{m v_\perp^2}{2B}, \quad (1.27)$$

Esto último es el momento magnético μ de la partícula, y es un invariante además de que podemos escribir algo más general:

$$F_{\parallel} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s}. \quad (1.28)$$

Donde ∂s es un elemento de línea de campo a lo largo de un campo cualquiera. Podemos ver que la energía de la partícula se conserva si no hay efectos disipativos:

$$m \frac{d v_{\parallel}}{d t} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} = m v_{\parallel} \frac{d v_{\parallel}}{d t} = v_{\parallel} - \mu \frac{\partial B}{\partial s} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = -\mu \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (1.29)$$

$$\frac{d}{d t} \left(\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) = -\mu \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (1.30)$$

1.2. Invariantes adiabáticos

Considérese un movimiento oscilatorio con periodo β . Si un parámetro λ del sistema es tal que varía lentamente respecto al periodo, es decir:

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d \lambda}{d t} \ll \frac{1}{\beta}, \quad (1.31)$$

y existe una relación entre la energía E y λ que permanezca constante durante la dinámica del sistema, entonces a λ se le conoce como un invariante adiabático.

Para demostrar lo anterior, suponga una partícula que esta haciendo un movimiento periódico en el plano $p - q$, que tiene una hamiltoniana de la forma:

$$H = (p, q, \lambda) = E(t), \quad (1.32)$$

note que no depende explícitamente del tiempo por lo que coincide con la energía mecánica total de la partícula.

Vamos a tomar que la partícula en cuestión tiene su punto de retorno en una posición

$q = q_{pr}$ tal que:

$$\frac{dq}{dt} = 0. \quad (1.33)$$

Dado que la posición q está oscilando, existirán varios puntos de retorno asociados a q en sus valores máximo y mínimo, en este ejemplo utilizaremos únicamente el punto de retorno máximo, es decir, se tomarán los puntos del lado derecho de las trayectorias como se puede ver en la figura:

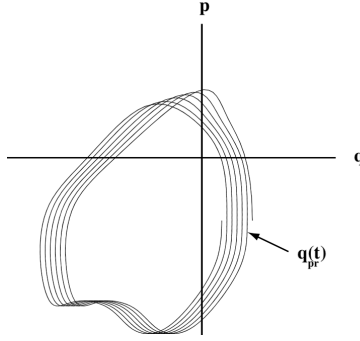


Figura 1.1: Trayectoria espacial de fase para una hamiltoniana de cambio lento. Tomada de Bellan [6]

Note que en un movimiento periódico el punto de retorno es siempre el mismo, mientras que si la dinámica es aproximadamente periódica, habrá una diferencia, como se ve en la figura anterior. Esta diferencia se puede caracterizar en el punto de retorno como función del tiempo:

$$q_{pr}(t + \tau) \neq q(t), \quad (1.34)$$

donde τ es el intervalo de tiempo necesario para que la partícula vaya de un punto de retorno al siguiente. La integral de la acción sobre un periodo completo iniciando en el q_{pr} del lado derecho es:

$$S = \oint pdq = \int_{q_{pr}(t)}^{q_{pr}(t+\tau)} pdq \quad (1.35)$$

Ahora calculamos su derivada respecto del tiempo:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{q_{pr}(t)}^{q_{pr}(t+\tau)} p(E(t), q, \lambda(t)) dq = \left[p \frac{dq}{dt} \right]_{q_{pr}(t)}^{q_{pr}(t+\tau)} + \int_{q_{pr}(t)}^{q_{pr}(t+\tau)} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_q dq, \quad (1.36)$$

1.2. Invariantes adiabáticos

en los puntos de retorno se cumple la ecuación 1.33 y en general se satisface 1.32, por lo que encontramos la siguiente relación:

$$\int_{q_{pr}(t)}^{q_{pr}(t+\tau)} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_q dq = \int \left[\left(\frac{\partial p}{\partial E} \right)_{q,\lambda} \frac{dE}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_{q,E} \frac{d\lambda}{dt} \right] dq. \quad (1.37)$$

De la ecuación 1.32 se derivan las siguientes ecuaciones:

$$1 = \frac{\partial H}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial E} \right)_{q,\lambda} \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_{q,E} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}. \quad (1.38)$$

Sustituyendo en la ecuación 1.36 obtenemos:

$$\frac{dS}{dt} = \oint \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^{-1} \left[\frac{dE}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right] dq, \quad (1.39)$$

utilizando la ecuación 1.32 y las ecuaciones de Hamilton $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ y $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$, es posible ver que:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}. \quad (1.40)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en 1.39 se concluye que la derivada de la acción es cero, es decir es constante durante la dinámica del sistema, entonces hay una invariancia adiabática, ya que encontramos una relación entre la hamiltoniana (que en este caso coincide con la energía) y el parámetro λ que permanece constante.

Estas constantes de movimiento son importantes ya que son aproximadamente constantes incluso si la simetría en cuestión se rompe. Lo fundamental es que tal ruptura produzca una ligera desviación de la orbita cerrada inicial, en caso contrario, donde las trayectorias de las partículas sean estocásticas, la orbita no será periódica y los invariantes dejarán de ser cantidades conservadas.

En la dinámica del centro guía se supone que cualquier dependencia temporal es lenta respecto al movimiento de giro, y la variación espacial es pequeña en la escala del radio de giro, por lo que tendrá invariantes adiabáticos.

1.2.1. Momento magnético μ

En la sección anterior definimos el momento magnético:

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}, \quad (1.41)$$

y se probó que es un invariante en el tiempo y espacio con la variación del campo magnético. En este caso el movimiento periódico asociado a esta invariante adiabática es el giro de Larmor. Si tomamos que el momento generalizado es el momento angular y la coordenada generalizada es el ángulo θ , podemos hacer la integral de la acción:

$$\int pdq = \int mv_{\perp} r_L d\theta = 2\pi m v_{\perp} r_L = 2\pi \frac{m v_{\perp}^2}{\omega_c} = 4\pi\mu \frac{m}{q}. \quad (1.42)$$

Lo anterior es un invariante siempre que $\frac{m}{q}$ sea constante. En el caso donde la frecuencia de giro ω no sea pequeña respecto a la frecuencia del ciclotrón, se viola su invariancia.

Cabe resaltar que como el flujo de campo magnético en una órbita está dado por:

$$\Phi = B\pi r_L^2 = \frac{2m\pi}{q^2}\mu, \quad (1.43)$$

lo cual implica que la conservación del momento magnético también implica la conservación del flujo en una órbita. Lo que es consistente con el término de flujo congelado en el plasma, pues si el campo se vuelve más fuerte las líneas de campo se juntan de tal manera que la densidad de líneas por unidad de área aumenta en proporción a la fuerza del campo. En consecuencia, la contracción del área de las órbitas es inversamente proporcional a la fuerza del campo, por lo que después de la compresión del campo magnético el número de ligaduras tiene que ser el mismo antes y después de la compresión.

Invariante longitudinal \mathcal{J}

Si tomamos el caso en el que se tenga una configuración con dos espejos magnéticos, una partícula queda confinada entre ellos y tienen una dinámica periódica con una frecuencia de rebote entre los espejos. Por lo que tiene asociado una constante de movimiento:

$$\oint mv_{\parallel} ds, \quad (1.44)$$

ds es un elemento de longitud de la trayectoria del centro guía a lo largo de las líneas de campo magnético. Como la dinámica del centro guía cruza de una línea a otra, el movimiento no es exactamente periódico, por lo que \mathcal{J} es un invariante adiabático, que está definido entre los dos puntos de retorno.

$$\mathcal{J} = \int_a^b v_{\parallel} ds, \quad (1.45)$$

para probar su invariancia, calculemos la invariancia de $v_{\parallel} \delta s$, con δs un segmento de línea

1.2. Invariantes adiabáticos

de campo sabemos el centro guía después de un tiempo Δt se encontrará en otra línea $\delta s'$, por lo que obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{\delta s}{R_c} = \frac{\delta s'}{R'_c}, \quad (1.46)$$

R_c es el radio de curvatura. Así tenemos:

$$\frac{\delta s' - \delta s}{\delta s \Delta t} = \frac{R'_c - R_c}{R_c \Delta t}. \quad (1.47)$$

La componente radial, sería la velocidad del centro guía por el vector normal del radio de curvatura:

$$v_{gc} \cdot \frac{\vec{R}_c}{R_c} = \frac{R'_c - R_c}{R_c \Delta t}, \quad (1.48)$$

de las ecuaciones 1.13 y 1.15, vemos que:

$$v_{gc} = v_{\nabla B} + v_r = \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\vec{B} \times \nabla \vec{B}}{B^2} + \frac{mv^2}{q} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2}, \quad (1.49)$$

lo que permite reescribir la ecuación 1.47:

$$\frac{1}{\delta s} \frac{d}{dt} \delta s = v_{gc} \cdot \frac{\vec{R}_c}{R_c} = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{qB^3} \vec{B} \times \nabla \vec{B} \cdot \frac{\vec{R}_c}{R_c}, \quad (1.50)$$

lo anterior es la razón de δs . Ahora debemos encontrar la razón de cambio de v_{\parallel} . Para lo cual necesitamos separar la energía paralela de la perpendicular:

$$W = \frac{1}{2} mv_{\perp}^2 + \frac{1}{2} mv_{\parallel}^2 = \mu B + \frac{1}{2} mv_{\parallel}^2 = W_{\perp} + W_{\parallel}, \quad (1.51)$$

despejamos v_{\parallel} :

$$v_{\parallel} = \sqrt{(W - \mu B) \frac{2}{m}}. \quad (1.52)$$

Cabe recalcar que en la ecuación anterior únicamente el campo magnético es variable. Así:

$$\frac{\dot{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} = -\frac{1}{2} \frac{\mu \dot{B}}{W_{\parallel}} = -\frac{1}{2} \frac{\mu \dot{B}}{mv_{\parallel}^2}. \quad (1.53)$$

Calculemos \dot{B} ,

$$\dot{B} = \frac{d\vec{B}}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = V_{gc} \cdot \nabla B = \frac{mv_{\parallel}^2}{q} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B^2} \cdot \nabla \vec{B}. \quad (1.54)$$

Sustituimos 1.54 en 1.53:

$$\frac{\dot{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} = -\frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{qB} \frac{(\vec{B} \times \nabla \vec{B} \cdot \vec{R}_c)}{R_c^2 B^2}, \quad (1.55)$$

así el cambio $v_{\parallel\delta s}$ es:

$$\frac{1}{v_{\parallel\delta s}} \frac{d}{dt}(v_{\parallel\delta s}) = \frac{1}{\delta} \frac{d\delta s}{dt} + \frac{1}{v_{\parallel}} \frac{dv_{\parallel}}{dt}, \quad (1.56)$$

y podemos ver que los términos del lado derecho son el inverso el uno del otro, como se ve en las ecuaciones 1.55 y 1.50, por lo tanto $v_{\parallel\delta s}$ es una constante. Ahora, si tomamos la integral:

$$\mathcal{J} = \int_a^b v_{\parallel} ds = \text{constante}, \quad (1.57)$$

por lo que \mathcal{J} se conserva.

1.3. Modelo cinético

El modelo cinético es el modelo más detallado, consiste en el seguimiento de la evolución temporal de la función de distribución de los iones y electrones. Es posible caracterizar la configuración instantánea de muchas partículas especificando la densidad de partículas para cualquier posición y velocidad en el espacio fase. La función que describe tal densidad es la función de distribución de velocidades $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$, para cada especie $\alpha = i, e$ se tiene una función:

$$f_{\alpha} = f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (1.58)$$

A partir de esta ecuación es posible calcular el número de partículas en un tiempo t que se encontraban en un rango de posiciones entre x y $x + dx$ y un rango de velocidades v y $v + dv$. Posteriormente con la evolución temporal del sistema, el movimiento y aceleración de las partículas en esos rangos cambia por lo que f_{α} cambia.

Usando la función de distribución para caracterizar al sistema, tenemos una explicación más detallada que la descripción de un fluido, pero menos detallada la descripción de las trayectorias individuales de las partículas. En la que se distinguen las clases que posean la misma posición y velocidad. Consideremos la tasa de cambio de la función de distribución unidimensional para el caso de una caja en el espacio fase (x, v) , es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha}(x, v, t)}{\partial t} dx dv &= -f_{\alpha}(x + dx, v, t) v dv + f_{\alpha}(x, v, t) v dv \\ &\quad - f_{\alpha}(x, v + dv, t) x dv + f_{\alpha}(x, v, t) x dv \\ &\quad + f_{\alpha}(x, v, t) a(x, v, t) dt. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Si la parte derecha de la ecuación 1.59 se expande en serie de Taylor, y se generaliza a tres dimensiones obtenemos la ecuación de Vlasov:

$$\frac{\partial f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial}{\partial \vec{v}} (\vec{a} f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t)) = 0, \quad (1.60)$$

donde \vec{a} es la aceleración de la fuerza de Lorentz:

$$a = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.61)$$

Podemos escribir de manera más exacta la ecuación de Vlasov al tomar en cuenta las posibles colisiones entre especies y la existencia de fuentes externas de partículas:

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial}{\partial \vec{v}} (\vec{a} f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)) = C_{\alpha'} + S_{\alpha'} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col}, \quad (1.62)$$

donde $C_{\alpha'} = \sum_{\alpha'} C_{\alpha\alpha'}$ es el operador de colisiones entre especies α y α' y $S_{\alpha'}$ hace referencia a las fuentes externas de partículas, sus momentos y energía. Así mismo englobamos tales efectos en el término $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col}$. Las ecuaciones de Maxwell quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= -\frac{\partial B}{\partial t}, & \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho_q, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1.63)$$

la densidad de corriente y de carga están dadas por:

$$\rho_q = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{x}, t) d^3 \vec{v}, \quad (1.64)$$

$$\vec{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \vec{v} f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3 \vec{v}. \quad (1.65)$$

Con esto se logró hacer el promedio de de todas las partículas de alguna especie que tuvieran la misma velocidad en una posición dada, lo que permite caracterizar el plasma con la función de distribución, como se ve en las ecuaciones de Maxwell que ya contienen la información de dicha función.

1.4. Modelo de fluidos

Consideremos una cierta función $g(\vec{v}, t)$ arbitraria, cuyo promedio es:

$$\langle g(\vec{v}, t) \rangle = \frac{\int g(\vec{v}, t) f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{V}}{\int f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{V}}, \quad (1.66)$$

$d\vec{V} = dv_x dv_y dv_z$, sabiendo que la densidad y la velocidad promedio de las partículas son:

$$n(\vec{x}, t) = \int f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v}. \quad (1.67)$$

y

$$\vec{v}_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{\int \vec{v} f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\int f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)}, \quad (1.68)$$

así, usando las ecuaciones 1.66 y 1.67 obtenemos la siguiente relación:

$$\int g(\vec{v}, t) f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{V} = n(\vec{x}, t) \langle g(\vec{v}, t) \rangle. \quad (1.69)$$

Por practicidad, nos referiremos a las funciones $g(\vec{v}, t)$, $f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)$, $n(\vec{x}, t)$, como g , f , n .

Para encontrar los momentos multiplicaremos la ecuación 1.62 por la función g e integramos:

$$\int g \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{V} + \int g \vec{v} \cdot \nabla_x f d\vec{V} + \int g \vec{a} \cdot \nabla_v f d\vec{V} = \int g \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{V}. \quad (1.70)$$

Trabajando con la ecuación anterior usando los teoremas integrales llegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle g \rangle) + \nabla_x \cdot (n \langle g \vec{v} \rangle) - n \langle \nabla_v \cdot g \vec{a} \rangle = \int g \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{V}. \quad (1.71)$$

Ahora calcularemos los momentos: el momento 0 ($g = 1$), el primer momento ($g = mv$) y el segundo momento ($g = 1/2mv^2$) respectivamente.

Momento cero

Sustituyendo $g = 1$ en la ecuación 1.71 tenemos que:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_x \cdot (n \langle \vec{v} \rangle) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{V}, \quad (1.72)$$

simplemente vemos que $\langle \vec{v} \rangle \equiv \vec{v}_\alpha$, con lo que reescribimos lo anterior:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_x \cdot (n \vec{v}_\alpha) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{V}. \quad (1.73)$$

Esta es la ecuación de continuidad de masa, de la cual podemos encontrar las ecuaciones para la densidad de masa $\rho_m = m_\alpha n_\alpha$:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho_m \vec{v}_\alpha) = \int m_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{V} \quad (1.74)$$

y la de densidad de carga $\rho_c = q_\alpha n_\alpha$:

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho_c \vec{v}_\alpha) = \int q_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{V}. \quad (1.75)$$

1.4.1. Primer momento

Ahora $g = m\vec{v}$, por lo que la ecuación 1.71 es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(nm \langle \vec{v} \rangle) + \nabla_x \cdot (nm \langle \vec{v}\vec{v} \rangle) - nm \langle \vec{a} \cdot \nabla_v \vec{v} \rangle = \int m\vec{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{V}. \quad (1.76)$$

Sabiendo que $\vec{v}_a \vec{v}_a$ es una matriz y que $\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + (\vec{v} - \langle \vec{v} \rangle) = \langle \vec{v} \rangle + \vec{v}_a$, donde \vec{v}_a es la velocidad aleatoria de las partículas calculamos lo siguiente:

$$\nabla_x \cdot (mn \langle \vec{v}\vec{v} \rangle) = \langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla_x \cdot mn \langle \vec{v} \rangle + mn \langle \vec{v} \cdot \nabla_x \langle \vec{v} \rangle \rangle + \nabla_x \cdot (mn \langle \vec{v}_a \vec{v}_a \rangle). \quad (1.77)$$

Es importante recalcar que el último término: $mn \langle \vec{v}_a \vec{v}_a \rangle$ es el tensor de esfuerzos, que podemos separar de la siguiente manera:

$$mn \langle \vec{v}_a \vec{v}_a \rangle = \mathbf{P} + \Pi, \quad (1.78)$$

aquí, \mathbf{P} es el tensor de presión dado por la matriz:

$$\begin{pmatrix} v_{xa}^2 & 0 & 0 \\ 0 & v_{ya}^2 & 0 \\ 0 & 0 & v_{za}^2 \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

y Π es el tensor de viscosidad:

$$\begin{pmatrix} 0 & v_{xa}v_{ya} & v_{xa}v_{za} \\ v_{ya}v_{xa} & 0 & v_{ya}v_{za} \\ v_{xa}v_{za} & v_{ya}v_{za} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

Haciendo los demás cálculos y sumas respectivas encontramos entonces que:

$$m_\alpha n_\alpha \left(\frac{\partial \langle \vec{v}_\alpha \rangle}{\partial t} + \langle \vec{v}_\alpha \rangle \cdot \nabla_x \cdot \langle \vec{v}_\alpha \rangle \right) = n_\alpha q_\alpha (\langle \vec{E} \rangle + \langle \vec{v}_\alpha \rangle \times \langle \vec{B} \rangle) - \nabla_x \cdot \mathbf{P} - \nabla_x \cdot \Pi + \vec{R}_{\alpha\beta}, \quad (1.81)$$

con:

$$\vec{R}_{\alpha\beta} = \int m\vec{v}_a \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{V}. \quad (1.82)$$

La ecuación 1.81 es la ecuación de transferencia de momento, la cual caracteriza la transferencia de movimiento entre partículas de la misma especie.

1.4.2. Segundo momento

Por último $g = (1/2)mv^2$, sustituyendo en 1.71:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nm}{2} \langle v^2 \rangle \right) + \nabla_x \cdot \left(\frac{nm}{2} \langle v^2 \vec{v} \rangle \right) - \frac{nq}{2} \langle (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v \cdot v^2 \rangle = \int \frac{1}{2} mv^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{V}. \quad (1.83)$$

Haciendo algunos cálculos encontramos que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nm}{2} \langle v^2 \rangle + \frac{N}{2} p \right) + \nabla_x \cdot \left(\left(\frac{nm}{2} \langle \vec{v} \rangle^2 + \frac{N+2}{n} p \right) \langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{v} \rangle \cdot \Pi + \vec{q} \right) = nq \vec{E} \cdot \langle \vec{v} \rangle + \int \frac{1}{2} mv^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{V}, \quad (1.84)$$

de la ecuación anterior cabe resaltar lo siguiente: el campo magnético no ejerce ningún trabajo, además de que $v_a^2 = Np/nm$ y se uso la siguiente definición de conductividad térmica: $\vec{q} = mn/2 \langle v_a^2 \vec{v}_a \rangle$. La ecuación anterior es la ecuación de transferencia de energía.

Es menester separar la parte de la ecuación relacionada con la energía interna, así que haciendo un poco de cálculos obtenemos:

$$\frac{N}{2} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \vec{v}_\alpha \cdot \nabla p \right) + \frac{N+2}{2} p_\alpha \nabla \cdot \vec{v}_\alpha = -\nabla \vec{q} - \Pi : \nabla \vec{v}_\alpha + \int \frac{1}{2} mv_a^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{V}. \quad (1.85)$$

El primer sumando del lado derecho de la ecuación 1.85 representa el flujo de calor, el segundo da el calentamiento fraccional de cada especie debido al arrastre de la otra especie y el tercer sumando es la razón en la que las especies α transfieren energía a las otras por medio de las colisiones.

Aún con lo anterior, es complicado resolver la ecuación 1.85 así que podemos poner ciertas cotas si consideramos un tiempo característico de un fenómeno particular τ y l su escala característica $v_c = l/\tau$, con esto podemos definir una velocidad característica, con lo que podemos usar el caso en el que los términos del lado izquierdo de la ecuación son mucho más grandes que los del derecho, es decir, el caso adiabático, pues se ignoran los términos de flujo de calor y de colisiones. Con lo que usando que:

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v}; \quad \gamma = \frac{N+2}{2}, \quad (1.86)$$

así escribimos la ecuación de transferencia de energía en el límite adiabático:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v}_\alpha \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{v}_\alpha = (\gamma - 1) - \nabla \cdot \vec{q}_\alpha - \Pi : \nabla \vec{v}_\alpha + \int \frac{1}{2} mv_a^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{V}. \quad (1.87)$$

Si despreciamos todos los términos disipativos:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v}_\alpha \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{v}_\alpha = 0, \quad (1.88)$$

podemos igualarla con la ecuación de continuidad de masa (a la que también se le desprecian los términos disipativos):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}_\alpha \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v}_\alpha = 0 \quad (1.89)$$

Escribimos las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Con este modelo, a diferencia del anterior se hace un promedio con las velocidades de todas las partículas de una especie dada, haciendo posible caracterizar el plasma con la velocidad promedio, la presión y la densidad, de ellas obtenemos información sobre la transferencia de energía y momento lo que nos da un panorama más general de los fenómenos.

1.5. Magnetohidrodinámica

Las ecuaciones encontradas en el modelo de los dos fluidos es general y posee un rango temporal muy amplio, por lo que es menester simplificar las ecuaciones de Maxwell haciendo algunas aproximaciones, que serán válidas para velocidades (v), frecuencias (ω) y escalas de interés (L) tales que:

$$\begin{aligned} v &\ll c, \\ \omega &\ll \omega_c, \\ \lambda_D &\ll L. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Es decir, velocidades mucho menores a la velocidad de la luz, frecuencias menores a la frecuencia de ciclotrón y longitudes menores a la longitud de Debye. Estas condiciones en general se cumplen para fenómenos macroscópicos en los experimentos modernos.

Lo que nos da la facultad de usar otras dos variables que son una combinación lineal de \vec{v}_e y \vec{v}_i . La primera es la densidad de corriente

$$\vec{J} = n_i q_i \vec{v}_i + n_e q_e \vec{v}_e \quad (1.92)$$

y la segunda es la velocidad de masa del fluido:

$$\vec{u} = \frac{n_i m_i \vec{v}_i + n_e m_e \vec{v}_e}{m_e n_e + n_i m_i} \approx \vec{u}_i. \quad (1.93)$$

Además definimos la densidad total de masa como:

$$\rho = m_i n_i + m_e n_e. \quad (1.94)$$

Cabe resaltar que la ecuación 1.93 se supone que $m_e \ll m_i$ y $n_i \sim n_e$. El resultado de estas aproximaciones es la magnetohidrodinámica extendida, en este modelo todo está en términos de promedios por lo que simplificaremos la notación: $\langle v_\alpha \rangle = v_\alpha$.

Multiplicando las masas correspondientes y sumando las ecuaciones de continuidad (1.73) de cada especie encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (1.95)$$

Por practicidad usaremos que:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla = \frac{d}{dt}. \quad (1.96)$$

Haciendo el mismo proceso para las ecuaciones de transferencia de momento:

$$m_i n_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} + m_e n_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = e \delta_n \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} - \nabla p - \nabla \cdot (\Pi), \quad (1.97)$$

donde $p = p_i + p_e$, $\Pi = \Pi_i + \Pi_e$, $\delta_n = n_i - n_e$ y $\vec{J} = e(n_i \vec{v}_i - n_e \vec{v}_e)$.

El lado izquierdo de la ecuación anterior se puede reescribir recordando las condiciones $m_e \ll m_i$ y $n_i \sim n_e$, por lo que la ecuación termina de la siguiente manera:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla(p) - \nabla \cdot (\Pi). \quad (1.98)$$

Es notorio que de la ecuación 1.97 a la ecuación 1.98 falta el término del campo eléctrico, el cual es ignorado, pues éste es muy pequeño comparado con el segundo término del lado izquierdo de la ecuación; lo que implica que la densidad de carga es de menor orden, haciendo poco útil la ley de Gauss para campo eléctrico $\nabla \cdot \vec{E} = (1/\epsilon_0) e \delta_n$. En su lugar se desarrolla la ecuación de momentos de los electrones y se llega a:

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{J} + \frac{1}{n_e q_e} \vec{J} \times \vec{B} - \frac{1}{n_e q_e} \nabla p_e - \frac{m_e}{n_e q_e^2} \frac{d\vec{J}}{dt}, \quad (1.99)$$

que es la ley de Ohm generalizada, los últimos dos términos pueden ser despreciados si la escala con la que se trabaja cumple que $r_L \ll L$. En la mayor parte de los experimentos la ley de Ohm se reduce a:

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta \vec{J}. \quad (1.100)$$

La ecuación de transporte de energía 1.87 se obtiene directamente de la suma de las ecuaciones de las especies, sabiendo que $p = p_i + p_e$, $q = q_i + q_e$ y $\Pi = \Pi_i + \Pi_e$:

$$\frac{1}{(\gamma - 1)} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p \right) + \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) p \nabla \cdot \vec{u} = -\nabla \cdot \vec{q} - \Pi : \nabla \vec{u} + \eta \vec{J}. \quad (1.101)$$

Así encontramos que las ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}, \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{e \delta_n}{\epsilon_0}, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Nótese que la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère no aparece, esto debido a que el campo eléctrico es de menor orden. Encontraremos la ecuación de inducción utilizando la ecuación 1.100, despejando el campo eléctrico y sustituyendo en la ecuación de Faraday:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B} - \eta \vec{J}) \\ &= \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \eta \left[\nabla \times \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \right], \end{aligned} \quad (1.103)$$

Finalmente obtenemos que la ecuación de inducción es:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \eta \left[\nabla \times \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \right]. \quad (1.104)$$

De la ecuación anterior es menester recalcar que el lado derecho de la ecuación 1.104 es una relación de competencia entre el sumando que describe el congelamiento $\nabla \times (\vec{u} \times \vec{B})$ (favorable para el confinamiento), el término de advección y el otro sumando que es el que difunde al plasma (perjudicial para el confinamiento).

1.5.1. MHD ideal

Una aproximación más es la MHD ideal, en la que se considera que la resistividad del plasma es pequeña, es decir es un conductor perfecto, por lo que todos los términos relacionados con η se desprecian. Tienen la ventaja de las soluciones que arroja no cambian fundamentalmente de las soluciones con efectos dispersivos y disipativos para los eventos macroscópicos. Así, las ecuaciones de la MHD ideal son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} &= 0, & \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \nabla p &= \vec{J} \times \vec{B} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{u} &= 0. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Para el caso de la ecuación de Ohm se tendría:

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = 0. \quad (1.106)$$

Estudiemos la ecuación 1.104 que para este caso termina de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}). \quad (1.107)$$

Esta ecuación implica que como el flujo magnético ligado a una línea material cerrada es constante, si se cumple la ecuación anterior el flujo magnético está *congelado*. Lo que quiere decir que el flujo de líneas de campo magnético se mueve a la par que el plasma en sí mismo. Por lo que de acuerdo a un observador dentro del plasma las líneas de campo están inmóviles. A la ecuación 1.107 se le llama ecuación de inducción de la MHD ideal.

Al considerar el caso de un plasma compresible, es decir, que cumpla lo siguiente:

$$S \equiv \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad (1.108)$$

donde S es la entropía por unidad de masa. De tal forma que utilizando las ecuaciones de conservación de masa y la ecuación de momento, que aparecen en 1.105 se llega a:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla S = 0, \quad (1.109)$$

donde S es la entropía específica.

Con lo que terminamos de escribir las leyes de Maxwell y las ecuaciones de energía, conservación de masa, etc. en la aproximación ideal de la magnetohidrodinámica.

Formulación conservativa de la MHD

Una formulación conservativa consiste en poder escribir las ecuaciones de movimiento con la siguiente forma:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{G}, \quad (1.110)$$

con G una función genérica. Lo que nos es conveniente para utilizar el teorema de Gauss y con él encontrar leyes de conservación, además de las condiciones a la frontera.

La ecuación de conservación ya se encuentra en esta forma, de la ecuación 1.95:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{u}). \quad (1.111)$$

Usaremos las ecuaciones de transferencia de momento 1.98 y la de continuidad de masa 1.95, se multiplica por la velocidad la ecuación de momento y se suman, para obtener:

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\rho(\vec{u}\vec{u}) + \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \vec{I} - \vec{B}\vec{B} + \Pi \right]. \quad (1.112)$$

Esta ecuación es la de conservación de momento. Se hará un procedimiento similar para el caso de la conservación de energía, utilizando las ecuaciones de transferencia de energía 1.101 y la de transferencia de momento 1.98 encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right) \vec{u} + \vec{q} + \frac{1}{2\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} + \Pi \times \vec{u} \right]. \quad (1.113)$$

La ecuación anterior es la ecuación de conservación de energía, nótese que del lado izquierdo están los términos relacionados a la energía cinética $\frac{1}{2} \rho u^2$, energía interna $\frac{p}{\gamma-1}$ y la energía magnética $\frac{B^2}{2\mu_0}$, estas sumadas es la energía total, es importante recalcar que la energía total se conserva pero la energía magnética no, cosa que es importante para los procesos de reconexión magnética que es un tema central en este trabajo.

Por último, encontremos la ecuación de conservación de flujo magnético, para lo que utilizaremos las ecuaciones 1.100 y $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}$ con lo que llegamos a:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\vec{u}\vec{B} - \vec{B}\vec{u} - \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \vec{B} \right], \quad (1.114)$$

las ecuaciones 1.111, 1.112, 1.113 y 1.114 son las ecuaciones conservativas de la MHD.

1.5.2. Equilibrio axisimétrico

Al considerar una geometría cerrada toroidal, el campo magnético es curvo, por lo que el plasma tenderá a desplazarse en la dirección ∇B , lo que implica que las partículas se desviarán fuera del toro, como se vió en la sección de partículas individuales. Por lo que el considerar un único campo magnético toroidal resulta insuficiente, pues las partículas y el plasma tenderán a irse a la pared al encontrarse en un campo magnético curvo, como se observa en la ecuación anterior. Al agregar B_θ (dirección poloidal) a una configuración con campo B_ϕ (dirección toroidal), por ser una componente azimutal comprime contra la pared conductora, generando una fuerza que restituye la posición de la columna del plasma. Generando una configuración helicoidal en las líneas de campo:

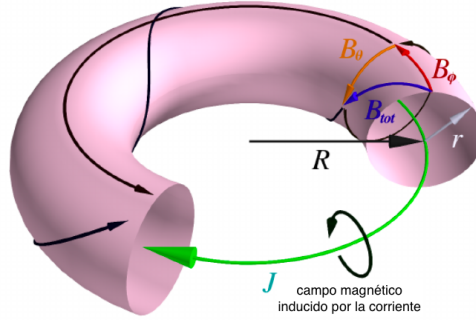


Figura 1.2: Representación de las líneas de campo. Tomada de [[31]]

Se realizará una transformación a coordenadas cilíndricas, de tal manera que podamos reducir la descripción del campo magnético a dos únicas variables: el ángulo toroidal (ϕ) y encontrar una función Ψ (llamada función de flujo poloidal) que englobe las coordenadas (r, z) .

Función de flujo

Usaremos las coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) donde $r = 0$ es el eje de rotación del cilindro. Por lo que r denotará la coordenada radial, ϕ el ángulo toroidal y z la altura, cada uno con sus vectores unitarios. También definiremos $\Gamma(r)$ la circunferencia por la rotación de r , siendo $S(r)$ la superficie de tal circunferencia. Podemos observar que $S(r)$ está caracterizado por ϕ y el plano perpendicular a esta región es la poloidal, como se ve en la figura:

Es posible escribir el campo magnético como el rotacional de un potencial:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (1.115)$$

donde $\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{z}$, entonces aplicando el rotacional en las coordenadas ya mencionadas, obtenemos:

$$\vec{B} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \hat{z}. \quad (1.116)$$

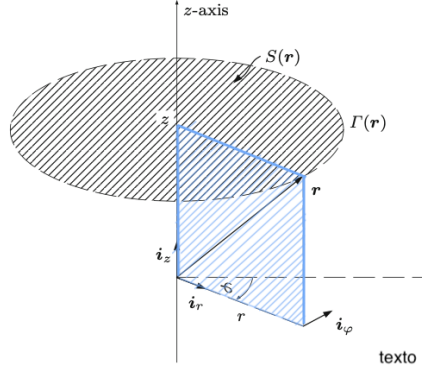


Figura 1.3: Sistema cilíndrico de coordenadas. Tomada de [[1]]

De la figura podemos ver que el plano en azul es el plano poloidal, es decir el plano $R-Z$ y la dirección $\hat{\phi}$ es la toroidal, por lo tanto podemos escribir el campo magnético como sigue:

$$\vec{B} = \vec{B}_\phi \hat{\phi} + \vec{B}_\theta \hat{\theta}. \quad (1.117)$$

El último término, el poloidal, es equivalente a $B_\theta = B_z + B_r$ y B_ϕ es el campo toroidal, de acuerdo a la ecuación 1.116 y sabiendo que el campo poloidal está en el plano $R-Z$, tenemos que el campo poloidal está dado por:

$$B_\theta = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \hat{z}. \quad (1.118)$$

Lo cual es equivalente al rotacional de A_ϕ : $B_\theta = \nabla \times A_\phi$, por lo que podemos definir una función $\Psi(r, z)$:

$$\Psi \equiv r A_\phi(r, z). \quad (1.119)$$

Lo que nos permite reescribir las componentes del campo poloidal:

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (1.120)$$

Antes de proceder debemos tomar en cuenta las siguientes relaciones vectoriales:

$$\nabla \phi = \frac{\hat{\phi}}{r}, \quad \nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{z}. \quad (1.121)$$

El campo en la dirección toroidal no es afectado por Ψ , que es la función de flujo, por lo que simplemente se denotará como B_ϕ . Debemos asegurar que $\vec{B} \cdot \nabla \Psi = 0$.

Análogamente, es posible demostrar que $\vec{B} \cdot \nabla p = 0$. Por lo tanto ya estamos en forma

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DE FÍSICA DE PLASMA

para escribir el campo en términos de Ψ :

$$\vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{z} + B_\phi \hat{\phi}, \quad (1.122)$$

que a su vez, se puede sintetizar si lo escribimos como rotacional:

$$\vec{B} = \nabla \Psi \times \nabla \phi + B_\phi. \quad (1.123)$$

Definimos :

$$f = rB_\phi. \quad (1.124)$$

Por lo que escribimos el campo completo como sigue:

$$\vec{B} = \nabla \Psi \times \nabla \phi + f \nabla \phi, \quad (1.125)$$

cuya geometría es: el eje z es el eje mayor, y el menor es un circuito circular que recorre el toro de forma azimutal a z , tales ejes representan las direcciones toroidal (ϕ), paralela a z , y la poloidal (θ) que es azimutal al eje menor. R es la distancia radial desde el eje mayor, r es la distancia radial desde el eje menor. El radio mayor R_0 es la distancia entre el eje menor y el radio menor a como se ilustra en las siguientes figuras:

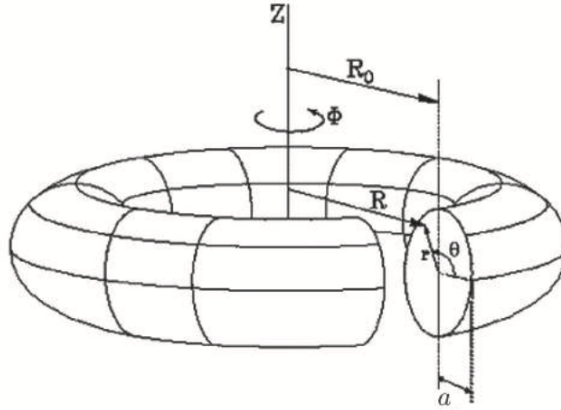


Figura 1.4: Geometría del tokamak. Tomada de [12]

El flujo magnético a través de cualquier *listón* toroidal entre dos superficies es equivalente. Ahora calculemos un caso en el que el flujo magnético poloidal sea perpendicular a \hat{z} , esto es, únicamente B_z contribuye al flujo poloidal:

$$\Psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} B_z(r, z) r dr d\phi = \int_0^r B_z(r, z) r dr. \quad (1.126)$$

Es necesario calcular la corriente utilizando la ley de Ampere:

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{J}\mu_0. \quad (1.127)$$

Al sustituir 1.125 en la ecuación anterior obtenemos:

$$\vec{J} = \mu_0^{-1} \nabla \times \left(\nabla \Psi \times \nabla \phi + f \nabla \phi \right). \quad (1.128)$$

Considerando que $\hat{\phi} = \nabla \phi / r$ y que $\nabla \times f \nabla \phi = \nabla f \times \nabla \phi$ reescribimos la ecuación anterior como sigue:

$$\vec{J} = -\mu_0^{-1} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \nabla \phi + \mu_0^{-1} \nabla f \times \nabla \phi, \quad (1.129)$$

lo que es equivalente a:

$$\vec{J} = -\mu_0^{-1} \Delta^* \Psi \nabla \phi + \mu_0^{-1} \nabla f \times \nabla \phi, \quad (1.130)$$

donde Δ^* es el operador de Grad Shafranov, que se define como:

$$\Delta^* F \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad (1.131)$$

con F una función arbitraria. De la ecuación 1.130 podemos ver que, si consideramos únicamente la dirección toroidal para la corriente, obtenemos:

$$\Delta^* \Psi = -\mu_0 r J_\phi \hat{\phi}. \quad (1.132)$$

1.5.3. Ecuación de Grad Shafranov

La condición básica de equilibrio es cuando se considera al plasma en un estado estacionario, donde su velocidad es cero, por lo que la ecuación 1.105 se reduce a:

$$\nabla p = \vec{J} \times \vec{B}. \quad (1.133)$$

De la ecuación anterior se sigue que $\vec{B} \cdot \nabla p = 0$ y $\vec{J} \cdot \nabla p = 0$. Lo que muestra que las líneas de campo magnético inducido y la densidad de corriente están sobre superficies isobáricas. En general la presión es máxima cerca del centro de la sección poloidal. Estas superficies son concéntricas y se les conoce como superficies magnéticas, como se puede ver en la figura:

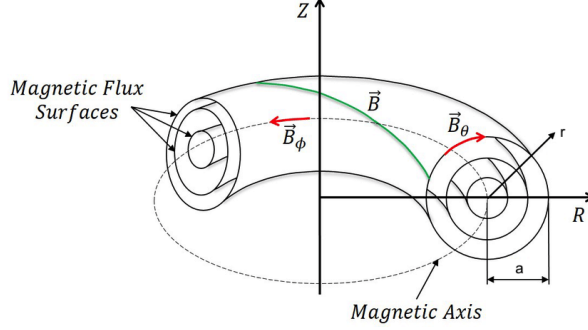


Figura 1.5: superficies magnéticas anidadas. Tomada de [3].

De la condición $\vec{B} \cdot \nabla \Psi = 0$ se sigue que las superficies magnéticas coinciden con el flujo poloidal constante. En el plano poloidal la densidad de corriente, inducción magnética y la presión es constante para cada nivel de Ψ . Lo que hace posible tomar estas cantidades como dependientes del flujo poloidal:

$$\vec{B} = \vec{B}(\Psi), \quad \vec{J} = \vec{J}(\Psi). \quad (1.134)$$

Procedemos a calcular el producto cruz de la corriente y el campo magnético:

$$\vec{J} \times \vec{B} = (J_\phi \hat{\phi} + J_\theta \hat{\theta}) \times (B_\phi \hat{\phi} + B_\theta \hat{\theta}), \quad (1.135)$$

$J_\theta = J_r + J_z$ por lo que escribimos la corriente en dirección poloidal en términos de f :

$$J_\theta = \frac{1}{\mu_0} \left(\nabla f \times \hat{\phi} \right). \quad (1.136)$$

Así que de la ecuación 1.135 distribuyendo los paréntesis obtenemos:

$$\nabla p = J_\phi \hat{\phi} \times B_\theta \hat{\theta} + J_\theta \hat{\theta} \times B_\phi \hat{\phi}. \quad (1.137)$$

Ahora calcularemos el primer sumando de 1.137:

$$J_\phi \hat{\phi} \times \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{z} \right) = -\frac{J_\phi}{r} \nabla \Psi, \quad (1.138)$$

y del sumando restante, tenemos que, considerando la ecuación 1.136 nos da:

$$-\frac{1}{\mu_0 r^2} f \nabla f. \quad (1.139)$$

Por lo que podemos escribir la ecuación completa como sigue:

$$\nabla p = -\frac{J_\phi}{r} \nabla \Psi - \frac{1}{\mu_0 r^2} f \nabla f, \quad (1.140)$$

consideremos

$$\nabla p = \frac{d}{d\Psi} (p \nabla \Psi) \quad (1.141)$$

y

$$\nabla f = \frac{d}{d\Psi} (f \nabla \Psi) \quad (1.142)$$

Despejamos entonces J_ϕ de la ecuación 1.140 obtenemos:

$$J_\phi = \frac{-r}{\nabla \Psi} \left(\frac{dp}{d\Psi} \nabla \Psi + \frac{1}{\mu_0 r^2} f \frac{d}{d\Psi} (f \nabla \Psi) \right). \quad (1.143)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.141 y 1.142 en la ecuación anterior:

$$J_\phi = -r \frac{dp}{d\Psi} - \frac{1}{\mu_0 r} f \frac{df}{d\Psi}, \quad (1.144)$$

sustituimos la ecuación anterior en 1.132 obtenemos:

$$\Delta * \Psi = -\mu_0 r \left(-r \frac{dp}{d\Psi} - \frac{1}{\mu_0 r} f \frac{df}{d\Psi} \right) \quad (1.145)$$

Que es la ecuación de *Grad-Shafranov*, donde p es la presión del plasma y f la corriente poloidal. Esta ecuación presenta dificultades intrínsecas para encontrar una solución analítica, pues como se ilustra en 1.145 las funciones de presión p y la de flujo f son a su vez funciones de Ψ , que es la incógnita de la ecuación. Una ecuación diferencial elíptica, no lineal, bidimensional. Además de que su solución permite describir las propiedades del equilibrio una vez conociendo las características geométricas, de corriente y campos magnéticos. Lo cual es importante pues determina las condiciones de estabilidad, necesario para estudiar los problemas más complejos como el transporte.

1.6. Estabilidad MHD

Las soluciones a la ecuación de Grad-Shafranov nos dan un equilibrio estático, la cuestión ahora es encontrar un equilibrio estable. Esquemáticamente sabemos que existen dos tipos de equilibrio: el estable y el inestable, la diferencia entre ellos radica cualitativamente, para el caso unidimensional, en que la energía potencial aumenta ante cualquier perturbación, entonces el equilibrio es estable, caso contrario el sistema tiene un equilibrio

inestable.

En particular en la MHD, la afirmación anterior debe tomarse multidimensionalmente por tratarse de un fluido, lo que implica que el sistema sólo es estable si la energía potencial del equilibrio corresponde a un mínimo absoluto respecto a todas las posibles perturbaciones. Este problema ha sido central desde el principio para los investigadores del confinamiento magnético y se ha encontrado que aunque el plasma esté bien confinado en un equilibrio estático como el descrito con anterioridad, la configuración es violentamente inestable y choca con la pared en pocos microsegundos [6].

Desde el punto de vista de partículas individuales es relativamente sencillo confinar un plasma sin colisiones: únicamente es necesario encontrar la forma correcta del campo magnético que no pegue con el muro y que la simetría de las líneas del campo sea tal que las derivas sean paralelas a la pared. Sin embargo desde un punto de vista macroscópico esto no es tan simple, ya que el plasma está confinado en campos magnéticos pensados para confinar partículas individuales cargadas. Sin importar la forma del campo, el plasma por sí mismo puede generar campos internos que afectan su dinámica, como ejemplo, la separación de cargas puede generar campos eléctricos que terminen cambiando su dirección y choquen con la pared, además las corrientes generan un campo magnético que lleva a una deriva tipo ∇B que también decrementa el confinamiento [8].

En seguida se hará un pequeño recuento y resumen de algunas de las inestabilidades más comunes en el plasma.

Inestabilidad de Rayleigh-Taylor

Esta inestabilidad es general para fluidos, consiste en tener un fluido más denso sobre un fluido menos denso en presencia del campo gravitatorio. En el plano de la interfaz de estos dos fluidos cualquier deformación o rizo tenderá a agrandarse a expensas de la energía potencial del campo gravitacional, como se ve en la figura 1.6 [8].

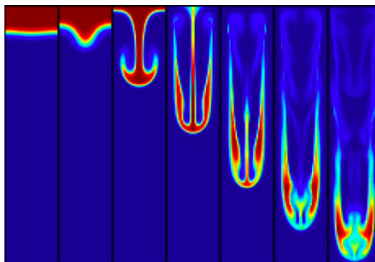


Figura 1.6: Simulación de la inestabilidad de Rayleigh-Taylor. Tomada de [30].

En particular para el caso del plasma, el campo gravitatorio es sustituido por la fuerza centrífuga de las partículas que siguen la trayectoria de un campo magnético curvado. Para ejemplificar este caso, consideremos la frontera del plasma en el plano $z - y$: la diferencia

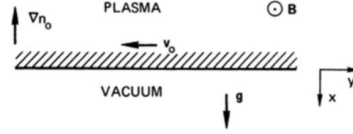


Figura 1.7: Interfaz plasma vacío, donde ∇n_0 es el gradiente de densidad. Tomada de [8].

de densidades de dos fluidos se refiere a los gradientes de densidad en la dirección $-x$, y la fuerza centrífuga actúe en la dirección x y el campo sea uniforme. Si bien se puede considerar que el plasma tiene unas condiciones a la frontera tales que en los límites $y = 0$ y $y = h$ no es posible que se formen los rizos [6], lo que implica necesariamente que los rizos observados en la figura anterior se formen en el interior del plasma, en $0 < y < h$. Estos se pueden estabilizar o desestabilizar por la existencia de la buena y mala curvatura: Si las líneas de fuerza magnética son convexas hacia afuera esta aceleración centrífuga

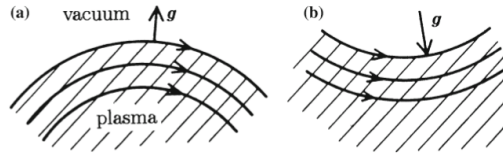


Figura 1.8: Mala a) y buena b) curvatura. Tomada de [25].

induce inestabilidad en el intercambio mientras que si las líneas son cóncavas hacia afuera, el plasma es estable.

Inestabilidades por corrientes

La fuerza impulsora de estas inestabilidades es la tendencia de dos tubos de flujo con corrientes paralelas que se repelen entre sí. Este efecto desestabilizador permanece incluso si la presión del plasma es pequeño [17]. Inestabilidad tipo Salchicha: Consideremos el caso más simple: un z-pinch, donde la columna de plasma es recta y por lo tanto abierta, en la que se tiene un campo magnético azimutal que genera una corriente en la dirección axial (\hat{z}). Se toma que la presión es uniforme en dentro del cilindro ($r < a$) y cero fuera ($r > a$). En el equilibrio se cumple la ecuación $\nabla p = \vec{J} \times \vec{B}$. Si existe algún tipo de ruido térmico que disminuye localmente la presión interna del plasma, provocando que la corriente y el campo magnético sea más fuerte y se formen protuberancias en la superficie magnética

generando deformaciones como la que se ve en la siguiente figura: Esta inestabilidad puede

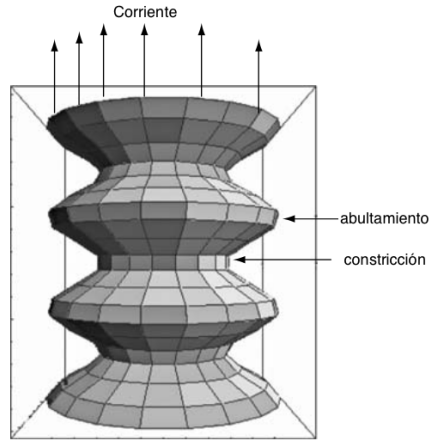


Figura 1.9: Inestabilidad salchicha. Tomada de [6]

ser sorteada al rodear al plasma de una pared conductora o al generar un campo.

1.6.1. Inestabilidad de rizo

El equilibrio ideal para los sistemas axisimétricos consiste en superficies magnéticas donde la presión sea constante:

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0. \tag{1.146}$$

En el *rizo*, la turbulencia en la corriente fuerza a las líneas de campo a concentrarse en el lado cóncavo de la columna, pues el producto $\vec{J} \times \vec{B}$, no es uniforme en ambos lados por el incremento de \vec{B} en uno de los lados la columna lo que aumenta la presión magnética en un lado de la columna y la presión no puede reestablecer la rectitud de la misma, ya que el producto $\vec{B} \times \vec{J}$ se debe equilibrar con el gradiente de presión ∇p como se ve en la figura:

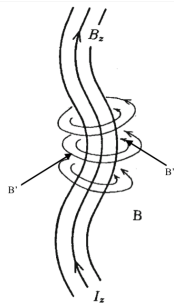


Figura 1.10: Inestabilidad "de rizo", donde $B' > B''$. Tomado de [Miyamoto,[25]]

La interacción entre la pared conductora y el plasma puede resultar de la expansión o contracción de la columna de plasma o del desplazamiento hacia arriba o abajo de la misma. Además, si la simetría toroidal es violada de alguna manera, ya sea por errores en las bobinas o variaciones en los patrones del perfil de corriente en el plasma las superficies magnéticas pueden romperse, lo que genera islas magnéticas, pérdida de confinamiento y la transición al caos del sistema.

Es común en la literatura, haciendo un análisis de Fourier para las perturbaciones, que se trate con estas inestabilidades de la forma:

$$f(r) \exp(i[m\theta + n\phi + \omega t]), \quad (1.147)$$

donde m y n representan a los modos poloidales y toroidales respectivamente, que dan cuenta de la cantidad de vueltas en dirección toroidal por las que se dan en dirección poloidal, r es la distancia radial desde el eje magnético y ω es la frecuencia de los modos. Se encontraron dos principales modos de inestabilidad, ambos con n finito: $m = 0$ inestabilidad salchicha y para $m = 1$ la inestabilidad tipo rizo. Para contrarrestar estas condiciones se implementó el uso de corriente dentro del plasma y una pared metálica de estabilización. Las inestabilidades debidas a fluctuaciones en la presión pueden ser descritas por un criterio que es aplicable en ausencia de disipación y efectos toroidales:

$$\frac{1}{4}r \left(\frac{dq}{qdr} \right)^2 + \frac{2\mu_0}{B_t^2} \frac{dp}{dr} > 0, \quad (1.148)$$

donde B_t es el campo magnético en dirección toroidal, p es la presión que depende de r y q es el factor de seguridad, definido por:

$$q(r) = \frac{rB_t}{RB_p} \quad (1.149)$$

esta es una medida del torcimiento de las líneas de campo magnético, y R es el radio mayor, B_p es el campo en dirección poloidal.

La ecuación 1.148 al considerar el límite donde $L \gg a$ se transforma en:

$$\frac{1}{4}r \left(\frac{dq(r)}{qdr} \right)^2 + \frac{2\mu_0}{B_z^2} \frac{dp_r}{dr} (1 - q^2) > 0. \quad (1.150)$$

Como el primer sumando es necesariamente positivo, entonces $q^2 > 1$, lo cual indica que el campo B_z debe hacer una tensión magnética lo suficientemente grande como para enderezar la columna del plasma; si la longitud de onda del plasma es muy alta, se debe poner adicionalmente una pared conductora para enderezar la columna. El gradiente de presión negativa asociada al plasma también desestabiliza al plasma, por lo que la ecuación anterior implica que es necesaria una variación en el campo magnético de cizalla lo suficientemente grande para ser estable. Esta inestabilidad de la MHD ideal surge toda vez que alguna perturbación baja la energía magnética de la dirección poloidal B_θ , es decir cualquier perturbación en la corriente que genera este campo hará a la columna de plasma susceptible a la inestabilidad de rizo.

Saturación del rizo

Los sistemas toroidales están sujetos a inestabilidades tipo rizo, lo que sugiere que existe una vecindad de equilibrio donde no se tiene axisimetría donde se mantienen las condiciones de conservación de flujo [24]. La saturación del rizo es debida al incremento de la densidad de corriente, de tal forma que exceda un valor crítico [4] esta saturación afecta la frontera del plasma o al eje del mismo dependiendo de las condiciones a la frontera. Al considerar efectos no lineales se encuentran estados de equilibrio de menor energía. A modo de ejemplo consideremos constante al perfil del factor de seguridad q durante el surgimiento del sistema tridimensional. Sabiendo que el radio mayor y menor y el campo magnético en dirección toroidal es aproximadamente constante, el campo en la dirección poloidal debe variar de acuerdo a:

$$\mu_0 \int \vec{J} \cdot dS = \oint \vec{B} \cdot dl, \quad (1.151)$$

el área de la superficie se mantiene aproximadamente constante si la integral de línea de las superficies de flujo en equilibrio aumenta, es decir, la corriente total del plasma debe aumentar para conservar el perfil del factor de seguridad, lo que lleva a un pico en la densidad de corriente, como se puede observar en la siguiente figura:

Esto puede interpretarse como el pico de corriente que normalmente se observa durante las dinámicas MHD rápidas. De esta manera, el equilibrio perturbado puede interpretar-

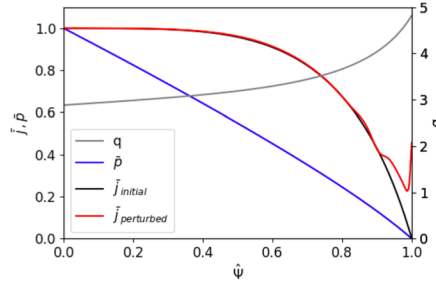


Figura 1.11: Perfiles de corriente inicial (negro), perturbada (rojo), presión (azul) y factor de seguridad (gris). Tomada de [28]

se como el estado saturado alcanzado después de la fase rápida, antes de que los efectos difusivos o las inestabilidades MHD no ideales puedan modificar aún más el estado del plasma.

1.7. Reconexión magnética

La reconexión magnética es una reorganización topológica del campo magnético que ocurre en escalas de tiempo más rápidas que las que permite la disipación. Esta es de suma importancia debido a que cambia la dinámica del plasma, su energía y el transporte. Dado que las líneas de campo se rompen en escalas macroscópicas. La reconexión es un proceso multi escala que involucra fenómenos cinéticos y magnetohidrodinámicos [40].

Se ha estudiado bajo el régimen de la MHD, donde se supone que el campo está congelado al plasma 1.107 y el flujo magnético se conserva. En este contexto, este fenómeno se refiere a la violación de esta última condición para tiempos menores al tiempo de difusión de las colisiones de electrones ([39]). Existen varios modelos que explican este fenómeno, el más simple al considerar que el sistema está en un estado estacionario fue propuesto por Parker y Sweet, donde la ruptura se genera en una pequeña sección donde líneas de campo magnético de direcciones opuestas se encuentran y existe difusión, lo que hace que las líneas de campo magnético se acerquen y se rompan como se ve en la siguiente figura: El punto donde se juntan las líneas magnéticas se conoce como punto X y es un punto neutro. La interacción de las líneas de campo genera una lámina de corriente singular, donde el campo eléctrico se hace lo suficientemente grande como para que $\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{B} \neq 0$, esta

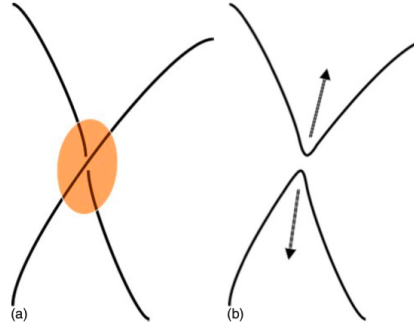


Figura 1.12: Esquema de un proceso de reconexión. Tomada de [38]

lámina se forma por el colapso de las líneas de campo cerca del punto X y es en esta zona donde la reconexión tiene lugar como se ve en la figura 1.13 esta lámina es llamada lámina neutra o lámina de corriente.

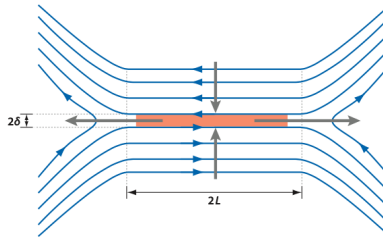


Figura 1.13: Modelo de Parker y Sweet. Tomada de [39]

Como se ve en la figura, los campos magnéticos en sentidos opuestos se traslapan en una longitud de $2L$ donde justo en el centro hay un punto nulo y se vuelven a conectar en la lámina de difusión de ancho 2δ . Esta teoría contempla la velocidad de reconexión v_i y establece la geometría de la región de reconexión basada en tres principios: la masa se conserva y se supone que la energía magnética del plasma se transforma a través del calentamiento resistivo en energía cinética lo que eleva la presión, aunada a la fuerza de tensión magnética debida a la curvatura de las líneas de campo cerca del punto de reconexión aceleran el plasma a una velocidad v_a que es la velocidad de Alfvén:

$$v_a = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (1.152)$$

De acuerdo a la ley de Ohm el campo eléctrico se puede escribir de la siguiente manera en la lámina:

$$\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B} + \eta\vec{J}, \quad (1.153)$$

es notorio que el campo eléctrico es perpendicular al plano de flujo y se considera constante en el modelo estático, éste es en general de tipo inductivo en todo el plasma menos en el punto neutro, donde su naturaleza se vuelve resistiva.

Existen más modelos con consideraciones más reales, sin embargo para usos de este trabajo con este modelo nos es suficiente.

La reconexión tiene efectos globales en el plasma, el equilibrio de la MHD tendrá que tener energías menores [40] debido a la reorganización de la topología, es decir, la reconexión se detiene si ya no es posible disminuir la energía magnética total. Por lo que la reconexión es un proceso de relajación del plasma durante este proceso de relajación se aceleran los iones y electrones. Sin embargo en sistemas tipo tokamak, después de reorganizarse crea zonas estocásticas que da como resultado pérdida de confinamiento. Sin embargo, este fenómeno no siempre perjudica al confinamiento, para el caso del sistema RFP (Reversed Field Pinch), la dinámica de sus líneas de campo se debe a la reconexión y se entiende como la relajación del estado de mínima energía con la condición de conservación de la helicidad como se desarrollará en el capítulo 4.

Capítulo 2

Sistemas toroidales

En este capítulo hablaremos de las propiedades de los campos magnéticos helicoidales bidimensionales y tridimensionales.

Recordando del capítulo 1 la figura 1.4, donde es notoria la simetría del sistema, esto hace posible que una coordenada sea ignorable y permite que la función de flujo Ψ sea escrita en términos de las coordenadas r y z , sin embargo como veremos en este capítulo, este no es el caso general, ya que no todos los sistemas toroidales son simétricos. Iniciaremos con los dispositivos experimentales simétricos el Reversed Field Pinch y el tokamak.

2.0.1. Reversed Field Pinch

Regresando a su geometría, en esta configuración el campo magnético es curvo, por lo que el plasma tenderá a desplazarse en la dirección ∇B , al agregar B_θ a una configuración con campo B_ϕ , por ser una componente azimutal comprime contra la pared conductora, generando una fuerza que restituye la posición de la columna del plasma, aunque quedan fluctuaciones e inestabilidades residuales, lo que hace que el confinamiento sea pobre. Una de las características fundamentales de este sistema es que los campos toroidales y poloidales son comparables:

$$\vec{B}_\theta \approx \vec{B}_\phi. \quad (2.1)$$

Estos campos están prácticamente determinados por las corrientes dentro del plasma y la densidad de corriente es casi paralela a las líneas de campo.

Para este tipo de sistemas el equilibrio se debe de considerar dinámico, que se va a deber,

por una parte de la existencia de una corriente I que fluye con el plasma y a la geometría helicoidal de las líneas magnéticas.

Utilizando la MHD se ha encontrado que las inestabilidades se pueden deben principalmente por gradientes de presión y densidad de corriente distribuida en el plasma fuera del centro.

Se puede hacer un criterio de estabilidad relacionado con los gradientes de presión, en ausencia de efectos disipativos y toroidales, llamado criterio de Suydam, de acuerdo a Dreicer [13]:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{dq}{qdr} \right)^2 + \frac{2\mu_0}{B_\phi^2} \frac{dp}{dr} > 0, \quad (2.2)$$

donde $p(r)$ es la presión del plasma en r y $q(r)$ es el factor de seguridad que mide la razón de las veces que una línea de campo magnético viaja en la dirección toroidal respecto a la dirección poloidal de un área de confinamiento toroidal:

$$q(r) = \frac{rB_\theta}{RB_\phi}, \quad (2.3)$$

con R el radio mayor del toro. Es notorio que el signo del segundo término de la ecuación 2.2 es crucial para la estabilidad, ya que en caso de tener un signo negativo es un elemento que contribuye a la inestabilidad; que cabe resaltar es necesario pero no suficiente para la estabilidad.

Tomando en cuenta los efectos toroidales el criterio de Suydam [13] es:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{dq}{qdr} \right)^2 + \frac{2\mu_0}{B_\phi^2} \frac{dp}{dr} (1 - q) > 0. \quad (2.4)$$

El RFP debe operar de tal manera que pueda compensar el caso en el que $q < 1$, más aún, para asegurar estabilidad para las derivas de densidad de corriente, se requiere que los máximos y mínimos q sean evitados en puntos lejanos al eje magnético. Lo que genera la inversión del campo magnético toroidal en las regiones externas es la necesidad de quitar los mínimos en el borde del vacío, tal como podemos observar en las siguientes figuras:

Razón por la cual este dispositivo tiene el nombre *reversed field pinch*.

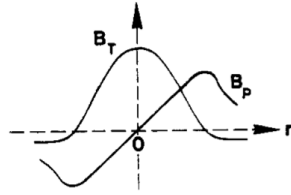


Figura 2.1: Perfil de los campos magnéticos. Tomada de [13].

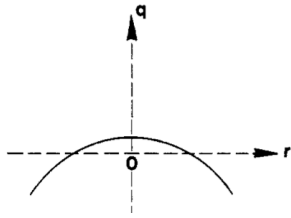


Figura 2.2: Perfil de los campos magnéticos. Tomada de [13].

2.0.2. Tokamak

El sistema tokamak, fue ideado en los años 50 por los físicos soviéticos Igor Tam y Andrei Sajarov, con las ideas de Oleg Lavrantiev, que consiste en una *cámara toroidal* con dos ejes de simetría: el eje mayor y el menor.

Respecto a la discusión del RFP, el sistema tokamak $q > 1$, pues es el segundo término del criterio de Suydam es el predominante y cabe recordar que $p(r) < 1$ por lo que para cumplir la desigualdad es necesaria esa consideración. Esta configuración va a tener una componente toroidal más fuerte y no va a necesitar una corriente tan grande como el RFP. En la siguientes figuras podemos observar sus perfiles típicos:

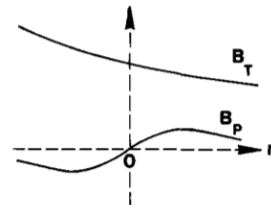


Figura 2.3: Perfiles de los campos magnéticos Tokamak. Tomada de [13]

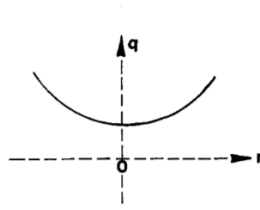


Figura 2.4: Perfil del factor de seguridad Tokamak. Tomada de [13]

2.1. Stellarators

Los sistemas Stellarators son muy similares a los tokamak, ya que también son dispositivos toroidales de confinamiento magnético con superficies magnéticas anidadas. Las diferencias empiezan a aparecer al considerar cómo generar las líneas de campo helicoidales; en este dispositivo se hace mediante bobinas externas, por lo que no tiene simetría, lo que lo hace un experimento completamente tridimensional como se ve en la siguiente figura:



Figura 2.5: Diagrama de las bobinas externas y columna de plasma del experimento HSX de la Universidad de Wisconsin. Tomada de [7]

No es necesario inducir una corriente en el plasma, lo que implica la ausencia de disrupciones internas e inestabilidades inducidas por la misma. Otra diferencia sustancial es que tiene el signo inverso en el *shear*, lo que permite una mejora en el confinamiento y que estos dispositivos son susceptibles a inestabilidades debidas a corrientes bootstrap. Su perfil de campo magnético es como el que se ve en la siguiente figura:

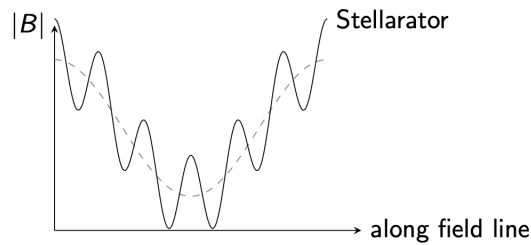


Figura 2.6: Perfil del campo magnético a lo largo de las líneas de campo. Tomada de [19]

Existen tres tipos de Stellarators: los torsatrons que poseen bobinas helicoidales continuas, stellarators modulares, en los que bobinas no planas están dispuestas de forma toroidal y finalmente los heliacs, con las bobinas distribuidas a lo largo de una hélice enrollada alrededor de una bobina central circular, como podemos ver en la siguiente figura:

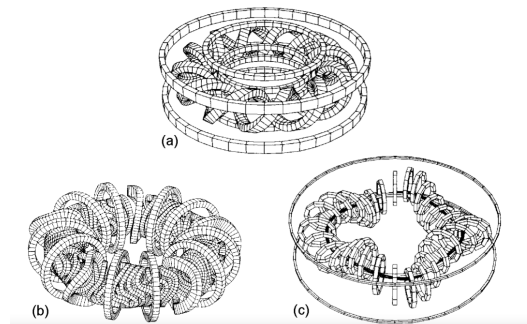


Figura 2.7: a) torsatron (ATF), b) stellarator modular(W-7), c) heliac (TJ-II). Tomada de [16]

Las ventajas de estos dispositivos son que permiten un mayor rango de configuraciones magnéticas y mejor control externo del plasma. Sin embargo, como es notorio de las figuras anteriores, su diseño es bastante más complejo que en el caso de los tokamaks o RFP, es necesario un esfuerzo computacional grande para lograr la exactitud necesaria para conseguir un correcto confinamiento del plasma. Aunado a esto, existen fuerzas electromagnéticas que ejercen fuerza entre bobinas, un elevado rizo helicoidal y toroidal produciendo partículas atrapadas debido a diferencias del campo magnético a lo largo de una línea de campo. Se consideran una alternativa a los tokamaks por sus ventajas respecto a este último, tales como la posibilidad del funcionamiento continuo.

Capítulo 3

Rompimiento de axisimetría en sistemas toroidales

En este capítulo se tocarán fenómenos experimentales de rompimiento de simetrías, en donde sistemas diseñados para ser bidimensionales permiten estructuras internas tridimensionales que son estables con cantidades de energía magnética más accesibles que en el caso conservar las estructuras axisimétricas. Esta condición hace que el estudio de la helicidad magnética como cantidad topológica sea de gran importancia por su robustez ante un cambio de topología, lo que permite un entendimiento más amplio de estos fenómenos. Para ello estudiaremos las observaciones en sistemas tipo tokamak o RFP, en donde se observan estructuras tipo rizo que producen un eje magnético helicoidal, en el primero generado por la inyección de pérdigones, mientras que en el segundo es debido a un incremento en la corriente del plasma como se explicará a detalle en este apartado.

3.1. Observaciones experimentales

En muchos dispositivos tipo tokamak o RFP aunque se imponga la axisimetría pueden tener una reorganización interna tal que puede romper la simetría del sistema [9] y obtener de manera local geometrías tridimensionales, que además tiene un estado de equilibrio MHD más bajo que el simétrico.

Estos estados estan condicionados a unos perfiles de presión y de corriente toroidal tales que el $q_{min} \approx 1$, si esto sucede, entonces existe una bifurcación en el estado de equilibrio: el simétrico y tridimensional, la diferencia entre uno y otro es la condición inicial del desfase

CAPÍTULO 3. ROMPIMIENTO DE AXISIMETRÍA EN SISTEMAS TOROIDALES

de posición del eje magnético, lo que da como resultado los siguientes perfiles de plasma:

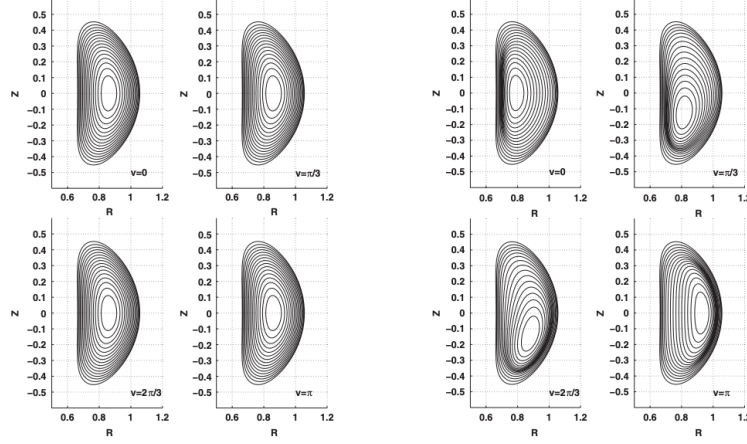


Figura 3.1: Secciones transversales toroidales de dispositivos tipo TCV, a) Sistema simétrico con eje sin desfasar. b) Sistema con eje desfasado y helicoidal. Tomada de [9]

Para el caso del tokamak estas estructuras son similares a un modo de rizo interno saturado en el marco de la MHD ideal, mientras que en los RFP este fenómeno se entiende mediante un rizo con $n \neq 1$ que llega a un estado de QSH (Quasi Single Helicity), donde hay un modo predominante que además de generar un único eje helicoidal [10].

En un primer acercamiento, la helicoide del eje magnético es similar a un modo de rizo saturado dominado por los modos $m = 1$, $n = 1$, donde estos modos vienen de la descomposición de Fourier del desplazamiento de la columna de plasma debido a perturbaciones:

$$\epsilon(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r})e^{i(m\theta - n\phi)}. \quad (3.1)$$

Aquí el estado tridimensional tiene una energía ligeramente menor que el caso simétrico. Es importante recalcar que la deformación de las superficies internas del plasma tienen una influencia muy pequeña en las superficies externas y el borde [11], por lo que quedan estructuras de tipo:

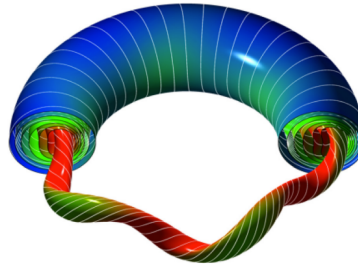


Figura 3.2: Secciones transversales toroidales de dispositivos tipo TCV. Tomada de [22]

Cooper [9] hace un análisis numérico forzando la aparición de estas estructuras simplemente desplazando el eje magnético conservando la frontera axisimétrica lo que puede ser muy útil para inducir estos estados y usarlos para mejorar el confinamiento del plasma en dispositivos axisimétricos. En breve se dará una pequeña explicación de las estructuras tridimensional en los dispositivos mencionados.

3.1.1. Tokamak

JET pellets

El experimento Joint European Torus (JET) ubicado en el Culham Center for Fusion Energy, es un dispositivo tipo tokamak, con perfil activo desde 1983, cuyo objetivo es estudiar las condiciones de fusión cercanas a una central de energía, fue el primer dispositivo en lograr fusión nuclear controlada con D-T (UK atomic energy authority). Actualmente se utiliza para el estudio de EML para referencia del experimento ITER. Este dispositivo tiene un volumen de plasma de $100m^3$, en total tiene un arrastre de corriente de 51 MA y unas dimensiones de 4m de alto por 2.5 metros de diámetro.

Wesson [33] describe que en el JET la inyección de perdigones (partículas congeladas de deuterio utilizadas para aumentar el calor en el plasma y palear la pérdida de energía por convección, conducción de calor, entre otras) lleva a estructuras localizadas llamadas *snakes* (Figura 3.1.1).

Estos perdigones alcanzan la superficie magnética donde $q = 1$ y ocurre un cambio en el equilibrio. Este cambio es local pues se concentra en la superficie donde $m = n = 1$. Esto se ilustra con la dirección poloidal, como se ve en la siguiente figura:

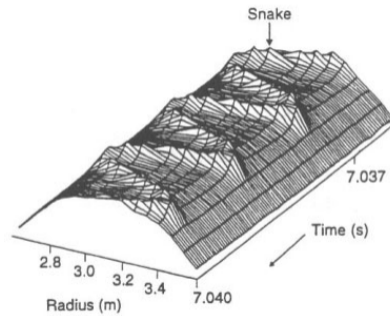


Figura 3.3: Perturbación debida a la snake tomada con una cámara soft X-ray. Tomada de [33].

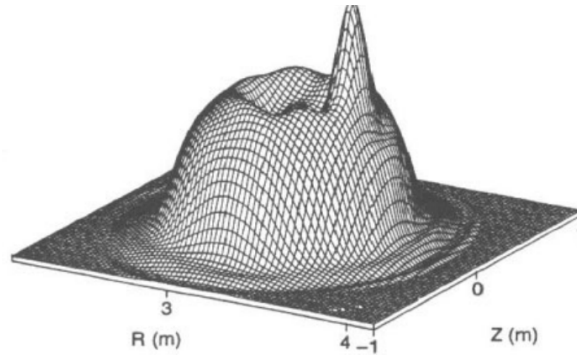


Figura 3.4: Reconstrucción de señales soft X-ray de una sección transversal. Tomada de [33].

La forma de esta perturbación en la dirección toroidal es un círculo desplazado y oblicuo como se ve en la siguiente figura:

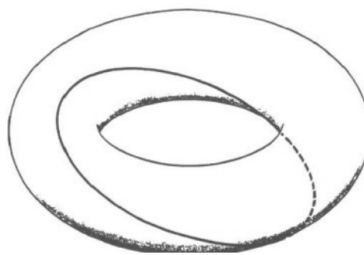


Figura 3.5: Perturbación debida a la snake en la dirección toroidal. Tomada de [33].

Una interpretación básica [33] es que el perdigón cruza al plasma, mientras lo hace se va evaporando y su interacción con el plasma causa un enfriamiento en cada superficie, la más susceptible es la superficie donde $q = 1$, donde un único trayecto conduce al cierre de la línea de campo, por lo que el enfriamiento en esta superficie aumenta la resistividad

local, lo que provoca una caída en la densidad de corriente, al estar en una superficie racional esto permite la generación de una isla magnética, misma que atrapa algunas partículas provenientes del perdigón generando la snake.

Es de esperar que la snake decaiga y desaparezca, pues el enfriamiento decae en una escala de tiempo de milisegundos y además aunque la isla se mantiene la densidad de la perturbación debería desaparecer sin embargo esto no se presenta.

La creación de la snake requiere la formación de una isla magnética en una superficie racional, esto evita que el material del perdigón se expanda por toda la superficie, lo que implica que tal isla crezca rápidamente. Lo que involucra una corriente laminar al rededor de la región enfriada y la difusión de esta corriente.

Dado que la temperatura dentro de la snake decae mientras que la perturbación en sí misma persiste, se requiere de otro mecanismo para explicar cómo es que la isla magnética se mantiene. Una posible opción es la presencia de impurezas: en el marco de los iones de largo gradiente de presión en la snake, ésta es balanceada por la fuerza de un campo eléctrico a lo largo del radio menor. Los iones impuros tienen una masa molecular es más grande que la de los iones del plasma, por lo que esta fuerza se verá reducida por la diferencia de velocidades relativas de los iones impuros con los del plasma.

Pese a esto el tiempo de vida de las perturbaciones tipo snake son mayores a las esperadas incluso en el marco del tiempo de confinamiento neoclásico, lo que hace parecer que si la descarga fuera permanente, también lo sería la snake. De otro modo la snake debería estar sujeta a su propio efecto pinch en el radio menor.

En resumen, las snakes se generan por el crecimiento de islas magnéticas en la superficie racional $q = 1$, derivado un enfriamiento localizado, la isla atrapa material ionizado del perdigón, sin embargo no se explica la persistencia de la perturbación. Éste fenómeno en particular involucra dos procesos que se alimentan el uno al otro: por un lado la densidad de la perturbación incrementa la resistividad a través de la concentración de impurezas, lo que mantiene a la isla magnética. Por el otro lado la isla afecta el confinamiento local de tal manera que incrementa la densidad.

ITER hybrid

Si bien en el caso del JET, la presencia de estados tridimensionales se ha observado con la inyección de perdigones, para el experimento de fusión más grande del mundo: ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), por ser también un dispositivo tipo tokamak, que se espera sea susceptible a estas estructuras debido a los perfiles del factor de seguridad y de presión, como se ve en la siguiente figura:

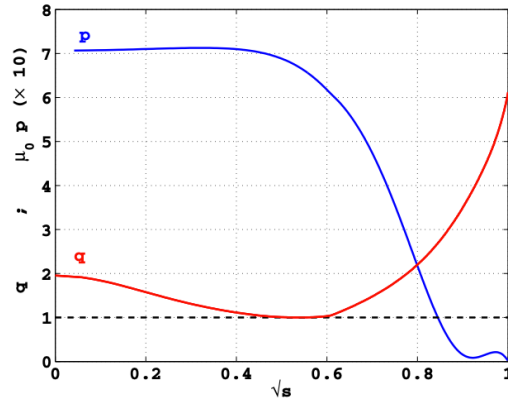


Figura 3.6: Perfiles de la transformada rotacional $1/q$ y presión que se esperan para el escenario híbrido de ITER. Tomada de [10]

A diferencia del JET, en ITER se espera un proceso de saturación del rizo en el marco de la MHD ideal por la forma de sus perfiles de presión y transformada rotacional. Este dispositivo tiene un perfil de plasma en forma de D como el que se observa en la siguiente figura:

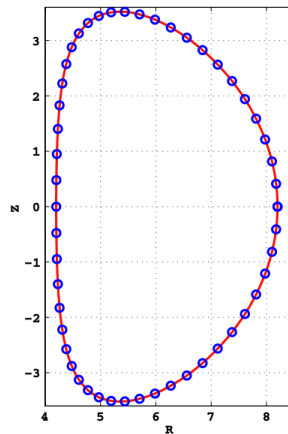


Figura 3.7: Sección transversal del ITER, z es la altura y R es el radio, ambos medidos en mts.

En este dispositivo el campo magnético es del orden de 4.6 T y la corriente toroidal es 13MA, los límites donde se dan las snakes es entre 13.1 MA y 13.8 MA:

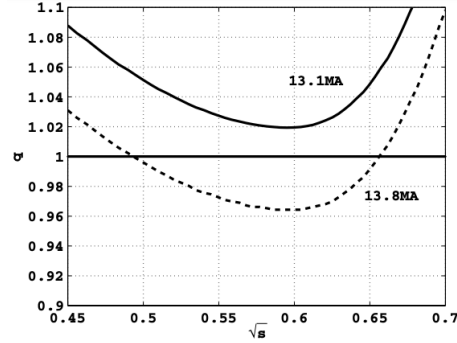


Figura 3.8: Perfiles de la transformada rotacional ($1/q$) como función de \sqrt{s} (donde s es una variable radial) para el intervalo 13,1 – 13,8 MA. Tomada de [10]

Con los perfiles de $q \approx 1$ y p observados en la figura 3.6, la frontera descrita en 3.7, se obtienen las condiciones necesarias para la bifurcación de los estados de equilibrio tridimensional en las que núcleo con superficies magnéticas de frontera simétricas, como lo reportado por Cooper:

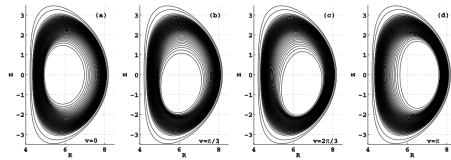


Figura 3.9: Contornos de las superficies magnéticas de secciones transversales en la dirección toroidal para el escenario híbrido del ITER en un equilibrio con corriente Toroidal de 13,3MA. Tomada de [10]

Este resultado llega a un máximo de deformación para el caso de una corriente de orden 13,5, más allá de esa corriente el plasma regresa a su eje axisimétrico, como se ve en [10]. Lo que resulta en que la imposición de un borde axisimétrico constituye una restricción suficiente que obliga al núcleo helicoidal a desarrollarse por encima de un umbral de corriente relativamente alto.

3.1.2. Reversed Field Pinch

RFX-mod

A diferencia del JET, este dispositivo tipo Reversed Field Pinch en general se caracteriza por tener campos magnéticos poloidales y toroidales comparables y de que su método de calentamiento del plasma es únicamente el calentamiento Óhmico. En particular el RFX-mod tiene unas dimensiones de 2mts de radio mayor y 0.46m de radio menor con un volumen de plasma de $9m^3$, este experimento busca complementar la física en cuestiones generales usando alta corriente (2MA) para investigar barreras de transporte, control de la MHD y efectos tridimensionales.

En este experimento cuando la corriente dentro del plasma $I_p > 1MA$ el plasma se auto-organiza en estados de quasi-single helicity (QHS)[23] y el equilibrio magnético se vuelve helicoidal, en este estado se condensan todas las helicidades en una sola curva monocromática al rededor de una helicidad dominante, que en este caso es cuando $m = 1$ y $n = 7$, como se ve en la siguiente figura:

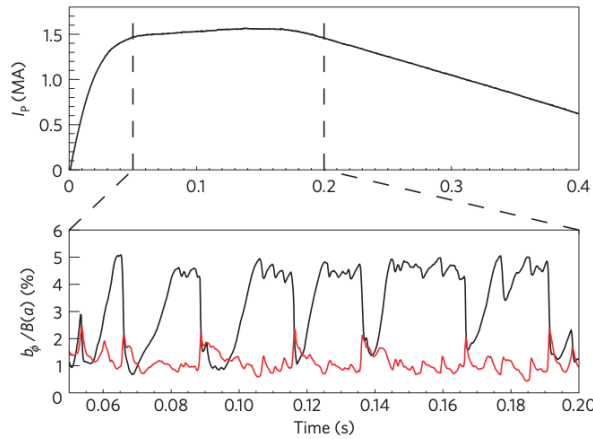


Figura 3.10: a) Perfil de corriente respecto al tiempo, las líneas punteadas delimitan la llamada fase superior plana de la descarga. b) La línea negra es la amplitud dominante de $q = 1/7$ durante la fase superior plana. La curva roja muestra las amplitudes de los modos secundarios: $m = 1$ y $n = 8 - 23$ Tomada de [22].

Es notorio que el sistema oscila entre estos dos estados, uno donde todos los modos tienen amplitudes similares y otro donde hay un modo dominante.

Esta auto-organización puede llegar al punto en el que el eje magnético del plasma se vuelve helicoidal y se llegue a un estado SHAx (Single helical axis). Lo que contrarresta el estado de multi-helicidad (MH) en el que diferentes modos resuenan en diferentes capas del plasma, provocando que se superpongan las islas magnéticas, lo que resulta en caos.

3.1. Observaciones experimentales

Dentro de la estructura tridimensional el confinamiento y la energía se mejoran, además se generan barreras de transporte que disminuyen el caos [23]. Las propiedades de las QSH están relacionados con el número de Lundquist S , definido de la siguiente manera:

$$S = \frac{Lv_A}{\eta}, \quad (3.2)$$

donde L es la longitud característica del sistema, v_A es la velocidad de Alfvén y η es la difusividad magnética.

Esta cantidad es un caso límite de la ecuación 1.107 que describe el congelamiento magnético de la MHD ideal (o con el coeficiente de difusión pequeño), lo que implica que S determina si el plasma es altamente conductor (S alto) o si es resistivo S bajo. En particular podemos observar directamente de la figura 3.1.2 que mientras los modos secundarios decrecen conforme S crece, el modo dominante crece con el número de Lundquist.

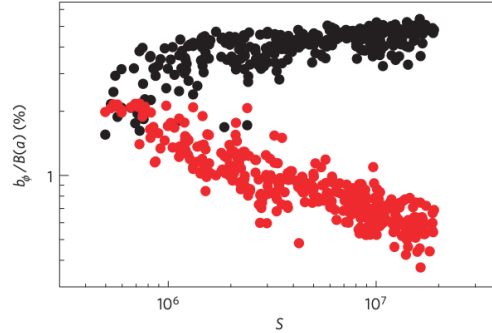


Figura 3.11: Amplitud de los modos dominante (negro) y secundarios(rojo) durante una fase QSH en función de S . Tomada de [22].

Es menester observar que el incremento de S se debe al incremento de la fase superior plana de la descarga, lo que aumenta la temperatura, sin ningún otro método de calentamiento. Es decir conforme el plasma más conductor se separan los modos y surge un modo dominante.

Este fenómeno en los dos tipos de dispositivos reduce las fluctuaciones de la MHD y fortalece las barreras de transporte, lo que favorece al confinamiento y permite que el mínimo de energía para alcanzar el equilibrio sea ligeramente menor que en el caso simétrico. Lo que hace importante estudiar cómo es que las superficies magnéticas pasan de líneas de campo con twist a superficies que poseen twist y writhe, para ello se estudiará en el siguiente capítulo los invariantes topológicos tales como la helicidad magnética, que es una cantidad

CAPÍTULO 3. ROMPIMIENTO DE AXISIMETRÍA EN SISTEMAS TOROIDALES

conservada en el marco de la MHD ideal y que, aunque se difunde ante la presencia de resistividad de la misma forma que la energía, es más robusta pues es capaz de distinguir los procesos de deformación y en el caso ideal se conserva ante deformaciones topológicas.

Capítulo 4

Helicidad e interpretación topológica

En este capítulo se revisarán las propiedades topológicas de las superficies magnéticas gobernadas por la MHD, se enunciarán y demostrarán los invariantes topológicos asociados a la MHD: la helicidad cruzada y magnética, mismas que miden el nivel de ligadura entre los campos de velocidad y magnética y el torcimiento de las líneas de campo respectivamente. Así mismo se demostrarán las condiciones de conservación de estas cantidades en los marcos de la MHD resistiva e ideal.

Además se hace un interpretación de la helicidad magnética ante transformaciones de topología en términos de los tubos de flujo y su relación con el factor de seguridad en sistemas axisimétricos. Aunado a eso se hizo la reproducción del trabajo de Woltjer del campo libre de fuerzas donde la condición de conservación de la helicidad juega un papel importante pues con éste se explican resultados experimentales obtenidos en dispositivos tipo RFP (Reversed Field Pinch).

4.1. Ligadura de Gauss

La helicidad es una cantidad derivada del número de ligaduras de Gauss, en el que se toma que existen dos curvas interligadas, como se ve en la siguiente figura:

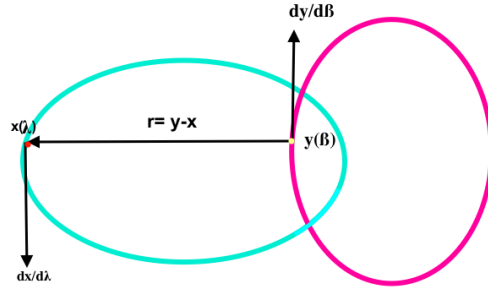


Figura 4.1: Dos círculos interligados el uno con el otro, tomando la curva azul como C_1 y la curva rosa como C_2 .

El número de ligadura de Gauss es una doble integral, si $x(\lambda)$ y $y(\beta)$, donde λ y β parametrizan a las curvas C_1 y C_2 respectivamente, con $r = y - x$, la doble integral es:

$$L_{12} = -\frac{1}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{r}{r^3} \times \frac{dy}{d\beta} d\beta d\lambda = L_{21}. \quad (4.1)$$

De acuerdo a la figura 4.1, esta integral es el producto vectorial de la diferencial en los puntos x y y , de tal forma que exista un vector \vec{r} que sea el vector separación entre estos puntos, al integrar sobre cada una de las curvas, lo que se encuentra es el número de veces que la curva C_2 pasa sobre la superficie encerrada por la curva C_1 , tal resultado es un número entero [26] y se le conoce como número de ligadura de Gauss, nótese que, esta integral no depende del orden en el que se tomen las curvas, ya que $L_{21} = L_{12}$.

En particular si estas curvas fuesen tubos de flujo, o se toman como líneas de campo dentro de un volumen y se aplica la integral anterior, tomando a consideración de tener el campo magnético encerrado en un volumen cerrado tal que $\vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ en la frontera, donde existen N tubos en los que pasan Φ_i , con $i = 1 \dots N$, entonces se puede calcular la siguiente cantidad:

$$K = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N L_{ij} \Phi_i \Phi_j, \quad (4.2)$$

donde L_{ij} es el número de ligadura de Gauss, de tal forma que al hacer $N \rightarrow \infty$, $\Phi_i \rightarrow 0$ y combinar la ecuación 4.1 con 4.2 se encuentra que:

$$-\frac{1}{4\pi} \int \oint_2 = \vec{B}(x) \cdot \frac{r}{r^3} \times \vec{B}(y) d^3x d^3y, \quad (4.3)$$

considerando que el potencial vectorial es:

$$\vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{r}{r^3} \times \vec{B}(y) d^3y, \quad (4.4)$$

con lo que encontramos la forma usual de la ecuación 4.3 conocida como helicidad magnética:

$$\int \vec{B} \cdot \vec{A} dV \quad (4.5)$$

que como se ve de la forma 4.3, también es una medida de las ligaduras. Si vemos la ecuación 4.2, es obvio que podemos tomar 2 casos: $i \neq j$ y $i = j$, este último caso no lo predice el número de ligadura de Gauss por sí mismo, sin embargo para el caso magnético, éstos casos son análogos a los de la inductancia, ya que existen estas dos variantes, donde la primera es auto-helicidad y helicidad mutua, similares a la autoinductancia y la inductancia mutua, donde la helicidad mutua es el caso de la imagen 4.1 y el caso de la auto-helicidad implica que el flujo de tubo se ligue a sí mismo, es decir, que tenga una helicidad de tipo:

$$K = L_{ii} \Phi_1^2. \quad (4.6)$$

El que el tubo se ligue a sí mismo es referente el torcimiento (twist) o retorcimiento (writhe) de un solo tubo de flujo magnético, mismo que será estudiado a detalle en la siguiente sección.

4.2. Invariantes topológicos

En general la topología es el estudio de las propiedades de los objetos geométricos que no cambian ante transformaciones continuas, lo que la hace muy útil para algunos estudios de los campos magnéticos de fusión y de coronas solares, dada su naturaleza de reconexión y reorganización, procesos en los que la geometría de los tubos de flujo cambia y es de suma importancia para la comprensión de los procesos de disipación de energía su entendimiento.

De acuerdo a [2] en general el estudio de fluidos con el formalismo de la hidrodinámica es un grupo de dimensión infinita de difeomorfismos que dejan invariante el elemento de volumen del dominio de un flujo de fluido. En particular los campos magnéticos congelados en el plasma, como los que se estudian en este trabajo, forman un grupo con esas características, donde su dominio es una variedad M . Este grupo denotado por $SDiff(M)$, forma un álgebra de Lie.

Suponemos que los tubos de flujo de plasma llenan el dominio M en el espacio Euclideo \mathbb{R}^3 [2]. El fluido es incompresible respecto a la forma estándar de volumen: $\mu = d^3x$ y además en este caso en particular al poseer una frontera δM cumple que la transformación deja la frontera invariante, además el campo magnético es un campo libre de divergencia. En la MHD ideal se toma que la energía total es la métrica Riemanniana de la configuración

del espacio, el cual es un producto semidirecto del grupo de difeomorfismos $SDiff(M)$ [2]. Note que en este caso la invariancia viene en la conservación del elemento de volumen y la frontera en la aplicación de difeomorfismos y no necesariamente a la métrica que en este caso es la energía.

En la teoría de la MHD son de interés 2 invariantes topológicas: la helicidad curzada y la helicidad magnética. En ambos casos permanecen invariantes ante la deformación continua de los tubos de flujo en los procesos de reconexión y reorganización, es decir formalmente hablando en ambos casos son invariantes ante difeomorfismos.

4.2.1. Invariante de Hopf

La helicidad magnética además de ser invariante ante difeomorfismos cumple otras características que la hacen una invariante de Hopf: que es una forma de contabilizar las ligaduras entre sub-variedades suaves [29].

En particular, en una variedad de Riemann, el producto interno de un campo libre de divergencia (campo magnético) y su potencial vectorial se conserva cuando un difeomorfismo que conserva el volumen actúa sobre el campo [2].

Para la demostración de la helicidad magnética como invariante de Hopf, consideremos que, existen p -formas invariantes advectadas al flujo G , también llamado arrastre de Lie con el flujo \vec{u} debe cumplir que [34]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right)G = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\vec{u}}\right)G = 0, \quad (4.7)$$

donde $\mathcal{L}_{\vec{u}}$ es la derivada de Lie respecto al campo vectorial \vec{u} . Éstas pueden ser cerradas o abiertas, i.e. $d\omega^p = 0$ o $d\omega^p \neq 0$.

Para esta invariancia es importante enunciar el Lema de Poincaré:

Si X es un conjunto abierto contraíble de R^n , entonces cualquier p -forma definida en X es exacta localmente, para cualquier entero p tal que $0 < p \leq n$.

Recordemos que el campo magnético \vec{B} es una 2-forma con estructura geométrica asociada a la orientación del elemento de superficie $d\vec{S}$ y el potencial magnético \vec{A} es una uno-forma asociada al campo \vec{B} .

Algunos invariantes son obtenidos al combinar invariantes conocidos usando el producto wedge, la derivada de Lie y la contracción de campos y formas, tomando en cuenta que el producto interno de una 1-forma invariante, con un campo vectorial invariante es un escalar invariante, similarmente el producto wedge de una p -forma invariante con una q -forma invariante es una $p + q$ -forma invariante [34].

4.2. Invariantes topológicos

En particular para la MHD tomamos una uno-forma advecta de la forma:

$$\alpha = \vec{A} \cdot d\vec{x}, \quad (4.8)$$

donde se escoge \vec{A} de tal manera que $\vec{u} \cdot \vec{A} = \phi_E$, ϕ_E es el potencial escalar derivado de la ley de Faraday. La condición de ser una uno-forma de arrastre es:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot d\vec{x}) = \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{A}) + \nabla(\vec{u} \cdot \vec{A}) \right) \cdot d\vec{x} = 0 \quad (4.9)$$

Asímismo el campo magnético es una 2-forma invariante, por lo que cumple:

$$\frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot d\vec{S}) = \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{u} \nabla \cdot \vec{B}) \right) \cdot d\vec{S} = 0. \quad (4.10)$$

Es notorio que la uno-forma 4.8 no es cerrada, ya que no cumple con la definición: una p-forma ω^p es cerrada si su derivada exterior $d\omega^p = 0$, pues:

$$d\alpha = \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} \neq 0 \quad \text{si} \quad \nabla \times \vec{A} \neq 0. \quad (4.11)$$

Podemos tomar el caso general de una 2-forma:

$$\omega_b^2 = \vec{b} \lrcorner \omega^3, \quad (4.12)$$

donde

$$\omega^3 = f d^3x, \quad (4.13)$$

f es una función escalar y \vec{b} es un vector de arrastre de Lie advecto al flujo, es necesario que ω_b^2 sea cerrado:

$$d\omega_b^2 = \nabla \cdot (\vec{b}f) d^3x = 0, \quad (4.14)$$

Esto implica, de acuerdo al lema de Poincaré, que localmente existe 1-forma ω^1 tal que:

$$\begin{aligned} \omega_b^2 &= d\omega^1, & \omega^1 &= \vec{A} \cdot d\vec{x}, \\ \omega_b^2 &= d(\vec{A} \cdot d\vec{x}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = f\vec{b} \cdot d\vec{S}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

Entonces,

$$f\vec{b} = \nabla \times \vec{A}. \quad (4.16)$$

CAPÍTULO 4. HELICIDAD E INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA

Es importante notar, para no perder generalidad, que ω^1 puede o no ser invariante, sin embargo es posible encontrar una $\hat{\omega}^1$ que sí este advecta al flujo, tal que:

$$\hat{\omega} = d\hat{A} \cdot d\vec{x}, \quad \hat{A} = \vec{A} + \nabla\Lambda, \quad (4.17)$$

nótese que de acuerdo a lo anterior $d\hat{\omega}^1 = \omega^1 + d\Lambda$.

Aplicando la condición de uno-forma de arrastre 4.9 a \hat{A} :

$$\frac{d}{dt}(\hat{A} \cdot d\vec{x}) = \frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot d\vec{x}) + \nabla \left(\frac{d\Lambda}{dt} \right) \cdot d\vec{x}, \quad (4.18)$$

donde $d/dt = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla$ es la derivada lagrangiana. Por lo que en términos de ω la ecuación anterior se reescribe como:

$$\frac{d\hat{\omega}^1}{dt} = \frac{d\omega^1}{dt} + \nabla g \cdot d\vec{x}, \quad (4.19)$$

donde $g = d\Lambda/dt$. En particular en este caso se elige g , tal que $\frac{d\hat{\omega}^1}{dt} = 0$, lo que asegura que ω^1 es un vector de arrastre de Lie advecto al flujo, es decir, cumple con 4.9.

$$\frac{d\hat{\omega}^1}{dt} = \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} - \vec{u} \times (\nabla \times \hat{A}) + \nabla(\vec{u} \cdot \hat{A}) \right) \cdot d\vec{x} = 0, \quad (4.20)$$

como $\hat{\omega}^1$ es una 1-forma de arrastre de Lie, entonces $d\omega^1$ y $\hat{\omega}^1 \wedge d\hat{\omega}^1$ también son invariantes. Recordando que $d\omega^1 = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{S}$ se obtiene la invariante de Hopf:

$$I_h = \int_V \omega^1 \wedge d\omega^1 = \int_V (\vec{A} \cdot d\vec{x}) \wedge [(\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{S}] = \int_V (\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{A})) dV. \quad (4.21)$$

Es menester observar que 4.21 sólo necesita que las 1-forma α y la dos-forma $d\alpha$ estén advectas al flujo y que localmente, de acuerdo al lema de Poincaré α sea exacta. Si en particular usamos que la uno-forma α esta definida por el potencial vectorial, y recordando que el campo magnético es una dos-forma cerrada, tomando que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $d\beta = dd\alpha = 0$, donde $\alpha = \vec{A} \cdot d\vec{x}$; encontraremos la forma usual de la helicidad magnética:

$$I_h = \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} d^3x, \quad (4.22)$$

donde \vec{A} cumple con:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{A}) + \nabla(\vec{u} \cdot \vec{A} + g) = 0. \quad (4.23)$$

4.2.2. Invariancia topológica de la helicidad cruzada

Recalcando que el campo esta congelado al plasma, cumple con la siguiente ecuación en el caso ideal:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}), \quad (4.24)$$

en ∂M , con la condición a la frontera $\vec{B} \cdot \hat{n} = 0$. Que es equivalente a:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \right) = \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{u}. \quad (4.25)$$

Como se ve en la ecuación 4.10 el campo es una 2-forma, así que es posible escribir la ecuación anterior de acuerdo a Fukumoto [15] como:

$$\varphi_t^*(\omega_B^2) = \omega_B^2, \quad (4.26)$$

donde φ_t^* es un pull-back y $\omega_B^2 = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$ es la 2-forma del campo.

La helicidad cruzada se define como:

$$H[v(x, t), B(x, t)] = \int_M \vec{u} \cdot \vec{B} dV \quad (4.27)$$

Probaremos que 4.27 es invariante ante difeomorfismos de la forma:

$$x = \varphi_t(\vec{X}), \quad (4.28)$$

donde $\vec{x}(t) = \varphi_t(\vec{X}) = \varphi(\vec{X}, t)$ es la trayectoria de una partícula del fluido y X es su posición (x_1, x_2, x_3) en $t = 0$. Por lo que la velocidad es simplemente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(X, t) = \vec{u}(\varphi(\vec{X}, t), t), \quad (4.29)$$

la velocidad también cumple las condiciones a la frontera: $\vec{u} \cdot \hat{n} = 0$, por lo que:

$$\vec{u} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t \circ \varphi_t^{-1}, \quad (4.30)$$

de modo que es parte del grupo de álgebra de Lie de los difeomorfismos.

Se probará que la helicidad cruzada es invariante ante difeomorfismos de la forma:

$$H[\vec{u}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)] = H[\vec{u}(\vec{X}, 0), \vec{B}(\vec{X}, 0)]. \quad (4.31)$$

CAPÍTULO 4. HELICIDAD E INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA

Tomemos la integral para un tiempo t de la ecuación 4.25, lo cual es un problema de Cauchy, ya que es una ecuación diferencial sujeta a condiciones a la frontera, cuyo resultado de acuerdo a [15] es:

$$\frac{B_{ti}}{\rho} = \frac{B_{0A}}{\rho} \frac{\partial x_i}{\partial X_A}, \quad (4.32)$$

con $x_i = \varphi_i(X, t)$, esta solución también aplica para \vec{u} :

$$u_{ti} = u_{0B} \frac{\partial X_B}{\partial x_i} + \frac{\partial \chi}{\partial x_i}, \quad (4.33)$$

donde $\chi = \int_0^t \left[\int \frac{dp}{\rho} + \Omega - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\delta x}{\delta t} \right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta t} \right)^2 + \left(\frac{\delta z}{\delta t} \right)^2 \right\} \right] dt$ con Ω denota la energía potencial por unidad de masa en el punto x, y, z y p la presión respecto a las fuerzas que actúan a distancia, de acuerdo a [20].

Haciendo la multiplicación de 4.32 con 4.33, donde los índices repetidos están en producto punto encontramos que:

$$\vec{v}_t \cdot \vec{B}_t \frac{\rho_0}{\rho_t} = \vec{v}_0 \cdot \vec{B}_0 + \frac{\partial}{\partial \vec{X}} \cdot (\chi \vec{B}) \quad (4.34)$$

Integramos $\vec{v} \cdot \vec{B}$ en el dominio M , haciendo un cambio de variable: $\vec{x} = \varphi(\vec{X}, t)$:

$$\int_M \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) dV = \int_M \vec{v}(\varphi(\vec{X}, t), t) \cdot \vec{B}(\varphi(\vec{X}, t), t) J(\vec{X}, t) dV_X = \int_M v_t \cdot B_{ti} dV_X, \quad (4.35)$$

donde $dV_X = d^3 \vec{X}$ y $J(\vec{X}, t) = |\partial \varphi| / |\partial \vec{X}|$ es el Jacobiano y se asume que $\varphi_t(M) = M$. De acuerdo a la ecuación 4.34 el resultado de la ecuación anterior es:

$$\int_M \vec{v}_t \cdot \vec{B}_t \frac{\rho_0}{\rho_t} dV = \int_M \vec{v}(\vec{X}, 0) \cdot \vec{B}(\vec{X}, 0) dV_X + \int_{\partial M} \chi \vec{B}(\vec{X}, 0) \cdot \hat{n} dA_X, \quad (4.36)$$

la última integral es cero por las condiciones a la frontera, con lo que queda demostrado que se cumple la ecuación 4.31, y por lo tanto la helicidad cruzada es invariante ante difeomorfismos, por lo que es una invariante topológica.

4.2.3. Helicidad magnética

La constricción del MHD ideal de la ausencia de resistividad da como resultado el flujo congelado, sin embargo si se introduce una pequeña cantidad de resistividad se recupera la ley de Ohm generalizada 1.104 lo que implica que la condición de flujo congelado se viole en ciertas partes del plasma, donde el término $\eta \vec{J}$ sea mayor que el término $\nabla \times \vec{v} \times \vec{B}$. En cuyo caso las líneas de campo pueden reconectarse entre sí y pueden difundirse a través del plasma. La reconexión magnética puede destruir y crear ligaduras entre tubos de flujo, pero por cada ligadura que se destruye se crea una, de tal manera que el total de las

ligaduras queda constante, tal constante es la helicidad magnética. La reconexión implica dispersión de energía magnética, mientras que conserva la helicidad.

La definición de la misma es:

$$K = \int \vec{A} \cdot \vec{B} dV, \quad (4.37)$$

El potencial vectorial \vec{A} se ve afectada por una transformación de gauge:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f, \quad (4.38)$$

mientras que el campo magnético es invariante respecto a una transformación de gauge:

$$\vec{B}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla f) = \nabla \times \vec{A}, \quad (4.39)$$

por lo que si las líneas de campo magnético no traspasan la superficie S que envuelve al volumen V :

$$\vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (4.40)$$

la helicidad K es independiente a transformaciones de gauge. En seguida se hace la demostración:

$$\begin{aligned} \int (\vec{A} + \nabla f) \cdot \vec{B} dV &= \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} dV + \int_V \nabla f \cdot \vec{B} dV \\ &= \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} dV + \int_S f \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} dV. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Una ecuación de conservación de la helicidad se puede encontrar usando la ley de Faraday:

$$\frac{-\partial \vec{A} \cdot \vec{B}}{\partial t} = 2\vec{E} \cdot \vec{B} + \nabla \cdot (\phi \vec{B} + \vec{E} \times \vec{A}), \quad (4.42)$$

usando la ley de Ohm ideal encontramos la forma conservativa de la ecuación anterior:

$$\frac{\partial \vec{A} \cdot \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\phi \vec{B} + \vec{E} \times \vec{A}) - 2\eta \vec{J} \cdot \vec{B}. \quad (4.43)$$

Integrando 4.43 sobre todo el volumen del plasma encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int \vec{A} \cdot \vec{B} dV \right] = \int d\vec{S} \cdot (\phi \vec{B} + \vec{E} \times \vec{A}) - 2\eta \int \vec{J} \cdot \vec{B} dV, \quad (4.44)$$

recordando que $\vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ y $\vec{E} = \eta \vec{J} \cdot \vec{B}$ en la frontera, el segundo término de la ecuación anterior desaparece y nos queda simplemente que:

$$\frac{\partial}{\partial t} K = \int \vec{A} \cdot \vec{B} dV = 2\eta \int \vec{J} \cdot \vec{B} dV. \quad (4.45)$$

CAPÍTULO 4. HELICIDAD E INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA

Es notorio que la helicidad se conserva en un plasma ideal rodeado de una pared rígida en la que no penetra ninguna línea magnética, cuando $\eta = 0$. Sin embargo, en general también se difunde en presencia de resistividad, a pesar de ello, esta cantidad es más robusta para el análisis del plasma que la energía magnética, pues ésta permite diferenciar la pérdida de energía por reconexión (disrupción de las líneas de campo magnético) de la reorganización de las mismas (deformación de la columna de plasma) ya que esta es invariante ante cambios de topología.

En esta ley de conservación en la que se encuentra la corriente de Noether y su carga, para el caso ideal, no es posible usar el teorema inverso de Noether para encontrar su simetría asociada ya que la MHD es una teoría en las que simplemente se suman las características de fluido y las características electromagnéticas, es una teoría no canónica.

4.2.4. Helicidad cruzada

Esta cantidad describe como se entrecruzan las líneas magnéticas y las líneas de campo de velocidades, viene dada por:

$$K_c = \int \vec{B} \cdot \vec{u} dV \quad (4.46)$$

En seguida se hará la demostración. Primeramente consideremos la ecuación de momento estipulada en las ecuaciones de la MHD 1.105:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \nabla p = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla \cdot \Pi. \quad (4.47)$$

Considerando que es compresible y que se cumple lo siguiente:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla h(\rho), \quad (4.48)$$

donde $p = C\rho^\gamma$ y $h(\rho)$ es la entalpía y esta dada por:

$$h(\rho) = \frac{S^\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1}. \quad (4.49)$$

Cabe resaltar que en el caso de que sea incompresible el plasma, la ecuación anterior se vuelve constante y $\nabla h = 0$. Con lo que escribimos la ecuación 4.47:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \frac{1}{\rho} (\vec{J} \times \vec{B} - \nabla p - \nabla \cdot \Pi). \quad (4.50)$$

4.2. Invariantes topológicos

Haciendo uso de la siguiente propiedad vectorial: $(\nabla \times A) = -\nabla(A^2/2) + (A \cdot \nabla)A$ en el segundo sumando de la parte izquierda de la ecuación anterior, reescribimos:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{u} \times \nabla \vec{u}) + \nabla \frac{u^2}{2} = \frac{1}{\rho} (\vec{J} \times \vec{B} - \nabla p) - \nabla \cdot \Pi, \quad (4.51)$$

usando la ecuación 4.48 es equivalente a:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \nabla \vec{u}) - \nabla h(\rho) - \nabla \frac{u^2}{2} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{\rho} - \nabla \cdot \Pi. \quad (4.52)$$

Definimos $\chi = h + u^2/2$, despejando la derivada parcial respecto al tiempo, tenemos que:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \nabla \vec{u}) - \nabla \chi + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{\rho} - \nabla \cdot \Pi. \quad (4.53)$$

Con lo anterior ya podemos hacer la demostración de la conservación de K_c :

$$\frac{d}{dt} K_c = \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{u} dV. \quad (4.54)$$

Desarrollando la última igualdad, encontramos que:

$$\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{u} dV = \int \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV, \quad (4.55)$$

reescribimos el integrando usando la ecuación 4.53:

$$\int \vec{B} \cdot \left(\nabla \times (\vec{u} \times \nabla \vec{u}) - \nabla \chi + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{\rho} \right) - \nabla \cdot \Pi + \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV. \quad (4.56)$$

Es notorio que el tercer sumando se va a cero por la ortogonalidad de \vec{B} y $\vec{J} \times \vec{B}$. Usando la siguiente propiedad vectorial $\nabla \cdot (A \times B) = (\nabla \times A) \cdot B - A \cdot (\nabla \times B)$, $\nabla \cdot (A\varphi) = \varphi(\nabla \cdot A) + A \nabla \varphi$ y la ley de Faraday, hallamos lo siguiente:

$$\int \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{u} \times \nabla \vec{u}) - \nabla \cdot (\vec{B}\chi) + \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{u} \times \vec{B}) - \nabla \cdot \Pi + \frac{\eta}{\mu_0} (\nabla^2 \vec{B} \cdot \vec{u}) dV \quad (4.57)$$

Usando otras propiedades vectoriales, llegamos a:

$$\int \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{u} \times \nabla \vec{u}) - \nabla \cdot (\vec{B}\chi) + (\nabla \times \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{B})) - \nabla \cdot (\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{B})) dV + \int -\nabla \cdot \Pi + \frac{\eta}{\mu_0} (\nabla^2 \vec{B} \cdot \vec{u}) dV. \quad (4.58)$$

Recordando la siguiente propiedad: $A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$ vemos que:

$$\int (\vec{u} \times \nabla) \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) - \nabla \cdot (\vec{B}\chi) + (\nabla \times \vec{u}) \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) - (\nabla \cdot \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{B})) dV + \int -\nabla \cdot \Pi + \frac{\eta}{\mu_0} (\nabla^2 \vec{B} \cdot \vec{u}) \quad (4.59)$$

CAPÍTULO 4. HELICIDAD E INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA

Podemos ver que el primer sumando y el tercero se anulan si conmutamos el rotacional de $\vec{u} \times \nabla$, por lo que finalmente encontramos una forma conveniente de la derivada de la helicidad cruzada:

$$\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{u} dV = - \int \nabla \cdot (\vec{B} \chi + \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{B})) dV + \int -\nabla \cdot \Pi + \frac{\eta}{\mu_0} (\nabla^2 \vec{B} \cdot \vec{u}) dV. \quad (4.60)$$

Usando el teorema de Gauss y propiedades vectoriales en la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{u} dV = - \int [\vec{B} \chi + [(\vec{u} \cdot \vec{B} \vec{u} - u^2 \vec{B})]] \cdot d\vec{S} + \int -\nabla \cdot \Pi + \frac{\eta}{\mu_0} (\nabla^2 \vec{B} \cdot \vec{u}) \quad (4.61)$$

. De acuerdo a la condición a la frontera dada por 4.40 es razonable ver que el primer sumando de la parte derecha de la ecuación anterior es cero y que por lo tanto:

$$\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{u} dV = \int -\nabla \cdot \Pi + \frac{\eta}{\mu_0} (\nabla^2 \vec{B} \cdot \vec{u}). \quad (4.62)$$

Es decir, la helicidad cruzada en general se difunde por la resistividad y la viscosidad. Aunque en el marco de la MHD ideal ésta se conserva. En ambos casos esta cantidad es invariante ante cambios de topología respecto a la ligadura del campo de velocidades con el campo magnético.

La helicidad cruzada, de acuerdo a lo publicado por Yahalom [36] hereda la simetría asociada a la helicidad cruzada para fluidos, esta simetría es la simetría de reetiquetado, en la que para el caso general de fluidos es definida por la variación en las etiquetas de la *partícula de fluido*, que están definidas de acuerdo a la descripción lagrangiana de un fluido:

$$\vec{x}(\vec{a}, t) = x(a, b, c, \tau), y(a, b, c, \tau), z(a, b, c, \tau), \quad (4.63)$$

donde a, b, c *etiqueta* una *partícula* de fluido, de tal manera que τ es el tiempo propio del sistema de etiquetados, de tal forma que $\partial/\partial\tau$ deja a a, b, c invariantes y análogamente $\partial/\partial t$ deja a x, y, z fijo. De tal forma que se puede pensar que el vector \vec{x} sigue la partícula de fluido etiquetada por a, b, c que permanecen fijos. Son las variaciones de estas etiquetas $a + \delta a, b + \delta b, c + \delta c$ las que dejan a la lagrangiana invariante.

Para el caso de la MHD, Yahalom mostró que al considerar las etiquetas a, b, c en unas ciertas coordenadas χ, η, μ (que tienen que ver con los potenciales del campo magnético), es posible relacionar la conservación de la helicidad cruzada con la simetría dada por la variación $\delta\mu$ en la dirección μ llamada dirección del *metage*.

4.3. Interpretación topológica de la helicidad

Contemplemos dos tubos de flujo como se muestra en la figura:

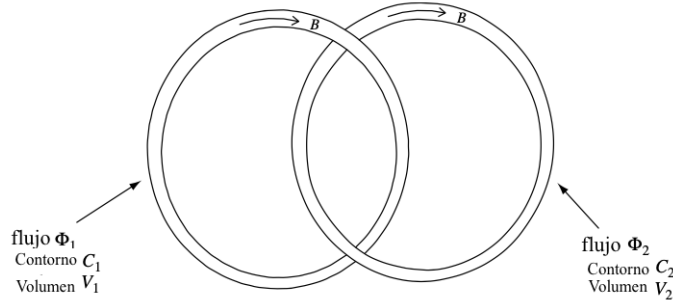


Figura 4.2: Sistema de dos tubos magnéticos enlazados. Tomada [6]

Respectivamente de cada tubo son Φ_1 y Φ_2 , que son contenidos por los contornos C_1 y C_2 , cuyos volúmenes son V_1 y V_2 .

La helicidad se puede tomar como el recuento de los enlaces de los tubos de flujo magnético. Tomando que $\vec{B} = 0$ fuera de los tubos, encontramos que la helicidad total del sistema es:

$$K = K_1 + K_2 = \int_{V_1} \vec{A} \cdot \vec{B} dV + \int_{V_2} \vec{A} \cdot \vec{B} dV. \quad (4.64)$$

Para evaluar la integral anterior es menester observar que el flujo que pasa a través de una superficie S con un perímetro C se expresa como sigue:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = cte., \quad (4.65)$$

para el tubo 1, $dV = d\vec{l} \cdot \hat{B} \Delta S$, donde ΔS es el área de la sección transversal al tubo y $d\vec{l}$ es la longitud a lo largo del contorno C_1 , con lo que escribimos:

$$K_1 = \int \vec{A} \cdot \vec{B} dV = \int \vec{A} \cdot \vec{B} (\Delta S d\vec{l} \cdot \hat{B}), \quad (4.66)$$

El flujo es constante por lo que de la ecuación 4.65 vemos que $\vec{B} \Delta S = \Phi_1$ y $\vec{B} \parallel d\vec{l}$, por lo que encontramos lo siguiente:

$$K_1 = \Phi_1 \int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{l}, \quad (4.67)$$

usando que $\vec{A} = \nabla \times \vec{B}$ y el teorema de Stokes hallamos:

$$\int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{S'} \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S}' = \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (4.68)$$

CAPÍTULO 4. HELICIDAD E INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA

en esta última integral, la superficie S' es la superficie que el contorno C_1 rodea, donde el único campo magnético que existe es el que pasa por el tubo 2, por lo que:

$$\int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_2, \quad (4.69)$$

así, la ecuación de la helicidad de enlace en el tubo 1 es:

$$K_1 = \Phi_1 \Phi_2. \quad (4.70)$$

Haciendo un procedimiento similar para $K_2 = \Phi_2 \Phi_2$, encontramos que la helicidad de enlace total es:

$$K = K_1 + K_2 = 2\Phi_1 \Phi_2. \quad (4.71)$$

Esta cantidad depende de qué tantas veces se *enreda* un tubo sobre el otro.

4.3.1. Helicidad de torcimiento

Si en este caso consideramos otra configuración en la que el tubo 2 embebe al tubo 1, como se puede observar en la siguiente figura:

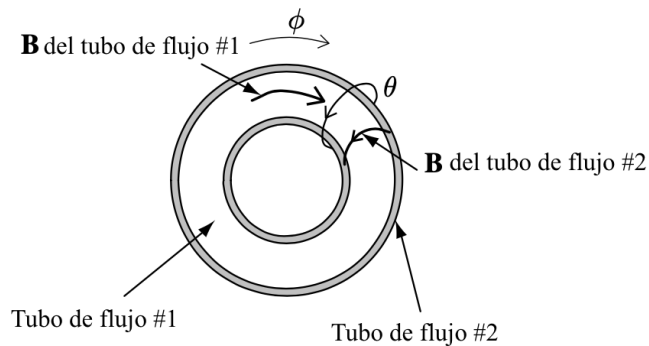


Figura 4.3: Sistema de dos tubos magnéticos embebidos el uno en el otro. Tomado de [6].

De tal manera que el flujo del tubo 2 sea perpendicular al del tubo 1, i.e. Φ_1 tiene dirección ϕ y Φ_2 tiene dirección θ . En este caso el tubo 2 es tal que su volumen es infinitesimal por lo que $\Phi_2 = d\psi$, con lo que usando la ecuación 4.71 obtenemos:

$$dK = 2\Phi d\psi. \quad (4.72)$$

4.3. Interpretación topológica de la helicidad

Es menester recalcar que ninguno de los volúmenes de los tubos es fijo, por lo que al incrementar $d\psi$ aumenta Φ , por lo que no son independientes el uno del otro:

$$\psi = \psi(\Phi). \quad (4.73)$$

Así, sacando la derivada establecemos:

$$d\psi = \psi' d\Phi. \quad (4.74)$$

Por lo que la ecuación 4.72 se escribe de la siguiente manera:

$$dK = 2\Phi\psi' d\Phi. \quad (4.75)$$

Se mostrará que ψ' representa el *twist* del campo magnético embebido.

Volviendo a la figura es razonable entender que la dirección ϕ es la misma que el contorno C_1 , de forma similar θ tiene la misma dirección de C_2 , además el perímetro de la sección transversal del tubo 1 esta en la dirección θ y la sección transversal del tubo 2 tiene la dirección $d\phi$, que a su vez, se puede sintetizar si lo escribimos como rotacional:

$$\vec{B}_2 = \nabla\psi \times \nabla\phi = B_2\hat{\theta}. \quad (4.76)$$

Recalcando que $\nabla\psi$ es ortogonal a $\nabla\phi$. De la misma manera se encuentra que:

$$\vec{B}_1 = \nabla\Phi \times \nabla\theta = B_1\hat{\phi}, \quad (4.77)$$

similarmente $\nabla\Phi$ es ortogonal a $\nabla\theta$, con Φ el flujo ligado al tubo 1.

Finalmente se obtiene el campo magnético total:

$$\vec{B} = \nabla\Phi \times \nabla\theta + \nabla\psi \times \nabla\phi, \quad (4.78)$$

que claramente tiene una forma de líneas de campo helicoidal.

El **twist** del campo magnético es el número de veces que una línea de campo da una vuelta en la dirección $\hat{\theta}$ por cada vez que da una en la dirección $\hat{\phi}$.

Si $d\vec{l}$ es un desplazamiento con dirección $\hat{\phi}$, entonces:

$$d\phi = |\nabla\phi|dl_\phi, \quad (4.79)$$

análogamente si consideramos el desplazamiento en dirección $\hat{\theta}$:

$$d\theta = |\nabla\theta|dl_\theta. \quad (4.80)$$

CAPÍTULO 4. HELICIDAD E INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA

Si $d\vec{l}$ es el incremento de desplazamiento a lo largo de la línea de campo $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ encontramos que:

$$\vec{B} \times d\vec{l} = 0 \Rightarrow \frac{dl_\theta}{B_\theta} = \frac{dl_\phi}{B_\phi}. \quad (4.81)$$

Usando las ecuaciones 4.79, 4.80 y 4.81 encontramos que:

$$\frac{d\theta}{|\nabla\theta|B_\theta} = \frac{d\phi}{|\nabla\phi|B_\phi}. \quad (4.82)$$

De las ecuaciones 4.76 y 4.77, vemos que los campos son:

$$\begin{aligned} B_\theta &= \frac{1}{2\pi} |\nabla\psi| |\nabla\phi| \\ B_\phi &= \frac{1}{2\pi} |\nabla\phi| |\nabla\theta|, \end{aligned} \quad (4.83)$$

Con lo que haciendo álgebra elemental, encontramos la siguiente relación:

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{2\pi |\nabla\psi| |\nabla\phi| |\nabla\theta|}{2\pi |\nabla\phi| |\nabla\Phi| |\nabla\theta|} = \frac{|\nabla\psi|}{|\nabla\Phi|}, \quad (4.84)$$

como $|\nabla\psi| = \psi' \nabla\Phi$, se obtiene:

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \psi' \quad (4.85)$$

que es el número de veces que la línea magnética recorre la dirección θ cada vez que lo hace en dirección ϕ , que es ψ' veces, que se le conoce como *twist* y se denota como:

$$T(\Phi) = \psi'. \quad (4.86)$$

Así podemos encontrar una ecuación para la helicidad ahora en términos de giro sustituyendo lo anterior en la ecuación 4.75 y haciendo integración:

$$K = 2 \int \Phi T(\Phi) d\Phi = T\Phi^2. \quad (4.87)$$

4.3.2. Relajación de Woltjer-Taylor

Considerando un plasma aislado en un cierto volumen V encerrado por una superficie S , donde el campo magnético se desvanece en la frontera que es también una superficie equipotencial electrostático. Es necesario considerar el caso en el que la energía magnética es mucho más grande que la energía interna : $p/B^2 \ll 1$, además de no poseer corrientes internas y que el campo magnético es producido por bobinas externas.

Woltjer en 1958 [35] hizo un principio variacional que establece que los campos libres de fuerza con constante α :

$$\nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B} \quad (4.88)$$

4.3. Interpretación topológica de la helicidad

representan el estado de energía magnética más bajo en un sistema cerrado. Esto implica que si la energía magnética es la mínima, entonces no puede producir movimiento, por lo que la fuerza de Lorentz se va a cero.

La demostración es la siguiente: considerando que la helicidad magnética se conserva (4.45), se puede ver que la dinámica en el interior del volumen cerrado no afecta al potencial magnético fuera del mismo.

Por otra parte vamos a tomar la energía magnética:

$$W = \int \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (4.89)$$

y la vamos a minimizar con la restricción de la conservación de la helicidad K . Para lo cual utilizaremos el método de multiplicadores de Lagrange:

$$I = \delta W - \lambda \delta K = 0. \quad (4.90)$$

Calculemos el primer sumando de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2\mu_0} \int [(\vec{B} + \delta B)^2 - \vec{B}^2] dV = \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int (\vec{B}^2 + 2\vec{B} \cdot \delta \vec{B} + \delta \vec{B}^2 - \vec{B}^2) dV = \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int \vec{B} \cdot \delta \vec{B} dV. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Ahora, si consideramos que $\delta \vec{B} = \nabla \times \delta \vec{A}$ encontramos que la ecuación anterior se escribe:

$$\delta W = \frac{1}{\mu_0} \int (\nabla \times \delta \vec{A}) \cdot \vec{B} dV. \quad (4.92)$$

Usando la siguiente propiedad vectorial:

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}), \quad (4.93)$$

reescribimos la ecuación 4.92:

$$\delta W = \int \nabla \cdot (\delta \vec{A} \times \vec{B}) + \delta \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}). \quad (4.94)$$

Aplicando el teorema de Gauss al primer sumando obtenemos:

$$\delta W = \oint_S (\delta \vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} + \int (\delta \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}) dV. \quad (4.95)$$

CAPÍTULO 4. HELICIDAD E INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA

Haremos un procedimiento similar para calcular la variación de la helicidad:

$$\delta K = \int \vec{A} \cdot \delta \vec{B} + \delta \vec{A} \cdot \vec{B} dV, \quad (4.96)$$

sustituyendo $\delta \vec{B} = \nabla \times \delta \vec{A}$ variación de la helicidad es:

$$\delta K = \int [\vec{A} \cdot (\nabla \times \delta \vec{A}) + \delta \vec{A} \cdot \vec{B}] dV, \quad (4.97)$$

gracias a la relación vectorial 4.93 lo anterior es equivalente a:

$$\delta K = \int 2(\delta \vec{A} \cdot \vec{B}) + \nabla \cdot (\delta \vec{A} \times \vec{A}) dV. \quad (4.98)$$

Análogamente al caso de la energía magnética, utilizando el teorema de Gauss encontramos que:

$$\delta K = \int 2(\delta \vec{A} \cdot \vec{B}) dV + \oint_S (\delta \vec{A} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}. \quad (4.99)$$

Con lo que hacemos las sustituciones correspondientes de 4.95 y 4.99 en la ecuación 4.90:

$$I = \int (\delta \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}) dV + \oint_S (\delta \vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} - \lambda \left[\int 2(\delta \vec{A} \cdot \vec{B}) dV + \oint_S (\delta \vec{A} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \right] = 0, \quad (4.100)$$

reacomodando y agrupando la ecuación 4.100 es:

$$I = \int \delta \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B} - 2\lambda \vec{B}) dV + \oint_S \delta \vec{A} \times (\vec{B} - \lambda \vec{A}) \cdot d\vec{S}. \quad (4.101)$$

La superficie es equipotencial electrostática, la componente tangencial del campo eléctrico debe desaparecer en el muro, acorde a la conservación de la helicidad, la componente tangencial de $\delta \vec{A}$ es cero y usamos 4.40. Por lo que sólo nos queda la integral sobre el volumen:

$$I = \int \delta \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B} - 2\lambda \vec{B}) dV = 0, \quad (4.102)$$

como $\delta \vec{A}$ es arbitrario, encontramos que para que se cumpla la igualdad anterior, se debe cumplir que:

$$\nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B}, \quad (4.103)$$

con $\alpha = 2\lambda$, que es justamente un campo libre de fuerzas. Así, los estados relajados sólo dependen de una constante α y no de condiciones del sistema más allá de la pared perfectamente conductora y la helicidad constante.

4.3.3. Ecuación del campo libre de fuerzas.

Las ecuaciones del campo libre de fuerzas y las ecuaciones de onda están relacionadas, en general las soluciones de la ecuación 4.103 son soluciones para la ecuación de onda, nótese que al revés esta aseveración es falsa.

Hagamos el rotacional de la ecuación del campo libre de fuerzas:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \alpha^2 \vec{B}, \quad (4.104)$$

utilizando propiedades vectoriales del rotacional es sencillo llegar a la siguiente expresión:

$$\nabla^2 \vec{B} + \alpha^2 \vec{B} = 0. \quad (4.105)$$

Sea Λ la solución de la ecuación de Helmholtz escalar:

$$\nabla^2 \Lambda + \alpha^2 \Lambda = 0, \quad (4.106)$$

entonces el campo magnético debe de tener la siguiente forma para resolver la ecuación de Helmholtz vectorial:

$$\vec{B} = \nabla \Lambda \hat{a}, \quad (4.107)$$

donde \hat{a} es la dirección que cumple que su factor de escala es 1. Cabe resaltar que el campo libre de fuerzas es solución de la ecuación 4.105.

Si Λ satisface la ecuación 4.106 entonces el campo magnético dado por la ecuación 4.107 satisface la ecuación del campo libre de fuerzas. Para demostrarlo supongamos que es cierto. Sustituimos 4.107 en $\nabla \times \vec{B} = \alpha^2 \vec{B}$ y haciendo un poco de álgebra obtenemos:

$$\nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \Lambda \hat{a})) - \alpha^2 \nabla \times \Lambda \hat{a} = 0, \quad (4.108)$$

simplificando llegamos a:

$$\nabla \times (\nabla^2 (\Lambda \hat{a}) + \alpha^2 \Lambda \hat{a}) = 0 \quad (4.109)$$

La cual se satisface si y sólo si $\Lambda \hat{a}$ satisface la ecuación de Helmholtz. Este resultado se puede generalizar para la solución vectorial de la ecuación de Helmholtz. Ahora consideremos a S y T como soluciones a la ecuación de Helmholtz, que tienen la forma:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \nabla \times (\Lambda \hat{a}), & \nabla \cdot \vec{T} &= 0 \\ \vec{S} &= \frac{1}{\alpha} \nabla \times \vec{T} = \frac{1}{\alpha} \nabla \times \nabla \times (\Lambda \hat{a}), & \nabla \cdot \vec{S} &= 0. \end{aligned} \quad (4.110)$$

ambas son soluciones independientes de la ecuación vectorial:

$$\nabla^2 \vec{B} + \alpha^2 \vec{B} = 0. \quad (4.111)$$

Por consiguiente:

$$\nabla \times (\vec{S} + \vec{T}) = \alpha(\vec{S} + \vec{T}), \quad (4.112)$$

también es solución, con lo que es posible escribir la solución general de la ecuación de Helmholtz vectorial:

$$\vec{B} = \vec{S} + \vec{T} = \frac{1}{\alpha} \nabla \times [\nabla \times (\vec{a}\Lambda)] + \nabla \times (\vec{a}\Lambda) = \nabla \times (\Lambda \hat{a}) - \frac{1}{\alpha} \nabla^2 (\Lambda \hat{a}). \quad (4.113)$$

En particular, para coordenadas cilíndricas ρ, θ, z , \vec{S} , \vec{T} y \vec{B} son escritos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \nabla \times (\Lambda \nabla \hat{z}) = \nabla \Lambda \times \nabla \hat{z}, & \vec{S} &= (\alpha \Lambda) \nabla \hat{z}, \\ \vec{B} &= \nabla \Lambda \times \nabla \hat{z} + (\alpha \Lambda) \nabla \hat{z}, \end{aligned} \quad (4.114)$$

donde $\hat{a} = \hat{z}$. Cabe resaltar que las ecuaciones 4.114 son particularmente útiles pues el campo ya está separado en una parte toroidal \vec{T} y otra \vec{S} poloidal y encontramos que un campo con estas características es solución a la ecuación del campo libre de fuerzas.

Taylor en una serie de artículos mostró que el campo libre de fuerzas explica las observaciones realizadas en los llamados *pinch toroidales*, en los que se tenía una primera fase muy turbulenta, después de un cierto tiempo se estabiliza y espontáneamente se observaba que en la superficie magnética exterior la dirección del campo magnético cambiaba de dirección.

De acuerdo a los cálculos de Taylor, un valor crítico de $\theta \approx 1,2$, una vez superado el campo toroidal cambia de signo, además dio otro punto crítico $\theta \approx 1,6$ a partir del cual el estado final deforma las líneas helicoidales del campo magnético. De acuerdo con estos artículos después de la primera fase turbulenta, el plasma se *relaja* hasta llegar a un estado inactivo donde parece estar estable, posteriormente se debe superar un valor crítico de la razón del pinch dado por:

$$\theta \equiv \frac{2I}{B_0 a}, \quad (4.115)$$

donde a es el radio menor del toro. Al superar este valor crítico la relajación del plasma se ve acompañada del cambio de dirección del campo toroidal.

Si tomamos la ecuación de equilibrio, y la ponemos en términos del campo libre de fuerzas tenemos primero que:

$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \vec{B} = -\nabla^2 \Lambda \nabla \hat{z} + b' \nabla \Lambda \times \nabla z, \quad (4.116)$$

4.3. Interpretación topológica de la helicidad

donde $b = \alpha\Lambda$ es la magnitud del campo en la dirección \hat{z} y $b' = db/d\Lambda$.

Ahora podemos escribir completa la ecuación de equilibrio:

$$\mu_0 \vec{J} \times \vec{B} = \nabla^2 \Lambda \nabla \Lambda - bb' \nabla \Lambda = -\mu_0 p'(\Lambda) \nabla \Lambda \quad (4.117)$$

donde $\nabla p = p' \nabla \Lambda$, se reduce a:

$$\nabla^2 \Lambda + bb' = -\mu_0 p'(\Lambda). \quad (4.118)$$

Si tomamos que $p' = 0$ y desarrollamos los gradientes en las coordenadas cilíndricas tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \Lambda = 0. \quad (4.119)$$

Se puede resolver con separación de variables de tipo $\Lambda(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. De donde se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (4.120)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \nu^2 \Theta = 0. \quad (4.121)$$

$\rho = \alpha r$, de las ecuaciones anteriores, la solución de 4.3.3 es de la forma:

$$\Theta(\theta) = e^{i\nu\theta}. \quad (4.122)$$

Mientras que al considerar un cambio de variable la ecuación 4.120 $\varsigma = \alpha r$ es una ecuación de Bessel, cuyas soluciones son la suma de las funciones de Bessel de primer y segunda clase:

$$R(\varsigma) = AJ_\nu(\varsigma) + BY_\nu(\varsigma) = AJ_\nu(\alpha r) + BY_\nu(\alpha r), \quad (4.123)$$

cuya solución general es:

$$\Lambda(r, \theta) = \sum_{\nu} \Lambda_{\nu}(r, \theta) = \sum_{\nu} (C_{\nu} J_{\nu}(\alpha r) + D_{\nu} Y_{\nu}(\alpha r)) [A_{\nu} e^{i\nu\theta} + B_{\nu} - e^{i\nu\theta}], \quad (4.124)$$

donde $A_{\nu}, B_{\nu}, C_{\nu}, D_{\nu}$ son constantes que dependen de ν . Sin embargo las funciones de segunda clase divergen en el origen por lo que sólo se toman las de primera clase como solución dentro del cilindro:

$$R(\rho) \sim J_{\nu}(\rho) = J_{\nu}(\alpha r), \quad (4.125)$$

CAPÍTULO 4. HELICIDAD E INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA

tomando las soluciones regulares en $\rho = 0$.

Usando la función de flujo encontramos la forma del campo magnético para el límite cilíndrico, donde $a \ll R$:

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \sum_{\nu} (C_{\nu} J_{\nu}(\alpha r) [A_{\nu} i e^{i\nu\theta} + i B_{\nu} - e^{i\nu\theta}]), \quad (4.126)$$

$$B_{\theta} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial r} = -\alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \sum_{\nu} (C_{\nu} J'_{\nu}(\alpha r) [A_{\nu} e^{i\nu\theta} + B_{\nu} - e^{i\nu\theta}]), \quad (4.127)$$

$$B_z = b(\Lambda) = \alpha \Lambda = \alpha \sum_{\nu} (C_{\nu} J_{\nu}(\alpha r) [A_{\nu} e^{i\nu\theta} + B_{\nu} - e^{i\nu\theta}]). \quad (4.128)$$

Debido a que sólo son necesarias las soluciones simétricas azimutalmente, consideramos $\nu = 0$, con lo que obtenemos el flujo poloidal:

$$\Psi = J_0(\alpha r) [A_0 + B_0], \quad (4.129)$$

a partir de la ecuación anterior se encuentra el campo magnético:

$$\begin{aligned} B_r &= 0 & B_{\theta} &= \alpha C J_1(\alpha r) \\ B_z &= \alpha C J_0(\alpha r), \end{aligned} \quad (4.130)$$

donde $C = B_0 + A_0$, B_0 y A_0 son constantes que dependen de ν que en nuestro caso $\nu = 0$, con el campo y la función de flujo podemos encontrar el potencial vectorial, cuya forma es:

$$\vec{A} = \lambda J_0(\alpha r) \hat{z} + \frac{1}{q} J_0(\alpha r) \hat{\theta} \quad (4.131)$$

donde q es el factor de seguridad cuya definición utiliza las ecuaciones 4.130 de la siguiente manera:

$$q(r) = \frac{B_z}{B_{\theta}} \frac{a}{R} \frac{r}{a} = \frac{B_z}{B_{\theta}} \epsilon \frac{r}{a}, \quad (4.132)$$

donde R es el radio mayor, a el menor y $\epsilon = a/R$ es la razón de aspecto cuyos valores van $0 < \epsilon \leq 1$. Al sustituir las componentes del campo 4.130 y dividir y multiplicar por a , encontramos:

$$q(\epsilon r) = \frac{J_0(\alpha r)}{J_1(\alpha r)} \epsilon \frac{r}{a}. \quad (4.133)$$

Es posible obtener el factor de seguridad de forma más general al considerar las funciones de flujo:

$$q(r) = \frac{d\phi}{d\Psi}. \quad (4.134)$$

4.3. Interpretación topológica de la helicidad

Considerando que el campo magnético tiene la forma:

$$\vec{B} = \nabla\Psi \times b\nabla z, \quad (4.135)$$

donde

$$b\nabla z = b\hat{z} = \alpha\Psi, \quad (4.136)$$

es posible, a partir de las ecuaciones 4.130 encontrar la función de flujo poloidal (Ψ), sabiendo que la relación entre la función poloidal es:

$$\Psi(\alpha r) = \int_0^{2\pi R} dz \int_0^r \theta(\alpha r) dr = 2\pi R \int_0^{\alpha r} J_1(\alpha r') d(\alpha r') = 2\pi RC[-J_0(\alpha r) + 1], \quad (4.137)$$

y la toroidal, a partir de la relación con Ψ :

$$\frac{d\phi}{dr} = \Psi\alpha r \quad (4.138)$$

se sigue que,

$$\Phi = \int (\alpha r)\Psi dr = \frac{C}{\alpha} \int_0^{\alpha r} C J_0(\alpha r')(\alpha r') dr' = -\frac{C}{\alpha} \alpha r J_1(\alpha r). \quad (4.139)$$

Ahora, es necesario encontrar la derivada de la función poloidal y toroidal respecto al radio:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dr} &= 2\pi RC\alpha J_1(\alpha r) \\ \frac{d\phi}{dr} &= \frac{2\pi C}{\alpha} [\alpha r J_0(\alpha r)] \end{aligned} \quad (4.140)$$

finalmente podemos sustituir en el factor de seguridad:

$$q(r) = \frac{d\phi}{d\Psi} = \frac{r J_0(\alpha r)}{R J_1(\alpha r)} = \frac{\epsilon}{\alpha} \frac{\alpha r}{a} \frac{J_0(\alpha r)}{J_1(\alpha r)}. \quad (4.141)$$

Las gráficas de 4.130 son las siguientes:

Que es precisamente lo reportado por Taylor: Tales resultados los podemos comparar con los experimentales en la siguiente gráfica:

Con lo anterior podemos calcular la densidad de energía magnética:

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} (\alpha C)^2 (J_1(\alpha r)^2 + J_0(\alpha r)^2), \quad (4.142)$$

cuya gráfica es la siguiente:

gráfica del factor de seguridad, sabiendo que $\alpha = 1$, $C = 1$, $a = 0,1$ y $\epsilon = 0,3$ es la

CAPÍTULO 4. HELICIDAD E INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA

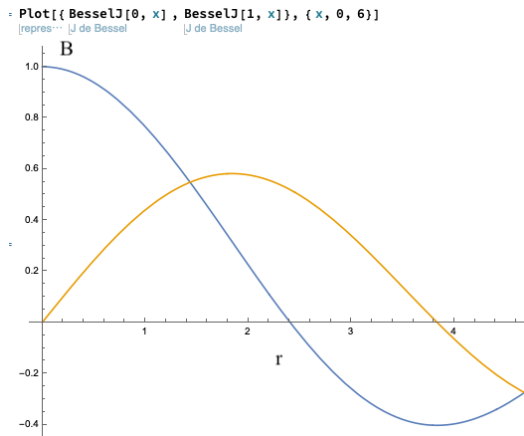


Figura 4.4: La gráfica azul corresponde a B_θ y la gráfica amarilla a B_z

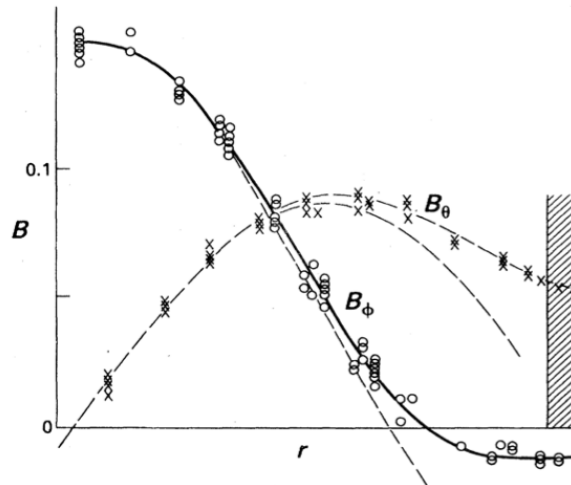


Figura 4.5: Perfil de los campos magnéticos, líneas punteadas predicción de Taylor, círculos y x datos experimentales. Tomada Taylor 1986 [32].

siguiente:

4.3. Interpretación topológica de la helicidad

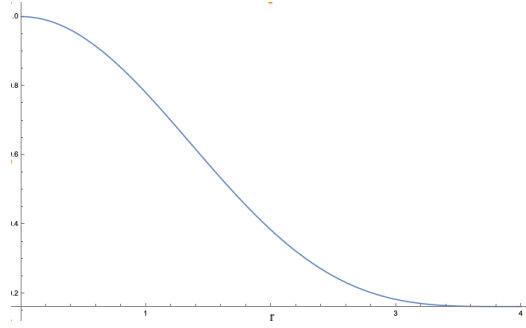


Figura 4.6: Gráfica de la densidad de energía magnética para el caso en que $C\lambda = 1$

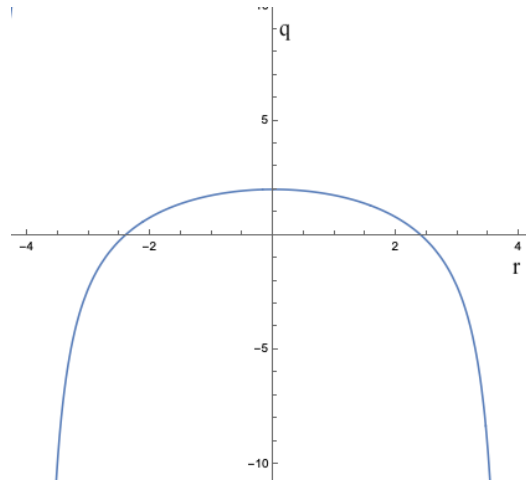


Figura 4.7: Gráfica del factor de seguridad.

Ahora, con la información de las ecuaciones 4.131 y 4.130, podemos calcular la densidad de helicidad magnética:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \lambda \alpha C J_0^2(\alpha r) + \frac{\alpha}{q} C J_1(\alpha r) J_0(\alpha r), \quad (4.143)$$

cuya gráfica es la siguiente:

Es menester recalcar que para el caso toroidal, la ecuación 4.106 es equivalente a la ecuación de Grad-Shafranov y extender el resultado del campo libre de fuerza a esta geometría.

Sólo cuando esta en el estado de mínima energía, se cumple la ecuación 4.103, por lo tanto, el estado final debe ser uno que haga que la energía mínima esté sujeta a las restricciones que se imponen al movimiento permitido. Una de esas restricciones es precisamente

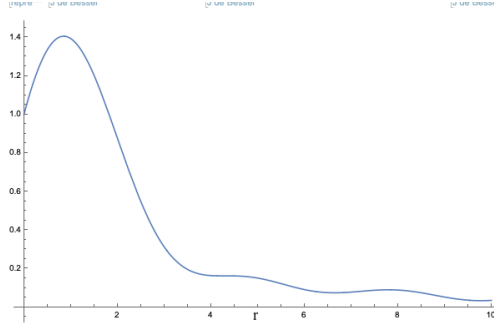


Figura 4.8: Gráfica de la densidad de helicidad magnética, con $\alpha = 0,9$, $\lambda = 1$, $C = 1$, $a = 10$ y $\epsilon = 0,5$.

la conservación de la helicidad magnética, de la cual, como vimos en las secciones anteriores se llega al campo libre de fuerzas. Así cuando las constricciones topológicas se relajan se determina el multiplicador α y se vuelve un campo libre de fuerzas particular.

4.3.4. Comparación de la energía magnética con la helicidad magnética.

Considerado los resultados encontrados 4.45 y 4.62, ahora calcularemos la variación del campo magnético tomando en el marco de la MHD resistiva y compararemos los resultados. Tomemos la variación de la energía magnética

$$\frac{\partial}{\partial t} W_B = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{1}{\mu_0} \int \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV, \quad (4.144)$$

usando la ley de Faraday y propiedades vectoriales, la integral nos queda:

$$\int \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \vec{J} dV. \quad (4.145)$$

Separando la integral, aplicando teorema de Gauss y considerando las condiciones a la frontera encontramos que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) dV = - \frac{1}{\mu_0} \int \vec{E} \cdot \vec{J} dV. \quad (4.146)$$

Ademas, teniendo que $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} + \eta \vec{J}$, lo anterior resulta:

$$- \frac{1}{\mu_0} \int \vec{E} \cdot \vec{J} dV = - \frac{1}{\mu_0} \int \vec{E} \cdot \vec{J} dV = - \frac{1}{\mu_0} \int -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{J} + \eta J^2 dV. \quad (4.147)$$

4.3. Interpretación topológica de la helicidad

El primer término se elimina por condiciones a la frontera y finalmente resulta en:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_B = -\frac{1}{\mu_0} \int \eta J^2 dV. \quad (4.148)$$

Lo que implica que la energía magnética se difunde proporcionalmente a η , si comparamos con el resultado de la minimización de la helicidad en el caso resistivo 4.45, ésta también se difunde en razón de η y la corriente de helicidad, y en este caso aunque la resistividad tienda a cero, la integral $\int \vec{J} \cdot \vec{B} dV$ sigue siendo considerable. Sin embargo aunque ambos se difunden, la helicidad sí se conserva en los procesos de reconexión, ya que ésta cambia la topología de las líneas y superficies de campo para las cuales la helicidad sólo cambia de forma dándonos información de la evolución de la reorganización del campo magnético.

4.3.5. Geometría tridimensional

Consideremos un retorcimiento en el eje de uno de los tubos de flujo mencionado en la sección anterior como se muestra en la figura:

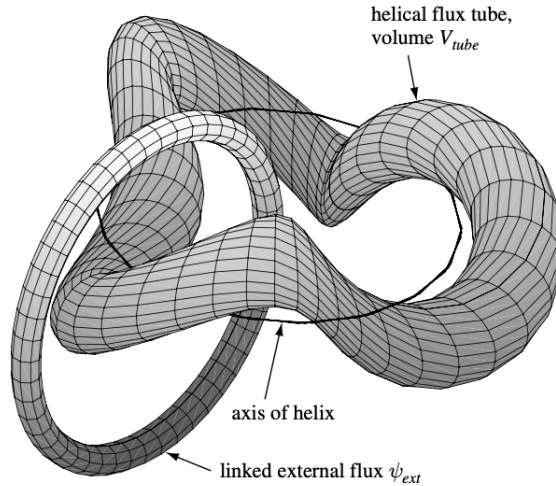


Figura 4.9: Tubo de flujo retorcido ligado a un tubo de flujo no retorcido. Tomada de [6]

Donde el V_{tubo} es un tubo de flujo cerrado de radio menor a con un eje helicoidal, denotaremos como l_e a la longitud del eje y ξ como la distancia a lo largo del eje a algún punto fijo x_0 , de tal manera que incrementar ξ de 0 a l_e es dar toda la vuelta. Con lo anterior encontramos una semi-coordenada angular:

$$\phi = 2\pi \frac{\xi}{l_{eje}}. \quad (4.149)$$

CAPÍTULO 4. HELICIDAD E INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA

Debido a la forma helicoidal del eje, existe para cada punto sobre éste un vector de curvatura denotado por:

$$\kappa = \hat{\phi} \cdot \nabla \hat{\phi}, \quad (4.150)$$

donde $\hat{\phi}$ es un vector unitario referente a la ecuación 4.149. El radio local de curvatura es:

$$r_{curva} = \frac{1}{|\hat{\phi} \cdot \nabla \hat{\phi}|}. \quad (4.151)$$

Una restricción dada por la geometría toroidal es que el radio menor a debe ser menor que el radio de curvatura.

El volumen V_{tubo} estará lleno de líneas de campo magnético, alineadas y paralelas al eje del tubo, la longitud de éstas variará de acuerdo a su distancia relativa al eje. Sea ξ' la distancia entre una de estas líneas de longitud l' a un plano perpendicular al eje del tubo de flujo en el punto x_0 , lo que hace posible darle más peso al significado de ϕ , pues nos da la distancia del eje del tubo a cualquier línea usando:

$$\xi' = \phi \frac{l'}{2\pi}. \quad (4.152)$$

El incremento de 0 a 2π de ϕ corresponde a dar una vuelta en cualquiera de estas líneas, lo que da una medida de la distancia fraccional a lo largo del flujo incluso si esta torcido, curvado o sea helicoidal.

El segundo volumen V_{ext} tendrá líneas de campo magnético ligadas al tubo V_{tubo} , y el flujo debido a esta ligadura se denotará como ψ_{ext} . Si la dinámica dentro del volumen $V = V_{tubo} + V_{ext}$ esta gobernado por la MHD ideal, entonces la helicidad K_V se debe conservar, como esta definida como integral de volumen se puede separar en:

$$K_V = K_{V_{tubo}} + K_{V_{ext}}. \quad (4.153)$$

Proseguiremos calculando cada sumando de la ecuación anterior, por definición encontramos que:

$$K_{V_{tubo}} = \int_{V_{tubo}} \vec{A} \cdot \vec{B} dV. \quad (4.154)$$

El campo magnético lo podemos separar en \vec{B}_e , paralelo al eje del tubo de flujo y \vec{B}_{az} que es ortogonal a \vec{B}_e y va sobre la sección transversal del tubo. Asimismo podemos escribir ambos campos en términos de sus potenciales vectoriales:

$$\vec{B}_e = \nabla \times A_e, \quad \vec{B}_{az} = \nabla \times A_{az} \quad (4.155)$$

4.3. Interpretación topológica de la helicidad

con lo que ya podemos escribir la ecuación 4.154 de la siguiente manera:

$$K_{V_{tubo}} = \int_{V_{tubo}} (\vec{A}_e + \vec{A}_{az}) \cdot (\vec{B}_e + \vec{B}_{az}) dV. \quad (4.156)$$

Nótese, que en general no tenemos información de la dirección de los potenciales vectoriales, sin embargo la ecuación 4.156 es cierta inclusive si el eje es helicoidal.

Esto nos permite ser más generales en las definiciones, ya que con esta discusión se ve que si el eje no esta sobre un plano, pero cumple que:

$$\hat{\phi} \cdot \nabla \times \hat{\phi} = 0, \quad (4.157)$$

entonces ϕ describe el perímetro de una superficie no necesariamente regular. En casos donde $\hat{\phi} \cdot \nabla \times \hat{\phi} \neq 0$ pero que el promedio sobre la longitud del eje sí sea cero también se puede considerar un perímetro.

En general cualquier superficie magnética encierra un flujo Φ , por lo que la superficie magnética esta etiquetada por Φ , de tal manera que se pueda considerar como una coordenada tomando que el gradiente $\nabla\Phi$ es normal a la superficie de flujo, lo que la hace un reescalamiento del eje menor a del tubo. Las líneas del campo magnético que yacen en alguna superficie magnética tienen una componente paralela al eje del tubo y una perpendicular, pero nunca en dirección $\nabla\Phi$, por lo que es menester la introducción de una coordenada azimutal θ que es la distancia angular al rededor del eje del tubo en la dirección $\nabla\phi \times \nabla\Phi$:

$$\frac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|} = \frac{\nabla\phi \times \nabla\Phi}{|\nabla\phi \times \nabla\Phi|}. \quad (4.158)$$

Para que θ sea una posición debe medirse respecto a un origen fijo, para lo que usaremos el vector de curvatura:

$$-\kappa = -\vec{B} \cdot \nabla\vec{B}, \quad (4.159)$$

que ya esta evaluado en el eje magnético.

La superficie descrita cuando $\theta = 0$ es un listón que se extiende al rededor del eje y que esta orientado tal que $\hat{\phi} \times \kappa$ es normal a la superficie del listón, éste tiene un corte en $\phi = 0$ y $\phi = 2\pi$ para distinguir el final e inicio del mismo, tal como se observa en la figura:

Podemos notar que el flujo Φ es una generalización del flujo toroidal ahora para un caso donde la geometría es más compleja. Lo que nos concierne ahora es generalizar el flujo poloidal $\Psi(\Phi)$, éste será el flujo magnético que penetra el listón, extendiéndose hacia dentro desde la superficie exterior del tubo, hasta una superficie magnética:

$$\Psi = \int_{subl} \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C d\vec{l} \cdot \vec{A}. \quad (4.160)$$

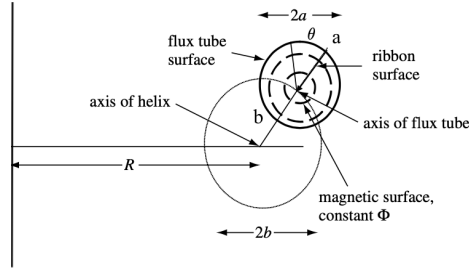


Figura 4.10: Sección transversal del tubo de flujo de radio a y b es radio sobre el eje de la hélice, las sup. de flujo con Φ cte. se muestran en las líneas punteadas. La sup. del listón en $\theta = 0$ también esta marcada. Tomada de [6]

C sigue el perímetro del listón, lo que implica que $\Psi = 0$ en la superficie exterior del flujo pues el área del sublistón es cero en ese lugar.

Si resolvemos 4.160 para el caso de \vec{A}_{az} Definmos el potencial vectorial:

$$\vec{A}_{az} = \frac{\Psi(\Phi)}{2\pi} \nabla\phi, \quad (4.161)$$

que es válido en $0 \leq \phi < 2\pi$.

Así el campo y el potencial magnético se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\vec{B} = \vec{B}_e + \nabla \times \frac{\Psi(\Phi)}{2\pi} \nabla\phi, \quad \vec{A} = \vec{A}_e + \nabla \times \frac{\Psi(\Phi)}{2\pi} \nabla\phi \quad (4.162)$$

esto nos permite escribir la ecuación 4.156, haciendo su correspondiente producto punto:

$$K_{tubo} = \int \left(\vec{A}_e \cdot \vec{B}_e + \frac{\Psi(\Phi)}{2\pi} \nabla\phi \cdot \vec{B}_e + \vec{A}_e \cdot \frac{1}{2\pi} \nabla\Psi(\Phi) \times \nabla\phi \right) dV. \quad (4.163)$$

Que a su vez descomponemos en:

$$K_{tubo} = K_{writhe} + K_{twist}, \quad (4.164)$$

dónde

$$K_{writhe} = \int \vec{A}_e \cdot \vec{B}_e dV \quad (4.165)$$

y

$$K_{twist} = \int \left(\frac{\Psi(\Phi)}{2\pi} \nabla\phi \cdot \vec{B}_e + \vec{A}_e \cdot \frac{1}{2\pi} \nabla\Psi(\Phi) \times \nabla\phi \right) dV \quad (4.166)$$

Como se mostrará adelante, K_{twist} depende sólo de Ψ y K_{writhe} depende de la medida en la que el eje del tubo de flujo es helicoidal.

En particular en la ecuación 4.165 tal como la plantea Bellan es cero, ya que por definición

4.3. Interpretación topológica de la helicidad

tenemos que:

$$A_e = \frac{\Phi}{2\pi} \nabla \theta, \quad (4.167)$$

y

$$\vec{B}_e = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \Phi \nabla \theta. \quad (4.168)$$

Es notorio que así como los describe el autor ambos vectores son ortogonales por lo que su producto punto es obligatoriamente cero. La única forma que estos términos sean distintos de cero es que exista un término extra en la dirección del eje, de forma que efectivamente se tenga un writhe, es decir un retorcimiento del eje además del de las líneas de campo, para ello es necesario un planteamiento distinto de las coordenadas del campo para obtener de una forma más orgánica el cálculo de la contribución del writhe a la helicidad magnética.

K_{twist}

La integral 4.166 es insensible a la conectividad, ya que no afecta su resultado el hecho de que el tubo tiene un corte en $\phi = 0$. Se puede demostrar que el campo magnético del eje esta dado por:

$$\vec{B}_e = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \Phi \nabla \theta. \quad (4.169)$$

Es notorio por la forma del campo que el potencial vectorial es:

$$\vec{A}_e = \frac{\Phi}{2\pi} \nabla \theta, \quad (4.170)$$

lo que es válido en $0 \leq \phi < 2\pi$; con lo que nos es posible obtener la integral de la helicidad twist:

$$K_{twist} = \frac{1}{4\pi^2} \int (\Psi \nabla \phi \cdot \nabla \Phi \times \nabla \theta + \Phi \nabla \theta \cdot \nabla \Psi \times \nabla \phi) dV, \quad (4.171)$$

tomando que $\Psi' = \nabla \Psi / \nabla \Phi$ y haciendo álgebra encontramos:

$$K_{twist} = \frac{1}{4\pi^2} \int ((-\Psi + \Phi \Psi') \nabla \theta \cdot \nabla \Phi \times \nabla \phi) dV. \quad (4.172)$$

En este caso $\nabla \theta, \nabla \Phi, \nabla \phi$ forman un sistema coordenado ortogonal, así que:

$$dV = dl_\Phi dl_\theta dl_\phi = \frac{d\Phi d\theta d\phi}{\nabla \theta \cdot \nabla \Phi \times \nabla \phi}, \quad (4.173)$$

considerando que $d\theta = dl_{|\nabla \theta|}$, $d\phi = dl_{|\nabla \phi|}$, $d\Phi = dl_{|\nabla \Phi|}$, con lo que ya podemos calcular la integral:

$$K_{twist} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Phi d\Phi \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} (-\Psi + \Phi \Psi') d\phi, \quad (4.174)$$

CAPÍTULO 4. HELICIDAD E INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA

$2\pi*$ implica que casi llega a cerrar el contorno pero no lo toca. Resolviendo:

$$K_{twist} = 2 \int_0^\Phi \frac{d\Psi}{d\Phi} d\Phi. \quad (4.175)$$

Esta última ecuación es consistente a la encontrada anteriormente para el twist: 4.87 por lo que concluimos que la generalización es válida.

K_{writhe}

Contrario al caso anterior, aquí la conectividad juega un papel importante, por lo que el diferencial de volumen es:

$$dV = d\vec{l} \cdot d\vec{s}, \quad (4.176)$$

$d\vec{l}$ es el incremento de longitud en la dirección del eje y $d\vec{s}$ es un elemento de superficie en el plano perpendicular al eje, por lo que $\vec{B}_e \cdot d\vec{s} = d\Phi$, la integral relacionada con $d\vec{l}$ involucra un circuito completo, es decir que ϕ varía de 0 a 2π , que hace que el K_{writhe} y el K_{twist} sean diferentes topológicamente.

Así la ecuación 4.165 se escribe de la siguiente manera:

$$K_{writhe} = \int_{C_e} (\vec{A}_e \cdot \vec{B}_e) d\vec{l} \cdot d\vec{s} = \Phi \int_{C_e} \vec{A}_e \cdot d\vec{l} \quad (4.177)$$

Nótese que el contorno C puede ser deformado hasta formar un nuevo contorno C' sin que esta deformación altere el resultado de la ecuación anterior, si y sólo si no hay un flujo magnético vinculado a la superficie delimitada por los contornos C y C' , es decir:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ 0 &= \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ 0 &= \int_C \vec{A} \cdot d\vec{l} - \int_{C'} \vec{A} \cdot d\vec{l}. \end{aligned} \quad (4.178)$$

El que C se deforme hasta llegar a C' impone una condición: debe existir una superficie S que se encuentra entre C y C' , lo que implica que los dos contornos no estén ligados entre sí.

Revisaremos 3 casos extremos para el K_{writhe} :

Caso no helicoidal

Para este caso de la figura 4.10, $b = 0$, lo que implica que se regresa a la axisimetría. Así el contorno que hace el eje C_e se puede deslizar de su original posición a través de las líneas de campo \vec{B}_e a la superficie del tubo de flujo sin cruzando cualquier línea de campo, pues

4.3. Interpretación topológica de la helicidad

son paralelas al eje, así que la ecuación 4.177 se resuelve:

$$K_{wrihe} = \Phi\psi_{ext} \quad (4.179)$$

ya que C' yace en la superficie del tubo de flujo, por lo que C' rodea al flujo del tubo externo.

Retorcimiento fuerte y débil: $a < b$ y $b < a$

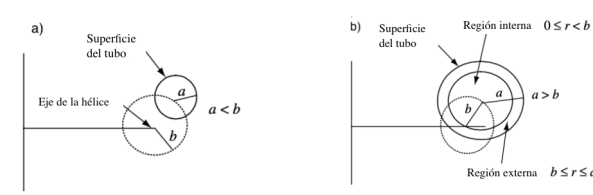


Figura 4.11: a) Caso $a < b$, la hélice se traza fuera del eje del tubo b) Caso $b < a$, la región $0 \leq r < b$ rota al rededor del eje de la hélice y la región $b < r < a$ fluctúa al rededor del eje de la hélice. Tomada de [6]

En el primer caso como el eje helicoidal se curva sobre sí mismo, como se ve en la figura, debe tener un número entero de períodos, al que llamaremos N . Nótese que b caracteriza la amplitud del torcimiento, si $b \ll 1$ tiene un muy débil retorcimiento.

Como el campo magnético \vec{B}_e es paralelo al eje del tubo en todas partes y el eje será desplazado a través de las líneas del campo, del eje de la hélice hasta el eje de C_e , así la helicidad se escribe:

$$K_{wrihe} = \Phi \int_{C_e} \vec{A}_e \cdot d\vec{l}_e \quad (4.180)$$

En general, el tubo de flujo pasa a través de la hélice N veces, por lo que:

$$\int_{C_e} \vec{A}_e \cdot d\vec{l}_e = N\Phi + \psi_{ext}, \quad (4.181)$$

encontramos:

$$K_{wrihe} = \Phi^2 N + \Phi\psi_{ext}. \quad (4.182)$$

Finalmente la helicidad del tubo sería:

$$K_{tubo} = 2 \int_0^\Phi \frac{d\Psi}{d\Phi} d\Phi + \Phi^2 N + \Phi\psi_{ext}. \quad (4.183)$$

Retorcimiento débil $b < a$ figura 4.11 b)

CAPÍTULO 4. HELICIDAD E INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA

En este caso necesitamos subdividir el interior en dos regiones: la del centro con $r < b$, asociado a un flujo $\Phi b^2/a^2$ y la región exterior con $b < r < a$:

Consideremos únicamente la región del centro que gira al rededor del eje de la hélice, la región exterior sólo oscila al rededor de la hélice y no enlaza con el eje de la hélice.

El flujo ligado a esta región es:

$$\int_{C_{helice}} \vec{A}_e \cdot d\vec{l}_e = N\Phi \frac{b^2}{a^2} + \psi_{ext}, \quad (4.184)$$

por lo que la helicidad de retorcimiento es:

$$K_{writhe} = N\Phi^2 \frac{b^2}{a^2} + \Phi\psi_{ext}, \quad (4.185)$$

mientras que la helicidad total del tubo es:

$$K_{tubo} = 2 \int_0^\Phi \Phi \frac{d\Psi}{d\Phi} d\Phi + N\Phi^2 \frac{b^2}{a^2} + \Phi\psi_{ext}. \quad (4.186)$$

4.3.6. Inestabilidad de rizo con twist y writhe

El campo magnético helicoidal es susceptible a inestabilidades tipo rizo, que es un retorcimiento en la columna del plasma, que se deben a concentración de campo poloidal \vec{B}_θ , resultando en una presión magnética más grande de un lado de la columna que del otro, como se ve en la figura:

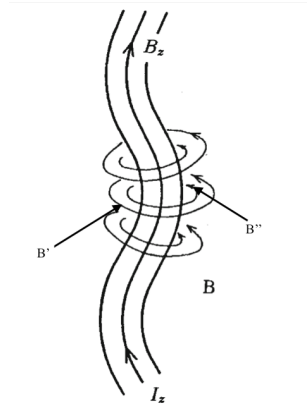


Figura 4.12: Diagrama de inestabilidad tipo rizo tomada de[25]

La inestabilidad tipo rizo es gobernada por la MHD, por lo que también se debe conservar

4.3. Interpretación topológica de la helicidad

la helicidad en su presencia. El número de vueltas en el rizo se da por la condición inicial del twist:

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = k_\phi B_\phi + k_\theta B_\theta. \quad (4.187)$$

si $k_\phi = n/R$ y $k_\theta = 1/a$, el resultado es una hélice con $N = n$. Como la helicidad se conserva, la amplitud del rizo aumenta, es decir el twist del tubo debe disminuir, si el twist es uniforme: $\Psi = T\Phi$, por lo que utilizando la ecuación 4.87 encontramos que:

$$2 \int \Phi \frac{d\Psi}{d\Phi} d\Phi = T\Phi^2. \quad (4.188)$$

Por conservación de la helicidad de la ecuación 4.186 se concluye que:

$$T + N \frac{b^2}{a^2} = a, \quad b < a \quad (4.189)$$

La inestabilidad de rizo inicia con $b = 0$ (caso no helicoidal) con un twist inicial $T_i = n$, que crecerá (caso de retorcimiento débil) hasta que $b=a$, el twist se desvanece en este punto y la helicidad ahora es contenida en un writhe de N -vueltas, donde $N = T_i$. Es decir, el rizo se convierte en writhe en el caso de retorcimiento fuerte.

Es decir, al inicio $T + N = 0$ porque la columna no se ha girado sobre sí misma y el eje no es helicoidal, si la columna se deforma en una hélice hacia la derecha, una línea de campo en la superficie formará una hélice hacia la izquierda para mantener $T + N = 0$.

4.3.7. Helicidad y reconexión magnética

Como se vió en este capítulo la helicidad existe igualmente en tubos ligados, como en tubos con torcimiento y posteriormente retorcimiento. Es sencillo pensar que no es posible la conservación de helicidad ante reconexión si se piensa unidimensionalmente, sin embargo este nunca es el caso, por lo que, tomando el caso presentado por Pfister y Gekelman, al considerar dos tubos de flujo ligados cada uno con un flujo asociado de ϕ , por la ecuación ?? su helicidad estaría dada por:

$$H_i = 2\phi^2. \quad (4.190)$$

Si los tubos de flujo se *cruzan* de tal forma que las líneas de campo en tal cruce son antiparalelas (véase imagen c) de la figura) tales tubos se reconectarán en el punto nulo (*punto X*) y se obtendrá un sólo tubo de flujo con dos torsiones completas [41], por lo que $T = 2$ y usando la ecuación 4.87 la helicidad es:

$$H_m = 2\phi^2. \quad (4.191)$$

CAPÍTULO 4. HELICIDAD E INTERPRETACIÓN TOPOLÓGICA

Finalmente, si relajamos el tubo de flujo podremos llegar a un retorcimiento donde el número de veces que se *crucan* los tubos de flujo, $N = 2$, con lo que la helicidad final

$$H_f = 2\phi^2, \tag{4.192}$$

Por lo tanto ante procesos de reconexión como se ve en la siguiente figura:

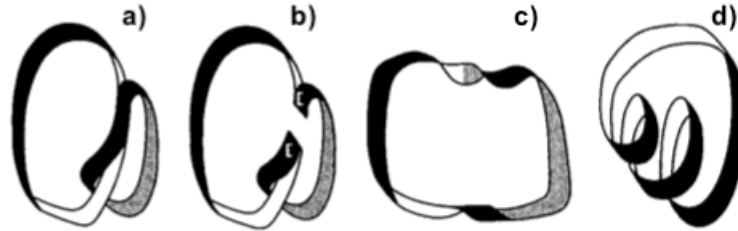


Figura 4.13: Proceso de reconexión magnética: a) dos tubos ligados, b) proceso de reconexión por puntos X, c) un solo tubo con dos torsiones, d) un solo tubo de flujo con dos retorsiones debidas al relajamiento del tubo. Tomada de Pfister

la helicidad magnética se conserva.

Capítulo 5

Contribuciones de la helicidad magnética

En este capítulo se presentarán tres resultados: el equivalente al ángulo de Hannay en términos de la helicidad magnética, el cálculo de la helicidad en sistemas no axisimétricos con el eje retorcido para el caso recto, el análisis de la norma propuesta por Yahalom y su relación con la transformada rotacional. El primer resultado principia con la dinámica de una partícula cargada en presencia de un campo, la descripción de una línea de campo magnético helicoidal y la representación del campo magnético toroidal no axisimétrico. Se expondrá que los tres sistemas poseen un formalismo matemático idéntico que los hace topológicamente equivalentes. Para ello se hará un pequeño resumen referente a la partícula cargada basados en el artículo de Littlejohn [21] que llega al ángulo geométrico asociado a la trayectoria de la partícula, tal ángulo es conocido como el ángulo de Hannay. Posteriormente se analiza la extrapolación que hace Bhattacharjee [5] donde, usando el mismo formalismo matemático estudia el movimiento de una línea de campo helicoidal, lo que da como resultado un análogo al ángulo geométrico que para este caso se encuentra en la transformada rotacional. Finalmente a partir de lo expuesto para la línea de campo magnético se hace una comparación de lo descrito anteriormente por Helander [18] para encontrar el símil de las descripciones del campo magnético y arribar a la propuesta de campo magnético utilizando lo formulado por Bhattacharjee aprovechando la equivalencia matemática de los tres sistemas.

Para el segundo resultado se inicia con la parametrización de la hélice que se transforma mediante los vectores de Frenet a un sistema tubular análogo a las superficies magnéticas circunscrito a un cilindro recto donde sale de forma orgánica la separación por flujos del

twist y writhe.

Finalmente se hace un comentario acerca de un artículo publicado por Yahalom donde en un sistema de coordenadas particular pareciera que la helicidad no es invariante de norma y que además es de ser la densidad de helicidad por lo que asemeja al efecto Aharonov-Bohm. Sin embargo esta conclusión no es la más acertada, pues se encontró que esta norma es equivalente en las coordenadas de flujo usuales a la transformada rotacional.

5.1. Discusión del ángulo de Hannay en el marco de la helicidad magnética

En un artículo de Littlejohn [21] se analiza el problema de la fase de giro θ de la partícula cargada que sigue a la línea de campo, tal problema posee esta geometría:

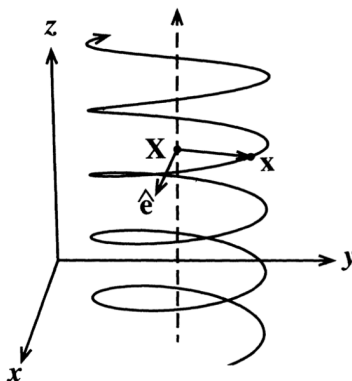


Figura 5.1: Dinámica de una partícula cargada en un campo magnético en dirección z. Tomada de [21]

donde \vec{X} es el centro de la trayectoria circular que sigue al campo magnético y θ es el ángulo entre \hat{e} y \vec{x} , este último vector sigue la posición de la partícula, en este caso la fase de giro simplemente es:

$$\theta(t) = \int \omega(X(t))dt, \tag{5.1}$$

también llamada fase dinámica.

En este artículo se hace un análisis geométrico del problema, teniendo en cuenta que estamos ante una dinámica adiabática, es decir que cambia muy lentamente con el tiempo. Se comienza con el análisis de un sistema abierto en un campo curvo, que a diferencia de la imagen anterior, la trayectoria del centro guía se desvía por cuestiones de la forma del

5.1. Discusión del ángulo de Hannay en el marco de la helicidad magnética

campo como se estudió en el capítulo 1, para ello opta por los siguientes vectores:

$$\hat{b} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}, \quad \hat{e}_1 = \frac{\hat{b} \nabla \hat{b}}{|\hat{b} \nabla \hat{b}|}, \quad \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \times \hat{b}, \quad (5.2)$$

Este sistema tiene desventajas, pues en el caso de líneas de campo rectas se indefine, por lo que llega a la siguientes vectores:

$$\hat{e}'_1 = \hat{e}_1 \cos \phi + \hat{e}_2 \sin \phi \quad \hat{e}'_2 = -\hat{e}_1 \sin \phi + \hat{e}_2 \cos \phi, \quad (5.3)$$

donde ϕ puede ser función de la posición \vec{x} y representa un ángulo de rotación del sistema de vectores antes definidos a lo largo de la trayectoria del centro guía, como consecuencia la fase de giro cambia:

$$\theta' = \theta + \phi(\vec{x}). \quad (5.4)$$

Es notorio que estos vectores provienen directamente de la física del sistema por ser normales al campo magnético como se observa en la siguiente imagen:

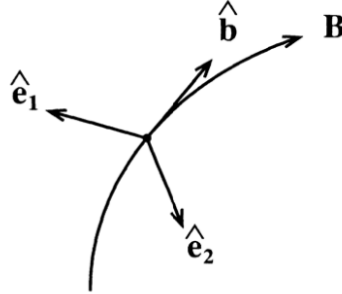


Figura 5.2: Sistema de coordenadas ortonormales. Tomada de [21].

Al hacer el cambio de base tomando en cuenta a un ángulo ϕ la fase de giro deja de ser invariante, como se ve en la ecuación 5.4, ya que al hacer la expansión de la fase de giro se encontrarán términos extras:

$$\dot{\theta}' = \Omega(\vec{X}) + \vec{R} \cdot \dot{\vec{X}} + \dots, \quad (5.5)$$

donde \vec{R} esta definido por:

$$\vec{R} = \nabla \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2, \quad (5.6)$$

éste es independiente de constantes físicas, lo cual lo hace un efecto puramente geométrico [21]. Ésto escrito en la base primada 5.3 es:

$$\vec{R}' = \nabla \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}'_2 = \vec{R} + \nabla \psi, \quad (5.7)$$

CAPÍTULO 5. CONTRIBUCIONES DE LA HELICIDAD MAGNÉTICA

la cual al sustituir en la ecuación 5.5 es:

$$\dot{\theta}' = \dot{\theta} + \nabla\psi \cdot \dot{X}, \quad (5.8)$$

donde, al hacer la integral sobre la trayectoria del centro guía se obtiene:

$$\int_x^x \dot{\theta}' = \int_x^x \Omega(X) dX + \vec{R}' \cdot dX, \quad (5.9)$$

el último término es un ángulo únicamente debido a la geometría de la dinámica y es análogo al ángulo de Hannay, ya que se origina únicamente por la trayectoria de la partícula cargada.

Una variación posible de el caso anterior es cerrar el sistema abierto y con ello tendremos un caso similar al de la línea de campo helicoidal. Bhattacharjee [5] basándose en el artículo de Littlejohn, encuentra que la trayectoria helicoidal de la partícula es muy similar a las líneas de campo helicoidales que forman a los tubos de flujo y que la trayectoria del centro guía se puede tomar como el eje magnético como se ve en la figura:

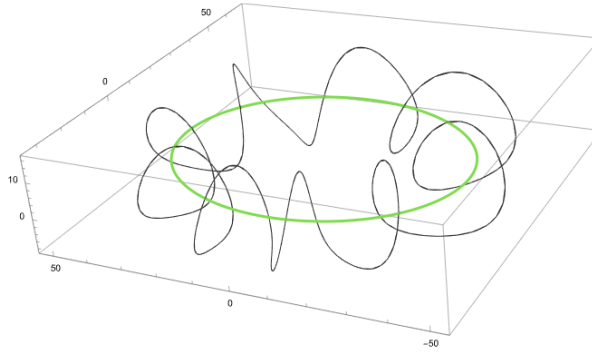


Figura 5.3: Geometría de un sistema cerrado, donde ahora el eje magnético es una hélice.

Utilizando los vectores de Frenet ligados al eje magnético $X = X(S)$ donde S es una medida de longitud sobre el eje:

$$\hat{e}_1 = \frac{dX}{ds}, \quad \hat{e}_2 = \left| \frac{d\hat{e}_1}{ds} \right|^{-1} \frac{d\hat{e}_1}{ds}, \quad \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2. \quad (5.10)$$

Con estos vectores escribe la posición de un punto:

$$\vec{x}(\rho, \theta, S) = \vec{X}(S) + \rho \cos\theta \hat{e}_2 + \rho \sin\theta \hat{e}_3, \quad (5.11)$$

sabiendo que:

$$\frac{d\hat{e}_1}{ds} = \kappa \hat{e}_2, \quad \frac{d\hat{e}_2}{ds} = \kappa \vec{e}_1 + \tau \hat{e}_3, \quad \frac{d\hat{e}_3}{ds} = -\tau \hat{e}_2, \quad (5.12)$$

5.1. Discusión del ángulo de Hannay en el marco de la helicidad magnética

donde τ es la torsión y κ la curvatura. Es menester puntualizar que las relaciones anteriores son idénticas a las propuestas por Littlejhon 5.2, donde $d\vec{X}/dS$ hace de \hat{b} y los vectores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 son equivalentes a \hat{e}_2 y \hat{e}_3 respectivamente en la propuesta de Bhattacharjee.

Usando las ecuaciones 5.11 y 5.12 encontramos:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{x}}{d\rho} &= \cos\theta\hat{e}_2 + \sin\theta\hat{e}_3, \\ \frac{d\vec{x}}{d\theta} &= -\rho\sin\theta\hat{e}_2 + \rho\cos\theta\hat{e}_3, \\ \frac{d\vec{x}}{dS} &= (1 - \kappa\rho\cos\theta)\hat{e}_1 + \tau\rho(\sin\theta\hat{e}_2 - \cos\theta\hat{e}_3),\end{aligned}\tag{5.13}$$

dando como resultado una métrica de la forma:

$$d\vec{x} = d\rho^2 + \rho^2(d\theta\tau dS)^2 + (1 - \kappa\rho\cos\theta)^2 dS^2.\tag{5.14}$$

Es notorio que $\nabla\theta$ ya no es ortogonal a ∇S , la dirección ortogonal es:

$$\nabla\theta' = \nabla\theta + \tau\nabla S.\tag{5.15}$$

Es posible notar que el trabajo de Bhattacharjee se puede pensar como una generalización de lo establecido por Littlejhon al considerar que el formalismo usado para la descripción de la dinámica de la partícula cargada puede usarse equivalentemente para el caso de una línea de campo magnético helicoidal, como se observa en la similitud de las ecuaciones 5.2 y 5.12 donde la diferencia fundamental es la definición de \hat{e}_1 .

Es evidente que Littlejhon simplemente escoge el vector unitario del campo magnético, mientras que Bhattacharjee escoge la dirección de la diferencial de longitud que yace sobre el eje magnético medido a través del parámetro S , es aquí donde se nota la diferencia pues el eje magnético ahora hace de centro guía.

Siguiendo en la misma línea, se puede calcular, gracias a la métrica 5.14 y la posición 5.11 la relación entre la dirección θ y S :

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{B'_\theta(1 - \kappa\rho\cos\theta)}{\rho B_S} - \tau,\tag{5.16}$$

esta es la razón de rotación local, cuya integral es la transformada rotacional:

$$\iota = \int \left\langle \frac{B'_\theta(1 - \kappa\rho\cos\theta)}{\rho} \right\rangle \frac{dS}{\langle B_S \rangle} - \oint \tau dS = \iota_d - \iota_g,\tag{5.17}$$

donde el primer término sólo depende del campo, mientras que el segundo depende únicamente del camino que siga el eje magnético, cabe resaltar que este ángulo "extra" sólo existe si el eje magnético no es coplanar, es decir, existe una contribución tipo writhe en campo[5]. Éste resultado es similar al encontrado por Littlejhon: encontramos una relación

CAPÍTULO 5. CONTRIBUCIONES DE LA HELICIDAD MAGNÉTICA

similar entre 5.8 y 5.17, ya que existe un efecto no dinámico en el que el recorrido de la partícula o la línea de campo generan un desfase.

Uno puede ir más allá con esta comparación y considerar que el caso del tubo magnético helicoidal es también similar a los casos anteriores, donde vemos a la superficie magnética como sólida, el eje magnético tal como en Bhattacharjee está torcido y la superficie la hace de "línea de campo". Si bien la base no será tan perecida como la de Littlejohn, de acuerdo a el artículo de Helander [18], la representación del campo utilizando los potenciales de Clebsch es:

$$\vec{B} = \nabla\Psi \times \nabla\alpha, \tag{5.18}$$

donde Ψ es una superficie constante de presión constante, asimismo, $\alpha = \theta - \iota\varphi$, siendo ι la transformada rotacional:

$$\iota = \frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{\vec{B} \cdot \nabla\theta}{\vec{B} \cdot \nabla\varphi}, \tag{5.19}$$

esta mide, al igual que el factor de seguridad la cantidad de vueltas que da el campo magnético en la dirección toroidal por las que da en dirección poloidal. Además, α cumple con $\vec{B} \cdot \nabla\alpha = 0$, es decir, α es constante a lo largo de las líneas de campo.

Esta representación es una versión extendida de los vectores de Frenet, donde en vez de tener simplemente 2 vectores perpendiculares a la línea de campo ahora se tienen 2 superficies, como se ve en la siguiente figura:

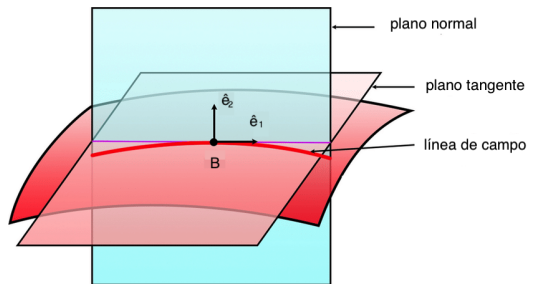


Figura 5.4: Sistema de coordenadas mediante superficies barotrópicas. Tomada de Yi y Choe.

Dónde se ve que α y Ψ son los equivalentes en la representación del campo magnético a los vectores de Frenet \hat{e}_1 y \hat{e}_2 usados para describir una línea de campo helicoidal, con la particularidad de que a diferencia del caso de Littlejohn y Bhattacharjee donde sólo

5.1. Discusión del ángulo de Hannay en el marco de la helicidad magnética

se pide que los vectores sean ortogonales a la dirección de interés (ya sea de la línea de campo o del centro guía), mientras que para el caso del campo magnético en sí mismo tales vectores provienen de la física del sistema, pues se definen a partir de superficies que coinciden con flujos poloidales constantes: $\vec{B} \cdot \nabla \Psi = 0$.

Esta representación es una manera más compacta de escribir el campo magnético, pues usando la transformada rotacional, se puede llegar a la forma tradicional del campo magnético como lo descrito en:4.78. Cabe resaltar que la representación de Clebsch es una manera general, pero local, de escribir campos vectoriales de divergencia nula, incluidas las que no tienen superficies de flujo, cosa que se recalca con el hecho de que la métrica 5.14 es la misma para el caso de los campos, pero sólo de manera local: cerca del eje magnético [18].

Ahora, es importante recalcar que la representación que nos es de interés es la que afecta a la dirección toroidal (ecuación 4.76) del campo magnético haciendo notorio que el eje esta torcido y que deja al término poloidal 4.77 idéntico sólo con un cambio de variable transformando ϕ por S . Lo que hace posible usar el resultado de Bhattacharjee para escribir el campo magnético de tal manera que sea notoria que la pérdida de simetría y que por lo tanto sea obvia la existencia del writhe en el sistema.

Para ello usaremos una forma del campo magnético similar a la propuesta por Helander [18] introduciendo la forma del campo toroidal y poloidal descrita en 5.15:

$$2\pi\vec{B} = \nabla \times \Phi \nabla(\theta + \tau \nabla S) + \nabla \times \Psi \nabla S = \nabla \times \Phi \nabla \theta' + \nabla \times \Psi \nabla S, \quad (5.20)$$

donde ahora la dirección ϕ de la ecuación 4.76 es sustituida por S que es una medida de longitud de la línea de campo magnético que yace sobre el eje.

Es fácil notar de la ecuación 5.20 que los potenciales de las dos partes del campo son:

$$A_t = \Phi \nabla(\theta + \tau \nabla S) = \Phi \nabla \theta', \quad A_p = \Psi \nabla S. \quad (5.21)$$

Estas coordenadas, siguiendo lo ilustrado en el artículo [18], poseen una métrica:

$$[(\nabla \Phi \times \nabla \theta) \cdot \nabla S]^{-1}, \quad (5.22)$$

con lo que su diferencial de volumen es el siguiente:

$$dV = \sqrt{g} d\Phi d\theta' dS = dS' dl = dS \left| \frac{dS}{\nabla S} \right|, \quad (5.23)$$

CAPÍTULO 5. CONTRIBUCIONES DE LA HELICIDAD MAGNÉTICA

con ello podemos identificar la definición de los flujos toroidal y poloidal respectivamente:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S}' = \int_0^\Phi d\Phi \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{\vec{B} \cdot \nabla S}{\nabla\Phi \cdot (\nabla\theta' \times \nabla S)} = 2\pi\Phi, \quad (5.24)$$

Similarmente:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S}' = \int_0^\Phi d\Phi \int_0^L dS \frac{\vec{B} \cdot \nabla\theta'}{\nabla\Phi \cdot (\nabla\theta' \times \nabla S)} = L\Psi. \quad (5.25)$$

Con estas aclaraciones podemos repetir el procedimiento antes mencionado para calcular las contribuciones del twist y writhe de la helicidad:

$$K = \int \vec{A}_t \cdot \vec{B}_t + \vec{A}_p \cdot \vec{B}_t + \vec{A}_t \cdot \vec{B}_p dV. \quad (5.26)$$

Sabiendo que el primer sumando es el referente al writhe y los restantes al twist, procederemos a calcular cada uno en estas coordenadas y con estos campos:

$$K_{writhe} = \Phi \int \nabla\theta' dS = \Phi \left[\int \nabla\theta \cdot dS + \int \tau \nabla S dS \right] = \Phi\tau L \quad (5.27)$$

y

$$\begin{aligned} K_{twist} &= \frac{1}{4\pi^2} \int (\Phi\Psi' - \Psi)(\nabla\theta \cdot \nabla\Phi \times \nabla S) \sqrt{g} dV = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int (\Phi\Psi' - \Psi) d\Phi d\theta' dS = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Phi d\Phi \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^L (\Phi\Psi' - \Psi) dS = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Phi d\Phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L \tau + (\Phi\Psi' - \Psi) dS. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Quedando como resultado final:

$$K_{twist} = \frac{L}{2\pi} \left[\Phi\tau L + \int_0^\Phi \Phi \frac{d\Psi}{d\Phi} d\Phi \right], \quad (5.29)$$

del resultado anterior podemos ver que existe un término extra, que no aparece en el desarrollo de Bellan 4.175, lo que nos hace pensar que este sumando es debido a cuestiones geométricas como lo encontrado por Littlejohn y Bhattacharjee.

5.2. Estudio de la helicidad mediante los vectores de Frenet

No es difícil imaginar que, en lugar de partir de la trayectoria de una partícula, se principie con la trayectoria del eje magnético a partir del cual se calculen las superficies

5.2. Estudio de la helicidad mediante los vectores de Frenet

magnéticas.

Nuestro objetivo es plantear una forma más orgánica de calcular la helicidad magnética en un sistemas no axisimétrico, donde además de existir un Twist en las líneas de campo propias de los dispositivos, también se encuentra writhe, es decir, un retorcimiento del propio tubo de flujo. En general de acuerdo a Bellan, la helicidad magnética se calcula a partir de las funciones de flujo y hace varias consideraciones ulteriores para evadir el cero que se observa para el sumando correspondiente a la helicidad debida al writhe 4.165. Tales razonamientos no son necesarios para mostrar el fenómeno pues basta con plantear el problema en las coordenadas adecuadas.

Es necesario encontrar una forma de escribir el campo magnético de tal manera que sea obvia la pérdida de simetría, con el propósito de poder calcular la helicidad magnética correspondiente al twist y writhe en términos separados y ver si el término asociado al writhe sí funge como término estabilizador, de forma que haga menor la densidad de energía.

Como primer paso se hará el caso más simple: una hélice dentro de un cilindro recto, que tiene unas ecuaciones paramétricas:

$$\vec{r} = (b \cos \varphi \omega, b \sin \varphi \omega, h \omega \varphi), \quad (5.30)$$

donde h es el alto del salto después de un ciclo en la hélice, como se ve en la siguiente figura:

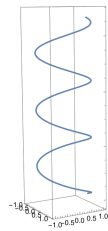


Figura 5.5: Representación del eje magnético torcido circunscrito en un cilindro en las coordenadas x, y, z usuales.

Lo que generará unas líneas de campo como la siguiente:

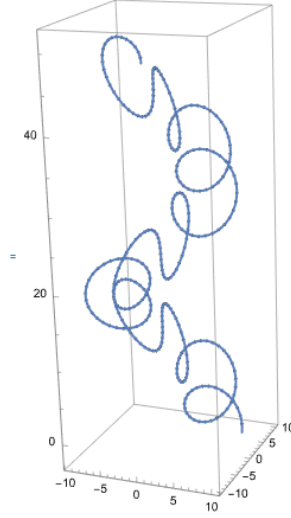


Figura 5.6: Esta es una hélice que representa la forma que tomará una sola línea de campo magnético al rededor del eje.

Es menester pasar de la representación 5.30 a una análoga a la anteriormente usada:

$$B = \nabla\Psi \times \nabla\zeta + \nabla\Phi \times \nabla\theta. \quad (5.31)$$

Para ello primeramente usaremos los vectores de Frenet, donde usaremos la siguiente notación $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ para definir unas coordenadas que vayan sobre el eje magnético, cabe resaltar que en las ecuaciones 5.30 la única variable es el ángulo φ :

$$\hat{e}_1 = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + h^2}} (-b \sin \omega\varphi, b \cos \omega\varphi, h\omega), \quad (5.32)$$

$$\hat{e}_2 = \frac{dT}{ds} = \frac{dT}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = -(b \cos \omega\varphi, b \sin \omega\varphi, 0), \quad (5.33)$$

$$\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{b^2 + h^2}} (h \sin \omega\varphi, -h \cos \omega\varphi, b). \quad (5.34)$$

Así mismo utilizando las fórmulas de Frenet se encuentran la torsión τ y la curvatura κ :

$$\kappa^2 = \left| \frac{d\hat{e}_1}{ds} \right|^2 = \frac{b^2}{(b^2 + h^2)^2} \rightarrow \kappa = \frac{b}{(b^2 + h^2)}, \quad (5.35)$$

$$\frac{d\hat{e}_3}{ds} = -\tau \hat{e}_2 \rightarrow \tau = \frac{h}{b^2 + h^2}. \quad (5.36)$$

y reescribir los vectores base:

$$\hat{e}_1 = \sqrt{b^2 + h^2} (-\kappa \cos \omega\varphi, \kappa \sin \omega\varphi, \tau) \quad (5.37)$$

5.2. Estudio de la helicidad mediante los vectores de Frenet

$$\hat{e}_2 = -(\cos \omega\varphi, \sin \omega\varphi, 0), \quad (5.38)$$

$$\hat{e}_3 = \sqrt{b^2 + h^2} (\tau \sin \omega\varphi, -\tau \cos \omega\varphi, \kappa). \quad (5.39)$$

Ahora consideremos la siguiente triada de coordenadas basada en la anterior:

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}'_2 = \cos \chi \hat{e}_2 + \sin \chi \hat{e}_3, \quad \hat{e}'_3 = -\sin \chi \hat{e}_2 + \cos \chi \hat{e}_3, \quad (5.40)$$

donde es notorio que χ es el análogo al ángulo poloidal θ que en yace en el plano \hat{e}_2, \hat{e}_3 .

Esta triada es equivalente a una triada *cilíndrica* de la forma:

$$\hat{e}'_1 = \hat{\zeta}, \quad \hat{e}'_2 = \hat{\chi}, \quad \hat{e}'_3 = \hat{\rho}, \quad (5.41)$$

donde χ es el ángulo sobre el plano osculador, ρ el radio del cilindro y ζ el eje torcido. En este sistema encontramos que el vector posición r'' es de la forma:

$$\vec{r}'' = \rho' \cos \chi \hat{e}_2 + \rho \sin \chi + \zeta \hat{e}_1, \quad (5.42)$$

cabe resaltar que este vector ya hace referencia al cilindro que se forma al rededor del eje torcido, mientras que r 5.30 es el vector posición asociado únicamente al eje torcido de la hélice.

En este sistema de coordenadas podemos entonces definir lo siguiente:

$$\nabla \chi = \frac{1}{\rho} \hat{e}'_3, \quad \frac{1}{\sqrt{b^2 + h^2}} \hat{e}'_1, \quad (5.43)$$

donde $\rho = h_\chi$ y $\sqrt{b^2 + h^2} = h_t$ son los factores de escala de la transformación de coordenadas. Con ello terminamos de construir el sistema de coordenadas que necesitamos para escribir el campo magnético de forma que sea conveniente:

$$\vec{B} = \nabla \Psi \times \nabla \zeta + \nabla \Phi \times \nabla \chi. \quad (5.44)$$

Proponemos las funciones de flujo como:

$$\Psi = \Psi(\rho, \chi), \quad (5.45)$$

Sabiendo que Φ tiene una relación dada por el twist:

$$\frac{d\Psi}{d\Phi} = \iota, \quad (5.46)$$

CAPÍTULO 5. CONTRIBUCIONES DE LA HELICIDAD MAGNÉTICA

donde ι es constante. Considerando el sistema de coordenadas:

$$\hat{\rho}, \hat{\chi}, \hat{\zeta} \quad (5.47)$$

tomado a partir de los vectores de Frenet, tomando en cuenta el vector posición:

$$r' = \rho \cos \chi, \rho \sin \chi, h_t \zeta, \quad (5.48)$$

encontramos que los factores de escala son los siguientes:

$$\left| \frac{\partial r'}{\partial \rho} \right| = 1 \quad \left| \frac{\partial r'}{\partial \chi} \right| = \rho \quad \left| \frac{\partial r'}{\partial \zeta} \right| = h_t, \quad (5.49)$$

donde h_t es el factor de escala de las coordenadas basadas en los vectores de Frenet, esto debido a que en la dirección z no hay ningún cambio.

Si potencial vectorial es de la forma:

$$\vec{A} = \Psi(\rho, \chi) \nabla \zeta - \iota^{-1} \Psi(\rho, \chi) \nabla \chi, \quad (5.50)$$

dónde

$$\nabla \zeta = \frac{1}{h_t} \hat{\zeta}, \quad \nabla \chi = \frac{1}{\rho} \hat{\chi}, \quad (5.51)$$

por lo que el potencial vectorial finalmente es:

$$\vec{A} = \Psi(\rho, \chi) \frac{1}{h_t} \hat{\zeta} + \phi(\rho, \chi) \frac{1}{\rho} \hat{\chi}, \quad (5.52)$$

haciendo el rotacional del potencial vectorial, es de la forma:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho h_t} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\chi} & h_t \hat{\zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \chi} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ A_\rho & \rho A_\chi & h_t A_\zeta \end{vmatrix}, \quad (5.53)$$

donde

$$A_\rho = 0, \quad A_\chi = \phi(\rho, \chi) \frac{1}{\rho}, \quad A_\zeta = \Psi(\rho, \chi) \frac{1}{h_t}, \quad (5.54)$$

Por lo que el rotacional queda de la siguiente manera:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho h_t} \left(\left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \chi} h_t A_\zeta - \frac{\partial}{\partial \zeta} \rho A_\chi \right) - \rho \iota^{-1} \hat{\chi} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} h_t A_\zeta - \frac{\partial}{\partial \zeta} A_\rho \right) + h_t \hat{\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \rho A_\zeta - \frac{\partial}{\partial \rho} A_\rho \right) \right), \quad (5.55)$$

5.2. Estudio de la helicidad mediante los vectores de Frenet

Sustituyendo 5.54 en el resultado anterior obtenemos:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho h_t} \left(\Psi'_\chi \hat{\rho} - \rho \Psi'_\rho \hat{\chi} - h_t \iota^{-1} \Psi'_\rho \hat{\zeta} \right) = \frac{1}{\rho h_t} \Psi'_\chi \hat{\rho} - \frac{1}{h_t} \Psi'_\rho \hat{\chi} - \frac{\iota^{-1}}{\rho} \Psi'_\rho \hat{\zeta}. \quad (5.56)$$

Por otro lado, si consideramos la forma del campo:

$$\vec{B} = \nabla \Psi \times \nabla \zeta - \iota^{-1} \nabla \Psi \times \nabla \chi, \quad (5.57)$$

tomando en cuenta que :

$$\nabla \chi = \frac{\hat{\chi}}{\rho}, \quad \nabla \zeta = \frac{\hat{\zeta}}{h_t}, \quad \nabla \Psi = \Psi'_\rho \hat{\rho} + \frac{\Psi'_\chi}{\rho} \hat{\chi} \quad (5.58)$$

encontramos que el campo es de la forma:

$$\vec{B} = \left(\frac{1}{\rho h_t} \Psi'_\chi \hat{\rho} - \frac{\Psi'_\rho}{h_t} \hat{\chi} - \frac{\iota^{-1}}{\rho} \Psi'_\rho \hat{\zeta} \right). \quad (5.59)$$

Con la información anterior procedemos a calcular la densidad de helicidad magnética:

$$K = \int \vec{A} \cdot \vec{B} dV = \int \frac{\Psi_\rho}{h_t \rho} \left(\phi - \frac{\Psi}{\iota} \right) dV, \quad (5.60)$$

donde el primer sumando corresponde al twist y el segundo al writhe. Y similarmente se calcula la densidad de campo magnético:

$$B^2 = \frac{1}{(h_t \rho)^2} \left(\Psi_\chi^2 + \Psi_\rho^2 \left(1 + \left(\frac{h_t}{\iota} \right)^2 \right) \frac{1}{\rho^2} \right). \quad (5.61)$$

Estas ecuaciones son generales: la diferencia entre un caso y otro es el valor de h_t . Es importante recalcar que este método está diseñado para separar las contribuciones del twist y writhe pero no es útil para el cálculo de la helicidad para el caso axisimétrico, ya que el colapso de $h_t = \sqrt{b^2 + h^2}$ al considerar $b = 0$ y $h = \infty$ (caso del eje coplanar) la ecuación 5.60 se indefine.

Sin embargo esta en representación se pierde información acerca del papel de la torsión y la curvatura en el campo en la helicidad, por lo que reescribiremos el campo magnético y el potencial vectorial regresándolo a la representación rectangular. Por lo que primeramente escribiremos el campo en las coordenadas 5.40:

$$\vec{B} = \frac{\Psi_\chi}{h_t} (-\sin \chi \hat{e}_2 + \cos \chi \hat{e}_3) - \frac{\Psi_\rho}{h_t} (\cos \chi \hat{e}_2 + \sin \chi \hat{e}_3) - \frac{\Psi_\rho}{\iota \rho} \hat{e}_1, \quad (5.62)$$

y

$$\vec{A} = \frac{\Psi}{h_t} \hat{e}_1 + \frac{\phi}{\rho} (\cos \chi \hat{e}_2 + \sin \chi \hat{e}_3), \quad (5.63)$$

CAPÍTULO 5. CONTRIBUCIONES DE LA HELICIDAD MAGNÉTICA

donde a su vez, podemos sustituir los vectores de Frenet para obtener coordenadas rectangulares como se ven las ecuaciones 5.37, 5.38, 5.39, por lo que sustituyendo tales ecuaciones en el campo y el potencial, encontramos que, por componentes el campo magnético es:

$$B_{\hat{i}} = \cos\omega\varphi \left(\frac{-\Psi'_\chi}{\rho h_t} \text{sen}\chi + \frac{\Psi'_\rho}{h_t} \cos\chi + \frac{\iota^{-1}}{\rho} \Psi'_\rho h_t \kappa \right) + \text{sen}\omega\varphi \left(\frac{\Psi'_\chi}{\rho h_t} \cos\chi - \Psi'_\rho \text{sen}\chi \right), \quad (5.64)$$

$$B_{\hat{j}} = \cos\omega\varphi (-\Psi'_\chi \tau \cos\chi + \Psi'_\rho \text{sen}\chi \tau) + \text{sen}\omega\varphi \left(\frac{\Psi'_\chi}{\rho h_t} \text{sen}\chi + \frac{\Psi'_\rho}{h_t} \cos\chi - \frac{\iota^{-1}}{\rho} \Psi'_\rho h_t \kappa \right), \quad (5.65)$$

$$B_{\hat{k}} = \kappa \left(\frac{\Psi'_\chi}{\rho} \cos\chi - \Psi'_\rho \text{sen}\chi \right) - \frac{\iota^{-1}}{\rho} \tau \Psi'_\rho, \quad (5.66)$$

y el potencial vectorial:

$$A_{\hat{i}} = \Psi \cos\omega\varphi \left(\frac{1}{\rho \iota} \cos\chi - \kappa \right) + \tau h_t \sin\omega\varphi \sin\chi, \quad (5.67)$$

$$A_{\hat{j}} = \Psi \sin\omega\varphi \left(\frac{1}{\rho \iota} \cos\chi + \kappa \right) + \tau h_t \cos\omega\varphi \sin\chi, \quad (5.68)$$

$$A_{\hat{k}} = \Psi \tau + \sin\chi h_t \kappa, \quad (5.69)$$

con lo que podemos hacer el producto punto $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y calcular la helicidad magnética:

$$K = \int a + \cos^2 b - \sin^2 b + \tau b (\sin^2 \omega\varphi d + \cos^2 \omega\varphi e) + \cos\omega\varphi \sin\omega\varphi b \tau \left(c + \frac{\Psi a'}{\tau b} + c' \right) + \tau (\Psi \kappa f - \frac{\tau \Psi}{\rho \iota} \Psi'_\rho - \frac{\sin\chi h_t \kappa}{\rho \iota}) + \sin\chi h_t \kappa^2 f dV, \quad (5.70)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\rho h_t} \cos\chi - \kappa, \\ b &= h_t \sin\chi, \\ c &= \frac{-\Psi'_\chi}{\rho h_t} \text{sen}\chi + \frac{\Psi'_\rho}{h_t} \cos\chi + \frac{\iota^{-1}}{\rho} \Psi'_\rho h_t \kappa, \\ c' &= \frac{\Psi'_\chi}{\rho h_t} \text{sen}\chi + \frac{\Psi'_\rho}{h_t} \cos\chi - \frac{\iota^{-1}}{\rho} \Psi'_\rho h_t \kappa, \\ d &= h_t \sin\chi, \\ e &= \tau (\Psi'_\rho \sin\chi - \Psi'_\chi \cos\chi), \\ f &= \frac{\Psi'_\chi}{\rho} \cos\chi - \Psi'_\rho \text{sen}\chi. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Con lo anterior el calculo de la helicidad esta sujeto a los ángulos φ, χ y a la torsión τ y la curvatura κ .

5.3. Efecto Aharanov-Bohm con helicidad magnética

En la propuesta de Yahalom [37], describe al campo magnético de la forma más sintética, como en la ecuación 5.18:

$$\vec{B} = \nabla\chi \times \nabla\eta, \quad (5.72)$$

donde η y χ son funciones escalares y representan superficies barotrópicas cuya intersección da como resultado la línea de campo, como en el caso de la figura 5.4.

Estas funciones en particular se pueden tomar como superficies de las representaciones de Bellan y 5.20 Ψ y la dirección θ' de Bhattacharjee. Donde de acuerdo con Helander, siguiendo el símil con los campos magnéticos de Bhattacharjee [5] se cumple que:

$$\vec{B} \cdot \nabla\theta' = 0. \quad (5.73)$$

Esta descripción no es la más acertada para cuestiones del cálculo de la helicidad, pues el potencial vectorial elegido por Yahalom [37] es de la forma:

$$\vec{A} = \chi\nabla\eta, \quad (5.74)$$

por lo que usando de manera directa la definición de la helicidad 4.37:

$$K = \int \vec{B} \cdot \vec{A}dV = \int (\nabla\chi \times \nabla\eta) \cdot \chi\nabla\eta dV = 0. \quad (5.75)$$

Sin embargo, hay que notar que la ecuación 5.72 es una forma general de escribir un vector tridimensional en términos de potenciales cuyos planos intersectados nos dan la descripción de un vector. Esto se sostiene incluso si χ y η no son superficies magnéticas. En particular si tomamos que $\eta = \theta + \iota\varphi$ tal como en el caso de 5.18, donde ya es notorio que χ es el flujo poloidal, por lo que podemos calcular el potencial y el campo:

$$\vec{B} = \nabla\Psi \times \nabla\theta - \iota\nabla\psi \times \nabla\varphi, \quad \vec{A} = \Psi(\nabla\theta) - \iota\nabla\varphi, \quad (5.76)$$

con lo que es posible encontrar la helicidad magnética, utilizando la ecuación 5.26, podemos encontrar la helicidad del twist y writhe:

$$\begin{aligned} K_{twist} &= \int (\nabla\Psi \times \nabla\theta) \cdot \iota\nabla\psi \nabla\varphi - (\iota\nabla\psi \times \nabla\varphi) \cdot \Psi\nabla\theta, \\ K_{writhe} &= \int \nabla\Psi \times \theta' \cdot \Psi\nabla\theta' dV = \int \nabla\Psi \times \theta \cdot \Psi\tau\nabla S + \nabla\Psi \times (\tau S) \cdot \Psi\nabla\theta dV, \end{aligned} \quad (5.77)$$

Donde cabe resaltar que la parte writhe de la helicidad sólo existe cuando el sistema no es axisimétrico, es decir $\theta' = \theta + \tau S$. En este caso nos limitaremos al caso axisimétrico, que

CAPÍTULO 5. CONTRIBUCIONES DE LA HELICIDAD MAGNÉTICA

al integrar, se encuentra que:

$$K_{twist} = \pi^2 \Psi^2 \int d\theta \int d\varphi (\iota - \iota^2). \quad (5.78)$$

De acuerdo al planteamiento de Yahalom, que no toma en cuenta las propiedades físicas de los potenciales [37], por lo que este autor toma como necesaria la existencia de una norma para evitar el cero:

$$\vec{A} = \chi \nabla \eta + \nabla \zeta, \quad (5.79)$$

con lo que llega a:

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = (\nabla \chi \times \nabla \eta) \cdot \nabla \zeta. \quad (5.80)$$

Para su análisis define una base vectorial:

$$\nabla \chi, \nabla \eta, \nabla \mu, \quad (5.81)$$

donde μ es una generalización de la dirección S de la representación del campo propuesta por Bhattacharjee [5] y se le nombra como *metage*, éste mide la distancia sobre las líneas de campo magnético. Con lo anterior, escribe lo siguiente:

$$\nabla \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \chi} \nabla \chi + \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \nabla \mu + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \nabla \eta, \quad (5.82)$$

lo que implica que:

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} (\nabla \chi \times \nabla \eta) \cdot \nabla \mu. \quad (5.83)$$

Nótese que $(\nabla \chi \times \nabla \eta) \cdot \nabla \mu$ es el jacobiano en la base vectorial 5.81 como se ve en la ecuación 5.22 para el caso del campo magnético 5.72, por lo que la helicidad es ahora definida por ζ :

$$K = \int \frac{\delta \zeta}{\delta \mu} d\mu d\chi d\eta = \oint_{\chi, \eta} \frac{\delta \zeta}{\delta \mu} d\mu = [\zeta]_{\chi, \eta}, \quad (5.84)$$

donde integra sobre un solo tubo. Aquí la función ζ es una función que define la helicidad magnética por unidad de flujo magnético.

Es importante notar que los potenciales descritos en el artículo no ofrecen mayor información de la física del sistema, por lo que no aparece la transformada rotacional ni se identifican los potenciales en direcciones poloidales y toroidales, cosa que es importante en la descripción de tubos de flujo de confinamiento magnético, esto es lo que pone en aparente desventaja a la descripción de Clebsch tal como la expone Yahalom.

Comparando las formas de las helicidades encontradas 5.84 y 5.78 podemos ver que la diferencia está precisamente en la transformada rotacional, que es la que trae la información de la dirección toroidal y que permite que la representación de Clebsch sea equivalente a la

5.3. Efecto Aharonov-Bohm con helicidad magnética

representación usual del campo magnético como la suma de 4.76 y 4.77. Por lo que el hecho de que la norma $\nabla\zeta$ sea la que permite la no nulidad de la helicidad para la representación 5.75 implica que físicamente esta norma la hace de transformada rotacional, sólo que en vez de estar dentro de los mismos potenciales se encuentra en un sumando independiente. Así hacer un símil con el efecto Aharonov-Bohm, diciendo que tal efecto de la norma juega un papel en la dinámica del sistema, lo cual es cierto en el sentido de que es un equivalente a la transformada rotacional puesta en un sumando independiente, no es necesariamente la lectura más directa, pues tal cantidad es una medida de la torsión de las líneas de campo.

CAPÍTULO 5. CONTRIBUCIONES DE LA HELICIDAD MAGNÉTICA

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se hizo una revisión general de la helicidad magnética partiendo desde el punto de vista físico, con la integral de ligadura de Gauss, pasando por la geometría diferencial, tomando en cuenta que esta cantidad es una invariante de Hopf y finalmente se llegó a su interpretación topológica en el marco de la magnetohidrodinámica, conforme a la literatura se observa que la helicidad tiene tres contribuciones que se conservan: la ligadura, el twist y el writhe.

La ligadura necesita al menos dos tubos de flujo magnético ligados entre sí para que la helicidad sea distinta de cero; es importante recalcar que en este caso no es necesario que los tubos de flujo tengan una torsión, siempre que estén entrelazados. En el caso del twist, éste es equivalente a tener dos tubos de flujo ligados que se unen formando un solo tubo dando como consecuencia una torsión en el tubo resultante, en particular en los tubos de flujo magnético, esto se ve reflejado en la torsión de las líneas de campo, cosa que es inherente a los sistemas de confinamiento magnético y que se mide en términos de la transformada rotacional o equivalentemente el factor de seguridad, que cumple la doble función de medir la torsión de las líneas de campo magnético y ser un parámetro de estabilidad. Esta cantidad es precisamente la asociada a la helicidad del sistema. En el caso del writhe su existencia radica en la retorsión de los tubos de flujo magnéticos y es la única forma de la helicidad que puede medirse incluso con una sola línea de campo magnético, v.g. el eje magnético, por lo que esta propiedad es esencialmente geométrica.

De la revisión de la helicidad magnética y su aplicación a sistemas de confinamiento, tomando como motivación las deformaciones de las superficies magnéticas presentadas por Cooper, se utilizó la representación del campo usada por Battacharjee 5.20, para el cálculo de la helicidad magnética, cuyos resultados 5.28 y 5.27 tienen de manera explícita la torsión del eje dentro de su expresión. En particular, para el caso del writhe este resultado

es muy ilustrativo, pues implica que es esencialmente geométrico y equivalente del ángulo de Hannay en términos de la helicidad magnética. Es el único sumando de la contribución debida al writhe mientras que para el caso del twist es un sumando extra. Es menester recalcar que de las ecuaciones 5.28 y 5.27 si se considera la torsión del eje igual a cero, se regresa al resultado conocido de la ecuación 4.175.

Posteriormente se hizo un cálculo general de la helicidad tomando en cuenta las contribuciones twist y writhe para sistemas no axisimétricos abiertos, donde a diferencia de los cálculos presentados por Bellan, se inicia por hacer una distinción en las coordenadas adecuadas para el campo magnético de forma que sea evidente el proceso mediante el cual el eje magnético deja de ser coplanar. Partimos de la parametrización del eje magnético a partir del cual utilizando las relaciones de Frenet se hacen las transformaciones necesarias para llegar a la forma del campo magnético que englobe la pérdida de simetría y que a su vez se asemeje a lo presentado en la literatura tanto por Bellan como por Helander, considerando los factores de escala, lo que permite calcular la helicidad de forma general como se ve en la ecuación 5.60. Es importante notar que en el cálculo que proponemos para la helicidad, con el cambio de coordenadas ya no se encuentra el cero para la aportación del writhe como en el caso de la expresión dada por Bellan 4.163, donde no queda claro en su exposición por qué es distinto de cero ese sumando ni la forma final de la expresión para el writhe 4.182, mismo que queda, en nuestro cálculo, definido a partir de las funciones de flujo Ψ y Φ . Sin embargo como se ve en la ecuación 5.60 este método no es adecuado para calcular la helicidad para el caso axisimétrico, pues al considerar el radio de la hélice del eje b igual a cero y el salto de la hélice h infinito el resultado se indefine, por lo que este método sólo es útil para casos tridimensionales ya que permite la diferenciación de la contribución del twist y writhe directamente de la definición de la helicidad usando el cambio de coordenadas.

Finalmente del estudio concienzudo presentado en este trabajo pudimos analizar el artículo de Yahalom, en donde se pretende hacer un símil del efecto Aharonov-Bohm, con la helicidad magnética: se presenta una forma del campo genérica en términos de potenciales 5.72 donde la helicidad es directamente cero por la forma del campo 5.75, por lo que impone una norma para eludir tal resultado. En nuestro estudio concluimos que no es posible hacer el símil con el efecto Aharonov-Bohm debido a que el problema reside únicamente en la forma del campo, ya que la helicidad magnética es profundamente geométrica y depende de la forma del campo, pues este mismo necesita tener ciertas características para que tal cantidad sea distinta de cero, ya que no todo campo magnético tiene alguna torsión, retorsión o ligadura que permita la aparición de esta cantidad. Además de que su norma, necesaria para la existencia de la helicidad en ese artículo, puede ser leída como el factor de seguridad escrito en términos de la triada de coordenadas propuestas para tal

cálculo, donde esta interpretación del factor de seguridad le devuelve en cierta manera el carácter geométrico al campo magnético y le provee de las características necesarias para la existencia de la helicidad.

Con lo que podemos concluir que la helicidad es una parte importante del análisis del confinamiento magnético y da información extra acerca del sistema, pues permanece ante procesos de reconexión magnética, lo que implica que pueda ser usado para optimización de aparatos con fines de fusión nuclear. Parte del trabajo que queda pendiente es el de hacer el cálculo de la helicidad, utilizando nuestras coordenadas para sistemas cerrados.

Bibliografía

- [1] ARIOLA, M., PIRONTI, A. (2016), «*Magnetic Control of Tokamak Plasmas*», 2nd ed., Springer, Switzerland.
- [2] ARNOLD, V., KHESIN, B. (2003), «*Topological Methods in Hydrodynamics*», Annual Review of Fluid Mechanics. 24. 145-166. 10.1146, annurev.fl.24.010192.001045.
- [3] BARTON, J. ET AL (2015), «*Simultaneous closed-loop control of the current profile and the electron temperature profile in the TCV tokamak*», Proceedings of the American Control Conference, pp 3316-3321.
- [4] BERGERSON, W.F., C.B. FOREST, ET AL (2006), «*Onset and saturation of the kink instability in a current-carrying Line-Tied plasma*», Phys. Rev. Lett. 96, 015004.
- [5] BHATTACHARJEE, A., SCHREIBER, G. M., AND TAYLOR, J. B. (1992), «*Geometric phase, rotational transforms, and adiabatic invariants in toroidal magnetic fields*», Physics of Fluids B: Plasma Physics 4, 2737.
- [6] BELLAN, P. M. (2006), «*Fundamentals of Plasma Physics*», Cambridge University Press, London.
- [7] BOOZER, A. H. (1998), «*What is a stellarator?*», Physics of Plasmas 5, 1647-1655.
- [8] CHEN, F. F. (1984), «*Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*», 2nd, edition, Plenum Press, USA.
- [9] COOPER, C. W. A., ET AL (2010), «*Magnetic Reconnection Triggering Magnetohydrodynamic Instabilities during a Sawtooth Crash in a Tokamak Plasma.*», Phys. Rev. Lett. 105 (2010) 255002.
- [10] COOPER, C. W. A., ET AL (2011), «*MHD Equilibrium and Stability of Tokamak and RFP Systems with 3D Helical Cores*», Predebon Plasma Phys. Control. Fusion 53, 084001.

-
- [11] COOPER, C. W. A., ET AL (2013), «*Bifurcated Helical Core Equilibrium States in Tokamaks*», Nucl. Fusion 53, 073021.
- [12] CALDAS, I. ET AL (2002), «*Control of chaotic magnetic fields in tokamaks*», Brazilian Journal of Physics [online], v. 32, n. 4 [Accessed 25 November 2022], pp. 980-100.
- [13] DREICER, H. (1985), «*Topics in Reversal-Field-Pinch Physics*», Physica Scripta, pp. 435-443.
- [14] HANEY, S. W. AND FREIDBERG, J. P. AND SOLOMON, C. J. (1995), «*A fast, user-friendly code for calculating magnetohydrodynamic equilibria*», Journal of Computers in Physics, Vol. 9, No. 2, pp 216-224.
- [15] YASUHIDE FUKUMOTO (2008), «*A Unified View of Topological Invariants of Fluid Flows*», STopologica, 2008, Volume 1, Issue 1, Pages 003, Released on J-STAGE October 01, 2008, Online ISSN 1881-6886.
- [16] DIES LLOVERA, JAVIER (2001), «*Simulación de plasmas de dispositivos de fusión por confinamiento magnético tipo tokamak y stellarator. Validación experimental y aplicación al estudio del Heliac Flexible TJ-II*», Universidad de Cataluña, España.
- [17] GOLDSTON, R.J.(1995). «*Introduction to Plasma Physics*» (1st ed.). CRC Press, USA.
- [18] HELANDER, P. (2014), «*Theory of plasma confinement in non-axisymmetric magnetic fields*», Reports on Progress in Physics, Vol.77, num. 8.
- [19] JARDIN, SREPHENT (2010), «*Computational Methods in plasma Physics*», CRC Press, USA.
- [20] LAMB, H. (1932), «*Hydrodynamics*», Cambridge University Press, UK.
- [21] LITTLEJOHN, ROBERT G. (1988), «*Phase anholonomy in the classical adiabatic motion of charged particles*», Phys. Rev. A, Vol.38, 6034–6045.
- [22] LORENZINI, R., MARTINES, E., PIOVESAN, P. ET AL. (2009), «*Self-organized helical equilibria as a new paradigm for ohmically heated fusion plasmas*», Nature Phys 5, 570–574.
- [23] MARTÍN, P. ET AL (2003), «*Overview of Quasi Single Helicity Experiments in Reversed Field Pinches*», Nucl. Fusion, 43, 1855.
- [24] MARSHALL, N., ROSENBLUTH, ET AL (1973), «*Nonlinear properties of the internal $m=1$ $m=1$ kink instability in the cylindrical tokamak*», Plasma Physics Laboratory, Princeton University, New Jersey, The Physics of Fluids 16, 1894-1902.
-

-
- [25] MIYAMOTO, K. (2005), «*Plasma Physics and Controlled Fusion*», Springer, Alemania.
- [26] MOFFATT, H. K., RICCA, R. L. (1992), «*Helicity and Calugareanu invariant*», Proceedings: Mathematical and Physical Sciences, 439(1906), 411–429.
- [27] OTERO, D. AND PROTO, A. N. (1979), «*Equilibrio y Estabilidad MHD en el confinamiento Magnético para Fusión Termonuclear*», Comisión Nacional de Energía Atómica, Argentina.
- [28] RAMASAMY, R. ET AL (2022), «*Modeling of saturated external MHD instabilities in tokamaks: A comparison of 3D free boundary equilibria and nonlinear stability calculations*», Physics of Plasmas 29, 072303.
- [29] SAAVEDRA, R.M. (2019), «*The Hopf invariant one problem.*», University of Chicago, USA.
- [30] STRUBELJ, L., AND TISELJ, I. (2008), «*Numerical Simulation of Rayleigh-Taylor Instability With Two-Fluid Model and Interface Sharpening*», Proceedings of the ASME Fluids Engineering Division Summer Conference.
- [31] SKYMAN, A. (2011), «*Turbulent impurity transport in tokamak fusion plasmas* », tesis de licenciatura, Chalmers University of Technology, the Physics Teacher.
- [32] TAYLOR, J.B. (1974), «*Relaxation of Toroidal Plasma and Generation of Reverse Magnetic Fields*», Phys. Rev. Lett. 33, 1139–1141.
- [33] WESSON, J. (1995), «*Snakes [JET resonant localised structures]*», Plasma Phys. Control Fusion 37 A337.
- [34] WEBB, G. (2018), «*Magnetohydrodynamics and Fluid Dynamics: Action Principles and Conservation Laws*», Springer, Cham.
- [35] L. WOLTJER (1958), «*A theorem on force-free magnetic fields*», Proc. Nat. Acad. Sci., 44, Vol.44, num. 6, pp 489-491, USA,
- [36] YAHALOM, A., LYNDEN-BELL, D. (2008), «*Simplified Variational Principle for Barotropic Magnetohydrodynamics*», J. Fluid Mech. 607, 235–265.
- [37] YAHALOM, A. (2013), «*Aharonov–Bohm effects in magnetohydrodynamics*», Phys. Rev. Lett., 1898-1904, Volume 377, Issues 31–33.
- [38] YAMADA, MASAOKI, KULSRUD, RUSSELL, JI, HANTAO (2010), «*Magnetic reconnection*», Rev. Mod. Phys., 82, pp.603-664, American Physical Society.
-

- [39] ZWEIBEL, G. E. AND YAMADA, M. (2009), «*Magnetic Reconnection in Astrophysical and Laboratory Plasmas*», *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 47:1, 291-332.
- [40] ZWEIBEL, G. E. AND YAMADA, M. (2016), «*Perspectives on magnetic reconnection*», *Proc. R. Soc. A* 472: 20160479.
- [41] ZWEIBEL, G. E. AND YAMADA, M. (2016), «*Perspectives on magnetic reconnection*», *Proc. R. Soc. A* 472: 20160479.