



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UN ACERCAMIENTO A LAS CATEGORÍAS  
EXTENSIVAS Y COHESIÓN AXIOMÁTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ORLANDO PÉREZ RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. IVÁN FERNANDO VILCHIS MONTALVO

PUEBLA, PUEBLA 2023



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Un acercamiento a las categorías extensivas y Cohesión  
Axiomática

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA  
Orlando Pérez Ramírez

DIRECTOR DE TESIS  
Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo

PUEBLA, PUE.

Noviembre 2023





**BUAP**

**DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE**  
**SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el C:

**ORLANDO PÉREZ RAMÍREZ**

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 28 de noviembre de 2023, con la tesis titulada:

*Un acercamiento a las categorías extensivas y Cohesión Axiomática*

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

**A T E N T A M E N T E.**  
H. Puebla de Z. a 29 de noviembre de 2023.



**DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE**  
**COORDINADOR DEL POSGRADO**  
**EN MATEMÁTICAS.**





*Dedicado a mis padres con cariño,  
a mis hermanos,  
a mi sobrina.*



# Agradecimientos

Empezaré agradeciendo a mi madre. Gracias mamá, por todo tu amor y apoyo incondicional. Por enseñarme a buscar en los pequeños detalles y valorar lo que uno encuentre ahí. Por motivarme siempre, no solo con tus palabras, sino con tu ejemplo también. Sin duda, soy mejor persona, gracias a ti.

A mi papá, por todo su apoyo, por su amor, y su motivación. Gracias por ayudarme a comprender que la ética está en trabajar cuando uno dice que esta trabajando. Y así de incansable me motivas a ser.

A mis hermanos, sin duda he llagado hasta aquí gracias a ustedes. Han sido un pilar fundamental en mi vida. Los dias serian muy tristes sin ustedes.

A mi sobrina, Madis. La “Madison”, eres mi felicidad, y mi motivación también para ser mejor persona. Y para convertirme en matemático,y puedas presumir de ello. Gracias por llenar de alegría mis dias.

A mis compañeros de la Maestria. Me siento agradecidp de haber compartido clases con ustedes, y por todo lo que me enseñaron, en aquellas reuniones de estudio. Me ayudaron para avanzar en mi camino para ser un matemático

A mi asesor el Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo. O mejor conocido como “El profe Vilchis”. Gracias por su confianza una vez más, al aceptarme como su tesista, por su tiempo, por su paciencia durante el desarrollo y revisión de este trabajo. Sin duda, le pediría nuevamente que fuera mi asesor.

A mis sinodales. Al Dr. Juan Angoa, o como me gusta llamarle , el maestro Angoa, sin duda usted me ha enseñado mucho de lo que significa la matemática y lo que significa el quehacer matamático; y cómo esta actividad ayuda al florecimiento del ser humano, siendo usted un ejemplo de ello. Al el Dr. Agustín Contreras,que con una sabiduría igual de grande que su casi permanente sonrisa, siempre muestra disposición para enseñarme algo nuevo. Por su paciencia al revisar este trabajo, y por sus valiosas observaciones. Y al Dr. Jesús González. Maestro “Chuy”, no solo le agradezco sus observaciones a este trabajo, le gradezco su paciencia y el tiempo que me dedicó para resolver dudas de este trabajo. Por todo lo apredido, gracias.

A mis amigos y amigas, por lo felicidad que han compartido conmigo, su apoyo, y porque sin ellos “no sabría que hacer cuando mi alma cante contra mí”:

*“ Oí a mi alma cantando detrás de una hoja, arranqué la hoja, pero entonces la oí cantando detrás de un velo. Desgarré el velo, pero entonces la oí cantando detrás*

*de un muro. Derribé el muro, y oí a mi alma cantando contra mí. Levanté el muro, zurcí el velo, pero no pude devolver la hoja a su sitio. La cogí en mi mano y oí a mi alma cantando poderosamente contra mí. Es lo que pasa por estudiar sin un amigo.*"L. Cohen-El libro de la misericordia.

A Tere de Secretaría de Investigación y Estudios de Posgrado de la FCFM, por su apoyo, disposición y amabilidad en los procesos burocráticos, que en ocasiones resultan ser una odisea.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo económico que recibí a través del Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) para poder realizar mis estudios de maestría.

# Introducción

En 2007, Bill Lawvere publica su artículo “Axiomatic Cohesion” [6]; en donde trata de transmitirnos cómo distintos niveles de abstracción para entender el trasfondo del contenido espacial dentro de las teorías del análisis clásico o de la física continua, están relacionados con categorías de espacios. Hace notar además que estas categorías acarrearán una noción de cohesión. De manera que, si bien no nos presenta una definición de lo que es cohesión, si nos dice como se comporta o se presenta, de manera axiomática. Esta presentación es a través de una cadena de funtores adjuntos entre dos categorías, donde una trata de capturar una noción de Cohesión y la otra una idea de No- Cohesión. Lawvere dice al respecto [6]:

*I analyze cohesion by contrasting it with non-cohesion. In that I follow Cantor, who approached his Mengen by negating them into Kardinalen; the latter are (not isomorphism classes but) spaces so devoid of internal cohesion and variation that they satisfy his general “continuum” hypothesis. Not only have those very abstract sets served as a background for algebraic structures, but also as a background for models of cohesion itself.*

Dentro de la física continua [7], la parte espacial se encuentra representada dentro de la categoría de espacios de Banach o espacios topológicos. Sin embargo, como Lawvere apunta en [7], el contexto no sólo debe ser categórico, sino también geométrico. Por lo que las categorías anteriores no resultan del todo correctas en ese sentido, ya que carecen de una definición de exponencial, lo cual limita las interpretaciones de los aspectos geométricos de la teoría. Desde aquí, vemos que las categorías que pretendemos sean el trasfondo matemático para hablar de movimiento o de una noción de espacio para la física continua, deben ser las que son cartesianas cerradas.

En la definición de Cohesión en [6], se pide también que estas categorías sean extensivas, pues como se menciona en [7], la extensividad nos permite relacionar puntos, conexidad y separabilidad; con el concepto de objetos decidibles. Como mencionamos anteriormente, el estudio axiomático de Cohesión se hace por medio de dos categorías extensivas y cartesianas cerradas, relacionadas o comparadas, a través de una cadena de cuatro funtores adjuntos. Estos últimos encierran, de manera intuitiva, la idea de espacio discreto, componente conexa, puntos, espacios codiscretos. Los topos son categorías cartesianas cerradas, y como categorías con

colímites, son categorías extensivas. De modo que la interpretación para cohesión de los topos, se hace como categorías de espacios, y no como espacios generalizados, como es usual tomarlos.

Esta manera de ver las categoría de espacios, le proporciona a Lawvere, el contexto adecuado para fundamentar la Mecánica Racional, que fue su motivación original para buscar una noción más robusta de continuidad, esto es, la noción de Cohesión.

En cuanto a la organización de este trabajo es como sigue. En el primer capítulo, nos dedicamos a explorar la definición de categoría extensiva. Se da una caracterización de estas categorías mediante la relación entre coproductos finitos y pullbacks. Es decir, notamos que el hecho que una categoría sea extensiva, implica la existencia de ciertos límites (Proposición 1.1.1). Desarrollamos como ejemplos de categorías extensivas a **Con** (la categoría de conjuntos), **Top** (la categoría de espacios topológicos), y **Con** <sup>$\Delta_1^{op}$</sup>  (la categoría de gráficas reflexivas). Aun más vemos que toda categoría de pregavillas es extensiva. Y estudiamos algunas propiedades en estas categorías. Por ejemplo, vemos que si una categoría extensiva tiene productos finitos, entonces es distributiva.

En el segundo capítulo, estudiamos las propiedades de la categoría **Rig**, de aillos (anillos sin negativos) y homomorfismos entre ellos. Y mostramos que **Rig** <sup>$op$</sup>  es extensiva. Esta categoría es importante, porque como nota Menni [8], en ella se puede caracterizar aspectos geométricos y sirve como base para ejemplos de precohesión. Además, definimos los subobjetos complementados y componentes conexas, ejemplificando en **Con**, **Top** y por supuesto **Rig** <sup>$op$</sup> .

Finalmente, en el tercer capítulo, hacemos una introducción intuitiva al concepto de Cohesión. Comenzamos comentando, las observaciones de Lawvere sobre el trabajo de Cantor. Posteriormente, analizamos la intuición de cada functor y axioma de la definición de Cohesión presentada como en [6], a través del ejemplo de **Con** <sup>$\Delta_1^{op}$</sup>  y **Top** ( que aunque no es cartesiana cerrada, nos permite intuir el significado de al menos tres de tales funtores). Posteriormente, exponemos, como lo hace Lawvere en [6], que existen diferentes tipos o situaciones de cohesión, y demostramos que son incompatibles. Finalmente comentamos los dos ejemplos de Topos Cohesivos que se tienen hasta ahora [16].

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>xI</b>
<b>1. Categorías Extensivas</b>	<b>1</b>
1.1. Extensividad . . . . .	1
1.2. Algunas propiedades de las categorías extensivas . . . . .	25
<b>2. Extensividad y la categoría Rig</b>	<b>31</b>
2.1. Subobjetos complementados y componentes conexas . . . . .	39
<b>3. Cohesión Axiomática</b>	<b>45</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>54</b>



# Capítulo 1

## Categorías Extensivas

### 1.1. Extensividad

En esta sección, como las dos siguientes, se desarrolla a partir del curso *XXVIII ERAG: Curso Matías Menni 1-3* [10, 11, 12] (el cual se encuentra en YouTube). Siguiendo el orden en que se presentan las ideas en éste; se inicia estudiando un tipo de categorías, las cuales abstraen la idea de suma y producto como lo conocemos. Estas son las categorías extensivas. Éstas categorías son importantes, pues la propiedad de extensividad, es crucial para la definición de Cohesión de Lawvere [6]. Además, por sí mismas, resultan interesantes; como menciona Carboni, Walters y Lack en [1] hay una relación íntima entre las categorías extensivas y las distributivas.

Sean  $\mathcal{C}$  es una categoría y  $X \in \mathcal{C}$ . La categoría  $\mathcal{C}/X$  tiene por objetos los morfismos de  $\mathcal{C}$  con codominio  $X$ . Dados dos objetos de  $\mathcal{C}/X$ ,  $f$  y  $g$ , digamos  $f : A \rightarrow X$  y  $g : B \rightarrow X$  morfismos de  $\mathcal{C}$ , un morfismo entre ellos, es una flecha  $F : A \rightarrow B$  que hace que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & B \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & X \end{array}$$

conmute.

Sean  $\mathcal{C}$  una categoría con coproductos finitos y  $X, X', Y, Y' \in \mathcal{C}$ . Definimos la siguiente asignación

$$\mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y \xrightarrow{+} \mathcal{C}/(X + Y) \tag{1.1}$$

en objetos  $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y$ , con  $\text{dom} f_1 = X'$  y  $\text{dom} f_2 = Y'$  como

$$+(f_1, f_2) = \begin{pmatrix} i_X \circ f_1 \\ i_Y \circ f_2 \end{pmatrix}$$

que es el único morfismo tal que los cuadrados siguientes conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{i_{X'}} & X' + Y' \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow \begin{pmatrix} i_X \circ f_1 \\ i_Y \circ f_2 \end{pmatrix} \\
 Y & \xrightarrow{i_X} & X + Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{i_{Y'}} & X' + Y' \\
 \downarrow f_2 & & \downarrow \begin{pmatrix} i_X \circ f_1 \\ i_Y \circ f_2 \end{pmatrix} \\
 Y & \xrightarrow{i_Y} & X + Y
 \end{array}$$

Y en en morfismos  $(h_1, h_2) \in \mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y((f_1, f_2), (g_1, g_2))$  como  $+(h_1, h_2) = h_1 + h_2$ , el morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X' + Y' & \xrightarrow{h_1 + h_2} & X'' + Y'' \\
 \searrow f_1 + f_2 & & \swarrow g_1 + g_2 \\
 & X + Y &
 \end{array}$$

No es difícil ver que esta asignación es un functor. En ocasiones denotaremos a  $+(f_1, f_2)$  como  $f_1 + f_2$ .

**Definición 1.1.1.** Una categoría  $\mathcal{C}$  con coproductos finitos es **extensiva** si, para todo  $X, Y$  en  $\mathcal{C}$  el functor canónico

$$\mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y \xrightarrow{+} \mathcal{C}/(X + Y) \quad (1.2)$$

es una equivalencia.

Como primer ejemplo tenemos

**Ejemplo 1.1.1.** Sea **Con** la categoría de conjuntos y funciones entre ellos. Tenemos que la categoría **Con** es completa y cocompleta, entonces tiene coproductos finitos. Ahora, para ver que el functor

$$\mathbf{Con}/X \times \mathbf{Con}/Y \xrightarrow{+} \mathbf{Con}/(X + Y) \quad (1.3)$$

es una equivalencia, debemos definir otro functor

$$(\ , \ ) : \mathbf{Con}/(X + Y) \longrightarrow \mathbf{Con}/X \times \mathbf{Con}/Y \quad (1.4)$$

de tal manera que  $+ \circ (\ , \ ) \cong Id_{\mathbf{Con}/(X+Y)}$  y  $(\ , \ ) \circ + \cong Id_{\mathbf{Con}/X \times \mathbf{Con}/Y}$ .

Considere un coproducto

$$X \xrightarrow{i_0} X + Y \xleftarrow{i_1} Y$$

en  $\mathbf{Con}$ , y los conjuntos  $Z$ ,  $X' = \{z \in Z \mid \exists x \in X (fz = i_X(x))\}$  y  $Y' = \{z \in Z \mid \exists y \in Y (fz = i_Y(y))\}$ . De modo que si  $f_X : X' \rightarrow X$  es la restricción de  $f$  en  $X'$  y  $f_Y$  la restricción de  $f$  en  $Y'$ , entonces los siguientes cuadrados son pullbacks

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{k_0} & Z & \xleftarrow{k_1} & Y' \\ \downarrow f_X & & \downarrow f & & \downarrow f_Y \\ X & \xrightarrow{i_X} & X + Y & \xleftarrow{i_Y} & Y \end{array} \quad (1.5)$$

Así, si  $f : Z \rightarrow X + Y$  está en  $\mathbf{Con}/(X + Y)$ , definimos al funtor

$$(\ , \ ) : \mathbf{Con}/(X + Y) \longrightarrow \mathbf{Con}/X \times \mathbf{Con}/Y$$

como  $(\ , \ )(f) = (f_X, f_Y)$ . Definimos al  $h : Z \rightarrow X' + Y'$  como

$$h(z) = \begin{cases} z \in X', f(z) \in X \Rightarrow f(z) = i_X(x) \\ z \in Y', f(z) \in Y \Rightarrow f(z) = i_Y(y) \end{cases} \quad (1.6)$$

Así,  $+(f_X, f_Y)(h(z)) = i_X(f_X(z)) = f(k_0(z)) = f(z)$ , o bien  $+(f_X, f_Y)(h(z)) = i_Y(f_Y(z)) = f(k_1(z)) = f(z)$ . En cualquier caso,  $+(f_X, f_Y) \circ h = f$ . Entonces, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{h} & X' + Y' \\ & \searrow f & \swarrow +(f_1 f_2) \\ & X + Y & \end{array}$$

conmuta. Así,  $h$  es un morfismo en  $\mathbf{Con}/(X + Y)$ .

Ahora, sea  $i : X' + Y' \rightarrow Z$  la inclusión,

$$i(z) = \begin{cases} i_X(z), z \in X' \\ i_Y(z), z \in Y' \end{cases} \quad (1.7)$$

la cual está bien definida pues  $X' + Y'$  es la suma disjunta. Note que  $i(h(z)) = i(i_X(z)) = z$ , para toda  $z \in Z$ . Entonces,  $i \circ h = id_Z$ . Similarmente tenemos  $h \circ i = id_{X'+Y'}$ . Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\cong} & X' + Y' \\ & \searrow f & \swarrow +(f_1 f_2) \\ & X + Y & \end{array}$$

Esta asignación se puede extender hasta un funtor. De modo que

$$\mathbf{Con}/X \times \mathbf{Con}/Y \xrightarrow{+} \mathbf{Con}/(X + Y) \quad (1.8)$$

es una equivalencia. Por lo tanto,  $\mathbf{Con}$  es una categoría extensiva.

El hecho de que cierto funtor sea una equivalencia en la definición de extensividad, implica la existencia de ciertos pullbacks, como veremos mas adelante. Primero definamos propiedades sobre el coproducto.

**Definición 1.1.2.**

Un coproducto  $X \xrightarrow{i_0} X + Y \xleftarrow{i_1} Y$  es :

1. **Estable**, si para todo  $Z \longrightarrow X + Y$  los siguientes cuadrados son pullbacks:

$$\begin{array}{ccccc} X' & \longrightarrow & Z & \longleftarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X + Y & \longleftarrow & Y \end{array}$$

y el diagrama  $X' \longrightarrow Z \longleftarrow Y'$  es un coproducto.

2. **Disjunto**, si  $X \longrightarrow X + Y$  y  $Y \longrightarrow X + Y$  son monomorfismos y el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X + Y \end{array}$$

es un pullback.

*Observación.* Antes de dar otra una caracterización de las categorías extensivas, observemos que si  $\mathcal{C}$  tiene coproductos finitos, y suponga los siguientes cuadrados conmutativos en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{k_0} & Z & \xleftarrow{k_1} & Y' \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \downarrow f_1 \\ X & \xrightarrow{i_0} & X + Y & \xleftarrow{i_1} & Y \end{array} \tag{1.9}$$

Entonces  $X \xrightarrow{i_0} X + Y \xleftarrow{i_1} Y$  es un coproducto en  $\mathcal{C}$  si y solo si  $Z \xrightarrow{f} X + Y$  es el coproducto de  $X' \xrightarrow{i_0 \circ f_0} X + Y$  y  $Y' \xrightarrow{i_1 \circ f_1} X + Y$  en  $\mathcal{C}/(X + Y)$ .

En efecto, suponga que  $X \xrightarrow{i_0} X + Y \xleftarrow{i_1} Y$  es un coproducto en  $\mathcal{C}$ . También considere  $B \xrightarrow{h} X + Y$  en  $\mathcal{C}/(X + Y)$  y las flechas  $X' \xrightarrow{g_0} B$  y  $Y' \xrightarrow{g_1} B$  tales que los diagramas siguientes conmutan

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g_0} & B \\ \searrow i_0 \circ f_0 & & \swarrow h \\ & X + Y & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g_1} & B \\ \searrow i_1 \circ f_1 & & \swarrow h \\ & X + Y & \end{array} \tag{1.10}$$

Es decir,  $g_1$  y  $g_0$  son morfismos en  $\mathcal{C}/(X+Y)$ . Ahora, por la propiedad universal del coproducto tenemos que existe una única flecha  $Z \xrightarrow{\check{f}} B$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X' & & Y' \\
 \searrow k_0 & & \swarrow k_1 \\
 & Z & \\
 \vdots \check{f} & & \\
 & B & \\
 \swarrow g_0 & & \searrow g_1
 \end{array}
 \quad (1.11)$$

conmuta, es decir,  $g_0 = \check{f} \circ k_0$  y  $g_1 = \check{f} \circ k_1$ . Luego,

$$(h \circ \check{f}) \circ k_0 = h \circ g_0 = i_0 \circ f_0 = f \circ k_0$$

donde la segunda igualdad se sigue de la conmutatividad del diagrama izquierdo en 1.10, y la última igualdad es por el cuadrado conmutativo izquierdo en 1.9; análogamente,

$$(h \circ \check{f}) \circ k_1 = h \circ g_1 = i_1 \circ f_1 = f \circ k_1 \quad (1.12)$$

Ahora, considere el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 X' & \xrightarrow{k_0} & Z & \xleftarrow{k_1} & Y' \\
 \downarrow i_0 \circ f_0 & & \downarrow f & & \downarrow i_1 \circ f_1 \\
 & \searrow g_0 & & \swarrow g_1 & \\
 X+Y & & B & & X+Y \\
 & & \downarrow h & & \\
 & & X+Y & & 
 \end{array}
 \quad (1.13)$$

el cual es un diagrama en la categoría  $\mathcal{C}/(X+Y)$ , note que es conmutativo por 1.12. Además,  $\check{f}$  es única con esa propiedad. Por lo tanto,  $Z \xrightarrow{\check{f}} X+Y$  es el colproducto de  $X' \xrightarrow{i_0 \circ f_0} X+Y$  y  $Y' \xrightarrow{i_1 \circ f_1} X+Y$ , en  $\mathcal{C}/(X+Y)$ .

Ahora, como  $\mathcal{C}$  tiene coproductos, tomamos el coproducto  $X'+Y'$  junto con las inclusiones  $X' \xrightarrow{\alpha} X+Y$  y  $Y' \xrightarrow{\beta} X+Y$ , luego existe una flecha  $X'+Y' \xrightarrow{g} Z$  tal que  $\alpha \circ g = \beta$ ; el cual es isomorfismo, cuya inversa esta determinada por la flecha de la propiedad universal del coproducto, en caso de que

$Z \xrightarrow{f} X + Y$  sea el coproducto de  $Y' \xrightarrow{i_0 \circ f_0} X + Y$  y  $Y' \xrightarrow{i_1 \circ f_1} X + Y$ . Por lo que  $X' \xrightarrow{k_0} Z \xleftarrow{k_1} Y'$  es un coproducto.

La siguiente proposición nos dice que los coproductos se comportan bien en este tipo de categorías.

**Proposición 1.1.1.** Una categoría con coproductos finitos es extensiva si y sólo si los coproductos son estables y disjuntos.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ] Supongamos  $\mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y \xrightarrow{+} \mathcal{C}/(X + Y)$  es una equivalencia; entonces es esencialmente sobreyectiva en objetos. Así si  $Z \xrightarrow{f} X + Y$  es un objeto en  $\mathcal{C}/(X + Y)$ , entonces existe  $(f_0, f_1)$  en  $\mathcal{C}/(X + Y)$  tal que  $+(f_0, f_1) \cong f$ . Es decir, si  $\text{dom}(f_0) = X'$  y  $\text{dom}(f_1) = Y'$ , tenemos que

$$\begin{array}{ccc} X' + Y' & \xrightarrow{\cong} & Z \\ & \searrow_{f_0+f_1} & \swarrow_f \\ & X + Y & \end{array} \tag{1.14}$$

conmuta en  $\mathcal{C}/(X + Y)$ . Luego, considerando las inclusiones  $X \xrightarrow{i_0} X + Y \xleftarrow{i_1} Y$ , tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X' & & Y' \\ & \searrow_{j_0} & \swarrow_{j_1} \\ & X' + Y' & \\ & \vdots_{f_0+f_1} & \\ & X + Y & \end{array} \begin{array}{l} \nearrow_{i_0 \circ f_0} \\ \nearrow_{i_1 \circ f_1} \end{array} \tag{1.15}$$

conmuta, o bien en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{k_0} & Z & \xleftarrow{k_1} & Y' \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{i_0} & X + Y & \xleftarrow{i_1} & Y \end{array} \tag{1.16}$$

el cuadrado de la izquierda y el de la derecha conmutan. Ahora, veamos que esos cuadrados son pullbacks. Suponga que en el siguiente diagrama, el cuadrado izquierdo y el derecho, conmutan

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{l_0} & Z & \xleftarrow{l_1} & Y'' \\ \downarrow g_0 & & \downarrow f & & \downarrow g_1 \\ X & \xrightarrow{i_0} & X + Y & \xleftarrow{i_1} & Y \end{array} \tag{1.17}$$

Podemos formar el coproducto  $X'' + Y''$  en  $\mathcal{C}$ , y por la nota anterior, tenemos entonces que  $X'' + Y'' \xrightarrow{g_0+g_1} X + Y$  con las inclusiones  $j_0$  y  $j_1$ , es un coproducto en  $\mathcal{C}/(X + Y)$ . Por otra parte,  $l_0$  y  $l_1$  inducen un morfismo único  $\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}$  tal que

$$\begin{array}{ccc} X'' + Y'' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix}} & Z \\ & \searrow^{g_0+g_1} \quad \swarrow^f & \\ & X + Y & \end{array} \quad (1.18)$$

conmuta en  $\mathcal{C}/(x+Y)$ . Como  $\mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y \xrightarrow{+} \mathcal{C}/(X + Y)$  es fiel y pleno (pues es una equivalencia por hipotesis) y  $f \cong f_0 + f_1$  en  $\mathcal{C}/(X + Y)$ , tenemos que existen un único par de morfismo  $X'' \xrightarrow{h_0} X'$  y  $Y'' \xrightarrow{h_1} Y'$  que hacen conmutar los diagramas

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{h_0} & X' \\ & \searrow^{g_0} \quad \swarrow^{f_0} & \\ & X & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y'' & \xrightarrow{h_1} & Y' \\ & \searrow^{g_1} \quad \swarrow^{f_1} & \\ & Y & \end{array} \quad (1.19)$$

y con la propiedad de que

$$l_0 = \begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix} \circ j_0 = k_0 \circ h_0 \quad (1.20)$$

y

$$l_1 = \begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \end{pmatrix} \circ j_1 = k_1 \circ h_1 \quad (1.21)$$

Por lo tanto, los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{l_0} & Z \\ & \searrow^{h_0} & \downarrow k_0 \\ & X' & \xrightarrow{k_0} & Z \\ & \searrow^{g_0} & \downarrow f_0 & \downarrow f \\ & X & \xrightarrow{i_0} & X + Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y'' & \xrightarrow{l_1} & X \\ & \searrow^{h_1} & \downarrow k_1 \\ & Z & \xrightarrow{k_1} & X \\ & \searrow^{g_1} & \downarrow f_1 & \downarrow f \\ & Y & \xrightarrow{i_1} & X + Y \end{array} \quad (1.22)$$

y como  $h_0$  y  $h_1$  son únicas con la propiedad de hacer conmutar 1.22, entonces, los diagramas anteriores son pullbacks. Note que, por la observación anterior a esta demostración, y de 1.27, se sigue que  $X' \xrightarrow{k_0} Z \xleftarrow{k_1} Y'$  es un coproducto en

$\mathcal{C}$ . Para verificar que los coproductos son disjuntos, considere el diagrama,

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & Y & \xleftarrow{id_Y} & Y \\
 \downarrow & & \downarrow i_1 & & \downarrow id_Y \\
 X & \xrightarrow{i_0} & X + Y & \xleftarrow{i_1} & Y
 \end{array} \tag{1.23}$$

y usando la estabilidad del coproducto y que  $0 \longrightarrow Y \xleftarrow{id_Y} Y$  es coproducto, se tiene que los cuadrados en 1,6 son pullbacks, por lo tanto, los coproductos son disjuntos y el la inclusión  $i_0$  es monomorfismo. Análogamente se demuestra que  $i_1$  es monomorfismo.

$\Leftarrow$ ] Suponga que los coproductos en  $\mathcal{C}$  son estables y disjuntos. Veamos que  $\mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y \xrightarrow{+} \mathcal{C}/(X + Y)$  es una equivalencia. Considere el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 D_1 & \xrightarrow{k_1} & Z & \xleftarrow{k_2} & D_2 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f & & \downarrow f_2 \\
 X & \xrightarrow{i_1} & X + Y & \xleftarrow{i_2} & Y
 \end{array} \tag{1.24}$$

Por la estabilidad del coproducto  $X + Y$ , tenemos que  $D_1 \xrightarrow{k_1} Z \xleftarrow{k_2} D_2$  es un coproducto. Por otro lado, considere el coproducto  $D_1 \xrightarrow{j_1} D_1 + D_2 \xleftarrow{j_2} D_2$ , de modo que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 D_1 + D_2 & \xrightarrow{\cong} & Z \\
 \searrow f_1 + f_2 & & \swarrow f \\
 & X + Y &
 \end{array} \tag{1.25}$$

conmuta en  $\mathcal{C}/(X + Y)$ , es decir,  $f \cong f_1 + f_2$ . Esto nos permite definir al siguiente functor

$$\mathcal{C}/(X + Y) \xrightarrow{\dagger} \mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y \tag{1.26}$$

en objetos como  $\dagger(f) = (f_1, f_2)$ . Ahora sea  $Z_1 \xrightarrow{g} Z_2$  tal que

$$\begin{array}{ccc}
 Z_1 & \xrightarrow{g} & Z_2 \\
 \searrow h & & \swarrow l \\
 & X + Y &
 \end{array} \tag{1.27}$$

conmuta, es decir, un morfismo en  $\mathcal{C}/(X + Y)$ ; por la estabilidad del coproducto tenemos que los cuadrados siguientes son pullbacks

$$\begin{array}{ccc}
A_1 & \xrightarrow{p_1} & Z_1 & \xleftarrow{p_2} & A_2 & & B_1 & \xrightarrow{q_1} & Z_2 & \xleftarrow{q_2} & B_2 \\
\downarrow h_1 & & \downarrow h & & \downarrow h_2 & & \downarrow l_1 & & \downarrow l & & \downarrow l_2 \\
X & \xrightarrow{i_1} & X + Y & \xleftarrow{i_2} & Y & & X & \xrightarrow{i_1} & X + Y & \xleftarrow{i_2} & Y
\end{array} \quad (1.28)$$

Así, existen morfismo únicos  $\check{f}_1 : A_1 \rightarrow B_1$  y  $\check{f}_2 : A_2 \rightarrow B_2$  tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
A_1 & \xrightarrow{g \circ p_1} & Z_2 \\
\downarrow \check{f}_1 & & \downarrow q_1 \\
B_1 & \xrightarrow{q_1} & Z_2 \\
\downarrow h_1 & & \downarrow l_1 \\
X & \xrightarrow{i_0} & X + Y
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
A_2 & \xrightarrow{g \circ p_1} & Z_2 \\
\downarrow \check{f}_2 & & \downarrow q_2 \\
B_2 & \xrightarrow{q_2} & Z_2 \\
\downarrow h_2 & & \downarrow l_2 \\
X & \xrightarrow{i_0} & X + Y
\end{array} \quad (1.29)$$

Con esto definamos, el funtor  $\mathcal{C}/(X + Y) \xrightarrow{\dagger} \mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y$ , en morfismo como  $\dagger(g) = (\check{l}_1, \check{l}_2)$ . Veamos ahora que existe un isomorfismo natural

$$\begin{array}{ccc}
& & + \circ \dagger & & \\
& \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
\mathcal{C}/(X + Y) & & & & \mathcal{C}/(X + Y) \\
& \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\
& & id & & 
\end{array} \quad (1.30)$$

Para esto considere  $Z \xrightarrow{f} X + Y$  en  $\mathcal{C}/(X + Y)$ , entonces  $\dagger(f)$  nos da un par de morfismo  $f_1$  y  $f_2$  tales que los cuadrados en el diagrama siguiente conmuta Para esto considere  $Z \longrightarrow X + Y$  en  $\mathcal{C}/(X + Y)$ , entonces  $\dagger(f)$  nos da un par de morfismo  $f_1$  y  $f_2$  tales que los cuadrados en el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
X_1 & \xrightarrow{k_1} & Z & \xleftarrow{k_2} & Y_1 \\
\downarrow f_1 & & \downarrow f & & \downarrow f_2 \\
X & \xrightarrow{i_1} & X + Y & \xleftarrow{i_2} & Y
\end{array} \quad (1.31)$$

Luego, por la estabilidad del coproducto, tenemos un isomorfismo en  $\mathcal{C}/(X+Y)$ :

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 + X_2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}} & Z \\
 & \searrow^{f_1+f_2} & \swarrow^f \\
 & & X + Y
 \end{array} \tag{1.32}$$

De ahí que  $+ \circ \dagger(f) = +(f_1, f_2) = f_1 + f_2 \cong f$ . Definamos  $\alpha_f$  un morfismo en  $\mathcal{C}/(X+Y)$  entre  $+ \circ \dagger(f)$  y  $f$ , es decir, tal que

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 + X_2 & \xrightarrow{\alpha_f} & Z \\
 & \searrow^{+\circ\dagger(f)} & \swarrow^f \\
 & & X + Y
 \end{array} \tag{1.33}$$

conmuta. Sea  $Z_1 \xrightarrow{g} Z_2$  tal que siguiente triángulo conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 Z_1 & \xrightarrow{g} & Z_2 \\
 & \searrow^l & \swarrow^m \\
 & & X + Y
 \end{array} \tag{1.34}$$

es decir, un morfismo en  $\mathcal{C}/(X+Y)$ . Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 X'_1 + Y'_1 & \xrightarrow{\alpha_l} & & & Z_1 \\
 \downarrow^{+\circ\dagger(l)} & \searrow^{+\circ\dagger(g)} & & & \downarrow^l \\
 X + Y & & X''_1 + Y''_1 & \xrightarrow{\alpha_m} & Z_2 \\
 & & \downarrow^{+\circ\dagger(m)} & & \downarrow^m \\
 & & X + Y & & X + Y
 \end{array} \tag{1.35}$$

Tenemos que  $\dagger(l) = (l_1, l_2)$  y  $\dagger(m) = (m_1, m_2)$  son pares de morfismos tales que los cuadrados

$$\begin{array}{ccccccc}
 X'_1 & \xrightarrow{k'_1} & Z_1 & \xleftarrow{k'_2} & Y'_1 & & X''_1 & \xrightarrow{k''_1} & Z_1 & \xleftarrow{k''_2} & Y''_1 \\
 \downarrow l_1 & & \downarrow l & & \downarrow l_2 & & \downarrow m_1 & & \downarrow m & & \downarrow m_2 \\
 X & \xrightarrow{i_1} & X + Y & \xleftarrow{i_2} & Y & & X & \xrightarrow{i_1} & X + Y & \xleftarrow{i_2} & Y
 \end{array} \tag{1.36}$$

son pullbacks.

Por otro lado, por definición, tenemos que  $\dagger(g) = (\check{m}_1, \check{m}_2)$  es tal que los diagramas siguientes conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 X'_1 & \xrightarrow{g \circ k'_1} & Z_2 \\
 \downarrow \check{m}_1 & & \downarrow m \\
 X''_1 & \xrightarrow{k''_1} & Z_2 \\
 \downarrow m_1 & & \downarrow m \\
 X & \xrightarrow{i_0} & X + Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 Y'_1 & \xrightarrow{g \circ k'_2} & Z_2 \\
 \downarrow \check{m}_2 & & \downarrow m \\
 Y''_1 & \xrightarrow{k''_2} & Z_2 \\
 \downarrow m_2 & & \downarrow m \\
 X & \xrightarrow{i_0} & X + Y
 \end{array}
 \quad (1.37)$$

Así, que demostrar que el diagrama 1.35 conmute es equivalente a demostrar que el siguiente cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 X'_1 + Y'_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{pmatrix}} & Z_1 \\
 \check{m}_1 + \check{m}_2 \downarrow & & \downarrow g \\
 X''_1 + Y''_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} k''_1 \\ k''_2 \end{pmatrix}} & Z_2
 \end{array}
 \quad (1.38)$$

conmute. Es decir, que  $g \circ \begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k''_1 \\ k''_2 \end{pmatrix} \circ (\check{m}_1 + \check{m}_2)$ . Note que  $g \circ \begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{pmatrix}$  hace que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 X'_1 & & Y'_1 \\
 \downarrow i'_1 & & \downarrow i'_2 \\
 & X'_1 + Y'_1 & \\
 \downarrow g \circ \begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{pmatrix} & & \downarrow g \circ k'_2 \\
 & Z_2 &
 \end{array}
 \quad (1.39)$$

y por la propiedad universal del coproducto,  $g \circ \begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{pmatrix}$ , es única que con esa propiedad.

Ahora, considere los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 X'_1 & & Y'_1 \\
 \searrow^{i'_1} & & \swarrow_{i'_2} \\
 & X'_1 + Y'_1 & \\
 \vdots & & \vdots \\
 & X''_1 + Y''_1 & \\
 \swarrow_{i''_1 \circ \check{m}_1} & & \searrow^{i''_2 \circ \check{m}_2}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{ccc}
 X''_1 & & Y''_1 \\
 \searrow^{i''_1} & & \swarrow_{i''_2} \\
 & X''_1 + Y''_1 & \\
 \vdots & & \vdots \\
 & \begin{pmatrix} k''_1 \\ k''_2 \end{pmatrix} & \\
 \swarrow_{k''_1} & & \searrow_{k''_2} \\
 & Z_2 &
 \end{array}
 &
 \end{array}
 \tag{1.40}$$

Del diagrama de la izquierda tenemos que  $(\check{m}_1 + \check{m}_2) \circ i'_1 = i''_1 \circ \check{m}_1$ , y del diagrama de la derecha tenemos que  $\begin{pmatrix} k''_1 \\ k''_2 \end{pmatrix} \circ i''_1 = k''_1$ . De modo que ,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} k''_1 \\ k''_2 \end{pmatrix} \circ ((\check{m}_1 + \check{m}_2) \circ i'_1) &= \begin{pmatrix} k''_1 \\ k''_2 \end{pmatrix} \circ (i''_1 \circ \check{m}_1) \\
 &= \left( \begin{pmatrix} k''_1 \\ k''_2 \end{pmatrix} \circ i''_1 \right) \circ \check{m}_1 \\
 &= k''_1 \circ \check{m}_1
 \end{aligned}$$

Pero, por el pullback de la izquierda en 1.37, tenemos que  $g \circ k'_1 = k''_1 \circ \check{m}_1$ . Luego  $\left( \begin{pmatrix} k''_1 \\ k''_2 \end{pmatrix} \circ (\check{m}_1 + \check{m}_2) \right) \circ i'_1 = g \circ k'_1$ . De manera análoga llegamos a que  $\left( \begin{pmatrix} k''_1 \\ k''_2 \end{pmatrix} \circ (\check{m}_1 + \check{m}_2) \right) \circ i'_2 = g \circ k'_2$ . Por lo tanto,  $\begin{pmatrix} k''_1 \\ k''_2 \end{pmatrix} \circ (\check{m}_1 + \check{m}_2)$  hace conmutar el diagrama 1.39, y por la unicidad de  $g \circ \begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{pmatrix}$  concluimos que  $\begin{pmatrix} k''_1 \\ k''_2 \end{pmatrix} \circ (\check{m}_1 + \check{m}_2) = g \circ \begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{pmatrix}$ . Luego, 1.38 conmuta. Por lo tanto,  $\alpha : + \circ \dagger \Rightarrow Id$  es una transformación natural.

Por último vemos que, existe un isomorfismo natural

$$\begin{array}{ccc}
 & \dagger \circ + & \\
 & \curvearrowright & \\
 \mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y & & \mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y \\
 & \Downarrow & \\
 & id & \\
 & \curvearrowleft &
 \end{array}
 \tag{1.41}$$

Para esto, considere,  $(m_1, m_2)$  en  $\mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y$  tal que  $\text{dom} m_1 = M_1$  y  $\text{dom} m_2 =$

$M_2$ . Entonces,  $+(m_1, m_2) = m_1 + m_2$ , luego  $\dagger(m_1 + m_2) = (l_1, l_2)$ , que es el par de morfismos tales que los siguientes cuadrados

$$\begin{array}{ccccc} L_1 & \xrightarrow{j_1} & M_1 + M_2 & \xleftarrow{j_2} & L_2 \\ \downarrow l_1 & & \downarrow m_1+m_2 & & \downarrow l_2 \\ X & \xrightarrow{i_1} & X + Y & \xleftarrow{i_2} & Y \end{array} \quad (1.42)$$

son pullbacks. Por otro lado, por la estabilidad del coproducto  $X + Y$ , tenemos que los cuadrados siguientes

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xrightarrow{i'_1} & M_1 + M_2 & \xleftarrow{i'_2} & M_2 \\ \downarrow m_1 & & \downarrow m_1+m_2 & & \downarrow m_2 \\ X & \xrightarrow{i_1} & X + Y & \xleftarrow{i_2} & Y \end{array} \quad (1.43)$$

son pullbacks, en particular conmutan, luego existen un par de morfismo únicos

$M_1 \xrightarrow{\check{l}_1} L_1$  y  $M_2 \xrightarrow{\check{l}_2} L_2$  tales que los siguientes conmutan

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} M_1 & & \\ \downarrow \check{l}_1 & \searrow^{i'_1} & \\ L_1 & \xrightarrow{j_1} & M_1 + M_2 \\ \downarrow l_1 & & \downarrow m_1+m_2 \\ X & \xrightarrow{i_0} & X + Y \end{array} & & \begin{array}{ccc} M_2 & & \\ \downarrow \check{l}_2 & \searrow^{i'_2} & \\ L_2 & \xrightarrow{j_2} & M_1 + M_2 \\ \downarrow l_2 & & \downarrow m_1+m_2 \\ X & \xrightarrow{i_0} & X + Y \end{array} \end{array} \quad (1.44)$$

Con esto definimos el siguiente morfismo  $\beta_{(m_1, m_2)} = (\check{l}_1, \check{l}_2)$ . Como, los cuadrados en 2.16 conmutan y los cuadrados en 1.43 son pullbacks, entonces existen dos morfismo únicos  $L_1 \xrightarrow{\check{m}_1} M_1$  y  $L_2 \xrightarrow{\check{m}_2} M_2$  tales que los siguientes conmutan

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} L_1 & & \\ \downarrow \check{m}_1 & \searrow^{j_1} & \\ M_1 & \xrightarrow{i'_1} & M_1 + M_2 \\ \downarrow m_1 & & \downarrow m_1+m_2 \\ X & \xrightarrow{i_0} & X + Y \end{array} & & \begin{array}{ccc} L_2 & & \\ \downarrow \check{m}_2 & \searrow^{j_2} & \\ M_2 & \xrightarrow{i'_2} & M_1 + M_2 \\ \downarrow m_2 & & \downarrow m_1+m_2 \\ X & \xrightarrow{i_0} & X + Y \end{array} \end{array} \quad (1.45)$$

De ahí que, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{c}
 M_1 \xrightarrow{\check{l}_1} L_1 \xrightarrow{\check{m}_1} M_1 \xrightarrow{i'_1} M_1 + M_2 \\
 \downarrow m_1 \quad \downarrow l_1 \quad \downarrow m_1 \quad \downarrow m_1 + m_2 \\
 X \xrightarrow{i_0} X + Y
 \end{array}
 \quad (1.46)$$

conmuta, y por la propiedad universal del pullback,  $id_{M_1} = \check{m}_1 \circ \check{l}_1$ . De manera análoga llegamos a que  $id_{L_1} = \check{l}_1 \circ \check{m}_1$ ,  $id_{M_2} = \check{m}_2 \circ \check{l}_2$  y  $id_{L_2} = \check{l}_2 \circ \check{m}_2$ . Así  $M_1 \xrightarrow{\check{l}_1} L_1$  y  $M_2 \xrightarrow{\check{l}_2} M_2$  son isomorfismo cuyos inversos son  $L_1 \xrightarrow{\check{m}_1} M_1$  y  $L_2 \xrightarrow{\check{m}_2} M_2$ , respectivamente. Podemos definir  $\beta_{(l_1, l_2)} = (\check{m}_1, \check{m}_2)$ . Ahora sea,

$$(h_1, h_2) : (m_1, m_2) \longrightarrow (l_1, l_2)$$

un morfismo en  $\mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y$  (note que, por lo anterior, este es un isomorfismo). Vemos que el siguiente cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 (m_1, m_2) \xrightarrow{\beta_{(m_1, m_2)}} \dagger \circ +(m_1, m_2) \\
 \downarrow h \quad \quad \quad \downarrow \dagger \circ +(h) \\
 (l_1, l_1) \xrightarrow{\beta_{(l_1, l_2)}} \dagger \circ +(l_1, l_2)
 \end{array}
 \quad (1.47)$$

donde  $h = (h_1, h_2)$ , conmuta. Ahora, veremos quien es  $\dagger \circ +(h)$ . Tenemos que  $\dagger \circ +(m_1, m_2) = (l'_1, l'_2)$  y  $\dagger \circ +(l_1, l_2) = (l'_1, l'_2)$  son dos pares de morfismo tales que los siguientes cuadrados conmutan.

$$\begin{array}{ccccc}
 L_1 \xrightarrow{j_1} M_1 + M_2 \xleftarrow{j_2} L_2 & L'_1 \xrightarrow{k_{L_1}} L_1 + L_2 \xleftarrow{k_{L_2}} L'_2 \\
 \downarrow l_1 & \downarrow m_1 + m_2 & \downarrow l_2 & \downarrow l'_1 & \downarrow l_1 + l_2 & \downarrow l'_2 \\
 X \xrightarrow{i_1} X + Y \xleftarrow{i_2} Y & X \xrightarrow{i_1} X + Y \xleftarrow{i_2} Y
 \end{array}
 \quad (1.48)$$

Como  $(h_1, h_2) : (m_1, m_2) \longrightarrow (l_1, l_2)$  es un morfismo en  $\mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y$  y consi-

derando  $h_1 + h_2; M_1 + M_2 \rightarrow L_1 + L_2$ , tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 L_1 & \xrightarrow{(h_1+h_2)\circ j_1} & L_1 + L_2 \\
 \downarrow l_1 & & \downarrow l_1+l_2 \\
 X & \xrightarrow{i_1} & X + Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 L_2 & \xrightarrow{(h_1+h_2)\circ j_2} & L_1 + L_2 \\
 \downarrow l_2 & & \downarrow l_1+l_2 \\
 Y & \xrightarrow{i_2} & X + Y
 \end{array}
 \quad (1.49)$$

Así, tenemos que  $\dagger \circ +(h_1, h_2) = (\check{h}_1, \check{h}_2)$  es el par de morfismo únicos tales que los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 L_1 & \xrightarrow{(h_1+h_2)\circ j_1} & L_1 + L_2 \\
 \check{h}_1 \searrow & & \downarrow l_1+l_2 \\
 L'_1 & \xrightarrow{k_{L_1}} & L_1 + L_2 \\
 \downarrow l_1 & & \downarrow l_1+l_2 \\
 X & \xrightarrow{i_1} & X + Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 L_2 & \xrightarrow{(h_1+h_2)\circ j_2} & L_1 + L_2 \\
 \check{h}_2 \searrow & & \downarrow l_1+l_2 \\
 L'_2 & \xrightarrow{k_{L_2}} & L_1 + L_2 \\
 \downarrow l_2 & & \downarrow l_1+l_2 \\
 X & \xrightarrow{i_2} & X + Y
 \end{array}
 \quad (1.50)$$

conmutan. Ahora,  $\beta_{(l_1, l_2)} = (\check{l}'_1, \check{l}'_2)$  y  $\beta_{(m_1, m_2)} = (\check{l}_1, \check{l}_2)$  son dos pares de morfismo únicos de la propiedad universal de los siguientes pullbacks:

$$\begin{array}{ccc}
 M_1 & \xrightarrow{i'_1} & M_1 + M_2 \\
 \check{l}_1 \searrow & & \downarrow m_1+m_2 \\
 L_1 & \xrightarrow{j_1} & M_1 + M_2 \\
 \downarrow l_1 & & \downarrow m_1+m_2 \\
 X & \xrightarrow{i_1} & X + Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 M_2 & \xrightarrow{i'_2} & M_1 + M_2 \\
 \check{l}_2 \searrow & & \downarrow m_1+m_2 \\
 L_2 & \xrightarrow{j_2} & M_1 + M_2 \\
 \downarrow l_2 & & \downarrow m_1+m_2 \\
 Y & \longrightarrow & X + Y
 \end{array}
 \quad (1.51)$$

$$\begin{array}{ccc}
 L_1 & \xrightarrow{i_{L_1}} & L_1 + L_2 \\
 \check{l}'_1 \searrow & & \downarrow l_1+l_2 \\
 L'_1 & \xrightarrow{k_{L_1}} & L_1 + L_2 \\
 \downarrow l'_1 & & \downarrow l_1+l_2 \\
 X & \xrightarrow{i_1} & X + Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 L_2 & \xrightarrow{i_{L_2}} & L_1 + L_2 \\
 \check{l}'_2 \searrow & & \downarrow l_1+l_2 \\
 L'_2 & \xrightarrow{k_{L_2}} & L_1 + L_2 \\
 \downarrow l'_2 & & \downarrow l_1+l_2 \\
 Y & \longrightarrow & X + Y
 \end{array}
 \quad (1.52)$$

Así, que 1.47 commute, es equivalente a que el siguiente cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 (m_1, m_2) & \xrightarrow{\check{i}} & (l_1, l_2) \\
 \downarrow h & & \downarrow \check{h} \\
 (l_1, l_2) & \xrightarrow{\check{v}} & (l'_1, l'_2)
 \end{array}
 \quad (1.53)$$

conmute, donde  $\check{l} = (\check{l}_1, \check{l}_2)$ ,  $\check{h} = (\check{h}_1, \check{h}_2)$  y  $\check{l}' = (\check{l}'_1, \check{l}'_2)$ . Pero esto se traduce en que los dos cuadrados siguientes conmuten:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\check{l}_1} & L_1 \\ \downarrow h_1 & & \downarrow \check{h}_1 \\ L_1 & \xrightarrow{\check{l}'_1} & L'_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M_2 & \xrightarrow{\check{l}_2} & L_2 \\ \downarrow h_2 & & \downarrow \check{h}_2 \\ L_2 & \xrightarrow{\check{l}'_2} & L'_2 \end{array} \quad (1.54)$$

Ahora, como vimos anteriormente,  $\beta_{(m_1, m_2)}$ , nos define un par de isomorfismos (como se muestra en 1.44 y 1.45)  $(\check{l}_1, \check{l}_2)$  nos define un par de isomorfismos tales que, sus inversas  $\check{m}_i : L_i \rightarrow M_i$  son tales que

$$m_i \circ \check{m}_i = l_i \quad (1.55)$$

con  $i=1,2$ . Análogamente, como  $\beta_{(l_1, l_2)} = (\check{l}'_1, \check{l}'_2)$  son un par de isomorfismos, tenemos que  $\check{l}'_i{}^{-1} : L'_i \rightarrow L_i$  son tales que  $l_i \circ \check{l}'_i{}^{-1} = l'_i$  con  $i=1,2$ . Pero como  $l_1 \circ h_1 = m_1$  y como 1.52 conmuta tenemos que  $(\check{l}'_1 \circ \check{l}'_1) \circ h_1 = m_1$ , luego, por 1.55 tenemos

$$((\check{l}'_1 \circ \check{l}'_1) \circ h_1) \circ \check{m}_1 = l_1 \quad (1.56)$$

Por lo tanto,  $\check{h}_1 = \check{l}'_1 \circ h_1 \circ \check{m}_1$ , pues  $\check{l}'_1 \circ h_1 \circ \check{m}_1$  es un morfismo de  $L_1 \rightarrow L'_1$  y de la unicidad de  $\check{h}_1$  en 1.50. Así, el cuadrado de la izquierda en 1.9, conmuta.

De manera análoga, llegamos a que  $\check{h}_2 = \check{l}'_2 \circ h_2 \circ \check{m}_2$ , lo que se traduce en la conmutatividad del segundo cuadrado en 1.9. Por lo tanto 1.38 conmuta. Luego  $\dagger \circ + \Rightarrow Id$  es un isomorfismo natural. Y así,  $\mathcal{C}/X \times \mathcal{C}/Y \xrightarrow{+} \mathcal{C}/(X+Y)$  es una equivalencia. ■

**Ejemplo 1.1.2.** 1. La categoría **Top**, de espacios topológicos y funciones continuas, es extensiva. Para  $(X, \tau) \in \mathbf{Top}$  y  $A \subset X$ , un subespacio de  $X$  es el  $(A, \tau_i)$ , donde  $i : A \rightarrow X$  es la inclusión y  $\tau_i = \{i^{-1}(U) | U \in \tau\} = \{U \cap A | U \in \tau\}$ , y tiene la propiedad universal: para todo  $(W, \sigma) \in \mathbf{Top}$  y toda función  $f : W \rightarrow A$ ,  $f$  es continua si y sólo si  $if : W \rightarrow X$  es continua

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & Z \\ & \searrow if & \swarrow i \\ & & X \end{array} \quad (1.57)$$

Para demostrar la parte de la estabilidad, observemos que

*Observación.* (Completando el pullback). Sean  $(X, \tau), (Z, \beta) \in \mathbf{Top}$  y  $A \subset X$ . Considere  $Z_{fA} = \{z \in Z | f(z) \in A\} \subset Z$  y  $i' : Z_{fA} \rightarrow Z$  la inclusión. El

siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 (Z_{fA}, \sigma_{i'}) & \xrightarrow{i'} & (Z, \sigma) \\
 \downarrow f| & & \downarrow f \\
 (A, \tau_i) & \xrightarrow{i} & (X, \tau)
 \end{array} \tag{1.58}$$

conmuta en **Top** ( $f|$  es continua pues  $if$  es continua, y la inclusión  $i'$  es continua porque sale de un subespacio de  $Z$ ). Ahora sea

$$\begin{array}{ccc}
 (Q, \lambda) & \xrightarrow{r} & (Z, \sigma) \\
 \downarrow s & & \downarrow f \\
 (A, \tau_i) & \xrightarrow{i} & (X, \tau)
 \end{array} \tag{1.59}$$

otro diagrama conmutativo. Tomemos la restricción de  $r$ , es decir,  $r| : Q \rightarrow Z_{fA}$ . Note que  $r|$  es continua porque  $Z_{fA}$  es subespacio de  $Z$ , entonces tenemos que  $i'f$  es continua pues  $r$  lo es, entonces por la propiedad universal del subespacio, tenemos que su restricción lo es:

$$\begin{array}{ccc}
 Q & \xrightarrow{r|} & Z_{fA} \\
 \searrow r & & \swarrow i' \\
 & Z &
 \end{array} \tag{1.60}$$

Entonces, tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 Q & & & & \\
 \downarrow r| & \searrow r & & & \\
 & Z_{fA} & \xrightarrow{i'} & Z & \\
 \downarrow s & \downarrow f| & & \downarrow f & \\
 & A & \xrightarrow{i_C} & X &
 \end{array} \tag{1.61}$$

conmuta, pues si  $q \in Q$ , por 1.59 tenemos que  $f(r(q)) = i(s(q))$ , así tenemos

$$f|(r|(q)) = f(r(q)) = i(s(q)) = s(q) \tag{1.62}$$

Por otro lado,  $i'(r|(q)) = r|(q) = r(q)$ . Finalmente, el diagrama anterior es un pullback, desde que la unicidad de  $r|$  se da por definición.

Para cualesquiera dos espacios topológicos  $(x, \tau)$  y  $(Y, \sigma)$ , tenemos que el espacio topológico  $X + Y$  es isomorfo al espacio  $(X \sqcup Y, \tau_{i_x, i_y})$ , donde  $i_X : X \rightarrow X \sqcup Y$  y  $i_Y : Y \rightarrow X \sqcup Y$  son las inclusiones, y la  $\tau_{i_x, i_y}$  es la topología final

respecto a las inclusiones. Por la observación anterior, para la estabilidad del coproducto en **Top**, basta tomar  $Z_{fX}$  y  $Z_{fY}$ , para que los cuadrados

$$\begin{array}{ccccc}
 Z_{fX} & \xrightarrow{i} & Z & \xleftarrow{j'} & Z_{fY} \\
 \downarrow f| & & \downarrow f & & \downarrow f| \\
 X & \xrightarrow{i} & X + Y & \xleftarrow{j} & Y
 \end{array} \tag{1.63}$$

sean pullbacks en **Top**. Por otro lado,  $Z = Z_{fX} \sqcup Z_{fY}$ , pues si  $z \in Z$ , entonces  $z \in Z_{fX}$  o  $z \in Z_{fY}$ , por definición de esto dos conjuntos. Además, si  $z \in Z_{fX} \cap Z_{fY}$ , entonces  $f(z)$  está en el coproducto de  $X$  con  $Y$ , el cual es la unión disjunta. Entonces  $Z_{fX} \cap Z_{fY}$  debe ser vacía. Ahora veamos que la topología coincide con la topología final  $\tau_{i',j'}$ . Sabemos que la topología final es el supremo de las topologías sobre el coproducto de  $Z_{fX}$  y  $Z_{fY}$ , tales que  $i'$  y  $j'$  son continuas (Ver [15], sección 5). Entonces  $\sigma \subset \tau_{i',j'}$ . Para ver la otra contención, sea  $H \subset Z_{fX} \cap Z_{fY}$ , entonces  $H = (H_{fX}) \cap (H \cap Z_{fY}) = (A_1_{fX}) \cap (A_2 \cap Z_{fY}) = (A_1 \cup A_2) \cap Z$ , con  $A_1, A_2 \in \sigma$ . Entonces  $H \in \sigma$ .

Que los coproductos sean disjuntos se sigue de que el espacio vacío  $\emptyset$  es el inicial en **Top**.

2. Considere la categoría  $\Delta_1$  cuya clase objetos consta de dos, digamos  $A$  y  $1$ , donde  $1$  es terminal; y cuyos morfismos son  $\hookrightarrow A$ ,  $\hookrightarrow 1$ ,  $A \xrightarrow{!} 1$ ,  $1 \xrightarrow{c} A$ ,  $1 \xrightarrow{d} A$ . Note que los últimos dos morfismos,  $c$  y  $d$ , son secciones de  $!$ , pues los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{!} & 1 \\
 d \uparrow & \nearrow id_1 & \\
 1 & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{!} & 1 \\
 c \uparrow & \nearrow id_1 & \\
 1 & & 
 \end{array}$$

La categoría  $\Delta_1$  se ve de la siguiente manera: No es difícil ver que esta categoría

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{d} & \\
 id_1 \circlearrowleft 1 & \xleftarrow{!} & A \circlearrowright id_A \\
 & \xrightarrow{c} & 
 \end{array}$$

tiene coproductos. Por ejemplo, que  $A \xrightarrow{!} 1 + A \cong A + 1 \cong 1 \xleftarrow{id_1} 1$  es coproducto. También lo es

$$A \xrightarrow{id_A} A + A \cong A \xleftarrow{id_A} 1$$

Finalmente,  $1 \xrightarrow{c} 1 + 1 \cong A \xleftarrow{d} 1$ . Estos son todos los coproductos en esta categoría. Ya nos podemos preguntar si es extensiva. Para la estabilidad, solo basta checar que ciertos cuadrados son pullbacks, ya que, tanto el terminal como el otro objeto, son coproductos. Cabe notar, que  $A$  es el inicial en esta categoría. Pues es el único objeto del cual sale una única flecha a cualquier otro. Note del terminal salen dos flechas,  $c$  y  $d$ . Checaremos un caso para la estabilidad y disjunción de los coproductos, los otros casos se hacen de manera análoga. Para ver el coproducto  $A + 1 \cong A$  es disjunto, note que ( $0=A$  denota que  $A$  es inicial)

$$\begin{array}{ccc} 0 = A & \xrightarrow{!} & 1 \\ \downarrow id_A & & \downarrow id_1 \\ A & \xrightarrow{!} & 1 \cong A + 1 \end{array} \quad (1.64)$$

conmuta. Si tomamos los siguientes cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{id_1} & 1 \\ \downarrow d & & \downarrow id_1 \\ A & \xrightarrow{!} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{id_1} & 1 \\ \downarrow c & & \downarrow id_1 \\ A & \xrightarrow{!} & 1 \end{array} \quad (1.65)$$

Entonces, los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{id_1} & 1 \\ \downarrow c & \searrow & \downarrow id_1 \\ A & \xrightarrow{!} & 1 \\ \downarrow id_A & & \downarrow id_1 \\ A & \xrightarrow{!} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{id_1} & 1 \\ \downarrow d & \searrow & \downarrow id_1 \\ A & \xrightarrow{!} & 1 \\ \downarrow id_A & & \downarrow id_1 \\ A & \xrightarrow{!} & 1 \end{array} \quad (1.66)$$

conmutan. Y la unicidad de  $c$  y  $d$  es clara. Entonces, podemos concluir que los coproductos son disjuntos. Ahora la estabilidad, también se puede hacer por casos, pero como ya dijimos solo basta ver que ciertos cuadrados son pullbacks. Así podemos concluir que la categoría  $\Delta_1$  es extensiva.

**Definición 1.1.3.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría localmente pequeña. La categoría  $\mathbf{Con}^{\mathcal{C}^{op}}$  tiene por objetos a los funtores  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Con}$  y como flechas a las transformaciones naturales entre ellos. Los funtores  $X : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ , se llaman **pregavillas** sobre  $\mathcal{C}$ .

Como la categoría  $\mathbf{Con}^{\mathcal{C}^{op}}$  es un topos [14], entonces tiene colímites finitos. En particular, coproductos finitos.

**Proposición 1.1.2.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría localmente pequeña y extensiva. Entonces el topos  $\mathbf{Con}^{\mathcal{C}^{op}}$  es extensiva.

*Demostración.* Considere el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{i} & X + Y \end{array} \quad (1.67)$$

en  $\mathbf{Con}^{\mathcal{C}^{op}}$ . Luego, si  $C$  es un objeto en  $\mathcal{C}$ , entonces

$$\begin{array}{ccc} & & Z(C) \\ & & \downarrow f_C \\ X(C) & \xrightarrow{i_C} & X(C) + Y(C) \end{array} \quad (1.68)$$

es un diagrama en  $\mathbf{Con}$ . Sea  $X'_C = \{(z, x) \in Z(C) \times X(C) \mid f_C(z) = i_C(x)\}$ . Luego, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X'_C & \xrightarrow{i'_C} & Z(C) \\ \downarrow m_C & & \\ X(C) & & \end{array} \quad (1.69)$$

con  $i'_C$  y  $m_C$  proyecciones, es el pullback del diagrama anterior: claramente el siguiente cuadrado

$$\begin{array}{ccc} X'_C & \xrightarrow{i'_C} & Z(C) \\ \downarrow m_C & & \downarrow f_C \\ X(C) & \xrightarrow{i_C} & X(C) + Y(C) \end{array} \quad (1.70)$$

conmuta ; y si

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{h_1} & Z(C) \\ \downarrow h_2 & & \downarrow f_C \\ X(C) & \xrightarrow{i_C} & X(C) + Y(C) \end{array} \quad (1.71)$$

es otro cuadrado conmutativo, tenemos que  $f_C(h_1(k)) = i_C(h_2(k))$ , luego  $(h_1(k), h_2(k)) \in X'_C$ , esto nos permite definir  $K \xrightarrow{\check{f}} X'_C$  como  $\check{f}(k) =$

$(h_1(k), h_2(k))$  para cada  $k \in K$ . Entonces tenemos que  $i'_C(\check{f}(k)) = i'_C(h_1(k), h_2(k)) = h_1(k)$  y

$$m_C(\check{f}(k)) = h_2(k)$$

es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{h_1} & Z(C) \\
 \searrow \check{f} & & \downarrow f_C \\
 X'_C & \xrightarrow{i'_C} & Z(C) \\
 \downarrow m_C & & \downarrow f_C \\
 X(C) & \xrightarrow{i_C} & X(C) + Y(C)
 \end{array} \tag{1.72}$$

conmuta. Ahora como lo anterior es para cada objeto  $C$  en  $\mathcal{C}$ , definimos  $\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{X'} \mathbf{Con}$  como  $X'(C) = X'_C$ . Recordando que los límites y colímites en la categoría de pregavillas se calculan *punto a punto* [14], tenemos que

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{i'} & Z \\
 \downarrow m & & \\
 X & & 
 \end{array}$$

es el pullback de 1.67. De manera análoga, llegamos a que

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xleftarrow{j'} & Y' \\
 & & \downarrow h \\
 & & Y
 \end{array}$$

es pullback de

$$\begin{array}{ccc}
 Z & & \\
 \downarrow f & & \\
 X + Y & \xleftarrow{j} & Y
 \end{array}$$

Para checar la estabilidad, solo nos falta ver que  $X' \xrightarrow{i'} Z \xleftarrow{j'} Y'$  es un coproducto, pero esto se sigue de manera similar, teniendo en cuenta que los colímites se calculan punto a punto.

Veamos finalmente que los coproductos son disjuntos: veremos que

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta\emptyset & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \\
 X & & 
 \end{array}$$

es el pullback del digrama

$$\begin{array}{ccc}
 & Y & \\
 & \downarrow j & \\
 X & \xrightarrow{i} & X + Y
 \end{array} \tag{1.73}$$

en  $\mathbf{Con}^{\mathcal{C}^{op}}$ . Por ser  $\Delta\emptyset$  el objeto inicial en la categoría de pregavillas, tenemos que el cuadrado siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta\emptyset & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow j \\
 X & \xrightarrow{i} & X + Y
 \end{array} \tag{1.74}$$

Suponga que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{h} & Y \\
 \downarrow g & & \downarrow j \\
 X & \xrightarrow{i} & X + Y
 \end{array} \tag{1.75}$$

Entonces, si  $C$  es un objeto en  $\mathcal{C}$ , tenemos que el siguiente cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 V(C) & \xrightarrow{h_C} & Y(C) \\
 \downarrow g_C & & \downarrow j_C \\
 X & \xrightarrow{i_C} & X(C) + Y(C)
 \end{array} \tag{1.76}$$

conmuta en  $\mathbf{Con}$ . Si suponemos que  $V(C)$  no es vacío, llegamos a una contradicción. En efecto, si  $v \in V(C)$ , entonces tenemos que  $j_C(h_C(v)) = i_C(g_C(v))$  entonces  $h_C(v) \in X(C) \cap Y(C)$ , pero el coproducto en  $\mathbf{Con}$  es la unión disjunta de  $X(C)$  y  $Y(C)$ , luego tenemos una contradicción. Luego,  $V = \Delta\emptyset$ , y así existe un único morfismo  $V \xrightarrow{\check{f}=id_{\Delta\emptyset}} \Delta\emptyset$  tal que

$$\begin{array}{ccc}
 V = \Delta\emptyset & \xrightarrow{!_Y} & Y \\
 \check{f}=id_{\Delta\emptyset} \searrow & & \downarrow j \\
 \Delta\emptyset & \xrightarrow{!_Y} & Y \\
 \downarrow !_X & & \downarrow j \\
 X & \xrightarrow{i} & X + Y
 \end{array} \tag{1.77}$$

conmuta; donde  $g = !_X$  es el único morfismo desde el inicial hacia  $X$ , similarte  $h = !_Y$ . Por último verifiquemos que las inclusiones son monomorfismo. Esto es equivalente a probar que diagrama

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{Id_X} & X \\
\downarrow Id_X & & \downarrow i \\
X & \xrightarrow{i} & X + Y
\end{array} \tag{1.78}$$

es un pullback. Pero en  $\mathbf{sCon}$ , las inclusiones son monomorfismos, entonces

$$\begin{array}{ccc}
X(C) & \xrightarrow{Id_{X(C)}} & X \\
\downarrow Id_{X(C)} & & \downarrow i_C \\
X(C) & \xrightarrow{i_C} & X(C) + Y(C)
\end{array} \tag{1.79}$$

es un cuadrado pullback en  $\mathbf{Con}$  para cada  $C \in \mathcal{C}$ . Luego, como los limites en la categoría de pregavillas se calculan punto a punto, tenemos que 1.78 es pullback. Por lo tanto,  $X \xrightarrow{i} X + Y$  es monomorfismo. Similarmente llegamos a que  $Y \xrightarrow{j} X + Y$  es monomorfismo.  $\blacksquare$

**Ejemplo 1.1.3.** 1. (Grafos reflexivos.) A las pregavillas del topos  $\mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}}$  se llaman grafos reflexivos. En concreto, un grafo reflexivo  $\Delta_1^{op} \xrightarrow{X} \mathbf{Con}$ , es un diagrama de conjuntos y funciones:

$$\begin{array}{ccc}
& \xrightarrow{X(\bar{d})=dom} & \\
X(A) & \xleftarrow{X(\bar{l})=i} & X(1) \\
& \xrightarrow{X(\bar{c})=cod} & 
\end{array} \tag{1.80}$$

tales que  $dom(i(n)) = n = cod(i(n))$  para cada  $n \in X(1)$ . La idea intuitiva, es pensar a  $X(1)$  como el conjunto de nodos del grafo, y a  $X(A)$  con el conjunto de aristas. Un morfismo de grafos  $X \xrightarrow{\alpha} Y$  es un par de funciones  $X(1) \xrightarrow{\alpha_1} Y(1)$  y  $X(A) \xrightarrow{\alpha_A} Y(A)$ , tales que los siguientes conmutan

$$\begin{array}{ccccc}
X(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & Y(A) & & X(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & Y(A) & & X(1) & \xrightarrow{\alpha_1} & Y(1) \\
\downarrow dom & & \downarrow dom & & \downarrow cod & & \downarrow cod & & \downarrow i & & \downarrow i \\
X(1) & \xrightarrow{\alpha_1} & Y(1) & & X(1) & \xrightarrow{\alpha_1} & Y(1) & & X(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & Y(A)
\end{array} \tag{1.81}$$

El topos  $\mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}}$  es una categoría extensiva.

- Un resultado inmediato es que si  $\mathcal{C}$  es una categoría extensiva entonces  $\mathcal{C}/C$  es extensiva, para cada objeto  $C$  en  $\mathcal{C}$ . Sabemos que si  $0$  es el inicial en  $\mathcal{C}$  entonces  $0 \rightarrow C$  es el inicial en  $\mathcal{C}/C$ . Ahora, suponga que

$X' \xrightarrow{k_0} Z \xleftarrow{k_1} Y'$  es un coproducto en  $\mathcal{C}$ . Veamos que si

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{k_0} & X + Y \\
 \searrow f_0 & & \swarrow f \\
 & & C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{k_1} & X + Y \\
 \searrow f_1 & & \swarrow f \\
 & & C
 \end{array}
 \tag{1.82}$$

conmutan, entonces  $f$  es el coproducto de  $f_0$  y  $f_1$  en  $\mathcal{C}/C$ . Considere los siguientes triángulos conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{g_0} & B \\
 \searrow f_0 & & \swarrow f \\
 & & C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{g_1} & B \\
 \searrow f_1 & & \swarrow h \\
 & & C
 \end{array}
 \tag{1.83}$$

Luego, como  $X + Y$  es un coproducto en  $\mathcal{C}$ , entonces existe  $\check{f} : X + Y \rightarrow B$  tal que

$$\begin{array}{ccc}
 X & & Y \\
 \searrow k_0 & & \swarrow k_1 \\
 & X + Y & \\
 \downarrow \check{f} & & \\
 & B & \\
 \swarrow g_0 & & \searrow g_1
 \end{array}
 \tag{1.84}$$

conmuta. Entonces tenemos.  $\check{f} \circ k_0 = g_0$ , luego  $h \circ \check{f} \circ k_0 = h \circ g_0 = f_0$ , donde la última igualdad es por el triángulo conmutativo de la izquierda en 1.83. Similarmente,  $h \circ \check{f} \circ k_1 = f_1$ . Note que como  $f_0 = f \circ f_0$ , entonces  $h \circ \check{f} \circ k_0 = f \circ k_0$ . Similarmente,  $h \circ \check{f} \circ k_1 = f \circ k_1$ . Por todo lo anterior, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{k_0} & X + Y & \xleftarrow{k_1} & Y \\
 \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \downarrow f_1 \\
 C & & C & & C \\
 \downarrow g_0 & & \downarrow \check{f} & & \downarrow g_1 \\
 & & B & & \\
 & & \downarrow h & & \\
 & & C & & 
 \end{array}
 \tag{1.85}$$

conmuta. Esto nos dice que la categoría rebanada sobre  $C$  tiene coproductos. Ver que  $\mathcal{C}/C$  también hereda la extensividad, es un trabajo análogo al anterior.

Pues basta ver que los pullbacks garantizados por la extensividad en  $\mathcal{C}$  se heredan a  $\mathcal{C}/C$ .

## 1.2. Algunas propiedades de las categorías extensivas

**Definición 1.2.1.** Un objeto  $A$  de una categoría  $\mathcal{C}$  es estricto, si todo morfismo con codominio  $A$  es isomorfismo.

**Proposición 1.2.1.** Si  $\mathcal{C}$  es extensiva entonces el inicial  $0$  es estricto.

*Demostración.* Suponga que  $\mathcal{C}$  es extensiva y que existe  $X \xrightarrow{f} 0$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Como  $0$  es inicial entonces el morfismo  $0 \xrightarrow{!} X$  es una sección de  $f$ , pues el triángulo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & 0 \\ \uparrow ! & \nearrow id_0 & \\ 0 & & \end{array}$$

conmuta. Obien,  $f \circ ! = id_0$ . Ahora veamos que  $! \circ f = id_X$ . Considere el pullback

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{id_X} & X & \xleftarrow{id_X} & X \\ \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f \\ 0 & \xrightarrow{id_0} & 0 & \xleftarrow{id_0} & 0 \end{array}$$

donde  $0+0 \cong 0$ , se sigue de la estabilidad del coproducto, que  $X$  es un coproducto. Luego, existe a lo mas una única flecha de  $X$  a  $0$ , a saber  $f$ , así el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & 0 \\ & \searrow id_X & \downarrow ! \\ & & X \end{array}$$

conmuta. Por lo que  $! \circ f = id_X$ . Por lo tanto,  $f$  es un isomorfismo.

En el caso en el que un morfismo  $A \rightarrow 0$  no exista en  $\mathcal{C}$  la proposición se cumple trivialmente. ■

**Definición 1.2.2.** Una categoría tiene objeto nulo si tiene inicial  $0$ , terminal  $1$ , y la flecha única  $0 \rightarrow 1$  es un isomorfismo

Esto implica que si tenemos dos objetos en una categoría , digamos  $A$  y  $B$ , con objeto nulo  $0$ , entonces hay un morfismo canónico de  $A$  en  $B$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{!} & 1 \cong 0 & \xrightarrow{!} & B \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \text{cero} & & 
 \end{array}$$

Ahora si en una categoría extensiva, tenemos objeto nulo, como este es inicial, por el resultado anterior es estricto. Y que el objeto nulo sea estricto implica que que cada flecha hacia él, es un isomorfismo, pero como es nulo, entonces, es terminal, luego para cualquier objeto  $A$  en la categoría existe una unica flecha  $A \rightarrow 1$ .Que por lo anterior, resulta en un isomorfismo. Asi podemos concluir que:

**Proposición 1.2.2.** Si  $\mathcal{C}$  es extensiva y tiene objeto nulo  $0$ , entonces  $\mathcal{C}$  es terminal.

**Ejemplo 1.2.1.** Cualquier preorden, visto como categoría, si es extensiva entonces es terminal.

**Definición 1.2.3.** Un monomorfismo  $A \xrightarrow{m} B$  en una categoría  $\mathcal{C}$  es **monoregular** si existe un objeto  $C$  y morfismos  $B \rightrightarrows C$  , de los cuales  $m$  es el igualador.

De la Definición 1.1.2 y la Proposición 1.1.1, tenemos que las inclusiones son monomorfismo. El siguiente resultado, nos dice además que la extensividad implica que estas son monoregulares.

**Proposición 1.2.3.** Si  $\mathcal{C}$  es extensiva entonces  $X \xrightarrow{i_0} X + Y$  es monoregular

*Demostración.* Suponga que  $\mathcal{C}$  es extensiva y sean  $X, Y$  objetos en  $\mathcal{C}$ . Como  $\mathcal{C}$  es extensiva, tiene coproductos luego,  $(X + Y) + Y$  y  $Y + Y$  son objetos de la categoría. Considere el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 X & & Y \\
 \swarrow i_X & & \swarrow i_Y \\
 & X + Y & \\
 \downarrow i_0 & \downarrow \begin{pmatrix} i_0 \\ i_2 \end{pmatrix} & \downarrow i_2 \\
 & (X + Y) + Y & 
 \end{array} & 
 \begin{array}{ccc}
 X & & Y \\
 \swarrow i_X & & \swarrow i_Y \\
 & X + Y & \\
 \downarrow i_0 & \downarrow \begin{pmatrix} i_0 \\ i_1 \end{pmatrix} & \downarrow i_1 \\
 & X + (Y + Y) & 
 \end{array} & 
 \end{array}
 \tag{1.86}$$

De donde, tenemos que el siguiente es un tenedor:

$$X \xrightarrow{i_0} X + Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_0 \\ i_2 \\ i_0 \\ i_1 \end{pmatrix}} (X + Y) + Y \quad (1.87)$$

Ahora, suponga que

$$T \xrightarrow{f} X + Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_0 \\ i_2 \\ i_0 \\ i_1 \end{pmatrix}} (X + Y) + Y \quad (1.88)$$

es otro tenedor. Por la estabilidad del coproducto, y que el siguiente cuadrado es un pullback

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & X + Y \\ \downarrow i_X & & \downarrow \begin{pmatrix} i_0 \\ i_2 \end{pmatrix} \\ X + Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_0 \\ i_1 \end{pmatrix}} & X + Y + Y \end{array}$$

Entonces, como

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & X + Y \\ \downarrow f & & \downarrow \begin{pmatrix} i_0 \\ i_2 \end{pmatrix} \\ X + Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_0 \\ i_1 \end{pmatrix}} & X + Y + Y \end{array}$$

conmuta, entonces existe un único morfismo  $T \xrightarrow{\check{f}} X$ , tal que el siguiente triángulo

$$\begin{array}{ccc} T & & \\ \downarrow \check{f} & \searrow f & \\ X & \xrightarrow{i_0} & X + Y \end{array} \quad (1.89)$$

conmuta. Por lo tanto,  $X \xrightarrow{i_0} X + Y$  es el igualador en 1.87. ■

**Ejemplo 1.2.2.** 1. Como vimos **Con** es extensiva. Luego, los monomorfismos  $X \rightarrow X+Y$  y  $Y \rightarrow X+Y$  son monoregulares. No obstante, todo monomorfismo en esta categoría es regular. Sea  $m : X \rightarrow Y$  un monomorfismo en **Con**. Ahora considere las funciones  $f : Y \rightarrow \{0,1\}$  definida por  $f(y) = 1$  para toda  $y \in Y$ , y  $g : Y \rightarrow \{0,1\}$  la definimos por  $g(y) = 1$  si  $y \in \text{img}(m)$  y  $g(y) = 0$  en otro caso. Sabemos que en **Con**, el igualador de  $f$  y  $g$  es el conjunto  $I = \{y \in Y | g(y) = f(y)\} = \{y \in Y | g(y) = 1\} = \text{img}(m)$  (concretamente la inclusión  $I \rightarrow Y$ ). La última igualdad, se sigue de la definición de  $g$ . Luego, es inmediato que hay una biyección  $X \rightarrow I$ . Pues como  $m : X \rightarrow Y$  es inyectiva (pues es monomorfismo), entonces  $X \rightarrow I = \text{img}(m)$  también lo es, tomándola como la restricción de  $m$ . Así,  $X \rightarrow I$  también es sobreyectiva. Luego es una biyección. Con lo que podemos concluir que  $m : X \rightarrow Y$  es el igualador de  $f$  y  $g$ . Por lo tanto, todo monomorfismo en **Con** es regular.

2. En **Top** todo encaje es monomorfismo regular.

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con coproductos y productos finitos. Decimos que  $\mathcal{C}$  es distributiva si el morfismo

$$(X \times Y) + (X \times Z) \xrightarrow{\begin{pmatrix} id_X \times i_Y \\ id_X \times i_Z \end{pmatrix}} X \times (Y + Z)$$

es un isomorfismo.

**Proposición 1.2.4.** Si  $\mathcal{C}$  es extensiva y tiene productos finitos entonces es distributiva

*Demostración.* Sean  $C, C', C''$  objetos en  $\mathcal{C}$  y  $C' \xrightarrow{f} C''$  un morfismo. Tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} C \times C' & \xrightarrow{id_X \times f} & C \times C'' \\ \downarrow p_{C'} & & \downarrow p_{C''} \\ C' & \longrightarrow & C'' \end{array} \quad (1.90)$$

conmuta, aún más, es un cuadrado pullback. De modo que, los siguientes cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccccc}
C \times C' & \xrightarrow{id_X \times i_{C'}} & C \times (C' + C'') & \xleftarrow{id_X \times i_{C''}} & C \times C'' \\
\downarrow p_{C'} & & \downarrow p_{C'+C''} & & \downarrow p_{C''} \\
C' & \xrightarrow{i_{C'}} & C' + C'' & \xleftarrow{i_{C''}} & C''
\end{array} \tag{1.91}$$

son pullbacks, luego,  $C \times C' \xrightarrow{id_X \times f} C \times (C' + C'') \xleftarrow{id_X \times i_{C''}} C \times C''$  es un coproducto. Por lo tanto  $C \times (C' + C'') \cong (C \times C') + (C \times C'')$  ■

*Observación.* Note que el regreso no se cumple. Pues si  $X$  es un conjunto, tomemos  $\mathcal{P}(X)$  el potencia de  $X$  ordenado por la inclusión. Entonces  $\mathcal{P}(X)$  se puede ver como una categoría de preorden. Si  $A, B \in \mathcal{P}(X)$ , entonces el producto de  $A$  con  $B$  es  $A \cap B$ , y su coproducto es  $A \cup B$ . Además, si  $C \in \mathcal{P}(X)$ , sabemos que  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cong A \cap (B \cup C)$ . Luego,  $\mathcal{P}(X)$  es distributiva. Sin embargo, las uniones (coproductos) no son disjuntas. Por lo tanto esta categoría no es extensiva.

**Ejemplo 1.2.3.** 1. ya vimos que **Con** es extensiva. Además, es un topos, entonces tiene productos finitos. Luego, **Con** es distributiva.

2. Similarmente, si  $\mathcal{C}$  es localmente pequeña, entonces **Con** <sup>$\mathcal{C}^{op}$</sup>  es distributiva. En particular, la categoría de grafos reflexivos lo es.

3. **Top** es extensiva y con el producto topológico es distributiva.



## Capítulo 2

# Extensividad y la categoría $\mathbf{Rig}$

Stephen H. Schanuel introduce en su artículo *Negative sets have Euler characteristic and dimension* el concepto de aillo. Además, introduce el concepto de aillo de Burnside, que se construye sobre una categoría distributiva, tiene como elementos clases de isomorfismos de los objetos de la categoría y su suma y producto se definen a partir de la suma y producto de la categoría distributiva. Así como una categoría puede considerarse como una categoría con estructura similar a la de un aillo, una categoría extensiva puede considerarse como una con estructura similar a la de un grupo abeliano [1]. En esta sección estudiaremos otras propiedades y objetos de las categorías extensivas, partiendo de otro ejemplo de categoría extensiva,  $\mathbf{Rig}^{op}$  (la opuesta a la categoría de aillos). Esta categoría, resulta importante, pues como se muestra en [8], sirve como base para modelos análogos a la Geometría Algebraica de Grothendieck. Además, también nos sirve como base para la construcción de modelos de categorías precohesivas, como veremos en el siguiente capítulo. Un aillo puede pensarse como un anillo sin los elementos negativos.

**Definición 2.0.1.** Se dice que una estructura  $(R, +, \cdot, 0, 1)$  es un **aillo** si:

1.  $(R, +, 0)$  y  $(R, \cdot, 1)$  son monoides conmutativos
2. para todo  $x, y, z \in R$  se tiene que  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ .
3. para todo  $x \in R$ ,  $x \cdot 0 = 0$

Un morfismo de aillos, es una función  $f : R \rightarrow S$  tal que

$$f(ab) = f(a)f(b), f(a + b) = f(a) + f(b), f(0) = 0 \text{ y } f(1) = 1.$$

Denotaremos por  $\mathbf{Rig}$  a la categoría de aillos y homomorfismo entre ellos.

- Ejemplo 2.0.1.** 1. La categoría **Ring**, de anillos y homomorfismo entre ellos, es una subcategoría plena **Ring**  $\hookrightarrow$  **Rig** de los aillos cuyo monoide aditivo es un grupo (abeliano).
2. Si  $K$  es un aillo arbitrario, entonces la categoría de de  $K$  – álgebras, es por definición, la categoría  $K/\mathbf{Rigs}$ .
3. El anillo cero  $0$  es tambien un aillo, llamado el aillo trivial. Además es el terminal en la categoria **Rig**.
4. Los naturales  $\mathbb{N}$  con la aritmética usual, es un aillo. Y es el objeto inicial en **Rig**.
5. Cuando  $1$  no es  $0$  en un aillo  $R$ , y tomando la relación  $1 = 1 + 1$ , lo que resulta es el el aillo  $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ , llamado el aillo idempotente.

**Proposición 2.0.1.** Para cualquier aillo  $A$  y  $a \in A$  existe un aillo  $A[a^{-1}]$  y un morfismo  $\eta : A \rightarrow A[a^{-1}]$  tal que :

1.  $\eta a \in A[a^{-1}]$  es invertible y
2. para todo morfismo  $f : A \rightarrow B$  en **Rig** tal que  $fa$  es invertible, existe un único morfismo  $f' : A[a^{-1}] \rightarrow B$  tal que

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta} & A[a^{-1}] \\ & \searrow f & \downarrow f' \\ & & B \end{array}$$

conmuta en **Rig**.

*Demostración.* Sea  $A$  un rig y  $r \in A$ . Definamos una relación sobre  $A \times R$ , donde  $R = \{r^n | n \in \mathbb{N}\}$  como sigue:  $(a_1, r^n) \sim (a_2, r^m)$  si y sólo si existe  $u \in R$  tal que  $ua_1r^m = ua_2r^n$ . Veamos que es una relación de equivalencia. La reflexividad y la simetría son inmediatas. Veamos que es transitiva: tomemos  $(a_1, r^n), (a_2, r^m), (a_3, r^{\tilde{n}}) \in A \times R$  tales que  $(a_1, r^n) \sim (a_2, r^m)$  y  $(a_2, r^m) \sim (a_3, r^{\tilde{n}})$ . Entonces, existen  $n_1, n_2 \in R$  tales que

$$n_1a_1r^m = n_1a_2r^n \quad \text{y} \quad n_2a_2r^{\tilde{n}} = n_2a_3r^m \quad (2.1)$$

Veamos que existe  $n \in R$  talque s  $na_1r^{\tilde{n}} = na_3r^n$ . Pongamos  $n = n_1n_2r^m$ , note que  $n \in R$ , luego

$$\begin{aligned} na_1r^{\tilde{n}} &= n_1n_2r^m a_1r^{\tilde{n}} \\ &= n_2n_1a_1r^m r^{\tilde{n}} \\ &= n_2n_1a_2r^n r^{\tilde{n}} \\ &= n_1n_2a_3r^m r^n \\ &= na_3r^n \end{aligned}$$

por lo tanto  $(a_1, r^n) \sim (a_3, r^{\bar{n}})$ . Ahora definamos la suma y el producto sobre  $A[r^{-1}] := A \times R / \sim$ . Las clases de equivalencias de  $A[r^{-1}]$  las denotaremos por  $\frac{a}{r^n}$ . Así, el producto lo definimos por

$$\frac{a_1}{r^n} \cdot \frac{a_2}{r^m} = \frac{a_1 a_2}{r^{n+m}}$$

Y la suma, se define como

$$\frac{a_1}{r^n} + \frac{a_2}{r^m} = \frac{a_1 r^m + a_2 r^n}{r^n r^m}$$

Estas operaciones están bien definidas. Por otro lado note que con  $u = 1 \in A$ , tenemos que  $uarr^n = uar^{n+1}$ , es decir,  $(ar, r^{n+1}) \sim (a, r^n)$ . Así tenemos que  $\frac{r}{r}$ , es la unidad en  $A[r^{-1}]$ , pues, ahora podemos concluir que

$$\frac{a}{r^n} \cdot \frac{r}{r} = \frac{ar}{r^{n+1}} = \frac{a}{r^n}$$

Note que el cero en  $A[r^{-1}]$  es  $\frac{0}{r}$ , pues para cualquier  $n \in R$ , tenemos que  $(0, r^{n+1}) \sim (0, r)$ . Así, tenemos

$$\frac{0}{r} \cdot \frac{a}{r^n} = \frac{0}{r^{n+1}} = \frac{0}{r}$$

Ahora veamos que existe

$$\eta : A \rightarrow A[r^{-1}]$$

tal que  $\eta(r) \in A[r^{-1}]$  es invertible. Definamos  $\eta$  de la manera siguiente, sea  $a \in A$ , entonces  $\eta(a) = \frac{a}{1}$ . Es morfismo, pues,  $\eta(a+b) = \frac{a+b}{1}$ . Por otro lado  $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1}$ . Por lo tanto,  $\eta(a+b) = \eta(a) + \eta(b)$ . Ahora

$$\eta(ab) = \frac{ab}{1} \tag{2.2}$$

por otro lado

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1}$$

Por lo que  $\eta(ab) = \eta(a) \cdot \eta(b)$ . Por último, tenemos que se cumple que  $\eta$  manda unidad en unidad y cero en cero, pues se tiene que  $(1, 1) \sim (r, r)$  y  $(0, 1) \sim (0, r)$ .

Vemos que  $\eta(r)$  es invertible, pues  $\frac{r}{1} \cdot \frac{1}{r} = \frac{r}{r}$ , es decir,  $(\eta(r))^{-1} = \frac{1}{r}$ , lo cual esta en  $A[r^{-1}]$ . Ahora demostraremos la segunda parte de esta proposición. Sea  $f : A \rightarrow B$  un morfismo de aillos tal que  $f(r)$  es invertible. Definamos

$$f' : A[f^{-1}] \rightarrow B$$

por  $f(\frac{a}{r^n}) = f(a)(f(r)^{-1})^n$ . Esto se puede pues  $f(r)$  lo supusimos invertible. Al final revisaremos que es un morfismo de aillos. Mientras tanto, vemos que el diagrama en la proposición conmuta. Sea  $a \in A$ , luego  $\eta(a) = \frac{a}{1}$ , luego

$$f'(\frac{a}{1}) = f(a)[f(1)^{-1}]^0 = f(a)$$

Por lo tanto  $f' \circ \eta = f$ . Note que  $f(\frac{r}{r}) = f(r)f(r)^{-1} = 1_B$ . Por otro lado,  $f(\frac{0}{r}) = f(0)f(r)^{-1} = 0_B f(r)^{-1} = 0_B$ . Ahora, si  $\frac{a}{r^n}$  y  $\frac{b}{r^m}$  estan en  $A[r^{-1}]$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(\frac{a}{r^n} + \frac{b}{r^m}) &= f'(\frac{ar^m + br^n}{r^n r^m}) \\ &= f(ar^m + br^n)(f(r)^{-1})^{n+m} \\ &= (f(a)f(r)^m + f(b)f(r)^n)((f(r^{-1})^n)(f(r^{-1})^m)) \\ &= (f(a)f(r)^m)(f(r^{-1})^n)(f(r^{-1})^m) + (f(b)f(r)^n)(f(r^{-1})^n)(f(r^{-1})^m) \\ &= f(a)f(r^{-1})^n + f(b)f(r^{-1})^m \\ &= f'(\frac{a}{r^n}) + f'(\frac{b}{r^m}) \end{aligned}$$

Análogamente, llegamos a que  $f'(\frac{a}{r^n} \cdot \frac{b}{r^m}) = f'(\frac{a}{r^n})f'(\frac{b}{r^m})$ . ■

**Definición 2.0.2.** Si  $A$  es un aillo, decimos que  $a \in A$  es **Booleano** si existe  $b \in A$  tal que  $ab = 0$  y  $a + b = 1$

*Observación.* 1. En caso de existir un tal  $b$  para cualquier  $a$ , este se llamará el complemento de  $a$ , y además es único: suponga que existe otro  $b_2 \in A$  que es complemento de  $a$ . Luego,

$$b = b1 = b(a + b_2) = ba + bb_2 = bb_2 = ab_2 + bb_2 = (a + b)b_2 = 1b_2 = b_2$$

2. Por otro lado, se tiene que todo Booleano es idempotente: si  $b$  es el complemento de  $a$ , entonces  $a + b = 1$ , luego  $a(a + b) = a1$ , de ahí que,  $a^2 = a$ .
3. También, en anillos se observa que los complementos de un elemento  $a$ , son  $1 - a$ . En efecto,

$$a(1 - a) = a - aa = a - a = 0 \quad \text{y} \quad a + (1 - a) = 1$$

4. Una consecuencia también inmediata, es que si  $a$  es Booleano, entonces

$$\eta : A \rightarrow A[a^{-1}]$$

es sobreyectiva.

**Lema 2.0.1.** Si  $r$  un elemento de un aillo  $A$  tiene complemento  $s$  entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \eta_r \swarrow & & \searrow \eta_s \\ A[r^{-1}] & & A[s^{-1}] \end{array}$$

es un producto en **Rig**. Y además, todo producto en **Rig** es de esta forma.

*Demostración.* Primero notemos que si  $R, S \in \mathbf{Rig}$ , entonces  $R \times S$  tiene estructura de aillo, con la operación de suma y producto definidas componente a componente, con  $0 = (0_R, 0_S)$  y  $1 = (1_R, 1_S)$ . Entonces

$$\begin{array}{ccc} & R \times S & \\ \pi_S \swarrow & & \searrow \pi_R \\ R & & S \end{array} \tag{2.3}$$

con  $\pi_R$  y  $\pi_S$  las proyecciones, resulta ser el producto categórico en **Rig**. Ahora, considere el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & B & \\
 h_r \swarrow & & \searrow h_s \\
 A[r^{-1}] & & A[s^{-1}]
 \end{array} \tag{2.4}$$

en **Rig**. Sea  $b \in B$ , entonces tenemos que  $h_r(b) \in A[r^{-1}]$  ( $h_r(b) = \frac{a'}{r^n}$  para algún  $a$  y  $r^n$ ), luego como  $\eta_r$  es sobreyectiva, entonces tenemos que existe  $a_1 \in A$  tal que  $\eta_r(a_1) = h_r(b)$ . Similarmente,  $h_s(b) \in A[s^{-1}]$  ( $h_s(b) = \frac{a''}{s^m}$  para algún  $a''$  y  $s^m$ ), luego como  $\eta_s$  es sobreyectiva, entonces tenemos que existe  $a_2 \in A$  tal que  $\eta_s(a_2) = h_s(b)$ . Definamos  $f : B \rightarrow A$  como  $f(b) = a_1 r + a_2 s$  para cada  $b \in B$ . Tenemos,

$$\eta_r(f(b)) = \frac{a_1 r + a_2 s}{1}$$

y por otro lado, tenemos que  $h_r(b) = \frac{a'}{r^n}$ . Como  $r$  es booleano se tiene que  $r^n = r$ . De donde, se tiene que  $\eta_r(f(b)) = h_r(b)$ . Similarmente,  $\eta_s(f(b)) = h_s(b)$ . Para la segunda parte de la proposición, como  $(0, 1)$  es booleano en  $R \times S$ , basta ver que para aillos  $B$  y  $C$ , la proyección  $B \times C \rightarrow B$  tiene la propiedad universal de

$$B \times C \rightarrow (B \times C)[(0, 1)^{-1}]$$

■

El resultado anterior nos dice que las descomposiciones directas de un aillo estan en biyección con sus elementos booleanos. Con esto estamos en condiciones de demostrar que **Rig**<sup>op</sup> es extensiva, o equivalentemente, que **Rig** es coextensiva.

**Teorema 2.0.1.** *La categoría  $\mathbf{Rig}^{op}$  es extensiva.*

*Demostración.* Esto lo haremos probando que  $\mathbf{Rig}$  es coextensiva. Veamos primero que los coproductos son codisjuntos (lo dual a disjuntos). Ya vimos que las proyecciones son sobreyectivas, entonces son epimorfismo. Ahora, tenemos que si  $0$  es el aillo trivial. Tenemos que

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\pi_A} & A \\ \downarrow \pi_B & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.5)$$

conmuta. Además si

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\pi_A} & A \\ \downarrow \pi_B & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{\beta} & Q \end{array} \quad (2.6)$$

conmuta, tenemos que para  $b \in B$ ,

$$\beta(b) = \beta(\pi_B((0, b))) = \alpha(\pi_A((0, b))) = \alpha(0) = 0$$

. Similarmente se puede ver que  $\beta$  es constante. Así, si  $(0, 1) \in A \times B$ , entonces  $0 = \beta(1) = \beta(\pi_B((0, 1))) = \alpha(\pi_A((0, 1))) = \beta(1) = 1$ . Entonces  $1 = 0$  en  $Q$ . Así podemos definir  $\phi : 0 \rightarrow Q$ , como aquella que manda al único elemento en  $0$ , a  $1$  en  $Q$ . Entonces, se ve que el primer cuadrado es un pushout.

Ahora veamos, que los prodcutos son coestables. Sea

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \swarrow & \searrow \\ A[a^{-1}] & & A[b^{-1}] \end{array} \quad (2.7)$$

un producto en  $\mathbf{Rig}$ . Note que si  $a$  es booeano y  $f : A \rightarrow B$  es morfismo, entonces  $f(a)$  es booleano en  $B$ . En efecto, si  $b$  es el complemento de  $a$ , entonces

$$1 = f(1) = f(a + b) = f(a) + f(b) \quad \text{y} \quad 0 = f(0) = f(ab) = f(a)f(b)$$

. Por lo que,  $f(b)$  es el complemento de  $f(a)$ . Así,

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \swarrow & \searrow \\ B[f(a)^{-1}] & & B[f(b)^{-1}] \end{array} \quad (2.8)$$

es un producto. Además, los siguientes cuadrados conmutan

$$\begin{array}{ccccc} A[a^{-1}] & \xleftarrow{\eta_a} & A & \xrightarrow{\eta_b} & A[b^{-1}] \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \downarrow f_1 \\ B[f(a)^{-1}] & \xleftarrow{\eta_{f(a)}} & B & \xrightarrow{\eta_{f(b)}} & B[f(b)^{-1}] \end{array}$$

Pues, si  $x \in A$ , entonces tenemos

$$f_0(\eta_a(x)) = f_0\left(\frac{a}{1}\right) = \frac{f(a)}{f(1)} = \frac{f(a)}{1}$$

. Por otro lado,  $\eta_{f(a)}(f(x)) = \frac{f(x)}{1}$ . Así el cuadrado de la izquierda conmuta. De manera análoga, se prueba que el de la derecha también. Sean

$$\begin{array}{ccccc} A[a^{-1}] & \xleftarrow{\eta_a} & A & \xrightarrow{\eta_b} & A[b^{-1}] \\ \downarrow \alpha & & \downarrow f & & \downarrow f_1 \\ Q & \xleftarrow{\beta} & B & \longrightarrow & Q' \end{array}$$

Definamos,  $\phi : B[f(a)^{-1}] \rightarrow Q$ , como  $f\left(\frac{b}{f(a)^n}\right) = \beta(b)\alpha\left(\frac{1}{a^n}\right)$ . Ahora, tenemos si  $b \in B$ , entonces

$$\begin{aligned} \phi(\eta_{f(a)}(b)) &= \phi\left(\frac{b}{1}\right) \\ &= \beta(b)\alpha\left(\frac{1}{1}\right) \\ &= \beta(b)1 \\ &= \beta(b) \end{aligned}$$

Es decir,  $\phi \circ \eta_{f(a)} = \beta$ . Por otro lado, si  $\frac{x}{a^n} \in A[a^{-1}]$ , entonces

$$\begin{aligned} \phi\left(f'\left(\frac{x}{a^n}\right)\right) &= \phi\left(\frac{f(x)}{f(a^n)}\right) \\ &= \beta(f(a))\alpha\left(\frac{1}{a^n}\right) \\ &= \alpha(\eta_a(x))\alpha\left(\frac{1}{a^n}\right) \\ &= \alpha\left(\frac{x}{1}\right)\alpha\left(\frac{1}{a^n}\right) \\ &= \alpha\left(\frac{x}{a^n}\right) \end{aligned}$$

Así,  $\phi \circ f' = \alpha$ . Además,  $\phi$  es única con esta propiedad. Así, tenemos que el cuadrado de la izquierda es pushout. Similarmente se prueba que el cuadrado de la derecha es pushout ■

*Observación.* La categoría **Rig** es distributiva.

## 2.1. Subobjetos complementados y componentes conexas

En esta sección trabajaremos dentro del contexto de una categoría extensiva, a menos que se diga lo contrario.

**Definición 2.1.1.** Un monomorfismo  $u : U \rightarrow X$  en  $\mathcal{C}$  es **complementado** si existe  $v : V \rightarrow X$  en  $\mathcal{C}$  tal que el diagrama

$$U \xrightarrow{u} X \xleftarrow{v} V \quad (2.9)$$

es un coproducto.

Diremos que  $v$  es el **complemento** de  $u$ , y viceversa.

*Observación.* La extensividad implica que los monomorfismo complementados son estables bajo pullbacks: la estabilidad nos dice que si los siguientes cuadrados

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & Y \xleftarrow{b} B \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \downarrow f_1 \\ U & \xrightarrow{u} & X \xleftarrow{v} V \end{array} \quad (2.10)$$

son pullbacks, entonces

$$A \xrightarrow{a} Y \xleftarrow{b} B \quad (2.11)$$

es un coproducto. Además, como los cuadrados son pullbacks, y  $v$  y  $u$  son monomorfismo, entonces también lo son  $a$  y  $b$ . Es decir,  $a : A \rightarrow Y$  es un monomorfismo complementado, y su complemento es  $b : B \rightarrow Y$ .

**Ejemplo 2.1.1.** 1. Para  $X$  en una categoría extensiva,  $id_X : X \rightarrow X$  es complementado, y su complemento es  $0 \rightarrow X$ . Pues para cualquier otro digrama

$$X \xrightarrow{a} Y \xleftarrow{b} 0 \quad (2.12)$$

el morfismo  $a : X \rightarrow Y$  hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & & 0 \\ \swarrow id_X & & \swarrow ! \\ & X & \\ \searrow a & \vdots a & \searrow b \\ & B & \end{array} \quad (2.13)$$

2. En **Con**, todo monomorfismo es complementado: sea  $m : M \rightarrow X$  un monomorfismo en **Con**, entonces  $m$  es inyectiva, luego  $m(M) \cong M$ . Recordemos que el coproducto de dos conjuntos es la unión disjunta. tomando la inclusión  $c : X(M)$ , entonces tenemos que  $X = m(M) \cup (X/m(M))$  y además es disjunta esta unión. Así, tenemos que

$$M \xrightarrow{m} X \xleftarrow{c} X/m(M) \quad (2.14)$$

es un coproducto.

3. En **Top**, tenemos que los monomorfismos complementados "son los cerri-abiertos".
4. En **Rig<sup>op</sup>** un monomorfismo es complementado si y sólo si el correspondiente epimorfismo  $A \rightarrow B$  en **Rig** tiene la propiedad universal de  $A \rightarrow A[a^{-1}]$  para  $a \in A$  Booleano. Sea  $B \rightarrow A$  monomorfismo complementado, entonces existe  $g : C \rightarrow A$  tal que

$$B \xrightarrow{f} A \xleftarrow{g} C$$

es un coproducto. Además, por ser **Rig<sup>op</sup>** extensiva, tenemos que  $g$  es monomorfismo. Luego, tenemos que  $f^* : A \rightarrow B$  y  $g^* : A \rightarrow C$  epimorfismos. Además, tenemos que  $B \leftarrow A \rightarrow C$  es un producto. Además sabemos como son los productos en esta categoría, por lo tanto  $f^* \cong \eta_a$ . Ahora si  $f^* : A \rightarrow B$  es epimorfismo que tiene la propiedad universal de  $\eta_a : A \rightarrow A[a^{-1}]$ , entonces tenemos que  $f^* \cong \eta_a$ . Además sabemos que existe  $\eta_b$  tal que

$$A[a^{-1}] \xleftarrow{\eta_a} A \xrightarrow{\eta_b} A[b^{-1}]$$

, donde  $b$  es el complemento de  $a$ . Entonces  $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{\eta_b} A[b^{-1}]$ , es un producto en **Rig<sup>op</sup>**. Así,

$$B \xleftarrow{f^*} A \longrightarrow A[b^{-1}]$$

es un producto en **Rig**. Así  $f$  es complementado.

**Definición 2.1.2.** Un objeto es **conexo** si es codominio de exactamente dos monomorfismos complementados

**Ejemplo 2.1.2.** 1. En **Con** el único objeto conexo es 1, el terminal.

2. En **Top**, tiene el significado usual. Recordemos que un espacio  $X$  es conexo si y solo si un  $C.O \subset X$  es cerri-abierto, entonces  $C.O = X$  si y sólo si  $C.O$  es no vacío. Esto nos dice que en un espacio conexo los unicos cerriabiertos son el vacío y el total. Y como sabemos los monomorfismos complementados estan en correspondencia con los cerriabiertos del espacio. Así, un espacio conexo tiene solo dos monomorfismos complementados.

3. Un aillo  $A$  como objeto de  $\mathbf{Rig}^{op}$  es conexo si y sólo si  $0, 1 \in A$  son distintos y son los únicos elementos booleanos. Sean  $f : B \rightarrow A$  y  $g : C \rightarrow A$  sus únicos monomorfismo complementados.

*Observación.* Note que la extensividad implica que  $f$  es el complemento de  $g$  o que  $A$  es el inicial.

Entonces tenemos, que

$$B \xrightarrow{f} A \xleftarrow{g} C$$

es coproducto. Luego,  $A$  no es el inicial, y como el inicial es el aillo trivial, y  $1, 0 \in A$ , entonces  $1 \neq 0$ . Si hubiera otro  $a \in A$  booleano, podríamos descomponer a  $A$  en un producto en  $\mathbf{Rig}$ , pero esto nos determina un coproducto en la categoría opuesta, cuyas inclusiones serían monomorfismos; entonces nos determinaría otro monomorfismo complementado. Lo cual es una contradicción. Ahora, si  $0 \neq 1$ , y son los únicos booleanos. Considerando los epimorfismo  $\eta_1 : A \rightarrow A[1^{-1}]$  y  $\eta_0 : A \rightarrow A[0^{-1}]$ . Como  $0, 1 \in A$ , entonces  $\eta_1(0) = 0$  y  $\eta_0(1) = 1$ , luego, estos morfismos son distintos, y son los únicos dos epimorfismos tal que, determinan un producto como ya hemos visto antes, y esto a su vez un coproducto con los inclusiones monomorfismos, en la categoría opuesta, es decir, en  $\mathbf{Rig}^{op}$ . Por lo que  $f$  y  $g$  son los únicos monomorfismos complementados. Es decir,  $A$  es conexo.

4. El inicial no es conexo, pues sólo tiene un único subobjeto.

Recordemos que en una categoría, si  $f : A \rightarrow B$  y  $B'$  es un subobjeto de  $B$ , entonces la **imagen inversa** de  $B'$  bajo  $f$  es el pullback (si existe)

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & B' \\ \downarrow g & & \downarrow u \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (2.15)$$

El objeto  $P$  se denota usualmente por  $f^{-1}U$  y  $g$  por  $f^{-1}u$ .

**Proposición 2.1.1.** Para todo todo  $f : C \rightarrow X$ , si  $C$  es conexo y  $u : U \rightarrow X$  es complementado entonces  $f^{-1}U = 0$  o se factoriza a través de  $u$ .

*Demostración.* Por definición de imagen inversa tenemos el siguiente pullback

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}U & \longrightarrow & U \\ \downarrow f^{-1}u & & \downarrow u \\ C & \xrightarrow{f} & X \end{array} \quad (2.16)$$

Como  $u$  es monomorfismo complementado, entonces existe  $v : V \rightarrow X$  tal que

$$U \xrightarrow{u} X \xleftarrow{v} V$$

es coproducto. Luego la estabilidad nos garantiza que en

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1}U & \xrightarrow{f^{-1}u} & C & \xleftarrow{f^{-1}} & f^{-1}V \\ \downarrow f| & & \downarrow f & & \downarrow f| \\ U & \xrightarrow{u} & X & \xleftarrow{v} & V \end{array} \quad (2.17)$$

el diagrama

$$f^{-1}U \xrightarrow{f^{-1}u} C \xleftarrow{v} f^{-1}V$$

es un coproducto. Y la conexidad de  $C$ , implica que  $f^{-1}U = 0$  o  $f^{-1}U \cong C$ . Pues vimos que para cualquier  $X$ ,

$$X \longrightarrow X \xleftarrow{v} 0$$

es un coproducto. ■

**Definición 2.1.3.** Sea  $\mathcal{C}$  extensiva y con productos finitos. Un objeto  $X \in \mathcal{C}$  es **decidible** si la diagonal

$$\Delta = [id, id] : X \rightarrow X \times X$$

es complementada.

Recordemos que en una categoría arbitraria con objeto terminal un **punto** de un objeto  $C$ , es un morfismo en la categoría, de la forma  $1 \rightarrow C$

**Ejemplo 2.1.3.** 1. En **Con**, como todo monomorfismo es complementado, entonces todos los objetos son decidibles.

2. En **Top** los espacios discretos son decidibles. En un espacio discreto todo subconjunto es *cerriabierto*. Ahora, como ya vimos, en **Top**, cada *cerriabierto*, determina un monomorfismo complementado. Entonces, para cada espacio topológico discreto, su diagonal es complementada; entonces es decidible. Ahora, sea  $X \in \mathbf{Top}$  es decidible. Sea  $x : 1 \rightarrow X$  un punto de  $X$ . El siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{x} & X & & \\ \downarrow x & & \downarrow \Delta & & \\ X & \xrightarrow{\cong} & X \times 1 & \xrightarrow{id_X \times x} & X \times X \end{array} \quad (2.18)$$

Además es un pullback. Entonces, como la diagonal es complementada, entonces  $x$  también lo es. Pero en **Top** los complementados son los *cerriabierto*, entonces cada punto, es *cerri – abierto*. Por lo que  $X$  es discreto.

3. 0 y 1 son decidibles



## Capítulo 3

# Cohesión Axiomática

En [2] Bill Lawvere, revisita el trabajo de Cantor. Nos habla de dos categorías, que llevan el nombre de dos conceptos propuestos por Cantor. Nos habla de la categoría  $\mathbf{M}$  de *Mengen* (traducida como *conjuntos*). Aunque *Mengen* se traduce como *conjunto*, no sólo se trata de un conjunto de puntos, sino que también es variable y cohesivo. Esto se diferencia del concepto de *conjunto abstracto*, que Lawvere nos invita a pensar como una *bolsa llena de puntos*, concepto que por cierto, coincide con el *lauter Einsen* de Cantor (que se traduce como *nada más que unidades*). Como ejemplo de una categoría de tal tipo, en ese trabajo se nos dice que pensemos en alguna de las muchas categorías de espacios topológicos. Por otro lado, nos habla de la categoría  $\mathbf{K}$  de *Kardinalen*, pensada contrapuesta a  $\mathbf{M}$ , en el sentido de que es no cohesiva y estática. Para ilustrar este proceso de pasar de  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{K}$ , Lawvere nos presenta el siguiente ejemplo

*A contemporary illustration of this process is provided by a color television picture with its subtle contrast of color and detail furnished by advanced technology. We can turn down the color knob and turn up the contrast knob until nothing remains but stark white dots on a black background with even, we may imagine, the outlines of figures suppressed. The picture with all its beautiful colors is a 'Menge': but in order to study effectively a certain superficial (but necessary) aspect of the picture we may be compelled to consider the 'bag' of dots or points obtained in the way we have just described. In carrying out this process of abstraction one forgets temporarily all beautiful particular features, in order to concentrate just on the points, now deprived of qualities, yet still equinumerous with those of the colored picture. The result still seems also to be a Menge, but a Menge of a degenerate sort.*

Además apunta, que si tenemos un Menge podemos asociarle un cardinal, tomado solo el conjunto de puntos. Formaliza este proceso, mediante los siguientes funtores

adjuntos:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{M} & \\
 \text{discreto} \curvearrowright & \downarrow \text{puntos} & \\
 & \mathbf{K} & 
 \end{array} \tag{3.1}$$

Esta adjunción lo que nos quiere decir, es que, si  $M$  es un Menge y  $K$  es un cardinal, entonces el morfismo  $K \rightarrow \text{puntos}(M)$  (que es una función de conjuntos abstractos, es decir, sin condición de cohesión), es equivalente a un morfismo  $\text{discreto}(K) \rightarrow M$ , que es un morfismo cohesivo, es decir, una función que preserve la estructura cohesiva. Además, Lawvere nota, que  $\text{puntos}$  tiene un adjunto derecho, llamado *codiscreto* o *caótico*:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{M} & \\
 \text{discreto} \curvearrowright & \downarrow \text{puntos} & \curvearrowleft \text{caótico} \\
 & \mathbf{K} & 
 \end{array}$$

También, en [2], se nos hace notar que los Menges caótico y discreto determinados por un cardinal  $K$ , son distintos a menudo. Este proceso que describe Lawvere, es de cierta manera, estudiar *cohesión* comparandola con *no cohesión*. Y además, esta comparación es a través de una cadena de funtores adjuntos. En [6] se nos presenta este contraste de manera axiomática, a través de una cadena de funtores de adjuntos, y la idea de categoría de espacios, que una de las interpretaciones de un Topos ( en contrastes a otra interpretación de los Topos como espacios generalizados que es más usada ) [7]. La definición de cohesión original en [6] es la siguiente.

**Definición 3.0.1.** Sean  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{S}$  dos categorías cartesianas caerradas y extensivas. Diremos que  $\mathcal{E}$  es **cohesiva** relativa a  $\mathcal{S}$  si hay una cadena de cuatro funtores adjuntos

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{E} & \\
 p_! \curvearrowright & \left( \begin{array}{c} \uparrow p^* \\ \downarrow p_* \end{array} \right) & \curvearrowleft p_! \\
 & \mathcal{S} & 
 \end{array}$$

que satisfacen los siguientes axiomas:

1.  $p^*$  (o equivalentemente  $p_!$ ) es fiel y pleno.
2.  $p_!$  preserva productos finitos.
3. (Nullstellensatz) La transformación natural canónica  $\theta : p_* \rightarrow p_!$  es puntualmente un epimorfismo.

4. (Axioma de continuidad) Para cualesquiera  $E \in \mathcal{E}$  y  $S \in \mathcal{S}$  el morfismo canónico  $p_!(E^{p^*(S)}) \rightarrow p_!E^S$  es un isomorfismo.

Si se cumple 1,2 y 3, diremos que hay un **morfismo precohesivo**  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ . Y si, además, se cumple 4, diremos que hay un **morfismo cohesivo**. Para entender el significado intuitivo de esta adjunciones, atendamos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.0.1.** Como ya vimos **Top** y **Con** son categorías extensivas. Sin embargo, **Top**, a diferencia de **Con**, no es cartesiana cerrada. Así, no podremos dar un ejemplo como tal de un morfismo precohesivo  $p : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Con}$ . Sin embargo, se pueden definir funtores como los de la definición anterior, de manera que esto servirá para tener una idea intuitiva del significado en general de un morfismo precohesivo. Tomemos el functor que olvida  $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Con}$ , este functor podemos pensarlo, como el functor  $p_*$  (o "puntos"), lo que hace es tomar un espacio topológico y mandarlo a su conjunto subyacente. Esto significa que olvida la topología del espacio, lo que se puede interpretar como que olvida la cohesión entre los puntos del espacio, dejando solo el conjunto de puntos. Se define un functor  $D : \mathbf{Con} \rightarrow \mathbf{Top}$ , como que a cada conjunto, lo dota de la topología discreta. Y a cada función,  $f : X \rightarrow Y$ , le asigna la función  $Df : D(X) \rightarrow D(Y)$ , la cual es continua porque los espacios son discretos. Este functor lo podemos pensar como el functor  $p^*$  (o discreto). Como sabemos  $D \dashv U$ , es decir,

$$\frac{D(X) \longrightarrow Y}{X \longrightarrow U(Y)} \quad (3.2)$$

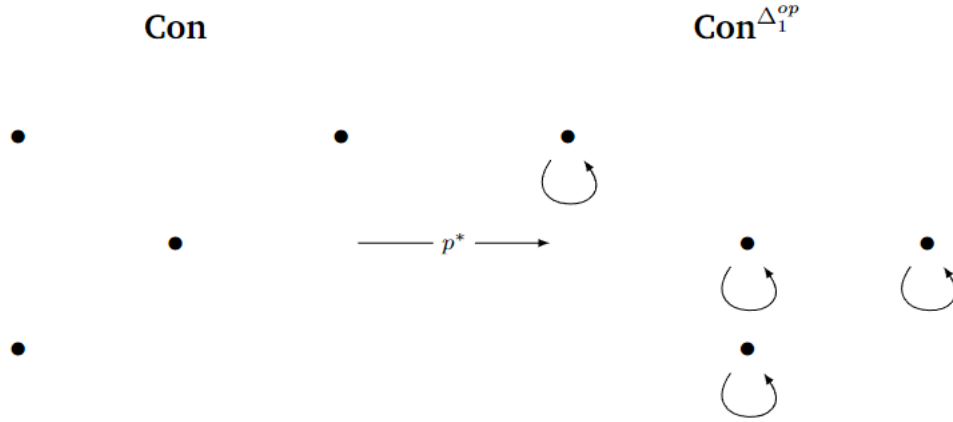
Aquí la barra horizontal abrevia el hecho de que hay una biyección natural garantizada por la adjunción. El functor  $U$ , también tiene adjunto derecho, este es el functor  $I : \mathbf{Con} \rightarrow \mathbf{Top}$ , que dota a cada conjunto  $X$ , con la topología indiscreta, dando un espacio indiscreto  $(X, \tau_{indiscreta})$ . Y a cada función  $f : X \rightarrow Y$  le asigna la función  $I(f) : I(X) \rightarrow I(Y)$ , la cual es continua pues  $I(Y)$  es indiscreto.

$$\frac{U(X) \longrightarrow Y}{X \longrightarrow I(Y)} \quad (3.3)$$

Este functor  $I$  podemos pensarlo o imaginarlo como functor  $p^!$  (o indiscreto o caótico). Este functor, toma el conjunto y le asigna el espacio con los mismos puntos que el conjunto, y los dota con a lo más dos abiertos, el total y el vacío. Es decir, los pega de manera caótica". Note que no podemos, formar el análogo al functor  $p_!$ , en este caso, pues como  $D$  no preserva productos infinitos (pues el producto infinito de espacios discretos no es discreto), entonces no preserva límites, y por lo tanto no puede tener adjunto izquierdo.

Para poder tener un intuición de lo que significan el functor  $p_! : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$  y la transformación natural canónica  $\theta : p_* \rightarrow p_!$ , y además en que sentido es canónica; atendamos el siguiente ejemplo, que nos menciona Lawvere en [??]:

**Ejemplo 3.0.2.** Como ya vimos en el capítulo 1, la categoría de gráficas reflexivas,  $\mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}}$  es extensiva. Además por ser una categoría de pregavillas, es un Topos elemental. Luego es cartesiana cerrada. Así nos preguntamos si existirá un morfismo precohesivo  $p : \mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}} \rightarrow \mathbf{Con}$ . El funtor  $p_! : \mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}} \rightarrow \mathbf{Con}$ , manda a cada gráfica reflexiva a su conjunto de componentes conexas ( o pedazos) Un morfismo de gráficas reflexivas, manda componentes conexas en componentes conexas, esto nos determina una función entre conjuntos de componentes conexas. Es, decir este funtor toma pedazos (conexos) de la gráfica reflexiva y lo mete como elemento de un conjunto. Por otro lado, el funtor  $p^* : \mathbf{Con} \rightarrow \mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}}$ , toma un conjunto y lo manda la gráfica con vértices o nodos, los puntos del conjunto, y dota a cada uno una arista distinguida (pues estamos en gráficas reflexivas). Es decir, le asocia su gráfica discreta.



Además, se tiene que (como señalan en [18] las funciones del conjunto de componentes conexas de una gráfica, hacia otro conjunto, entan en biyección con los morfismo que van de la gráfica hacia la gráfica discreta: si  $S \in \mathbf{Con}$  y  $G$  una gráfica reflexiva

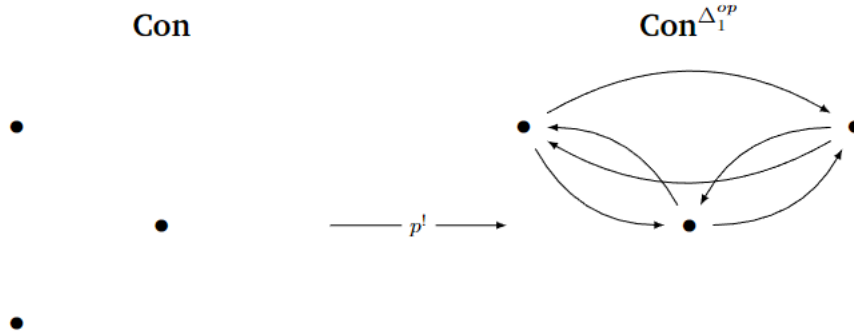
$$\frac{p_!(G) \longrightarrow S}{G \longrightarrow p^*(S)} \tag{3.4}$$

Por otro lado, el funtor  $p_* : \mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}} \rightarrow \mathbf{Con}$ , asigna a cada gráfica reflexiva, un conjunto que tine como elementos los vértices de la gráfica, es decir, le asocia sus conjunto de puntos. Tenemos de igual manera

$$\frac{p^*(S) \longrightarrow G}{S \longrightarrow p_*(G)} \tag{3.5}$$

Por último, tenemos el funtor  $p^! : \mathbf{Con} \rightarrow \mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}}$ , el cual toma un conjunto  $S$  y le asocia la gráfica  $G$  con vértices los puntos del conjunto, y si tenemos dos nodos,

entonces hay una arista del uno en el otro, es decir, si  $x, y$  son nodos en  $G$ , entonces  $x \rightarrow y$  es una arista en  $G$ , pero de igual modo lo es  $y \rightarrow x$ :



*Observación.* La construcción de  $\theta : p_* \rightarrow p_!$ , general, se hace en [4]. Ahí Jonhstone, demuestra que el hecho de que  $p^*$  sea fiel y pleno, implica que la counidad de  $p_! \dashv p^*$  ( $\tau$ ), la unidad de  $p^* \dashv p_*$  ( $\alpha$ ) y su counidad ( $\beta$ ), son isomorfismos, y con ello define de manera canónica la transformación  $\theta : p_* \rightarrow p_!$ , como alguna composición en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 p_* & \xrightarrow{p_*\sigma} & p_*p^*p_! \\
 \tau^{-1}p_* \downarrow & & \downarrow \alpha^{-1}p_! \\
 p_!p^*p_* & \xrightarrow{p_!\beta} & p_!
 \end{array}$$

Es decir,  $p_!\beta\tau^{-1}p_* = \theta = \alpha^{-1}p_!p_*\sigma$

En este caso, de gráficas reflexivas, que  $\theta : p_* \rightarrow p_!$  sea epimorfismo puntualmente, si  $G \in \mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}}$ , entonces, el morfismo

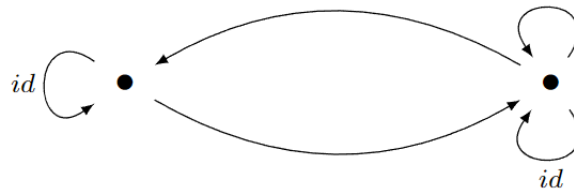
$$\theta_G : p_*(G) \rightarrow p_!(G)$$

nos dice que cada componente conexa de la gráfica, tiene al menos un punto.

En [9] y [17], presentan la definición de Cohesión en dos partes, teniendo por separado el axioma de continuidad. Y es que se pueden tener más ejemplos de precohesión que de Cohesión. De hecho, el único ejemplo de Cohesión real despues del presentado por Menni en [9], es el de Turcio presentado en [16]. Más adelante describiremos brevemente estos ejemplos. Es natural preguntarse si esta propiedad de cohesión es única o si existen diferentes tipos. Laewvere en [6] define direntes tipos de Cohesión:

**Definición 3.0.2.** Un morfismo precohesivo es un **tipo de cualidad** si  $\theta : p_* \rightarrow p_!$  es un isomorfismo.

Ahora sabemos qué gráficas reflexivas es un Topos, y además hay un morfismo precohesivo de ésta en conjuntos. Lawvere en [6] expone una relación entre el morfismo precohesivo  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$  y el clasificador de subobjetos  $\Omega$  de  $\mathcal{E}$ . Antes de dar esta relación, analicemos el caso en  $\mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}}$ . La gráfica reflexiva es el clasificador de



subobjetos  $\Omega$  en  $\mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}}$ . Note que  $\Omega$ , es conexo en el sentido usual, pues cada par de puntos tienen un camino que los une. Por otro lado,  $\Omega$  es su única componente conexa. Entonces  $p_!(\Omega) = 1$ , pues el conjunto de componentes conexas es  $\{\Omega\}$ . Entonces es conexo en el sentido de la siguiente definición.

- Definición 3.0.3.**
1. Diremos que un objeto  $E \in \mathcal{E}$  es conexo si  $p_!(E) = 1$
  2. Un morfismo precohesivo  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ , es **suficientemente cohesivo** si para cada  $X \in \mathcal{E}$  existe un monomorfismo  $X \rightarrow Y$ , con  $Y$  tal que  $Y^A$  es conexo, para toda  $A \in \mathcal{E}$ .

Esta definición nos da otra forma de cohesión, a partir de la conexidad de sus objetos. Para comparar los distintos tipos de cohesión y formas de cohesión, Lawvere dice lo siguiente [6]:

**Proposición 3.0.1.** Si  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$  es suficientemente cohesivo y tipo de cualidad, entonces  $\mathcal{S}$  es inconsistente.

*Demostración.* Como  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{S}$  tiene suficiente cohesión entonces existe un monomorfismo  $m : X \rightarrow Y$ , con  $Y^A$  conexo para cada  $A \in \mathcal{E}$ , en particular,  $Y$  es conexo (tome  $A = 1$ ). Luego,  $p_!(Y) = 1$ . Por lo que, el diagrama conmuta. Y como  $p$  es un tipo de cualidad, entonces  $\theta$  es un isomorfismo. De modo que  $p_!m$  también es monomorfismo. Así,  $p_*(X)$  es un subobjeto de  $1$ . Ahora como mencionamos antes,  $p$

$$\begin{array}{ccc}
 p_*(X) & \xrightarrow{p_*m} & p_*(Y) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 p!(X) & \xrightarrow{p!m} & 1
 \end{array}$$

precohesivo implica que la unidad  $\alpha : id_{\mathcal{S}} \rightarrow p_*p^*$  es un isomorfismo. Así, tomando  $X = p^*(S)$ , con  $S \in \mathcal{S}$ , tenemos que  $S \cong p_*p^*(S)$  es un subobjeto de 1. Lo que hace trivial a  $\mathcal{S}$ . ■

Esto nos dice que suficiente cohesión es incompatible con tipo de cualidad.

Como decíamos anteriormente, encontrar modelos de precohesión es más sencillo en comparación con hallarlos tales que además cumplan axioma de continuidad. En la categoría **Rig** (que sabemos ya, es extensiva), un aillo es integral si  $1 + 1 = 1$ . En [8], se nos presenta que la subcategoría plena de aillos integrales (o enteros) presentan una situación precohesiva sobre **Con**. Un ejemplo de topos cohesivo es el *Topos de Menni* [9]. Más recientemente se nos presenta otro modelo de cohesión en un artículo de L. Turcio, [16], en donde modela Cohesión retomando el presentado por Menni. El modelo cohesivo de Menni se construye tomando el submonoide del monoide de endofunciones continuas sobre el intervalo  $I = [0, 1]$ . Turcio presenta su modelo cohesivo tomando el submonoide más grande del monoide anterior, tal que le induce cohesión sobre **Con**. Además, ve que tomando submonoides del submonoide más grande, se obtiene otros modelos cohesivos.



# Conclusiones

En términos generales la tesis se centró en introducir el concepto de categoría extensiva y Cohesión Axiomática. Se presentaron los ejemplos que pueden resultar útiles para entender de manera intuitiva los conceptos de conexidad y complemento en categorías extensivas, así como el significado intuitivo de los funtores involucrados en la definición de Cohesión. Se presentaron resultados que no están condensados en la literatura sobre categorías extensivas, que de hecho hay muy poca, y se hicieron con detalle las demostraciones presentadas. Se estudió en caso de la categoría de aillos, que resulta importante no solo para Cohesión Axiomática, sino también para la Geometría Diferencial Sintética. Hay muchísimo trabajo por delante para encontrar modelos de Cohesión axiomática, los ejemplos de gráficas reflexivas, el topos de Menni y el Topos de Turcio son un paso en el desarrollo de esta teoría tan reciente. Aún queda trabajo por hacer como apunta Lawvere [6].



# Bibliografía

- [1] A. Carboni, S. Lack y R. Walters. «Introduction to Extensive and Distributive Categories». En: *Journal of Pure and Applied Algebra* 84 (1993), págs. 145-158.
- [2] F.W. Lawvere. «Cohesive Toposes and Cantor's lauter Einsen». En: *Philosophia Mathematica* 2.3 (1994), págs. 5-15.
- [3] P.T. Johnstone. «On Topological Topos». En: *Proceedings of the London Mathematical Society* s3-38.2 (1997), págs. 237-271.
- [4] P.T. Johnstone. «Remarks On Punctual Local Connectedness». En: *Theory and Applications of Categories* 25.3 (2011), págs. 51-63.
- [5] P.T. Johnstone. *Sketches of a Elephant: A Topos Theory Compendium*. 1.<sup>a</sup> ed. Vol. 1. Oxford University Press, 2002.
- [6] F.W. Lawvere. «Axiomatic Cohesion». En: *Theory and Applications of categories* 19.3 (2007), págs. 41-49.
- [7] F.W. Lawvere. «Some Thoughts on the Future of Category Theory». En: *Category Theory*. Ed. por G. Rosolini A. Carboni M.C. Pedicchio. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 1991, págs. 1-13.
- [8] M. Menni. «A Basis Theorem for 2-Rigs and Rig Geometry». En: *Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle Categoriques* 62.4 (2021), págs. 451-490.
- [9] M. Menni. «Continuous Cohesion Over Sets». En: *Theory and Applications of Categories* 29.20 (2014), págs. 542-568.
- [10] Centro de Matemática de La Plata. «XXVIII ERAG:Matias Menni Clase 1». Youtube.<https://www.youtube.com/watch?v=tvffha2hGJA&t=531s>. 2022.
- [11] Centro de Matemática de La Plata. «XXVIII ERAG:Matias Menni Clase 2». Youtube.<https://www.youtube.com/watch?v=SQDzAA1RbKw>. 2022.
- [12] Centro de Matemática de La Plata. «XXVIII ERAG:Matias Menni Clase 3». Youtube.<https://www.youtube.com/watch?v=8Vs4H8F6z0E>. 2022.
- [13] J.A. Orozco. «Caracterización de Grothendieck de la categoría de acciones continuas de un grupo profinito». Tesis de Doctorado. Universidad Nacional Autónoma de México, 2022.
- [14] O. Pérez. «Topos de Grothendieck y algunas relaciones con la mecánica cuántica». Tesis de Licenciatura. Benémerita Universidad Atonónoma de Puebla, 2021.

- 
- [15] G. Salicrup. *Introducción a la topología*. 1.<sup>a</sup> ed. Textos. Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, 1997.
- [16] L. Turcio. «Cohesive Toposes of sheaves of monoid of continuous endofunctions of the unit interval». En: *Theory and Applications of Categories* 35.8 (2020), págs. 1087-1100.
- [17] L. Turcio. «Gavillas sobre endomorfismos del intervalo unitario». Tesis de Doctorado. Universidad Nacional Autónoma de México, 2022.
- [18] efrain vega. «Cohesión Axiomática (Francisco Marmolejo)». Youtube.<https://www.youtube.com/watch?v=Jtoktwv-V7g&t=1716s>. 2018.