

**Benemérita Universidad Autónoma de Puebla**

Instituto de Física Ing. Luis Rivera Terrazas



**Dinámica de penetración en materia granular en el límite de baja densidad: efecto del empaquetamiento del medio y del tamaño del intruso.**

Tesis presentada por:

**Lic. Lady Andrea López Rodríguez**

para obtener el grado de:

**Maestría en Ciencias (Física)**

Asesor: Dr. Felipe Pacheco Vázquez

Puebla, Pue. México

Agosto de 2017



*Dedicado a:  
Mis padres, hermanos y abuela.  
Con todo mi amor.  
A mis amigos y amigas por su apoyo incondicional.*



## Resumen

Un proyectil que penetra en un lecho granular experimenta una fuerza de fricción  $F(z)$  dependiente de la profundidad. Se han medido diferentes regímenes de  $F(z)$  dependiendo de las características del experimento: una dependencia casi lineal para penetraciones poco profundas, saturación total a grandes profundidades y un aumento exponencial cuando el proyectil se aproxima al fondo de la columna granular. Presentamos aquí un experimento que nos permite medir los diferentes regímenes en un solo recorrido durante el descenso cuasiestático de un intruso en un medio granular ligero. Se encontró que  $F(z)$  sigue una ley de potencia al cubo con el diámetro del intruso,  $d_b$ , y un incremento exponencial con el factor de empaquetamiento del medio granular,  $\phi$ . Del análisis de la fuerza de resistencia en la zona de saturación se determina la masa crítica  $m_c$  requerida para observar la penetración infinita y su dependencia con  $d_b$  y  $\phi$ . Finalmente, utilizamos nuestros resultados para estimar la profundidad de penetración final alcanzada por intrusos de masas  $m < m_c$ . Los resultados indican que un intruso de cualquier densidad (mayor que la densidad del medio granular) puede hundirse indefinidamente en el medio granular si el factor de empaquetamiento del medio es menor que un valor crítico.

---

## Abstract

A projectile penetrating into a granular bed experiences a depth dependent friction force  $F(z)$ . Different regimes of  $F(z)$  have been measured depending on the experiment features: a nearly linear dependence for shallow penetrations, total saturation at large depths, and an exponential increase when the projectile approaches the bottom of the granular column. We report here an experiment that allows us to measure the different regimes in a single run during the quasi-static descent of an intruder in a light granular medium. It was found that  $F(z)$  follows a cube-power law dependence with the intruder diameter,  $d_b$ , and an exponential increase with the packing fraction of the bed,  $\phi$ . From the analysis of the resistance in the saturation zone, we determine the critical mass  $m_c$  required to observe infinite penetration and its dependence with  $d_b$  and  $\phi$ . Finally, we use our results to estimate the final penetration depth reached by intruders of masses  $m < m_c$ . The results indicate that an intruder of any density (larger than the density of the granular bed) can sink indefinitely into the granular medium if the bed packing fraction is smaller than a critical value.

---

## **Agradecimientos**

**“Se agradece a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado por el apoyo otorgado para la conclusión de esta tesis dentro del Programa II. Investigación y Posgrado. Aseguramiento de la calidad en el Posgrado. Indicador establecido en el Plan de Desarrollo Institucional 2013-2017.”**

---



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Materia Granular</b>	<b>3</b>
1.1. Conceptos fundamentales en materia granular . . . . .	4
1.1.1. Cadenas de esfuerzos . . . . .	4
1.1.2. Factor de empaquetamiento . . . . .	5
1.1.3. Dilatancia . . . . .	5
1.1.4. Efecto Janssen . . . . .	6
1.1.5. Fluidización . . . . .	9
<b>2. Antecedentes</b>	<b>11</b>
2.1. Trabajos previos acerca del estudio de la dinámica de impacto en materia granular .	11
2.1.1. Ecuación de Poncelet . . . . .	11
2.1.2. Dinámica de penetración en arenas movedizas secas (quicksand) . . . . .	12
2.1.3. Efecto del fondo del contenedor en la fuerza de penetración en impacto de un proyectil en un medio granular . . . . .	13
2.1.4. Ley unificada de fuerza de penetración en medios granulares . . . . .	14
2.1.5. Impacto granular y estado de empaquetamiento crítico . . . . .	15
2.1.6. Penetración en medios granulares en el límite de bajas densidades . . . . .	18
2.1.7. Fuerza de fricción vertical experimentada por intrusos de diferentes formas y tamaños. . . . .	23
<b>3. Dinámica de penetración granular para diferentes factores de empaquetamiento</b>	<b>29</b>
3.1. Diseño experimental . . . . .	29
3.1.1. Descripción de la determinación del rango del factor de empaquetamiento $\phi$	32
3.1.2. Descripción de la calibración del motor . . . . .	32

3.2. Resultados experimentales y análisis . . . . .	33
3.2.1. Diferentes regímenes de $F(z)$ . . . . .	33
3.2.2. Penetración de intrusos de diferentes tamaños . . . . .	38
3.2.3. Efecto del empaquetamiento del medio . . . . .	41
<b>4. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Apéndices</b>	<b>48</b>
<b>A. Documentos adjuntos</b>	<b>51</b>

# Lista de Figuras

1.1. Distribución de estrés observado en un medio granular bidimensional bajo una tensión aplicada. . . . .	4
1.2. Fenómeno de dilatación. . . . .	6
1.3. Modelo Janssen de presión granular. . . . .	7
1.4. Gráfica de presiones en sistemas hidrostáticos y granulares (efecto Janssen). . . . .	9
1.5. Esquema: velocidad superficial de un fluido en un medio granular . . . . .	10
2.1. Esfera impactando en arena movediza seca (Quicksand) . . . . .	12
2.2. Fuerza de penetración efecto del fondo del contenedor. . . . .	13
2.3. Escalamiento del efecto del fondo de una columna granular sobre la fuerza de penetración. . . . .	14
2.4. Gráfica que refleja la dependencia cuadrática con la velocidad del término inercial de la ley de fuerza unificada. . . . .	15
2.5. Gráfica que refleja la dependencia lineal de la fuerza de fricción con la profundidad. . . . .	16
2.6. Gráfica de isofuerzas, efecto del factor de empaquetamiento. . . . .	17
2.7. Gráfica que refuta la dependencia del término inercial de la ley de fuerza unificada. . . . .	18
2.8. Gráfica de la velocidad en función de la profundidad de un intruso penetrando en un medio en el límite de bajas densidades . . . . .	19
2.9. Demostración de la existencia de una masa crítica. . . . .	20
2.10. Simulaciones de dinámica molecular en un silo 2D . . . . .	21
2.11. Gráficas de $z_{\text{reposo}}$ y $t_{\text{reposo}}$ como función de gravedades reducidas ( $g_{\text{eff}}$ ). . . . .	22
2.12. Gráfica de la fuerza de fricción en función de la profundidad, para diferentes geometrías de intrusos. . . . .	25
2.13. Gráfica de la fuerza de fricción en función de la profundidad, para diferentes geometrías de intrusos penetrando en un medio fluidizado . . . . .	26
3.1. Arreglo experimental implementado en esta tesis. . . . .	31
3.2. Calibración del motor . . . . .	33
3.3. Gráfica fuerza en función de la profundidad para un intruso de 100 g de masa. . . . .	33
3.4. Gráfica fuerza en función de la profundidad para un intruso de 200 g de masa. . . . .	34
3.5. Gráfica fuerza en función de la profundidad para un intruso de 357 g de masa. . . . .	35

3.6.	Gráfica fuerza en función de la profundidad para un intruso de 445.3 g de masa. . .	36
3.7.	Gráfica de los regímenes de fuerza de fricción en un medio granular . . . . .	36
3.8.	$F(z)$ vs $z$ durante la penetración de un intruso esférico de $d_b = 5.4$ cm en una columna granular superligera . . . . .	37
3.9.	$F(z)$ vs $z$ durante la penetración de un intruso esférico de $d_b = 5.4$ cm en una columna granular superligera . . . . .	38
3.10.	Gráfica de Fuerza de saturación vs diámetro del intruso . . . . .	39
3.11.	Comparación de los valores de la masa crítica obtenidos por dos métodos diferentes.	40
3.12.	Gráfica de la profundidad final vs masa de intrusos de diferentes diámetros. . . . .	41
3.13.	$F(z)$ vs $z$ durante la penetración de un intruso esférico de $d_b = 4.8$ cm en una columna granular superligera a diferentes valores de empaquetamiento. . . . .	42
3.14.	Gráficas de fuerza de saturación y la masa crítica en función de $\phi$ . . . . .	43
3.15.	Gráfica de penetración infinita en función del empaquetamiento . . . . .	44

---

## Introducción

Desde el siglo XIX, la dinámica de penetración de los proyectiles en arena y arcilla fue un tema importante en balística [1]. Los experimentos iniciales se centraron en la fuerza de resistencia en penetraciones horizontales a bajas velocidades ( $v < 100$  m/s) [2–5]. Poncelet [3] planteó una fuerza de resistencia total dada por la suma de dos términos: un término de fricción constante más un término viscoso, similar al de los fluidos, proporcional al cuadrado de la velocidad. A principios del presente siglo, la comprensión de la formación de cráteres por impactos motivó estudios a escala de laboratorio sobre el impacto y la penetración vertical de proyectiles en camas granular [6–8, 14–16]. En este contexto, la dinámica de un proyectil de masa  $m$  que cae a través de un medio granular bajo la influencia de la gravedad  $g$  se aproxima bien mediante la expresión:

$$m\ddot{z} = mg - F(z) - \eta\dot{z}^2 \quad (1)$$

Donde  $F(z)$  es un término de fricción, a menudo tomado como lineal con la profundidad  $z$  [14, 16], y es una constante. Estudios más recientes proponen la adición de un término lineal con la velocidad debido a la fuerza de resistencia viscosa [17, 20], o una ecuación diferencial lineal basada en el análisis de profundidad de energía [24]. También se informó que el término de fricción escala como la raíz cuadrada de la densidad del medio granular y el proyectil, que es típicamente más grande que la combinación de presión hidrostática y la ley de fricción de Coulomb [26]. Sin embargo, en la ref. [23], se demostró que  $F(z)$  está determinada por la fuerza normal proporcional a la superficie del intruso. Esta fuerza se establece mediante un coeficiente de fricción, presión hidrostática y el tamaño y la forma del proyectil. La dependencia lineal de la profundidad sólo se recupera para los proyectiles esféricos cuando  $z$  es mayor que el diámetro de la bola [19, 23]. Por otra parte, el término de fricción  $F(z)$  se hace constante si un proyectil penetra muy profundamente en una columna granular hasta llegar a la zona donde la presión satura debido al efecto de Janssen [15, 18, 21]. Esto ocurre si la densidad del proyectil es mucho mayor que la densidad de los granos confinados [21], o, como se muestra en el presente trabajo, para las fracciones de empaquetamiento bajo. De acuerdo con todo lo anterior, el movimiento del proyectil está bien descrito por:

$$m\ddot{z} = mg - \kappa\lambda(1 - e^{-z/\lambda}) - \eta\dot{z}^2 \quad (2)$$

Donde  $\kappa$  es una constante, y  $\lambda$  es una longitud de saturación [21]. Finalmente, cuando el proyectil está llegando al fondo de la columna, la fuerza de resistencia aumenta exponencialmente como  $F(z) \propto e^{-z/\delta}$ , donde  $\delta$  es una escala de longitud característica para detectar el fondo del contenedor [15]. En conclusión, el término de fricción estática  $F(z)$  muestra diferentes regímenes: proporcional a la profundidad  $z$ , saturación a grandes profundidades y crecimiento exponencial a medida que el proyectil se aproxima a al fondo.

Si bien en las últimas décadas se han realizado numerosos experimentos a escala de laboratorio para estudiar sistemáticamente la dinámica de impacto en medios granulares y explicar la dependencia con parámetros como: la profundidad de penetración, la masa del proyectil, tamaño del grano, entre otros. En este trabajo en particular nos centramos en dos aspectos: a) medir la transición entre diferentes regímenes y describir la dinámica con una única ecuación para  $F(z)$ , y b) explorar el efecto del tamaño del proyectil y el factor de empaquetamiento (este último, raramente analizado) en la dinámica de penetración a grandes profundidades.

Apoyandonos en trabajos anteriores podríamos esperar, que en el caso de la dependencia de la fuerza de resistencia con el diámetro, ocurra uno de dos casos; el primero que siga una relación de proporcionalidad con  $d_b^2$  como se reportó en [23] o una dependencia  $d_b^3$  tipo fuerza boyance como se reportó en [19]. En cuanto al factor de empaquetamiento es riesgoso aventurarnos a predecir la forma de la dependencia, sin embargo, sabemos que este parámetro ha de jugar un papel decisivo en la dinámica de penetración, ya que se debe considerar que, en contraste con los fluidos, cualquier fuerza aplicada a un medio granular es transmitida de manera inhomogénea y anisotrópica a través de cadenas granulares de fuerzas. Otro aspecto que se debe tener en cuenta, es que, para que un objeto se mueva dentro de un medio granular, todos los granos que impiden su movimiento deben desplazarse de su trayectoria, requiriendo una reorganización del material en las inmediaciones por donde éste se mueve. Luego, sabemos que el factor de empaquetamiento está directamente relacionado con la inhomogeneidad de la propagación de la fuerza, debido a que de su valor depende la formación de cadenas de fuerza, al igual que favorece o dificulta la reorganización del grano al paso del intruso. Por consiguiente, es evidente que la dinámica de penetración en un medio granular guarda una fuerte dependencia con el factor de empaquetamiento. Para dar respuesta a estos interrogantes, se diseñó y construyó un montaje experimental que permitiera observar y analizar como intervienen dichos parámetros en la dinámica de un intruso esférico que penetra cuasi-estáticamente ( $1.1 \text{ cm/s}$ ) en un medio granular (poliestireno), dichas condiciones experimentales nos permiten descartar el término viscoso a diferencia de las refs. [21, 25].

El documento está estructurado de la siguiente forma: En el capítulo 1 se hace una breve revisión de características propias de la materia granular. Tales como: Factor de empaquetamiento, efecto Janssen, fluidización, etc. En el capítulo 2 se mostrará una breve revisión de los antecedentes históricos donde se evidencian los trabajos llevados a cabo y que han contribuido a la evolución de las ecuaciones que describen la penetración en medios granulares. En el capítulo 3 se presentará el dispositivo empleado, los resultados experimentales y la discusión de los mismos, así como sus posibles implicaciones. Finalmente, se presentarán las conclusiones a las que se llegó con esta investigación.

---

# 1

## Materia Granular

Consiste en un conjunto de partículas macroscópicas que interactúan entre sí mediante *fuerzas de contacto*. El tamaño de las partículas que constituyen estos materiales va desde algunas micras hasta el tamaño de objetos como los meteoritos. La consideración hecha para establecer el tamaño mínimo de las partículas en materia granular, es aquel tamaño donde las fluctuaciones térmicas no afectan la dinámica de las partículas, es decir, cuando  $E_p/k_B T \gg 1$ , lo que corresponde a un diámetro superior a  $10^{-6}$ m.

La característica más importante de estos sistemas es su comportamiento altamente disipativo, como resultado de una alta frecuencia de colisiones que se producen entre los elementos constituyentes del medio granular, especialmente para sistemas granulares densos. Veamos esto con un sencillo ejemplo ilustrativo, si se suelta una pelota de tenis desde cierta altura inicial  $h$  respecto al suelo, la pelota rebotará contra éste varias veces perdiendo energía cinética en cada rebote, hasta que se detiene. Ahora, si se depositan un gran número de pelotas de tenis iguales entre sí en una bolsa y se dejan caer desde la misma altura inicial  $h$ , el conjunto de pelotas en la bolsa rebotará una vez. La explicación a la gran diferencia en el número de rebotes en los dos casos, se debe por un lado a la fuerza de fricción entre las superficies y por otro al gran número de choques inelásticos entre las pelotas, haciendo que en un medio granular denso la energía se disipe rápidamente dejando como energía predominante a la energía potencial gravitatoria  $mgd$ , donde  $d$  corresponde a la altura igual al diámetro de la partícula.

## 1.1. Conceptos fundamentales en materia granular

### 1.1.1. Cadenas de esfuerzos

En materia granular sedimentada una partícula debe ser sostenida por las partículas con las cuales hace contacto, es decir, por las que se encuentran debajo y a los lados y éstas a su vez deben ser soportadas por las demás abajo y así sucesivamente hasta llegar al fondo o las paredes del contenedor. Lo mismo ocurre si aplicamos una fuerza externa sobre la superficie de un materia granular, ésta se distribuirá entre todas las partículas a través de los puntos de contacto. Por esta razón podemos permanecer de pie en la arena sin hundirnos, pues el peso se redistribuye en muchos granos de arena. Un experimento que permite ver este particular comportamiento de la materia granular fue el realizado por Dantu [9], donde se empleó como medio granular un conjunto de cilindros de vidrio ubicados en un recipiente transparente. Los cilindros se dispusieron dentro del recipiente perpendiculares al plano de la figura. Al comprimir la columna de cilindros con un pistón se observó una especie de mapa que describía la distribución de tensión en el material (Figura 1.1) y es a lo que se denomina cadenas de esfuerzos.

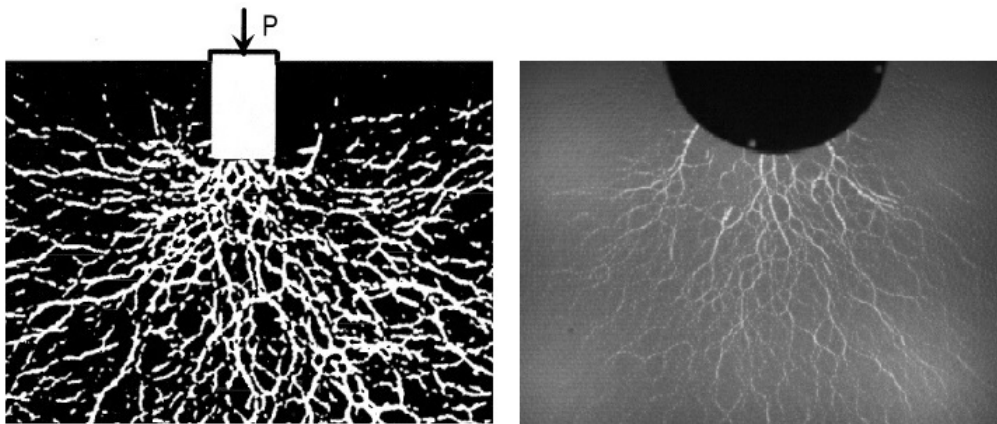


Figura 1.1: Imagen a la izquierda muestra la distribución de estrés observado en un medio granular bidimensional bajo una tensión aplicada y la imagen de la derecha muestra la configuración de las cadenas de fuerza, a partir del impacto de un disco sobre un medio de cilindros fotoelásticos. Imágen tomada de la referencia [10] y [11] respectivamente.

Otro trabajo que permitió visualizar las cadenas de esfuerzos, fue un trabajo realizado recientemente por Behringer *et. al.* [11], quienes estudiaron mediante video de alta velocidad la propagación de la onda de choque en un medio granular mediante la visualización de las cadenas de esfuerzos. Para ello, utilizaron discos fotoelásticos entre plexiglás estrechamente espaciadas. Cuando un esfuerzo actúa sobre un disco, este cambia su dirección de polarización iluminándose. El efecto colectivo permite visualizar las cadenas de esfuerzo. Véase figura 1.1.

### 1.1.2. Factor de empaquetamiento

El factor de empaquetamiento es una cantidad adimensional, generalmente representada por la letra  $\phi$ . Este parámetro permite saber que tan compactas se encuentran las partículas entre sí en un arreglo granular, entiéndase por arreglo granular, a una cantidad de granos depositados en un contenedor. Para conocer el valor de  $\phi$ , basta con realizar el cociente del volumen de granos y el volumen total ocupado o volumen aparente, este último hace referencia al volumen que ocupan los granos dentro del recipiente más el volumen de los huecos entre ellos, es decir:

$$\phi = \frac{\text{Volumen de los granos}}{\text{Volumen total ocupado}}. \quad (1.1)$$

El factor de empaquetamiento siempre toma valores en el rango  $0 < \phi < 1$ , para medios granulares poco densos como los gases granulares  $\phi$ , tomará valores mayores, mientras que para el caso de sistemas más densos  $\phi$  tomará valores cercanos a la unidad. Un ejemplo de estos últimos, son los factores de empaquetamiento medidos para materiales monodispersos (partículas de igual tamaño). Imaginemos que vertimos una cantidad de este tipo de material en un recipiente y los granos se agrupan bajo la acción de la gravedad, el factor de empaquetamiento que se alcanza está alrededor de 0.56 y es conocido como *Loose Packing*. Luego si se golpea (tapping) el recipiente que contiene dicho material, se obtendrá un empaquetamiento de 0.68 conocido como *Random Close Packing* y finalmente la máxima compactación la conseguiremos al acomodar de forma hexagonal a las partículas monodispersas, de aquí su nombre *Hexagonal Close Packing* y su valor es de 0.74.

El factor de empaquetamiento además de depender de la forma en que los granos son depositados, también depende de las propiedades de los granos como su forma y textura. Un ejemplo de esto, es el empaquetamiento aleatorio de elipsoides estudiado por Donev *et al.* [12], donde encontró que el valor de  $\phi$  en este estado es de aproximadamente 0.74, que es el mismo valor alcanzado con esferas monodispersas en una configuración HCP (*Hexagonal Close Packing*). Esto se debe a que un mayor factor de empaquetamiento está directamente relacionado con el número de contactos de las partículas. Por ejemplo, para los esferoides empleados (dulces m&m) el número de contactos por partícula es de  $Z \approx 10$  en comparación con  $Z \approx 6$  para esferas. Esta diferencia se atribuye al número de contactos resultante de los grados de libertad adicionales de rotación de los elipsoides. Por lo tanto se requerirán más contactos por partícula para eliminar todos los grados de libertad locales y colectivos y garantizar el atascamiento, visto desde otro punto de vista, para formar más contactos se necesitará un empaquetamiento más compacto de las partículas.

### 1.1.3. Dilatancia

En 1885, Reynolds llega a la conclusión que un medio granular cambia su factor de empaquetamiento cuando es sometido a una presión externa. Para llegar a esta conclusión realizó un experimento sencillo: llenó un recipiente de caucho con arena y agua de color a través de un orificio, luego introdujo un tubo de vidrio en el orificio y el agua alcanzó cierto nivel en el tubo, seguido

de esto procedió a presionar el recipiente, entonces el nivel del agua en el tubo descendió contrario a lo que se esperaría si el recipiente contuviese sólo líquido. La explicación dada por Reynolds a este fenómeno, es que al ser comprimido el recipiente los granos de arena cambian de posición como respuesta a la presión aplicada, lo que produce un cambio en el volumen poroso del material granular, el agua ocupa este nuevo volumen y como resultado el líquido en el tubo desciende. A este fenómeno lo denominé *Dilatancia de Reynolds*.



Figura 1.2: Efecto de dilatancia de Reynolds.

Un claro ejemplo de dicho fenómeno es lo que ocurre a medida que caminamos sobre arena mojada, la arena parece secarse alrededor de las huellas y no es otra cosa que la dilatancia, ya que la presión que ejerce el peso de la persona sobre la arena genera que ésta aumente su volumen poroso y el agua superficial sea absorbida, lo cual da el efecto transitorio que la arena se seca.

#### 1.1.4. Efecto Janssen

Al depositar un líquido en un contenedor resultará que la presión en el fondo de éste crece a medida que se aumenta la altura,  $h$ , de la columna de dicho líquido, esta presión es conocida como presión hidrostática y su magnitud se determina a partir de la siguiente expresión:

$$P = \rho gh. \quad (1.2)$$

Ahora, si en lugar de un líquido es depositado un material granular en el contenedor, nos podríamos preguntar si la presión en el fondo del contenedor se comporta igual a como lo hace con un líquido. Seguramente esta misma pregunta se la formuló el ingeniero alemán H. A. Janssen, ya que midió la presión de granos de maíz en silos. Uno de sus principales resultados publicado en un artículo en 1895, reportó que la presión del maíz en un silo crece con la profundidad, pero ésta dejará de incrementar a cierta altura de grano, es decir alcanza un valor de saturación. Conociendo esto Janssen elaboró un modelo equivalente a la fórmula barométrica para materia granular,

---

partiendo de la suposición que las paredes del contenedor soportan parte de la tensión. Para tener mayor claridad del trabajo realizado por Janssen, a continuación se presenta una deducción de la expresión para la presión ejercida por un medio granular, el cual es tratado como un medio continuo [13, pág 84-86].

Inicialmente considérese un elemento de volumen  $dv$  de materia granular que se encuentra en reposo dentro de un contenedor cilíndrico (ver imagen 1.3), por lo tanto la fuerza neta ejercida sobre el elemento de volumen  $dv$  por el medio ambiente debe ser nula. Ahora si recordamos que las fuerzas internas granulares se dispersan en todas las direcciones a través de las cadenas de esfuerzos (Figura 1.1). Debido a esta dispersión, una parte de la tensión vertical que se origina por la gravedad es soportada tanto por la pared lateral como por la pared inferior. Para considerar dicha distribución de la fuerza, Janssen empleó una simple relación entre la presión vertical  $P_v$  y la presión horizontal  $P_h$ .

$$P_h = \kappa P_v, \quad (1.3)$$

donde  $\kappa$  es un parámetro que varía de  $0 \leq \kappa \leq 1$

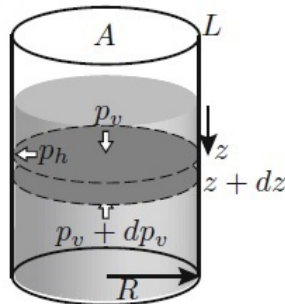


Figura 1.3: Esquema de la presión ejercida por una columna granular en un contenedor cilíndrico.

En este modelo las fuerzas que actúan sobre  $dv$  son:

- La fuerza (hacia arriba) que ejerce el medio granular que se encuentra debajo.
- La fuerza (hacia abajo) que ejerce el medio granular que descansa sobre el elemento de volumen.
- El peso del elemento de volumen.
- La fuerza (horizontal) ejercida por la pared del contenedor, esta fuerza es de carácter disipativo, debido a la fuerza de fricción presente entre el medio granular y la pared del silo, como resultado se tendrá que la pared soporta parte del peso del medio granular.

De acuerdo con lo anterior la ecuación de balance de fuerzas sobre el elemento de volumen de medio granular es:

$$(P_v + dP_v)A - P_vA - \rho gAdz + \mu P_h A = 0, \quad (1.4)$$

el último término de esta expresión corresponde a una fuerza de fricción de Coulomb y el área  $A$  del elemento de volumen corresponde al área lateral de un cilindro ( $2\pi R h$ ) que en nuestro caso resulta ser  $Ldz$ , con lo cual tenemos:

$$P_vA + dP_vA - P_vA - \rho gAdz + \mu P_h Ldz = 0 \quad (1.5)$$

$$AdP_v = (\rho gA - \mu P_h L)dz, \quad (1.6)$$

al escribir  $P_h$  en términos de  $P_v$  a partir de (1.3) la anterior expresión resulta ser:

$$AdP_v = dz(\rho gA - \mu \kappa P_v L). \quad (1.7)$$

Esta ecuación puede ser escrita de forma diferencial:

$$\frac{dP_v}{dz} + \frac{\mu \kappa L}{A} P_v = \rho g, \quad (1.8)$$

al multiplicar por un factor  $\exp(\mu \kappa L z / A)$ , esta ecuación diferencial se transforma en:

$$\frac{d}{dz} \left[ P_v \exp \left( \frac{\mu \kappa L}{A} z \right) \right] = \rho g \exp \left( \frac{\mu \kappa L}{A} z \right). \quad (1.9)$$

Al integrar desde  $z=0$  (superficie libre del medio granular) hasta una profundidad  $z$  y usando la condición de contorno  $p_v(z=0) = 0$ , resulta:

$$P_v = \frac{\rho g A}{\mu \kappa L} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\mu \kappa L}{A} z \right) \right]. \quad (1.10)$$

Si se consideran dos casos límites: Uno para el caso de columnas grandes de medio granular ( $z \gg A/\mu \kappa L$ ) el término de la exponencial será muy pequeño, de forma tal que en este límite la ecuación (1.10) nos dice que la presión satura y adquiere un valor constante:  $P_{sat} = \rho g A / \mu \kappa L$ , si consideramos que  $A = \pi R^2$  y  $L = 2\pi R$  se puede reescribir como:  $P_{sat} = \frac{\rho g R}{2\mu \kappa}$ . Esto indica al agregar más material granular sobre la columna no se verá reflejado en un incremento en la presión en el fondo del silo. Este es una de las principales diferencias del comportamiento entre un líquido y un medio granular. El segundo caso contempla columnas pequeñas de medio granular ( $z \ll A/\mu \kappa L$ ), escribimos el término exponencial que aparece de la ecuación (1.10) como un desarrollo en series de Taylor hasta primer orden, de forma tal que se obtiene que  $P_v = \rho g z$ . Es decir, solamente para columnas de medio granular pequeñas, el comportamiento será como en el caso de la presión ejercida por una columna de líquido. En la figura 1.4 se representa el comportamiento de la presión tanto en columnas de líquido como de material granular.

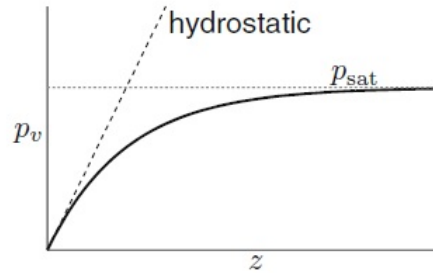


Figura 1.4: Gráfica cualitativa del comportamiento de la presión  $P_v(z)$  obtenido a partir de la relación  $P_h = \kappa P_v$ .

### 1.1.5. Fluidización

Proceso en el cual las partículas sólidas que conforman un medio granular se comportan como un fluido al suspenderse por la acción de flujo ascendente inyectado y que circula por los espacios entre las partículas, provocando una disminución de la presión entre ellas. Lo anterior corresponde a lo predicho por la ecuación de Ergun (1.11):

$$-\frac{\Delta P^+}{L} = 150 \frac{(1 - \epsilon_m)^2}{\epsilon_m^3} \frac{\mu u^+}{(\Phi_s d_p)^2} + 1.75 \frac{1 - \epsilon_m}{\epsilon_m^3} \frac{\rho (u^+)^2}{\Phi_s d_p}, \quad (1.11)$$

válida para cualquier valor de Re:

A continuación se enlista a que corresponde cada uno de los términos que aparecen en la ecuación (1.11):

- $\Delta P^+$  = pérdida de presión manométrica, debida al rozamiento, (N/m<sup>2</sup>)
- L = Altura del lecho granular
- $\epsilon_m$  = porosidad media del lecho o fracción volumétrica de huecos (equivalente a  $\epsilon$ )
- $\mu$  = viscosidad del fluido (kg/(m.s))
- $u^+$  = velocidad superficial del líquido, calculada a sección total libre (m/s)
- $\Phi_s$  = factor de esfericidad
- $d_p$  = Tamaño de la partícula
- $\rho$  = densidad del fluido (kg/m<sup>3</sup>)

Si se inyecta un fluido a un medio granular y se incrementa poco a poco su caudal, la presión entre las partículas disminuirá progresivamente hasta llegar a un punto en que la fuerza de rozamiento entre las partículas sea igual a su peso aparente (peso real menos empuje), haciendo que éstas sufran un reordenamiento y opongan menos resistencia al desplazamiento del fluido, con lo cual el medio granular se expande, quedando suspendido en la corriente de dicho fluido.

A caudales de circulación bajos, el segundo término de la ecuación de Ergun es despreciable, con lo que (1.11) resulta en la ecuación de Blake-Kozeny para flujos laminares. Por el contrario a caudales elevados el segundo término se hace apreciable indicando que el régimen de circulación es turbulento.

A continuación se aclaran algunos conceptos relevantes al momento de estudiar la circulación de fluidos a través de sólidos y los cuales se encuentran presentes en la ecuación de Ergun, tales como: La velocidad superficial,  $u^+$ , para ello considere el lecho fijo de una cama granular, por el que circula un fluido, tal como se muestra en la Figura 1.5.

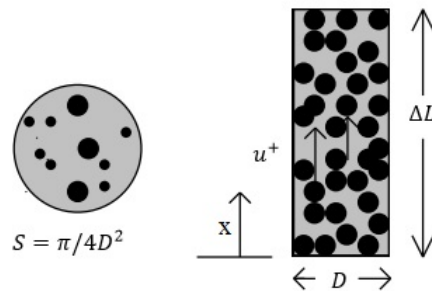


Figura 1.5: Vista esquemática de un lecho granular por el que circula un fluido a una velocidad superficial  $u^+$ .

La velocidad superficial,  $u^+$ , con que circula el fluido, se calcula como el cociente del caudal  $Q(\text{m}^3/\text{s})$  y la sección  $S$  del cuerpo geométrico siendo  $D$  el diámetro del tubo cilíndrico.

Otro concepto que cabe aclarar es la esfericidad, pues generalmente encontraremos que las partículas que conforman un medio granular no son totalmente esféricas, su geometría es irregular y el parámetro que nos permite definir dicha geometría es la esfericidad o factor de esfericidad ( $\Phi_s$ ), definido como:

$$\Phi_s = \frac{\text{área superficial de la esfera}}{\text{área superficial de la partícula}} \quad (1.12)$$

Finalmente la porosidad o fracción de huecos  $\epsilon$ , que es igual a la relación del volumen de poros y el volumen total.

# 2

## Antecedentes

### 2.1. Trabajos previos acerca del estudio de la dinámica de impacto en materia granular

El impacto de meteoritos en la superficie arenosa de la Luna y de otros cuerpos celestes motivó que, durante las últimas décadas, se hayan realizado numerosos experimentos a escala de laboratorio para estudiar sistemáticamente la dinámica de impacto en medios granulares y explicar la dependencia con parámetros como: la profundidad de penetración, el factor de empaquetamiento, la fricción de deslizamiento, la masa del proyectil, entre otros. Distintas dependencias relacionando dichos parámetros en forma de leyes de potencia se han planteado.

#### 2.1.1. Ecuación de Poncelet

Un primer trabajo fue el realizado por Poncelet en 1829, donde propuso que la fuerza que actúa sobre un objeto que penetra horizontalmente, es igual a la suma de dos términos: un término de fricción constante más un término viscoso proporcional al cuadrado de velocidad similar al de los fluidos:

$$F_D = F_s + \alpha v^2 \quad (2.1)$$

donde  $\alpha$  es una constante positiva y  $F_s$  es la fuerza de fricción estática de Coulomb constante, por lo que esta ecuación no es del todo válida para el caso de penetraciones verticales, ya que un objeto cuyo peso sea mayor que la fuerza de fricción se hundiría indefinidamente en el medio. Este caso puede ocurrir, pero con algunas condiciones especiales que discutiremos más adelante.

### 2.1.2. Dinámica de penetración en arenas movedizas secas (quicksand)

En el año 2004, D. Lohse *et al.* [14], estudiaron la penetración de un proyectil en una cama de arena fluidizada; al fluidizar la arena mediante la inyección de aire desde la parte inferior del recipiente lograron disminuir su factor de empaquetamiento desde 0.55 hasta 0.41, bajo estas condiciones un proyectil que se deja caer en este medio puede penetrar varias veces su diámetro.

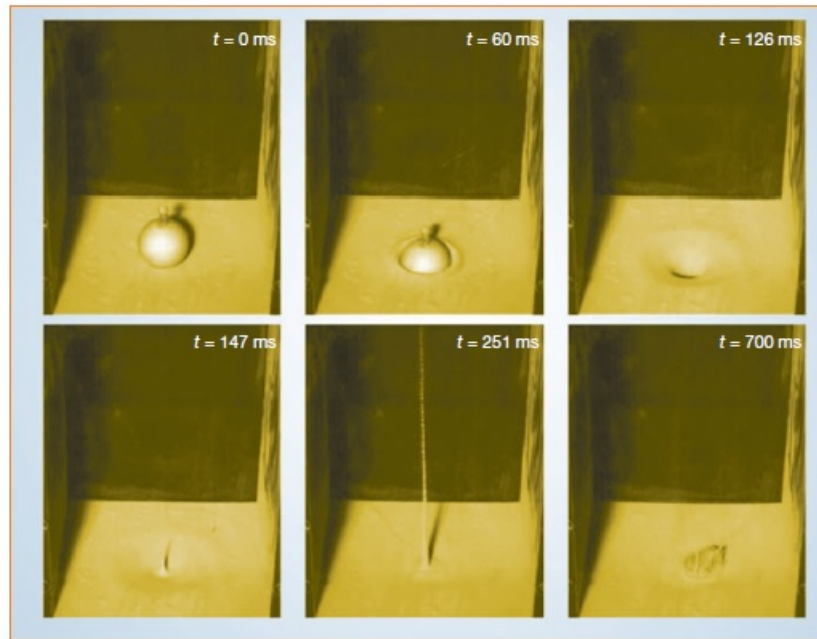


Figura 2.1: Instantáneas del experimento de hundimiento esfera en arena movediza seca (Quicksand). Imagen tomada de la referencia [14].

Al estudiar la dinámica del proyectil encontraron que la ecuación que describe la fuerza que opone el medio granular aumenta linealmente con la profundidad  $z$ , como:

$$(m + m_A)\ddot{z} = mg - \kappa z, \quad (2.2)$$

donde  $m_A$  corresponde a la masa de granos de arena que se aceleran junto con el proyectil, en cuanto al término  $\kappa z$ , por simplicidad los autores suponen que se trata de una fricción de Coulomb  $F_C$  debido a las fuerzas normales del borde. Recordemos que la fuerza de Coulomb está dada como:  $F_C = \mu_f P A$  donde  $\mu_f$ ,  $P$  y  $A$  son el coeficiente de fricción, la presión en la superficie de la esfera y el área de contacto, respectivamente. Ahora bien, si se consideran dos condiciones: La primera que  $\mu_f$  y  $A$  son constantes con lo cual:  $F_C \propto P$ . La segunda condición, que la presión granular en el recipiente sea aproximada a un término hidrostático en un régimen donde la profundidad

es superficial, por lo tanto, se tiene que la presión es proporcional a la profundidad,  $P \propto z$  y por consiguiente,  $F_C$  es proporcional a  $z$ .

### 2.1.3. Efecto del fondo del contenedor en la fuerza de penetración en impacto de un proyectil en un medio granular

El efecto de las paredes del contenedor en la dinámica de penetración en materia granular fue estudiado en el 2004 por Stone *et al.* [15]. Quienes encontraron al medir la fuerza de fricción que experimenta una placa cuando se aproxima al fondo del contenedor aumenta rápidamente como resultado de los granos atascados frente a la placa.

Para cuantificar el efecto del fondo del contenedor se llevaron a cabo dos mediciones de fuerza por separado. Una de ellas fue la fuerza  $F(z)$  medida para una profundidad  $z_{max}=112$  mm (trazo naranja) y la segunda para  $z_{max}=230$  mm (trazo verde). Esta última fue usada para obtener la medida de la fuerza de penetración sin los efectos del fondo para un rango de profundidades superficiales, considerablemente menores a 230 mm. A esta fuerza que no se ve afectada por el fondo del contenedor se le denominó  $F_{bulk}$  (línea azul) como se puede apreciar en la figura 2.2. Luego para obtener directamente una medida de la influencia del fondo del recipiente emplearon la siguiente expresión:  $\Delta F(z) = F(z) - F_{bulk}(z)$

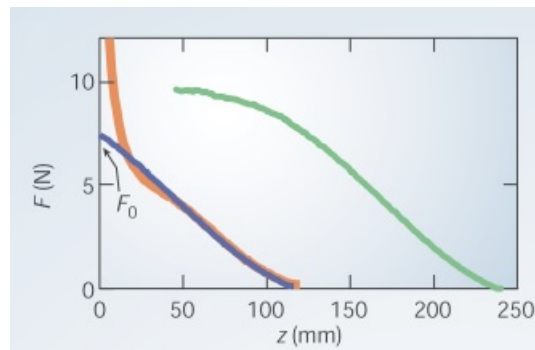


Figura 2.2: Efecto sobre la fuerza penetración experimentada por un objeto que se aproxima al límite inferior sólido de una muestra granular. Imagen tomada de la referencia [15].

En la figura 2.3 se muestra el comportamiento de  $\Delta F(z)$  para profundidades cercanas al fondo del contenedor, el carácter semi-logarítmico indica que cerca del fondo la variación de la fuerza de penetración describe un comportamiento tipo exponencial de la forma  $e^{-z/\lambda}$ , donde  $\lambda$  es una escala de longitud intrínseca que tiene una dependencia de la raíz cuadrada del cociente del radio de la placa y la tensión granular local inducida por la placa penetrante cerca del límite inferior y a su vez es independiente de la velocidad de penetración y del diámetro del grano, dicho comportamiento y dependencia se puede evidenciar en la figura 2.3.

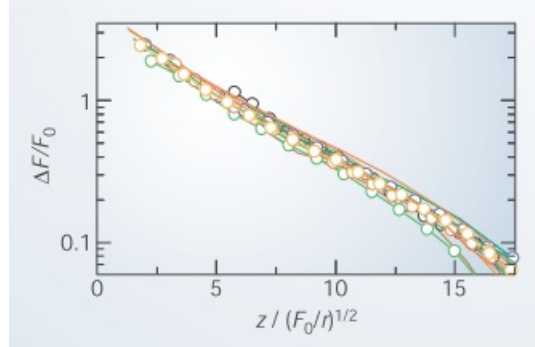


Figura 2.3: Datos experimentales de la fuerza de penetración diferencial escalada. Imagen tomada de la referencia [15].

#### 2.1.4. Ley unificada de fuerza de penetración en medios granulares

En 2007, H. Katsuragi, y D. Durian [16] consiguen plantear una ley unificada de fuerza. Partiendo de la expresión propuesta por Tsimring y Volfson [8], quienes argumentan que la fuerza total que actúa sobre un proyectil penetrando un medio granular debe ser igual a la suma del peso del proyectil más la fricción de Coulomb más el arrastre inercial, lo que se expresa como:

$$\sum F = -mg + F(z) + \frac{mv^2}{d_1}, \quad (2.3)$$

donde  $m$  es masa del proyectil,  $v$  corresponde a la velocidad del proyectil y  $d_1$  es una escala de longitud característica, la cual se supone independiente de la profundidad  $z$  alcanzada por el proyectil.

Katsuragi y Durian buscaban esclarecer de la ecuación de Tsimring y Volfson (2.3) la dependencia para la fricción de Coulomb y comprobar la forma dada para la fuerza de arrastre inercial. Para lograr su objetivo, fijaron una aceleración a una profundidad  $z_i$  dada y consideraron la segunda ley de Newton, con lo cual (2.3) toma la siguiente forma:

$$\frac{F(z)}{m} = a + g - \frac{v^2}{d_1}. \quad (2.4)$$

Para lograr su objetivo, miden la dinámica de proyectiles, en este caso emplearon una esfera de acero de 1 pulgada de diámetro, la cual se dejó caer en un medio de esferas de vidrio no cohesivas. Inicialmente se analizó la velocidad y aceleración experimentadas a unas profundidades establecidas;  $z_i = 0, -1, -2, -3, -4 \pm 0, 1$  cm. Los resultados muestran en la figura 2.4, donde cada punto representa una altura de caída diferente y las cinco profundidades fijas están representadas por los cinco colores. Los resultados son cuadrático en la velocidad y arrojaron el mismo factor de proporcionalidad para  $d_1$ , dicho en otras palabras, el proyectil experimenta una fuerza  $mv^2/d_1$  que es independiente de la profundidad, resultado que concuerda con los estudios de Tsimring y Volfson.

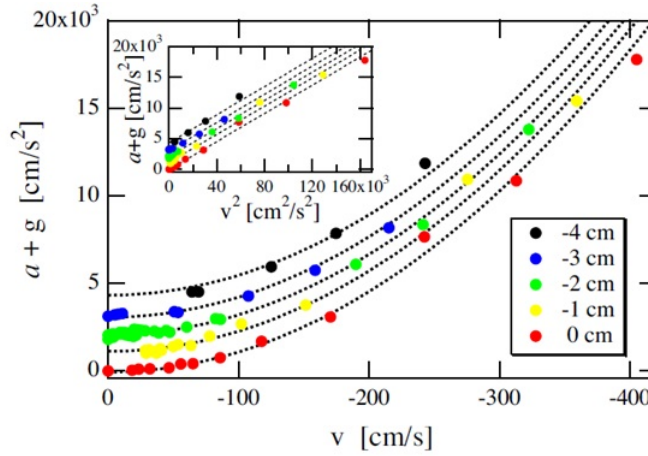


Figura 2.4: Aceleración total  $a + g$  vs velocidad para cinco profundidades  $z_i$ , las curvas representan los ajustes. Imagen tomada de la referencia [16]

En cuanto a la forma de la fricción Coulomb fue examinada usando el valor de  $d_1$  obtenido anteriormente. Expresando la ecuación (2.4) como:

$$\frac{F(z)}{m} = a + g - \frac{v^2}{d_1}. \quad (2.5)$$

Luego se evaluó el lado derecho de (2.5) y los resultados obtenidos se grafican como función de la profundidad ( $z$ ) alcanzada por el proyectil (Fig 2.5), encontrando que los datos se ajustan a la forma lineal  $F(z) = \kappa|z|$

De esta forma logran establecer la denominada ley de fuerza unificada, que tiene la forma:

$$\sum F = -mg + \kappa|z| - \frac{mv^2}{d_1}, \quad (2.6)$$

donde queda por determinar por ajuste de los datos experimentales los valores precisos de  $\kappa$  y  $d_1$  midiendo la aceleración del proyectil para distintas masas.

### 2.1.5. Impacto granular y estado de empaquetamiento crítico

Goldman y Umbanhowar en el 2010 [20], llevaron a cabo un experimento que consistió en dejar caer una esfera de acero con un radio  $R = 1.98$  cm de masa total  $m = 270$  g, con velocidades iniciales de colisión en un rango de (0 a 350 cm / s), el medio granular empleado fueron esferas de vidrio de diámetro  $d = 300 \mu\text{m}$  y densidad  $\rho = 2.52 \text{ g/cm}^3$ . El estado de empaquetamiento del medio fue controlado en un rango de  $0.57 < \phi < 0.63$ . Para determinar cómo el empaquetamiento afecta la fuerza de fricción experimentada por el proyectil, midieron la aceleración vertical  $a$  de manera

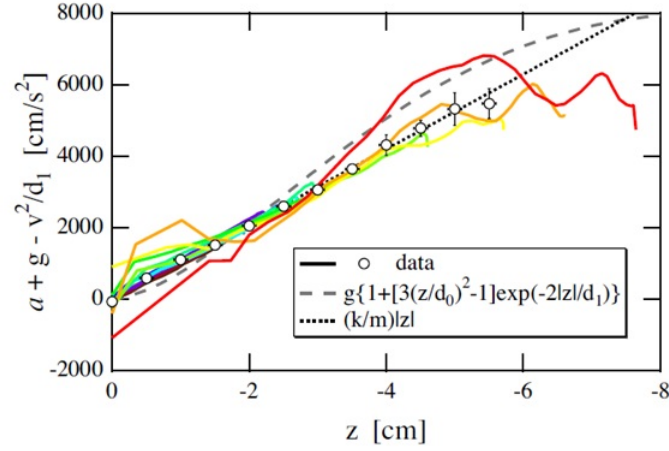


Figura 2.5: Aceleración total  $a + g$  vs la profundidad. Imagen tomada de la referencia [16].

directa con la ayuda de un acelerómetro que se ubicó sobre la esfera.

A partir de los resultados obtenidos los autores encontraron que la fuerza de arrastre se ve significativamente afectada por  $\phi$  o que  $\phi$  se ve afectado por cambios en la fuerza de impacto de la siguiente forma: Si el medio se encuentra en un estado de empaquetamiento crítico con  $\phi_c = 0.591$  y que está definido, como el estado donde la fracción de volumen es constante bajo cizallamiento, encontraron que éste no cambia después del impacto, cuando  $\phi < \phi_c$  se produce una compactación del medio como resultado del impacto y para  $\phi > \phi_c$  se produce una dilatación.

A partir del seguimiento de las trayectorias del proyectil (círculos en la figura 2.6) encontraron que al aumentar la profundidad la fuerza de impacto aumentó para  $\Delta\phi < 0$ , disminuyó para  $\Delta\phi > 0$  y no presentó mayores cambios para  $\Delta\phi = 0$ , siendo  $\Delta\phi = \phi_f - \phi_0$ , donde  $\phi_f$  indica la factor de empaquetamiento final después del impacto. Luego procedieron a comparar las diferencias entre sus resultados experimentales (límites entre los contornos de isofuerza o límites de las regiones coloreadas en la figura 2.6) con la ecuación (2.6) de la ley de fuerza unificada de Katsuragi y Durian, con lo que encontraron que el modelo (curvas blancas) subestima la fuerza de impacto tanto para pequeñas profundidades y velocidades, y  $\Delta\phi < 0$ , mientras que para  $\Delta\phi > 0$  se sobreestima la fuerza a grandes profundidades y pequeñas velocidades. Concluyendo así, que la expresión de Katsuragi y Durian sólo es válida para  $\phi = \phi_c$  y a grandes velocidades.

Los resultados experimentales (ver figura 2.7) también revelaron que el coeficiente  $1/d_1$  del término de fuerza de arrastre inercial en la ecuación (2.6) aumenta con  $z$  para  $\Delta\phi > 0$ , para valores de  $\phi \approx \phi_c$  es independiente de la profundidad y disminuye con  $z$  para  $\Delta\phi < 0$ , a tal punto que a grandes profundidades puede tomar valores negativos, lo cual carece de sentido físico.

lo anterior indica que se debe descartar la idea de separar la fuerza de resistencia en dos térmi-

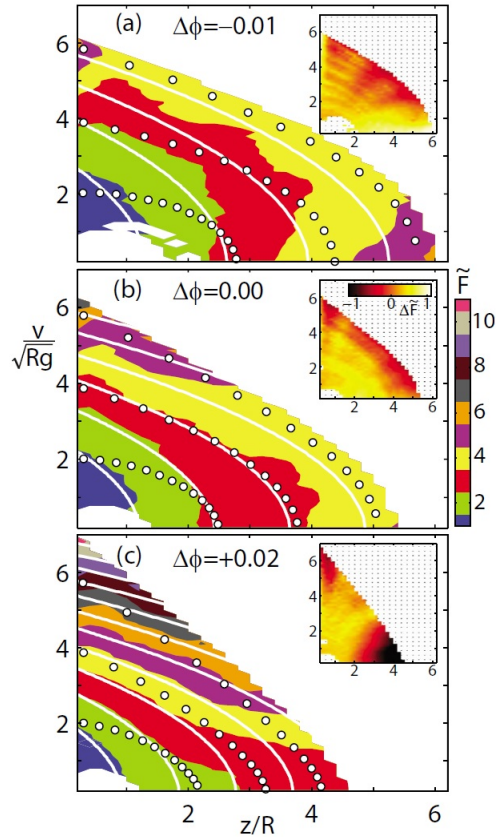


Figura 2.6: Contornos de isofuerza (límites de las regiones coloreadas), contornos predichos por la Ec. (2.6) curvas blancas) y trayectorias del proyectil (círculos) para empaquetamientos (a) más abajo, (b) en, y (c) por encima del estado de empaquetamiento crítico. Imagen tomada de la referencia [20].

nos, donde uno de ellos, el inercial, dependa únicamente de la velocidad  $v^2$ . Los investigadores proponen que un término lineal con la velocidad debe ser adicionado a la fuerza de fricción, probablemente debido a los cambios en el flujo asociado con la compactación y la dilatación del medio. Lo que resultaría en una expresión de la forma:

$$F = C + \frac{\beta}{\sqrt{Rg}}v + \frac{\alpha'}{Rg}v^2, \quad (2.7)$$

donde  $C$  y  $\alpha'$  son constantes libres de variar con la profundidad, y esta última siempre resulta ser positiva y casi independiente de la profundidad para todo  $\phi$ .

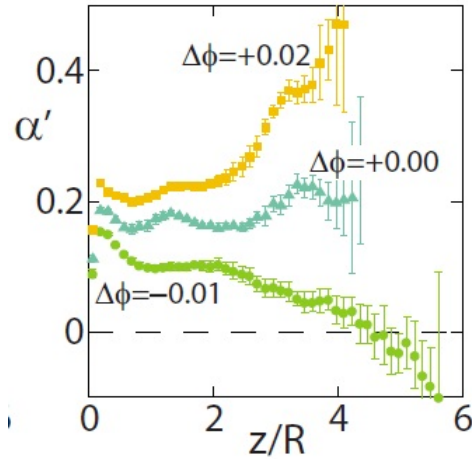


Figura 2.7: Variación de  $\alpha'$  con la profundidad y su dependencia con  $\Delta\phi$ . Las barras de error aumentan a medida que el rango de medida  $v$  disminuye con  $z$ . Sólo cerca  $\Delta\phi = 0$  es  $\alpha'$  independiente de la profundidad. Imagen tomada de la referencia [20].

### 2.1.6. Penetración en medios granulares en el límite de bajas densidades

En 2011, Pacheco-Vázquez *et al.* [21], encontraron que cuando un proyectil de densidad  $\rho_p$  penetra en un medio granular, donde la magnitud de la razón  $\rho_p/\rho_m$  es aproximadamente de dos o más ordenes de magnitud menor en comparación con la densidad del proyectil. Esta enorme diferencia entre las densidades es una condición que permitirá a un proyectil penetrar grandes profundidades hasta alcanzar una velocidad terminal, tal como lo hace un paracaidista en el aire. Un medio que cumpla con dicha condición estará en lo que los autores denominaron como el “límite de bajas densidades” puesto, que no se han reportado razones de densidades con valores mayores y no son posibles utilizando materiales granulares típicos. Para llegar a esta conclusión se llevó a cabo el estudio de la dinámica de 18 esferas con masas diferentes,  $m = 15, 26, 35, 46, 52, 64, 75, 79, 84, 92, 100, 111, 121, 139, 145, 154, 160, \text{ y } 182$  g. Éstas fueron lanzadas desde la parte superior de un silo de 6 m de altura, en el cual se dispuso aproximadamente  $1 \text{ m}^3$  de esferas de poliestireno expandido de densidad media  $\rho_m = 0.014 \pm 0.002 \text{ g/cm}^3$  y diámetros de 2.0 a 6.5 mm, luego se grabaron las trayectorias de los proyectiles y se extrajeron los datos que permitieron establecer velocidades y profundidades alcanzadas. Posteriormente se elaboraron gráficas de velocidad vs profundidad para cada masa (Figura 2.8), las cuales revelaron la existencia de una velocidad terminal por encima de un valor de masa crítica.

El resultado anterior claramente contrasta con el término hidrostático ( $\kappa z$ ) de la ecuación de Katsuragi y Durian, puesto que dicha dependencia, al aumentar con  $z$ , alcanzará a una profundidad dada un valor suficiente para dominar sobre el peso del objeto. Esto implica que dicha ecuación debe ser modificada. Para ello, se debe considerar una característica distintiva de los medios granu-

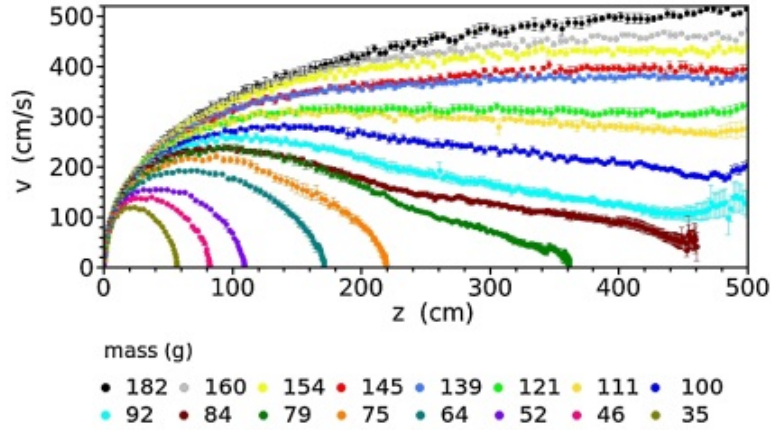


Figura 2.8:  $v$  contra  $z$ , obtenida a partir de las mediciones experimentales. Imagen tomada de la referencia [21].

lares: la saturación de la presión con la profundidad debido al redireccionamiento del estrés a través de cadenas de fuerza hacia las paredes del contenedor, fenómeno conocido como efecto Janssen. La ecuación que describe dicha saturación es:

$$P(z) = \rho g \lambda (1 - e^{-z/\lambda}), \quad (2.8)$$

donde  $\rho$  corresponde a la densidad del medio,  $g$  el valor de la gravedad y  $\lambda$  la longitud característica relacionada con el diámetro del contenedor. Por lo tanto, la única forma de obtener una velocidad máxima en un medio granular es que la fricción en función de la profundidad se haga constante antes de que coincida con el peso del objeto. La ecuación de movimiento es entonces:

$$m\ddot{z} = mg - \eta\dot{z}^2 - \kappa\lambda(1 - e^{-z/\lambda}), \quad (2.9)$$

los coeficientes  $\kappa$  y  $\eta$  dependen de los parámetros del material y la geometría del proyectil. En la figura 2.9 se muestran los valores numéricos obtenidos con la ecuación (2.9), se evidencia un gran acuerdo con los resultados experimentales representados en la figura 2.8.

Por otra parte, al considerar la aceleración igual a cero, la ecuación (2.9) predice la existencia de una velocidad terminal  $\dot{z} = V_T$  dada por:

$$V_T^2 = \frac{mg}{\eta} - \frac{\kappa\lambda}{\eta}. \quad (2.10)$$

La ecuación (2.9) también implica que existe un proyectil con una masa crítica mínima capaz de penetrar una profundidad infinita al alcanzar una velocidad terminal cero. Esta masa está dada por  $m_c = \kappa\lambda/g$ .

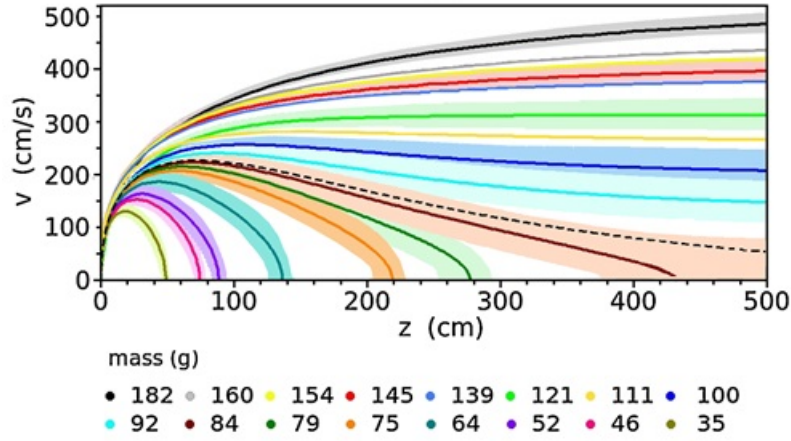


Figura 2.9:  $v$  contra  $z$ , obtenido por resolución numérica de la ecuación (2.9). Imagen tomada de la referencia [21].

Con el fin de determinar individualmente los parámetros  $\kappa$  y  $\lambda$ , consideraron el equilibrio entre el peso del intruso y la fuerza de fricción cuando el término viscoso es despreciable. Esto nos permite obtener una solución para  $z(=z_{min})$ , dada como:

$$z_{min} = -\lambda \ln(1 - mg/\kappa\lambda). \quad (2.11)$$

Para encontrar el valor de  $z_{min}$  experimentalmente se parte del hecho que la profundidad mínima es aquella donde un intruso ya no se hunde cuando penetra hasta dicho punto con velocidad cero. Para reproducir esto, se introdujeron cuasiestáticamente las masas en la columna granular descendíéndolas muy lentamente ( $\approx 1$  cm/s) con un hilo de masa despreciable, y se registró la profundidad ( $z_{min}$ ) a la que dejan de hundirse, se sustituyen estos valores en (2.11) y se obtiene:  $\eta = 342 \pm 0.013$  g/cm y  $\kappa\lambda = 8.148 \pm 0.652 \times 10^4$  g cm/s<sup>2</sup>. Dichos resultados se obtuvieron realizando experimentos con un valor de empaquetamiento estándar de  $\phi=0.64$ ; mientras que la dependencia de la dinámica y de dichos parámetros con el empaquetamiento del medio no fue determinada.

Adicionalmente, Pacheco-Vázquez *et al.* realizaron simulaciones de dinámica molecular 2D para tener una perspectiva más cercana de la dinámica del proyectil, especialmente sobre la naturaleza intermitente de la fuerza que actúa sobre un proyectil cuya masa está por encima de su masa crítica y que desciende en un medio súperligero. Los resultados se muestran en la figura 2.10 en donde se puede apreciar unas instantáneas del intruso y sus alrededores (los recuadros) a diferentes profundidades, donde la intensidad del color representa la acumulación de las cadenas de fuerza. En el lado izquierdo donde se ve mayor intensidad de color, lo que indica un medio más compacto, causará que el intruso experimente una mayor resistencia del medio a la penetración y como resultado el intruso se desacelera. En lo que respecta al lado derecho se observa que el medio está a un menor factor de empaquetamiento, por lo que las cadenas de fuerza son más débiles y el intruso se

acelera. Es claro que los patrones de oscilación observado en la aceleración del intruso a medida que se hunde, son resultado de las cadenas de fuerza que son cargadas y colapsadas de manera intermitente al paso de éste. Por lo que a pequeñas profundidades la amplitud de las fluctuaciones es pequeña y aumenta con la profundidad, siendo del orden de 0.2 N. Incluso durante el régimen de velocidad terminal, alrededor de 90 cm de profundidad, donde la fuerza promediada de cinco mediciones (línea verde) es cero, el movimiento del proyectil sigue siendo perturbado por esta dinámica.

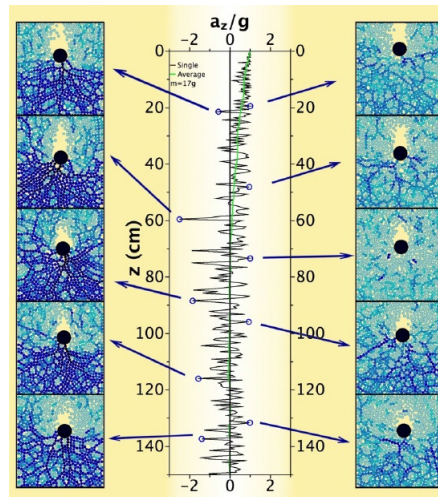


Figura 2.10: Simulaciones de dinámica molecular en un silo 2D. La fuerza total que actúa sobre un intruso que cae (masa 17 g). La línea quebrada oscilatoria ( $a/g$  vs  $z$ ) es para un experimento (es decir considerando sólo un lecho) y la línea verde es un promedio suavizado de cinco trayectorias obtenidas usando cinco lechos diferentes. Se representan instantáneas del intruso y sus alrededores que corresponden a grandes fluctuaciones. Imagen tomada de la ref. [21].

La ecuación (2.9) de movimiento de un objeto que penetra en un medio granular en el límite de bajas densidades presentada anteriormente, fue empleada por Altshuler *et al.* [25], en el estudio de la dinámica de impacto granular en condiciones de gravedad reducida. Para dicho trabajo usaron una máquina de Atwood de 15 metros de altura, en la que uno de los contrapesos es un balde cilíndrico de 30 cm de diámetro por 26 cm de profundidad, el cual está lleno de esferas de poliestireno expandido (diámetro medio  $D=5.0$  mm, densidad  $\rho = 0.014 \pm 0.002$  g/cm<sup>3</sup> y factor de empaquetamiento  $\phi = 0.68 \pm 0.01$ ). El efecto de gravedad efectiva  $g_{eff}$  experimentada por la esfera (diámetro  $D=4$  cm y masa  $m=23$  g) al hundirse en el medio después de ser liberada a partir del reposo con ayuda de un mecanismo de liberación magnética, se controló con la velocidad con la que cae/sube el balde. La velocidad aumenta o disminuye sólo con variar la masa del otro contrapeso y en consecuencia  $g_{eff} < g$  si el balde está cayendo y se tendrá que  $g_{eff} > g$  si el balde está subiendo. La aceleración producida posterior a la liberación fue medida instantáneamente con un acelerómetro de tres ejes inalámbrico incorporado en la esfera.

Con la elaboración de gráficas de profundidad de reposo,  $z_{reposito}$ , figura 2.12 (a) y el tiempo de reposo,  $t_{reposito}$ , figura 2.12 (b) vs  $g_{eff}$  encontraron que  $z_{reposito}$  es independiente de  $g_{eff}$  mientras que  $t_{reposito}$  escala como  $g_{eff}^{-1/2}$ .

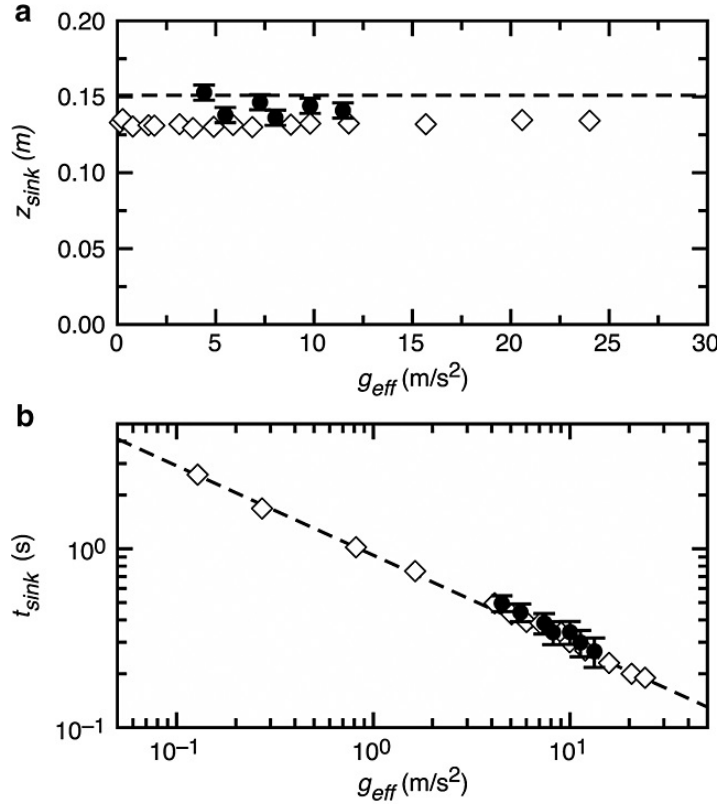


Figura 2.11: (a)  $z_{reposito}$  vs  $g_{eff}$  datos experimentales (círculos negros) y simulaciones (diamantes blancos). (b)  $t_{reposito}$  vs  $g_{eff}$ . El ajuste a los datos de simulación arrojan una ley de potencia con exponente  $-1/2$ . Imagen tomada de la referencia [25].

Para explicar la escala del tiempo de reposo con  $g_{eff}$  emplearon la ecuación de movimiento de Pacheco-Vázquez:  $ma = mg - \eta v^2 - \kappa \lambda (1 - e^{-z/\lambda})$ , donde el término de arrastre ( $\eta v^2$ ) se desprecia, debido a que la esfera se suelta a partir del reposo en el medio y éste es relativamente ligero. La ecuación de movimiento resulta ser:

$$ma = mg_{eff} - \kappa \lambda (1 - e^{-z/\lambda}), \quad (2.12)$$

usando la relación  $a = d^2z/dt^2 = v dv/dt$  la ecuación (2.12) se reescribe como:

$$v \frac{dv}{dt} = g_{eff} \left[ 1 - \frac{\alpha \lambda}{m} \left( 1 - e^{-z/\lambda} \right) \right] dz, \quad (2.13)$$

al integrar esta ecuación con respecto a  $z$  (con las condiciones iniciales  $z_0=0$  y  $v_0=0$ ) obtuvieron:

$$\frac{1}{2}v^2 = g_{eff} \left[ z \left( 1 - \frac{\alpha\lambda}{m} \right) - \frac{\alpha\lambda^2}{m} (e^{-z/\lambda} - 1) \right], \quad (2.14)$$

luego, al despejar el término de velocidad, sacar la raíz cuadrada a ambos lados e integrar una vez más, resulta:

$$t_{reposo} = (2g_{eff})^{-1/2} \int_0^{z_{reposo}} \left[ \left( 1 - \frac{\alpha\lambda}{m} \right) + \frac{\alpha\lambda^2}{m} (1 - e^{-z/\lambda}) \right]^{-1/2}, \quad (2.15)$$

de donde concluyeron que  $t_{reposo} \propto g_{eff}^{-1/2}$ , ya que el término de la integral es independiente de  $g_{eff}$ . También emplearon la aproximación (2.14) para demostrar que  $z_{reposo}$  es independiente de  $g_{eff}$ . Consideraron que cuando la esfera en el medio llega a un estado de reposo, es decir cuando  $v=0$ , el lado izquierdo de la ecuación (2.14) se hace cero, entonces:

$$\left( 1 - \frac{\alpha\lambda}{m} \right) z_{reposo} = \frac{\alpha\lambda^2}{m} (e^{-z_{reposo}/\lambda} - 1), \quad (2.16)$$

debido a que ésta es una ecuación trascendental que no puede ser resuelta analíticamente, por simple inspección los investigadores concluyeron, que al no estar presente el término  $g_{eff}$  en esta expresión,  $z_{reposo}$  es independiente de  $g_{eff}$ .

### 2.1.7. Fuerza de fricción vertical experimentada por intrusos de diferentes formas y tamaños.

Brzinski *et al.* [23] Midieron la fuerza de fricción cuasiestática que actúa sobre intrusos que se mueven hacia abajo en un medio granular, para así poder determinar hasta qué punto ésta actúa en dirección normal o tangencial a la superficie del intruso. Para descifrar esto, ubicaron a diferentes profundidades en un medio granular intrusos con diferentes geometrías, tales como: esferas, cilindros y conos. Lo que también les permitió estudiar cómo cambia la fuerza al variar la fracción de la superficie del proyectil que se mueve verticalmente hacia abajo en el medio. El medio empleado fueron esferas de vidrio de diámetro  $300 \pm 50 \mu m$ , densidad aparente  $\rho=1.48 \text{ g/cm}^3$ , ángulo de reposo  $22$  ( $\mu=0.40$ ) con un factor de empaquetamiento de  $\phi=0.59$ . El material se depositó en un cilindro acrílico de  $19 \text{ cm}$  de diámetro a una profundidad de  $20 \text{ cm}$ . Luego con ayuda de un sensor midieron para cada profundidad la fuerza máxima que el material granular podría soportar antes de fallar o colapsarse.

Los autores proponen que la fuerza de fricción total que experimenta un intruso que se mueve hacia abajo en un medio granular, actuará en dirección contraria al movimiento del objeto, es decir hacia arriba y sobre cada uno de los elementos de área de superficie del intruso. Lo cual se expresa como:

$$d\mathbf{F} = \alpha\mu(\rho gz)d\mathbf{A}, \quad (2.17)$$

donde  $\mu$  es un coeficiente de fricción interno igual a la tangente del ángulo de reposo,  $\rho gz$  es la presión hidrostática,  $d\mathbf{A}$  es un elemento de área infinitesimal que señala perpendicular a la superficie del proyectil y  $\alpha$  es una constante adimensional igual a  $\alpha = 35 \pm 5$ , valor que se repite para casi todos los experimentos.

Para identificar hasta qué punto la fuerza de fricción actúa localmente normal o tangencial a los elementos de área de superficie del proyectil, se integró la expresión (2.17) con  $d\mathbf{A}$  apuntado normal y tangencial a la superficie. Los resultados obtenidos fueron:

	dirección normal	geometría	dirección tangencial
$\frac{F}{\pi\alpha_n\mu\rho g} =$	$R^2z$	cilindro	$Rz^2$
	$\tan^2\phi z^3/3$	cono	$\tan\phi z^3$
	$(R - z/3)z^2$	esfera, $z \leq R$	
	$(z - R/3)R^2$	esfera, $z \geq R$	$(z - 0.58R)R^2$

Luego procedieron a normalizar las mediciones experimentales obtenidas de  $F(z)$  con los resultados obtenidos por el método de integración de la ecuación (2.17) para los quince intrusos de diferentes tamaños y formas. Los resultados se trazan en una gráfica contra  $z$  (figura 2.12) en la cual se observa claramente como los datos colapsan excelentemente con la expectativa de  $d\mathbf{F}$  actuando en dirección normal a los elementos de área de la superficie del intruso, cosa que no sucede con la expectativa de  $d\mathbf{F}$  tangencial al intruso. Por otra parte, teniendo en cuenta que las cadenas de fuerza se extienden desde el proyectil en el medio, formándose y rompiéndose a medida que éste penetra. Los investigadores consideran que esto puede tener un aporte en la magnitud de la fuerza de fricción total  $F(z)$  experimentada por el intruso. Para identificar si esta suposición es correcta, se hizo fluir aire de manera controlada a través de los granos, con el fin de disminuir la presión entre ellos, ya que la velocidad  $U$  del aire superficial es proporcional al gradiente de presión de aire a través de la muestra, lo que modifica el gradiente de presión hidrostática efectivo como  $\rho g \rightarrow \rho g(1-U/U_c)$  donde  $U$  es la velocidad del aire superficial, igual al caudal volumétrico por área de la sección transversal y  $U_c$  es la velocidad de fluidización a la cual la gravedad y la resistencia del aire se equilibran y la fuerza de fricción  $\kappa z$  se hace cero.

Teniendo el medio granular fluidizado con la condición de  $U = U_c$ , se midió nuevamente la fuerza  $F(z)$  para los quince intrusos de diferentes tamaños y formas, los resultados fueron escalados por factores geométricos, así como por un factor  $(1-U/U_c)$ . Como se puede observar en la figura 2.13 la normalización causa un buen colapso, al igual que para los datos obtenido con  $U = 0$ , es decir  $F(z)/(1-U/U_c)$  es proporcional a  $R^2z$  para los cilindros, a  $\tan^2\phi z^3/3$  para los conos, y es consistente para las esferas. En conclusión, la fuerza de fricción reducida se puede calcular multiplicando

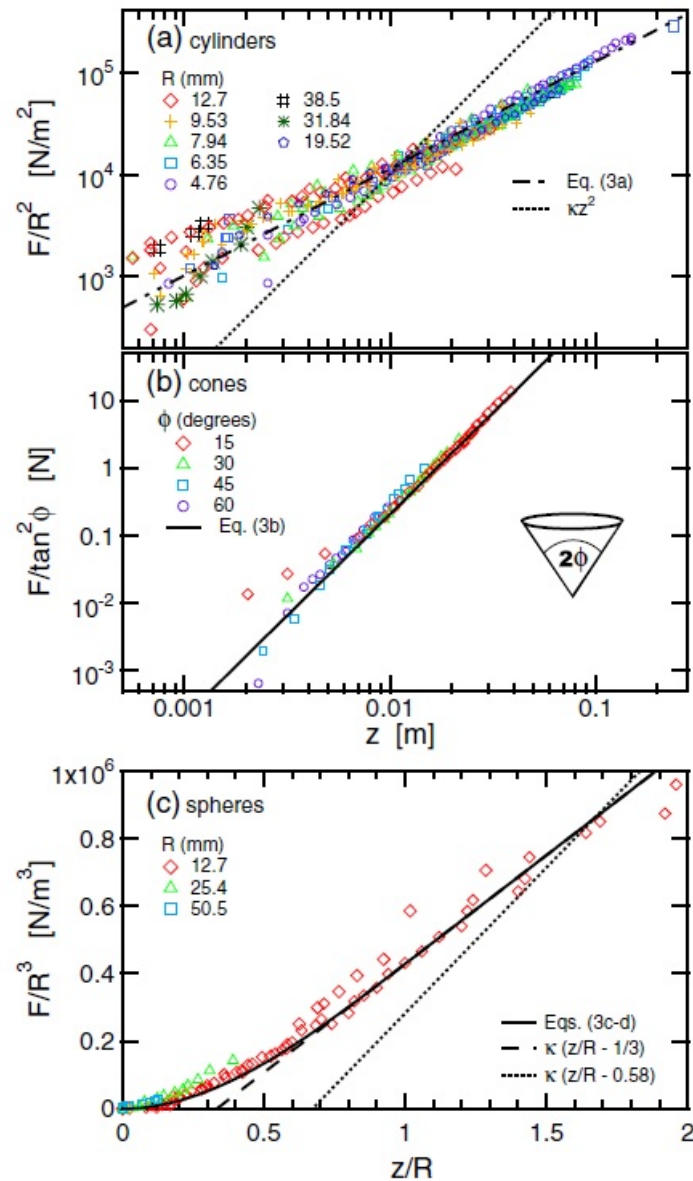


Figura 2.12:  $F$  contra  $z$ . Comparación entre las mediciones experimentales de  $F(z)$  y las expectativas de  $F(z)$  actuando normal y tangencial a la superficie del intruso. Imagen tomada de [23].

$\kappa z$  por un factor de reducción  $1 - U/U_c$ , con lo cual la magnitud de la fuerza de fricción  $F(z)$  estará determinada por las fuerzas opuestas que se originan entre el intruso y los granos de alrededor cargados por gravedad y no por los contactos cargados a través del movimiento del proyectil. Esta fuerza actuará a través de cadenas de esfuerzos intermitentes formadas desde un conjunto de puntos de contacto, grano-superficie local del intruso y actuará aproximadamente en la dirección normal a

dicha superficie, para extenderse a lo largo del volumen de granos cercanos al intruso. En cuanto a su magnitud estará dada por el producto entre una constante de proporcionalidad adimensional, el coeficiente de fricción, la presión hidrostática y el área del intruso.

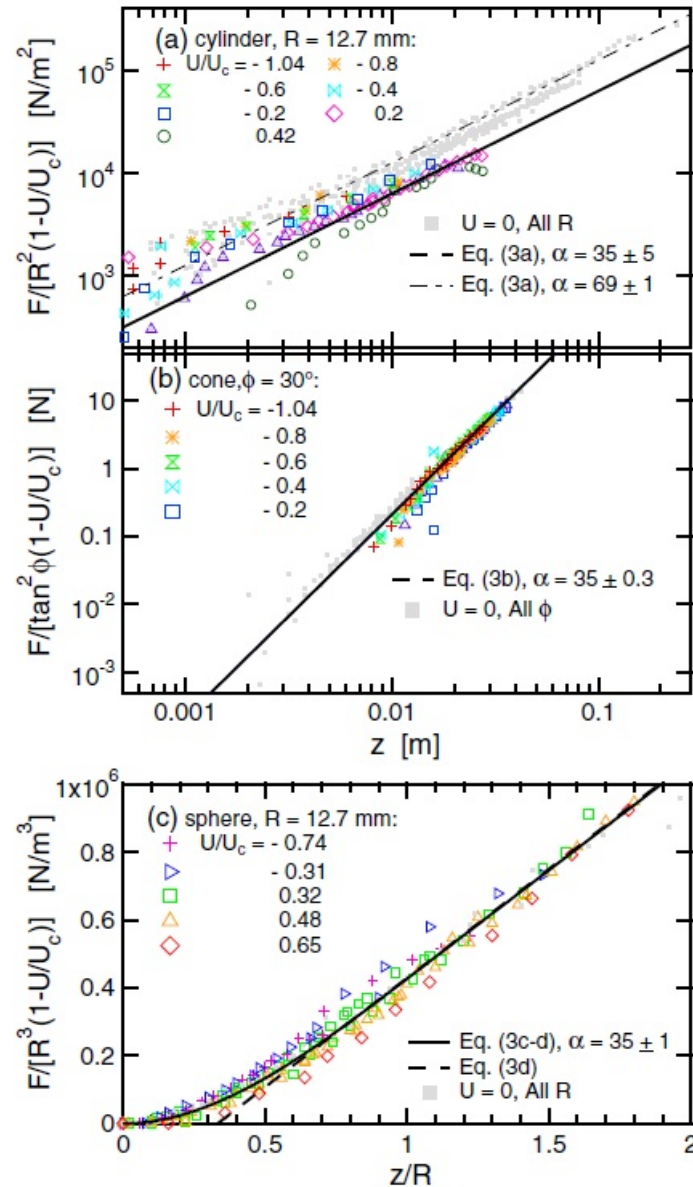


Figura 2.13:  $F$  contra  $z$ . Comparación entre las mediciones experimentales de  $F(z)$  obtenidas en un medio fluidizado ( $U=U_c$ ) con las expectativas de  $F(z)$  actuando normal y tangencial a la superficie del intruso medidas con  $U=0$ . Imagen tomada de [23].

---

Como se pudo evidenciar de la revisión hecha de las diferentes investigaciones que se han llevado a cabo en las dos últimas décadas, éstas tienen como objetivo establecer las leyes que rigen la penetración de un objeto en materia granular y su dependencia con diferentes parámetros. Sin embargo, hasta este momento, no se ha reportado un estudio sistemático de la dependencia de la cinemática y dinámica de penetración granular con el factor de empaquetamiento. Si bien, este parámetro sí se ha considerado en las diferentes investigaciones, pero no se ha variado en un rango apreciable, en general se ha trabajado a un valor de empaquetamiento estándar. Cabe resaltar el trabajo realizado en la ref. [20] donde efectivamente se varió el empaquetamiento estándar y se estudió su dependencia en la dinámica de impacto, lo que les permitió encontrar entre otras cosas, que la expresión de la ley de fuerza unificada, es válida sólo para medios en un estado de empaquetamiento estándar y a altas velocidades. El medio empleado fueron esferas de vidrio y el proyectil empleado impactaba a diferentes velocidades y de valor apreciable.

El enfoque de nuestra investigación se centra en dos aspectos: a) medir la transición entre diferentes regímenes y describir la dinámica con una única ecuación para  $F(z)$ , y b) explorar el efecto del tamaño del proyectil y el factor de empaquetamiento (este último, raramente analizado) en la dinámica de penetración a grandes profundidades.

---



# 3

## Dinámica de penetración granular para diferentes factores de empaquetamiento

A continuación se presenta el montaje experimental diseñado y construido en esta tesis, el cual permitió analizar la dinámica de penetración de un intruso esférico en una columna granular ultraligera. Seguido de esto se presentarán los resultados obtenidos así como el análisis hecho a los mismos. Los resultados experimentales se abordarán a partir de tres aspectos: inicialmente estudiamos la transición de la fuerza de fricción entre distintos regímenes, para posteriormente proceder a la modelación de una única ecuación de la fuerza de fricción en función de la profundidad. Luego se presenta una caracterización de la fuerza de saturación experimentada por proyectiles de diferentes tamaños. Finalmente se explora el efecto del factor de empaquetamiento y el tamaño del proyectil en la profundidad de penetración final.

### 3.1. Diseño experimental

La configuración experimental se representa en figura 3.1. El silo consiste en un contenedor cilíndrico de cartón de 300 cm de altura y diámetro interno de  $35.3 \pm 0.05$  cm. Estos tamaños fueron seleccionados, debido a que las dimensiones de un silo determinan la profundidad a la cual la presión satura (efecto Janssen), por otro lado, si el espacio entre la pared lateral y el intruso es demasiado reducido, el atascamiento de los granos no permite grandes penetraciones. Por tal motivo se escogió un silo con un diámetro del orden de 7 veces el diámetro del intruso, que de acuerdo con la literatura es suficiente para evitar efectos de pared. Además, con dicho diámetro, la saturación de la presión se comienza a observar a 1 m de profundidad aproximadamente para el

material utilizado, lo cual nos permite observar los efectos deseados en nuestro silo de 300 cm de longitud. El diámetro del silo podría ser más grande, pero esto requiere de más material granular y una mayor longitud, lo cual sería inapropiado para las dimensiones del laboratorio.

El silo se llenó con  $3360 \pm 1$  g de esferas de poliestireno expandido de densidad  $0.022 \text{ g/cm}^3$  y radio de  $2 \pm 0.5$  mm, de acuerdo a la diferencia de tamaño de los diámetros el material granular es considerado como polidisperso, no es posible adquirir esferas completamente monodispersas en las cantidades requeridas ( $3 \text{ m}^3$ ). No obstante, las ecuaciones de movimiento expuestas anteriormente son derivadas asumiendo al material granular como un medio continuo y la naturaleza de la granularidad queda considerada en los coeficientes de los términos inerciales y del arrastre viscoso y como el material granular no se cambia, dichos coeficientes son constantes a determinar.

En la parte superior de un soporte de 6 m de longitud medidos desde el nivel del suelo se ubicó un motor al cual se le adaptó una polea. El motor cumple la función de hacer descender el sensor de fuerza y de la inmersión del intruso en el medio granular a velocidad constante de  $v = 1.1 \pm 0.003$  cm/s, lo que corresponde a un voltaje de 20 V suministrados al motor por una fuente de poder. Los 6 m de altura son necesarios para garantizar que en el momento del descenso el sensor no penetre en el medio granular, ya que esto puede interferir en el registro de datos.

El sensor está unido al motor a través de una cuerda de 3 m de longitud y masa despreciable que pasa por la polea, el intruso es suspendido de una cuerda de 3 m de longitud al eje de la célula de carga ubicado en la parte inferior del sensor. El sensor de fuerza empleado es un Model DFG35-5. Los intrusos empleados consistían en ocho esferas, de las cuales seis eran pelotas huecas de diámetros  $d_b = 3.0, 3.8, 5.4, 6.1, 7.8$  y  $9.4 \pm 0.01$  cm, esto con el fin de poder variar su masa al agregar y quitar pequeños trozos de plomo de su interior alcanzando un rango de masas entre 50 y  $1076 \text{ g} \pm 1$  g. Los dos intrusos restantes fueron bolas macizas de plomo de diámetros de 3.0 y 4.8 cm y masas 155 y 600 g respectivamente. Todos los intrusos fueron cubiertos con una delgada capa de látex para obtener la misma rugosidad superficial.

Para cada experimento se inyectó aire a la cama granular a través de una bomba de aire incorporada en la parte inferior del recipiente. Después de reducir lentamente hasta cero el flujo de aire con un regulador de voltaje, la cama se restableció de manera reproducible hasta un estado de empaquetamiento suelto, donde la altura de la columna granular fue de 277 cm lo que corresponde a un factor de empaquetamiento estándar de  $\phi = 0.566 \pm 0.001$ . Para experimentos con camas más densas, compactamos el material golpeando suave y sistemáticamente a lo largo las paredes del contenedor hasta que la columna descendió a un nivel fijo. El lecho más denso alcanzó una profundidad de 256 cm, equivalente a un factor de empaquetamiento máximo de  $\phi_m = 0.613 \pm 0.001$ .

Una vez que el lecho granular está listo, una esfera se coloca sobre la superficie del medio granular sin hacer contacto, en este momento el sensor registra el peso de la esfera que cuelga libremente, así que se fija en cero el sensor para obtener directamente la fuerza de fricción  $F(z)$  a

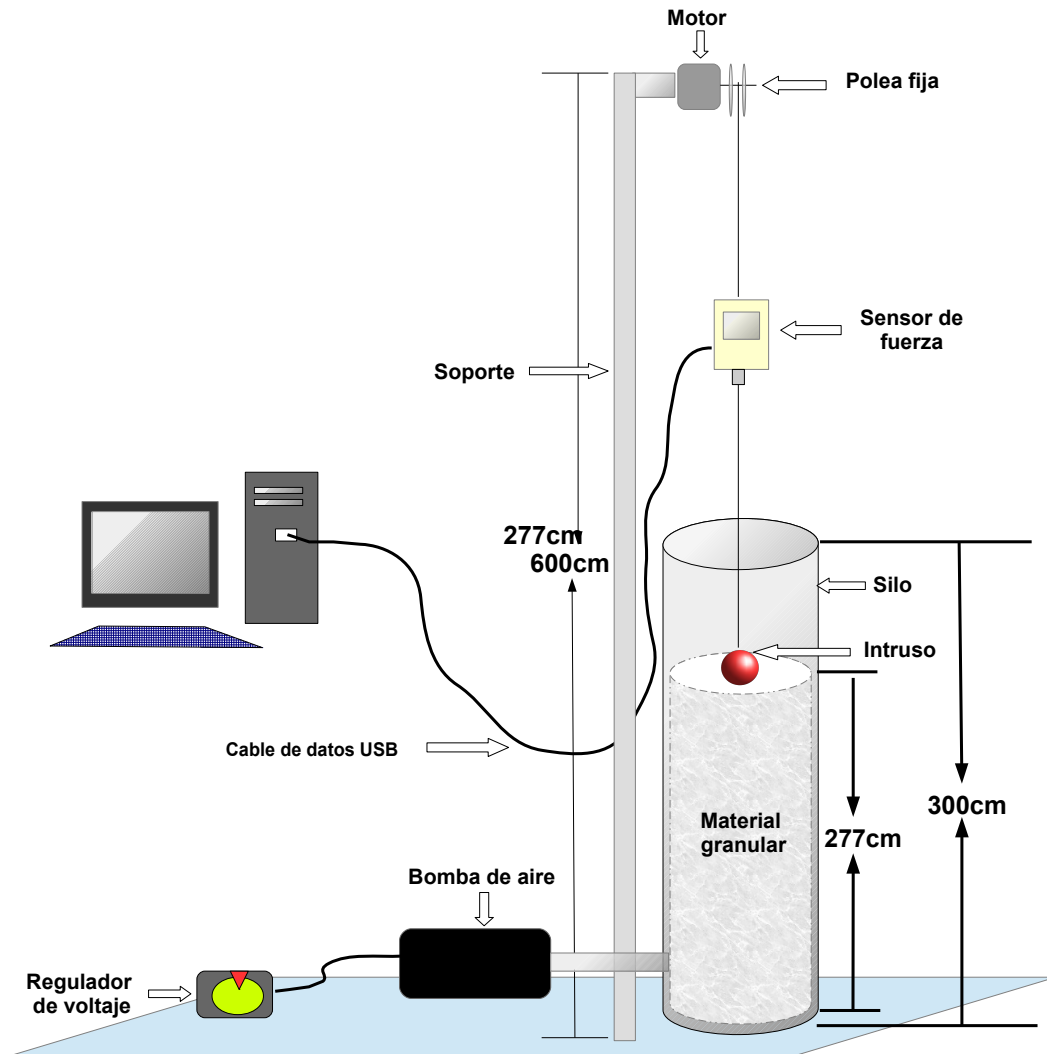


Figura 3.1: Vista esquemática del montaje experimental.

medida que el intruso penetra en los granos. Estando todo listo se enciende el motor para iniciar el descenso del intruso a una velocidad constante mientras los datos son capturados con una frecuencia de 10 hz y una precisión de  $\pm 0.01$  N y enviados a través de un cable de datos conectado al puerto micro USB del sensor al software MESUR<sup>TM</sup> Lite (instalado previamente en la computadora) y de ahí serán exportados a los softwares *OriginPro* y *QtiPlot* para su posterior análisis. La medición se detiene en el momento que la fuerza de penetración se nivela con el peso del objeto, dicho en otras palabras cuando el objeto se detiene. La profundidad alcanzada por el intruso en el medio granular es medida de manera directa. El material se prepara de nuevo mediante el procedimiento descrito anteriormente, ya que un proyectil al penetrar en un medio deja un camino conocido como

memoria o historia del experimento, lo cual interfiere en la mediciones haciendo necesario borrar dicha memoria. El experimento se repitió 5 veces para las diferentes masas y diámetros, y factores de empaquetamiento considerados en un rango de  $0.566 < \phi < 0.613$ .

### 3.1.1. Descripción de la determinación del rango del factor de empaquetamiento $\phi$

El rango del factor de empaquetamiento  $\phi$  se estableció de la siguiente manera. Inicialmente se calcula el volumen de los granos de poliestireno, para ello se mide la masa total del material con el que se va a trabajar usando una balanza, y la densidad del poliestireno usando técnica de flotación y líquido desalojado; luego, se calcula el volumen total (material en el silo), con estos dos valores se calcula el factor de empaquetamiento, haciendo el cociente del volumen de las partículas y el volumen total del material, es decir:

$$\phi = \frac{\text{Volumen de los granos}}{\text{Volumen total ocupado}} = \frac{m/\rho}{Ah}. \quad (3.1)$$

En nuestro caso los valores correspondientes fueron:

- masa total de granos empleada =  $3360 \pm 1$  g
- densidad del grano =  $0.022$  g/cm<sup>3</sup>
- Altura de la columna del material sin empaquetar =  $277$  cm
- Altura de la columna del material empaquetado =  $256$  cm
- Diámetro del silo =  $35.3 \pm 0.05$  cm

### 3.1.2. Descripción de la calibración del motor

Para calibrar el motor se ubicó éste a cierta altura y se hizo pasar una cuerda a través de la polea previamente adaptada al motor, del extremo libre de la cuerda se fijó una esfera; luego, se suministró un voltaje de 20 V al motor y la esfera inició su descenso. Se midió el tiempo que empleaba la esfera en recorrer diferentes alturas y con los datos obtenidos se realizó una gráfica de posición vs tiempo; luego, se le hizo un ajuste lineal, donde la pendiente de la recta obtenida corresponde a la velocidad, la cual fue de  $\approx 1.1$  cm/s.

A continuación se presenta la gráfica obtenida del procedimiento descrito anteriormente:

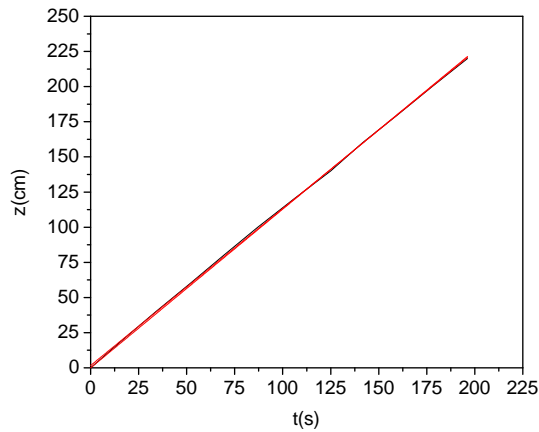


Figura 3.2: Calibración del motor. La pendiente de la recta corresponde a la velocidad a la que desciende la esfera,  $\approx 1$  cm/s.

## 3.2. Resultados experimentales y análisis

### 3.2.1. Diferentes regímenes de $F(z)$

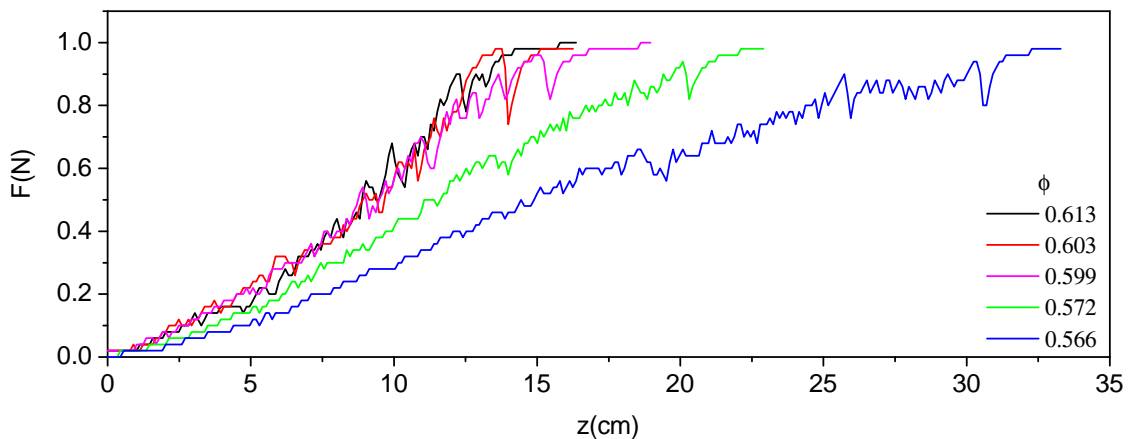


Figura 3.3: Fuerza de fricción en función de la profundidad para un intruso de masa de 100 g y diámetro 5.4 cm que penetra en un medio granular con diferentes factores de empaquetamiento  $\phi$ .

En la figura 3.3 podemos ver el comportamiento de la fuerza que experimenta una masa de 100 g y  $d_b = 5.4$  cm al penetrar en un medio granular, para 5 diferentes valores de empaquetamiento. Inicialmente vemos un comportamiento cóncavo para profundidades  $z \sim d_b$ , que de acuerdo con [23]

en este régimen la fuerza de fricción actúa localmente normal a la superficie del intruso, es decir, aumenta con el  $d_b^2$ . Seguido de esto se observa el régimen hidrostático donde la fuerza es lineal con la profundidad de penetración. Este régimen fue observado por Lohse *et al.* [14], al estudiar la dinámica de penetración de una esfera en una cama de arena fluidizada, donde encontraron que ésta experimenta una fuerza de fricción lineal con la profundidad, por simplicidad los investigadores la consideraron una fuerza de fricción de Coulomb de la forma  $-\kappa z$ . Posteriormente cuando el intruso está completamente enterrado a un nivel alrededor del doble de su diámetro vemos un punto de inflexión, que indica que la fuerza de fricción empieza a disminuir debido a la presión que ejercen los granos presentes en la parte superior de la esfera, lo que contrarresta una parte de la presión ejercida desde el fondo y será proporcional al volumen del intruso [19]. Finalmente observamos que la esfera continúa su inmersión y se detiene cuando la fuerza de penetración es aproximadamente igual al peso del objeto  $F(z) \approx W \approx 0.98$  N.

La fuerza  $F(z)$  experimentada por el intruso de 200 g, está representada en la figura 3.4. Vemos que inicialmente presenta el mismo comportamiento descrito anteriormente, sin embargo, contrario a la masa de 100 g  $F(z)$  si comienza a saturarse con  $z$ , pero el intruso todavía se detiene a una profundidad finita ( $\sim 100$  cm) cuando  $F(z) \approx 1.96$  N.

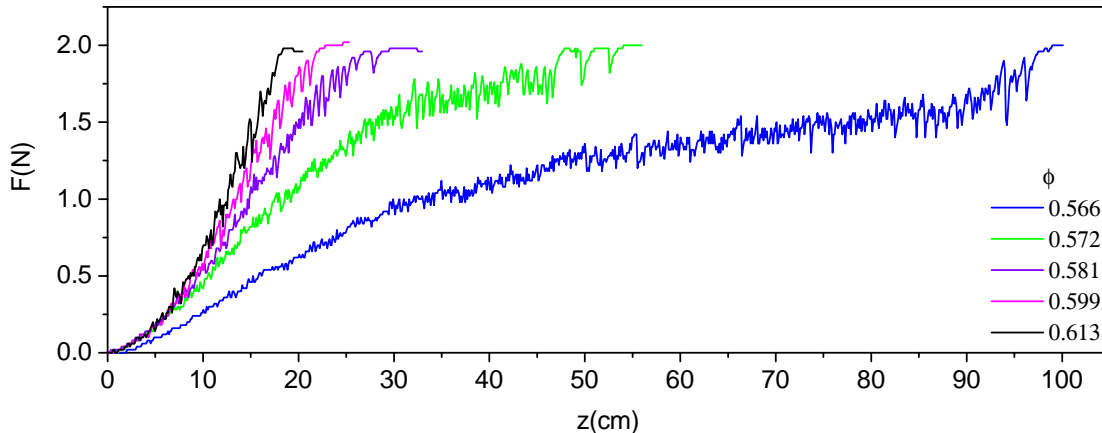


Figura 3.4: Fuerza de fricción en función de la profundidad para un intruso de masa de 200 g y diámetro 5.4 cm que penetra en un medio granular con diferente factores de empaquetamiento  $\phi$ .

Finalmente en las figuras 3.5 y 3.6 vemos el comportamiento de la fuerza de fricción para los intrusos de 357 y 445 g respectivamente. Donde se encontró que el comportamiento de  $F(z)$  para los diferentes factores de empaquetamiento considerados, es similar. Para los primeros cuatro valores de empaquetamiento mayores al empaquetamiento estándar (0.566) se observa que en cada caso, los intrusos logran penetrar hasta una región donde la fuerza de arrastre es lineal con la profundidad y se detiene cuando la fuerza de fricción se nivela con el peso del objeto  $F(z) = W$ . Para empaquetamientos bajos ( $\phi = 0.566$  a  $0.572$ ), donde los granos están más separados y en consecuencia

existen menos puntos de contacto entre ellos, lo cual genera que la transmisión del estrés sea menos eficiente en comparación cuando los granos están más compactos, lo que favorece que el intruso alcance mayores profundidades y al mismo tiempo el poder observar un segundo régimen, donde la fuerza de fricción es independiente de la profundidad y satura. Este comportamiento de  $F(z)$  concuerda con los hallazgos de Pacheco-Vázquez *et al.* [21], quienes encuentran que un proyectil con una masa mayor a la masa crítica  $m_c$ , al penetrar en un medio en el límite de bajas densidades llegará a una región donde la fuerza de fricción es de la forma  $-\kappa\lambda(1 - e^{-z/\lambda})$ .

Continuando con la inspección de las figuras 3.5 y 3.6. Se observa que el valor de saturación es de  $F(z) \approx 2.0 \pm 0.1$  N, menor que la fuerza requerida para detener a los intrusos, es decir de 3.5 N y 4.4 N, respectivamente, lo que les permite alcanzar profundidades cercanas al fondo del contenedor, zona en la que se observa claramente un rápido aumento de la fuerza de penetración tipo exponencial de la forma  $e^{-z/\lambda}$  debido al efecto del fondo y se detienen cuando  $F(z) = W$  en cada caso. Este comportamiento de  $F(z)$  fue observado por Stone *et al.* [15], al medir la resistencia que opone el medio a la penetración de una placa que es empujada con la ayuda de un penetrometro. Los autores argumentan que esto es debido al atascamiento de granos delante de la placa penetrante.

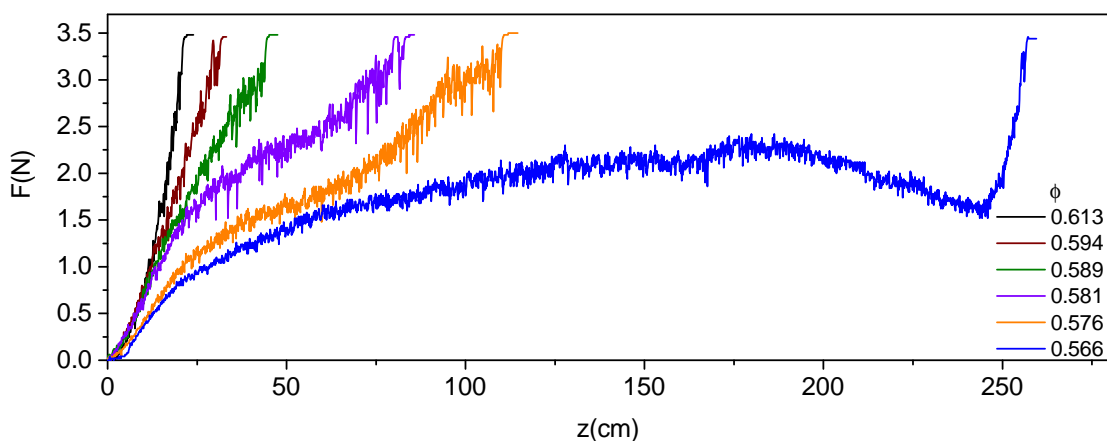


Figura 3.5: Fuerza de fricción en función de la profundidad, para un intruso de masa de 357 g y diámetro 5.4 cm, que penetra en un medio granular con diferentes factores de empaquetamiento  $\phi$ .

Es importante mencionar que el ruido presente en las mediciones es debido a las cadenas de fuerza que se extienden desde el intruso profundamente en el medio y son intermitentemente formadas y colapsadas durante el paso del intruso [11]. El número de fluctuaciones aumentará con el factor de empaquetamiento, puesto que la transmisión de fuerzas grano-grano solamente puede darse a través de puntos de contacto entre los granos y como se mencionó anteriormente el factor de empaquetamiento nos da una idea que tan compacto se encuentra el medio. Estas fluctuaciones de las cadenas de fuerza fueron medidas, para obtener que son del orden de 0.3 N en la zona de saturación, para pequeñas profundidades las fluctuaciones son menos pronunciadas, ya que esta

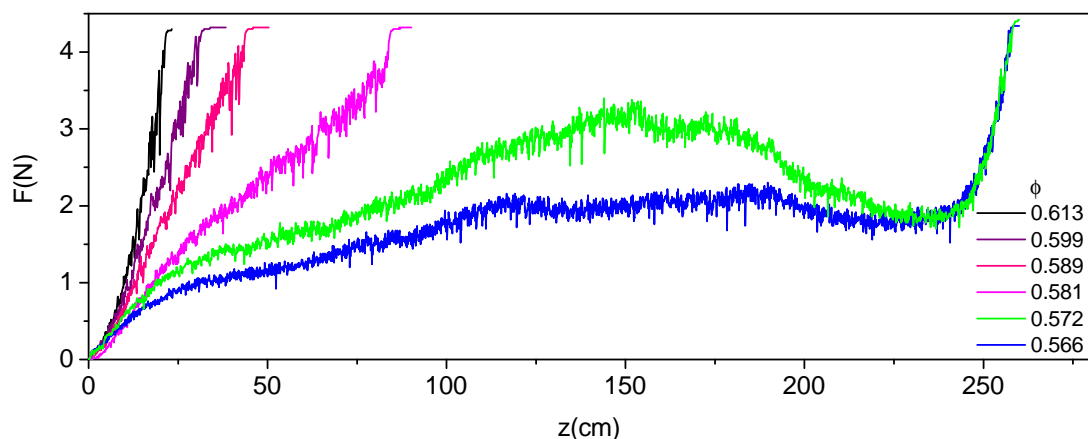


Figura 3.6: Fuerza de fricción en función de la profundidad para un intruso de masa de 445.3 g y diámetro 5.4 cm que penetra en un medio granular con diferentes factores de empaquetamiento  $\phi$ .

zona corresponde al régimen hidrostático, donde la presión aumenta con la profundidad por lo que el medio está más suelto a nivel de la superficie, lo que está en buen acuerdo con los resultados obtenidos a partir de simulaciones de dinámica molecular 2D reportadas en la referencia [21].

A continuación, para dar mayor claridad, se presenta una gráfica (figura 3.7) donde se señalan los tres regímenes de fuerza descritos anteriormente.

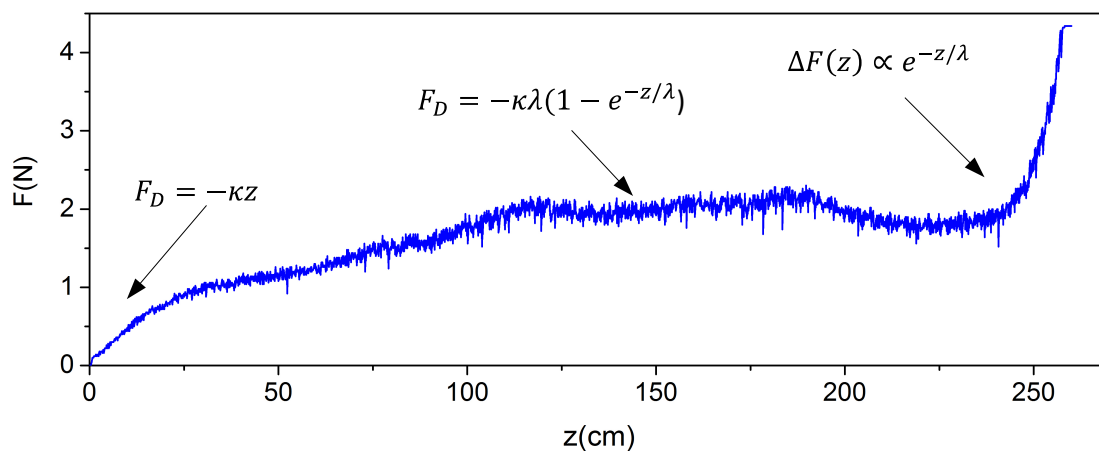


Figura 3.7: Regímenes de fuerza de fricción experimentada por un proyectil de  $m = 445$  g y  $d_b = 5.4$  cm en un medio granular con empaquetamiento estándar  $\phi = 0.566$

Con el fin de modelar la observación de la fuerza descrita anteriormente, se llevó a cabo el diseño de una gráfica de  $F(z)$  vs  $z$  (Figura 3.8) para un intruso de diámetro  $d_b = 5.4$  cm y masa variable de 100, 200, 357 y 445 g que penetra en el medio a un factor de empaquetamiento estándar

de  $\phi = 0.566$ .

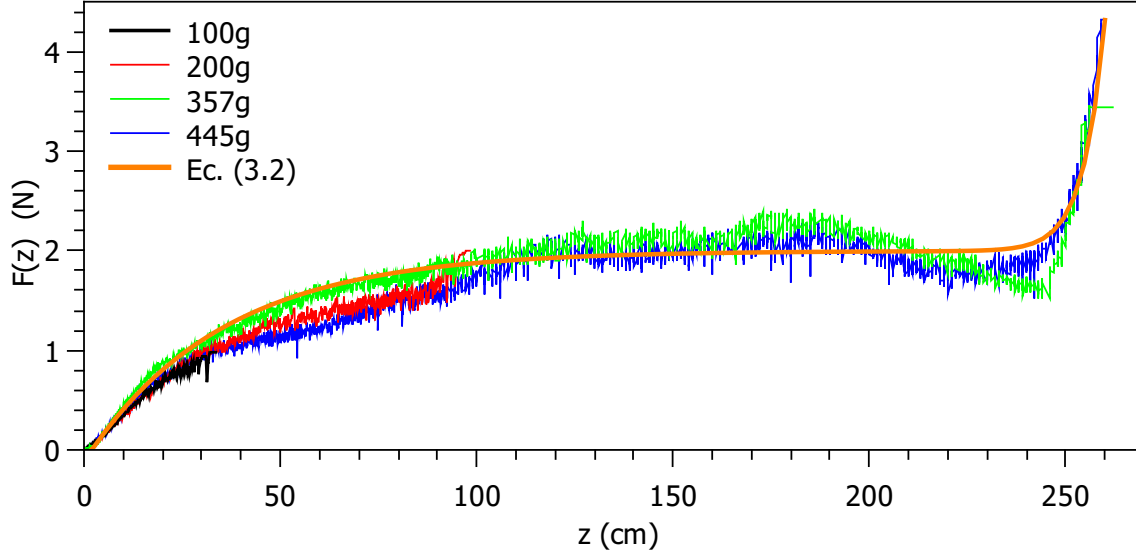


Figura 3.8:  $F(z)$  vs  $z$  durante la penetración de un intruso esférico de  $d_b = 5.4$  cm en una columna granular superligera con un empaquetado estándar  $\phi = 0.566$  para diferentes valores de masa. Se observan los tres regímenes de  $F(z)$ : casi lineal, saturación y aumento exponencial cerca del fondo del silo.

Para la modelación consideramos una combinación entre dos términos, uno de ellos es un término de saturación igual al propuesto por Pacheco-Vázquez *et al.* [21], para la fuerza de fricción experimentada por un proyectil que penetra hasta una región donde la presión satura debido al efecto Janssen, ecuación (2.9), cabe recordar que  $\kappa$  es una constante y  $\lambda$  es una longitud característica relacionada con el diámetro del contenedor. El segundo término corresponde a la expresión de la fuerza de penetración reportada por Stone *et al.* [15] para un objeto que se aproxima al fondo del contenedor, recordemos que dicho comportamiento es el resultado del atascamiento de granos delante del objeto penetrante, lo cual produce que  $F(z)$  crezca exponencialmente. De acuerdo con esto la expresión obtenida es:

$$F(z) = \kappa\lambda(1 - e^{-(z-z_0)/\lambda}) + Ae^{-(H-z)/\lambda^*}, \quad (3.2)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de saturación,  $H = 277$  cm es la altura de la columna granular y  $\lambda^*$  es una longitud relacionada con los efectos de confinamiento en la parte inferior del silo. El parámetro  $z_0$  debe ser introducido teniendo en cuenta que el comportamiento lineal no se observa hasta que la pelota está totalmente sumergida en el medio granular [19, 23]. Cuando  $z$  la profundidad del intruso es pequeña en comparación con  $H$  ( $z \ll H$ ), el segundo término se hace muy muy pequeño, tanto que es posible despreciarlo, quedando la fuerza de fricción descrita por el primer término. En el caso contrario, en el que el intruso alcance una profundidad  $z$  grande, cercana a la longitud de la columna granular, este segundo término ya no será despreciable y será el que describa el

rápido aumento de la fuerza a profundidades mayores. El valor considerado para el producto de  $\kappa\lambda$ , corresponde al valor al cual la fuerza satura, que en este caso es  $F(z) \approx 2.0 \pm 0.1$  N (ver figura 3.8). La ecuación (3.2) se utilizó para ajustar los datos para  $m = 445$  g en la figura 3.8 (línea naranja continua), que da  $\kappa = 0.0482$  N/cm,  $\lambda = 41.5 \pm 0.1$  cm  $\sim O(D_{silo})$  cm,  $\lambda^* \approx 5.4$  cm  $\sim O(d_b)$  y  $z_0 \sim 3$  cm. Como podemos observar para  $z_0 \ll \lambda$ , es despreciable para  $\phi = 0.566$ .

### 3.2.2. Penetración de intrusos de diferentes tamaños

Se midió la fuerza de penetración experimentada por cinco intrusos de diferentes diámetros  $d_b = 4.8, 6.1, 7.0, 7.8$  y  $9.4 \pm 0.5$  cm de masa constante  $m = 600$  g penetrando en un medio a  $\phi = 0.566$ . Los resultados se muestran en la figura 3.9, donde se observa que para  $d_b = 7.8$  cm, el intruso alcanza la zona de saturación. Mientras que el intruso  $d_b = 9.4$  cm, se detiene a  $z \approx 40$  cm mostrando solamente el régimen lineal. Para los tres casos restantes la penetración termina cuando el peso de la bola ha sido equilibrado, es decir en  $F = 5.88$  N.

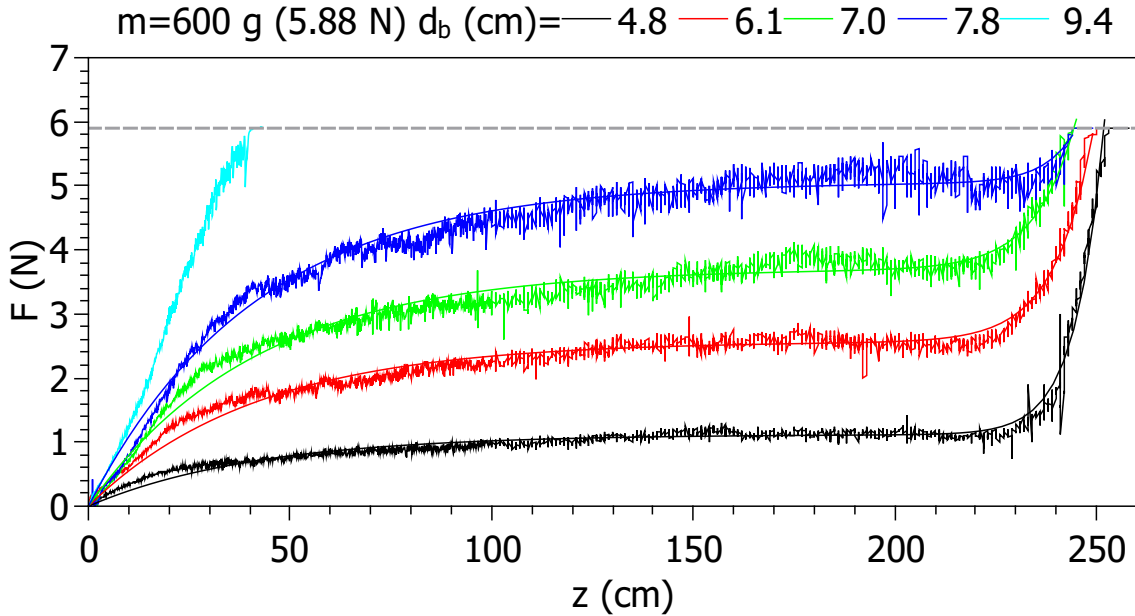


Figura 3.9:  $F(z)$  vs  $z$  durante la penetración de un intruso esférico de masa constante y diámetros diferentes. El factor de empaquetamiento de la columna granular también es constante,  $\phi = 0.566$ . En cuatro de los cinco casos  $F_{sat} < W$  y el intruso alcanzó la zona de saturación. Las líneas de color sobrepuestas, corresponden al ajuste hecho con la Ec. (3.2) a las mediciones experimentales

Si centramos nuestra atención en la región donde la fuerza satura con la profundidad (ver gráfica 3.9) es posible determinar la fuerza de saturación promedio,  $F_{sat}$  experimentada por cada intruso.

Encontrando que  $F_{sat}$  aumenta con  $d_b$  como se puede observar en la figura 3.10a. A partir de la gráfica log-log (inserción en la figura 3.10a) se revela que  $F_{sat}$  sigue una ley de potencia dada por  $F_{sat} = (0.015 \pm 0.002)d_b^{2.83 \pm 0.08} \approx Ad_b^3$ . Puesto que  $F_{sat} = \kappa\lambda$ , de la ecuación (2.9) se puede escribir la fuerza de resistencia como:  $F(z) \approx Ad_b^3(1 - e^{-z/\lambda})$ . Por otra parte, haciendo un ajuste (líneas de color sobrepuestas) a las curvas de la figura 3.9 con la ecuación (3.2) es posible conocer la magnitud de  $\lambda$  para cada  $d_b$ , cuyos valores se muestran en la figura 3.10b, con lo que encontramos que  $\lambda$  toma un valor casi constante de  $\lambda \sim O(41.5 \text{ cm})$  en el rango de  $d_b$  considerado.

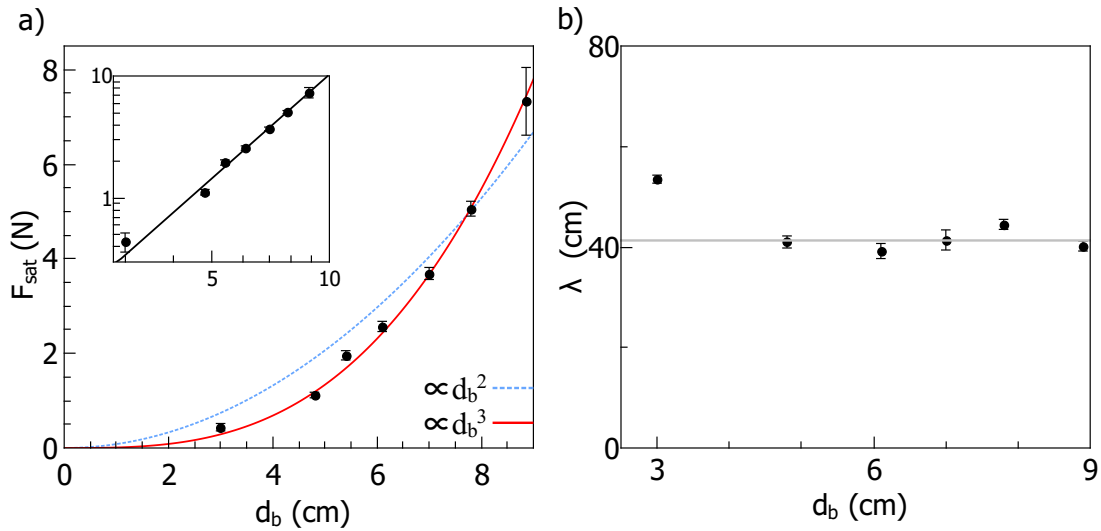


Figura 3.10: a) Fuerza de saturación vs diámetro del intruso. Se presentan los valores promediados de la fuerza de saturación para cada diámetro empleado, donde la curva azul punteada corresponde a  $F_{sat} \propto d_b^2$  y la curva roja a  $F_{sat} \propto d_b^3$  que se ajusta mejor a los datos experimentales. La gráfica log-log incertada revela que  $F_{sat}$  sigue una ley de potencia dada por  $F_{sat} = (0.015 \pm 0.002)d_b^{2.83 \pm 0.08}$  b)  $\lambda$  vs  $d_b$  muestra los valores de  $\lambda$  estimados para el rango de  $d_b$  estudiado, encontrando que toma un valor casi constante de  $\lambda \sim O(41.5 \text{ cm})$ .

Ahora bien, retomando la relación de proporcionalidad encontrada entre  $F_{sat}$  y  $d_b$ , y contrastandola con lo reportado en Ref [23], donde encontraron que la fuerza de fricción total que experimenta un intruso que se mueve hacia abajo en un medio granular actuará en dirección contraria al movimiento del objeto, es decir hacia arriba y sobre cada uno de los elementos de área de superficie del intruso. Lo cual se expresa como  $d\mathbf{F} = \alpha\mu(\rho gz)d\mathbf{A}$  donde  $\mu$  es un coeficiente de fricción interno igual a la tangente del ángulo de reposo,  $\rho gz$  es la presión hidrostática,  $d\mathbf{A}$  es un elemento de área infinitesimal que señala perpendicular a la superficie del proyectil y  $\alpha$  es una constante adimensional. Ahora si se considera el caso en el que la fuerza a saturado, la expresión anterior resulta en  $d\mathbf{F}_{sat} = Cd\mathbf{A}$ , integrando una esfera, que corresponde a la geometría de nuestro intruso, se obtiene  $F_{sat} \propto d_b^2$ , lo que no coincide con nuestros hallazgos de  $F_{sat} \propto d_b^3$ . Obsérvese, sin embargo, en la figura 3.10a que la dependencia de potencia cuadrada (línea azul punteada) está lejos de los resultados experimentales, dando una mejor aproximación la dependencia de potencia cubica (línea roja)

descrita anteriormente. Es importante aclarar que en la Ref [23], los resultados se obtuvieron sólo para penetraciones poco profundas del orden de un diámetro de la esfera ( $\sim 3$  cm). En nuestro caso la penetraciones consideradas son profundas, donde  $F$  es independiente de  $z$  y el efecto de  $d_b$  se puede medir directamente en un largo rango de penetración y lejos de la superficie del medio.

Por otro lado, sabemos que en dicha zona  $F_{sat} = m_c g$ , por lo que es posible conocer el valor de la masa crítica para cada  $d_b$ , los valores obtenidos están representados por puntos negros en la figura 3.11.

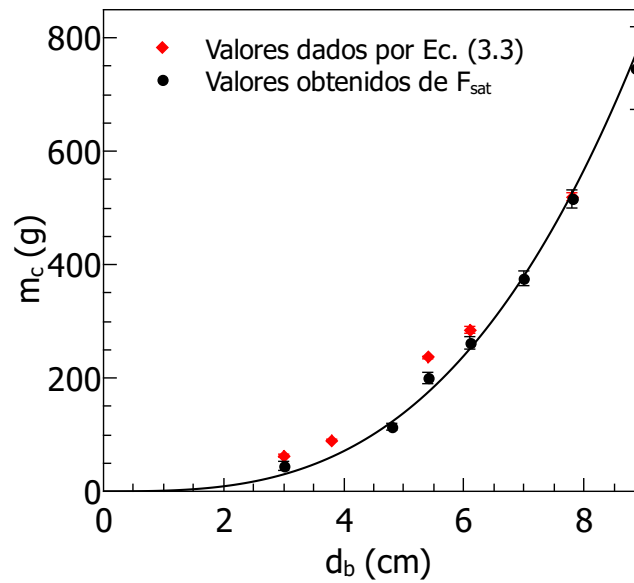


Figura 3.11:  $m_c$  vs  $d_b$ . Valores de la masa crítica de intrusos con diferentes diámetros obtenidos de la  $F_{sat}$  (puntos negros) y de la ecuación (3.3) (diamantes rojos).

Un método alternativo para encontrar  $m_c$  es variando la masa de los intrusos que se detienen a una profundidad final  $Z_f$  hasta alcanzar la masa a la que el intruso penetraría indefinidamente si el silo fuese infinito. Este procedimiento se llevó a cabo utilizando cuatro esferas de diferentes diámetros  $d_b = 3.0, 3.8, 5.4$  y  $7.8 \pm 0.5$  cm, los resultados se muestran en la figura (símbolos). Puesto que  $Z_f$  es alcanzado cuando el peso del intruso es equilibrado por la fuerza de resistencia ( $v = 0$  y  $a = 0$ ) lejos del fondo, lo cual se expresa como:  $mg = \kappa\lambda(1 - e^{-(Z_f - z_0)/\lambda})$  resolviendo para  $Z_f$  se obtiene:

$$Z_f = -\lambda \ln(1 - mg/\kappa\lambda) + z_0, \quad (3.3)$$

donde  $m_c = \kappa\lambda/g$  y  $z_0 \ll \lambda$  es despreciable para el empaquetamiento estándar. La ecuación (3.3) se utilizó para ajustar las mediciones experimentales de  $Z_f$  usando  $\lambda = 41.5$  cm y dejando  $m_c$  como parámetro libre. Los mejores ajustes están representados en la figura 3.12 por líneas continuas.

En cuanto a los valores de  $m_c$  dados por el ajuste, se encuentran representados gráficamente con diamantes rojos en la figura 3.11, como se puede observa, estos son en todos los casos mayores que los valores dados por la fuerza de saturación. Nuestra explicación a tal diferencia es que, en el primer método, se utilizó el promedio de la fuerza que experimenta el intruso en la zona de saturación,  $F_{sat}$ . Sin embargo, como puede observarse a partir de los diagramas (ver figura 3.9), existen fluctuaciones de fuerza mayores que el valor medio, las cuales son capaces de detener al intruso de masa  $m_c = F_{sat}/g$ . Por lo tanto se requiere de un valor de masa ligeramente superior al predicho para superar tales fluctuaciones de cadenas de fuerza y penetrar indefinidamente a través de la columna granular.

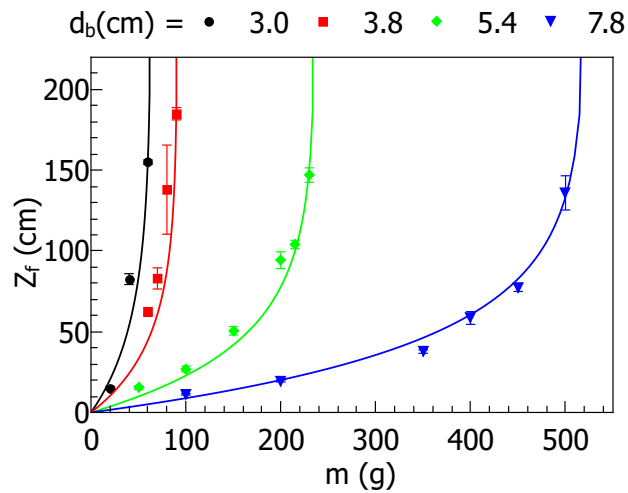


Figura 3.12:  $Z_f$  vs  $m$ . Mediciones experimentales de la profundidad final (símbolos) alcanzadas por intrusos de diferentes diámetros, el medio se encuentra a  $\phi = 0.566$ . Las curvas de color representan el mejor ajuste dado por la Ec. (3.3)

### 3.2.3. Efecto del empaquetamiento del medio

En las últimas décadas se han llevado a cabo experimentos a escala de laboratorio para entender la cinemática y dinámica de penetración de proyectiles en medios granulares y su dependencia con parámetros como: el factor de empaquetamiento estándar, la fricción de deslizamiento, la masa y forma del proyectil, tamaño de grano, entre otros, sin embargo, hasta la fecha no se ha reportado un estudio donde se informe cómo se modifica la cinemática y la dinámica cuando el medio se encuentra a diferentes factores de empaquetamiento ( $\phi$ ). Con el fin de determinar dicha dependencia, se midió la fuerza de penetración experimentada por un intruso de masa constante ( $m = 600$  g, peso  $W = 5.88$  N) que penetra en un medio granular con diferentes valores de  $\phi$ , las mediciones obtenidas se representan en la figura 3.13. En dicha figura podemos observar que para empaquetamientos  $\phi \leq$

0.589, el intruso alcanza la zona de saturación y penetra profundamente en la columna granular hasta detenerse cerca del fondo cuando la fuerza crece exponencialmente. Para empaquetamientos más altos, sólo se observa el régimen lineal, la fuerza de penetración crece más rápido y el intruso se detiene cuando su peso es equilibrado por  $F(z) = 5.88$  N.

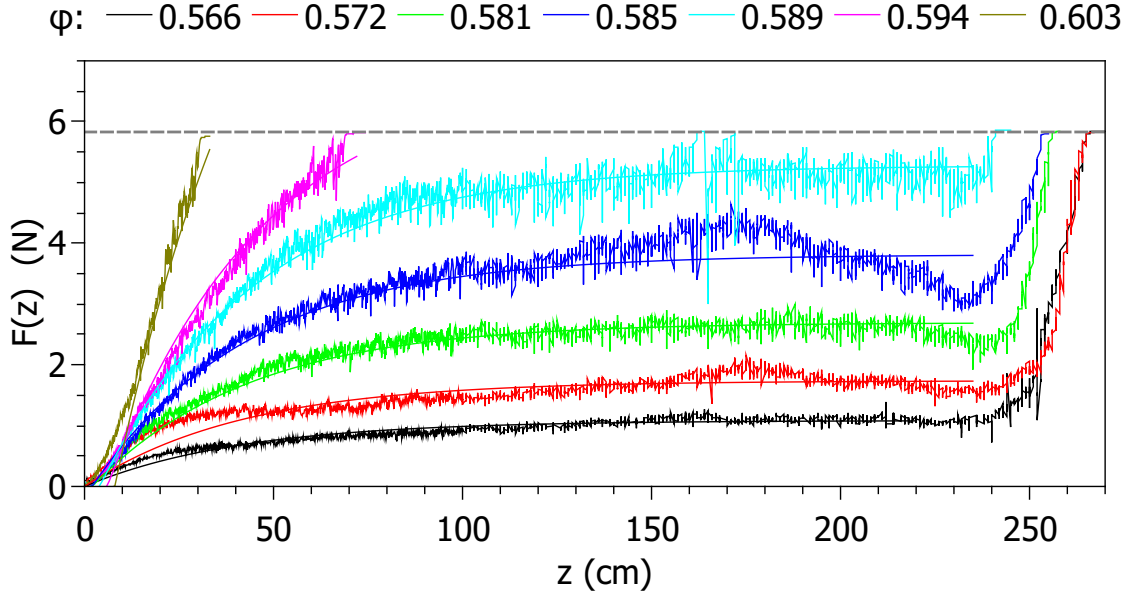


Figura 3.13:  $F(z)$  vs  $z$  experimentada por un intruso de masa constante  $m = 600$  g ( $W = 5.88$  N) y diámetro  $d_b = 4.8$  cm para diferentes factores de empaquetamiento. La línea discontinua corresponde a  $F(z) = W$  y el intruso se detiene cuando se alcanza este valor.

Posteriormente calculamos la fuerza de saturación promedio y con la información obtenida se construyó una gráfica de  $F_{sat}$  vs  $\phi$  (ver figura 3.14a), encontrando que ésta tiene una dependencia que se ajusta muy bien a la forma:

$$F_{sat} = \beta d_b^3 \left( e^{\gamma \left( \frac{\phi - \phi_0}{\phi_{max} - \phi} \right)} - 1 \right). \quad (3.4)$$

El mejor ajuste sobre los datos experimentales está representado con la línea negra en la figura 3.14a, donde  $\beta = 0.042 \pm 0.002$  N,  $\gamma = 0.56 \pm 0.06$  y  $\phi_{max} = 0.62 \pm 0.005$  y  $d_b = 4.8$  cm y  $\phi_0 = 0.548$  que corresponde al valor de empaquetamiento en el que la fuerza  $F(z)$  experimentada por el intruso es cero. El valor de  $\phi_0$  se estimó midiendo la fuerza de penetración experimentada por el intruso al penetrar en el medio expandido por la acción de un flujo ascendente de aire que fue suministrado a diferentes caudales. Puesto que es de conocimiento, que cuando los granos comienzan a ser suspendidos por el flujo de aire intersticial, el contacto entre ellos se pierde y la fuerza de fricción  $F(z)$  se aproxima a cero. En nuestro caso, esto ocurrió cuando  $\phi \approx 0.545 - 0.548$ . Es importante aclarar que el flujo de aire se mantuvo “encendido” durante el experimento sólo para

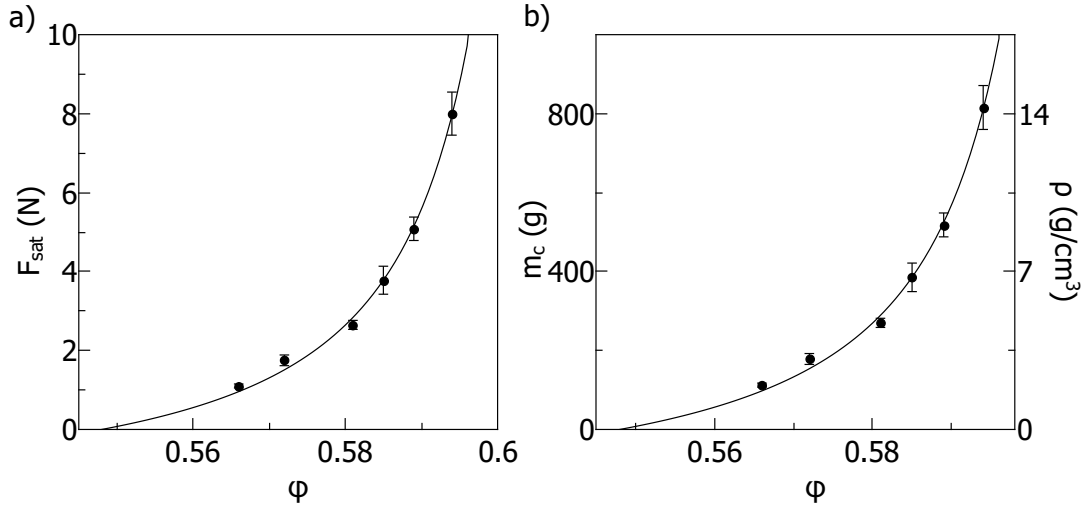


Figura 3.14: a)  $F_{sat}$  vs  $\phi$ . Valores de la fuerza de saturación (puntos negros) de intrusos con diferentes diámetros y masa constante, el medio granular se encontraba a  $\phi = 0.566$ . La línea negra corresponden al mejor ajuste de los datos dados por la Ec. (3.4) b)  $m_c = F_{sat}/g$  vs  $\phi$  en el eje derecho se indica la densidad del intruso.

el caso  $\phi = \phi_0$ . Para los demás experimentos, el flujo de aire sólo se utilizó para preparar el medio antes de la penetración del intruso.

Si condensamos nuestros resultados, tales como: la dependencia de  $F_{sat}$  con  $d_b^3$  y  $\phi$ , y teniendo en cuenta que  $F_{sat} = \kappa\lambda$ , podemos reescribir la ecuación (3.2) y obtener una expresión que describa la fuerza de resistencia en función de la profundidad, el factor de empaquetamiento y el diámetro del intruso, dicha expresión resulta ser:

$$F(z) \approx \beta d_b^3 \left( e^{k \left( \frac{\phi - \phi_0}{\phi_{max} - \phi} \right)} - 1 \right) (1 - e^{-(z-z_0)/\lambda}). \quad (3.5)$$

Esta expresión se representó en la figura 3.13 para diferentes valores de  $\phi$  (líneas de color sobrepuestas); con  $\lambda = 41.5$  cm y los valores constantes obtenidos de la ecuación (3.4). Como podemos apreciar, el acuerdo con los resultados experimentales es notable.

Adicionalmente, calculamos el valor de la masa mínima que un intruso debe tener para penetrar indefinidamente dependiendo del factor de empaquetamiento, partimos del hecho que  $F_{sat} = m_c g$ , los valores resultantes fueron trazados en una gráfica de  $m_c$  vs  $\phi$  (ver figura 3.14b). El eje derecho indica la densidad correspondiente de cada intruso, con lo que podemos hacer la siguiente lectura: Un intruso de densidad por encima de la línea negra que penetra en el medio a un empaquetamiento dado, se hundiría sin fin a través del lecho granular.

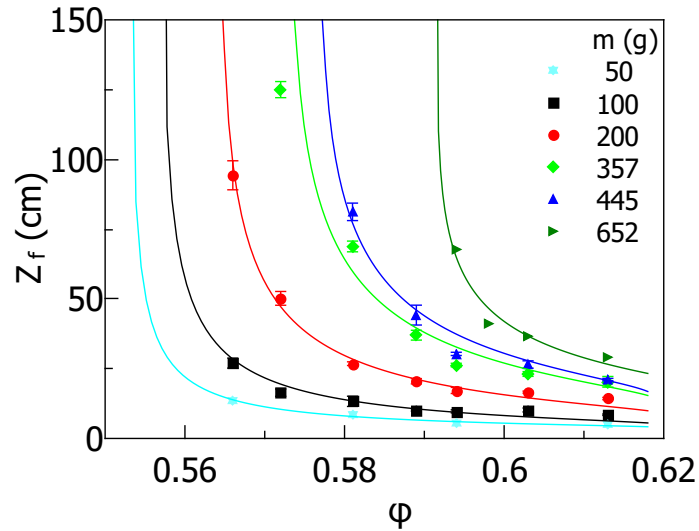


Figura 3.15:  $Z_f$  para intrusos de diámetro  $d_b = 5.4$  cm y varias masas que penetran en lechos granulares con  $\phi$  diferente. Las líneas continuas corresponden a la ecuación (3.6).

Finalmente, podemos construir una expresión que permita estimar la profundidad final  $Z_f$  alcanzada por un intruso de una masa dada dependiendo del factor de empaquetamiento del medio. Puesto que  $m_c = \kappa\lambda/g$ , y combinando la ecuación (3.3) y (3.4), obtenemos:

$$Z_f = -\lambda \ln \left( 1 - \frac{mg}{\beta d_b^3 \left( e^{\gamma \left( \frac{\phi - \phi_0}{\phi_{max} - \phi} \right)} - 1 \right)} \right). \quad (3.6)$$

Esta expresión se representó en la figura 3.15 como función de  $\phi$  para diferentes valores de masa (líneas de color) con  $\beta$  como único parámetro libre y  $z_0$  fue determinado a partir de la penetración en el empaquetamiento máximo, en cuanto a  $\lambda$ , que depende ligeramente de  $\phi$ , se consideró su valor medio  $\lambda = 41.5$  cm. Como podemos observar en la figura 3.15, las soluciones de la ecuación (3.6), describen razonablemente bien los resultados experimentales (símbolos) en el rango explorado. Es importante aclarar que la dependencia exacta de los parámetros libres con las propiedades del medio y la geometría del intruso no se analizó en esta investigación y se debe tener cuidado al usar sus valores debido a la alta sensibilidad del sistema al empaquetamiento del medio. Sin embargo, es preciso resaltar que la existencia de la fuerza de saturación (es decir, una masa crítica) y su dependencia con el volumen del intruso y empaquetamiento del medio son resultados confiables medidos directamente durante la penetración, y son contribuciones importantes de este estudio.

# 4

## Conclusiones

La fuerza de resistencia a la penetración de un intruso esférico en una columna granular ultraligera se analizó variando el diámetro del intruso, su masa y factor de empaquetamiento del medio en una condición que permite no tomar en cuenta la contribución de la resistencia inercial. Los resultados confirman que:

- Bajo condiciones específicas, un intruso puede penetrar indefinidamente a través de una columna granular debido a la saturación de la fuerza de resistencia por el efecto Janssen. Las condiciones experimentales aquí propuestas posibilitaron el poder observar por primera vez los tres regímenes de fuerza reportados en investigaciones previas en una sola medición, los cuales corresponden a: un régimen hidrostático donde la fuerza aumenta con la profundidad, seguido de un régimen donde la fuerza satura debido al efecto Janssen y finalmente un régimen donde la fuerza aumenta exponencialmente debido al efecto del atascamiento de granos frente al objeto penetrante.
- Se logró construir una única ecuación que describe perfectamente la fuerza de resistencia en función de la profundidad que experimenta un intruso que penetra en un medio granular, a partir de la combinación de dos términos; un término que satura con la profundidad [21] y un término exponencial debido al efecto del fondo [15].
- El ruido presente en las mediciones es debido a las cadenas de fuerza que se extienden desde el intruso profundamente en el medio y son intermitentemente formadas y colapsadas durante el paso del intruso, como lo reportan Behringer *et al.* [11]. También se observó que el número de fluctuaciones aumentará con el factor de empaquetamiento, así como con la profundidad, incluso estarán presentes durante el régimen de velocidad terminal, tal como lo informó Pacheco-Vázquez *et al.* [21]. Es preciso resaltar que gracias a la implementación de

un sensor de fuerza se logró hacer una medición directa no sólo de la fuerza que opone el medio granular a la penetración de un intruso, sino de la magnitud de dichas fluctuaciones, las cuales son del orden de 0.3 N en la zona de saturación.

- A partir de la medición directa de  $F(z)$  usando un sensor de fuerza mientras el intruso penetra en una columna granular de esferas de poliestireno expandido, logramos determinar el valor medio de la fuerza de saturación, encontrando que ésta es proporcional al volumen de la esfera, lo cual, al contrastarlo con el estudio realizado por Brzinski *et al.* [23] no coinciden. Puesto que, estos encontraron que la fuerza de fricción cuasiestática que actúa sobre un intruso que se mueve hacia abajo en un medio granular actúa localmente normal a la superficie del intruso.
- Es posible estimar el valor de la masa crítica a partir del valor de  $F_{sat}$ , haciendo la salvedad que se debe considerar un valor relativamente mayor a  $m_c = F_{sat}/g$ , debido a que el valor de  $F_{sat}$  es el valor medio y existen fluctuaciones mayores a éste valor, capaces de detener al intruso y evitar penetraciones infinitas a través de la columna granular.
- Se determinó la dependencia de los parámetros  $\kappa$  y  $\lambda$  en función del factor de empaquetamiento ( $\phi$ ). Encontrando que es  $\lambda = 41.5$  cm y es independiente del factor de empaquetamiento y el diámetro del intruso. En cuanto al parámetro  $\kappa \alpha e^{\left(\frac{(\phi-\phi_0)}{(\phi_{max}-\phi)}\right)}$ .
- Encontramos que al fluidizar totalmente el medio, los granos se suspenden en el flujo de aire y se expanden, con lo cual la fuerza de fricción se hace cero, y la dinámica estaría dominada por la fuerza de arrastre viscoso.
- A partir del estudio de la dependencia del factor de empaquetamiento,  $\phi$ , con la fuerza de fricción, se logró plantear una ecuación final que permite describir razonablemente bien la fuerza de resistencia en función de la profundidad, el factor de empaquetamiento y el diámetro del proyectil.

Los hallazgos obtenidos a partir de la realización de la presente investigación, permitieron la elaboración de un artículo científico, titulado: *Friction force regimes and the conditions for endless penetration of a projectile into a granular medium*, con lo que buscamos informar a la comunidad científica y así contribuir en la comprensión de la dinámica de penetración en medios granulares y sus diferentes aplicaciones.

Finalmente, es preciso resaltar que durante el proceso de realización de la tesis, es decir desde el momento de la elaboración del protocolo, diseño y desarrollo de la metodología propuesta y fase de escritura de la tesis, se alcanzaron diferentes logros, no sólo en el ámbito académico, también en el aspecto formativo, tales como: el haber aprendido algunas técnicas experimentales, en análisis de imágenes y videos de alta velocidad, así como técnicas de seguimiento de partículas. La investigación también requirió el contar con conocimientos en materia granular, por lo que se hizo un

---

abordaje bibliográfico, lo que conllevó a adquirir un grado de dominio en la dinámica de penetración en medios granulares, y por último, pero no menos importante, se hizo evidente la importancia de ser un agente activo en el quehacer científico y así aportar y apoyar la divulgación científica como herramienta en el desarrollo de una mejor sociedad, con lo que de alguna manera se busca retribuir el voto de confianza que da la sociedad al científico, al considerarlo como elemento base en el desarrollo de la ciencia, así como, en asignarle fondos públicos a favor de este fin.

---



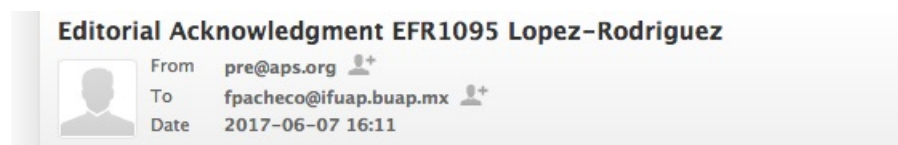
# Apéndices





## Documentos adjuntos

Se adjunta la portada del artículo que se elaboró a partir de la investigación realizada en esta tesis, el cual se encuentra en proceso de revisión. También se adjunta una impresión de pantalla del correo, de recibido, enviado por la revista *Physical Review E*.



Re: EFR1095  
Friction force regimes and the conditions for endless penetration of a projectile into a granular medium  
by L. A. Lopez-Rodriguez and F. Pacheco-Vazquez

Dear Dr. Pacheco-Vazquez,

The editors acknowledge receipt of this manuscript on 07 June 2017 and are considering it as a Rapid Communication in Physical Review E. When sending correspondence regarding this manuscript please refer to the code number EFR1095.

## Friction force regimes and the conditions for endless penetration of an intruder into a granular medium

L.A. López-Rodríguez and F. Pacheco-Vázquez\*

*Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48, Puebla 72570, Mexico*

(Dated: August 23, 2017)

A projectile penetrating into a granular bed experiences a depth dependent friction force  $F(z)$ . Different regimes of  $F(z)$  have been measured depending on the experiment features: a nearly linear dependence for shallow penetrations, total saturation at large depths, and an exponential increase when the projectile approaches the bottom of the granular column. We report here an experiment that allows us to measure the different regimes in a single run during the quasi-static descent of an intruder in a light granular medium. It was found that  $F(z)$  follows a cube-power law dependence with the intruder diameter,  $d_b$ , and an exponential increase with the packing fraction of the bed,  $\phi$ . From the analysis of the resistance in the saturation zone, we determine the critical mass  $m_c$  required to observe infinite penetration and its dependence with  $d_b$  and  $\phi$ . Finally, we use our results to estimate the final penetration depth reached by intruders of masses  $m < m_c$ . The results indicate that an intruder of any density (larger than the density of the granular bed) can sink indefinitely into the granular medium if the bed packing fraction is smaller than a critical value.

### INTRODUCTION

Since the XIX century, the penetration dynamics of projectiles in sand and clay was an important topic in ballistics[1]. Initial experiments were focused on the resistance force to the horizontal penetration at low velocities ( $v < 100$  m/s) [2–5]. Poncelet [3] posed a total resistance given by the sum of two terms: a constant friction term plus a viscous term, similar to that in fluids, proportional to the velocity square. At the beginning of the present century, the understanding of impact cratering motivated lab-scale studies about the impact and vertical penetration of projectiles in a model granular bed [6–11]. In this context, the dynamics of a projectile of mass  $m$  falling through a granular medium under the influence of gravity  $g$  is well approached by the expression:

$$m\ddot{z} = mg - F(z) - \eta\dot{z}^2 \quad (1)$$

where  $F(z)$  is a friction term, often taken to be linear with depth  $z$  [10, 11], and  $\eta$  is a constant. More recent studies propose the addition of a term linear in velocity to the viscous drag [12, 13], or a linear differential equation based on energy-depth analysis [14]. It was also reported that the frictional term scales as the square-root of the density of granular medium and projectile, which is typically larger than the combination of hydrostatic pressure and Coulomb friction law[15]. Nevertheless, in ref. [16], it was shown that  $F(z)$  is determined by the normal force proportional to the intruder surface. This force is set by a friction coefficient, hydrostatic pressure, and the projectile size and shape. The linear dependence on depth is only recovered for spherical projectiles when  $z$  is larger than the ball diameter [16, 17].

On the other hand, the friction term  $F(z)$  becomes constant if a projectile penetrates very deep into a granular column until reach the zone where the pressure saturates due to the Janssen effect[8, 18, 19]. This happens

if the projectile density is much larger than the density of the confined grains[19], or, as we show in the present work, for low packing fractions of the bed. Under these considerations, the projectile motion is well described by:

$$m\ddot{z} = mg - \kappa\lambda(1 - e^{-z/\lambda}) - \eta\dot{z}^2 \quad (2)$$

where  $\kappa$  is a constant, and  $\lambda$  is a saturation length [19]. Finally, when the projectile is getting to the bottom of the column, the resistance force increases exponentially as  $F(z) \propto e^{-z/\delta}$ , where  $\delta$  is a characteristic length scale for sensing the bottom of the container [8].

In this work, the different regimes of the static friction term are detected by directly measuring  $F(z)$  using a force sensor while the intruder penetrates a granular column of expanded polystyrene beads. In contrast to refs. [19, 20], the experiments are performed at negligible velocity in order to discard the inertial viscous term. Our work is focused in two aspects: a) to measure the transition between different regimes and describe the dynamics with a single equation for  $F(z)$ , and b) to explore the effect of intruder size and packing fraction (the latter, rarely analyzed) in the final penetration depth.

### EXPERIMENTAL SETUP

The experimental setup is sketched in Fig. 1a. The silo consists of a cardboard tube of inner diameter  $D_{\text{silo}} = 35.3 \pm 0.05$  cm and 300 cm long filled with  $3360 \pm 1$  g of expanded polystyrene beads (average density  $\rho_g = 0.022$  g/cm<sup>3</sup> and radius  $r = 2 \pm 0.5$  mm). The effective density of the granular bed obtained when the material was poured from the top is  $\rho_{\text{eff}} = 0.0128$  g/cm<sup>3</sup> (see Fig. 1b), which allows us to calculate the bed packing fraction  $\phi_{\text{poured}} = \rho_{\text{eff}}/\rho_g = 0.582 \pm 0.001$ . The intruders consisted of hollow polyurethane balls of diameters  $d_b$  ranging from 3.0 to  $9.4 \pm 0.1$  cm filled with different amounts

# Referencias

- [1] H. P. Robertson, *Terminal Ballistics* (National Research Council, Washington, D. C., 1941).
- [2] Robis, B. *New Principles of Gunnery* (London, 1742).
- [3] Poncelet, J. V. *Cours de Mécanique Industrielle* (Primera edición, Bruxelles, 1829).
- [4] M. H. Résal, *Compt. rend.* **120** 397 (1895).
- [5] Allen, W. A., Mayfield, E. B. & Morrison, H. L. *J. App. Phys* **28** 370 (1957).
- [6] Ciamarra, M. P., Lara, A. H., Lee, A. T., Goldman, D. I., Vishik, I., & Swinney, H. L. (2004). Dynamics of drag and force distributions for projectile impact in a granular medium. *Physical review letters*, **92**(19), 194301.
- [7] de Bruyn, J. R., & Walsh, A. M. (2004). Penetration of spheres into loose granular media. *Canadian Journal of Physics*, **82**(6), 439-446.
- [8] L. S. Tsimring, and D. Volfson, in *Powders and Grains* (eds. R. Garcia-Rojo, H. J. Herrmann, and S. McNamara,) 1215-1223 (2005) (A.A.Balkema, Rotterdam, 2005).
- [9] P. Dantu, in *Proc. Of the Fourth International Conf. on Soil Mechanics and Foundation Eng.*, vol. 1 (London: Butterworths Scientific, 1957), p. 144.
- [10] Duran, J. 2000 “*Sand, powders, and grains. “An introduction to the physics of granular materials”*”, Ed. Springer – Verlag, New York, ISBN 0-387-98656-1.
- [11] Clark, A. H., Kondic, L., & Behringer, R. P. (2012). Particle scale dynamics in granular impact. *Physical review letters*, **109**(23), 238302.
- [12] Donev, A., Cisse, I., Sachs, D., Vario, E. A., Stillinger, F. H., Connelly, R., ... & Chaikin, P. M. (2004). Improving the density of jammed disordered packings using ellipsoids. *Science*, **303**(5660), 990-993.
- [13] Katsuragi, H. (2015). *Physics of soft impact and cratering* (Vol. 910). Springer.

- 
- [14] Lohse, D., Rahué, R., Bergmann, R. & Van der Meer, D. (2004). Granular physics: Creating a dry variety of quicksand. *Nature*, **432**(7018), 689-690.
- [15] Stone, M. B., Bernstein, D. P., Barry, R., Pelc, M. D., Tsui, Y. K. & Schiffer, P. (2004). Stress propagation: Getting to the bottom of a granular medium. *Nature*, **427**(6974), 503-504.
- [16] Katsuragi, H., and Durian, D. (2007). Unified force law for granular impact cratering. *Nature Physics*, **3**(6), 420-423.
- [17] Goldman, D. I., & Umbanhowar, P. (2008). Scaling and dynamics of sphere and disk impact into granular media. *Physical Review E*, **77**(2), 021308.
- [18] Pacheco-Vázquez, F., & Ruiz-Suárez, J. C. (2009). Sliding through a superlight granular medium. *Physical Review E*, **80**(6), 060301.
- [19] Peng, Z., Xu, X., Lu, K., & Hou, M. (2009). Depth dependence of vertical plunging force in granular medium. *Physical Review E*, **80**(2), 021301.
- [20] Umbanhowar, P., & Goldman, D. I. (2010). Granular impact and the critical packing state. *Physical review E*, **82**(1), 010301.
- [21] Pacheco-Vázquez, F., Caballero-Robledo, G. A., Solano-Altamirano, J. M., Altshuler, E., Batista-Leyva, A. J., & Ruiz-Suárez, J. C. (2011). Infinite penetration of a projectile into a granular medium. *Physical review letters*, **106**(21), 218001.
- [22] Clark, A. H., Kondic, L., & Behringer, R. P. (2012). Particle scale dynamics in granular impact. *Physical review letters*, **109**(23), 238302.
- [23] Brzinski III, T. A., Mayor, P., & Durian, D. J. (2013). Depth-dependent resistance of granular media to vertical penetration. *Physical review letters*, **111**(16), 168002.
- [24] Clark, A. H., & Behringer, R. P. (2013). Granular impact model as an energy-depth relation. *EPL (Europhysics Letters)*, **101**(6), 64001.
- [25] Altshuler, E., Torres, H., González-Pita, A., Sánchez-Colina, G., Pérez-Penichet, C., Waitukaitis, S., & Hidalgo, R. C. (2014). Settling into dry granular media in different gravities. *Geophysical Research Letters*, **41**(9), 3032-3037.
- [26] Katsuragi, H., & Durian, D. J. (2013). Drag force scaling for penetration into granular media. *Physical Review E*, **87**(5), 052208.
- [27] Nordstrom, K. N., Lim, E., Harrington, M., & Losert, W. (2014). Granular dynamics during impact. *Physical review letters*, **112**(22), 228002.
- [28] Van der Meer, D. (2017). Impact on Granular Beds. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **49**, 463-484.
-

- [29] Royer, J. R., Conyers, B., Corwin, E. I., Eng, P. J., & Jaeger, H. M. (2011). The role of interstitial gas in determining the impact response of granular beds. *EPL (Europhysics Letters)*, **93**(2), 28008.
- [30] Ruiz-Suárez, J. C. (2013). Penetration of projectiles into granular targets. *Reports on Progress in Physics*, **76**(6), 066601.
-



**BUAP**

## MEMORANDUM

Para:	Dr. Umapada Pal.	Presidente
	Dr. José Luis Eustolio Carrillo Estrada.	Vocal
	Dr. Enrique Quiroga González.	Vocal
	Dr. Felipe Pacheco Vázquez.	Vocal
De:	Dr. Felipe Pérez Rodríguez, Secretario Académico.	
Asunto:	Se cita al examen de la Fís. Lady Andrea López Rodríguez.	
Fecha:	Lunes 28 de agosto, 2017.	

Me permito informarles que el Comité Académico del IFUAP, los ha designado integrantes del Comité para el EXAMEN DE GRADO de MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA) de la Lic. en Fís. Lady Andrea López Rodríguez, con su tesis cuyo título es: "Dinámica de penetración en materia granular en el límite de baja densidad: Efecto del empaquetamiento del medio y del tamaño del intruso", que presentará el próximo día: **Lunes 04 de septiembre, 2017 a las 17:00hrs. en el Auditorio del IFUAP.**



Dr. Felipe Pérez Rodríguez  
Secretario Académico

Instituto de Física  
"Ing. Luis Rivera  
Terrazas"

Av. San Claudio esq. 18 sur, edif 110 A, B y C.  
Ciudad Universitaria, Col. San Manuel,  
Puebla, Pue. C.P. 72570  
01(222) 2295610, Fax: ext. 5611