Benemérita Universidad Autonoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA DIFUSA

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
SOSA PONCE ALVARO GENARO

DIRECTOR DE TESIS
MARTÍNEZ RUÍZ IVAN

PUEBLA, PUE. Octubre, 2018

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

ALVARO GENARO SOSA PONCE

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 25 de mayo de 2018, con la tesis titulada:

Introducción a la topología difusa

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 27 de septiembre de 2018

DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578 · SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

Ccp.Archivo.
DRA. LAHR/sears

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradecimientos

Gracias a mi Universidad que me dio las herramientas necesarias para terminar este trabajo, también le doy gracias a mi asesor que participó en gran medida en la culminación de esta obra. Gracias a mis padres por ser un pilar en animarme en salir adelante. Gracias Ceci que apareciste en mi vida y me diste motivos para terminar la tesis.
Gracias al CONACYT el cual fue fundamental para la realización de este trabajo.

Índice general

Introducción

El objetivo de esta tesis es el de dar conceptos básicos para entender la teoría de conjuntos difusos, a partir de los cuales introduciremos los conceptos de topología difusa con el propósito de obtener una extension de topología clásica.
El capítulo uno es para repasar conceptos de teoría de Retículas además de algunas propiedades; en el capítulo dos se introduce la teoría de conjuntos difusos y con ella se da paso para definir lo que es un espacio topológico difuso.
En el capítulo tres se da una breve introducción a conceptos clásicos de topología además de algunos resultados que nos ayudaran para demostrar el teorema de compacidad en una versión extendida.

Introducción a la Topología Difusa

Sosa Ponce Alvaro Genaro

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conjuntos y Retículas

En esta sección introduciremos terminología y símbolos que emplearemos a lo largo del trabajo. Omitiremos los conceptos básicos.

Definición 1.1. Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ es una *topología* sobre X, si satisface las siguientes tres condiciones:
(TP1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
(TP2) $\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{T} \quad \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.
(TP3) $\forall \mathcal{B} \in [\mathcal{T}]^{<\omega} \quad \bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{T}$.

En la definición anterior $[\mathcal{T}]^{<\omega}$ es la familia de todos los subconjuntos finitos de $\mathcal{T}$.
Un conjunto X equipado con una topología $\mathcal{T}$ es un *espacio topológico*, usualmente denotado por $(X, \mathcal{T})$. Los elementos de $\mathcal{T}$ son llamados *subconjunto abiertos*, y los subconjuntos complementarios de subconjuntos abiertos son llamados *subconjuntos cerrados*.

El concepto de topología ha sido objeto de estudio y una herramienta muy útil en otras ramas de las Matemáticas.

Para un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, $\mathcal{B}$ es una *base* de $\mathcal{T}$, si

$$\mathcal{T} = \{\bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \subset \mathcal{B}\};$$

$\mathcal{B}$ es una *subbase* de $\mathcal{T}$, si la familia

$$\{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \in [\mathcal{B}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$$

es una base de $\mathcal{T}$.
Para un conjunto X y una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$; denotamos por $Grt(\mathcal{B})$ la topología sobre X generada por $\mathcal{B}$, es decir,

$$Grt(\mathcal{B}) = \{\bigcup\{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \in \mathcal{G}\} : \mathcal{G} \subset [\mathcal{B}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}.$$

Para una topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto X y una subfamilia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, decimos que $\mathcal{T}$ es generado por $\mathcal{B}$, si $\mathcal{B}$ es una base o subbase de la topología $\mathcal{T}$.

En el capítulo dos se definirá una extensión de los siguientes conceptos.

Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$. Se define el *interior* de A, denotado por A°, como el conjunto $\bigcup \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es la familia de todo los subconjuntos abiertos contenidos en A. De manera similar, se define la *cerradura* de A, denotado por A^{-}, como el conjunto $\bigcap \mathcal{B}$, donde es $\mathcal{B}$ la familia de todos los subconjuntos cerrados que contienen a A.

Para cada $x \in X$, un subconjunto abierto U de X es una *vecindad* de x, si $x \in U$. La familia de todas las vecindades de x es llamado *sistema de vecindades* de x, denotado por $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(x)$ o $\mathcal{N}(x)$ para abreviar.

Definición 1.2. Sean P un conjunto, $\leq$ una relación sobre P.
i) $\leq$ es *reflexiva*, si $a \leq a$ para cada $a \in P$;
ii) $\leq$ es *transitiva*, si $a \leq b$, $b \leq c$ en P implica que $a \leq c$;
iii) $\leq$ es *antisimétrica*, si $a \leq b$ y $b \leq a$ en P implica $a = b$.

Una relación $\leq$ es un *preorden* sobre P, si $\leq$ es reflexiva y transitiva. Un conjunto P equipado con un preorden $\leq$ es un conjunto *preordenado*.

En un conjunto preordenado P, si $a \leq b$ pero $a \neq b$, se denota este caso por $a < b$.
Dos elementos a, b en un conjunto preordenado P son *comparables*, si $a \leq b$ o $b \leq a$; son *incomparables*, denotado por $a \perp b$, si $a \not\leq b$ y $b \not\leq a$.

Para un conjunto preordenado P con preorden $\leq$ definimos su *conjunto preordenado dual* al conjunto P equipado con el preorden $\leq^{op}$ llamado el *preorden dual* de $\leq$ si para cada $a, b \in P$ tenemos que $a \leq^{op} b$ si y solo si $b \leq a$.
Denotamos al conjunto preordenado dual de P por P^{op}.

Gran parte de la teoría que se desarrolla en este trabajo utiliza estos conceptos.

Un preorden $\leq$ es un *orden parcial* sobre P, si es antisimétrico. Un conjunto P equipado con un orden parcial $\leq$ es un *conjunto ordenado parcialmente*, usualmente llamado copo para abreviar.
Un copo C es un *conjunto totalmente ordenado* o una *cadena*, si todos sus elementos son comparables con cualquier otro. Entonces el orden parcial es llamado *orden total*.

Un copo P es un *conjunto fundado*, si para cada subconjunto no vacío A de P, existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq a$ para cada $a \in A$.
Un conjunto fundado es *bien ordenado* si es una cadena.

Definición 1.3. Sean P un conjunto preordenado, $A \subset P$ y $a \in A$. Diremos que

a es un elemento *minimal* de A, si no existe $b \in A$ tal que $b \leq a$ y $b = a$, diremos que a es el elemento *mínimo* de A, denotado por $minA$, si $b \geq a$ para cada $b \in A$. Del mismo modo definimos el elemento *maximal* de A y al elemento *máximo* máx A de A.

Por otro lado, si $A \subset P$, un elemento $b \in P$ es una *cota superior* de A, si $a \leq b$ para cada $a \in A$; $b \in P$ es una *cota inferior* de A, si $a \geq b$ para cada $a \in A$. Un conjunto $A_0 \subset A$ es *cofinal superior* en A, o *cofinal* en A, si para cada $a \in A$, existe $a_0 \in A_0$ tal que $a_0 \geq a$. A_0 es *cofinal inferior* en A, si para cada $a \in A$, existe $a_0 \in A_0$ tal que $a_0 \leq a$.

Los siguientes resultados, estrechamente relacionados con el axioma de elección, se pueden encontrar en [4].

Lema 1.1. (de Zorn)
Si cada cadena en un copo P tiene una cota superior, entonces P tiene un elemento maximal.

Lema 1.2. (de Kuratowski)
Cada cadena en un copo P está contenida en una cadena maximal en P.

Teorema 1.1. (de Zermelo o del buen orden)
Para cada conjunto A existe una relación $<$ tal que el conjunto A es bien ordenado.

En realidad estos tres resultados son equivalentes al axioma de elección y tienen aplicaciones diversas.

Definición 1.4. Sean P un copo, $A \subset P$. Definimos

$$\uparrow A = \{b \in P : \exists a \in A, b \geq a\}, \quad \downarrow A = \{b \in P : \exists a \in A, b \leq a\}.$$

Un conjunto A es *superior*, si $\uparrow A = A$; es *inferior*, si $\downarrow A = A$. Para un conjunto unitario $\{a\}$, denotamos $\uparrow a = \uparrow \{a\}$, $\downarrow a = \downarrow \{a\}$.

Definición 1.5. Sean L un copo, $A \subset L$. Un elemento $x \in L$ es el *supremo* de A, denotado por $\bigvee A$, si
(i) x es una cota superior de A,
(ii) si y es una cota superior para A, entonces $x \leq y$.

Si A consiste de dos elementos a y b, escribimos $a \vee b$ para referirnos a $\bigvee \{a, b\}$.

Definición 1.6. Un conjunto parcialmente ordenado L se denomina:
i) *retícula superior* si para cada subconjunto finito de L el supremo existe.
ii) *retícula inferior* si para cada subconjunto finito de L el ínfimo existe.
iii) *retícula*, si es retícula superior y retícula inferior. Denotamos a los elementos máximo y mínimo por 0 y 1.

Unos ejemplos de retículas son el conjunto potencia y el conjunto $\{0, 1\}$.
La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en [1].

Proposición 1.1. Sea L una retícula. Entonces las siguientes conclusiones se cumplen:
(i) $\forall a \in L\ a \vee a = a,\ a \wedge a = a.$
(ii) $\forall a, b \in L\ a \wedge b \leq a, b \leq a \vee b.$
(iii) $\forall a, b \in L\ a \leq b \Longleftrightarrow a \vee b = b \Longleftrightarrow a \wedge b = a.$
(iv) $\forall a, b \in L\ a \wedge b < a, b < a \vee b \Longleftrightarrow a \perp b.$
(v) $\forall a, b, c \in L\ (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),\ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$

Definición 1.7. Una retícula L es *distributiva*, si satisface las siguientes dos condiciones, llamadas *leyes de distributividad finita*:
(FD1) $\forall a, b, c \in L\ a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$
(FD2) $\forall a, b, c \in L\ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$

Es claro que si L es una retícula y A es un subconjunto finito de L, entonces existen $\bigvee A$ y $\bigwedge A$. Sin embargo, en general no se cumple que existen $\bigvee A$ y $\bigwedge A$ para $A \subset L$ arbitrario.

Definición 1.8. Una retícula L es *superior completa*, si para cada subconjunto arbitrario A de L existe $\bigvee A$.
Una retícula L es *inferior completa*, si para cada subconjunto arbitrario A de L existe $\bigwedge A$.

En general,una *retícula completa* es retícula superior completa y retícula inferior completa. Para cualquier conjunto el potencia es una retícula completa y el conjunto de lo números naturales con el orden usual es una retícula inferior completa pero no es superior completa.

Sean L una retícula completa, $C \subset L$. C es un *conjunto generado superiormente* de L o un *conjunto generado* de L para abreviar, si para cada $a \in L$ existe $C_a \subset C$ tal que $\bigvee C_a = a$; es un *conjunto generado estrictamente*, si para cada $a \in L$, existe $C_a \subset C \setminus \{a\}$.

Una retícula L es *distributiva infinitamente*, si L satisface las siguientes dos condiciones, llamadas la primera ley distributiva infinita y la segunda ley distributiva infinita respectivamente:
(IFD1) $\forall a \in L\ \forall B \subset L\ a \wedge \bigvee B = \bigvee_{b \in B}(a \wedge b),$
(IFD2) $\forall a \in L\ \forall b \subset L\ a \vee \bigwedge B = \bigwedge_{b \in B}(a \vee b),$

Una retícula completa L es llamada *completamente distributiva*, si L satisface las siguientes dos condiciones, llamadas leyes distributivas completamente:
Para cada $\{\{a_{i,j} : j \in J_i\} : i \in I\} \subset \mathrm{P}(L) \setminus \{\emptyset\},\ I \neq \emptyset$
(CD1) $\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} a_{i,j} = \bigvee_{\phi \in \prod_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in I} a_{i,\phi(i)}$,

$$\text{(CD2)} \quad \bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J_i} a_{i,j} = \bigvee_{\phi\in \prod_{i\in I} J_i} \bigwedge_{i\in I} a_{i,\phi(i)}.$$

Teorema 1.2. *Una retícula completa L satisface (CD1) si y sólo si satisface (CD2).*
La demostración se encuentra en [1].

1.2. Operaciones sobre Retículas

A continuación definiremos un concepto que se utilizará a lo largo del trabajo y además se expondrá una relación de orden para el conjunto potencia de retículas.

Definición 1.9. Sean L una retícula y $a \in L$.
i) Diremos que a es *primo*, si $a < 1$ y para cada $a, b \in L$, $a \geq a \wedge b$ entonces $a \geq a$ o $a \geq b$.
ii) El elemento a es *irreducible* o *irreducible inferiormente*, si $a < 1$ y para cada $a, b \in L$, $a = a \wedge b$ entonces $a = a$ o $a = b$.

Un elemento irreducible superiormente de L es llamado una *molécula* en L. Para cada $A \subset L$, denotamos al conjunto de todos los elementos primos de L en A por $pr(A)$, al conjunto de todos los elementos irreducibles de L en A por $ir(A)$, al conjunto de todas las moléculas de L en A por $M(A)$, y un *átomo* en L es un elemento minimal en $L \setminus \{\emptyset\}$.

La demostración de la siguiente proposición se encuentra en [1].
Proposición 1.2. Sea L una retícula. Entonces
(i) Cada átomo de L es una molécula.
(ii) Cada elemento primo de L es irreducible.
(iii) Si L es distributiva, entonces para cada elemento $a \in L$, a es primo si y sólo si a es irreducible.

Un elemento $x \in L$ con L una retícula es un *complemento* de un elemento $a \in L$, si $x \wedge a = 0$ y $x \vee a = 1$.

Una función $(\,)' : L \to L$ invierte el orden, si para cada $a, b \in L$, $a \leq b$ implica que $(a)' \geq (b)'$. Escribiremos a' en vez de $(a)'$; $(\,)'$ es una *involución* sobre L, si $((\,)')' = id_L$, donde id_L es la función identidad de L; $(\,)'$ es una *operación complementaria*, si para cada $a \in L$, a' es un complemento de a.

Para una involución que invierte el orden $(\,)'$ sobre L y cada $A \subset L$, denotamos $A' = \{a' : a \in A\}$.
Sean L_0, L_1 retículas equipadas con involuciones, $f : L_0 \to L_1$ una función. f preserva involuciones, si para cada $a \in L$, $f(a') = f(a)'$.

Para verificar la demostración revisar [1].
Proposición 1.3. Sean L una retícula y $(\,)'$ una involución que invierte el orden

sobre L. Entonces
(i) $M(L)^j = pr(L)$.
(ii) $pr(L)^j = M(L)$.

Definición 1.10. Una relación $\leq$ sobre un conjunto D es *dirigido*, si para cada $D_0 \subseteq D$ finito, existe $d_0 \in D$ tal que $d \leq d_0$ para cada $d \in D_0$. Un conjunto D equipado con un preorden dirigido $\leq$ es un *conjunto dirigido* o *conjunto dirigido superiormente* en D.

Un subconjunto I de un copo P es un *ideal* en P, si I es conjunto inferior y conjunto dirigido superior; un ideal diferente de P se denomina *ultra-ideal* si es un ideal maximal, es un *ideal principal* en P, si existe $a \in P$ tal que $I = \downarrow a$. Llamamos un *filtro* al dual del concepto de ideal.

Denotamos al conjunto de todos los ideales en P por $Idl(P)$ y por $Flt(P)$ al conjunto de todos los filtros.
Sean L una retícula, $I \subset L$. I es un *ideal primo* en L, si I es un ideal propio en L y para cada $a, b \in L$, $a \wedge b \in L$ implica que $a \in L$ o $b \in L$.

Definición 1.11. Sea $\{P_t : t \in T\}$ una familia de conjuntos preordenados. Definimos el *preorden producto* sobre $\prod_{t \in T} P_t$ por:

$$\forall \alpha, \beta \in \prod_{t \in T} P_t \quad \alpha \leq \beta \iff \forall t \in T \ \alpha(t) \leq \beta(t)$$

definimos el *conjunto producto preordenado* de $\{P_t : t \in T\}$ es $\prod_{t \in T} P_t$ equipado con el preorden producto.

La Demostración del siguiente Teorema se puede verificar en [1].
Teorema 1.3. *Sea $\{L_t : t \in T\}$ una familia de conjuntos preordenados. Entonces*
(i) $\prod_{t \in T} L_t$ es una retícula distributiva si y solo si para cada $t \in T$, L_t es una retícula distributiva.
(ii) $\prod_{t \in T} L_t$ es una retícula completa que satisface (IFD1) si y solo si para cada $t \in T$, L_t es una retícula completa que satisface (IFD1).
(iii) $\prod_{t \in T} L_t$ es una retícula completa que satisface (IFD2) si y solo si para cada $t \in T$, L_t es una retícula completa que satisface (IFD2).
(iv) $\prod_{t \in T} L_t$ es una retícula completamente distributiva si y solo si para cada $t \in T$, L_t es una retícula completamente distributiva.

1.3. Caracterización de Distributividad Completa

En esta sección mostraremos un par de caracterizaciones de la distributividad completa utilizando los conceptos de conjunto minimal y el de retícula continua.

Definimos la relación $\leq$ como sigue:
Para cada $a, b \in L$, $a \leq b$ si y sólo si para cada $S \subset L$ tal que $b \leq \bigvee S$, existe un $s \in S$ tal que $a \leq s$.

Definición 1.12. Sean $(L, \leq)$ retícula completa, $a \in L$, denotamos $\beta_L(a)$ al conjunto de $\leq$-predecesores de a y a $\beta_L^*(a)$ el conjunto de moléculas de $\beta_L(a)$; si no hay confusión se omitirán lo subindices. Finalmente un conjunto $D \subset \beta(a)$ es llamado *conjunto minimal* de a, si $\bigvee D = a$.

Proposición 1.4. Sean L una retícula completa, $a \in L$, entonces $\beta^*(a) = \beta(a) \cap M(L)$.

La siguiente definición extiende la noción de cubiertas en topología.

Definición 1.13. Sean L una retícula completa, $a \in L$ y $A \subset L$. A es una *cubierta* de a, si $\bigvee A \geq a$ y es una *cubierta propia* de a si $\bigvee A = a$.

Si $B \subset A$ es una cubierta de a, diremos que es un *refinamiento* de A, o decimos que B *refina* a A, si para cada $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $b \leq a$.

El siguiente resultado establece una caracterización a los conjuntos minimales en términos de cubiertas y refinamientos el cual se puede encontrar en [1].

Teorema 1.4. *Sean L una retícula completa, $a \in L$ y $D \subset L$. Entonces D es un conjunto minimal de a si y sólo si D es una cubierta propia de a y D es un refinamiento de cada cubierta de a.*

Definimos una relación $\overline{>}$ en L como sigue:
Sean $a, b \in L$, $a > b$ si y sólo si para cada $S \subset L$, $\bigwedge S \leq b$ implica que existe $s \in S$ tal que $s \leq a$.

Sea L una retícula completa. Para cada $a \in L$, definimos los siguientes conjuntos:
$\underline{\beta}(a) = \{b \in L : b \overline{>} a\}$, $\underline{\beta^*}(a) = pr(a) \cup \underline{\beta}(a)$.
$D \subset \underline{\beta}(a)$ es llamado un *conjunto maximal* de a si $\bigwedge D = a$.

Teorema 1.5. *Sean L una retícula completa y $a, b, c, d \in L$. Entonces*
(i) $a \leq b \Rightarrow a \leq b$.
(ii) $a \leq b \leq c \leq d \Rightarrow a \leq d$.
(iii) $\beta(a)$ *es un conjunto inferior.*
(iv) *a tiene un conjunto minimal si y sólo si $\beta(a)$ es el conjunto minimal de a más grande.*

Una manera importante de utilizar otros conceptos es mediante la caracterización de esto, a continuación se mostrarán algunas equivalencias que se demuestran en [1].

Teorema 1.6. *Sean L una ret´ıculacompleta, $a \in L$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) Cada conjunto minimal de a es un conjunto dirigido superiormente.
(ii) Uno de los conjuntos minimales de a es un conjunto dirigido superiormente.
(iii) $a \in M(L)$.

Teorema 1.7. *Sea L una retícula completa, $a \in L$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) L es completamente distributiva.
(ii) Existe un conjunto minimal de a.
(iii) $\beta(a)$ es un conjunto minimal de a.
(iv) $\beta^*(a)$ es un conjunto minimal de a.

Corolario 1.1. Sea L una retícula completamente distributiva. Entonces
(i) $M(L)$ es un conjunto generado superiormente de L, es decir,

$$\forall a \in L \quad \bar{} \quad M(\downarrow a) = a.$$

(ii) Para todo $a, b \in L$, $a \leq b$ si y sólo si $M(\downarrow a) \subset M(\downarrow b)$.

Definición 1.18. Sean L una retícula completa, $a, b \in L$. Decimos que *a esta bajo el camino* de b, denotado por $a \quad b$, si para cada conjunto dirigido superiormente S en L, $\dot{} \; S \geq b$ implica que existe $s \in S$ tal que $s \geq a$. Denotamos $\Downarrow a = \{b \in L : b \quad a\}$, $\Uparrow a = \{b \in L : a \quad b\}$.

Veamos algunos resultados que utilizan la definición anterior.

Teorema 1.8. *Sean L una ret´ıcula completa, $a, b, c, d \in L$. Entonces*
(i) $a \leq b \Rightarrow a \quad b \Rightarrow a \leq b$.
(ii) $a \leq b \quad c \leq d \Rightarrow a \quad d$.
(iii) $\forall a \in L \Downarrow a \in Idl(L)$.
(iv) $\forall a \in L\ \beta(a) \subset \Downarrow a \subset \downarrow a$.

Una ret´ıcula completa L es *continua* si se cumple que para cada $a \in L$, $\bar{} \Downarrow a = a$.

Teorema 1.9.(La Propiedad de inserción de retículas continuas) *Sea L una ret´ıcula continua. Entonces para cada $a, b \in L$, a ƒ= b, $a \quad b$ existe $c \in L$ tal que c ƒ= a y $a \quad c \quad b$.*

Lema 1.3. Sean L una retícula continua, $a, b \in L$, a ¢ b, entonces existe $F \in Flt(L)$ tal que
(i) $F \supset \uparrow a$, $F \cap \downarrow b = \emptyset$;
(ii) Para todo $x \in L \setminus F$, $L \setminus F$ tiene un elemento irreducible y un elemento maximal $\hat{x} \geq x$.

Teorema 1.10.
(i) Para cada retícula continua L, $ir(L)$ es un conjunto generado inferiormente de

L.
(ii) *Para cada retícula continua distributiva L, $pr(L)$ es un conjunto generado inferiormente de L.*

Teorema 1.11. *Una retícula completa distributiva L es completamente distributiva si y sólo si L y L^{op} son retículas continuas.*

Capítulo 2

Espacios Topológicos Difusos

2.1. Funciones y Conjuntos Difusos

La idea y el concepto de conjunto difuso fue introducido por L.A. Zadeh en 1965, donde la pertenencia a un conjunto difuso no es cuestión de afirmar o negar, sino es cuestión de grado, utilizando el intervalo unitario $[0, 1]$ como los valores de grado de pertenencia.
Goguen generalizó este concepto utilizando un concepto más general que es el de retícula y definiendo asi los L-conjuntos difusos.

Definición 2.1. Sea un X conjunto no vacío y L una retícula completa. Un *L-subconjunto difuso* sobre X es una función $A : X \to L$.
La familia de L-subconjuntos difusos sobre X es el conjunto de todas las funciones de X a L, denotado por L^X. Este último recibirá el nombre de un *L-espacio difuso*.

Un L-subconjunto difuso $A \in L^X$ es un *conjunto clásico* sobre X, si existe un subconjunto $U \subseteq X$ tal que $A = \chi_U : X \to \{0, 1\} \subseteq L$, es decir, si A es una funcion característica de algún subconjunto de X. Para una familia $\mathcal{A} \subseteq L^X$ de L-subconjuntos difusos, denotamos la familia de todos los conjuntos clásicos contenidos en $\mathcal{A}$ por $crs(\mathcal{A})$, y definimos

$$[\mathcal{A}] = \{A \subseteq X : \chi_A \in crs(\mathcal{A})\} .$$

Para cada L-subconjunto difuso $A \in L$, definimos su *conjunto soporte* como $\{x \in X : A(x) > 0\}$, denotado por $supp(A)$.
Dado un punto $x \in X$ y $a \in L$ se define un *L-punto difuso* sobre X como

$$x_a(y) = \begin{cases} a & \text{si } y = x \\ 0 & \text{si } y \neq x \end{cases}$$

Dada una familia $\mathcal{A} \subseteq L^X$, denotamos por $Pt(\mathcal{A})$ al conjunto de todos los L-puntos difusos sobre X que pertenecen $\mathcal{A}$ por $Pt(\mathcal{A})$. En particular el conjunto de todos los L-puntos difusos sobre X es denotado por $Pt(L^X)$.
Dado un L-punto difuso $x_a \in Pt(L^X)$, el elemento $a \in L$ se denominará la *altura* de x_a. En tal caso escribiremos $ht(x_a) = a$.

En el caso que necesitemos enfatizar el dominio de valores $L = [0, 1]$ se escribirá la palabra L-difuso por F -, entonces $[0, 1]$-subconjunto difuso, $[0, 1]$-punto difuso se llamarán F -subconjunto, F -punto, etc.
Algunas veces no distinguiremos entre subconjuntos $A \subseteq X$ entre su función característica $\chi_A : X \to \{0, 1\} \subseteq L$.

Definición 2.2. Sea L^X un L-espacio difuso, $A \in L^X$, $a \in L$. Un L-subconjunto difuso aA es

$$aA(x) = a \wedge A(x),$$

llamada una *capa* de A, o más específicamente, la *a-capa* de A.

Para cada subconjunto $A \subseteq X$, denotamos $a\chi_A$ por aA, si no causa confusión. Particularmente, denotamos $\underline{a} = aX$, o denotamos $\underline{a}_X = aX$ para enfatizar el dominio X, y la llamamos una capa de X, o la a-capa de X.
Definimos el orden parcial $\leq$ en L^X por:

$$\forall A, B \in L^X \quad A \leq B \iff \forall x \in X \; A(x) \leq B(x).$$

Particularmente, para un punto difuso $p \in Pt(L^X)$ y un L-subconjunto difuso $A \in L^X$ tal que $p \leq A$, decimos que *p pertenece* a A y lo denotamos como $p \in A$.

Proposición 2.1. Sea L^X un L-espacio difuso. Entonces
(i) L^X es una retícula completa, y para cada $\mathcal{A} \subseteq L^X$, el supremo $\bigvee \mathcal{A}$ y el ínfimo $\bigwedge \mathcal{A}$ en L^X satisfacen las siguientes relaciones:

$$\forall x \in X \quad \left(\bigvee \mathcal{A}\right)(x) = \bigvee_{A \in \mathcal{A}} A(x), \quad \left(\bigwedge \mathcal{A}\right)(x) = \bigwedge_{a \in \mathcal{A}} A(x).$$

(ii) L es distributiva si y sólo si L^X es distributiva.
(iii) L satisface (IFD1) si y sólo si L^X satisface (IFD1).
(iv) L satisface (IFD2) si y sólo si L^X satisface (IFD2).
(v) L es completamente distributiva si y sólo si L^X es completamente distributiva.

Demostración. Las propiedades (ii), (iii), (iv) y (v) se siguen del teorema 1.3 considerando a L^X como producto.
Solo se demostrará las relaciones de (i).
Sea $B \in \mathcal{A}$, entonces para cada $x \in X$ se tiene que:

$$B(x) \leq \bigvee_{A \in \mathcal{A}} A(x)$$

Sea $C \in L^X$ una cota superior de $\mathcal{A}$, es decir, para cada $x \in X$ y cada $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $A(x) \leq C(x)$, entonces por propiedad del supremo se tiene que:

$$\bigvee_{a \in \mathcal{A}} A(x) \leq C(x)$$

Así,

$$\left(\bigvee \mathcal{A}\right)(x) = \bigvee_{A \in \mathcal{A}} A(x).$$

Análogamente se demuestra la relación con el ínfimo. □

El siguiente concepto nos da una manera de caracterizar a los L-conjuntos difusos.

Definición 2.3. Sea L^X un L-espacio difuso, $A \in L^X$, $a \in L$. Un *a-nivel* de A es el conjunto $\{x \in X : A(x) \geq a\}$, denotado por $A_{[a]}$. Denotamos

$$A_{(a)} = \{x \in X : A(x) \text{ ¢ } a\},$$

$$A^{[a]} = \{x \in X : A(x) \leq a\},$$

$$A^{(a)} = \{x \in X : A(x) \text{ § } a\}.$$

Llamado cada $A_{[a]}$ un *nivel* de A.

Con esta definición, la siguiente conclusión es clara:

Proposición 2.2. Sea A un L-subconjunto difuso sobre X, entonces

$$A = \bigvee_{a \in L} aA_{[a]}.$$

Demostración. Sea $x \in X$, consideramos $a = A(x)$, entonces

$$A(x) \leq aA_{[a]}(x) \leq \bigvee_{a \in L} aA_{[a]}$$

Ahora tomemos un $a \in L$ arbitrario.
Si $A(x)$ § a, entonces $aA_{[a]}(x) = 0 \leq A(x)$.
Si $A(x) \geq a$, entonces $aA_{[a]}(x) = a \leq A(x)$.

□

La proposición anterior es llamada por algunos autores como "El Teorema de descomposición de L-subconjuntos difusos".

Definición 2.4. Sean L^X,L^Y L-espacios difusos, $f : X \to Y$ una función ordinaria, una *L-función difusa* $f^{\to} : L^X \to L^Y$ y su *L-función inversa difusa* $f^{\leftarrow} : L^Y \to L^X$ son

$$f^{\to}(A)(y) = \bigvee \{A(x) : x \in X, f(x) = y\}, \forall A \in L^X, \forall y \in Y,$$

$$f^{\leftarrow}(B)(x) = B(f(x)), \ \forall B \in L^Y, \ \forall x \in X.$$

Sea $f : L^X \to L^Y$ una función ordinaria entre dos L-espacios difusos. Decimos que *f preserva L-puntos difusos*, si f envía cada L-punto difuso a un L-punto difuso; decimos que *f preserva L-puntos difusos con altura*, si f envía cada L-punto difuso a un L- punto difuso con la misma altura; decimos que *f preserva subconjuntos clásicos*, si f envía cada subconjunto clásico a un subconjunto clásico; decimos que *f preserva capas*, si $f(\underline{a}) = \underline{a}$ para cada $a \in L$.

Teorema 2.1. *Sean L^X, L^Y L-espacios difusos, $f : X \to Y$ una función ordinaria. Entonces para cada $a \in L$ y cada $A \in L^X$, $f^{\to}(aA) = af^{\to}(A)$.*

Demostración. Sean $a \in L$, $A \in L^X$, $y \in Y$, arbitrarios tenemos

$$f^{\rightarrow}(aA)(y) = \bigvee \{(aA)(x) : x \in X, f(x) = y\}$$

$$= \bigvee \{a \wedge (A(x)) : x \in X, f(x) = y\}$$

$$= a \wedge \bigvee \{A(x) : x \in X, f(x) = y\}$$

$$= A \wedge (f^{\rightarrow}(A)(y)) = (af^{\rightarrow}(A))(y)$$

Así, $f^{\rightarrow}(aA) = af^{\rightarrow}(A)$

□

De manera natural nos preguntamos cómo se comportan las funciones difusas y su inversa con los conceptos que tenemos anteriormente, los siguientes resultados nos dan respuesta para algunos conceptos.

Teorema 2.2. *Sea L^X, L^Y L-espacios difusos, $f : X \rightarrow Y$ función ordinaria. Entonces*
i) $f^{\rightarrow}$ preserva supremos arbitrarios
ii) $f^{\rightarrow}$ preserva L-punto difusos; exactamente, $f^{\rightarrow}(x_a) = f(x)_a$
iii) $f^{\rightarrow}$ preserva subconjuntos clásicos; exactamente, $f^{\rightarrow}(x_A) = x_{f[A]}$, $\forall A \subset X$
iv) $f^{\rightarrow}$ preserva capas.
v) $\forall A \in L^X$, $f^{\rightarrow}(A) = \underline{0} \Longleftrightarrow A = \underline{0}$

Demostración. i) Sean $\mathcal{A} \subset L^X$, $y \in Y$

$$f^{\rightarrow}\left(\bigvee \mathcal{A}\right) = \bigvee \left\{ \left(\bigvee \mathcal{A}\right)(x) : x \in X, f(x) = y \right\}$$

$$= \bigvee \left\{ \bigvee_{A \in \mathcal{A}} A(x) : x \in X, f(x) = y \right\}$$

$$= \bigvee_{A \in \mathcal{A}} \bigvee \{A(x) : x \in X, f(x) = y\}$$

$$= \bigvee_{A \in \mathcal{A}} f^{\rightarrow}(A)(y)$$

ii) Sean x_a un *L*-punto difuso, $y \in Y$

$$f^{\rightarrow}(x_a)(y) = \bigvee \{x_a(x) : x \in X, f(x) = y\} = f(x)_a(y)$$

iii) Sea $A \subset X$

$$f^{\rightarrow}(x_A) = \bigvee \{x_A(x) : x \in X, f(x) = y\} = x_{f[A]}$$

iv) Es consecuencia del resultado anterior.

v) Sean $A \in L^X$, $y \in Y$. Entonces

$$f^{\rightarrow}(A)(y) = \bigvee\{A(x) : x \in X, f(x) = y\} = \chi_{\emptyset}(y) = 0$$

con lo cual $A(x) = 0$, para cada $x \in X$.
Si $A = \underline{0}$ entonces $A(x) = 0$ para cada $x \in X$, así,

$$f^{\rightarrow}(A)(y) = \bigvee\{A(x) : x \in X, f(x) = y\} = 0$$

□

Teorema 2.3. *Sean L^X, L^Y L-espacios difusos, $f : X \to Y$ una función ordinaria. Entonces*
i) $f^{\leftarrow}$ preserva supremos arbitrarios.
ii) $f^{\leftarrow}$ preserva ínfimos arbitrarios.
iii) $f^{\leftarrow}$ preserva subconjuntos clásicos.
iv) $f^{\leftarrow}$ preserva capas.

Demostración. i) Sean $\mathcal{B} \subset L^X$, $x \in X$

$$f^{\leftarrow}\left(\bigvee \mathcal{B}\right)(x) = \left(\bigvee \mathcal{B}\right)(f(x)) = \bigvee_{B\in\mathcal{B}} B(f(x)) = \bigvee_{B\in\mathcal{B}} f^{\leftarrow}(B)(x)$$

ii) Sean $\mathcal{B} \subset L^X$, $x \in X$

$$f^{\leftarrow}\left(\bigwedge \mathcal{B}\right)(x) = \left(\bigwedge \mathcal{B}\right)(f(x)) = \bigwedge_{B\in\mathcal{B}} B(f(x)) = \bigwedge_{B\in\mathcal{B}} f^{\leftarrow}(B)(x)$$

iii) Sea $B \subset Y$

$$f^{\leftarrow}(\chi_B)(x) = \chi_B(f(x)) = \chi_{f^{-1}(B)}(x)$$

iv) Sean $a \in L, A \in L^Y, x \in X$

$$f^{\leftarrow}(aA)(x) = (aA)(f(x)) = a \wedge A(f(x)) = a \wedge f^{\leftarrow}(A)(x) = (af^{\leftarrow}(A))(x)$$

□

Podemos observar que $f^{\leftarrow}$ no preserva L-puntos difusos siempre que f no es inyectiva. De hecho, $f^{\leftarrow}(y_b) = bf^{-1}(y)$.

Proposición 2.3. Sean L^X, L^Y, L-espacios difusos, $A \subset X$, $B \subset Y$, $f : X \to Y$ una función ordinaria. Entonces:
i) $f^{\rightarrow}(\chi_A) = \chi_{f[A]}$
ii) $f^{\leftarrow}(\chi_B) = \chi_{f^{-1}(B)}$

Los dos teoremas siguientes muestran que a partir de una función entre dos espacios difusos se puede ver como una función difusa o una función inversa.

Teorema 2.4. *Sean L^X, L^Y L-espacios difusos, $f : L^X \to L^Y$ una función ordinaria, entonces existe una única función ordinaria $f_0 : X \to Y$ tal que $f = f_0^{\rightarrow}$ si y sólo si satisface las siguientes condiciones:*
i) f preserva supremos arbitrarios.
ii) f preserva L-puntos difusos con altura.

Demostración. La necesidad fue demostrada en el teorema 2.9. Probemos la suficiencia.
Veamos primero que existe una función ordinaria $f_0 : X \to Y$ tal que para cada $a \in L - \{0\}$, $f(x_a) = (f_0(x))_a$.

Por ii), para cada $x \in X$ y cada $a \in L - \{0\}$, existe $f_{0,a}(x) \in Y$ tal que $f(x_a) = (f_{0,a}(x))_a$
Por i), para un L-punto difuso fijo x_a, tenemos

$$(f_{0,a}(x))_a \leq \bigvee\{(f_{0,c}(x))_c : c \in L - \{0\}\} = \bigvee\{f(x_c) : c \in L - \{0\}\}$$

$$= f\left(\bigvee\{x_c : c \in L - \{0\}\}\right) = f(x_1) = (f_{0,1}(x))_1$$

Note que $(f_{0,1}(x))_1$ es un L-punto difuso, así $f_{0,a}(x) = f_{0,1}(x) \in Y$, para cada $a \in L - \{0\}$.

Tomemos $f_0(x) = f_{0,1}(x)$, obtenemos una función $f_0 : X \to Y$ tal que

$$f(x_a) = (f_0(x))_a \quad \forall x \in X, \forall a \in L - \{0\}$$

Sean $A \in L^X$, $y \in Y$, por lo anterior tenemos que

$$f(A)(y) = f\left(\bigvee\{x_{A(x)} : x \in X\}\right)(y) = \left(\bigvee\{f(x_{A(x)}) : x \in X\}\right)(y)$$

$$= \left(\bigvee\{(f_0(x))_{A(x)} : x \in X\}\right)(y) = \bigvee\{((f_0(x))_{A(x)})(y) : x \in X\}$$

$$= \bigvee\{A(x) : x \in X, f_0(x) = y\} = f_0^{\to}(A)(y)$$

Así $f = f_0^{\to}$, f es inducida de f_0.
La unicidad se sigue de la igualdad $f(x_a) = (f_0(x))_a$

□

Teorema 2.5. *Sean L^X, L^Y L-espacios difusos, $g : L^Y \to L^X$ una función ordinaria, existe una única función $f : X \to Y$ tal que $g = f^{\leftarrow}$ si y sólo si g satisface las siguientes condiciones:*
i) g preserva supremos arbitrarios.
ii) g preserva ínfimos finitos.
iii) g preserva subconjuntos clásicos.
iv) g preserva capas.

Demostración. Es suficiente probar la suficiencia.
Primero demostremos que
1) para cada $y \in Y$, existe $X_y \subset X$ tal que para cada $a \in L$, $g(y_a) = aX_y$.
2) X es la unión disjunta de todos los X_y.

Sea $y \in Y$, por iii), existe $X_y \subset X$ tal que $g(y_1) = x_{X_y}$.
Por ii) y iv), tenemos que

$$g(y_a) = g(\underline{a} \wedge y_1) = g(\underline{a}) \wedge g(y_1) = \underline{a} \wedge x_{X_y} = a \wedge X_y$$

. 1) es probado.

Sean $y, z \in Y$, $y \neq z$, por ii) y i)

$$x_{X_y} \wedge x_{X_z} = g(y_1) \wedge g(z_1) = g(y_1 \wedge z_1) = g(\underline{0}) = g\left(\overline{\varnothing}\right) = \overline{\varnothing} = \underline{0}$$

Así, $X_y \cap X_z = \varnothing$, $\{X_y : y \in Y\}$ es una familia disjunta. Por otro lado, por ii)

$$\bigvee_{y\in Y} x_{X_y} = \bigvee_{y\in Y} g(y_1) = g\left(\bigvee_{y\in Y} y_1\right) = g(x_Y) = g\left(\overline{\varnothing}\right) = \overline{\varnothing} = \underline{1}$$

Por lo tanto,

$$\bigcup_{y\in Y} X_y = X.$$

Ahora definamos $f : X \to Y$ por $f(x) = y$, para cada $x \in X_y$. Por 2) la función esta bien definida.

Sean $B \in L^Y$, $x \in X$, supongamos que $x \in X_y$, para $f^{\leftarrow} : L^Y \to L^X$, por i),1) y 2), tenemos

$$f^{\leftarrow}(B)(x) = B(f(x)) = B(y) = (B(y)x_{X_y})(x) = \left(\bigvee_{z\in Y} B(z)x_{X_z}\right)(x)$$

$$= \left(\bigvee_{z\in Y} g(z_{B(z)})\right) = g\left(\bigvee_{z\in Y} z_{B(z)}\right)(x) = g(B)(x)$$

Así, $f^{\leftarrow} = g$.
Si existe otra función $h : X \to Y$ tal que $g = h^{\leftarrow}$, entonces para cada $x \in X$, cada $y \in Y$, cada $a \in L - \{0\}$,

$$y_a(h(x)) = (h^{\leftarrow}(y_a))(x) = (g(y_a))(x) = (f^{\leftarrow}(y_a))(x) = y_a(f(x)).$$

Por lo tanto, $h^{-1}[\{y\}] = f^{-1}[\{y\}]$, $h = f$

□

El siguiente teorema nos da una caracterización de las propiedades de las funciones difusas utilizando las propiedades de las funciones ordinarias.

Teorema 2.6. *Sean L^X, L^Y L-espacios difusos, $f : X \to Y$ una función ordinaria. Entonces*
i) $f^{\rightarrow}$ es inyectiva si y sólo si f es inyectiva.
ii) $f^{\rightarrow}$ es inyectiva si y sólo si $f^{\leftarrow} \circ f^{\rightarrow} = id_{L^X}$.
iii) $f^{\rightarrow}$ es sobreyectiva si y sólo si f es sobreyectiva.
iv) $f^{\rightarrow}$ es sobreyectiva si y sólo si $f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow} = id_{L^Y}$.
v) $f^{\rightarrow}$ es biyectiva si y sólo si f es biyectiva.
vi) $f^{\leftarrow}$ es biyectiva si y sólo si $f^{\leftarrow} \circ f^{\rightarrow} = id_{L^X}$, $f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow} = id_{L^Y}$, es decir, $f^{\leftarrow}$ es la inversa de $f^{\rightarrow}$, $(f^{\rightarrow})^{-1} = f^{\leftarrow}$.

Demostración. i) Si $f^{\rightarrow}$ es inyectiva, sean $x, y \in X$, como $f^{\rightarrow}$ preserva L-puntos difusos con altura tenemos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x)_1 = f(y)_1 \Rightarrow f(x_1) = f(y_1) \Rightarrow x_1 = y_1 = x = y$$

así, f es inyectiva. Supongamos que f es inyectiva. Sean $A, B \in L^X$, si $f^{\rightarrow}(A) = f^{\rightarrow}(B)$, entonces para cada $x \in X$

$$A(x) = f^{\rightarrow}(A)(f(x)) = f^{\rightarrow}(B)(f(x)) = B(x)$$

Así, $A = B$, $f^{\rightarrow}$ es inyectiva.

ii) La suficiencia es clara, supongamos que $f^{\rightarrow}$ es inyectiva, entonces por i), f es inyectiva. Sean $A \in L^X$, $x \in X$.

$$(f^{\leftarrow} \circ f^{\rightarrow})(A)(x) = f^{\rightarrow}(f(x)) = \bigvee \{A(z) : z \in X, f(z) = f(x)\} = A(x),$$

$$f^{\leftarrow} \circ f^{\rightarrow}(A) = A, \ f^{\leftarrow} \circ f^{\rightarrow} = id_{L^X}$$

iii) Si $f^{\rightarrow}$ es sobreyectiva , para cada $y \in Y$ entonces existe $A \in L^X$ tal que $f^{\rightarrow}(A) = y_1$. Como $f^{\rightarrow}$ preserva puntos difusos con altura y supremos arbtrarios tenemos que,

$$\bigvee_{x \in X} (f(x))_{A(x)} = \bigvee_{x \in X} f^{\rightarrow}(x_{A(x)}) = f^{\rightarrow}\Big(\bigvee_{x \in X} x_{A(x)}\Big) = f^{\rightarrow}(A) = y_1$$

Así, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, f es sobreyectiva.

Suponga que f es sobreyectiva, $B \in L^Y$. Tomemos $A = \bigvee_{x \in X} x_{B(f(x))} \in L^X$, entonces como f es sobreyectiva,

$$f^{\rightarrow}(A) = \bigvee_{x \in X} (f(x))_{B(f(x))} = \bigvee_{y \in Y} y_{B(y))} = B$$

por lo tanto $f^{\rightarrow}$ es sobreyectiva.

iv) La suficiencia es clara. Supongamos que $f^{\rightarrow}$ es sobreyectiva, entonces por iii), f es sobreyectva, sean $B \in L^Y$, $y \in Y$

$$(f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow})(B)(y) = \bigvee \{f^{\leftarrow}(B)(x) : x \in X, f(x) = y\} =$$

$$= \bigvee \{B(f(x)) : x \in X, f(x) = y\} = B(y)$$

$$f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow}(B) = B, \ f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow} = id_{L^Y}$$

v) es implicación de i) y iii).

vi) es implicación de ii) y iv).

□

Teorema 2.7. *Sean L^X, L^Y y L^Z L-espacios difusos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones ordinarias. Entonces:*

$$\text{(i) } g^{\to}f^{\to} = (gf)^{\to}$$
$$\text{(ii) } f^{\leftarrow}g^{\leftarrow} = (gf)^{\leftarrow}$$

Demostración. (i) $\forall A \in L^X$, $\forall z \in Z$, entonces

$$\begin{aligned} g^{\to}f^{\to}(A)(z) &= \bigvee\{f^{\to}(A)(y) : y \in Y, g(y) = z\} \\ &= \bigvee\left\{\bigvee\{A(x) : x \in X, f(x) = y\} : y \in Y, g(y) = z\right\} \\ &= \bigvee\{A(x) : x \in X, gf(x) = z\} = (gf)^{\to}(A)(z). \end{aligned}$$

(ii) $\forall C \in L^Z$, $\forall x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} f^{\leftarrow}g^{\leftarrow}(C)(x) &= (g^{\leftarrow}(C))(f(x)) = C(g(f(x))) \\ &= C((gf)(x)) = (gf)^{\leftarrow}(C)(x) \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado nos indica que condiciones debe cumplir una función entre L-etds para que tenga su función inversa.

Teorema 2.8. *Sean L^X, L^Y L-espacios difusos, $f : X \to Y$. Entonces existe $g : Y \to X$ función tal que $f^{\leftarrow} = g^{\to}$ si y sólo si f es biyectiva y $g = f^{-1}$.*

Demostración. Supongamos que f es biyectiva y $g = f^{-1}$, entonces por el teorema 2.15(i)

$$g^{\to}f^{\to} = (gf)^{\to} = (id_X)^{\to} = id_{L^X}$$
$$f^{\to}g^{\to} = (fg)^{\to} = (id_Y)^{\to} = id_{L^Y}$$

Por el teorema 2.14(v) y (vi), $g^{\to} = (f^{\to})^{-1} = f^{\leftarrow}$.

Supongamos que existe $g : Y \to X$ tal que $f^{\leftarrow} = g^{\to}$. $\forall x \in X$, para el L-punto difuso $f(x)_1 \in L^Y$, tenemos

$$\bigvee\{f(x)_1(y) : y \in Y,\ g(y) = x\} = g^{\to}(f(x)_1)(x) = f^{\leftarrow}(f(x)_1)(x) = f(x)_1(f(x)) = 1$$

por lo tanto $g(f(x)) = x$, por otro lado $\bigvee\{f(x)_1(y) : y \in Y,\ g(y) = x\} = 0$, es una contradicción.

Veamos que g envía solamente $f(x)$ a x, tomamos $(f(x)_1)' \in L^Y$, entonces

$$\begin{aligned} \bigvee\{(f(x)_1)'(y) : y \in Y,\ g(y) = x\} &= g^{\to}(f(x)_1)'(x) \\ &= f^{\leftarrow}(f(x)_1)'(x) = (f(x)_1)'(f(x)) = 0. \end{aligned}$$

Para cada punto $y \in Y$, $y \neq f(x)$, $g(y) \neq x$, por otro lado $\bigvee\{(f(x)_1)'(y) : y \in Y, g(y) = x\} = 1$ esto es una contradicción.

□

Teorema 2.9. *Sean L^X, L^Y L-espacios difusos, $f : X \to Y$ función. Entonces:*
(i) $\forall A \in L^X$, $f^{\leftarrow}f^{\rightarrow}(A) \geq A$.
(ii) $\forall B \in L^Y$, $f^{\rightarrow}f^{\leftarrow}(B) \leq B$.
(iii) $\forall A \in L^X$, $f^{\rightarrow}f^{\leftarrow}f^{\rightarrow}(A) = f^{\rightarrow}(A)$.
(iv) $\forall B \in L^Y$, $f^{\leftarrow}f^{\rightarrow}f^{\leftarrow}(B) = f^{\leftarrow}(B)$.

Demostración. (i) Sean $A \in L^X$, $x \in X$

$$f^{\leftarrow}f^{\rightarrow}(A)(y) = f^{\rightarrow}(A)(f(x)) = \bigvee\{A(y) : y \in X, f(y) = f(x)\} \geq A(x).$$

(ii) Sean $B \in L^X$, $y \in Y$

$$f^{\rightarrow}f^{\leftarrow}(B)(y) = \bigvee\{f^{\leftarrow}(B)(x) : x \in X; f(x) = y\} = \bigvee\{B(f(x)) : x \in X, f(x) = y\}$$

$$= \bigvee\{B(y) : x \in X, f(x) = y\} \leq B(y).$$

(iii) Por (ii) $f^{\rightarrow}f^{\leftarrow}f^{\rightarrow}(A) \leq f^{\rightarrow}(A)$ y por (i) $f^{\rightarrow}f^{\leftarrow}f^{\rightarrow}(A) \geq f^{\rightarrow}(A)$

(iv) Analogo a (iii).

□

2.2. Espacios Topológicos Difusos

En esta sección se mostrará el concepto de topología difusa además de extensiones de conceptos básicos de topología general como lo son los conceptos de base, interior y cerradura.

Definición 2.5. Una retícula completamente distributiva L es una *F-retícula,* si L tiene una involución $^{j} : L \to L$ que invierte el orden.

Sea X un conjunto no vacío, L una F-retícula, ^{j} la involución que invierte el orden sobre L. Para cada $A \in L$, cada $B \subset L^X$, usamos la involución que invierte el orden para definir la operación ^{j} sobre L^X por:

$$A^{j}(x) = (A(x))^{j}, \quad \forall x \in X;$$

tambien definimos:

$$B^{j} = \{B^{j} : B \in B\}.$$

Llamamos $^{j} : L^X \to L^X$ la *operación pseudo-complemento* sobre L^X, A^{j} el conjunto pseudo-complementario de A en L^X.

Proposición 2.4. Sean X un conjunto no vacío, L una F-retícula, entonces la operación pseudo-complemento $^{j} : L^X \to L^X$ es una involución que invierte el orden.

Demostración. Veamos que $^{j} : L^X \to L^X$ es una involución.
Sean A, $B \in L^X$, para cada $x \in X$ tenemos

$$A^{jj}(x) = (A^{j}(x))^{j} = (A(x))^{jj} = A(x)$$

Supongamos que $A \le B$, entonces para cada $x \in X$ tenemos

$$A(x) \le B(x) \Rightarrow (A(x))^{j} \ge (B(x))^{j} \Longleftrightarrow A^{j}(x) \ge B^{j}(x) \Longleftrightarrow A^{j} \ge B^{j}$$

□

Proposición 2.5. Sean X, Y conjuntos, L una F-retícula, $f : X \to Y$ una función, entonces para cada $A \in L^X$, $f^{\to}(A^{j}) \ge (f^{\to}(A))^{j}$.

Demostración. Sea $y \in Y$,

$$\begin{aligned} f^{\to}(A^{j})(y) &= \bigvee \{A^{j}(x) : f(x) = y\} \ge \bigwedge \{A^{j}(x) : f(x) = y\} \\ &= \left(\bigvee \{A(x) : f(x) = y\}\right)^{j} = f^{\to}(A)^{j}(y), \end{aligned}$$

Así $f^{\to}(A^{j}) \ge (f^{\to}(A))^{j}$. □

Proposición 2.6. Sean X, Y conjuntos, L una F-retícula, $f : X \to Y$ una función, entonces $f^{\leftarrow} : L^Y \to L^X$ preserva la operación pseudo-complemento, es decir, para cada $B \in L^Y$, $f^{\leftarrow}(B^{j}) = (f^{\leftarrow}(B))^{j}$.

Demostración. Sea $x \in X$,

$$f^{\leftarrow}(B^{j})(x) = B^{j}(f(x)) = (B(f(x)))^{j} = (f^{\leftarrow}(B))^{j}(x)$$

□

La siguiente definición extiende el concepto de topología asociando a los conjuntos una función.

Definición 2.6. Sean X un conjunto no vacío, L una F-retícula, $\delta \subset L^X$. δ es llamada una *L-topología difusa* sobre X, y (L^X, δ) es llamado un *espacio topológico difuso*, o L-etd, si δ satisface las siguientes tres condiciones:
(LFT1) $\underline{0}, \underline{1} \in \delta$;
(LFT2) Cada $\mathcal{A} \subset \delta$, $\bigvee \mathcal{A} \in \delta$;
(LFT3) Cada $U, V \in \delta$, $U \wedge V \in \delta$.

En particular, cuando $L = [0, 1]$, llamamos al L-espacio topológico difuso (L^X, δ) un *F-espacio topológico* o un F-et, y lo denotamos por (X, δ).
Cada elemento en δ es llamado un *subconjunto abierto* en L^X, cada conjunto pseudo-complementario de un subconjunto abierto, es decir, cada elemento en δ^{j} es llamado un *subconjunto cerrado* en L^X.

Definición 2.7. Sean X un conjunto no vacío, L una F-retícula, δ_0, δ_1 dos L-topologías difusas sobre X. Decimos que δ_0 es *más grueso que* δ_1, o decimos que δ_1 es *más fino que* δ_0, si $\delta_0 \subset \delta_1$.

Veamos cuatro ejemplos de topologías difusas, tomemos a X un conjunto no vacío y sea L una F-retícula.

*(i)*Tomemos $\delta = \{\underline{0}, \underline{1}\} \subset L^X$, entonces δ es claramente una L-topología difusa sobre X. Llamamos a esta L-topología difusa δ la L-topología difusa trivial sobre X, y su correspondiente L-etd (L^X, δ) un L-etd trivial.
(ii) Tomemos $\delta = L^X$, entonces δ es una L-topología difusa sobre X, llamada la L-topología difusa discreta sobre X, y al correspondiente L-etd (L^X, δ) un L-etd discreto.
(iii) Tomemos $\delta = \{\underline{a} : a \in L\} \subset L^X$, entonces δ es una L-topología difusa sobre X.
(iv) Supongamos que $\mathcal{T}$ es una topología ordinaria sobre X, entonces $\delta = \{\chi_U : U \in \mathcal{T}\} \subset L^X$ es una L-topología difusa sobre X.

Definición 2.8. Sean X un conjunto no vacío, L una F-retícula, $\eta \subset L^X$. η es llamada una *L-cotopología difusa* sobre X, y (L^X, η) es llamado un *L-espacio topológico difuso*, o L-etd, si η cumple las siguientes tres condiciones:
(LFT1′) $\underline{0}, \underline{1} \in \eta$;
(LFT2′) Cada $\mathcal{A} \subset \eta$, $\bigwedge \mathcal{A} \in \eta$;
(LFT3′) Cada $P, Q \in \eta$, $P \vee Q \in \eta$.
Cada elemento en η es llamado un *subconjunto cerrado* en L^X, cada conjunto pseudo-complementario de un subconjunto cerrado, es decir, cada elemento en η' es llamado un *subconjunto cerrado* en L^X.

Proposición 2.7. Sea (L^X, δ) un L-etd. Entonces:
(i) $crs(\delta)$ es una L-topología difusa sobre X. (ii) $[\delta]$ es una topología ordinaria sobre X.

Definición 2.9. Sean (L^X, δ) un L-etd, $\delta_0 \subset \delta$.
δ_0 es una *base* de δ, si

$$\delta = \left\{ \bigvee \mathcal{A} : \mathcal{A} \subset \delta_0 \right\}.$$

δ_0 es una *subbase* de δ, si la familia

$$\left\{ \bigwedge \mathcal{B} : \mathcal{B} \in [\delta_0]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \right\}$$

es una base de δ.

Decimos que δ es *generado* por δ_0, si δ_0 es una base o subbase de δ. Para un conjunto X no vacío, una F-retícula L y una familia $\mathcal{B} \subset L^X$, denotamos por $Grt(\mathcal{B})$ la L-topología difusa sobre X generada por $\mathcal{B}$, es decir,

$$Grt(\mathcal{B}) = \left\{ \bigvee \left\{ \bigwedge \mathcal{F} : \mathcal{F} \in \mathcal{G} \right\} : \mathcal{G} \subset [\mathcal{B}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \right\}.$$

Teorema 2.10. *Sean X un conjunto no vacío, L una F-retícula, $\mathcal{A} \subset L^X$. Entonces*
(i) $\mathcal{A}$ es una base de una sola L-topología difusa sobre X si y sólo si $\bigvee \mathcal{A} = \underline{1}$ y $\mathcal{A}$ es cerrada bajo ínfimos binarios.
(ii) $\mathcal{A}$ es una subbase de una sola L-topología difusa sobre X si y sólo si $\bigvee \mathcal{A} = \underline{1}$.

Demostración. (i) Como una base siempre es parte de una topología, la necesidad se cumple.

Supongamos que A satisface las condiciones dadas, denotamos $\delta = \{C : C \subset A\}$, entonces por $A = \underline{1}$ tenemos $\underline{1} \in \delta$. Tomando $C = \emptyset \subset A$, tenemos $\underline{0} = C \in \delta$. Por definición, δ es cerrada bajo supremos arbitrarios. Como L y L^X son completamente distributivas, por la condición que A es cerrada bajo ínfimos binarios, entonces δ es cerrada bajo ínfimos no vacíos. Así, δ es una L-topología sobre X generada por la base A. La unicidad de la topología generada es clara.
(ii) por (i).

□

Definición 2.10. Sean (L^X, δ) un L-etd, $A \in L^X$.
El *interior* de A es el supremo de todos lo subconjunto abiertos contenidos en A, lo denotamos por $int(A)$ o A°.
La *cerradura* de A como el ínfimo de todos los subconjuntos cerrados que contienen a A, denotado por $cl(A)$ o A^-.

Los siguientes resultados nos dan propiedades de la definición anterior.

Teorema 2.11. *Sea (L^X, δ) un L-etd. Entonces*
(i) $\underline{0}^\circ = \underline{0}$, $\underline{1}^\circ = \underline{1}$.
(ii) $\forall A \in L^X$, $A^\circ \leq A$.
(iii) $\forall A \in L^X$, $A^{\circ\circ} = A^\circ$.
(iv) $\forall A, B \in L^X$, $A \leq B \Rightarrow A^\circ \leq B^\circ$.
(v) $\forall A, B \in L^X$, $(A \wedge B)^\circ = A^\circ \wedge B^\circ$.

Demostración. (i) a (iv) se demuestran directamente de la definición de interior.
(v) Por (iv), $(A \wedge B)^\circ \leq A^\circ, B^\circ$, así $(A \wedge B)^\circ \leq A^\circ \wedge B^\circ$. Por (ii), $A^\circ \wedge B^\circ \leq A \wedge B$; por (iv) y (iii), $A^\circ \wedge B^\circ = (A^\circ \wedge B)^\circ \leq (A \wedge B)^\circ$.

□

De manera similar tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.12. *Sea (L^X, δ) un L-etd. Entonces*
(i) $\underline{0}^- = \underline{0}$, $\underline{1}^- = \underline{1}$.
(ii) $\forall A \in L^X$, $A \leq A^-$.
(iii) $\forall A \in L^X$, $A^{--} = A^-$.
(iv) $\forall A, B \in L^X$, $A \leq B \Rightarrow A^- \leq B^-$.
(v) $\forall A, B \in L^X$, $(A \vee B)^- = A^- \vee B^-$.

Teorema 2.13. *Sea (L^X, δ) un L-etd. Entonces*
(i) $\forall A \in L^X$, $A^{\circ j} = A^{j-}$.
(ii) $\forall A \in L^X$, $A^{j\circ} = A^{-j}$.
(iii) $\forall A \in L^X$, $A^\circ = A^{j-j}$.
(iv) $\forall A \in L^X$, $A^- = A^{j\circ j}$.

Demostración. (i) Se cumple que $A^\circ \leq A$, por la proposición 2.4, $A^j \leq A^{\circ j}$. Como $A^{\circ j}$ es cerrado, por el teorema 2.12(iv), $A^{j-} \leq A^{\circ j-} = A^{\circ j}$. Inversamente, por el teorema 2.12(ii), $A^j \leq A^{j-}$, por la proposición 2.4, $A^{j-j} \leq A^{jj} = A$. Como A^{j-} es cerrado, así A^{j-j} es abierto, por la definición de interior, $A^{j-j} \leq A^\circ$. Usando la proposición 2.4

tenemos $A^{\circ j} \leq A^{j-jj} = A^{j-}$.

(ii)-(iv) por la proposición 2.4, tomamos los pseudo-complementos de ambos lados de (i), tenemos (iii). Sustituyendo A en (iii) con A^{j}, tenemos (ii). Reemplazando A en (i) con A^{j}, tenemos (iv).

□

A partir de operadores entre un L-etd que cumpla ciertas condiciones se puede generar una base para una topología sobre X.

Teorema 2.14. *Sean X un conjunto no vacío, L una F-retícula, $i : L^X \to L^X$ un operador sobre L^X que satisface las siguientes condiciones:*
(i) $i(\underline{1}) = \underline{1}$,
(ii) $\forall A \in L^X,\ i(A) \leq A$,
(iii) $\forall A, B \in L^X,\ i(A \wedge B) = i(A) \wedge i(B)$,
Entonces

$$\delta = \{A \in L^X : i(A) = A\}$$

es una L-topología difusa sobre X. Además, si la operación satisface
(iv) $\forall A \in L^X,\ i(i(A)) = i(A)$,
entonces con la L-topolog´ıa difusa δ definida anteriormente, en L-etd (L^X, δ), $A^\circ = i(A)$ para cada $A \in L^X$.

Demostración. Por (i), $\underline{1} \in \delta$. Por (ii), $i(\underline{0}) \leq \underline{0}$, así $i(\underline{0}) = \underline{0}$, $\underline{0} \in \delta$, δ cumple (LFT1).

Sea $\{A_t : t \in T\} \subset \delta$. Por (iii), i preserva el orden por la proposición 1.1(iii), por (ii) y $A_s \leq \bigvee_{t\in T} A_t$ para cada $s \in T$,

$$i\left(\bigvee_{t\in T} A_t\right) \leq \bigvee_{t\in T} A_t = \bigvee_{s\in T} i(A_s) \leq i\left(\bigvee_{t\in T} A_t\right),$$

$$i\left(\bigvee_{t\in T} A_t\right) = \bigvee_{t\in T} A_t, \quad \bigvee_{t\in T} A_t \in \delta,$$

δ satisface (LFT2).
(LFT3) se cumple por (iii).

Supongamos que i cumple (iv). $\forall A \in L^X$, $A^\circ \in \delta = \{C \in L^X : i(C) = C,\}$ por lo tanto, $i(A^\circ) = A^\circ$. Por (iii), i preserva el orden, as´ı $A^\circ = i(A^\circ) \leq i(A)$. Inversamente, por (iv), $i(i(A)) = i(A)$, as´ı

$$i(A) \leq \bigvee\{C \in L^X : i(C) = C \leq A\} = A^\circ,$$

$$A^\circ = i(A).$$

□

Se puede obtener un resultado análogo considerando la operación cerradura.

Teorema 2.15. *Sean X un conjunto no vacío, L una F-retícula, $c : L^X \to L^X$ un operador sobre L^X que satisface las siguientes condiciones:*
(i) $c(\underline{0}) = \underline{0}$,
(ii) Cada $A \in L^X$, $A \leq c(A)$,
(iii) Cada $A, B \in L^X$, $c(A \vee B) = c(A) \vee c(B)$,
Entonces

$$\delta = \{A \in L^X : c(A^{j}) = A^{j}\}$$

es una L-topología difusa sobre X. Además, si la operación c satisface
(iv) Cada $A \in L^X$, $c(c(A)) = c(A)$,
entonces con la L-topolog´ıa difusa δ definida anteriormente, en L-etd(L^X), δ, $A^- = c(A)$ *para cada* $A \in L^X$.

Definición 2.11. Sean X un conjunto no vacío, L una F-retícula, $i : L^X \to L^X$ una función sobre L^X.
i es llamado un *operador interior* sobre L^X, si cumple las siguientes condiciones:
(IO1) $i(\underline{1}) = \underline{1}$.
(IO2) Cada $A \in L^X$, $i(A) \leq A$.
(IO3) Cada A, $B \in L^X$, $i(A \wedge B) = i(A) \wedge i(B)$.
(IO4) Cada $A \in L^X$, $i(i(A)) = i(A)$.

Para un operador interior i sobre L^X, definimos la L-topología difusa generada por i como

$$\delta = \{A \in L^X : i(A) = A\}.$$

Analogamente se puede definir un *operador cerradura* $c : L^X \to L^X$ que cumple las siguientes condiciones:
(CO1) $c(\underline{0}) = \underline{0}$.
(CO2) Cada $A \in L^X$, $A \leq c(A)$.
(CO3) Cada A, $B \in L^X$, $c(A \vee B) = c(A) \vee c(B)$.
(CO4) Cada $A \in L^X$, $c(c(A)) = c(A)$.

Para un operador cerradura c sobre L^X, definimos la L-topología difusa generada por c como

$$\delta = \{A \in L^X : c(A^{j}) = A^{j}\}.$$

Con estas definiciones y los teoremas 2.11, 2.12, 2.14 y 2.15 tenemos los siguientes teoremas:

Teorema 2.16. *Sean X un conjunto no vacío, L una F-retícula, $\mathbf{I}$ la familia de todos los operadores interior sobre L^X, T la familia de todas las L-topolog´ıas difusas sobre X. Entonces*

$$f : \mathbf{I} \to \mathrm{T}\ ,\ f(i) = \{A \in L^X : i(A) = A\}$$

es una biyección, y su inversa es

$$f^{-1} : \mathcal{T} \to \mathcal{I},\ f^{-1}(\delta) = int_{\delta}.$$

Teorema 2.17. *Sean X un conjunto no vacío, L una F-retícula, $\mathcal{C}$ la familia de todos los operadores cerradura sobre L^X, $\mathcal{T}$ la familia de todas las L-topologías difusas sobre X. Entonces*

$$f : \mathcal{C} \to \mathcal{T},\ f(c) = \{A \in L^X : c(A') = A'\}$$

es una biyección, y su inversa es

$$f^{-1} : \mathcal{T} \to \mathcal{C},\ f^{-1}(\delta) = cl_{\delta}.$$

2.3. Principio de Elección Multiple y Estructuras de Vecindades

En esta sección se definará una nueva relación entre L-conjuntos difusos además de extender el principio de elección, con el objetivo de mostrar que el orden definido anteriormente no cumple con la extensión del principio de elección pero con la nueva relación sí se cumple.

Definición 2.12. Sea (L^X, δ) un L-etd. Para cada $x_a \in Pt(L^X)$, para cada $A, B \in L^X$.
Decimos que x_a *casi-coincide* con A, o que x_a es *casi-coincidente* con A, denotado por $x_a \, \hat{q} \, A$, si $x_a \not\leq A'$ o $a \not\leq A(x)'$; decimos que A *casi-coincide* con B en x, o que A es *casi-coincidente* con B en x, si $A(x) \not\leq B'(x)$; decimos que A *casi-coincide* con B, o que A es *casi-coincidente* con B, si A *casi-coincide* con B en algún $x \in X$.

Denotamos por $\hat{q}$ la relación "casi-coincidente con" o "es casi-coincidente con". La relación "no casi-coincide con" o "no es casi-coincidente con" es denotado por $\neg\hat{q}$.
Denotamos al conjunto de todos los puntos en X, los cuales $A\hat{q}B$, por $A \bigcirc B$, es decir

$$A \bigcirc B = \{x \in X : x_{A(x)} \, \hat{q} \, B\}.$$

Proposición 2.8. Sean (L^X, δ) un $L-etd$, $A, B, C \in L^X$, $\{A_t : t \in T\} \subset L^X$, $x \in X$, $a \in L \setminus \{\emptyset\}$. Entonces
(i) $A \bigcirc B = B \bigcirc A$.
(ii) $A\hat{q}B$ en $x \iff B\hat{q}A$ en $x \iff x \in A \bigcirc B \iff x \in B \bigcirc A$.
(iii) $A\hat{q}B \iff B\hat{q}A \iff A \bigcirc B \neq \emptyset \iff B \bigcirc A \neq \emptyset \iff A \not\leq B' \iff B \not\leq A'$.

(iv) $A \le B \Rightarrow A \circ C \subset B \circ C$.
(v) $A \circ \bigvee_{t\in T} A_t = \bigvee_{t\in T} A \circ A_t$.
(vi) $A\hat{q} \bigvee_{t\in T} A_t \iff \exists t \in T,\ A\hat{q}A_t$.
(vii) $A \le B,\ C\hat{q}A \Rightarrow C\hat{q}B$.
(viii) $A \le B,\ x_a \,\alpha\, A \Rightarrow x_a \,\alpha\, B$.

Proposición 2.9. Sean (L^X, δ), (L^Y, μ) L-etds, $A, B \in L^X$, $C, D \in L^Y$, $f : X \to Y$ una función. Entonces
(i) $A\hat{q}f^{\leftarrow}(C) \iff f^{\to}(A)\hat{q}C$.
(ii) $A\hat{q}B \Rightarrow f^{\to}(A)\hat{q}f^{\to}(B)$.
(iii) $f^{\leftarrow}(C)\hat{q}f^{\leftarrow}(D) \Rightarrow C\hat{q}D$.

Demostración. (i) por la proposición 2.6. y el Teorema 2.9.(ii),

$$A\neg\hat{q}f^{\leftarrow} \Longrightarrow A \le f^{\leftarrow}(C)' = f^{\leftarrow}(C')$$

$$\Longrightarrow f^{\to}(A) \le f^{\to}f^{\leftarrow}(C') \le C'$$

$$\Longrightarrow f^{\to}(A)\neg\hat{q}C.$$

Por el teorema 2.9(i) y la proposición 2.6,

$$f^{\to}(A)\neg\hat{q}C \Longrightarrow f^{\to}(A) \le C'$$

$$\Longrightarrow A \le f^{\leftarrow}f^{\to}(A) \le f^{\leftarrow}(C') = f^{\leftarrow}(C)'$$

$$\Longrightarrow A\neg\hat{q}f^{\leftarrow}(C).$$

Así $A\hat{q}f^{\leftarrow}(C) \iff f^{\to}(A)\hat{q}C$.

(ii) Por la definición de $f^{\to}$,

$$A\hat{q}B \Longrightarrow \exists x \in X,\ A(x) \not\le B(x)'$$

$$\Longrightarrow \exists x \in X,\ f^{\to}(A)(f(x)) = \bigvee\{A(z) : z \in X, f(z) = f(x)\}$$

$$\not\le \bigwedge\{B(z)' : z \in X, f(z) = f(x)\} = \left(\bigvee\{B(z) : z \in X, f(z) = f(x)\}\right)'$$

$$= f^{\to}(B)(f(x))'$$

$$\Longrightarrow f^{\to}(A)\hat{q}f^{\to}(B).$$

(iii) Por la definición de $f^{\leftarrow}$,

$$f^{\leftarrow}(C)\hat{q}f^{\leftarrow}(D) \Longrightarrow \exists x \in X,\ C(f(x)) = f^{\leftarrow}(C)(x) \not\le f^{\leftarrow}(D)(x)' = D(f(x))'$$

$$\Longrightarrow C \not\le D' \Longrightarrow C\hat{q}D.$$

$\square$

El par de ejemplos siguientes muestras que las los recíprocos de las implicaciones de la proposición anterior no se cumplen de manera general.

Ejemplo 2.2. (i) Tomamos $X = \{x^0, x^1\}$, $Y = \{y\}$, $L = [0, 1]$, $f : X \to Y$, $f(x^0) = f(x^1) = y$, $A = x^0_1$, $B = x^1_1$. Entonces $f^{\to}(A) = f^{\to}(B) = y_1$, $f^{\to}(A)\hat{q}f^{\to}(B)$, pero $A\neg\hat{q}B$.

(ii) Tomamos $X = \{x^0, x^1\}$, $Y = \{y^0, y^1, y^2\}$, $L = [0, 1]$, $C = y^0_1 \vee y^1_1$, $D = y^1_1 \vee y^2_1$, $f : X \to Y$, $f(x^0) = y^0$, $f(x^1) = y^2$. Entonces $f^{\leftarrow}(C) = x^0_1$, $f^{\leftarrow}(D) = x^1_1$, $C\hat{q}D$, pero $f^{\leftarrow}(C)\neg\hat{q}f^{\leftarrow}(D)$.

Definición 2.13. Sean (L^X, δ) un L-etd, η una L-cotopología difusa sobre X, $x_a \in Pt(L^X)$.
$U \in \delta$ es una *vecindad* de x_a en (L^X, δ), si x_a pertenece a U, es decir, $x_a \in U$ o $x_a \leq U$. La familia de todas las vecindades de x_a en (L^X, δ) es llamada el *sistema de vecindades* de x_a, denotado por $\mathsf{N}(x_a)$.

$U \in \delta$ es una *vecindad casi-coincidente* de x_a en (L^X, δ), o Q-vecindad para abreviar, si $x_a \,\hat{q}\, U$, es decir, x_a casi-coincide con U. La familia de todas las Q-vecindades de x_a en (L^X, δ) es llamada el *sistema de Q-vecindades* de x_a, denotado por $\mathsf{Q}(x_a)$.

En (L^X, η) con L-cotopología η, $P \in \eta$ es una *vecindad remota* de x_a, o *R-vecindad* para abreviar, si $x_a \not\leq P$, es decir, x_a o esta contenido en P. La familia de todas las R-vecindades de x_a en (L^X, η) es llamada el *sistema de R-vecindades* de x_a, denotado por $\mathsf{R}(x_a)$.

Principio de Elección Múltiple: Para cada familia $\{A_t : t \in T\}$ de L-subconjuntos difusos sobre X, la siguiente implicación se cumple:

$$x_\lambda R \bigvee \{A_t : t \in T\} \Longrightarrow \exists t \in T,\ x_\lambda R A_t.$$

donde R denota una relación binaria.

Este principio es un hecho fundamental en teoría de conjuntos. Pero en teoría de L-conjuntos difusos, no se cumple con la relación de "pertenece a".

Ejemplo 2.3. Para cada $x \in X$, para cada $n = 2, 3, 4, \cdots, x_{1-\frac{1}{n}}$, $x_1 \in x_1 = \bigvee\{x_{1-\frac{1}{n}} : n \geq 2\}$, pero para cada $n \geq 2$, $x_1 \notin x_{1-\frac{1}{n}}$.

Por la propoición 2.8(vi), la relación "casi-coincide con" cumple con el Principio de Elección Múltiple.

Teorema 2.18. *Sean L^X un L-espacio difuso, $\mathsf{A} \subset L^X$, entonces*

$$M(\mathsf{A}) = \{x_\lambda \in Pt(\mathsf{A}) : \lambda \in M(L)\}.$$

Por este teorema, el teorema 1.3(iv) y el corolario 1.1 tenemos:

Corolario 2.1. Sean X un conjunto no vacío, L una retícula completamente distributiva. Entonces
(i) $M(L)$ es un conjunto generado superiormente de L^X, es decir, $\bigvee M(\downarrow A) = A$ para cada $A \in L^X$.
(ii) Para cada $A, B \in L^X$, $A \leq B$ si y sólo si $M(\downarrow A) \subset M(\downarrow B)$.

Teorema 2.19. *Sean (L^X, δ) un L-etd. Entonces*
(i) Para todo $x_a \in Pt(L^X)$, $\mathsf{N}(x_a)$ es un conjunto dirigido inferiormente en L^X y $\underline{0} \notin \mathsf{N}(x_a)$.
(ii) $x_\lambda \in M(L^X)$, $\mathsf{Q}(x_\lambda)$ es un conjunto dirigido inferiormente en L^X y $\underline{0} \notin \mathsf{Q}(x_a)$.
(iii) $\forall x_\lambda \in M(L^X)$, $\mathsf{R}(x_\lambda)$ es un conjunto dirigido en L^X y $\underline{1} \notin \mathsf{R}(x_a)$.

Demostración. Solamente se demostrara (ii) ya que (i) es claro y (iii) es dual a (ii). Sean $U, V \in \mathsf{Q}(x_\lambda)$, entonces $x_\lambda \not\leq U'$, V'. Si $x_\lambda U' \vee V'$, entonces por $x_\lambda M(L^X)$, tenemos que $x_\lambda U'$ o $x_\lambda V'$, lo cual contradice que $U, V \in \mathsf{Q}(x_\lambda)$. Así $x_\lambda \not\leq U' \vee V' = (U \wedge V)'$, $U \wedge V \in \mathsf{Q}(x_\lambda)$ es un conjunto dirigido inferiormente en L^X.
Como $x_\lambda \triangleleft \underline{0}$ no se cumple, $\underline{0} \notin \mathsf{Q}(x_\lambda)$.

□

En topología difusa existen distintos tipos de de definir una vecindad de un punto difuso p, ademas se define un análogo a la diferencia entre conjuntos de la teoría clásica de estos.

Definición 2.14. Sean (L^X, δ) un L-etd, $p \in Pt(L^X)$.
Una subfamilia $\mathsf{A} \subset \mathsf{N}(p)$ es una *base de vecindades* de p, si para cada $U \in \mathsf{N}(p)$, existe $V \in \mathsf{A}$ tal que $V \leq U$.
Una subfamilia $\mathsf{A} \subset \mathsf{Q}(p)$ es una *base de* Q*-vecindades* de p, si para cada $U \in \mathsf{Q}(p)$, existe $V \in \mathsf{A}$ tal que $V \leq U$.
Una subfamilia $\mathsf{A} \subset \mathsf{R}(p)$ es una *base de* R*-vecindades* de p, si para cada $P \in \mathsf{R}(p)$, existe $Q \in \mathsf{A}$ tal que $Q \geq P$.
Llamamos a cada tipo de bases una base local.

Definición 2.15. Sean L^X un L-espacio difuso, $A, B \in L^X$. Definimos la *casi-diferencia* de A y B, denotado por $A \setminus B$, como

$$A \setminus B = \bigvee \{x_\lambda \in M(\downarrow A) : B(x) = 0\} \vee \bigvee \{x_\lambda \in M(\downarrow A) : \lambda \nleq B(x) > 0\};$$

particularmente, para cada $x_a \in Pt(L^X)$,

$$A \setminus x_a = \bigvee \{y_\lambda \in M(\downarrow A) : y \neq x\} \vee \bigvee \{x_\lambda \in M(\downarrow A) : \lambda \nleq a\}.$$

Mostraremos propiedades que se pueden conseguir mediante la definición anterior.

Proposición 2.10. Sean L^X un L-espacio difuso, $A, B \in L^X$, $\{A_t : t \in T\} \subset L^X$, $x_a \in Pt(L^X)$. Entonces se cumple lo siguiente:

(i) $A \setminus B \leq A$.
(ii) $A \setminus \underline{0} = A$.
(iii) $1_L \notin M(L) \Longrightarrow A \setminus \underline{1} = A$.
(iv) $A \leq B \Longrightarrow A \setminus C \leq B \setminus C$.
(v) $\left(\bigvee_{t\in T} A_t\right) \setminus C = \bigvee_{t\in T}(A_t \setminus C)$.
(vi) Para cada $x \in supp(B)$, $B(x) \not\leq A(x) \Longrightarrow A \setminus B = A$.
(vii) $A \wedge B = \underline{0} \Longrightarrow A \setminus B = A$.
(viii) $x_a \not\leq A \Longrightarrow A \setminus x_a = A$.
(ix) $supp(B) = supp(C)$, $B \leq C \Longrightarrow A \setminus B \leq A \setminus C$.

Demostración. (i) Por definición.

(ii) Por el corolario 2.1(i).

(iii) Como $1_L \notin M(L)$, para cada $x_\lambda \in A$, $\lambda \prec 1_L = \underline{1}(x) > 0_L$, por el corolario 2.1(ii), $A \leq \underline{1}$. Por (i), $A \setminus \underline{1} = A$.

(iv) Por la definición de cai-diferencia y el corolario 2.1(ii).

(v) Por (iv), $\bigvee_{t\in T}(A_t \setminus C) \leq \left(\bigvee_{t\in T} A_t\right) \setminus C$.

Denotemos la condición "$C(x) = 0$ o $\lambda \prec C(x) > 0$" por "$P(x_\lambda) > 0$". Supongamos que $x_\lambda \in M(\downarrow \bigvee_{t\in T} A_t)$ y $P(x_\lambda) > 0$. Si $C(x) = 0$, por el corolario 2.1(i),

$$\left(\bigvee_{t\in T}(A_t \setminus C)\right)(x) = \bigvee_{t\in T}\bigvee\{\mu \in M(\downarrow A_t(x)) : P(x_\mu) > 0\} = \bigvee_{t\in T}\bigvee M(\downarrow A_t(x))$$

$$= \bigvee_{t\in T} A_t(x) \geq \lambda.$$

Si $\lambda \prec C(x) > 0$, Para cada $t \in T$, denotamos $a_t = \lambda \wedge A_t(x)$. Como $\lambda \prec C(x)$, $\forall t \in T$, $\mu \in M(\downarrow a_t) \Longrightarrow \mu \prec C(x)$. Por el corolario 2.1(i),

$$\left(\bigvee_{t\in T}(A_t \setminus C)\right)(x) = \bigvee_{t\in T}\bigvee\{\mu \in M(\downarrow A_t(x)) : P(x_\mu) > 0\}$$

$$= \bigvee_{t\in T}\bigvee\{\mu \in M(\downarrow A_t(x)) : \mu \prec C(x) > 0\}$$

$$\geq \bigvee_{t\in T}\bigvee\{\mu \in M(\downarrow a_t) : \mu \prec C(x) > 0\}$$

$$= \bigvee_{t\in T}\bigvee M(\downarrow a_t) = \bigvee_{t\in T} a_t = \bigvee_{t\in T}(\lambda \wedge A_t(x)) = \lambda \wedge \bigvee_{t\in T} A_t(x) = \lambda.$$

Tenemos que $\left(\bigvee_{t\in T}(A_t \setminus C)\right)(x) \geq \lambda$. Como el supremo de todos los x_λ es $\left(\bigvee_{t\in T} A_t\right) \setminus C$, tenemos $\bigvee_{t\in T}(A_t \setminus C) \geq \left(\bigvee_{t\in T} A_t\right) \setminus C$.

(vi) Supongamos que $B(x)$ ¢ $A(x)$ para cada $x \in supp(B)$. Para cada $x_\lambda \in A$. Si $B(x) = 0$, tenemos $x_\lambda \in A \setminus B$. Si $B(x) > 0$, entonces $\lambda \geq B(x)$ no se cumple, por otro lado, tenemos $A(x) \geq \lambda \geq B(x) > 0$, es decir, $x \in supp(B)$ y $B(x) \leq A(x)$, esto contradice con la suposición. Así λ § $B > 0$, $x_\lambda \in A \setminus B$. Por (i) y el corolario 2.1(ii), $A \setminus B = A$.

(vii),(viii) se deducen de (vi).

(ix) se obtiene directamente.

□

Definición 2.16. Sean (L^X, δ) un L-etd, $A \in L^X$, $x_\lambda \in M(L^X)$.
Una molécula x_λ es un *punto de adherencia* de A, si para cada $U \in \mathcal{Q}(x_\lambda)$, U casi-coincide con A, es decir, $U \hat{q} A$.
Una molécula x_λ es un *punto de acumulación* de A, si x_λ es un punto de adherencia de $A \setminus x_\lambda$; lo que nos dice, para cada $U \in \mathcal{Q}(x_\lambda)$, U casi-coincide con la casi-diferencia de A y x_λ, es decir, $U \hat{q} (A \setminus x_\lambda)$.

Denotamos al conjunto de todos los puntos de acumulación de A en (L^X, δ) por $Acu(A)$.
Definimos el *conjunto derivado* de A como ¯ $Acu(A)$, denotado por A^d.

Una manera practica de usar conceptos es utilizando equivalencias o distinta manera de verlos a partir de definiciones antes vistas, esto ultimo es lo que se hace para el concepto de adherencia.

Teorema 2.20. *Sean (L^X, δ) un L-etd, $A, B \in L^X$. Entonces*
(i) $M(\downarrow A^-)$ es el conjunto de todos lo puntos de adherencia de A.
(ii) $A^- =$ ¯ $\{x_\lambda \in M(L^X) : x_\lambda$ es un punto de adherencia de $A\}$.
(iii) $A \leq B \Longrightarrow$ cada punto de adherencia de A es un punto de adherencia de B.

Demostración. (i) Supongamos $x_\lambda \in M(\downarrow A^-)$. Para cada $U \in \mathcal{Q}(x_\lambda)$. Si $A \leq U^{j}$, entonces $x_\lambda \leq A^- \leq U^{j-} = U^{j}$, $x_\lambda \leq U^{j}$, se contradice con $U \in \mathcal{Q}(x_\lambda)$. Así A ¢ U^{j}, x_λ es un punto de adherencia de A.

Supongamos que x_λ es un punto de adherencia de A. Si x_λ ¢ A^-, entonces $A^{-j} \in \mathcal{Q}(x_\lambda)$. Como x_λ es un punto de adherencia de A, A ¢ A^-. Pero esto es una contradicción, Así $x_\lambda \leq A^-$.

(ii) Por el corolario 2.1(i) y (i),

$A^- =$ ¯ $M(\downarrow A^-) =$ ¯ $\{x_\lambda \in M(L^X) : x_\lambda$ *es un punto de adherencia de* $A\}$.

(iii) Por (i) y el teorema 2.12(iv).

□

Teorema 2.21. *Sean (L^X, δ) un L-etd, $A, B \in L^X$, $\{A_t : t \in T\} \subset L^X$. Entonces*
(i) $A^- = A \vee A^d$.

(ii) $A \leq B \Longrightarrow A^d \leq B^d$.
(iii) $(A \vee B)^d = A^d \vee B^d$.
(iv) $\bigvee_{t\in T} A_t^d \leq \left(\bigvee_{t\in T} A_t\right)^d$.

Demostración. Por el teorema 2.20(ii), $A \vee A^d \leq A^-$.
Sea $x_\lambda \in M(\downarrow A^-)$. Si $x_\lambda \in A$, entonces $x_\lambda \leq A \vee A^d$. Si $x_\lambda \notin A$, por el teorema 2.20(i), x_λ es un punto de adherencia de A, por la proposición 2.10(viii), para cada $U \in Q(x_\lambda)$, $U \text{O} (A \setminus x_\lambda) = U \text{O} A \neq \emptyset$, x_λ es un punto de acumulación de A, tenemos $x_\lambda \leq A^d \leq A \vee A^d$. Por el corolario 2.1, $A^- = A \vee A^d$.

(ii) Supongamos que x_λ es un punto de acumulación de A, entonces para cada $U \in Q(x_\lambda)$, por la proposición 2.10(iv) y la proposición 2.8(iv),

$$U \text{O} (B \setminus x_\lambda) \supset U \text{O} (A \setminus x_\lambda) \neq \emptyset,$$

x_λ es un punto de acumulación de B, $x_\lambda \in B^d$. Por el corolario 2.1(ii), $A^d \leq B^d$.

(iii) Por (ii), $A^d \vee B^d \leq (A \vee B)^d$. Supongamos que x_λ es un punto de acumulación de $A \vee B$. Si x_λ no es un punto de acumulación de A o B, entonces existen $U_0, U_1 \in Q(x_\lambda)$ tal que $U_0 \text{O} (A \setminus x_\lambda) = U_1 \text{O} B \setminus x_\lambda = \emptyset$. Tomemos $U = U_0 \wedge U_1 \in Q(x_\lambda)$, como x_λ es un punto de acumulación de $A \vee B$, por la proposición 2.8(iv),(v) y la proposición 2.10(v) tenemos

$$(U_0 \text{O} (A \setminus x_\lambda)) \cup (U_1 \text{O} (B \setminus x_\lambda)) \supset (U \text{O} (A \setminus x_\lambda)) \cup (U \text{O} (B \setminus x_\lambda))$$

$$= U \text{O} ((A \setminus x_\lambda) \vee (B \setminus x_\lambda)) = U \text{O} ((A \vee B) \setminus x_\lambda) \neq \emptyset$$

Esto es una contradicción.

(iv) por (ii).

□

Lema 2.1. Sea L una retícula completa, entonces el supremo de cada conjunto dirigido de moléculas en L es una molécula.

Demostración. Supongamos que $D \subset M(L)$ es un conjunto dirigido en L, denotamos $\zeta = \bigvee D$. Si $\zeta \notin M(L)$, entonces existen $a, b < \zeta$ tal que $a \vee b = \zeta$. Como $\zeta = \bigvee D$, existen $\alpha, \beta \in D$ tal que $\alpha \not\leq a$, $\beta \not\leq b$. Como D es dirigido, existe $\gamma \in D$ tal que $\gamma \geq \alpha, \beta$. Así $\gamma \not\leq a, b$. Pero $\gamma \in M(L)$, por lo tanto $\gamma \not\leq a \vee b = \zeta = \bigvee D$, esto es una contradicción.

□

2.4. Funciones Continuas

En esta sección definiremos cuando una L-función difusa es continua, además de mostrar algunas propiedades y equivalencias.

Definición 2.17. Sean (L^X, δ), (L^Y, μ) L-etds, $f^{\rightarrow} : L^X \rightarrow L^Y$ una L-función difusa.
Decimos que $f^{\rightarrow}$ es una *L-función difusa continua*, si su L-función inversa difusa $f^{\leftarrow} : L^Y \rightarrow L^X$ envía cada subconjunto abierto en (L^Y, μ) a un abierto en (L^X, δ), es decir, para cada $V \in \mu$, $f^{\leftarrow}(V) \in \delta$.
$f^{\rightarrow}$ es *continua en la molécula* $e \in M(L^X)$, si para cada $V \in \mathsf{Q}(f^{\rightarrow}(e))$, $f^{\leftarrow}(V) \in \mathsf{Q}(e)$.

Por la proposición 2.9(i), en la definición anterior de continuidad en una molécula, para cada $V \in \mathsf{Q}(f^{\rightarrow}(e))$, $e \,\mathsf{q}\, f^{\leftarrow}(V)$ siempre se cumple. Así

Proposición 2.11. Sean (L^X, δ), (L^Y, μ) L-etds. Una L-función difusa $f^{\rightarrow} : L^X \rightarrow L^Y$ es continua en la molécula $e \in M(L^X)$ si y sólo si $f^{\leftarrow}(V) \in \delta$ para cada $V \in \mathsf{Q}(f^{\rightarrow}(e))$.

Teorema 2.22. *Sean (L^X, δ), (L^Y, μ) L-etds, $f^{\rightarrow} : L^X \rightarrow L^Y$ una L-función difusa. Entonces las siguientes condicione son equivalentes:*
(i) $f^{\rightarrow}$ es continua.
(ii) Cada $Q \in \mu'$, $f^{\leftarrow}(Q) \in \delta'$.
(iii) $f^{\rightarrow}$ es continua en cada molécula de (L^X, δ).
(iv) Toda $e \in M(L^X)$, cada $Q \in \mathsf{R}(f^{\rightarrow}(e))$, $f^{\leftarrow}(Q) \in \mathsf{R}(e)$.
(v) μ tiene una subbase μ_0 tal que cada $V \in \mu_0$, $f^{\leftarrow}(V) \in \delta$.
(vi) μ tiene una subbase μ_0 tal que cada $Q \in \mu_0$, $f^{\leftarrow}(Q) \in \delta'$.
(vii) Cada $A \in L^X$, $f^{\rightarrow}(A^-) \leq (f^{\rightarrow}(A))^-$.
(viii) Cada $B \in L^Y$, $(f^{\leftarrow}(B))^- \leq f^{\leftarrow}(B^-)$.
(ix) Cada $B \in L^Y$, $f^{\leftarrow}(B^\circ) \leq (f^{\leftarrow}(B))^\circ$.

Demostración. (i)$\Longrightarrow$ (ii) por la proposición 2.6.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\forall e \in M(L^X)$, $\forall V \in \mathsf{Q}(f^{\rightarrow}(e))$. Por la proposición 2.6 y (ii), $(f^{\leftarrow}(V))' = f^{\leftarrow}(V') \in \delta'$, así $f^{\leftarrow}(V) \in \delta$. Además, si $f^{\leftarrow}(V) \notin \mathsf{Q}(e)$, entonces $e \leq (f^{\leftarrow}(V))' = f^{\leftarrow}(V')$, por el teorema 2.9(ii), $f^{\rightarrow}(e) \leq f^{\rightarrow}f^{\leftarrow}(V') \leq V'$, lo que contradice con $V \in \mathsf{Q}(f^{\rightarrow}(e))$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) por la proposición 2.6.

(iv) $\Longrightarrow$ (v) $\forall V \in \mu$. Si existe $e \in M(L^X)$ tal que $f^{\rightarrow}(e) \not\leq V'$, entonces $V' \in \mathsf{R}(f^{\rightarrow}(e))$, por (iv) y la proposición 2.6, $(f^{\leftarrow}(V))' = f^{\leftarrow}(V') \in \mathsf{R}(e) \subset \delta'$, $f^{\leftarrow}(V) \in \delta$. Si $\forall e \in M(L^X)$, $f^{\rightarrow}(e) \leq V'$, entonces por el corolario 2.1(i) y el teorema 2.2(i), por $\underline{1} \in \delta$,

$$f^{\rightarrow}(\underline{1}) = f^{\rightarrow}\left(\bigvee M(L^X)\right) = \bigvee\{f^{\rightarrow}(e) : e \in M(L^X)\} \leq V'.$$

Por el teorema 2.9(i) y la proposición 2.6,

$$\underline{1} \leq f^{\leftarrow}f^{\rightarrow}(\underline{1}) \leq f^{\leftarrow}(V') = (f^{\leftarrow})', \qquad f^{\leftarrow}(V) = \underline{0} \in \delta.$$

Tomemos $\mu_0 = \mu$ y entonces (v) se cumple.

(v)$\Longrightarrow$ (vi) por la proposición 2.6.

(vi) $\Longrightarrow$ (vii) por (vi) y el teorema 2.3(i),(ii), $f^{\leftarrow}$ envia cada elemento de μ' en δ'. Así $\forall A \in L^X$, por el teorema 2.9(i),

$$A \leq f^{\leftarrow} f^{\rightarrow}(A) \leq f^{\leftarrow}((f^{\rightarrow}(A))^{-}) \in \delta',$$

$$A^{-} \leq f^{\leftarrow}((f^{\rightarrow}(A))^{-}).$$

Por el teorema 2.9(ii),

$$f^{\rightarrow}(A^{-}) \leq f^{\rightarrow} f^{\leftarrow}((f^{\rightarrow}(A))^{-}) \leq (f^{\rightarrow}(A))^{-}.$$

(vii) $\Longrightarrow$ (viii) Tomemos $A = f^{\leftarrow}(B) \in L^X$, por (vii) y el teorema 2.9(ii),

$$f^{\rightarrow}((f^{\leftarrow}(B))^{-}) \leq (f^{\rightarrow} f^{\leftarrow})^{-} \leq B^{-},$$

Por el teorema 2.9(i),

$$(f^{\leftarrow}(B))^{-} \leq f^{\leftarrow} f^{\rightarrow}((f^{\leftarrow}(B))^{-}) \leq f^{\leftarrow}(B^{-}).$$

(viii) $\Longrightarrow$ (ix) Por (viii),

$$(f^{\leftarrow}(B'))^{-} \leq f^{\leftarrow}(B'^{-}),$$

por el teorema 2.13(i) y la proposición 2.6,

$$(f^{\leftarrow}(B))^{\circ\prime} = (f^{\leftarrow}(B))'^{-} = (f^{\leftarrow}(B'))^{-} \leq f^{\leftarrow}(B'^{-}) = f^{\leftarrow}(B^{\circ\prime}) = (f^{\leftarrow}(B^{\circ}))', \; (f^{\leftarrow}(B'))^{\circ} \geq f^{\leftarrow}(B^{\circ}).$$

(ix) $\Longrightarrow$ (i) $\forall\, V \in \mu$, entonces por (ix),

$$f^{\leftarrow}(V) = f^{\leftarrow}(V^{\circ}) \leq (f^{\leftarrow}(V))^{\circ} \leq f^{\leftarrow}(V).$$

Así $f^{\leftarrow}(V) = (f^{\leftarrow}(V))^{\circ} \in \delta$, f es continua.

□

Definición 2.18. Sean (L^X, δ), (L^Y, μ) L-etds, $f^{\rightarrow} : L^X \rightarrow L^Y$ una L-función difusa.
$f^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \rightarrow (L^Y, \mu)$ es *abierta*, si envía cada subconjunto abierto en (L^X, δ) a un *abierto* en (L^Y, μ), es decir, para cada $U \in \delta$, $f^{\rightarrow}(U) \in \mu$.
$f^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \rightarrow (L^Y, \mu)$ es *cerrada*, si envía cada subconjunto cerrado en (L^X, δ) a un cerrado en (L^Y, μ), es decir, para cada $F \in \delta'$, $f^{\rightarrow}(F) \in \mu'$.
$f^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \rightarrow (L^Y, \mu)$ es un *L-homeomorfismo difuso*, si es biyectiva, continua y abierta.

Por las conclusiones de los teoremas 2.6 y 2.8, los siguientes resultados se obtienen:

Proposición 2.12. Sean (L^X, δ), (L^Y, μ) L-etds, $f : X \to Y$ una función. Entonces
(i) $f^{\to}$ es abierta si y sólo si cada base δ_0 de δ y cada $U \in \delta_0$, $f^{\to}(U) \in \mu$.
(ii) $f^{\to}$ es un L-homeomorfismo si y sólo si f es biyectiva, $f^{\to}$ es continua y abierta.
(iii) $f^{\to}$ es un L-homeomorfismo si y sólo si f es biyectiva, $f^{\to}$ es continua y cerrada.

Proposición 2.13. Sean (L^X, δ), (L^Y, μ) y (L^Z, ζ) L-etds, $f^{\to} : L^X \to L^Y$, $g^{\to} : L^Y \to L^Z$ L-funciones difusas. Entonces
(i) $f^{\to}$, $g^{\to}$ son continuas $\Longrightarrow$ $g^{\to}f^{\to}$ es continua.
(ii) $f^{\to}$, $g^{\to}$ son abiertos $\Longrightarrow$ $g^{\to}f^{\to}$ es abierta.
(iii) $f^{\to}$, $g^{\to}$ son cerradas $\Longrightarrow$ $g^{\to}f^{\to}$ es cerrada.
(iv) $f^{\to}$, $g^{\to}$ son L-homeomorfismos difuso $\Longrightarrow$ $g^{\to}f^{\to}$ es un L-homeomorfismo difuso.

Definición 2.19. Decimos que lo L-etds (L^X, δ) y (L^Y, μ) son *homeomorfos*, o (L^X, δ) es *homeomorfo* a (L^Y, μ), si existe un L-homeomorfismo $f^{\to} : (L^X, \delta) \to (L^Y, \mu)$.

Capítulo 3

Operaciones sobre Espacios Topológicos Difusos

Un aspecto importante de la teoría clásica de espacios topológicos es la construcción de nuevos espacios topológicos a partir de ciertos espacios dados, mediante subepacios, productos topológicos, sumas directas, relaciones de equivalencia entre otros. De forma análoga, en este capitulo mostraremos unas operaciones en L-etds, que nos permite construir nuevos espacios.

3.1. Subespacios

Un concepto estudiado en topología es el subespacio topológico de un espacio dado, a continuación daremos una definición de este concepto para la versión difusa y algunas de las propiedades básicas.

Sean L^X un L-espacio difuso, $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \subset L^X$. Denotamos

$$\mathcal{A}|_y = \{A|_Y : A \in \mathcal{A}\},$$

donde $A|_Y$ es la restricción de la función A.
A continuación enunciaremos algunos resultados que se pueden verificar en [2].

Proposición 3.1. Sean (L^X, δ) un L-etd, $Z \subset Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$ $Z \neq \emptyset$, $\{A_t : t \in T\} \subset L^X$, $A \in L^X$. Entonces
(i) $\left(\bigvee_{t\in T} A_t\right)|_Y = \bigvee_{t\in T}(A_t|_Y)$.
(ii) $\left(\bigwedge_{t\in T} A_t\right)|_Y = \bigwedge_{t\in T}(A_t|_Y)$.
(iii) $A'|_Y = (A|_Y)'$.
(iv) $(A|_Y)|_Z = A|_Z$.

Corolario 3.1. Sean (L^X, δ) un L-etd, $Z \subset Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$. Entonces
(i) $\delta|_Y$ es una L-topología difusa sobre Y.
(ii) $(\delta|_Y)|_Z = \delta|_Z$.

Definición 3.2. Sean (L^X, δ) un L-etd, $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$. Decimos que δ_Y es *la topología relativa de* δ *sobre* Y o *la topología subespacio de* Y, decimos que (L^Y, δ_Y) un *L-subespacio difuso de* (L^X, δ), o *subespacio.*
$(L^Y, \delta|_Y)$ es un *subespacio abierto de* (L^X, δ), si $\chi_Y \in \delta$.
$(L^Y, \delta|_Y)$ es un *subespacio cerrado de* (L^X, δ), si $\chi_Y \in \delta'$.
$(L^Y, \delta|_Y)$ es un *subespacio denso* de (L^X, δ), si $cl_\delta(\chi_Y) = \chi_X$.

3.2. Espacio Producto

Hay situaciones en las que necesitamos estudiar más de un L-etd simultáneamente, este es el motivo de construir espacios producto.

Definición 3.3. Sea $\mathcal{S} = \{(L^{X_t}, \delta_t) : t \in T\}$ una familia de L-etds, $\mathcal{A} = \{A_t : t \in T\}$ una familia de L-subconjuntos difusos donde $A_t \in L^{X_t}$ para cada $t \in T$. Denotamos $X = \prod_{t\in T} X_t$.

Para cada $t \in T$, supongamos que $p_t : X \to X_t$ es la proyección usual, definimos la *proyección* del L-espacio difuso L^X al L-espacio difuso L^{X_t} por

$$p_t^{\rightarrow} : L^X \to L^{X_t}.$$

Definimos el *producto topológico* de L-topologías difusas $\{\delta_t : t \in T\}$ sobre X, denotado por $\prod_{t\in T} \delta_t$, como la L-topología difusa δ sobre X generada por la subbase

$$\{p_t^{\leftarrow}(U_t) : U_t \in \delta_t, t \in T\},$$

Llamamos al L-etd (L^X, δ) el *espacio producto* de L-etds $\{(L^{X_t}, \delta_t)\}$, o un *L-espacio producto difuso*, lo denotamos por $\prod \mathcal{S}$ o $\prod_{t\in T}(L^{X_t}, \delta_t)$.
Definimos el producto de L-subconjuntos difusos $\mathcal{A} = \{A_t : t \in T\}$, denotado por $\prod \mathcal{A}$ o $\prod_{t\in T} A_t$, como

$$\prod \mathcal{A} = \bigwedge \{p_t^{\leftarrow}(A_t) : t \in T\}.$$

Llamamos a la familia

$$\{p_t^{\leftarrow}(U_t) : U_t \in \delta_t, t \in T\},$$

y la familia

$$\left\{ \bigwedge_{t\in F} p_t^{\leftarrow}(U_t) : F \in [T]^{<\omega}, \forall t \in F, U_t \in \delta_t \right\}$$

la *subbase canónica* y la *base canónica* del producto topológico $\prod_{t\in T} \delta_t$ respectivamente.

Ejemplo 3.1. Tomemos $X_0 = X_1 = \{x, y\}$, $L = \{0, \lambda, 1\}$ una cadena, $\delta_0 = \{\underline{0}, \underline{1}\}$, $\delta_1 = \{\underline{0}, x_\lambda, \underline{1}\}$, entonces (L^{X_0}, δ_0) y (L^{X_1}, δ_1) son L-etds. Denotamos su espacio producto por (L^X, δ), entonces $U = p^{\leftarrow}(x_\lambda)$ es un subconjunto abierto en L^X, δ. Para los dos puntos x, y en $X_0 = \{x, y\}$,

$$p^{\rightarrow}(p^{\leftarrow}(x_\lambda))(x) = \bigvee \{x_\lambda(p_1(z)) : z \in X_0 \times X_1, p_0(z) = x\} = x_\lambda(x) \vee x_\lambda(y) = \lambda,$$

$$p^{\rightarrow}(p^{\leftarrow}(x_\lambda))(y) = \bigvee\{x_\lambda(p_1(z)) : z \in X_0 \times X_1, p_0(z) = y\} = x_\lambda(x) \vee x_\lambda(y) = \lambda$$

Tenemos que $p_0^{\rightarrow}(p_1^{\leftarrow}(x_\lambda)) = \underline{\lambda}$ no pertenece a δ_0, $p_0^{\rightarrow}$ no es abierto.

Definición 3.4. Sea (L^X, δ) un L-etd. δ se dice *estratificado*, si δ contiene cada capa de X; es decir, para cada $a \in L$, $\underline{a} \in \delta$ (L^X, δ) se dice *estratificado*, si δ es estratificado.

3.3. Espacios Estratificados

En esta sección se mostrará el concepto de red el cual será necesario para un resultado que se expondrá más adelante.

Definición 3.5. Sean (L^X, δ) un L-etd, μ la L-topología difusa sobre X generada por $\delta \cup \{\underline{a} : a \in L\}$, decimos que μ es la *estratificación* de δ, y que (L^X, μ) es la *estratificación* de (L^X, δ).

Las siguientes demostraciones se pueden encontrar en [6].

Proposición 3.2. Sean (L^X, δ) un L-etd, μ la estratificación de δ. Entonces

$$\mu = \left\{ \bigvee\{aU : (a, U) \in \mathsf{A}\} : \mathsf{A} \subset L \times \delta \right\}.$$

Proposición 3.3. Sean (L^X, δ), (L^Y, μ) L-etds, (L^Y, μ) estratificado, $f^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \rightarrow (L^Y, \mu)$ continua. Entonce (L^X, δ) es estratificado.

El siguiente teorema muestra que las L-funciones difusas conservan la continuidad en los espacios estratificados.

Teorema 3.1. *Sean (L^X, δ), (L^Y, μ) L-etds, $f^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \rightarrow (L^Y, \mu)$ una L-función difusa continua, δ_0 y μ_0 las estratificaciones de δ y μ respectivamente. Entonces $f^{\rightarrow} : (L^X, \delta_0) \rightarrow (L^Y, \mu_0)$ es continua.*

Demostración. Para cada $V \in \mu_0$, por la propoición 3.2, existe $\mathsf{A} \subset L \times \mu$ tal que $V = \bigvee\{aW : (a, W) \in \mathsf{A}\}$. Como $f^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \rightarrow (L^Y, \mu)$ es continua,

$$f^{\leftarrow}(V) = f^{\leftarrow}\left(\bigvee\{aW : (a, W) \in \mathsf{A}\}\right) = \bigvee\{f^{\leftarrow}(aW) : (a, W) \in \mathsf{A}\}$$

$$= \bigvee\{af^{\leftarrow}(W) : (a, W) \in \mathsf{A}\} \in \delta_0.$$

Así $f^{\rightarrow}(L^X, \delta_0) \rightarrow (L^Y, \mu_0)$ es continua.

□

Definición 3.6. Sean P una propiedad de L-etds.
P es *hereditaria*, si para cada L-etd (L^X, δ) tiene la propiedad P entonces cada L-subespacio difuso de (L^X, δ) tiene la propiedad P.

P es *multiplicativa*, si para cada familia $\{(L^{X_t}, \delta_t) : t \in T\}$ de L-etds que tiene la propiedad P, el L-espacio producto difuso $_{t\in T}(L^{X_t}, \delta_t)$ tiene la propiedad P. Decimos que es *fuertemente multiplicativa*, si para cada familia $\{(L^{X_t}, \delta_t) : t \in T\}$ de L-etds, el espacio producto $_{t\in T}(L^{X_t}, \delta_t)$ tiene la propiedad P si y sólo si (L^{X_t}, δ_t) tiene la propiedad P para cada $t \in T$.

Teorema 3.2. *La propiedad estratificado es hereditaria.*

El siguiente concepto se utilizará más adelante.

Sea (L^X, δ) un L-etd, $\mathsf{A} \subset L^X$, $a \in L$, denotamos

$$\iota_a(\mathsf{A}) = \{A_{(a)} : A \in \mathsf{A}\}$$

$\iota_L(\delta)$ denota la topología ordinaria sobre X generada por la subbase $\bigcup_{a\in L} \iota_a(\delta)$.

Definición 3.7. Sea X un conjunto no vacío, D un conjunto dirigido. Llamamos a cada función $S : D \to X$ una *red en* X, y D el conjunto *indice* de S.

En un L-espacio difuso L^X, llamamos una red $S : D \to Pt(L^X)$ una red en L^X. En particular, llamamos a una red $S : D \to M(L^X)$ una *red molécula* en L^X.
Para un subconjunto $A \subset Pt(L^X)$ y una red $S = \{S(n),\ n \in D\}$ tal que $S(n) \in A$ para cada $n \in D$, decimos que S esta compuesto por puntos de A.

Una red S en L^X con indice D es denotado por $S : D \to (L^X, \delta)$ o $S = \{S(n),\ n \in D\}$.
Para una red $S = \{S(n), n \in D\}$ en L^X y un L-subconjunto difuso $A \in L^X$, decimos que S es una red en A, si $S(n) \leq A$ para cada $n \in D$.
Para una red $S = \{S(n),\ n \in D\}$ en L^X y $e \in Pt(L^X)$, S es una red constante con valor e, si $S(n) = e$ para cada $n \in D$.

Para un L-etd (L^X, δ) y una red o una molécula S en L^X, decimos que S es una red o una red molécula en (L^X, δ) respectivamente.

Definición 3.8. Sean (L^X, δ) un L-etd, $S = \{S(n),\ n \in D\}$ una red en (L^X, δ), P una propiedad, $e \in Pt(L^X)$.
Decimos que S *eventualmente tiene la propiedad* P, si existe $n_0 \in D$ tal que para cada $n \in D$, $n \geq n_0$, $S(n)$ siempre tiene la propiedad P. Decimos que S tiene *frecuentemente la propiedad* P, si para cada $n \in D$, existe $n_0 \in D$ tal que $n_0 \geq n$ y $S(n_0)$ tiene la propiedad P.

Decimos que e un *punto adherente* de S, denotado por $S \infty e$, si para cada Q-vecindad U de e, S frecuentemente casi-coincide con U. Llamamos a e un *punto límite* o un *límite*, denotado por $S \to e$, si para cada Q-vecindad U de e, S eventualmente casi-coincide con U; en este caso decimos que S *converge* a e, o decimos que S es *convergente* a e.

3.4. Conexidad

La conexidad es uno de los conceptos más estudiados en topología. En esta sección daremos su versión difusa y algunas propiedades.

Definición 3.9. Sean (L^X, δ) un L-etd, $A, B \in L^X$.
A y B son *separados*, si

$$A^- \wedge B = A \wedge B^- = \underline{0}.$$

A es *conexo*, si no existen $C, D \in L^X \setminus \{\underline{0}\}$ separados tal que $A = C \vee D$. Decimos que (L^X, δ) es *conexo*, si el L-subconjunto difuso más grande $\underline{1}$ es conexo.

Lema 3.1. Sea (L^X, δ) un L-etd, $A, B, C \in L^X$, B y C separados. Entonces $A \wedge B$ y $A \wedge C$ son separados.

Teorema 3.3. *Sea (L^X, δ) un L-etd, $A \in L^X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) A es conexo.
(ii) $B, C \in L^X$ separados, $A \leq B \vee C \Rightarrow A \leq B$ o $A \leq C$.
(iii) $B, C \in L^X$ separados, $A \leq B \vee C \Rightarrow A \wedge B = \underline{0}$ o $A \wedge C = \underline{0}$.

Demostración. (i)$\Rightarrow$ (iii): Por el lema 3.1, $A \wedge B$ y $A \wedge C$ son separados. Como A es conexo y $A = A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, uno de $A \wedge B$ y $A \wedge C$ es igual a $\underline{0}$.

(iii)$\Rightarrow$ (ii): Supongamos que $A \wedge B = \underline{0}$, entonces

$$A = A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) = \underline{0} \vee (A \wedge C) = A \wedge C.$$

Así $A \leq C$. Similarmente, $A \wedge C = \underline{0} \Rightarrow A \leq B$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que $B, C \in L^X$ son separados y $A = B \vee C$, por (ii), $A \leq B$ o $A \leq C$. Si $A \leq B$, entonces como B, C son separados,

$$C = C \wedge A \leq C \wedge B \leq C \wedge B^- = \underline{0}.$$

Si $A \leq C$, tenemos de manera similar $B = \underline{0}$. Así A se representa como el supremo de dos subconjuntos separados distintos de cero, A es continua. □

Teorema 3.4. *Sean (L^X, δ) un L-etd, $\{A_t : t \in T\} \subset L^X$, $s \in T$ tal que A_t es conexo y no separado de A_s para cada $t \in T$. Entonces $\bigvee_{t \in T} A_t$ es conexo.*

Demostración. Denotamos $A = \bigvee_{t \in T} A_t$. Supongamos que $B, C \in L^X$ son separados y $A = B \vee C$. Como A_s es conexo por el teorema 3.3, $A_s \leq B$ o $A_s \leq C$, digamos $A_s \leq B$. Para cada $t \in T$, como A_t es conexo y no separado de A_s, por el lema 3.1 y el teorema 3.3, $A_t \leq B$. Así $A \leq B$. Por el teorema 3.3, A es conexo.

□

El siguiente resultado se concluye del teorema anterior.

Corolario 3.2. Sean (L^X, δ) un L-etd, $\mathcal{A}$ una familia de L-subconjuntos difusos conexos sobre X, $\bigwedge \mathcal{A} \neq \underline{0}$. Entonces $\bigvee \mathcal{A}$ es conexo.

Teorema 3.5. *Sean (L^X, δ), (L^Y, μ) L-etds, $f^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \rightarrow (L^Y, \mu)$ una L-función difusa continua, $A \in L^X$ conexo. Entonces $f^{\rightarrow}(A)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $B, C \in L^Y$ son separados y $f^{\rightarrow}(A) = B \vee C$, entonces por el teorema 2.9(i),

$$A \leq f^{\leftarrow} f^{\rightarrow}(A) = f^{\leftarrow}(B \vee C) = f^{\leftarrow}(B) \vee f^{\leftarrow}(C).$$

Como $f^{\rightarrow}$ es continua, por el teorema 2.22 (i)$\Rightarrow$ (viii),

$$(f^{\leftarrow}(B))^{-} \wedge f^{\leftarrow}(C) \leq f^{\leftarrow}(B^{-}) \wedge f^{\leftarrow}(C) = f^{\leftarrow}(B^{-} \wedge C) = f^{\leftarrow}(\underline{0}) = \underline{0}.$$

Similarmente, $f^{\leftarrow}(B) \wedge (f^{\leftarrow}(C))^{-} = \underline{0}$. Así $f^{\leftarrow}(B)$ y $f^{\leftarrow}(C)$ son separados. Por el teorema 3.3 (i)$\Rightarrow$ (ii), $A \leq f^{\leftarrow}(B)$ o $A \leq f^{\leftarrow}(C)$, digamos $A \leq f^{\leftarrow}(B)$. Entonces por el teorema 2.9(ii), $f^{\rightarrow}(A) \leq f^{\rightarrow} f^{\leftarrow}(B) \leq B$. Por el teorema 3.3 (ii)$\Rightarrow$ (i), $f^{\rightarrow}(A)$ es conexo. □

Definición 3.10. Sea $\{X_t : t \in T\}$ una familia de conjuntos distintos del vacío, $X = \prod_{t \in T} X_t$, $z \in X$, $S \subset T$. Entonces denotamos

$$hpl(z, S) = \{x \in X : \forall t \in T \setminus S, p_t(x) = p_t(z)\},$$

Llamamos $hpl(z, S)$ el *hiperplano de X en el punto z con rango libre S.* Sea $\{L^{X_t}, \delta_t : t \in T\}$ una familia de L-etds, $(L^X, \delta) = \prod_{t \in T}(L^{X_t}, \delta_t)$, $z \in X$, $S \subset T$. Entonces el L-subconjunto difuso $hpl_L(z, S) = \chi_{hpl(z,S)} \in L^X$ es el *L-hiperplano difuso de (L^X, δ) en el L-punto difuso z_1 con rango libre S.*

El siguiente resultado se puede encontrar en [6] ademas de otros resultados más sobre conexidad.

Teorema 3.6. *Sea $\{(L^{X_t}, \delta_t) : t \in T\}$ una familia de L-etds estratificados, $(L^X, \delta) = \prod_{t \in T}(L^{X_t}, \delta_t)$. Entonces (L^X, δ) es conexo si y sólo si (L^{X_t}, δ_t) es conexo para cada $t \in T$.*

3.5. Compacidad

Compacidad es uno de los conceptos más importantes en topología. Algunos autores trataron de establecer distintos tipos de compacidad, obteniendo importantes resultados. En este capitulo mostraremos los distintos tipos de compacidad y algunos resultados de esto pero nos centraremos en la N-compacidad.

Definición 3.11. Sea (L^X, δ) un L-etd, $A \in L^X$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset L^X$.
$\mathcal{A}$ es una *cubierta de A*, si $\bigvee \mathcal{A} \geq A$; en particular, $\mathcal{A}$ es una cubierta de (L^X, δ), si $\mathcal{A}$ es una cubierta de $\underline{1}$. $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta de A, si $\mathcal{A} \subset \delta$ y $\mathcal{A}$ es una cubierta de A. Para una cubierta $\mathcal{A}$ de A, $\mathcal{B}$ es una *subcubierta de* $\mathcal{A}$, si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

es una cubierta de A.

Definición 3.12. Sea (X, δ) un F-et.
Para cada $a \in [0, 1)$, una familia $\mathcal{A} \subset I^X$ es una *a-cubierta*, si para cada $x \in X$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A(x) > a$; $\mathcal{A}$ es una *a-cubierta abierta*, si $\mathcal{A} \subset \delta$ y $\mathcal{A}$ es una a-cubierta; $\mathcal{A}_0 \subset I^X$ es una *sub-a-cubierta de* $\mathcal{A}$, si $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_0$ es una a-cubierta; $\mathcal{A}$ es una *a^*-cubierta*, si para cada $x \in X$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A(x) \geq a$; $\mathcal{A}$ es una *a^*-cubierta abierta*, si $\mathcal{A} \subset \delta$ y $\mathcal{A}$ es una a^*-cubierta; $\mathcal{A}_0 \subset I^X$ es una *sub-a^*-cubierta de* $\mathcal{A}$, si $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_0$ es una a^*-cubierta.
Un F-et (X, δ) es *C-compacto*, si para cada cubierta de (X, δ) tiene una subcubierta finita.

Los conceptos mostrados anteriormente dan paso a distintos tipos de compacidad como se muestra en las siguientes definiciones.

Definición 3.13. Sea $a \in [0, 1)$. (X, δ) es *a-compacto*, si cada a-cubierta abierta tiene una sub-a-cubierta.
(X, δ) es *a^*-compacto*, si para cada a^*-cubierta abierta tiene una sub-a^*-cubierta.

Definición 3.14. Un F-et (X, δ) es *fuertemente compacto*, si es a-compacto para cada $a \in [0, 1)$.
Un F-et (X, δ) es *ultra compacto*, si $(X, l_I(\delta))$ es compacto.
Un F-et (X, δ) es *débilmente compacto*, si para cada $\mathcal{A} \subset \delta$ tal que $\bar{\bigvee} \mathcal{A} = \underline{1}$ y cada $s > 0$, existe una subfamilia finita $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ tal que $\bar{\bigvee} \mathcal{A}_0 \geq 1 - s$.
Un F-et (X, δ) es *compacto difuso*, si para cada $a \in [0, 1]$, cada $\mathcal{A} \subset \delta$ tal que $\bar{\bigvee} \mathcal{A} \geq \underline{a}$ y cada $s \in (0, a)$, existe una subfamilia finita $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ tal que $\bar{\bigvee} \mathcal{A}_0 \geq \underline{a - s}$.

No nos centraremos en demostrar propiedades de estos tipos de compacidad pero se mencionará un resultado importante. Para un estudios más profundo se puede consultar [7], [9] y [10].

Definicion 3.15. Sean (L^X, δ) un L-etd, $A \in L^X$, $\Phi \subset L^X$. Φ es una *Q-cubierta de A*, si para cada $x \in supp(A)$, existe $U \in \Phi$ tal que $x_{A(x)} \,q\, U$. Φ es una *Q-cubierta abierta de A*, si $\Phi \subset \delta$ y Φ es una Q-cubierta de A. $\Phi_0 \subset L^X$ es una *sub-Q-cubierta de* Φ, si $\Phi_0 \subseteq \Phi$ y Φ_0 es una Q-cubierta de A. Φ es una *Q-cubierta de* (X, δ), si Φ es una Q-cubierta de $\underline{1}$.

Definicion 3.16. Sean (X, δ) un F-et, $A \in I^X$. A es *Q-compacto*, si para cada Q-cubierta abierta de A tiene una sub-Q-cubierta finita. (X, δ) es *Q-compacto*, si $\underline{1}$ es Q-compacto.

Los siguientes teoremas se pueden verificar en [6].

Teorema 3.7. *a-compacidad, compacidad fuerte, ultra compacidad y compacidad difusa en espacios topológicos difusos son fuertemente multiplicativas.*

Note que la Q-compacidad es multiplicativa pero no es fuertemente multiplicativa.

Teorema 3.8. *La Q-compacidad para espacios topológicos difusos es multiplicativa.*

Definición 3.17. Sean (L^X, δ) un L-etd, $A \in L^X$, $C \in \delta$, $\Phi \subset L^X$, $a \in M(L)$. C es una *a-Q-vecindad de A*, si $C \in \mathrm{Q}(x_a)$ para cada $x_a \leq A$. Φ es una *a-Q-cubierta de A*, denotado por $\Phi \bar{q}^{\wedge} A(a)$, si para cada $x_a \leq A$, existe $U \in \Phi$ tal que x_a q U. Φ es una *a-Q-cubierta abierta de A*, si $\Phi \subset \delta$ y Φ es una a-Q-cubierta de A. $\Phi_0 \subset L^X$ es una *sub-a-Q-cubierta de* Φ, si $\Phi_0 \subset \Phi$ y Φ_0 es una a-Q-cubierta de A. Φ es una *a^--Q-cubierta de A*, denotado por $\Phi \bar{q}^{\wedge} A(a)$, si existe $\gamma \in \beta^*(a)$ tal que Φ es una γ-Q-cubierta de A.
A es *N-compacto*, si para cada $a \in M(L)$, cada a-Q-cubierta abierta de A tiene una subfamilia finita que es una a^--Q-cubierta de A. (L^X, δ) es *N-compacto*, si $\underline{1}$ es N-compacto.

Los siguientes resultados y otros más se pueden encontrar en [8].

Definición 3.18 Sean (L^X, δ) un L-etd, $S = \{S(n), n \in D\}$ una red en L^X, $a \in L$. Definimos la *red soporte* de S como la red $supp(S) = \{supp(S(n)), n \in D\}$ en $(X, [\delta])$.
Definimos la *red altura* de S como la red $ht(S) = \{ht(S(n)), n \in D\}$ en L. S es una *a-red eventual*, si S es una red molécula y cada $\gamma \in \beta^*(a)$, $ht(S)$ es eventualmente mayor o igual a γ, es decir, existe $n_0 \in D$ tal que $ht(S(n)) \geq \gamma$ para cada $n \in D$, $n \geq n_0$.

Teorema 3.9. *Sean (L^X, δ) un L-etd, $A \in L^X$. Entonces A es N-compacto si y sólo si para cada $a \in M(L)$, cada a-red eventual en A tiene un punto adherente en A con altura a.*

Teorema 3.10. *Sean (L^X, δ), (L^Y, μ) L-etds, $f^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \to (L^Y, \mu)$ una L-función difusa continua, A es un subconjunto N-compacto en (L^X, δ). Entonces $f^{\rightarrow}(A)$ es un subconjunto N-compacto en (L^Y, μ).*

El siguiente lema es importante para la demostración de los teoremas de compacidad entre productos, el cual se puede encontrar en [6].

Lema 3.2.(Subbase de Alexander) Sea L^X, δ un L-etd, B es una subbase de δ, $A \in L^X$. Si para cada $\Phi \subset \mathrm{B}$ y cada $a \in M(L)$, $\Phi \bar{q}^{\wedge} A(a)$ siempre implica que Φ tiene una subfamilia finita Ψ tal que $\Psi \bar{q}^{\wedge} A(a)$, entonces A es N-compacto.

Teorema 3.11. *N-compacidad de L-subconjuntos difusos es multiplicativo.*

Demostración. Sea $\{(L^{X_t}, \delta_t) : t \in T\}$ es una familia de L-etds N-compactos, $(L^X, \delta) = \prod_{t \in T}(L^{X_t}, \delta_t)$ el L-etd producto, A_t es un subconjunto N-compacto en

L^{X_t,δ_t} para cada $t \in T$, $A = \prod_{t\in T} A_t$.

Sea $\alpha \in M(L)$, Φ una α-Q-cubierta abierta A. Por el lemma de subbsase de Alexander, supongamos

$$\Phi \subset \{p_t^{\leftarrow}(U_t) : t \in T, U_t \in \delta_t\}.$$

Dividamos esto en dos casos:

(i) Si existe $t_0 \in T$ tal que $x_\alpha^{t_0} \not\leq A_{t_0}$ para cada $x^{t_0} \in X_{t_0}$. Si para cada $\gamma \in \beta^*(\alpha)$, existe $S(\gamma) \leq A_{t_0}$, entonces como $\alpha \in M(L)$, $\beta^*(\alpha)$ es un conjunto dirigido, $S = \{S(\gamma), \gamma \in \beta^*(\alpha)\}$ es una α-red eventual en A_{t_0}. Por la N-compacidad de A_{t_0} y el teorema 3.9, S tiene una punto adherente en A_{t_0} con altura α. Pero esto no es posible. Así, existe $\gamma \in \beta^*(\alpha)$ tal que $x_\gamma^{t_0} \not\leq A_{t_0}$ para cada $x^{t_0} \in X_{t_0}$. Entonces para cada $x \in X$,

$$A(x) = \left(\bigwedge_{t\in T} A_t\right)(x) = \left(\bigwedge_{t\in T} p_t^{\leftarrow}(A_t)\right)(x) = \bigwedge_{t\in T} A_t(p_t(x)) \leq A_{t_0}(p_{t_0}(x)) = A_{t_0}(x^{t_0}).$$

Tenemos que $\gamma \not\leq A(x)$ para cada $x \in X$, es decir, A no tiene alguna molécula con altura γ. Así cada subfamilia finita Ψ de Φ es una γ-Q-cubierta de A, $\bigvee \Psi \hat{q} A(\alpha)$.

(ii) Si para cada $t \in T$, existe $x_\alpha^t \leq A_t$. Para cada $t \in T$, existe $\mathcal{B}_t \subset \delta_t$ tal que

$$\Phi = \{p_t^{\leftarrow}(U_t) : t \in T, U_t \in \mathcal{B}_t\}.$$

Si para cada $t \in T$, $\bigvee \mathcal{B}_t \neg\hat{q} A_t(\alpha)$, entonces para cada $t \in T$, existe $y^t \in X_t$ tal que $y_\alpha^t \leq A_t \wedge (\bigvee \mathcal{B}_t)'$.
Tomemos $z \in X$ tal que para cada $t \in T$,

$$p_t(z) = \begin{cases} y^t, & \mathcal{B}_t \neq \emptyset \\ x^t, & \mathcal{B}_t = \emptyset. \end{cases}$$

Entonces para cada $t \in T$, cada $U_t \in \mathcal{B}_t$,

$$\alpha \leq \left(A_t \wedge \left(\bigvee \mathcal{B}_t\right)'\right)(y^t) \leq U_t'(y^t) = U_t'(p_t(z)) = p_t^{\leftarrow}(U_t')(z) = p_t^{\leftarrow}(U_t)'(z),$$

así $z_\alpha \leq p_t^{\leftarrow}(U_t)'$. Tenemos $\Phi \cap Q(z_\alpha) = \emptyset$. Pero para cada $t \in T$, $x_\alpha^t, y_\alpha^t \leq A_t$, así

$$A(z) = \bigwedge_{t\in T} A_t(p_t(z)) = \left(\bigwedge_{t\in T, \mathcal{B}_t \neq \emptyset} A_t(y^t)\right) \wedge \left(\bigwedge_{t\in T, \mathcal{B}_t = \emptyset} A_t(x^t)\right) \geq \alpha.$$

Por lo tanto $z_\alpha A$. Por $\bigvee \Phi \hat{q} A(\alpha)$, $\Phi \bigcap Q(z_\alpha) \neq \emptyset$, esto contradice la igualdad $\Phi \cap Q(z_\alpha) = \emptyset$. Así, existe $s \in T$ tal que $\bigvee \mathcal{B}_s \hat{q} A_s(\alpha)$.

Como A_s es N-compacto, $\mathcal{B}_s$ tiene una subfamilia $\mathcal{D}_s$ tal que $\bigvee \mathcal{D}_s \hat{q} A_s(\gamma)$ para algún $\gamma \in \beta^*(\alpha)$. Tomemos $\Psi = \{p_s^{\leftarrow}(U_s) : U_s \in \mathcal{D}_s\}$, entonces $\Psi \in [\Phi]^{<\omega}$. Para cada $u_\gamma \leq A$, entonces

$$A_s(p_s(u)) = p_s^{\leftarrow}(A_s)(u) \geq A(u) \geq \gamma,$$

$p_s(u)_\gamma \leq A_s$. Por $\bar{\mathrm{D}}_s \hat{q} A_s(\gamma)$, existe $U_s \in \mathrm{D}_s$ tal que $U_s \in \mathrm{Q}(p_s(u)_\gamma)$. Entonces

$$p_s^{\leftarrow}(U_s)^{\mathrm{j}}(u) = U_s^{\mathrm{j}}(p_s(u)) \S\, \gamma.$$

Tenemos que $p_s^{\leftarrow}(U_s) \in \mathrm{Q}(u_\gamma)$, Ψ es una γ-Q-cubierta de A.

□

Teorema 3.12. *N-compacidad de L-etds es fuertemente multiplicativo.*

Demostración. Sea $\{(L^{X_t}, \delta_t) : t \in T\}$ una familia de L-etds, $(L^X, \delta) = \prod_{t \in T}(L^{X_t}, \delta_t)$ el L-etd producto.
Si (L^X, δ) es N-compacto, $t \in T$, entonces como $p_t^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \to (L^{X_t}, \delta_t)$ es sobreyectiva y continua, entonces por el teorema 3.10, (L^{X_t}, δ_t) es N-compacto.
La suficiencia es probada en el teorema 3.11.

□

Capítulo 4

Conclusión

En este trabajo se expuso el concepto de conjunto difuso y a partir de el se obtuvieron resultados que nos ayudó a introducir los conceptos planteados en el comienzo de la tesis.
Estos conceptos introducidos son para iniciar un estudio más profundo en el área de interés y también nos ayudan para exponer las ideas de diferentes autores para definir un mismo concepto.
Para finalizar se expone un resultado análogo a uno de los teoremas más famosos de Topología que es el teorema de tychonoff el cual da pie a desarrollar nuevos resultados y ampliar el panorama que tenemos de la teoría de Topología difusa.

Bibliografía

[1] Birkhoff, G. : *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. vol.35, 3a. Edición (1967).

[2] Chang, C.L. : *Fuzzy topologicalspaces*, J. Math. Anal. Appl. vol.24 (1968).

[3] Goguen, J. A. : *L-Fuzzy sets*, J. Math. Anal. Appl. vol.18 (1967).

[4] Hernandéz, Hernandéz Fernando: *Teoría de Conjuntos*, Universidad Nacional Autónoma de México, 3a. Edición (2011).

[5] Liu, Ying-Ming : *An analysis on fuzzy membership relation in fuzzy set theory*, Chinese Annals of Math, vol.5A (1984).

[6] Liu Ying-Ming, Luo Mao-Kang : *Fuzzy Topology*, World Scientific Publishing : Advances in fuzzy systems - applications and theory, vol.9 (1997).

[7] Lower, R. : *Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness*, J. Math. Anal. Appl. vol.56 (1976).

[8] Lower, R. : *Initial and final fuy topologies and the fuzzy Tychonoff theorem*, J. Math. Anal. Appl. vol.58 (1977).

[9] Lower, R. : *A comparison of different compactnes notions in fuzzy topological spaces*, J. Math. Anal. Appl. vol.64 (1978).

[10] Wang, Guo-Jun : *A new fuzzy compactness defined by fuzzy nets*, J. Math. Anal. Appl. vol.94 (1983).

[11] Zadeh, L. A. : *Fuzzy sets*, Inform. Control. vol.8 (1965).