Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Semánticas para Lógicas Posibilistas

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado
de

Doctor en Ciencias Matemáticas

por

Rubén Octavio Vélez Salazar

asesorado por

Dr. José Ramón Enrique Arrazola Ramírez,
Dr. Iván Martínez Ruiz

Puebla Pue.
5 de junio de 2015

5 de junio de 2015

Índice general

Introducción

En nuestra vida diaria utilizamos un lenguaje para comunicar diferentes tipos de ideas hacia o entre nosotros, para lo cual utilizamos diferentes entes lingüísticos. La Lógica Matemática modela aquellos entes lingüísticos que utilizamos para razonar, así como también algunos mecanismos de razonamiento. El modelo más sencillo es aquel dado por lo que se conoce como el Cálculo Proposicional de la Lógica Clásica. Tal modelo resulta insuficiente cuando hay que modelar cuantificadores ("todo", "algún", etc.), en cuyo caso podemos recurrir al Cálculo de Predicados, también llamado Lógica de Primer Orden. En algunas ocasiones, nuestra forma de razonar ya no aplica alguna de las llamadas Leyes del Pensamiento, las cuales son respetadas por la Lógica Clásica. Por el ejemplo, la que se conoce como la Ley del Tercero Excluido, que implica que toda proposición tiene uno y sólo uno de los posibles valores de verdad, excluyendo cualquier tercera opción. En esos casos, la Lógica Clásica resulta obsoleta y entonces se puede utilizar, por ejemplo, la Lógica Intuicionista. En fin, para diferentes maneras que tenemos los seres humanos para razonar existen diferentes modelos matemáticos o *lógicas*.

En este trabajo comenzamos por explicar lo que entendemos por una lógica y explicamos las diferentes lógicas que utilizamos en esta tesis: la clásica, la intuicionista, la paraconsistente C_ω y la posibilista. Todas estas tienen una conexión con el campo perteneciente a la Inteligencia Artificial dedicada a representar información sobre el mundo real de tal forma que una computadora la pueda utilizar para dar soluciones a problemas que pudieran ser complejos. Tal campo se conoce como la Representación del Conocimiento. Los atributos de la Lógica Posibilista en el manejo de la información incompleta o parcialmente inconsistente, las lógicas constructivas, como la Intuicionista y las lógicas Paraconsistentes, como C_ω, hacen que estas lógicas sean útiles en la Representación del Conocimiento.

La Lógica Posibilista Intuicionista PIL fue tratada ya en [11, 12], en el cual los autores presentan algunas propiedades sintácticas de PIL. Nosotros retomamos algunos de sus resultados y aportamos dos semánticas para PIL: una semántica de Kripke y una semántica topológica. Además, en esa dirección estudiamos la Lógica Posibilista Paraconsistente que denominamos $PC_\omega L$, presentando algunas de sus propiedades sintácticas así como dos semánticas: una semántica de Kripke y una semántica topológica.

Por otro lado, la Programación Lógica es uno de los seis paradigmas de programación en las Ciencias de la Computación. Basados en la Lógica Matemática, los programas escritos en Programación Lógica son conjuntos de proposiciones lógicas aunadas a algún algoritmo de inferencia. En este trabajo revisamos los dos tipos de Programas Lógicos que son de nuestro interés para esta tesis: Programas Definite y Programas Normales, así como semánticas para estos programas en términos de Modelos de Herbrand, Modelos Mínimos y Modelos Estables. En [2], los autores presentan programas lógicos posibilistas. En particular, presentan Programas Definite Posibilistas y Programas Normales Posibilistas, así como semánticas para este tipo de programas. En este trabajo revisamos estos resultados y presentamos otra aportación de esta tesis: la semántica de Modelos Mínimos Posibilistas para Programas Normales Posibilistas. Un resultado importante es sobre la demostrabilidad de átomos a partir de Programas Normales en la lógica paraconsistente C_ω. Otra aportación de esta tesis es la extensión de este resultado en términos posibilistas.

También en [1], los autores presentan el concepto de Safe Beliefs Posibilistas para teorías posibilistas. Presentamos, finalmente, una relación que hay entre los Modelos Estables Posibilistas de un Programa Normal Posibilista y sus Safe Beliefs Posibilistas.

Los resultados originales presentados en esta tesis han sido publicados en los siguientes artículos:

- *Semantics for some non-classical possibilistic logics* Rubén Octavio Vélez Salazar, José Ramón Enrique Arrazola Ramírez, and Iván Martínez Ruiz, International Journal on Advanced Intelligence Paradigms, Vol. 6, No. 3, 2014 © 2014 Inderscience Enterprises Ltd.

- *Possibilistic Minimal Models for Possibilistic Normal Programs* Rubén Octavio Vélez Salazar, José Ramón Enrique Arrazola Ramírez, and Iván Martínez Ruiz, F. Castro, A. Gelbukh and M. González (Eds.): MICAI 2013, Part I, LNAI 8265, pp. 110-119, 2013. ©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

- *Possibilistic Safe Beliefs vs, Possibilistic Stable Models* Rubén Octavio Vélez Salazar, José Ramón Enrique Arrazola Ramírez, and Iván Martínez Ruiz, Research In Computer Science 56 (2012)

Capítulo 1

Las Lógicas de esta Tesis y algunas de sus Semánticas

En este capítulo presentamos la sintáxis de las fórmulas que consideramos en este trabajo. Luego presentamos unas definiciones básicas de cómo se pueden construir las lógicas que interpretan el significado de tales fórmulas. También presentamos una reseña breve de las lógicas relevantes en los capítulos siguientes, así como una breve reseña de programación lógica y de Safe Beliefs.

1.1. La Sintáxis de las Fórmulas

Un lenguaje proposicional formal es un conjunto de *fórmulas* construidas a partir de: un conjunto numerable de elementos llamados *átomos* (denotados por a, b, c, $\ldots$); los conectivos binarios $\wedge$ (*la conjunción*), $\vee$ (*la disyunción*) y $\rightarrow$ (*la implicación*); y el conectivo unario $\neg$ (*la negación*). Las fórmulas se contruyen de manera usual combinando estos conectivos ([7, 18]).

También escribimos $\varphi \leftrightarrow \psi$ para abreviar $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ y, siguiendo la tradición en programación lógica, escribimos $\varphi \leftarrow \psi$ como una forma alternativa de escribir $\psi \rightarrow \varphi$. Una *teoría* es un conjunto de fórmulas. En este trabajo sólo consideraremos teorías finitas. Más aún, si T es una teoría entonces denotaremos por $\mathcal{L}_T$ al conjunto de átomos que aparecen en la teoría T.

1.2. Lógicas

Una *lógica* es un conjunto de fórmulas que satisface las dos propiedades siguientes: (i) es cerrado bajo *modus ponens* (i.e. si φ y $\varphi \to \psi$ pertenecen a la lógica entonces también ψ pertenece) y (ii) es cerrado bajo *sustitución* (i.e. si una fórmula φ pertenece a la lógica entonces cualquier otra fórmula obtenida al reemplazar todas las ocurrencias de un átomo p en φ con otra fórmula ψ también pertenece a la lógica). Los elementos de una lógica son llamados *teoremas* y la notación $\vdash_X \varphi$ significa que la fórmula φ es un teorema de X (i.e. $\varphi \in X$). Una lógica X es *más débil que o igual a* una lógica Y si $X \subseteq Y$. Similarmente, X es *más fuerte que o igual a* Y si $Y \subseteq X$.

Sistemas Axiomáticos de Tipo Hilbert Existen diferentes maneras de definir de manera específica lo que es una lógica. En los sistemas axiomáticos de tipo Hilbert, una lógica se especifica definiendo un conjunto de axiomas cerrado bajo sustitución y bajo modus ponens. En estos sistemas, la notación $\vdash_X \varphi$ se extiende a alguna teoría T escribiendo $T \vdash_X \varphi$ para denotar que la fórmula φ puede derivarse de los axioms de la lógica y de las fórmulas pertenecientes a T por una sucesión de aplicaciones de modus ponens.

1.3. Las Lógicas de Esta Tesis

En esta sección presentamos descripciones breves (en forma de sistemas axiomáticos) de las lógicas relevantes para los propósitos de este trabajo.

1.3.1. Lógica Intuicionista

La Lógica Clásica está definida de tal forma que respeta las Tres Leyes del Pensamiento atribuidas a Aristótees: Ley de la Identidad, Ley de la No Contradicción y Ley del Tercero Excluido. La Ley del Tercero Excluido establece que una proposición tiene sólo uno de dos valores de verdad, excluyendo cualquier tercera posibilidad. Esto equivale en Lógica Clásica a que la proposición $\varphi \vee \neg\varphi$ es una tautología. Sin embargo, en nuestra experiencia cotidiana “no todo es blanco o negro” y la Ley del Tercero Excluido no siempre es aplicable, por lo que la Lógica Clásica resulta ser insuficiente en muchos casos.

Podemos considerar que cualquier definición de Lógica Intuicionista se basa en la negación de la Ley del Tercero Excluido. Esto trae como consecuencia una lógica con una característica más constructiva que la Clásica: en particular, una proposición intuicionista es falsa si y sólo si existe una prueba de que su falsedad es verdadera, es decir, no son válidas las demostraciones por contradicción. Por este hecho, la Lógica Intuicionista ha sido útil en la Representación del Conocimiento.

Presentamos una definición axiomática de la Lógica Intuicionista, la cual denotamos por I. La única regla de inferencia es *Modus Ponens* y los axiomas de I son los siguientes.

Pos 1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Pos 2 $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$

Pos 3 $\varphi \wedge \psi \to \varphi$

Pos 4 $\varphi \wedge \psi \to \psi$

Pos 5 $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$

Pos 6 $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$

Pos 7 $\psi \to (\varphi \vee \psi)$

Pos 8 $(\varphi \to \sigma) \to ((\psi \to \sigma) \to (\varphi \vee \psi \to \sigma))$

Int 1 $(\varphi \to \psi) \to [(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi]$

Int 2 $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

Una consecuencia esperada de esta axiomatización es que $\nvdash_I \varphi \vee \neg\varphi$. A los primeros ocho axiomas los hemos nombrado con el prefijo *Pos* para enfatizar el hecho de que son axiomas positivos, es decir, carecen de la negación. El conjunto de los teoremas que son consecuencia sólo de estos ocho axiomas constituye el *fragmento positivo* de I.

Existen semánticas de tipo Kripke, de tipo topológica y de tipo algebraica para I. Como en este trabajo extendemos las semántics de Kripke y las topológicas, las describimos más adelante en las secciones 1.4.1 y 1.4.2.

A partir de I y de la Lógica Clásica (que denotamos por L) se define una cadena innumerable de lógicas, llamadas Lógicas Intermedias y denotadas por Int, tal que $I \subseteq Int \subsetneq L$. Las Álgebras de Heyting se usan para definir semánticas para I, a partir de las cuales podemos definir estructuras más complejas, clases de Álgebras de Heyting, las cuales definen semánticúas para cada Lógica Intermedia. Po otro lado, no cualquier Lógica Intermedia tiene una semántica de tipo Kripke, aunque algunas sí [19].

1.3.2. Lógica Paraconsistente C_ω

Así como la Ley del Tercero Excluido no siempre es aplicable en situaciones cotidianas, tampoco lo es la Ley de la No Contradicción, la cual establece que nunca es permisible una contradicción, es decir, la validez simultánea de una proposición y su negación. El problema de validar contradicciones en la Lógica Clásica es que conlleva a la trivialidad. Esto se caracteriza con el hecho de que la fórmula $(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$ es un teorema, lo cual puede interpretarse diciendo que una contradicción implica cualquier fórmula.

Por lo tanto, una forma de negar la Ley de la No Contradicción es construir una lógica en la cual la proposición $(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$ no sea teorema. A este tipo de lógicas les llamamos Paraconsistentes. Se han definido ya varias Lógicas Paraconsistentes. Aquí presentamos una definición axiomática de la Lógica Paraconsistente llamada C_ω. La única regla de inferencia es *Modus Ponens* y los axiomas de C_ω son los siguientes.

Pos 1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Pos 2 $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$

Pos 3 $\varphi \wedge \psi \to \varphi$

Pos 4 $\varphi \wedge \psi \to \psi$

Pos 5 $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$

Pos 6 $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$

Pos 7 $\psi \to (\varphi \vee \psi)$

Pos 8 $(\varphi \to \sigma) \to ((\psi \to \sigma) \to (\varphi \vee \psi \to \sigma))$

$C_\omega 1$ $\varphi \vee \neg\varphi$

$C_\omega 2$ $\neg\neg\varphi \to \varphi$

Una consecuencia esperada de esta axiomatización es que, efectivamente, $\nvdash_{C_\omega} (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$. Además, C_ω es la Lógica Paraconsistente más débil [15, 16]. Nótese que el fragmento positivo de C_ω coincide con el de I.

Existe una semántica de Kripke para C_ω así como también una semántica topológica, las cuales describimos más adelante en las secciones 1.4.3 y 1.4.4.

1.3.3. Lógica Posibilista

Sabemos que si *tenemos* las proposiciones $\varphi \to \psi$ y φ podemos inferir ψ. Hacemos énfasis en la palabra *tenemos*, pues la validez de este argumento depende implícitamente de que irrefutablemente sean verdaderas las premisas, en contraste con nuestra experiencia cotidiana, en la que no siempre podemos determinar con total certeza la validez de una proposición. Por ejemplo, consideremos las proposiciones "Si puedo conseguir un empleo entonces puedo comprar un auto" y "Puedo conseguir un empleo". Existen factores sociales, culturales, económicos, etc., que permiten asociar *un grado de certeza* a cada premisa, independientemente. Esto conlleva a buscar una lógica que permita hacer la inferencia "Puedo comprar un auto" con un grado de certeza que dependa de las certezas de las premisas, para lo cual la Lógica Clásica es insuficiente. Una respuesta a esta búsqueda es la Lógica Posibilista.

La idea de manejar incertidumbre en el contexto la Lógica Matemática se puede rastrear al menos hasta el filósofo griego Teofrasto, quien afirmaba que la fuerza de la conclusión es igual a la fuerza de la premisa más débil. Recientemente, algunos intentos de incluir la Teoría de la Probabilidad para manejar la incertidumbre dentro la Lógica encontraron obstáculos como los siguientes.

- La Probabilidad no encaja con Modus Ponens en el siguiente sentido: si $Prob(\varphi \to \psi) \geq \alpha$ y $Prob(\varphi) \geq \alpha$ entonces $Prob(\psi) \geq \text{máx}\{0, 2\alpha - 1\}$, donde $\text{máx}\{0, 2\alpha - 1\} < \alpha$, para cada $\alpha \in (0, 1)$.
- Hay una diferencia considerable entre la probabilidad de una condicional $Prob(\varphi \to \psi)$ y la probabilidad condicional $Prob(\psi \mid \varphi)$. Más aún, $\mid$ no es un conectivo lógico.

La Lógica Posibilista logra relacionar el principio originado por Teofrasto con *medidas de necesidad* en el contexto de la Teoría de la Posibilidad de Zadeh. A continuación presentamos un resumen de la Teoría de la Posibilidad.

Teoría de la Posibilidad

La Teoría de la Posibilidad es una teoría de la incertidumbre, la cual puede ser considerada como complemento de la Teoría de la Probabilidad, aunque difiere de ésta por el uso de dos funciones (duales) en lugar de sólo una.

Las fórmulas en la Lógica Posibilista tienen la forma $(\varphi\ \alpha)$, donde φ es una fórmula en alguna lógica (usualmente, la clásica) y α es un elemento de un conjunto totalmente ordenado (usualmente el intervalo [0,1]). Tal fórmula posibilista expresa el hecho de que la certeza con la que se tiene a la fórmula φ es al menos α. Entre más grande sea este grado de certeza (también llamado peso) más cierta es la fórmula. Este grado se evalúa por medio de una medida de necesidad y por medio de un experto en el contexto en que surjan. Denotaremos por Σ a la *base posibilista* $\{(\varphi_i\ \alpha_i)\}_{i\in I}$.

El elemento básico de la teoría de la posibilidad es la **distribución de posibilidad**, que denotaremos por π, la cual es una función cuyo dominio es Ω, el conjunto de interpretaciones de las fórmulas clásicas en la base posibilista, y cuyo rango es $[0,1]$. $\pi(\omega)$ representa el grado de compatibilidad de la interpretación ω con la información (o las creencias) disponible acerca del mundo real descrito por la base posibilista. $\pi(\omega)=0$ significa que ω es imposible y $\pi(\omega)=1$ significa que ω es un modelo de Σ.

Hay dos maneras de ordenar por rango las fórmulas de un lenguaje. El **grado de posibilidad** (o la consistencia) de una fórmula φ es

$$\Pi(\varphi) = \text{máx}\{\pi(\omega) \mid \omega \models \varphi\}.$$

Por otro lado, el **grado de necesidad** (o la certeza) de una fórmula φ es

$$N(\varphi) = 1 - \Pi(\neg\varphi).$$

Mientras $\Pi(\varphi)$ evalúa la consistencia de φ con la información expresada por π, $N(\varphi)$ evalúa la inferencia de φ a partir de la información representada por Σ.

Resulta que si N es una medida de necesidad entonces

$$N(\varphi \to \psi) \geq \alpha \text{ y } N(\varphi) \geq \beta \text{ implican que } N(\psi) \geq \text{mín}\{\alpha, \beta\}.$$

Así, el grado de incertidumbre de una fórmula φ se representa en el contexto de la Teoría de la Posibilidad con la expresión $N(\varphi) \geq \alpha$, en la cual el *peso* de φ, denotado por α, representa la certeza de que φ es verdadera, considerando la información (posiblemente incompleta) que se tenga. También pueden considerarse expresiones del tipo $\Pi(\varphi) \geq \alpha$ aunque no son preferibles. Nótese que la expresión $N(\varphi) \geq \alpha$ equivale a $\Pi(\neg\varphi) \leq 1 - \alpha$.

Definición Sintáctica de Lógica Posibilista

Presentamos la siguiente axiomatización de la Lógica Posibilista (Estándar), la cual denotamos con PL. El conjunto de los axiomas de esta Lógica es $\{(\varphi\ 1) : \varphi$ es an axioma clásico$\}$ y las reglas de inferencia son:

- $(\varphi\ \alpha), (\varphi \to \psi\ \beta) \vdash_{PL} (\psi\ \ \text{mín}\{\alpha, \beta\})$
- $(\varphi\ \alpha) \vdash_{PL} (\varphi\ \beta)$ si $\alpha \geq \beta$

Notemos que en la definición anterior usamos la Lógica Clásica como base. Podemos definir otras Lógicas Posibilistas extendiendo esta definición usando otras lógicas como base. Sea X una lógica (en este trabajo $X \in \{C_\omega, I\}$). Definimos un sistema axiomático para la lógica posibilista denotada por PXL, por el conjunto de axiomas $\{(\varphi\ 1) : \varphi$ es un axioma de $X\}$ con las siguientes reglas de inferencia:

- $(\varphi\ \alpha), (\varphi \to \psi\ \beta) \vdash_{PXL} (\psi\ \ \text{mín}\{\alpha, \beta\})$
- $(\varphi\ \alpha) \vdash_{PXL} (\varphi\ \beta)$ si $\alpha \geq \beta$

It is not difficult to verify that $(A \wedge B \to C\ \alpha) \equiv (B \to (A \to C)\ \alpha)$ in $PC_\omega L$ and that the transitivity of implication is also valid in $PC_\omega L$, i.e.

$$(A \to B\ \ \alpha), (B \to C\ \ \beta) \vdash_{PC_\omega L} (A \to C\ \ min\{\alpha, \beta\}).$$

Notemos que si $(\varphi\ \alpha) \vdash (\varphi\ \beta)$ entonces $\alpha \geq \beta$, por lo que el caso $\beta > \alpha$ no será considerado. El principio de que la fuerza de una conclusión es la fuerza del argumento más débil usado en su prueba es la motivación de (GMP). Notemos que todo axioma y todo teorema tiene asociado el valor 1. En el Capítulo 2 mostramos algunos resultados sintácticos y algunas semánticas para PXL.

1.4. Semánticas para Intuicionismo y C_ω

Podemos considerar que una semántica para una lógica brinda un mecanismo para validar fórmulas en dicha lógica. Las tablas de verdad en Lógica Clásica, por ejemplo, son la semántica más usual para nosotros. Algunas lógicas no tienen semánticas definidas por tablas de verdad, pero hay otros tipos de semánticas: por ejemplo, de tipo Kripke y de tipo topológicas. Una aportación de este trabajo es definir semánticas para algunas lógicas posibilistas (las cuales presentamos en el siguiente Capítulo). Para ello, presentamos algunas semánticas para Intuicionismo y para C_ω.

1.4.1. Una Semántica de Kripke para la Lógica Intuicionista

Iniciamos presentando una semántica de (tipo) Kripke para la Lógica Intuicionista. El lector puede consultar [18] para revisar los detalles de esta semántica.

Un modelo de Kripke para Intuicionismo es una estructura $M = (W, \leq, \vDash)$, donde W es un conjunto no vacío, $\leq$ es un orden parcial en W y $\vDash$ es una relación entre elementos de W y fórmulas intuicionistas, todo lo anterior con las siguientes propiedades.

Para cada $x, y \in W$, para cada átomo p y para cualesquiera fórmulas φ y ψ, tenemos:

- si $x \vDash p$ y $x \leq y$ entonces $y \vDash p$;
- $x \vDash (\varphi \wedge \psi)$ si y sólo si $x \vDash \varphi$ y $x \vDash \psi$;
- $x \vDash (\varphi \vee \psi)$ si y sólo si $x \vDash \varphi$ o $x \vDash \psi$;
- $x \vDash \neg\varphi$ si y sólo si $(\forall y \in W)($ si $x \leq y$ entonces $y \nvDash \varphi)$; y
- $x \vDash (\varphi \to \psi)$ si y sólo si $(\forall y \in W)($ si $x \leq y$ entonces $(y \vDash \varphi$ implica que $y \vDash \psi))$.

Para todo modelo de Kripke también definimos una función $V_0 : \mathcal{L}_0 \to 2^W$ tal que para cada átomo p, tenemos que $V_0(p) = \{x \in W \mid x \vDash p\}$. Luego, extendemos esta definición a fórmulas arbitrarias definiendo una función $V : FOR \to 2^W$ de la siguente manera.

Para cada átomo p y cualesquiera fórmulas φ y ψ:

- $V(p) = V_0(p)$
- $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi)$;
- $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$;
- $V(\varphi \to \psi) = \{x \in W \mid \text{si } x \in V(\varphi) \text{ entonces } x \in V(\psi)\}$;
- $V(\neg\varphi) = \{x \in W \mid (\neg\exists y \geq x)(y \in V(\varphi))\}$; y
- $V(\bot) = \emptyset$.

Con $M \vDash \varphi$ denotamos $V(\varphi) = W$ y con $\vDash \varphi$ denotamos que para cada modelo de Kripke M tenemos $M \vDash \varphi$.

El siguiente resultado demuestra que los modelos de Kripke definen una semántica adecuada para la Lógica Intuicionista.

Teorema 1 *Si φ es una fórmula intuicionista entonces*

$$\vdash_I \varphi \textit{ si y sólo si } \vDash \varphi.$$

Una característica fundamental de la Lógica Intuicionista es que $\nvdash_I \varphi \vee \neg\varphi$. Damos un modelo de Kripke para Intuicionismo que demuestre este hecho. Sea $M = (W, \leq, \vDash)$ el modelo de Kripke para Intuicionismo definido por $W = \{x_1, x_2\}$, $\leq = \{(x_1, x_2)\}$ y $\vDash = \{(x_2, \varphi)\}$.

Notemos que $x_1 \nvDash \neg\varphi$, pues $x_2 \vDash \varphi$, por lo que $x_1 \nvDash \varphi \vee \neg\varphi$. De aquí se infiere que $M \nvDash \varphi \vee \neg\varphi$ y en consecuencia $\nvdash_I \varphi \vee \neg\varphi$. Nótese además que como $x_1 \nvDash \varphi$ y $x_2 \vDash \varphi$, entonces $x_1 \vDash \neg\neg\varphi$ y así, $x_1 \nvDash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$. De aquí se infiere que $M \nvDash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ y en consecuencia $\nvdash_I \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.

1.4.2. Una Semántica Topológica para la Lógica Intuicionista

Ahora presentamos una semántica para Intuicionismo basada en espacios topológicos. Esta semántica se debe a Tarski [14], partiendo de la idea de generalizar la semántica Booleana de la Lógica Clásica. Sabemos que si X es un conjunto no vacío entonces el conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ forma un álgebra booleana con las operaciones usuales. Para el caso de la Lógica Intuicionista cambiamos $\mathcal{P}(X)$ por una topología para X. Los detalles de esta semántica pueden hallarse en [14].

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\| \ \| : \mathcal{L}_0 \rightarrow \tau$ una función que a cada átomo p le asigna un conjunto abierto $\| p \|$. De manera inductiva, extendemos esta función a cualquier fórmula intuicionista.

Para cualesquiera fórmulas φ y ψ, definimos:

- $\| \varphi \wedge \psi \| = \| \varphi \| \cap \| \psi \|$
- $\| \varphi \vee \psi \| = \| \varphi \| \cup \| \psi \|$
- $\| \varphi \rightarrow \psi \| = int(\| \varphi \|^C \cup \| \psi \|)$
- $\| \neg\varphi \| = int(\| \varphi \|^C)$
- $\| \perp \| = \emptyset$

donde *int* denota el interior de un conjunto (i. e. el conjunto abierto más grande contenido en el conjunto dado). Puede demostrarse que $\| \varphi \rightarrow \psi \| \cap \| \varphi \| \subseteq \| \psi \|$.

Para cualquier fórmula intuicionista φ escribimos $\vDash_X \varphi$ para denotar que $\| \varphi \| = X$. Asímismo, $\vDash \varphi$ denota que para cualquier espacio topológico (X, τ) tenemos que $\vDash_X \varphi$. El siguiente teorema nos garantiza que tenemos una semántica adecuada para Intuicionismo.

Teorema 2 *Si φ es una fórmula intuicionista entonces*

$$\vdash_I \varphi \text{ si y sólo si } \vDash \varphi.$$

Ahora bien, mostramos una aplicación de una semántica topológica para Intuicionismo. Consideremos el conjunto de los Números Reales con la topología usual. Sea $\| \varphi \| = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Así $\| \neg\varphi \| = \emptyset$, por lo que $\| \varphi \vee \neg\varphi \| = \| \varphi \| \neq \mathbb{R}$. Por lo tanto, $\nvdash_I \varphi \vee \neg\varphi$. Además, $\| \neg\neg\varphi \| = \mathbb{R}$, por lo que $\| \neg\neg\varphi \to \varphi \| = \| \varphi \| \neq \mathbb{R}$. De aquí que $\nvdash_I \neg\neg\varphi \to \varphi$.

1.4.3. Una Semántica de Kripke para C_ω

En [17], el autor presenta una semántica para C_ω basada en modelos de Kripke. Un modelo de Kripke para C_ω consiste en una estructura $M = (W, \leq, \Vdash, T)$, donde $(W, \leq)$ es un conjunto no vacío parcialmente ordenado, T es una función que toma por valores fórmulas negadas de tal forma que para cada $x, y \in W$, si $x \leq y$ entonces $T(x) \subseteq T(y)$ (intuitivamente, $T(p)$ es el conjunto de fórmulas negadas que son verdaderas en p) y, por último, $\Vdash$ es una relación con las siguientes propiedades:

- $x \Vdash \varphi$ está definido para todo $x \in W$ y para toda fórmula φ.
- Si φ es cualquier átomo entonces $x \Vdash \varphi$ si y sólo si para cada y tal que $x \leq y$, $y \Vdash \varphi$.
- $x \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $x \Vdash \varphi$ y $x \Vdash \psi$.
- $x \Vdash \varphi \vee \psi$ si y sólo si $x \Vdash \varphi$ o $x \Vdash \psi$.
- $x \Vdash \varphi \to \psi$ si y sólo si $(\forall y \geq x)(y \Vdash \varphi$ implica que $y \Vdash \psi)$.
- Sea $\neg^0\varphi \equiv \varphi$, $\neg^{n+1}\varphi \equiv \neg(\neg^n\varphi)$ para cada $\varphi \not\equiv \neg\psi$.
  $x \Vdash \neg^1\varphi$ si y sólo si $\neg^1\varphi \in T(x)$ o existe $y \leq x$ tal que $y \nVdash \varphi$.
  $x \Vdash \neg^{n+2}\varphi$ si y sólo si $\neg^{n+2}\varphi \in T(x)$ y $x \Vdash \neg^n A$ o existe $y \leq x$ tal que $y \nVdash \neg^{n+1}\varphi$.
- $x \Vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)$ si y sólo si para cada y tal que $x \leq y$, $x \Vdash \varphi_1$ y $\ldots$ y $x \Vdash \varphi_n$ implican que $x \Vdash \psi_1$ o $\ldots$ or $x \Vdash \psi_m$.

Este modelo determina una semántica de Kripke adecuada para C_ω, de tal forma que $\vdash_{C_\omega} \varphi$ si y sólo si $\Vdash \varphi$.

Una característica fundamental de la Lógica Paraconsistente C_ω es que $\nvdash_{C_\omega} (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$. Damos un modelo de Kripke para C_ω que demuestre este hecho. Sea $M = (W, \leq, \vDash, T)$ el modelo de Kripke para C_ω definido por $W = \{x_1, x_2\}$, $\leq = \{(x_1, x_2)\}$, $\vDash = \{(x_2, \varphi)\}$ y T una función tal que $\neg\varphi \in T(x_2)$.

Notemos que $x_2 \vDash \varphi \wedge \neg\varphi$ y que $x_2 \nvDash \psi$, por lo que $x_1 \nvDash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$. De aquí se infiere que $M \nvDash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$ y en consecuencia $\nvdash_{C_\omega} (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$.

1.4.4. Una Semántica Topológica para C_ω

Una de nuestras aportaciones en este trabajo es definir una lógica posibilista basada en la lógica C_ω y darle una semántica topológica adecuada, extendiendo una semántica topológica que se haya definido previamente para C_ω. Como no encontramos tal semántica topológica para C_ω, definimos una, basándonos en la idea de [17].

Definición 1 *Diremos que un espacio topológico* (X, τ) *es* C_ω*-adecuado si es un espacio* T_1 *o bien si no es un espacio* T_1*, pero* $(\forall x \in X)(\{y \in X \mid x \in cl(\{y\})\}$ *es un conjunto abierto*$)$.

Sea (X, τ) cualquier espacio topológico C_ω-adecuado y sea $\| \, \|_o \colon L_o \to \mathcal{P}(X)$ una función tal que para cada átomo a de C_ω, el conjunto $\| a \|$ es un conjunto cerrado en (X, τ). Ahora, para fórmulas en C_ω definimos $\| \, \|$ recursivamente.

Definición 2 *Para cualesquiera fórmulas φ y ψ en C_ω, definimos:*

$\| \varphi \| = \| \varphi \|_o$ *si φ es an átomo;*
$\| \varphi \wedge \psi \| = \| \varphi \| \cap \| \psi \|$;
$\| \varphi \vee \psi \| = \| \varphi \| \cup \| \psi \|$;
$\| \varphi \to \psi \| = cl(\{x \in X \mid cl(\{x\}) \cap \| \varphi \| \cap \| \psi \|^C = \emptyset\})$;
$\| \neg\varphi \| \supseteq cl(\| \varphi \|^C)$; *y*
$\| \neg^{n+2}\varphi \| \supseteq cl(\| \neg^{n+1}\varphi \|^C \cap \| \neg^n\varphi \|)$.

No es difícil verificar que $\| \psi \to \varphi \|^C \subseteq \| \varphi \|^C$ para cualesquiera fórmulas φ y ψ en C_ω.

El motivo principal para usar conjuntos cerrados y el operador clausura en lugar de conjuntos abiertos y el operador interior, usados en la semántica topológica para Intuicionismo, es que en lógicas paraconsistentes es posible tener teorías contradictorias pero no triviales. Esto lo interpretamos topológicamente como el hecho de que $\| \varphi \|$ pueda tener una frontera no vacía.

Ahora bien, si φ es una fórmula en C_ω entonces escribimos $(X, \tau) \vDash \varphi$ para denotar que $\| \varphi \| = X$ y escribimos $\vDash \varphi$ para denotar que $(X, \tau) \vDash \varphi$ para cualquier espacio topológico C_ω-adecuado (X, τ).

En el siguiente teorema se muestra la motivación en definir espacios topológicos C_ω-adecuados.

Teorema 3 *Sea (X, τ) un espacio topológico tal que para cada $x \in X$, el conjunto $\{y : x \in cl(\{y\})\}$ es un conjunto abierto. Entonces para cualquier $y \in \| \varphi \to \psi \|$ y para cualquier $x \in cl(\{y\})$ tenemos que*

$$\textit{si } x \in \| \varphi \| \ \textit{ entonces } x \in \| \psi \| .$$

Demostración 1 *Sean $y \in \| \varphi \to \psi \|$ y $x \in cl(\{y\}) \cap \| \varphi \|$. Supóngase que $x \in \| \psi \|^C$. Entonces $y \in \| \psi \|^C$, ya que $\| \psi \|^C$ es una vecindad de x. Por hipótesis, el conjunto $\{t : y \in cl(\{t\})\}$ es una vecindad de y, por lo que $\{t : y \in cl(\{t\})\} \cap \| \psi \|^C$ es una vecindad de y. Así que existe un $w \in \| \psi \|^C$ tal que $y \in cl(\{w\})$ y $cl(\{w\}) \cap \| \varphi \| \cap \| \psi \|^C = \emptyset$. Ahora, como $x \in cl(\{y\})$ y $y \in cl(\{w\})$, entonces $x \in cl(\{w\})$, por lo que $x \in cl(\{w\}) \cap \| \varphi \| \cap \| \psi \|^C$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x \in \| \psi \|$.*

Como consecuencia del teorema anterior, mostraremos que axiomas tales como Pos 2, Pos 8 y $C_\omega 2$ serán válidas en la semántica topológica que definiremos más adelante.

Teorema 4 *Sea (X, τ) un espacio topológico C_ω-adecuado. Entonces $\| (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)) \| = X$.*

Demostración 2 *Dividimos la demostración en dos casos.*

Caso 1: *(X, τ) no es un espacio topológico T_1, pero $(\forall x \in X)(\{y \in X \mid x \in cl(\{y\})\}$ es un conjunto abierto).*

Supongamos que existe $x_0 \in X \setminus \| (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)) \|$. Entonces existe una vecindad U_1 de x tal que $U_1 \cap \{x \in X \mid cl(\{x\}) \cap \| \varphi \to (\psi \to \sigma) \| \cap \| (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma) \|^C = \emptyset\} = \emptyset$. Entonces $cl(\{x_0\}) \cap \| \varphi \to (\psi \to \sigma) \| \cap \| (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma) \|^C \neq \emptyset$, así que existe $y \in cl(\{x_0\})$ tal que $y \in \| \varphi \to (\psi \to \sigma) \|$ y $y \notin \| (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma) \|$. Así que tenemos lo siguiente:

(i) *Por el **Teorema 1** tenemos para cada* $r \in cl(\{y\})$, *si* $r \in\| \varphi \|$ *entonces* $r \in\| \psi \to \sigma \|$;

(ii) *Existe una vecindad* U_2 *de* y *tal que* $U_2 \cap \{x \in X \mid cl(\{x\}) \cap \| \varphi \to \psi \| \cap \| \varphi \to \sigma \|^C = \emptyset\} = \emptyset$. *Luego,* $cl(\{y\}) \cap \| \varphi \to \psi \| \cap \| \varphi \to \sigma \|^C \neq \emptyset$, *así que existe* $z \in cl(\{y\})$ *tal que* $z \in\| \varphi \to \psi \|$ *y* $y \notin\| \varphi \to \sigma \|$.

De (ii) tenemos lo siguiente:

(iii) *Por el **Teorema 1** tenemos que para cada* $s \in cl(\{z\})$, *si* $s \in\| \varphi \|$ *entonces* $s \in\| \psi \|$;

(iv) *Existe una vecindad* U_3 *de* z *tal que* $U_3 \cap \{x \in X \mid cl(\{x\}) \cap \| \varphi \| \cap \| \sigma \|^C = \emptyset\} = \emptyset$. *Luego,* $cl(\{z\}) \cap \| \varphi \| \cap \| \sigma \|^C \neq \emptyset$, *así que existe* $w \in cl(\{z\})$ *tal que* $w \in\| \varphi \|$ *y* $w \notin\| \sigma \|$.

Ahora, como $w \in cl(\{z\})$ *y* $z \in cl(\{y\})$ *entonces* $w \in cl(\{y\})$. *Así que si* $w \in\| \varphi \|$ *entonces* $w \in\| \psi \to \sigma \|$, *por (i), y si* $w \in\| \varphi \|$ *entonces* $w \in\| \psi \|$, *por (iii). Entonces, por (iv),* $w \in\| \psi \to \sigma \|$, $w \in\| \psi \|$ *y* $w \notin\| \sigma \|$, *lo cual es una contradicción. Por lo tanto,* $\| (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)) \|= X$.

Caso 2: (X, τ) *es un espacio* T_1.
Primero notamos que en este caso tenemos que $\| \varphi \to \psi \|$ *resulta ser igual a* $cl(\| \varphi \|^C \cup \| \psi \|)$. *Así que* $\| (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)) \|^C = int \| \varphi \to (\psi \to \sigma) \| \cap int \| \varphi \to \psi \| \cap int \| \varphi \| \cap \| \sigma \|^C$.

Supongamos que existe $x \in int \| \varphi \to (\psi \to \sigma) \| \cap int \| \varphi \to \psi \| \cap int \| \varphi \| \cap \| \sigma \|^C$. *Entonces existe una vecindad* U *de* x *tal que*

(i) $U \subseteq\| \varphi \to (\psi \to \sigma) \|$,

(ii) $U \subseteq\| \varphi \to \psi \|$,

(iii) $U \subseteq\| \varphi \|$ *y*

(iv) $U \subseteq\| \sigma \|^C$.

Por (i), existe $y \in U$ *tal que* $y \in\| \varphi \|^C \cup \| \psi \to \sigma \|$. *Así que, por (iii),* $y \in cl(\| \psi \|^C \cup \| \sigma \|)$. *Luego, existe* $z \in U$ *tal que* $z \in\| \psi \|^C \cup \| \sigma \|$; *pero por (iv),* $z \in\| \psi \|^C$. *Resumiendo, tenemos lo siguiente:*

Existe $z \in U$ *tal que*

(a) $z \in \| \psi \|^C$,

(b) $z \in \| \gamma \|^C$ *y*

(c) por (ii), $z \in \| \varphi \to \psi \|$.

Sea $W = \| \gamma \|^C \cap \| \psi \|^C \cap U$. *Entonces, por (a) y (b),* W *es una vecindad de* z *y por (c) existe* $l \in W$ *tal que* $l \in \| \varphi \|^C \cup \| \psi \|$, *lo cual contradice (iii) y la definición de* W. *Por lo tanto,* $\| (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)) \| = X$.

Para Pos 8 y $C_\omega 2$ existen demostraciones análogas. Para los demás axiomas tenemos lo siguiente:

Pos 1: Como $\| \psi \to \varphi \|^C \subseteq \| \varphi \|^C$ entonces $\| \varphi \to (\psi \to \varphi) \| = cl\{x \in X \mid cl(\{x\}) \cap \| \varphi \| \cap \| \psi \to \varphi \|^C = \emptyset\}) = cl(X) = X$.

Pos 3: $\| \varphi \wedge \psi \to \varphi \| = cl(\{x \in X \mid cl(\{x\}) \cap \| \varphi \wedge \psi \| \cap \| \varphi \|^C = \emptyset\}) = cl(X) = X$

Pos 4: $\| \varphi \wedge \psi \to \psi \| = cl(\{x \in X \mid cl(\{x\}) \cap \| \varphi \wedge \psi \| \cap \| \psi \|^C = \emptyset\}) = cl(X) = X$

Pos 5: Since $\| \psi \| \cap \| (\| \varphi \|^C \cup \| \psi \|^C) = \| \psi \| \cap \| \varphi \|^C$ entonces $\| \psi \to (\varphi \wedge \psi) \| = cl(\{x \in X \mid cl(\{x\}) \cap \| \psi \| \cap \| \varphi \wedge \psi \|^C = \emptyset\}) = cl(\{x \in X \mid cl(\{x\}) \cap \| \psi \| \cap \| \varphi \|^C = \emptyset\}) = \| \psi \to \varphi \|$. Por lo tanto, $\| \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi)) \| = cl(\{x \in X \mid cl(\{x\}) \cap \| \varphi \| \cap \| \psi \to (\varphi \wedge \psi) \|^C = \emptyset\}) = cl(\{x \in X \mid cl(\{x\}) \cap \| \varphi \| \cap \| \psi \to \varphi \|^C = \emptyset\}) = \| \varphi \to (\psi \to \varphi) \| = X$.

Pos 6: $\| \varphi \to (\varphi \vee \psi) \| = cl(\{x \in X \mid cl(\{x\} \cap \| \varphi \| \cap \| \varphi \vee \psi \|^C) = \emptyset\}) = cl(X) = X$

Pos 7: $\| \psi \to (\varphi \vee \psi) \| = cl(\{x \in X \mid cl(\{x\} \cap \| \psi \| \cap \| \varphi \vee \psi \|^C) = \emptyset\}) = cl(X) = X$

$C_\omega 1$: Sea $x \in X$. Si $x \notin \| \varphi \|$ entonces $x \in \| \varphi \|^C \subseteq cl(\| \varphi \|^C) \subseteq \| \neg\varphi \|$, therefore $\| \varphi \vee \neg\varphi \| = \| \varphi \| \cup \| \neg\varphi \| = X$.

Ahora mostramos que hemos definido una semántica topológica adecuada para C_ω.

Teorema 5 *Sea* φ *una fórmula en* C_ω. *Entonces*

$$\textit{si } \vdash_{C_\omega} \varphi \textit{ entonces } \models \varphi.$$

Demostración 3 *Sea (X, τ) un espacio topológico C_ω-adecuada. Hemos demostrado que si φ es cualquier axioma en C_ω, entonces $\vDash \varphi$, por lo que sólo resta demostrar que $\| \ \|$ preserva* modus ponens.

Modus Ponens*: Supongamos que $\| \varphi \to \psi \| = X$ y que $\| \varphi \| = X$. Entonces $cl(\{x\ X \mid cl(\{x\}) \cap X \cap \| \psi \|^C = \emptyset\}) = X$ lo cual impilica que $\| \psi \| = X$.*

Concluimos esta subsección con el siguiente teorema, el cual asegura que hemos definido una semántica topológica completa para C_ω. En la sección 2.2.4 extenderemos esto a una semántica topológica para una lógica que hemos denominado la Lógica C_ω Posibiista.

Teorema 6 *Sea φ una fórmula en C_ω. Entonces*

$$\text{si } \vDash \varphi \text{ entonces } \vdash_{C_\omega} \varphi.$$

Demostración 4 *Supongamos que $\nvdash_{C_\omega} \varphi$. Demostraremos que $\nvDash \varphi$ hallando un espacio topológico (X, τ) tal que $\| \varphi \| \neq X$.*

Como $\nvdash_{C_\omega} \varphi$ entonces existe un modelo de Kripke $M = (W, \leq, T, \Vdash)$ para C_ω tal que $M \nVdash \varphi$. Esto significa que existe $p_0 \in W$ tal que $p_0 \nVdash \varphi$.

Ahora, sea τ la topología definida sobre W de la siguiente manera: un subconjunto F de W es cerrado en τ si y sólo si, $(\forall p)(\forall q)(p \geq q \ \wedge \ q \in F \Rightarrow p \in F)$. Así, tenemos que $w \in cl(\{p\})$ si y sólo si, $w \geq p$, donde $cl(A)$ denote a la clausura del conjunto A. Notemos que (W, τ) es C_ω-adecuado.

Con esta topología definimos los siguientes conjuntos cerrados:
$\| \neg\varphi \| = cl(\{\| \varphi \|^C\}) \cup \{p \in W \mid \neg\varphi \in T(p)\}$,
$\| \neg^{n+2}\varphi \| = cl(\{\| \neg^{n+1}\varphi \|^C\}) \cup (\{p \in W \mid \neg^{n+2}\varphi \in T(p)\} \cap \| \neg^n\varphi \|)$,
y para cada átomo φ, $\| \varphi \| = \{p \in W \mid p \Vdash \varphi\}$,
todos los cuales satisfacen la definición de $\| \ \|$, pues T es una función creciente.

Mostramos que sin importar la complejidad de la fórmula φ, siempre tenemos que $\| \varphi \| \neq W$ (y por lo tanto, que $\nvDash \varphi$).

1. Si φ es un átomo entonces existe $q \in W$ tal que $p_0 \leq q$ y $q \nVdash \varphi$. Por lo tanto, $\| \varphi \| = \{p \in W \mid p \Vdash \varphi\} \neq W$.
2. Si $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ entonces $p_0 \nVdash \varphi_1$ or $p_0 \nVdash \varphi_1$. So $\| \varphi_1 \| \neq W$ or $\| \varphi_2 \| \neq W$. Por lo tanto, $\| \varphi \| = \| \varphi_1 \| \cap \| \varphi_2 \| \neq W$.
3. Si $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ entonces $p_0 \nVdash \varphi_1$ y $p_0 \nVdash \varphi_1$. So $\| \varphi_1 \| \neq W$ y $\| \varphi_2 \| \neq W$. Por lo tanto, $\| \varphi \| = \| \varphi_1 \| \cup \| \varphi_2 \| \neq W$.

4. Si $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$ entonces existe $q \in W$ tal que $p_0 \leq q$, $q \Vdash \varphi_1$ y $q \nVdash \varphi_2$. Esto implica que $cl(\{p_0\}) \cap \parallel \varphi_1 \parallel \cap \parallel \varphi_2 \parallel^C \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\parallel \varphi \parallel = \{p \in W \mid cl(\{p\}) \cap \parallel \varphi_1 \parallel \cap \parallel \varphi_2 \parallel^C = \emptyset\} \neq W$.

5. Si $\varphi = \neg\varphi_1$ entonces $\neg\varphi_1 \notin T(p_0)$ y para cada $q \in W$ tal que $q \leq p_0$, $q \Vdash \varphi_1$. Entonces $p_0 \in \parallel \varphi_1 \parallel$, ya que $\parallel \varphi_1 \parallel$ es un conjunto cerrado. Ahora, $p_0 \notin \{p \in W \mid \neg\varphi_1 \in T(p_0)\}$, y si $U = \{q \in W \mid q \leq p_0\}$ entonces U es un conjunto abierto en el cual está p_0 y $U \cap \parallel \varphi_1 \parallel^C = \emptyset$ lo cual implica que $p_0 \notin cl(\parallel \varphi_1 \parallel^C)$. Por lo tanto, $\parallel \neg\varphi_1 \parallel \neq W$.

6. Si $\varphi = \neg^{n+2}\varphi$ entonces $\neg^{n+2}\varphi \notin T(p_0)$ or $p_0 \nVdash \neg^n\varphi$, y $q \Vdash \neg^{n+1}\varphi$ para cada $q \in W$ tal que $q \leq p_0$. Entonces $p_0 \notin \{p \in W \mid \neg^{n+2}\varphi \in T(p)\} \cap \parallel \neg^n\varphi \parallel$, y si $U = \{q \in W \mid q \leq p_0\}$ entonces U es un conjunto abierto en el cual está p_0 y $U \cap \parallel \neg^{n+1}\varphi_1 \parallel^C = \emptyset$ lo cual implica que $p_0 \notin cl(\parallel \neg^{n+1}\varphi_1 \parallel^C)$. Por lo tanto, $\parallel \neg^{n+2}\varphi_1 \parallel \neq W$.

Esto concluye la demostración.

A continuación mostramos una aplicación de esta semántica para demostrar que $\nvdash_{C_\omega} (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$. Consideremos a los Números Reales con la topología usual. Sean $\parallel \varphi \parallel = [0,1]$ y $\parallel \psi \parallel = \{2\}$. Por un lado, notemos que $cl(\parallel \varphi \parallel^C) = \mathbb{R} \setminus (0,1)$, por lo que definimos $\parallel \neg\varphi \parallel = \mathbb{R} \setminus (0, \frac{1}{2})$, de tal forma que $\parallel \varphi \wedge \neg\varphi \parallel = [0, \frac{1}{2}]$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \parallel (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi \parallel \quad &= cl(\{x \in \mathbb{R} \mid cl(\{x\}) \cap \parallel \varphi \wedge \neg\varphi \parallel \cap \parallel \psi \parallel^C = \emptyset\}) \\ &= cl(\{x \in \mathbb{R} \mid \{x\} \cap [0, \tfrac{1}{2}]\} = \emptyset\}) \\ &\neq \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por lo anterior, $\nvdash_{C_\omega} (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$.

Capítulo 2

Las Lógicas Posibilistas PIL y $PC_\omega L$

En el Capítulo anterior hemos presentado definiciones axiomáticas de las Lógicas Posibilistas PIL y $PC_\omega L$. En este Capítulo analizamos estas lógicas, buscando en primera instancia si satisfacen propiedades útiles, como por ejemplo Teoremas de la Deducción, Teorema de la Sustitución, etc. En una segunda instancia, proponemos semánticas para estas lógicas.

2.1. Algunos Resultados Sintácticos

En esta sección presentamos algunas propiedades para $PC_\omega L$, así como también las propiedades para PIL ya demostradas en [11, 12], donde también pueden encontrarse las demostraciones omitidas en esta sección. Consideramos que $X \in \{C_\omega, I\}$, de tal forma que PXL es PIL o bien es $PC_\omega L$.

Teorema 7 *Si Γ es un conjunto de fórmulas en PXL y φ es una fórmula en X, entonces $\Gamma \vdash_{PXL} (\varphi\ 1)$ si y sólo si $\Gamma^* \vdash_X \varphi$.*

Demostración 5 *Supongamos que $\Gamma \vdash_{PXL} (\varphi\ 1)$ y que $(\varphi_1\ \alpha_1), \ldots, (\varphi_n\ \alpha_n)$ es una prueba en PXL de $(\varphi\ 1)$. Demostraremos por inducción que para cada $j = 1, \ldots, n$, tenemos que $\Gamma^* \vdash_X \varphi_j$. El caso $j = n$ valida nuestra afirmación.*

La fórmula $(\varphi_1\ \alpha_1)$ es un axioma de PXL o bien $(\varphi_1\ \alpha_1) \in \Gamma$, i. e., φ_1 es un axioma en X o bien $\varphi_1 \in \Gamma^*$. En ambos casos tenemos que $\Gamma^* \vdash_X \varphi_1$, por lo que nuestra afirmación es válida para $j = 1$.

Ahora supongamos que para cada $k < j$, $\Gamma^* \vdash_X \varphi_k$. La fórmula $(\varphi_j\ \alpha_j)$ es un axioma de PXL, o es un elemento de Γ, o bien se sigue por (GMP) a partir de $(\varphi_l\ \alpha_l)$ y de $(\varphi_l \to \varphi_j\ \alpha_m)$, donde $l, m \leq j$ y $1 = \alpha_j = \min\{\alpha_l, \alpha_m\}$, o bien, finalmente, $(\varphi_j\ \alpha_j)$ se sigue de la Regla (S) a partir de $(\varphi_j\ \beta)$, donde $\beta \geq \alpha_j = 1$.

En los primeros dos casos, $\Gamma^* \vdash_X \varphi$ se sigue como en el caso $j = 1$.

En el tercer caso, usamos la hipótesis inductiva para tener $\Gamma^* \vdash_X \varphi_l$ y $\Gamma^* \vdash_X \varphi_l \to \varphi_j$. Por el Teorema de la Deducción en X concluimos que $\Gamma^* \vdash_X \varphi_j$.

En el último caso tenemos que β es igual a α_i, para algún $i < j$, así que por la hipótesis inductiva concluimos que $\Gamma^* \vdash_X \varphi_j$. Esto concluye la prueba por inducción.

Recíprocamente, supongamos que $\Gamma^* \vdash_X \varphi$. Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una prueba en X de φ a partir de Γ^* entonces $(\varphi_1\ 1), \ldots, (\varphi_n\ 1)$ es una prueba de $(\varphi\ 1)$ en PXL.

Teorema 8 (Teorema De La Deducción) *Si Γ es un conjunto de fórmulas en PXL, φ, ψ son fórmulas en X y $\alpha \in (0, 1]$, entonces*

$$\Gamma \cup \{(\varphi\ 1)\} \vdash_{PXL} (\psi\ \alpha) \text{ si y sólo si } \Gamma \vdash_{PXL} (\varphi \to \psi\ \alpha).$$

Teorema 9 (Teorema Generalizado De La Deducción) *Si Γ es un conjunto de fórmulas en PXL, φ, ψ son fórmulas en X y $\alpha, \beta \in (0, 1]$, entonces*

1. $\Gamma \cup \{(\varphi\ \beta)\} \vdash_{PXL} (\psi\ \alpha)$ *implica que* $\Gamma \vdash_{PXL} (\varphi \to \psi\ \alpha)$

2. *Si además $\beta \geq \alpha$, entonces tenemos la equivalencia:*

$$\Gamma \cup \{(\varphi\ \beta)\} \vdash_{PXL} (\psi\ \alpha) \text{ si y sólo si } \Gamma \vdash_{PXL} (\varphi \to \psi\ \alpha).$$

Teorema 10 (Teorema Generalizado De La Deducción (2a Versión)) *Sean Γ un conjunto de fórmulas en PXL, φ, ψ fórmulas en X y $\alpha, \beta \in (0, 1]$. Si $\Gamma \cup \{(\varphi\ \beta)\} \vdash_{PXL} (\psi\ \alpha)$ y $\{(\phi_1\ \rho_1), (\phi_2\ \rho_2), \ldots, (\phi_p\ \rho_p)\} \subseteq \Gamma$ es el conjunto de fórmulas de las cuales depende una demostración de $(\psi\ \alpha)$ a partir de $\Gamma \cup \{(\varphi\ \beta)\}$, entonces*

$$\Gamma \vdash_{PXL} (\varphi \to \psi\ \min\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p\}).$$

2.1.1. Algunos Resultados Sintácticos para PIL

Aquí reproducimos algunos resultados propios de PIL, mismos que aparecieron por primera vez en [11, 12].

Teorema 11 (Teorema Débil De La Refutación) *Si Γ es un conjunto de fórmulas de PIL, φ es una fórmula en I y $\alpha, \beta \in (0,1]$ tales que $\beta \geq \alpha$, entonces*

$$\Gamma \cup \{(\neg\neg\varphi\ \beta)\} \vdash_{PIL} (\perp\ \alpha) \text{ si y sólo si } \Gamma \vdash_{PIL} (\neg\varphi\ \ \alpha)$$

Teorema 12 (Regla De Corte) *Si Γ es un conjunto de fórmulas de PIL, φ, ψ son fórmulas en I y $\alpha, \beta \in (0,1]$, entonces*

$$\Gamma \vdash_{PIL} (\varphi\, \beta) \text{ y } \Gamma \cup \{(\varphi\, \beta)\} \vdash_{PIL} (\psi\, \alpha) \text{ implican que } \Gamma \vdash_{PIL} (\psi\ \min\{\alpha, \beta\})$$

Teorema 13 (Teorema De La Sustitution) *Sea φ fórmula clásica y sea ψ una subfórmula de φ. Sea φ' la fórmula que resulta al sustituir alguna o ninguna de las ocurrencias de ψ en φ por la fórmula σ.*

1. $\vdash_{PIL} ((\psi \leftrightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi')\ 1)$
2. *Si* $\Gamma \vdash_{PIL} (\psi \leftrightarrow \sigma\ \alpha)$ *entonces* $\Gamma \vdash_{PIL} (\varphi \leftrightarrow \varphi'\ \alpha)$

Teorema 14 (Teorema de Glivenko) *Sean Γ un conjunto de fórmulas en PIL, φ un fórmula en I y supongamos que $\Gamma \vdash_{Pos} (\varphi\ \alpha)$. Si $\Gamma_0 = \{(\gamma_1\ \alpha_1), \ldots, (\gamma_n\ \alpha_n)\} \subseteq \Gamma$ es tal que la prueba de $(\varphi\ \alpha)$ a partir de Γ depende de las fórmulas en Γ_0, entonces*

$$\Gamma \vdash_{PIL} (\neg\neg\varphi\ \ \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}).$$

2.1.2. Algunos Resultados Sintácticos para $PC_\omega L$

Los siguientes resultados son propios de esta tesis.

Teorema 15 (Teorema De La Refutación) *Si Γ es un conjunto de fórmulas en $PC_\omega L$, φ es una fórmula en C_ω y $\alpha, \beta \in (0,1]$ tales que $\beta \geq \alpha$, entonces*

$$\Gamma \cup \{(\varphi\ \beta)\} \vdash_{PC_\omega L} (\perp\ \alpha) \text{ si y sólo si } \Gamma \vdash_{PC_\omega L} (\neg\varphi\ \ \alpha).$$

Demostración 6 *Por el Teorema Generalizado De La Deducción tenemos que*

$\Gamma \cup \{(\varphi\ \beta)\} \vdash_{PC_\omega L} (\perp\ \alpha)$ si y sólo si $\Gamma \vdash_{PC_\omega L} (\varphi \rightarrow \perp\ \ \alpha)$. Pero $\varphi \rightarrow \perp$ equivale a $\neg\varphi$.

Teorema 16 (Regla De Corte) *Si Γ es un conjunto fórmulas en $PC_\omega L$, φ, ψ son fórmulas en C_ω y $\alpha, \beta \in (0,1]$ entonces*

$$\Gamma \vdash_{PC_\omega L} (\varphi\ \beta) \ \text{ y } \ \Gamma \cup \{(\varphi\ \beta)\} \vdash_{PC_\omega L} (\psi\ \alpha) \ \text{implican} \ \Gamma \vdash_{PC_\omega L} (\psi\ \text{mín}\{\alpha, \beta\}).$$

Demostración 7 *Supongamos que $\Gamma \vdash_{PC_\omega L} (\varphi\ \beta)$ y que $\Gamma \cup \{(\varphi\ \beta)\} \vdash_{PC_\omega L} (\psi\ \alpha)$. Por el Teorema Generalizado De La Deducción tenemos que $\Gamma \vdash_{PC_\omega L} (\varphi \to \psi\ \alpha)$. Luego, por (GMP) concluimos que $\Gamma \vdash_{PC_\omega L} (\psi\ \text{mín}\{\alpha, \beta\})$.*

2.2. Semánticas para PIL y $PC_\omega L$

Para poder definir semánticas para nuestras lógicas posibilistas PXL extendemos alguna que se haya definido previamente en la lógica X. Ésta puede ser de Kripke o bien topológica. Hemos analizado previamente este tipo de semánticas para Intuicionismo y para C_ω. Definiremos las semánticas de Kripke, en su versión posibilista, por medio de funciones.

Comenzamos con semánticas para PIL.

2.2.1. Una Semántica de Kripke para PIL

Nuestra meta es definir una semántica de Kripke adecuada para PIL basada en un modelo de Kripke para Intuicionismo.

Sea $M = (W, \leq, \vDash)$ un modelo de Kripke para Intuicionismo y sea $\mathfrak{F}$ el conjunto de todas las funciones no decrecientes $\pi : W \to [0,1]$. Con el símbolo $\bigvee_{x \in V(p)} \pi(x)$ denotamos a $\sup\{\pi(x) \mid x \in V(p)\}$.

Definición 3 *Definimos la función $\|\ \|$: $FOR \to \mathfrak{F}$ como sigue: para cada átomo p y para cualesquiera fórmulas intuicionistas φ y ψ:*

- $\| p \| = \left\{ \pi \in \mathfrak{F} \mid \bigvee_{x \in V(p)} \pi(x) = 1 \right\}$
- $\| \varphi \wedge \psi \| = \| \varphi \| \cap \| \psi \|$
- $\| \varphi \vee \psi \| = \| \varphi \| \cup \| \psi \|$
- $\| \varphi \to \psi \| = \left\{ \pi \in \mathfrak{F} \mid \bigvee_{x \in V(\varphi)} \pi(x) \leq \bigvee_{x \in V(\psi)} \pi(x) \right\}$

- $\parallel \neg\varphi \parallel = \left\{ \pi \in \mathfrak{F} \mid \bigvee_{x \in V(\varphi)} \pi(x) = 0 \right\}$

Ahora extendemos esta definición a fórmulas en PIL.

- Para cualquier $(\varphi \;\; \alpha) \in PIL$, $\parallel (\varphi \;\; \alpha) \parallel = \left\{ \pi \in \parallel \varphi \parallel \mid \bigvee_{x \notin V(\varphi)} \pi(x) \leq 1 - \alpha \right\}$

Escribimos $\models_M (\varphi \; 1)$ siempre que $\parallel (\varphi \; 1) \parallel = \parallel \varphi \parallel = \mathfrak{F}$. También escribimos $\models (\varphi \; 1)$ siempre que tengamos $\models_M (\varphi \; 1)$ para todo M, modelo de Kripke para Intuicionismo. No es difícil verificar que $\parallel \; \parallel$ preserva las reglas de inferencia de PIL.

Teorema 17 *Si φ es una fórmula intuicionista entonces*
$\vdash_{PIL} (\varphi \; 1)$ *si y sólo si* $\models (\varphi \; 1)$.

Demostración 8 *Si M es un modelo de Kripke para Intuicionismo entonces*

$$\vdash_{PIL} (\varphi \; 1) \Rightarrow (\forall \pi \in \mathfrak{F}) \left(\bigvee_{x \notin V(\varphi)} \pi(x) = 0 \right) \Rightarrow \parallel (\varphi \; 1) \parallel = \parallel \varphi \parallel = \mathfrak{F} \Rightarrow \models_M (\varphi \; 1).$$

Ahora supongamos que $\nvdash_{PIL} (\varphi \; 1)$. Entonces $\nvdash_I \varphi$, por lo que existe un modelo de Kripke para Intuicionismo, digamos M, tal que $\not\models_M \varphi$. Esto implica que $W \neq V(\varphi)$. Así, existe una función $\pi \in \mathfrak{F}$ y un $x \in W \setminus V(\varphi)$ tales que $\pi(x) \neq 1$, i. e., $\pi \notin \parallel \varphi \parallel$. Por lo tanto, $\not\models (\varphi \; 1)$.

Definición 4 *Sea Γ un conjunto de fórmulas de PIL, $\varphi \in FOR$ y $\alpha \in [0,1]$. Definimos $\Gamma \models (\varphi \; \alpha)$ siempre que*

$$\bigcap_{(\psi_i \;\; \gamma_i) \in \Gamma} \parallel (\psi_i \;\; \gamma_i) \parallel \subseteq \parallel (\varphi \;\; \alpha) \parallel .$$

El siguiente resultado muestra que $\models$ preserva las reglas de inferencia posibilistas (GMP) y Rule (S).

Teorema 18 *La relación $\models$ satisface las siguientes dos condiciones:*

(1) Si $\Gamma \models (\psi \rightarrow \varphi \;\; \alpha_1)$ y $\Gamma \models (\psi \;\; \alpha_2)$ entonces $\Gamma \models (\varphi \;\; \alpha)$, donde $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$;

(2) Si $\Gamma \models (\varphi \;\; \beta)$ y $\beta \geq \alpha$ entonces $\Gamma \models (\varphi \;\; \alpha)$.

Demostración 9 *(1) Por la hipótesis tenemos que*

$$\bigcap_{(\psi_i \ \gamma_i)\in\Gamma} \| (\psi_i \ \gamma_i) \| \subseteq \left\{ \pi \in \mathfrak{F} \mid \bigvee_{x \notin V(\psi\to\varphi)} \pi(x) \leq 1-\alpha_1 \right\}$$

y

$$\bigcap_{(\psi_i \ \gamma_i)\in\Gamma} \| (\psi_i \ \gamma_i) \| \subseteq \left\{ \pi \in \mathfrak{F} \mid \bigvee_{x \notin V(\psi)} \pi(x) \leq 1-\alpha_2 \right\}.$$

Si $\pi \in \bigcap_{(\psi_i \ \gamma_i)\in\Gamma} \| (\psi_i \ \gamma_i) \|$, *entonces* $\bigvee_{x\notin V(\psi\to\varphi)\cap V(\psi)} \pi(x) \leq 1-\alpha$. *Ahora bien, como estamos trabajando con un modelo de Kripke para Intuicionismo tenemos que* $V(\psi)\cap V(\psi\to\varphi) \subseteq V(\varphi)$. *Así,*

$$\bigvee_{x\notin V(\varphi)} \pi(x) \leq \bigvee_{x\notin V(\psi)\cap V(\psi\to\varphi)} \pi(x) \leq 1-\alpha.$$

Esto implica que $\pi \in \| (\varphi \ \alpha) \|$. *Por lo tanto,* $\Gamma \vDash (\varphi \ \alpha)$.

(2) Como $\beta \geq \alpha$ *entonces* $\| (\varphi \ \beta) \| \subseteq \| (\varphi \ \alpha) \|$. *Por lo tanto*

$$\bigcap_{(\psi_i \ \gamma_i)\in\Gamma} \| (\psi_i \ \gamma_i) \| \subseteq \| (\varphi \ \beta) \| \subseteq \| (\varphi \ \alpha) \| .$$

El siguiente teorema muestra que hemos definido una semántica adecuada para PIL.

Teorema 19 *Si* Γ *es un conjunto de fórmulas en* PIL *y* $(\varphi \ \alpha)$ *es una fórmula en* PIL*, entonces*

$$\Gamma \vdash_{PIL} (\varphi \ \alpha) \text{ si y sólo si } \Gamma \vDash (\varphi \ \alpha).$$

Demostración 10 *Supongamos que* $\Gamma \vdash_{PIL} (\varphi \ \alpha)$. *Sea* Γ_0 *el conjunto de fórmulas en* Γ *sobre las cuales depende la prueba de* $(\varphi \ \alpha)$ *a partir de* Γ. *Sea* $(\varphi_1 \ \alpha_1), \ldots, (\varphi_1 \ \alpha_n)$ *una prueba en* PIL *de* $(\varphi \ \alpha)$ *a partir de* Γ. *Demostraremos por inducción que para cada* $j = 1, \ldots, n$ *tenemos* $\Gamma_0 \vDash (\varphi_j \ \alpha_j)$.

La fórmula $(\varphi_1 \ \alpha_1)$ *pertenece a* Γ_0 *o bien* $(\varphi_1 \ \alpha_1)$ *es un axioma de* PIL. *Si* $(\varphi_1 \ \alpha_1)$ *pertenece a* Γ_0, *entonces* $\bigcap_{(\psi_i \ \gamma_i)\in\Gamma_0} \| (\psi_i \ \gamma_i) \| \subseteq \| (\varphi_1 \ \alpha_1) \|$, *por lo que* $\Gamma_0 \vDash (\varphi_1 \ \alpha_1)$. *Si* $(\varphi_1 \ \alpha_1)$ *es un axioma de* PIL *entonces* $\alpha_1 = 1$ *y, por el 17,* $\vDash (\varphi_1 \ \alpha_1)$*, lo cual implica que* $\Gamma_0 \vDash (\varphi_1 \ \alpha_1)$. *Por lo tanto, nuestra afirmación se cumple para* $j = 1$.

Supongamos que para cada $k < j$*, tenemos que* $\Gamma_0 \vDash (\varphi_k \ \alpha_k)$. *Luego,* $(\varphi_j \ \alpha_j)$ *pertenece a* Γ_0*, o bien* $(\varphi_j \ \alpha_j)$ *es un axioma de* PIL*, o bien*

$(\varphi_j\ \alpha_j)$ se obtiene por (GMP) a partir de $(\varphi_l\ \alpha_l)$ y de $(\varphi_l \to \varphi_j\ \alpha_m)$, donde $l, m < k$ y $\alpha_j = \text{mín}\{\alpha_l, \alpha_m\}$, o bien, finalmente, $(\varphi_j\ \alpha_j)$ se obtiene por Rule (S) a partir de $(\varphi\ \beta)$, donde $\beta \geq \alpha$.

En los primeros dos casos concluimos que $\Gamma_0 \vDash (\varphi_j\ \alpha_j)$ tal como lo hicimos en el caso $j = 1$.

En el tercer caso, aplicamos la hipótesis inductiva para obtener $\Gamma_0 \vDash (\varphi_l\ \alpha_l)$ y $\Gamma_0 \vDash (\varphi_l \to \varphi_j\ \alpha_m)$. Luego, $\Gamma_0 \vDash (\varphi_j\ \alpha_j)$.

En el último caso tenemos que $\beta = \alpha_i$ para algún $i < j$. Luego, por la hipótesis inductiva, $\Gamma_0 \vDash (\varphi_j\ \beta)$, por lo que $\Gamma_0 \vDash (\varphi_j\ \alpha_j)$. Esto concluye la prueba por inducción. Para concluir la prueba de la condición necesaria, notemos que

$$\bigcap_{(\psi_i\ \gamma_i)\in\Gamma} \parallel (\psi_i\ \gamma_i) \parallel \subseteq \bigcap_{(\psi_i\ \gamma_i)\in\Gamma_0} \parallel (\psi_i\ \gamma_i) \parallel \subseteq \parallel (\varphi\ \alpha) \parallel .$$

Ahora supongamos que $\Gamma \nvdash_{PIL} (\varphi\ \alpha)$. Luego, $\Gamma_0 \nvdash_I \varphi$, por lo que existeun modelo de Kripke para intuicionismo, digamos M, tal que $\Gamma_0 \nvDash_M \varphi$. Esto implica que $\bigcap_{\psi\in\Gamma_0} V(\psi) \nsubseteq V(\varphi)$.

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \bigcap_{\psi\in\Gamma_0} V(\psi) \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Así, $\pi \in \mathfrak{F}$, $\pi \in \bigcap_{(\psi_i\ \gamma_i)\in\Gamma} \parallel (\psi_i\ \gamma_i) \parallel$ y $\pi \notin \parallel (\varphi\ \alpha) \parallel$. Por lo tanto, $\Gamma \nvDash (\varphi\ \alpha)$.

2.2.2. Una Semántica Topológica para PIL

En esta sección extendemos la semántica topológica descrita previamente en la sección 1.4.2 hacia una semántica topológica para PIL.

Sea (X, τ) un espacio topológico, $\parallel\ \parallel$ la función que asigna un conjunto abierto a cada fórmula intuicionista y sea $\mathfrak{F}$ el conjunto de todas las funciones $\pi : X \to [0, 1]$.

Definición 5 *Para cada fórmula $(\varphi\ \alpha)$ en PIL definimos*

$$\langle(\varphi\ \alpha)\rangle = \{\pi \in \mathfrak{F} \mid \sup\{\pi(x) \mid x \notin \parallel \varphi \parallel\} \leq 1 - \alpha\}.$$

Escribimos $\vDash (\varphi\ 1)$ siempre que $\langle(\varphi\ 1)\rangle = \mathfrak{F}$. No es dificíl probar que $\langle\ \rangle$ preserva las reglas de inferencia de PIL.

Teorema 20 *Si φ es una fórmula en Intuicionismo entonces*

$$\vdash_{PIL} (\varphi\ 1) \text{ si y sólo si } \vDash (\varphi\ 1).$$

Demostración 11 *Tenemos que*

$$\begin{aligned}
\vdash_{PIL} (\varphi\ 1) \quad &\Rightarrow \quad (\forall \pi \in \mathfrak{F})\,(sup\{\pi(x) \mid x \notin \parallel \varphi \parallel\} = 0) \\
&\Rightarrow \quad \langle(\varphi\ 1)\rangle = \mathfrak{F} \\
&\Rightarrow \quad \vDash_M (\varphi\ 1).
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $\nvdash_{PIL} (\varphi\ 1)$*. Así,* $\nvdash_I \varphi$*, por lo que existe un espacio topológico* (X, τ) *tal que* $\parallel \varphi \parallel \neq X$*, por lo que existe una función* $\pi \in \mathfrak{F}$ *y un* $x \in X \setminus \parallel \varphi \parallel$ *tales que* $\pi(x) \neq 1$*. Por lo tanto,* $\nvDash (\varphi\ 1)$*.*

Definición 6 *Sea* Γ *un conjunto de fórmulas de* PIL*,* φ *una fórmula en Intuicionismo y* $\alpha \in [0, 1]$*. Definimos* $\Gamma \vDash (\varphi\ \alpha)$ *si*

$$\bigcap_{(\psi_i\ \gamma_i) \in \Gamma} \langle(\psi_i\ \gamma_i)\rangle \ \subseteq \ \langle(\varphi\ \alpha)\rangle.$$

El siguiente resultado muestra que $\vDash$ preserva las reglas de inferencia posibilistas (GMP) y Rule (S).

Teorema 21 *La relación* $\vDash$ *satisface las siguientes dos condiciones:*

(1) Si $\Gamma \vDash (\psi \to \varphi\ \alpha_1)$ *y* $\Gamma \vDash (\psi\ \alpha_2)$ *entonces* $\Gamma \vDash (\varphi\ \alpha)$*, donde* $\alpha = \text{mín}\{\alpha_1, \alpha_2\}$*;*

(2) Si $\Gamma \vDash (\varphi\ \beta)$ *y* $\beta \geq \alpha$ *entonces* $\Gamma \vDash (\varphi\ \alpha)$*.*

Demostración 12 *(1) Por la hipótesis tenemos que*

$$\bigcap_{(\psi_i\ \gamma_i) \in \Gamma} \langle(\psi_i\ \gamma_i)\rangle \ \subseteq \ \{\pi \in \mathfrak{F} \mid \sup\{\pi(x) \mid x \notin \parallel \psi \to \varphi \parallel\} \leq 1 - \alpha_1\}$$

y

$$\bigcap_{(\psi_i\ \gamma_i) \in \Gamma} \langle(\psi_i\ \gamma_i)\rangle \ \subseteq \ \{\pi \in \mathfrak{F} \mid \sup\{\pi(x) \mid x \notin \parallel \psi \parallel\} \leq 1 - \alpha_2\}\,.$$

Si $\pi \in \bigcap_{(\psi_i\ \gamma_i) \in \Gamma} \langle(\psi_i\ \gamma_i)\rangle$ *entonces* $\sup\{\pi(x) \mid x \notin \parallel \psi \to \varphi \parallel \cap \parallel \psi \parallel\} \leq 1 - \alpha$*. Ahora bien, como estamos trabajando con una semántica topológica tenemos que* $\parallel \psi \parallel \cap \parallel \psi \to \varphi \parallel \subseteq \parallel \varphi \parallel$*. Así,*

$$\sup\{\pi(x) \mid x \notin \| \varphi \|\} \leq \sup\{\pi(x) \mid x \notin \| \psi \| \cap \| \psi \to \varphi \|\} \leq 1-\alpha.$$

Esto implica que $\pi \in \langle(\varphi\ \alpha)\rangle$. *Por lo tanto,* $\Gamma \vDash (\varphi\ \alpha)$.

(2) Como $\beta \geq \alpha$ *entonces* $\bigcap_{(\psi_i\ \gamma_i)\in\Gamma}\langle(\psi_i\ \gamma_i)\rangle \subseteq \langle(\varphi\ \beta)\rangle \subseteq \langle(\varphi\ \alpha)\rangle$.

El siguiente teorema muestra que hemos definido una semántica adecuada para PIL.

Teorema 22 *Si* Γ *es un conjunto de fórmulas un* PIL *y* $(\varphi\ \alpha)$ *es una fórmula en* PIL*, entonces*

$$\Gamma \vdash_{PIL} (\varphi\ \alpha) \text{ si y sólo si } \Gamma \vDash (\varphi\ \alpha).$$

Demostración 13 *Supongamos que* $\Gamma \vdash_{PIL} (\varphi\ \alpha)$. *Sea* Γ_0 *un conjunto de fórmulas en* Γ *de las cuales depende la prueba de* $(\varphi\ \alpha)$ *a partir de* Γ. *Sea* $(\varphi_1\ \alpha_1), \ldots, (\varphi_1\ \alpha_n)$ *una prueba en* PIL *de* $(\varphi\ \alpha)$ *a partir* Γ. *Demostraremos por inducción que para cada* $j = 1, \ldots, n$ *tenemos que* $\Gamma_0 \vDash (\varphi_j\ \alpha_j)$.

La fórmula $(\varphi_1\ \alpha_1)$ *pertenece a* Γ_0 *o bien* $(\varphi_1\ \alpha_1)$ *es un axioma de* PIL. *Si* $(\varphi_1\ \alpha_1)$ *pertenece a* Γ_0 *entonces* $\bigcap_{(\psi_i\ \gamma_i)\in\Gamma_0}\langle(\gamma_i\ \psi_i)\rangle \subseteq \langle(\varphi_1\ \alpha_1)\rangle$, *por lo cual* $\Gamma_0 \vDash (\varphi_1\ \alpha_1)$. *Si* $(\varphi_1\ \alpha_1)$ *es un axioma de* PIL *entonces* $\alpha_1 = 1$ *y, por el 20,* $\vDash (\varphi_1\ \alpha_1)$, *lo cual implica que* $\Gamma_0 \vDash (\varphi_1\ \alpha_1)$. *Por lo tanto, nuestra afirmación es válida para* $j = 1$.

Supongamos que para cada $k < j$, *tenemos que* $\Gamma_0 \vDash (\varphi_k\ \alpha_k)$. *Así* $(\varphi_j\ \alpha_j)$ *pertenece a* Γ_0, *o bien* $(\varphi_j\ \alpha_j)$ *es un axioma de* PIL, *o bien* $(\varphi_j\ \alpha_j)$ *se obtiene de por (GMP) a partir de* $(\varphi_l\ \alpha_l)$ *y* $(\varphi_l \to \varphi_j\ \alpha_m)$, *donde* $l, m < k$ *y* $\alpha_j = \min\{\alpha_l, \alpha_m\}$, *o bien, por último,* $(\varphi_j\ \alpha_j)$ *se obtiene por Rule (S) a partir de* $(\varphi\ \beta)$, *donde* $\beta \geq \alpha$.

En los primeros dos casos concluimos que $\Gamma_0 \vDash (\varphi_j\ \alpha_j)$ *tal como lo hicimos en el caso en que* $j = 1$.

En el tercer caso aplicamos la hipótesis inductiva para obtener $\Gamma_0 \vDash (\varphi_l\ \alpha_l)$ *y* $\Gamma_0 \vDash (\varphi_l \to \varphi_j\ \alpha_m)$. *Así,* $\Gamma_0 \vDash (\varphi_j\ \alpha_j)$.

En el último caso tenemos que $\beta = \alpha_i$ *para algún* $i < j$. *Luego, por la hipótesis inductiva* $\Gamma_0 \vDash (\varphi_j\ \beta)$, *por lo que* $\Gamma_0 \vDash (\varphi_j\ \alpha_j)$. *Esto concluye la prueba por inducción. Para concluir la demostración de la condición necesaria, sólo notemos que*

$$\bigcap_{(\psi_i\ \gamma_i)\in\Gamma}\langle(\psi_i\ \gamma_i)\rangle \subseteq \bigcap_{(\psi_i\ \gamma_i)\in\Gamma_0}\langle(\psi_i\ \gamma_i)\rangle \subseteq \langle(\varphi\ \alpha)\rangle.$$

Supongamos ahora que $\Gamma \nvdash_{PIL} (\varphi\ \alpha)$. *Así,* $\Gamma_0 \nvdash_I \varphi$, *por lo que existe una semántica topológica para intuicionismo, digamos* M, *tal que* $\Gamma_0 \nvDash_M \varphi$. *Esto implica que* $\bigcap_{\psi\in\Gamma_0} \| \psi \| \nsubseteq \| \varphi \|$.

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in \bigcap_{\psi \in \Gamma_0} \parallel \psi \parallel \\ 0, & en\ cualquier\ otro\ caso. \end{cases}$$

Luego $\pi \in \mathfrak{F}$, $\pi \in \bigcap_{(\psi_i\ \gamma_i) \in \Gamma} \langle(\psi_i\ \gamma_i)\rangle$ *y* $\pi \notin \langle(\varphi\ \alpha)\rangle$. *Por lo tanto,* $\Gamma \not\models (\varphi\ \alpha)$.

2.2.3. Una Semántica de Kripke para $PC_\omega L$

La construcción de un modelo de Kripke para $PC_\omega L$ es similar a la de un modelo de Kripke para PIL (las demostraciones de los teoremas en esta subsección se siguen de manera análoga a como lo hicieron en 2.2.1). Nuestra meta es definir una semántica adecuada para $PC_\omega L$ basada en un modelo de Kripke para C_ω

Sea $M = (W, \leq, \Vdash)$ un modelo de Kripke para intuicionismo y sea $\mathfrak{F}$ el conjunto de todas las funciones no decrecientes $\pi : W \to [0,1]$.

Definimos una función $V_0 : \mathcal{L}_0 \to 2^W$ tal que para cada átomo p, se cumple $V_0(p) = \{x \in W \mid x \models p\}$. Luego, extendemos esta definición a fórmulas arbitrarias definiendo una función $V : FOR \to 2^W$ de la siguiente manera.

Para cada átomo p y cualesquiera fórmulas φ y ψ:

- $V(p) = V_0(p)$
- $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi)$;
- $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$;
- $V(\varphi \to \psi) = \{x \in W \mid \text{si } x \in V(\varphi) \text{ entonces } x \in V(\psi)\}$;
- $V(\neg\varphi) = \{x \in W \mid \neg\varphi \in T(x)\} \cup \{x \in W \mid (\exists y \leq x)(y \nVdash \neg\varphi)\}$;
- $V(\neg^{n+2}\varphi) = \{x \in W \mid \neg^{n+2}\varphi \in T(x) \text{ y } x \Vdash \neg^n\varphi\} \cup \{x \in W \mid (\exists y \leq x)(y \nVdash \neg^{n+1}\varphi)\}$; y
- $V(\bot) = \emptyset$.

La expresión $M \models \varphi$ significa que $V(\varphi) = W$ y $\models \varphi$ significa que para cada modelo de Kripke M tenemos que $M \models \varphi$. Con $\bigvee_{x \in V(p)} \pi(x)$ denotamos $\sup\{\pi(x) \mid x \in V(p)\}$. Asociamos un conjunto de funciones en $\mathfrak{F}$ a cada fórmula $(\varphi\ \alpha)$ en $PC_\omega L$ de la siguiente manera.

Definición 7 *Para cualquier fórmula* $(\varphi\ \alpha)$ *en* $PC_\omega L$*,*

$$\parallel (\varphi\ \alpha) \parallel = \left\{ \pi \in \mathfrak{F} \mid \bigvee_{x \notin V(\varphi)} \pi(x) \leq 1 - \alpha \right\}$$

Escribimos $\models_M (\varphi\ 1)$ siempre que $\parallel (\varphi\ 1) \parallel = \parallel \varphi \parallel = \mathfrak{F}$. También escribimos $\models (\varphi\ 1)$ siempre que $\models_M (\varphi\ 1)$ para todo M, modelo de Kripke para C_ω. No es difícil verificar que las reglas de inferencia de $PC_\omega L$ son preservadas por $\parallel\ \parallel$.

Teorema 23 *Si φ es una fórmula en C_ω entonces*

$$\vdash_{PC_\omega L} (\varphi\ 1) \textit{ si y sólo si } \models (\varphi\ 1).$$

Definición 8 *Sean Γ un conjunto de fórmulas de $PC_\omega L$, φ una fórmula en C_ω y $\alpha \in [0,1]$. definimos $\Gamma \models (\varphi\ \alpha)$ si*

$$\bigcap_{(\psi_i\ \gamma_i)\in\Gamma} \parallel (\psi_i\ \gamma_i) \parallel \subseteq \parallel (\varphi\ \alpha) \parallel .$$

El siguiente teorema demuestra que hemos definido una semántica adecuada para $PC_\omega L$.

Teorema 24 *Si Γ es un conjunto de fórmulas en $PC_\omega L$ y $(\varphi\ \alpha)$ es una fórmula en $PC_\omega L$, entonces*

$$\Gamma \vdash_{PC_\omega L} (\varphi\ \alpha) \textit{ si y sólo si } \Gamma \models (\varphi\ \alpha).$$

2.2.4. Una Semática Topológica para $PC_\omega L$

Una vez más, la construcción de una semántica topológica para $PC_\omega L$ es similar a la de una semántica topológica para PIL (y, una vez más, omitimos las demostraciones de los teoremas de esta subsección). Consideremos dada una semántica topológica para C_ω donde $\parallel\ \parallel$ es la función que asigna un conjunto abierto a cada fórmula en C_ω y sea $\mathfrak{F}$ el conjunto de todas las funciones $\pi : W \to [0,1]$.

Definición 9 *Para cada fórmula $(\varphi\ \alpha)$ en $PC_\omega L$. Definimos*

$$\langle(\varphi\ \alpha)\rangle = \{\pi \in \mathfrak{F} \mid \sup\{\pi(x) \mid x \notin \parallel \varphi \parallel\} \leq 1-\alpha\}.$$

Escribimos $\models (\varphi\ 1)$ siempre que $\langle(\varphi\ 1)\rangle = \mathfrak{F}$.

Teorema 25 *Si φ es un fórmula en C_ω entonces*

$$\vdash_{PC_\omega L} (\varphi\ 1) \textit{ si y sólo si } \models (\varphi\ 1).$$

Definición 10 *Sea Γ un conjunto de fórmulas de $PC_\omega L$, φ una fórmula en C_ω y $\alpha \in [0,1]$. Definimos $\Gamma \models (\varphi\ \alpha)$ si*

$$\bigcap_{(\psi_i\ \gamma_i)\in\Gamma} \langle(\psi_i\ \gamma_i)\rangle \subseteq \langle(\varphi\ \alpha)\rangle.$$

El siguiente teorema demuestra que hemos definido una semántica adecuada para $PC_\omega L$.

Teorema 26 *Si Γ es un conjunto de fórmulas en $PC_\omega L$ y $(\varphi\ \alpha)$ es una fórmula en $PC_\omega L$, entonces*

$$\Gamma \vdash_{PC_\omega L} (\varphi\ \alpha) \textit{ si y sólo si } \Gamma \models (\varphi\ \alpha).$$

Capítulo 3

Programas Lógicos Posibilistas

En las Ciencias de la Computación, la Programación Lógica es uno de los seis paradigmas de la programación (las demás son la Imperativa, la Declarativa, la Funcional, la Orientada a Objetos y la Simbólica). Este paradigma está basada en la Lógica Matemática. Los programas escritos en Programación Lógica son conjuntos de proposiciones lógicas aunadas a algún algoritmo de inferencia. Tales proposiciones tienen como objetivo modelar enunciados declarativos dentro de algún contexto.

Dado un conjunto finito de descripciones declarativas, si la sintaxis de tales descripciones se formaliza en el campo de la Lógica de Predicados entonces una computadora puede inferir conclusiones a partir de tal conjunto. De aquí que la Programación Lógica esté fuertemente apoyada en la Lógica de Predicados y las semánticas definidas a partir de modelos.

En las primeras secciones de este Capítulo revisamos los dos tipos de Programas Lógicos que son de nuestro interés para esta tesis: Programas Definite y Programas Normales, así como semánticas para estos programas en términos de Modelos de Herbrand, Modelos Mínimos y Modelos Estables. Para detalles, referimos al lector a [21, 20]. Un resultado importante es sobre la demostrabilidad de átomos a partir de Programas Normales en la lógica paraconsistente C_ω (ver [10]). Otra aportación de esta tesis es la extensión de este resultado en términos posibilistas.

En su artículo [2], los autores presentan programas lógicos posibilistas. En particular, presentan Programas Definite Posibilistas y Programas Normales Posibilistas, así como semánticas para este tipo de programas. En este Capítulo también revisamos este trabajo y presentamos otra aportación de esta tesis: la semántica de Modelos Mínimos Posibilistas para Programas Normales Posibilistas.

3.1. Programas Definite

Cierto tipo de enunciados declarativos, aquellos que describen hechos y los que describen reglas, pueden representarse por medio de proposiciones que tienen la siguiente forma:

$$a_0 \leftarrow a_1 \wedge \cdots \wedge a_n,$$

con $n \geq 0$ y en donde $a_0, \ldots, a_n$ son fórmulas atómicas y todas las variables que ocurren en las fórmulas están cuantificadas universalmente (implícitamente). Tales fórmulas se llaman **cláusulas definite**. El antecedente de la implicación se llama **el cuerpo** de la cláusula y el consecuente se llama **la cabeza** de la cláusula. Aclaramos que en la Programación Lógica es costumbre escribir y usar la implicación en sentido inverso al que se usa comúnmente. Nótese que estas cláusulas representan exclusivamente información *positiva*, pues carecen de la negación. Un **Programa Definite** es un conjunto finito de cláusulas definite.

Dado un programa definite P, su **universo de Herbrand**, denotado por $\mathcal{U}_P$, es el conjunto de todos los términos ground (sin variables) definidos a partir de las constantes y los funtores del alfababeto determinado por los símbolos que aparecen en el programa. Asimismo, la **base de Herbrand** de P, $\mathcal{B}_P$, es el conjunto de todos los átomos ground determinados por el programa. En la práctica, estamos interesados en encontrar el menor subconjunto de la base de Herbrand de P que haga que sean verdaderas las cláusulas de P.

Una **interpretación de Herbrand** de P es cualquier subconjunto de $\mathcal{B}_P$. Un **Modelo de Herbrand** de P es una interpretación de Herbrand de P que haga que sus cláusulas sean verdaderas. Así que todo programa definite P tiene un modelo, a saber, $\mathcal{B}_P$. Más aún, la intersección de todos los Modelos de Herbrand de P resulta ser también un Modelo de Herbrand de P. La intersección de todos los modelos de Herbrand de P se llama **el menor Modelo de Herbrand** de P.

Como ejemplo, consideremos el programa definite P definido por las reglas

$$
\begin{aligned}
&impar(s(0)),\\
&impar(s(X)) \leftarrow impar(X).
\end{aligned}
$$

P contiene una sola constante, 0, y un funtor unario, s, por lo que

$$\mathcal{U}_P = \{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \ldots\}.$$

El único símbolo predicado es *impar*, por lo que

$$\mathcal{B}_P = \{impar(0), impar(s(0)), impar(s(s(0))), \ldots\}.$$

Algunas interpretaciones de Herbrand son

$$
\begin{aligned}
&\emptyset,\\
&\{impar(s(0))\},\\
&\{impar(s(0)), impar(s(s(0)))\},\\
&\{impar(s^n(0)) \mid n \in \{1,3,5,7,\ldots\}\},\\
&\mathcal{B}_P.
\end{aligned}
$$

De las interpretaciones de Herbrand anteriores, sólo las dos últimas son modelos de Herbrand de P. De hecho, el menor Modelo de Herbrand de P es

$$\{impar(s^n(0)) \mid n \in \{1,3,5,7,\ldots\}\}.$$

Existen varios algoritmos para hallar el menor Modelo de Herbrand de un Programa Definite.

3.2. Programas Normales y la Negación en la Programación Lógica

En muchos casos cotidianos, interpretamos la falta de información como evidencia de lo opuesto. Por ejemplo, rara vez ordenamos alimentos que no estén en un menú. En Programación Lógica existe un mecanismo (llamado la *suposición del mundo cerrado*) para obtener conclusiones negativas a partir de la falta de información positiva. Sin embargo, este mecanismo presenta algunas fallas. Una versión más débil de este mecanismo (y por lo tanto, más aceptada) es la **Negación Por Falla**. Como, en general, la negación por falla no coincide con la negación clásica, a veces se escribe *not* A en lugar de $\neg A$, a menos de que no haya confusión. En lo que resta de este Capítulo, $\neg A$ denota negación por falla.

Una **clásula normal** es una proposición que tiene la forma

$$a \leftarrow b_1 \wedge \cdots \wedge b_n \wedge \neg c_1 \wedge \cdots \wedge \neg c_m,$$

donde a y cada b_j y c_k son átomos. Cuando $m = 0$, la cláusula normal es una cláusula definite. A menudo utilizamos la siguiente notación: sustituimos las conjunciones $\wedge$ por comas. Si r denota una cláusula normal (o definite), $head(r)$ es la cabeza de r y $body(r)$ es el cuerpo de r. En particular $body^+(r) = \{b_1, \cdots, b_n\}$ y $body^- = \{c_1, \cdots, c_m\}$. Por último, $r^+ = head(r) \leftarrow body^(r)$. Un **Programa Normal** es un conjunto finito de cláusulas normales. Nótese que todo Programa Definite es también un Programa Normal.

Dada la clase de Programas Normales, un *operador semántico* es una función que a cada Programa Normal P le asigna algún subconjunto de $\mathcal{L}_P$. Estos conjuntos de átomos, llamados *modelos semánticos* del programa P, usualmente son algún subconjunto "preferido" de los modelos clásicos bivaluados de P. El ejemplo más simple de un operador semántico es el de los *Modelos Clásicos*, el cual asigna los modelos clásicos de P. Otro más interesante es el de los *Modelos Mínimos*[22].

Sea P un Program Normal. Un conjunto de átomos M es un **Modelo Mínimo** de P si M es un modelo clásico de P y es minimal (con respecto a la contención) entre los otros modelos clásicos de P. Usamos *Min* para denotar al operador semántico de los Modelos Mínimos, i.e. $Min(P)$ es el conjunto de Modelos Mínimos de P.

Los Modelos Mínimos para Programas Normales están caracterizados por el siguiente resultado [5], en el cual escribimos $\widetilde{M}$ para denotar el complemento de M y definimos $\neg\widetilde{M} = \{\neg a \mid a \in \widetilde{M}\}$.

Teorema 27 *Sea P un Programa Normal y M un conjunto de átomos en $\mathcal{L}_P$. Así, M es un Modelo Mínimo de P si y sólo si $P \cup \neg\widetilde{M} \vdash_C M$.*

Gelfond y Lifschitz [4], afirman que los programas con negación pueden tener varios modelos de Herbrand minimales. Esto implica que la semántica del menor Modelo de Herbrand no siempre es aplicable a Programas Normales. Ellos mismos proponen la Semántica de Modelos Estables que revisamos a continuación.

Sea P un Programa Normal y sea $M \subseteq \mathcal{L}_P$ Denotemos por P_M al programa obtenido de un programa normal P eliminando

- toda regla que tenga un átomo negado $\neg b$, donde $b \in M$ y
- todos los átomos negados en los cuerpos de las cláusulas restantes,

es decir, $P_M = \{r^+ \mid r \in P, body^-(r) \cap M = \emptyset\}$.

Al programa P_M le llamaremos **el reducto** de P con respecto de M. Por su definición, P_M es un programa definite, de tal forma que existe el menor Modelo de Herbrand de P_M. Si el menor Modelo de Herbrand de P_M coincide con M entonces decimos que M es **un modelo estable** de P. Resulta que, en efecto, cualquier modelo estable de P es un modelo minimal de Herbrand de P. Además, a diferencia del menor Modelo de Herbrand de un programa definite, los modelos estables de un programa normal pueden no existir o no existir de manera única.

Como ejemplo, sea P el Programa Normal definido por las reglas

$$\begin{aligned} &a \leftarrow, \\ &c \leftarrow a, b \\ &d \leftarrow a, \neg b \end{aligned}$$

y sea $M = \{a, d\}$. El reducto P_M es

$$\begin{aligned} &a \leftarrow, \\ &c \leftarrow a, b \\ &d \leftarrow a \end{aligned}$$

y el menor Modelo de Herbrand de P_M es precisamente M, por lo que M es un modelo estable de P. Nótese que $M' = \{a, b, c\}$ es un Modelo de Herbrand de $P_{M'}$, más no el menor. Por lo tanto, M' no es modelo estable de P, aunque sí es un modelo de P.

Así como los Programas Definite se extienden a Programas Normales, éstos se extienden a Programas Disyuntivos, los cuales tienen la forma

$$a_1 \vee \cdots \vee a_k \leftarrow b_1 \wedge \cdots \wedge b_n \wedge \neg c_1 \wedge \cdots \wedge \neg c_m.$$

3.2.1. Programas Normales y la Demostrabilidad de Átomos

Resolución es una regla de inferencia que generaliza a *Modus Ponens*. Para fórmulas proposicionales en forma normal conjuntiva, se basa en una sola regla de inferencia:

$$\frac{A \vee c \quad B \vee \neg c}{A \vee B}\; Res$$

Las siguientes reglas de inferencia aparecen en el estudio de técnicas de Resolución aplicadas a Programas Normales[23]. Son conocidas como Regla G, Regla Ca y Regla R, respectivamente.

$$\frac{x \leftarrow A \wedge d \quad d \leftarrow B}{x \leftarrow A \wedge B}\ G \qquad\qquad \frac{x \leftarrow A \wedge c \quad x \leftarrow B \wedge \neg c}{x \leftarrow A \wedge B}\ Ca$$

$$\frac{x \leftarrow A \wedge c \quad y \leftarrow B \wedge \neg c}{x \leftarrow \neg y \wedge A \wedge B}\ R$$

donde x, y, c y d son átomos y las fórmulas A, B representan conjunciones arbitrarias de literales.

En los siguientes teoremas [23], C denota a la lógica clasica y $\vdash_{GCaR}$ denota deducción usando las reglas indicadas en el subíndice.

Teorema 28 *[23] Sea P be a Programa Normal y sea A una fórmula normal. Así, $P \vdash_C A$ si y sólo si $P \vdash_{GCaR} A$.*

Teorema 29 *[23] Sea P un Programa Normal y sea a un átomo. Si $P \vdash_{GCaR} a$ entonces $P \vdash_{GCa} a$.*

Por lo tanto, si a es an átomo entonces $P \vdash_C a$ si y sólo si $P \vdash_{GCaR} a$. Luego, combinando estos dos teoremas tenemos que $P \vdash_C a$ si y sólo si $P \vdash_{GCa} a$.

En [10], los autores relacionan la Regla G y la Regla Ca con la lógica paraconsistente C_ω.

Teorema 30 *[10] Sean x, y, c y d átomos y sean A, B fórmulas que representan conjunciones arbitrarias de literales. Así,*

$$x \leftarrow A \wedge d, d \leftarrow B \vdash_{C_\omega} x \leftarrow A \wedge B$$

y además

$$x \leftarrow A \wedge c, x \leftarrow B \wedge \neg c \vdash_{C_\omega} x \leftarrow A \wedge B.$$

Corolario 1 *Si P es un Programa Normal y a es un átomo entonces $P \vdash_C a$ si y sólo si $P \vdash_{C_\omega} a$.*

Demostración 14 *La prueba se sigue a partir del teorema y los comentarios anteriores.*

Otra aportación de esta tesis es extender este resultado al caso posibilista, lo cual mostramos en 3.4.1.

3.3. Programas Definite Posibilistas

Un **Programa Definite Posibilista** (PDP) es un conjunto de cláusulas posibilistas de la forma

$$(a \leftarrow b_1 \wedge \cdots \wedge b_n \ \alpha),$$

que denotaremos también por r. La proyección de una regla r es $r^* = a \leftarrow b_1 \wedge \cdots \wedge b_n$. El parámetro α es el peso de la regla r, que también denotamos por $n(r)$. Si P es un PDP entonces $P^* = \{r^* \mid r \in P\}$ (el cual es un programa definite). Nuestra meta en esta sección es definir el modelo posibilista de P.

Si denotamos por M_{P^*} al menor Modelo de Herbrand de P^* entonces la medida de necesidad de un átomo $x \in \mathcal{L}_P$ es

$$N_P(x) = \min_{M \subseteq M_{P^*}} \{\max_{r \in P} \{n(r) \mid M \nvDash r^*\} \mid x \notin M\}.$$

El equivalente posibilita del menor Modelo de Herbrand es el siguiente: si P es un PDP entonces **el Modelo Posibilista de** P es

$$\Pi M(P) = \{(x \ N_P(x)) \mid x \in \mathcal{L}_P, N_P(x) > 0\}.$$

Así, resulta que $(\Pi M(P))^*$ es el menor Modelo de Herbrand de P^*.

Como ejemplo, consideremos el PDP

$$P = \{(a \ 0{,}8), (b \leftarrow a \ 0{,}6), (d \leftarrow a \ 0{,}5), (d \leftarrow c \ 0{,}9)\}.$$

El menor Modelo de Herbrand de P^* es $\{a, b, d\}$. Después de calcular las medidas de necesidad de cada uno de estos átomos, obtenemos $N_P(a) = 0{,}8$, $N_P(b) = 0{,}6$ y $N_P(d) = 0{,}5$. Por lo tanto el modelo posibilista de P es $\Pi M(P) = \{(a \ 0{,}8), (b \ 0{,}6), (d \ 0{,}5)\}$.

3.4. Programas Normales Posibilistas

Un **Programa Normal Posibilista** (PNP) es un conjunto de cláusulas posibilistas de la forma

$$(a \leftarrow b_1 \wedge \cdots \wedge b_n \wedge \neg c_1 \wedge \cdots \wedge \neg c_m \ \alpha).$$

Sea $A \in \mathcal{L}_P$. El **reducto posibilista** de P con respecto a A es el PDP:

$$P^A = \{((r^*)^+ \ n(r)) \mid r \in P, body^-(r) \cap A = \emptyset\}.$$

Sea S un conjunto de átomos posibilistas. Decimos que S es un **Modelo Estable Posibilista** de P si $S = \Pi M(P^{S^*})$.

Una propiedad de esta semántica esta dada en el siguiente teorema [2].

Teorema 31 *Sea P un Programa Normal Posibilista y sea M un conjunto de átomos posibilistas. Si M es un Modelo Estable Posibilista de P entonces M^* es un Modelo Estable de P^*.*

Presentamos aquí un ejemplo de Modelo Estable Posibilista ([2]). Cierto médico tiene un paciente que padece dos enfermedades, cada una de las cuales puede ser curada con cierto medicamento. El problema es que ambos medicamentos son incompatibles. El médico desea obtener *certeza* sobre la eficacia de algún tratamiento.

Representemos con los átomos e_1 y e_2 a los hechos de que el paciente sufre de las enfermedades 1 y 2, respectivamente; m_1 y m_2 a los hechos de que al paciente se le administra el medicamento que cura de las enfermedades 1 y 2, respectivamente y c_1 y c_2 a los hechos de que el paciente se cura de las enfermedades 1 y 2, respectivamente. Así, la situación se puede representar por el siguiente programa normal P:

$$\begin{array}{lll} e_1 \leftarrow & m_1 \leftarrow e_1 \wedge \neg m_2 & c_1 \leftarrow e_1 \wedge m_1 \\ e_2 \leftarrow & m_2 \leftarrow e_2 \wedge \neg m_1 & c_2 \leftarrow e_2 \wedge m_2 \end{array}$$

Este programa normal tiene dos modelos estables: $M_1 = \{e_1, e_2, m_1, c_1\}$ y $M_2 = \{e_1, e_2, m_2, c_2\}$, los cuales confirman dos tratamientos para el paciente. Pero ahora, el médico desea determinar la certeza de estos tratamientos, en base a la certeza de la información que tiene o puede obtener. Para ello utiliza su experiencia, la de sus colegas, etc. Esto genera un programa normal posibilista como el siguiente.

$$\begin{array}{lll} (\ \rightarrow e_1 \ \ 0{,}9) & (e_1 \wedge \neg m_2 \rightarrow m_1 \ \ 1) & (e_1 \wedge m_1 \rightarrow c_1 \ \ 0{,}7) \\ (\ \rightarrow e_2 \ \ 0{,}7) & (e_2 \wedge \neg m_1 \rightarrow m_2 \ \ 1) & (e_2 \wedge m_2 \rightarrow c_2 \ \ 0{,}3) \end{array}$$

Ahora, el médico desea saber qué grado de certeza tendrán los tratamientos descritos por los modelos estables M_1 y M_2 a partir de los grados de certeza de las reglas anteriores. Para ello debe calcular la medida de necesidad de cada átomo en M_1 y M_2. Después de los cálculos obtiene los siguientes modelos estables posibilistas: $\{(e_1 \ \ 0{,}9), (e_2 \ \ 0{,}7), (m_1 \ \ 0{,}9), (c_1 \ \ 0{,}7)\}$ y $\{(e_1 \ \ 0{,}9), (e_2 \ \ 0{,}7), (m_2 \ \ 0{,}7), (c_2 \ \ 0{,}3)\}$.

Finalmente, el médico encuentra más certeza en el primer tratamiento que en el segundo. Así que puede considerar la gravedad de cada enfermedad para dar prioridad a los tratamientos.

3.4.1. Programa Normales Posibilistas y la Demostrabilidad de Átomos Posibilistas

Podemos extender la Regla G y la Regla Ca hacia $PC_\omega L$ y los Programas Normales de la siguiente manera:

Teorema 32

$$\frac{(x \leftarrow A \wedge d\ \alpha) \quad (d \leftarrow B\ \beta)}{(x \leftarrow A \wedge B\ \ \text{mín}\{\alpha, \beta\})}\ G$$

$$\frac{(x \leftarrow A \wedge c\ \alpha) \quad (x \leftarrow B \wedge \neg c\ \beta)}{(x \leftarrow A \wedge B\ \ \text{mín}\{\alpha, \beta\})}\ Ca$$

donde x, y, c y d son átomos, las fórmulas A, B representan conjunciones arbitrarias de literales y α, β pertenecen a $(0, 1]$.

Demostración 15 *En esta prueba denotamos la implicación en el sentido más usual: $\rightarrow$ en lugar de $\leftarrow$.Una prueba de la Regla G es como sigue:*

1.	$(A \wedge d \rightarrow x\ \ \alpha)$	*Hipótesis*
2.	$(B \rightarrow d\ \ \beta)$	*Hipótesis*
3.	$(d \rightarrow (A \rightarrow x)\ \ \alpha)$	*Equivalencia(1)*
4.	$(B \rightarrow (A \rightarrow x)\ \ min\{\alpha, \beta\})$	*Transitividad(2,3)*
5.	$(A \wedge B \rightarrow x\ \ min\{\alpha, \beta\})$	*Equivalencia(4)*

Ahora verificamos que la Regla Ca también es válida en $PC_\omega L$:

1.	$(A \wedge c \rightarrow x \quad \alpha)$	*Hipótesis*
2.	$(B \wedge A \wedge c \rightarrow A \wedge c \quad 1)$	*(Pos 4 1)*
3.	$(A \wedge B \wedge c \rightarrow x \quad \alpha)$	*Transitividad(2,1)*
4.	$(B \wedge \neg c \rightarrow x \quad \beta)$	*Hipótesis*
5.	$(A \wedge B \wedge \neg c \rightarrow B \wedge \neg c \quad 1)$	*(Pos 4 1)*
6.	$(A \wedge B \wedge \neg c \rightarrow x \quad \beta)$	*Transitividad(5,4)*
7.	$((A \wedge B \wedge c \rightarrow x) \rightarrow$ $((A \wedge B \wedge \neg c \rightarrow x) \rightarrow$ $((A \wedge B \wedge c) \vee (A \wedge B \wedge \neg c) \rightarrow x)) \quad 1)$	*(Pos8 1)*
8.	$((A \wedge B \wedge \neg c \rightarrow x) \rightarrow$ $((A \wedge B \wedge c) \vee (A \wedge B \wedge \neg c) \rightarrow x) \quad \alpha)$	*GMP(3,7)*
9.	$((A \wedge B \wedge c) \vee (A \wedge B \wedge \neg c) \rightarrow x \quad min\{\alpha, \beta\})$	*GMP(6,8)*
10.	$((A \wedge B) \wedge (c \vee \neg c) \rightarrow x \quad min\{\alpha, \beta\})$	*Distributividad*
11.	$((c \vee \neg c) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow x) \quad min\{\alpha, \beta\})$	*Equivalencia*
12.	$(c \vee \neg c \; 1)$	*(C_ω1 1)*
13.	$(A \wedge B \rightarrow x \quad min\{\alpha, \beta\})$	*GMP(11,12)*

Por el teorema anterior y el Corolario 1 tenemos el siguiente resultado, en el cual PL denota la Lógica Posibilista estándar:

Corolario 2 *Sea P un Programa Normal Posibilista y sea a un átomo. Así, $P \vdash_{PL} (a \; \alpha)$ si y sólo si $P \vdash_{PC_\omega L} (a \; \alpha)$.*

3.4.2. Modelos Mínimos Posibilistas para Programas Normales Posibilistas

Aquí adaptamos a nuestro contexto conceptos que fueron presentados en [1].

Definición 11 *Dado un Programa Normal Posibilista P y dos subconjuntos M_1 y M_2 de $\mathcal{L}_P$ (átomos posibilistas), decimos que $M_1 \preceq M_2$ si las siguientes dos condiciones se cumplen:*

1. $M_1^* \subseteq M_2^*$,
2. *Para cada $(a \; \alpha) \in M_2$, si $(a \; \beta) \in M_1$ entonces $\alpha < \beta$.*

Se puede verificar que $\preceq$ es un orden parcial en $2^{\mathcal{L}_P}$.

Definición 12 *Dado un PNP P, definimos el grado de inconsistencia de P por $Incon(P) = \text{máx}\{\alpha \mid P \vdash_{PC_\omega L} (\perp \; \alpha)\}$, donde $\perp$ es la constante lógica* bottom. *Si $Incon(P) = 0$ decimos que P es consistente (o $PC_\omega L$ consistente).*

Definición 13 *Dado un PNP P y un subconjunto M de $\mathcal{L}_P$, decimos que M es un **Modelo Mínimo Posibilista** de P,*

1. *Para cualquier $(a\ \alpha), (a\ \beta) \in M$, tenemos $\alpha = \beta$.*
2. *Incons $(P \cup (\neg\widetilde{M^*}\ 1)) = 0$ y $P \cup (\neg\widetilde{M^*}\ 1) \vdash_{PC_\omega L} M$.*
3. *Si M es minimal con respecto a $\preceq$ entre todos los subconjuntos de átomos que satisfacen las primeras dos condiciones.*

Usamos *PMin* para denotar el operador semántico de Modelos Mínimos Posibilistas, i.e. $PMin(P)$ es el conjunto de los Modelos Mínimos Posibilistas de P.

Teorema 33 *Si P es un PNP y $M \subseteq \mathcal{L}_P$, entonces $M \in PMin(P)$ implica que $M^* \in Min(P^*)$.*

Demostración 16 *Sea $M \in PMin(P)$. Por la definición 13, tenemos que $P \cup (\neg\widetilde{M^*}\ 1) \vdash_{PC_\omega L} M$, lo cual implica que $P^* \cup \neg\widetilde{M^*} \vdash_{C_\omega} M^*$. Luego, por el teorema 27 tenemos que M^* es un Modelo Mínimo de P^*, por lo que $M^* \in Min(P^*)$.*

El recíproco del teorema anterior es falso. Si

$$P = \{(b \leftarrow \neg a\ 0{,}6), (a \leftarrow \neg b\ 0{,}3)\}$$

y $M = \{(a\ 0{,}7)\}$, entonces M^* es un Modelo Mínimo de P^*, pero $P \cup (\neg\widetilde{M^*}\ 1) \nvdash_{PC_\omega L} (a\ 0{,}7)$. Sin embargo, podemos construir un modelo posibilista de P de la siguiente manera.

Teorema 34 *Sea P un PNP y $M \subseteq \mathcal{L}_P$ tales que $M^* \in Min(P^*)$. Si*

$$N = \{(a\ \alpha) \mid a \in M \text{ y } \alpha = max\{\beta \mid P \cup (\neg\widetilde{M^*}\ 1) \vdash_{PC_\omega L} (a\ \beta)\}\}$$

entonces $N \in PMin(P)$.

Demostración 17 *Supongamos las hipótesis.*

1. *Por la definición de N tenemos que para cualquier $(a\ \alpha), (a\ \beta) \in N$ se cumple $\alpha = \beta$.*
2. *Por la hipótesis y el teorema 27 tenemos que $P^* \cup \neg\widetilde{M^*}$ es consistent. Por lo tanto, $Incons\left(P \cup (\neg\widetilde{N^*}\ 1)\right) = 0$, pues $N^* = M^*$.*

   Además, por la definición de N, tenemos que $P \cup (\neg\widetilde{N^*}\ 1) \vdash_{PC_\omega L} N$.
3. *Por la definición de N, no existe $N_1 \in \mathcal{L}_P$ tal que para cualquier $(a\ \alpha) \in M$ se cumple $P \cup (\neg\widetilde{N_1^*}\ 1) \vdash_{PC_\omega L} (a\ \alpha)$ y $N_1 \preceq N$. Por lo tanto, N es $\preceq -$ minimal.*

3.5. Safe Beliefs Posibilistas

La programación Answer Set es una forma de programación declarativa basada en la semántica de Modelos Estables. La definición de Answer Sets para Programas Aumentados (los cuales son una tipo más general de programas) se basa en hallar modelos múnimos de algunos programas reducidos. Así, la semántica de los Modelos Estables es una semántica de Answer Sets para Programas Normales.

Una Lógica Intermedia es una lógica más grande o igual a la Intuicionista pero menor estrictamente que la Clásica. Pearce [5] estableció una relación entre la Programación Answer Set y las lógicas Intermedias, relación que los autores en [6] utilizan para presentar una extensión de Answer Sets, llamados Safe Beliefs. Su definición formaliza la idea de que la inferencia no monótona puede lograrse determinando algunas fórmulas en las que uno puede *creer con seguridad.*

En [1], los autores definen los Safe Beliefs Posibilistas, presentando además una caracterización en términos de la Lógica Posibilista Intuicionista PIL.

Como última aportación de esta tesis, presentamos una relación entre los Safe Beliefs Posibilistas de cualquier Programa Normal Posibilista y sus Modelos Estables Posibilistas.

El siguiente es un resultado de Pearce [5].

Lema 1 *Sea P un Programa Normal, $M \subseteq \mathcal{L}_P$ y sea X una lógica Intermedia. M es un modelo estable de P si y sólo si $P \cup \neg\widetilde{M} \vdash_X M$.*

In [6], the authors present *safe beliefs* as an extension of answer sets in terms of completions of a program. In [1], the authors extend this notion to the possibilistic case. We reproduce some of their findings in this section, in which a *possibilistic theory* is a finite set of possibilistic formulas.

Definición 14 [*1*]
Sea Γ una teoría posibilista.

- *El* ***inconsistency degree*** *de Γ, denotaado por $Incon(\Gamma)$, se define como el siguiente número*

$$\text{máx}\{\alpha \mid \Gamma \vdash_{PIL} (\bot\ \alpha)\}.$$

- *Γ es* ***consistente*** *si $Incon(\Gamma) = 0$.*

Si M es un conjunto de a´tomos posibilistas, escribimos $\widetilde{M^*}$ para denotar el complemento de M^* en $\mathcal{L}_{\Gamma^*}$. También, $\neg\neg M^*$ denota al conjunto $\{\neg\neg x \mid x \in M^*\}$ y $\Gamma \Vdash_{PIL} (\varphi\ \alpha)$ denota que Γ es consistente y $\Gamma \vdash_{PIL} (\varphi\ \alpha)$.

Si M es cualquier subconjunto de $\mathcal{L}_\Gamma$, denotamos por$(\neg\widetilde{M^*}\ 1)$ y $(\neg\neg M^*\ 1)$ a los conjuntos $\{(x\ 1) \mid x \in \neg\widetilde{M^*}\}$ y $\{(x\ 1) \mid x \in \neg\neg M^*\}$, respectivamente.

Es posible definir un orden parcial en $2^{\mathcal{L}_\Gamma}$ de la siguiente manera. Para cualesquiera M_1 y M_2 en $2^{\mathcal{L}_\Gamma}$, tenemos que $M_1 \leq M_2$ si se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) $M_1 \subseteq M_2$;

b) Si $(\varphi\ \alpha_1) \in M_1$ entonces existe $(\varphi\ \alpha_2)$ en M_2 tal que $\alpha_2 \leq \alpha_1$.

Definición 15 [*1*]
*Sea Γ una teoría posibilista y sea M un subconjunto de $\mathcal{L}_\Gamma$. Definimos que M sea un **Safe Belief Posibilista** de P si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

- *M es $\leq$ -minimal;*
- *Para todo $(a\ \alpha)$ en M, $\Gamma \cup (\neg\widetilde{M^*}\ 1) \cup (\neg\neg\widetilde{M^*}\ 1) \Vdash_{PIL} (a\ \alpha)$*

El siguiente lema nos da la caracterización que emplearemos en nuestro resultado principal.

Lema 2 [*1*] *Sea P un Programa Normal Posibilista y sea $M \subseteq \mathcal{L}_P$. M es un Safe Belief Posibilista de P si y sólo si $P \cup (\neg\widetilde{M^*}\ 1) \vdash_{PIL} M$.*

Nuestro resultado principal se sigue de los lemas anteriores.

Teorema 35 *Sea P un Programa Normal Posibilista y sea $M \subseteq \mathcal{L}_P$. Si M es un Modelo Estable Posibilista de P entonces M es un Safe Belief Posibilista de P.*

Demostración 18 *Si M es un Modelo Estable Posibilista de P entonces, por el Teorema 31, M^* es un Modelo Estable de P^*, lo cual equivale, por el Lema 1, a que $P^* \cup \neg\widetilde{M^*} \vdash_I M^*$. Ahora bien, por el Teorema 7 tenemos que $P \cup (\neg\widetilde{M^*}\ 1) \vdash_{PIL} M$ y, por el Lema 2, M es un Safe Beliefe Posibilista de P.*

El recíproco del teorema anterior no es válido: no es difícil verificar que si P es el Programa Normal Posibilista definido por las reglas posibilistas $(a \leftarrow \neg b\ 0{,}5)$ y $(b \leftarrow \neg a\ 0{,}5)$ y si $M = \{(a\ 0{,}3)\}$ entonces M es un Safe Belief Posibilista de P, pero no es un Modelo Estable Posibilista de P.

3.6. Conclusiones

Concluimos este trabajo resumiendo lo que hemos presentado. Primero revisamos el trabajo sobre la lógica intuicionista posibilista PIL y en esa misma dirección presentamos la lógica paraconsistente posibilista que denominamos $PC_\omega L$ y algunas de sus propiedades sintácticas. En segundo lugar presentamos dos semánticas, una de tipo Kripke y otra topológica, para cada una de las lógicas posibilistas anteriores. Para lograrlo, también presentamos una semántica topológica para la lógica paraconsistente C_ω.

Después revisamos la teoría básica de la Programación Lógica, en particular los programas Definite y los programas Normales. Con respecto a los programas Normales, revisamos la demostrabilidad de átomos a partir de estos programas por medio de la lógica paraconsistente C_ω. Nuestra aportación en este sentido es extender este resultado al caso posibilista. También presentamos la semántica de Modelos Mínimos Posibilistas para programas Normales Posibilistas.

Por último revisamos la teoría de acerca de los Safe Belief Posibilistas y la relacionamos con los Modelos Estables Posibilistas para programas Normales Posibilistas.

Continuando en estas direcciones, podemos

- buscar semánticas para otras lógicas posibilistas;
- buscar extender semáticas para programas lógicos disyuntivos;
- definir transformaciones de programas lógicos posibilistas y buscar aquellas que preserven semánticas posibilistas;
- implementar el cálculo de modelos mínimos posibilistas en la computadora.

Bibliografía

[1] Oscar Estrada, Jose Arrazola, Mauricio Osorio, *Possibilistic Safe Beliefs* LANMR 2010, 2010

[2] Pascal Nicolas, L. Garcia, I. Stephan, C. Lefevre *Possibilistic uncertainty handling for answer set programming* Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, Springer, 2006

[3] Didier Dubois, J. Lang, H. Prade, *Possibilistic Logic* Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Volume 3, Clarendon Press Oxford, 1994

[4] Michael Gelfond, Vladimir Lifschitz, *The Stable Model Semantics for Logic Programming* Fifth Conference on Logic Programming, MIT Press, 1988

[5] David Pearce *Stable Inference as Intuitionistic Validity* Logic Programming, 38, 1999

[6] Mauricio Osorio, Juan A. Navarro, Jose Arrazola, *Applications of Intuitionistic Logic in Answer Set Programming* Theory and Practice of Logic Programming, 2004

[7] Elliot Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic* CRC Press, Fifth Edition, 2010

[8] Ruben Velez, Jose Arrazola, Ivan Martinez *Semantics for Some Non-Classical Possibilistic Logic* Under revision for publishing, 2013.

[9] Mauricio Osorio, J.A. Navarro, Jose Arrazola *Safe Beliefs for Propositional Theories* Annals of Pure and Applied Logic, Elsevier, 2004

[10] C. Zepeda, R. Dávila, M. Osorio, editor. *Programas Lógicos Disyuntivos y la Demostrabilidad de Átomos en C_ω*. Workshop in Logic, Language and Computation 2006. CEUR Workshop Proceedings, november 2006.

[11] Oscar Estrada, José Arrazola, Mauricio Osorio *Possibilistic Intermediate Logic* International Journal of Advanced Intelligence Paradigms (IJAIP), Vol. 4, No. 2, 2012

[12] Oscar Estrada, José Arrazola, Mauricio Osorio *A Possibilistic Intuitionistic Logic* Advances en Artificial Intelligence, Springer, 2010.

[13] Guilin Qi, Jeff Z. Pan, Qui Ji *Extending Description Logics with Uncertainty Reasoning in Possibilistic Logic* K. Mellouli (Ed.): ECSQARU 2007, LNAI 4724, pp. 828-839, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[14] Dirk Van Dalen *Intuitionistic Logic* The Blackwell Guide to Philosophical Logic, Oxford, 2001.

[15] Walter A. Carnielli, Joao Marcos *A Taxonomy of C-Systems* Paraconsistency. The Logical Way to the Inconsistent, 2002.

[16] Walter A. Carnielli, Marcelo E. Coniglio, Joao Marcos *Logics of Formal Inconsistency*

[17] Matthias Baaz *Kripke Type Semantics for Da Costas's Paraconsistent Logic C_ω* Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume 27, Number 4, 1986.

[18] Dirk Van Dalen *Logic and Structure* Springer, Forth Edition, 2004.

[19] Camillo Fiorentini *Kripke Completeness for Intermediate Logics* Doctoral Thesis, Universitá degli Studi di Milano, Dipartamento di Informatica.

[20] Ulf Nilsson, Jan Małuszyński *Logic, Programming and Prolog* John Wiley & Sons, Second Edition, 1995.

[21] J. W. Lloyd *Foundation of Logic Programming* Springer-Verlag, Second edition, 1993.

[22] Kenneth A. Ross *The Well-Founded Semantics for General Logic Programs* Journal of the ACM, Vol. 38, pp. 620-650, 1991.

[23] Mauricio Osorio, José Navarro, José Arrazola, Verónica Borja *Ground non-monotonic modal logic S5: new results* Journal of Logic and Computation, Vol. 15, pp.787-813, 2005.