



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Dinámica de un átomo de tres niveles en una cavidad en
resonancia de dos fotones

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Hipólito Espinosa Sánchez

Asesorado por

Dr. Juan Mauricio Torres González

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez

Puebla Pue.
Junio de 2023

Índice general

1. Conceptos básicos	5
1.1. El campo como osciladores armónicos	5
1.2. Oscilador armónico cuántico	7
1.3. Matriz de densidad y matriz de densidad reducida	8
1.4. Dinámica en el espacio fase: Función de Husimi	9
1.5. Pureza y entrelazamiento	9
1.6. Marco de interacción	10
2. Modelo de Jaynes Cummings	11
2.1. Solución exacta	13
2.2. Aproximación a estados coherentes	15
2.3. Colapso y resurgimiento de oscilaciones de Rabi	16
3. Sistema de 3 niveles	19
3.1. Diagonalización por bloques	20
3.2. Aproximación a estados coherentes	21
3.3. Dinámica, oscilaciones de Rabi	22
4. Procesos de dos fotones (reducción a dos niveles)	25
4.1. Aproximación para el sistema propio	26
4.2. Aproximación de pequeñas rotaciones	27
4.3. Dinámica en el espacio fase	28
4.4. Entrelazamiento	32
5. Conclusiones	35
Bibliografía	37

Resumen

En este trabajo estudiamos el fenómeno de colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi en un átomo de tres niveles dentro de una cavidad óptica. Para esto utilizamos una configuración energética particular que llamamos de cascada, de esta manera pudimos estudiar dos casos. El primero de ellos es cuando el estado intermedio se encuentra exactamente a la mitad de los otros dos estados, además de que la diferencia energética entre estados consecutivos son exactamente iguales, el análisis de este caso se realizó mediante la aproximación de estados coherentes. Para el segundo caso el nivel intermedio se localiza muy cerca del estado excitado; como resultado de esto el átomo requiere la energía de dos fotones para pasar del estado base al excitado y de manera contraria se liberan dos fotones. En esta última configuración se usaron dos métodos para el análisis; la diagonalización por bloques y la aproximación de pequeñas rotaciones, encontrando resultados congruentes y equivalentes en ambos métodos. Agregando también que llevando al límite una de nuestras condiciones obtenemos resultados análogos al modelo de Jaynes Cummings sin embargo las oscilaciones de Rabi aparecen con resurgimientos perfectos. Por último estudiamos el comportamiento del entrelazamiento del átomo y la cavidad por medio su pureza.

Introducción

El estudio de la interacción luz-materia ha sido un tema relevante en la actualidad y gracias a las herramientas modernas tanto tecnológicas como teóricas nos han ayudado a investigar un poco más allá de la simple observación. Las cavidades ópticas son sistemas que nos ayudan al estudio de la interacción con la materia dentro de la perspectiva cuántica. Uno de los primeros modelos utilizados y del cual partimos en este trabajo es el modelo de Jaynes Cummings en 1963 [1] (MJC). Este nos describe de manera simple a un átomo con dos estados energéticos (base y excitado) en presencia de un campo electromagnético monocromático.

Una extensión del MJC es el modelo de tres niveles, la diferencia es considerar otro estado energético que llamaremos como intermedio; para esto existen distintas configuraciones; el modelo en V , donde hay un estado base que puede pasar a alguno de dos estados excitados que hay en esta configuración. El modelo en Λ , donde caso contrario al anterior se tiene dos estados base y pasan a un único estado excitado. Y en Ξ los estados energéticos son consecutivos; base, intermedio y excitado. Esta última configuración es la que utilizaremos en el trabajo y nos referiremos como modelo en cascada. Las otras configuraciones han sido estudiadas[2][3] sin embargo el interés de este trabajo surge al cuestionarse lo siguiente; ¿Qué sucede si la diferencia energética no es simétrica? esto refiere a que uno de los niveles, en particular el nivel intermedio, no se encuentra exactamente a la mitad de los otros dos niveles y a su vez está muy cerca de uno de los otros dos. Se sabe además que estos tipos de configuraciones tienen relevancia en el estudio del entrelazamiento cuántico que trataremos al final del trabajo.

Se estudiará el MJC, encontrando los tiempos de resurgimiento de las oscilaciones de Rabi así como la representación del sistema en el espacio fase usando una función de probabilidad llamada función de Husimi por medio de una solución exacta y por aproximación de estados coherentes. Con ello se da paso a extender lo estudiado al modelo de tres niveles (configuración en Ξ) primeramente con energías simétricas y posteriormente se da lugar a la reducción de dos niveles desplazando el nivel intermedio al excitado dando como resultado un proceso de dos fotones .

Esta tesis se divide en 4 capítulos, el capítulo 1 contiene los conceptos básicos necesarios para el desarrollo y el entendimiento del trabajo. En el capítulo 2 se concentra el estudio y la solución del MJC por medio de dos métodos (exacto y aproximado). El capítulo 3 se extienden los métodos de solución del capítulo anterior para la configuración de tres niveles (Configuración Ξ). Por último el capítulo 4 se enfoca en el proceso de dos fotones, consecuencia de la reducción del modelo de tres niveles a uno de dos, así como un pequeño análisis del entrelazamiento de la cavidad y el átomo.

El objetivo principal del trabajo es caracterizar al sistema por medio de la identificación de los tiempos de resurgimiento de las oscilaciones de Rabi y la función de Husimi para cada uno de los modelos a tratar.

Capítulo 1

Conceptos básicos

Este capítulo explica de manera general los temas importantes para el desarrollo y comprensión del trabajo, partiendo de la cuantización del campo electromagnético para entender a la radiación como cuantos de luz o fotones.

1.1. El campo como osciladores armónicos

De manera clásica, el campo electromagnético está descrito por las ecuaciones de Maxwell que pueden ser expresadas en términos de integrales o en forma de derivadas tanto en el vacío o no, para nuestro trabajo utilizaremos las siguientes ecuaciones para llegar a una relación donde el campo eléctrico como magnético \vec{E} y \vec{B} se pueden entender como un conjunto de osciladores armónicos basándonos en el desarrollo presentado en [5].

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.4)$$

Con ayuda de la propiedad $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ Utilizamos la ecuación (1.2), (1.1) y (1.3), llegamos fácilmente a la ecuación de onda como la conocemos.

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5)$$

De manera conveniente tomaremos el campo electromagnético como una onda polarizada linealmente en el eje de las x con un desplazamiento en el eje z encerrada en una cavidad de longitud L . Así podemos escribir al campo como

$$E_x = \sum_j C_j q_j(t) \sin(k_j z) \quad (1.6)$$

siendo el índice $j = 1, 2, 3, \dots$ los modos normales de oscilación de la onda, mientras que q_j corresponde a la amplitud de cada modo normal, k representa al número de onda $k_j = j\pi/L$ y C_j una constante conveniente para el desarrollo

$$C_j^2 = \left(\frac{2\nu_j^2 m_j}{V \epsilon_0} \right) \quad (1.7)$$

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS BÁSICOS
1.1. EL CAMPO COMO OSCILADORES ARMÓNICOS

Utilizando la ley de Ampere (1.1) podemos obtener la componente del campo magnético

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$B_y = -\mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial E_x}{\partial t} dz$$

$$B_y = \sum_j C_j \mu_0 \epsilon_0 \frac{\dot{q}_j(t)}{k_j} \cos(k_j z) \quad (1.9)$$

La energía del campo electromagnético se escribe como

$$H_{\text{cam}} = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 E_x^2 + \frac{B_y^2}{\mu_0}) dV \quad (1.10)$$

en la cual se pueden sustituir las expresiones encontradas anteriormente (1.6) y (1.9) en (1.10) respectivamente de después de realizar la integral se obtiene la expresión donde $p_j = m_j \dot{q}_j$.

$$H_{\text{cam}} = \frac{1}{2} \sum_j \left(m_j (\nu_j q_j)^2 + \frac{p_j^2}{m_j} \right) \quad (1.11)$$

Esta expresión que hemos construido corresponde directamente al hamiltoniano de la suma de múltiples osciladores armónicos cuánticos individuales con lo que se deduce la relación estrecha que existe. Hay que mencionar que la masa m_j se introdujo con la única intención de obviar esta relación ya que si es omitida de la expresión C_j esta no afecta más que la mera aparición en la ecuación (1.11).

1.2. Oscilador armónico cuántico

El oscilador armónico cuántico es un caso conocido y muy útil dentro de la mecánica cuántica. Este surge de la implementación del potencial de un oscilador en la ecuación de Schrödinger [4]. En este apartado sí hacemos referencia al oscilador mecánico con la propiedad de masa a diferencia del capítulo anterior.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \quad (1.12)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.13)$$

Donde k es una constante de elasticidad del oscilador. La manera más sencilla de abordar este problema es mediante los operadores de destrucción.

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega}\right) \quad (1.14)$$

Una propiedad importante es la relación de conmutación de estos operadores, además definimos lo que es el operador de número N .

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \\ N &= a^\dagger a \end{aligned} \quad (1.15)$$

De esta manera el hamiltoniano se puede escribir en términos de los operadores de la ec. (1.14) tanto como del operador de número.

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2}\right) \quad (1.16)$$

Esto es muy importante ya que el hamiltoniano es una función lineal del operador número por lo tanto podemos diagonalizar ambos operadores simultáneamente considerando los eigenestados $|n\rangle$ del operador de número, los cuales resuelven la ecuación de valores propios.

$$N |n\rangle = n |n\rangle. \quad (1.17)$$

Recordemos que el operador H nos da como resultado los valores de energía permitidos en nuestro sistema, así que aplicando la ecuación (1.16) al ket $|n\rangle$ se obtiene una expresión muy sencilla para la descripción de la energía en términos de los estados $|n\rangle$

$$H |n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega |n\rangle \implies E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \quad (1.18)$$

Los operadores también pueden ser representados de manera matricial y en nuestro caso será muy conveniente tener en cuenta cómo se escribe. Tomemos entonces al operador hamiltoniano H como al operador de destrucción a de forma matricial, ambos casos son representados en la base del conjunto de los kets $[|n\rangle]$. En el caso de a^\dagger únicamente tomamos la traspuesta de a .

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3/2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5/2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

De la sección anterior se llegó a la expresión (1.11) y ahora con lo visto hasta el momento podemos notar que con ayuda de los operadores de creación y aniquilación se puede escribir el hamiltoniano del oscilador (1.16) desde el hamiltoniano del campo, concluyendo que el oscilador armónico cuántico no es más que uno de los modos normales de oscilación del campo electromagnético.

1.3. Matriz de densidad y matriz de densidad reducida

La matriz de densidad u operador de densidad es un operador que nos provee la mayor información de un estado cuántico ya que al tener un estado $|\Psi\rangle$ donde lo único que conocemos es la probabilidad P_i de encontrarse en el estado $|\psi_i\rangle$, hacemos uso de esto definiendo ρ donde $P_i = p_i p_i^*$ [7].

$$|\Psi\rangle = \sum_i p_i |\psi_i\rangle$$

$$\rho = |\Psi\rangle \langle\Psi|$$

Entonces llamamos matriz de densidad a aquella matriz que representa al operador de densidad de nuestro sistema.

Este operador surge naturalmente en estados compuestos, por ejemplo si tenemos $|\chi_k(t)\rangle$ estados del modo y $|k\rangle$ estados de otros grados de libertad, como por ejemplo de niveles atómicos simplemente su matriz de densidad completa estaría dada de la siguiente manera. Más adelante usaremos una dimensión d con los valores de $d = 2$ y $d = 3$.

$$|\Psi_k(t)\rangle = \sum_{k=1}^d |\chi_k(t)\rangle |k\rangle \quad (1.21)$$

$$\rho = |\Psi_k(t)\rangle \langle\Psi_k(t)| \quad (1.22)$$

$$\rho = \sum_{k=1}^d |\chi_k(t)\rangle \langle\chi_k(t)| |k\rangle \langle k| \quad (1.23)$$

Sin embargo existe la matriz de densidad reducida, esta matriz se puede entender como la matriz individual de uno de los estados que compone al estado compuesto. Si queremos obtener la matriz de densidad de los estados del modo $|\chi(t)\rangle$ se toma la traza parcial sobre los otros estados, en nuestro ejemplo es sobre los grados de libertad $|k\rangle$ y como podemos notar a diferencia de la ecuación anterior (1.23) únicamente obtenemos los términos de interés. Hay que resaltar que esto es posible si los estados $|k\rangle$ son ortogonales.

$$\rho_{\text{modo}}(t) = \text{Tr}_{\text{at}} \{ |\Psi_k(t)\rangle \langle\Psi_k(t)| \} = \sum_k |\chi_k(t)\rangle \langle\chi_k(t)| \quad (1.24)$$

Podemos resaltar unas propiedades importantes y que además nos ayudaran en los siguientes apartados.

- $\text{Tr}(\rho) = 1$
- ρ es hermitico: $\rho = \rho^\dagger$
- $\rho \geq 0$

1.4. Dinámica en el espacio fase: Función de Husimi

La función de Husimi es una función de distribución que tiene la característica de ser positivo en cualquier parte del espacio fase. Esta función la llamaremos Q [7] y se define de la siguiente manera.

$$Q = \frac{1}{\pi} |\langle \beta | \psi \rangle|^2 \quad (1.25)$$

Siendo $|\beta\rangle$ un estado coherente y ψ un estado puro del sistema. Un estado coherente se define como los eigenestados del operador de aniquilación del oscilador armónico en nuestro caso sería,

$$a |\beta\rangle = \beta |\beta\rangle \quad (1.26)$$

$$|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.27)$$

Podemos escribir a la función Q en términos de la matriz de densidad ρ que vimos en la sección anterior notando que se puede generalizar para estados mixtos representados por dicha matriz.

$$Q = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \psi \rangle \langle \psi | \beta \rangle$$

$$Q = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \rho | \beta \rangle. \quad (1.28)$$

1.5. Pureza y entrelazamiento

La pureza es una característica de un estado cuántico que nos permite determinar el entrelazamiento de dos sistemas, esta se define como la traza del cuadrado del operador de densidad.

$$P(\rho) = \text{Tr}[\rho^2] \quad (1.29)$$

Es fácil notar que para un estado completamente puro, el cual sabemos que uno de los valores propios es igual a 1 mientras que el resto es 0, la pureza es igual a 1. Esto nos indica que está acotado superiormente.

$$P(\rho) = \text{Tr}[\rho^2] = 1 \quad (1.30)$$

En el caso de la cota inferior consideremos estados con la misma probabilidad, si son n número de estados cada coeficiente es $\lambda = \frac{1}{n}$, sustituyendo esto en la ecuación 1.30 para calcular la pureza obtenemos que la pureza es $1/n$, esto se conoce como un estado completamente mixto.

$$\rho_m^2 = \frac{1}{n^2} \sum_i^n |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

$$\text{Tr}(\rho_m^2) = \frac{n}{n^2}$$

$$P(\rho) = \frac{1}{n} \quad (1.31)$$

Hay que mencionar que para todo estado mixto ρ_m se cumple que la traza de ρ es mayor que la pureza. Concluyendo entonces a que dicho valor está acotado.

$$\text{Tr}[\rho_m^2] < \text{Tr}[\rho_m] \quad (1.32)$$

$$\frac{1}{n} \leq P(\rho) \leq 1 \quad (1.33)$$

Por último, este valor ayuda a conocer el entrelazamiento entre sistemas, de manera concreta se utiliza la matriz de densidad reducida. Dependiendo del valor de la pureza se dice que el estado es máximamente entrelazado cuando $P(\rho) = \frac{1}{n}$ o separable cuando $P(\rho) = 1$.

1.6. Marco de interacción

Los problemas donde el hamiltoniano no tienen una dependencia explícita del tiempo son muy comunes sin embargo existen otros casos importantes en cuántica donde el potencial tenga una dependencia temporal [4] y es ahí donde el marco de interacción aparece, este se basa en una transformación unitaria que nos ayuda a considerar exactamente la misma información pero con otras expresiones.

Hay que tomar en cuenta que el hamiltoniano que consideraremos se puede escribir de la siguiente manera

$$H = H_0 + V(t)$$

donde se pueda separar la parte temporal explícita en el potencial dejando libre a H_0 . Con esto podemos definir la siguiente transformación,

$$|\psi\rangle_I = e^{iH_0t/\hbar} |\psi\rangle \quad (1.34)$$

donde el subíndice I refiere a que es un ket en el marco de interacciones, mientras que el ket sin subíndice es nuestro sistema original.

Otro punto importante son las observables, estas se transforman de la siguiente manera,

$$O_I = e^{iH_0t} O e^{-iH_0t} \quad (1.35)$$

Capítulo 2

Modelo de Jaynes Cummings

Este modelo fue propuesto por E.T. Jaynes y F.W. Cummings en 1963 [8], en su trabajo proponen de manera idealizada la interacción luz y materia. Esto consiste en contener un átomo con dos estados o niveles de energía en una cavidad óptica interactuando con un sólo modo de oscilación del campo electromagnético. Tomando en cuenta esto último y con los resultados del apartado anterior resulta intuitivo el hamiltoniano que se debe de considerar para este sistema. Resaltemos tres puntos importantes, átomo, campo e interacción.

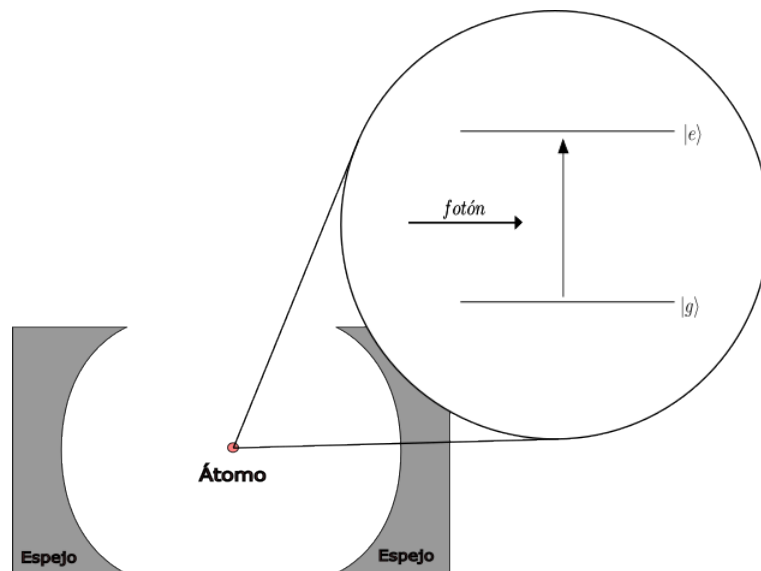


Figura 2.1: Diagrama de una cavidad óptica con el átomo de dos niveles

$$H = H_0 + H_{\text{int}} \quad (2.1)$$

$$H_0 = H_{\text{ato}} + H_{\text{cam}}$$

Ya que se está considerando dos únicos niveles de energía para el átomo, denotaremos al estado excitado (o de mayor energía) por el ket $|e\rangle$ y al estado base (o de menor energía) por $|g\rangle$. Podemos escribir entonces

$$H_{\text{ato}} = \frac{1}{2} \hbar \omega_a (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|)$$

CAPÍTULO 2. MODELO DE JAYNES CUMMINGS

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

donde ω_a es la frecuencia de transición de un nivel a otro y recordando las matrices de Pauli, se puede simplificar en dichos términos

$$\begin{aligned} \sigma_z &= (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \\ H_{\text{ato}} &= \frac{1}{2}\hbar\omega_a\sigma_z \end{aligned} \qquad (2.3)$$

En la parte del campo podemos hacer uso del resultado que vimos en el primer capítulo para escribir completamente H_0

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2}\hbar\omega_a\sigma_z + \hbar\omega(N + \frac{1}{2}) \\ H_0 &= \hbar\left(\frac{1}{2}\omega_a\sigma_z + \omega a^\dagger a\right) \end{aligned} \qquad (2.4)$$

en este último término hemos omitido una constante $\hbar\omega/2$ como un cambio en el origen de energías.

Recordemos que una partícula en presencia de un campo eléctrico se describe por el momento dipolar eléctrico, así que hacemos uso de ello para el hamiltoniano de interacción H_{int} .

$$H_{\text{int}} = \mu \cdot E \qquad (2.5)$$

En nuestro modelo estamos considerando la aproximación dipolar eléctrica, escribiendo el campo de la siguiente manera

$$E = \epsilon(a - a^\dagger)$$

además el momento dipolar lo escribimos en la base de los estados del átomo ya mencionados ($|e\rangle, |g\rangle$), definiendo como $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ y $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$.

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \mu|e\rangle\langle g| + \mu^\dagger|g\rangle\langle e| \\ &= \mu\sigma_+ + \mu^\dagger\sigma_- \\ H_{\text{int}} &= \hbar\lambda(a - a^\dagger)(\sigma_- + \sigma_+) \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Reuniendo todos los términos obtenemos una expresión completa en términos de los operadores de creación y de σ

$$H = \hbar\left(\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\omega_a\sigma_z + \lambda(a - a^\dagger)(\sigma_- + \sigma_+)\right) \qquad (2.7)$$

Ahora consideraremos la aproximación de onda rotante, que de manera muy sencilla nos ayudará a ignorar un par de términos. El término $a\sigma_-$ aniquila un fotón y a su vez desexcita el átomo Fig 2.2, de manera correspondiente el término $a^\dagger\sigma_+$ crea un fotón y excita al átomo Fig 2.3, puede entenderse mejor en la figura. Obteniendo así la expresión del hamiltoniano del modelo de Jaynes Cummings (JC)

$$H_{\text{JC}} = \hbar\left(\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\omega_a\sigma_z + \lambda(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)\right) \qquad (2.8)$$

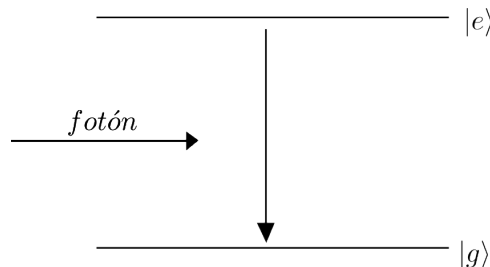


Figura 2.2: Casos cuando un fotón entra y el átomo pasa de excitado a base

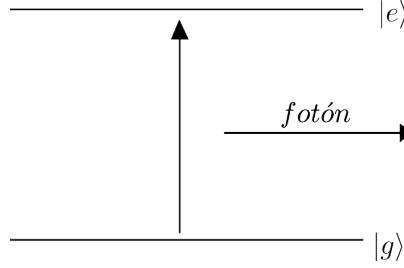


Figura 2.3: Casos cuando un fotón sale y el átomo pasa de base a excitado

2.1. Solución exacta

Hemos construido y entendido el sistema de dos niveles en una cavidad por medio de la ecuación (2.8), sin embargo este sólo es un operador por lo cual no nos dirá mas allá si no es aplicado a un vector de estado. Procedemos entonces a incluir dichos vectores así como al operador de evolución, ya que nuestro interés es hallar nuestro vector de estado para un tiempo distinto de cero. El operador de evolución está definido como la siguiente expresión [5].

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} \quad (2.9)$$

donde H es el hamiltoniano con el que se trabajará; en nuestro caso es H_{JC} . De esta manera nuestro vector de estado se expresa como

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle = e^{-iH_{JC}t/\hbar} |\psi(0)\rangle.$$

Para facilitar el cálculo vemos que puede reescribirse el hamiltoniano en dos factores (H_0 y V) de modo que cumple con las condiciones de conmutación. De esta manera podemos trabajar en el marco de interacciones.

$$\begin{aligned} H_0 &= \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \sigma_z \right) \\ V &= \hbar \left(\frac{(\omega_a - \omega)}{2} \sigma_z + \lambda(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) \right) \\ [H_0, V] &= 0 \Rightarrow V = V_I \end{aligned} \quad (2.10)$$

En la nueva expresión para V se ha incluido una diferencia de frecuencias esta la definimos como δ , no hay que olvidar que ω_a es la frecuencia de transición del átomo mientras que ω refiere a la frecuencia del campo

$$\delta = \omega_a - \omega. \quad (2.11)$$

De esta manera el operador de evolución queda en término del potencial V en el vector de estado con el que trabajaremos y por simplicidad omitiremos el subíndice I

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iVt/\hbar} |\psi(0)\rangle \quad (2.12)$$

El estado $|\psi(0)\rangle$ es nuestro estado inicial, nuestro sistema al tiempo cero, en este término debemos considerar un estado donde se contenga la información del átomo $|\xi\rangle$ como del campo $|\alpha\rangle$. En este trabajo consideraremos estados arbitrarios para el átomo y a la cavidad un estado coherente (1.27).

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= C_e |e\rangle + C_g |g\rangle \\ |\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= \sum_n P_n |n\rangle. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 2. MODELO DE JAYNES CUMMINGS
2.1. SOLUCIÓN EXACTA

Usaremos la notación combinada de coeficientes $C_{e,n-1} = C_e P_{n-1}$ y $C_{g,n} = C_g P_n$. Para los vectores de estados usamos una base donde un solo ket representa los estados combinados del átomo y del campo, es decir

$$\{|g, 0\rangle\} \cup \{|e, n-1\rangle, |g, n\rangle\}_{n=1}^{\infty} \quad (2.13)$$

de esta manera el estado inicial toma la forma

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{e,n-1} |e, n-1\rangle + C_{g,n} |g, n\rangle). \quad (2.14)$$

Cabe recalcar que estas constantes son valores arbitrarios de nuestro sistema al tiempo $t=0$. Para encontrar el estado dependiente del tiempo se sustituye la ecuación (2.14) en (2.12) y obtenemos

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iVt/\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} (C_{e,n-1} |e, n-1\rangle + C_{g,n} |g, n\rangle)$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (D_{e,n-1}(t) |e, n-1\rangle + D_{g,n}(t) |g, n\rangle) \quad (2.15)$$

Para determinar los coeficientes D , es conveniente resolver la ecuación de eigenvalores donde $|\phi\rangle$ es el eigenvector de V .

$$V |\phi\rangle = \omega_n |\phi\rangle \quad (2.16)$$

Para resolver esta ecuación donde ω_n son los eigenvalores de V encontramos la representación matricial usando la base mencionada anteriormente. V es diagonal por bloques, con bloques dados por

$$V^{(n)} = \hbar \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2} & \lambda\sqrt{n} \\ \lambda\sqrt{n} & -\frac{\delta}{2} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Los eigenvalores para cada bloque quedan como

$$\omega_n^{\pm} = \pm \frac{\sqrt{\delta^2 + 4\lambda^2 n}}{2}. \quad (2.18)$$

Podemos definir a $\Omega_n^2 = \delta^2 + 4\lambda^2 n$. A partir de este punto consideraremos un caso especial, cuando la frecuencia del campo está en resonancia con la frecuencia del átomo, es decir cuando las frecuencias son iguales $\omega_a = \omega$, esto nos lleva a que $\delta = 0$ simplificando algunas ecuaciones, en particular para las eigenfrecuencias

$$\omega_n^{\pm} = \pm\lambda\sqrt{n}. \quad (2.19)$$

Determinando los eigenvectores observamos que para conveniencia nuestra tomamos vectores normalizados además de que todo queda en términos de la base para el átomo. En estos eigenvectores podemos agregar los vectores del estado del campo $|n\rangle$ de nuestro sistema, quedando así en términos de la base que hemos estado utilizando.

$$|\phi_n^{\pm}\rangle = \frac{|e, n-1\rangle \pm |g, n\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.20)$$

Ahora escribimos nuestro estado inicial ecuación (2.14) en términos de nuestros eigenvectores y simplificando el resultado llegamos a este resultado.

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{e,n-1} + C_{g,n}}{\sqrt{2}} |\phi_n^+\rangle + \frac{C_{e,n-1} - C_{g,n}}{\sqrt{2}} |\phi_n^-\rangle \right) \quad (2.21)$$

CAPÍTULO 2. MODELO DE JAYNES CUMMINGS
2.2. APROXIMACIÓN A ESTADOS COHERENTES

De esta expresión aplicamos el operador de evolución temporal obteniendo nuevamente $|\psi\rangle$ pero con la diferencia de que se observan claramente los coeficientes que nos interesaban encontrar $D_{e,n-1}$ y $D_{g,n}$ llegamos a la solución.

$$|\psi(t)\rangle = (C_{e,n-1} \cos \lambda\sqrt{nt}/\hbar - iC_{g,n} \sin \lambda\sqrt{nt}/\hbar) |e, n-1\rangle + (-iC_{e,n-1} \sin \lambda\sqrt{nt}/\hbar + C_{g,n} \cos \lambda\sqrt{nt}/\hbar) |g, n\rangle \quad (2.22)$$

Donde

$$D_{e,n-1} = \langle e, n-1 | \psi(t) \rangle = C_{e,n-1} \cos \lambda\sqrt{nt}/\hbar - iC_{g,n} \sin \lambda\sqrt{nt}/\hbar \quad (2.23)$$

$$D_{g,n} = \langle g, n | \psi(t) \rangle = -iC_{e,n-1} \sin \lambda\sqrt{nt}/\hbar + C_{g,n} \cos \lambda\sqrt{nt}/\hbar \quad (2.24)$$

Con estos coeficientes queda resuelta la ecuación (2.15).

2.2. Aproximación a estados coherentes

Este método consiste en poder expresar el ket $|\psi(t)\rangle$ en términos de estados coherentes, para ello partimos de la expresión (2.21) donde vemos el estado inicial al que se le aplicó el operador de evolución temporal. Como ya mencionamos la intención de este procedimiento es hallar una expresión donde se visualice tanto el estado del campo (estado coherente) como del átomo de manera individual. Entonces reescribimos $|\psi(t)\rangle$ en términos de los eigenestados del hamiltoniano introducidos en la ecuación (2.20).

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-i\omega_n t} \frac{C_{e,n-1} + C_{g,n}}{\sqrt{2}} |\phi_n^+\rangle + e^{i\omega_n t} \frac{C_{e,n-1} - C_{g,n}}{\sqrt{2}} |\phi_n^-\rangle \right). \quad (2.25)$$

Esto se hace aplicando el operador de evolución a los eigenvectores hallados en la sección anterior (2.20)

$$e^{-iVt} |\phi_n^\pm\rangle = e^{\mp i\omega_n t} |\phi_n^\pm\rangle \quad (2.26)$$

Regresando a la base atómica y del campo se obtiene

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{l=\pm 1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{e,n-1} + lC_{g,n}}{\sqrt{2}} e^{-il\omega_n t} \frac{|e, n-1\rangle + l|g, n\rangle}{\sqrt{2}} \right). \quad (2.27)$$

lo siguiente es factorizar los estados del campo pero para esto hay un pequeño inconveniente pues dichos estados en cada término son distintos, uno comienza en 0 y otro en 1 por lo que sumaremos un cero al término desfasado para que ambos términos coincidan.

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{l=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{C_{e,n} + lC_{g,n+1}}{2} e^{-il\omega_{n+1}t} |e\rangle + l \frac{C_{e,n-1} + lC_{g,n}}{2} e^{-il\omega_n t} |g\rangle \right) |n\rangle \quad (2.28)$$

Para continuar consideraremos dos aproximaciones, la primera es que si un estado $|\alpha\rangle$ tiene un número promedio de fotones \bar{n} grande y además α es real, los coeficientes cumplen con

$$P_{n-1} \approx P_n \approx P_{n+1}. \quad (2.29)$$

La segunda aproximación que realizamos es una expansión en serie de Taylor alrededor del número promedio de fotones (\bar{n}), pero para las frecuencias ω_n teniendo una diferencia de fases

$$\omega_n = \omega_{\bar{n}} + \omega'_{\bar{n}}(n - \bar{n}) \quad (2.30)$$

$$\omega_n = \phi_{\bar{n}} + \omega'_{\bar{n}}n \quad (2.31)$$

CAPÍTULO 2. MODELO DE JAYNES CUMMINGS
2.3. COLAPSO Y RESURGIMIENTO DE OSCILACIONES DE RABI

donde $\phi_{\bar{n}} = \omega_{\bar{n}} + \omega'_{\bar{n}}(\bar{n})$. Si sustituimos n por el siguiente valor $n + 1$

$$\begin{aligned}\omega_{n+1} &= \omega_{\bar{n}} + \omega'_{\bar{n}}(n + 1 - \bar{n}) \\ \omega_{n+1} &= \omega_{\bar{n}} + \omega'_{\bar{n}}(n - \bar{n}) + \omega'_{\bar{n}} \\ \implies \omega_{n+1} &= \omega_n + \omega'_{\bar{n}}.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Aplicando dichas consideraciones podemos factorizar completamente el estado del campo de la siguiente manera

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{l=\pm 1} \left(\frac{C_e + lC_g}{2} (|e\rangle e^{-il\omega'_n t} + l|g\rangle) \right) e^{-il\phi_{\bar{n}} t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(P_n e^{-il\omega'_n n t} |n\rangle \right).\tag{2.33}$$

Sin embargo podemos simplificar aún más redefiniendo los coeficientes C_e, C_g en una sola expresión que llamaremos como D_l y de igual manera los kets de estados atómicos los agrupamos en un nuevo vector $|\xi_l\rangle$. Además recordando cómo está dado un estado coherente ec. (1.27) podemos ver que el último término se puede entender de dicha manera.

$$\begin{aligned}D_l &= \frac{C_e + lC_g}{2} e^{-il\phi_{\bar{n}} t} & |\xi_l\rangle &= |e\rangle e^{-il\omega'_n t} + l|g\rangle \\ |\psi(t)\rangle &= \sum_{l=\pm 1} D_l |\xi_l(t)\rangle |e^{-il\omega'_n t} \alpha\rangle\end{aligned}\tag{2.34}$$

Lo que se encuentra con este resultado es que la parte del campo a pesar de estar evolucionando, se tiende a comportar como un nuevo estado coherente. Esto se nota en el ultimo ket de la ultima ecuación (2.34).

2.3. Colapso y resurgimiento de oscilaciones de Rabi

En la solución que encontramos podemos observar que son funciones oscilatorias, esto nos puede dar una idea de lo que sucede, sin embargo hay aún más información que podemos obtener. Las expresiones $|D_{e,n-1}|^2$ y $|D_{g,n}|^2$ representan las probabilidades de tener n numero de fotones al tiempo t y también de que el átomo esté en el estado base o en el estado excitado respectivamente.

Observemos con atención al operador σ_z , que nos brinda información sobre el comportamiento de nuestro átomo. Su valor esperado es la función llamada inversión de población que denotaremos como $W(t)$, la cual representa la diferencia de probabilidades atómicas, es decir

$$W(t) = \langle \sigma_z \rangle\tag{2.35}$$

$$\langle \sigma_z \rangle = \text{Tr}(\sigma_z \rho)\tag{2.36}$$

$$= \sum_n |D_{e,n-1}|^2 - |D_{g,n}|^2.\tag{2.37}$$

Utilizamos un programa en Octave para graficar esta función, tomando el hamiltoniano de JC donde únicamente cuenta con el término del potencial, ecuación (2.10) con el valor de $\alpha = 5$ para nuestro estado coherente y comenzando únicamente en el estado base para nuestro átomo, es decir $|\xi\rangle = |g\rangle$.

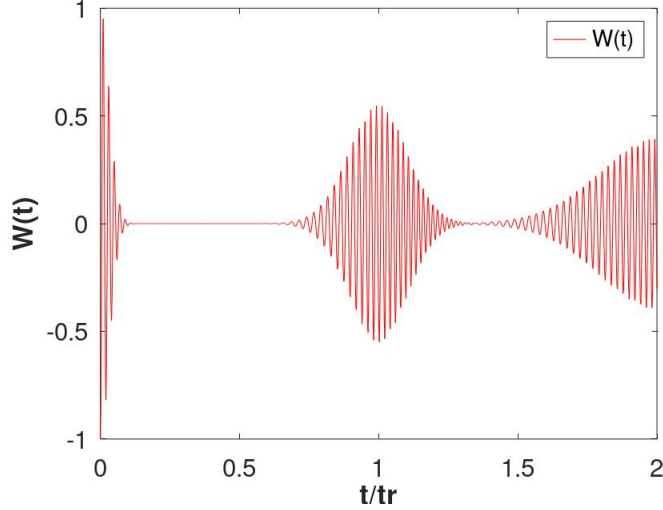


Figura 2.4: Inversión de población de $W(t) = \langle \sigma \rangle$ para un estado inicial del átomo en el estado base y un estado coherente con $\alpha = 5$ y con los parámetros de $\lambda = 0,1$, $n = 60$

En la figura 2.4 podemos observar las conocidas oscilaciones de Rabi las cuales colapsan y vuelven a resurgir. En ella se visualizan los puntos de interés para este trabajo los cuales son en el tiempo en el que las oscilaciones vuelven a aparecer alcanzando un máximo. A este valor lo llamaremos *tiempo de resurgimiento* t_r .

Estos resurgimientos van a ocurrir en el momento que las fases de oscilación de términos cercanos difieran por múltiplos de π . Estas fases corresponden a las frecuencias que ya conocemos, son las eigenfrecuencias ω_n , que aparecen en la ecuación (2.33) en el término del estado coherente.

Vemos entonces que los puntos de interés son en los periodos múltiplos de π , de manera general se tiene

$$\omega'_n t_r = \pi \quad (2.38)$$

de lo cual se obtienen los tiempos de resurgimiento

$$t_r = \frac{\pi \sqrt{\delta^2 + 4\lambda^2 \bar{n}}}{\lambda^2}. \quad (2.39)$$

En nuestro caso estamos considerando que hay resonancia en nuestras frecuencias ($\delta = 0$) por lo que en nuestro trabajo el tiempo de resurgimiento es explícitamente

$$t_r = \frac{2\pi\sqrt{\bar{n}}}{\lambda} \quad (2.40)$$

En la figura 2.4 hemos graficado la inversión de población con respecto al tiempo normalizado para t_r .

Ahora haremos uso de la función de Husimi, para ello usamos la ecuación (1.28) que como mencionamos funciona de igual manera para estados mixtos si tomamos la matriz de densidad correspondiente. En el espacio fase tomamos los tiempos de resurgimiento de $t = t_r$ y de $t = t_r/2$

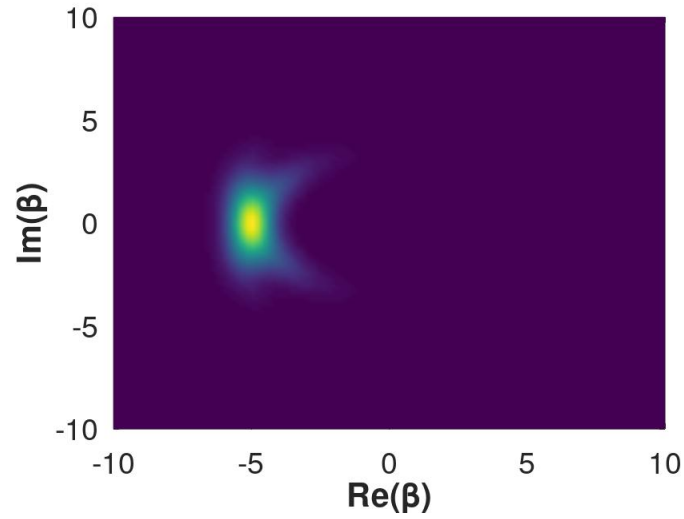


Figura 2.5: Función de Husimi con $|\psi(t)\rangle$ al tiempo $t = t_r$ y se consideró una referencia $\alpha = 5$

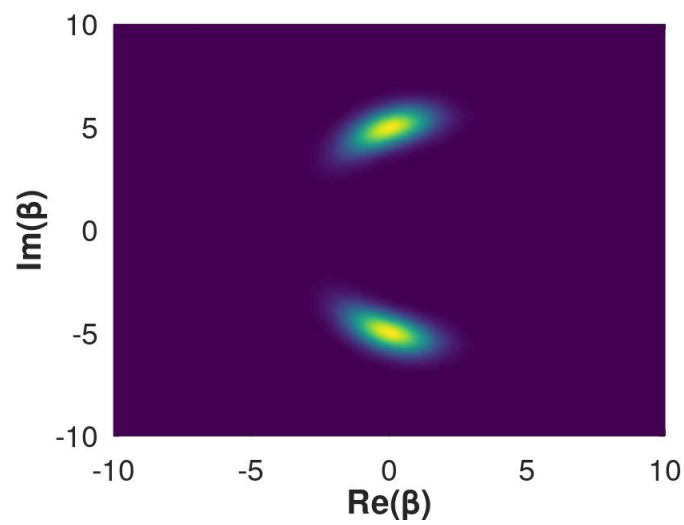


Figura 2.6: Función de Husimi con $|\psi(t)\rangle$ al tiempo $t = t_r/2$ y se consideró una referencia $\alpha = 5$

Capítulo 3

Sistema de 3 niveles

En este capítulo nos centraremos en un sistema similar al modelo de JC, con la diferencia de que ahora consideraremos un nivel extra de energía. Ahora tenemos 3 niveles en una configuración de cascada o escalera. Estos niveles los representaremos por los mismos kets $|g\rangle$ como estado de mínima energía o base y $|e\rangle$ como el estado con mayor energía, pero en esta ocasión necesitamos un ket más para representar el estado intermedio, por lo que ahora incluimos al ket $|i\rangle$. Una particularidad que por el momento consideraremos en este modelo es que la diferencia entre niveles consecutivos es exactamente la de un fotón, por lo que la energía entre el estado g y e es la de dos fotones.

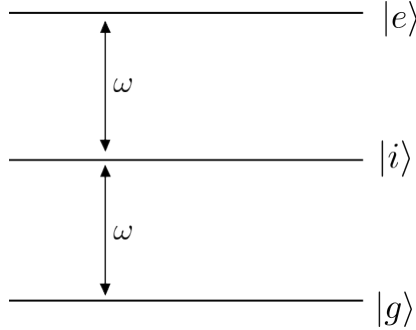


Figura 3.1: Diagrama del sistema de 3 niveles en configuración de cascada

Nuevamente para la construcción del hamiltoniano de nuestro modelo es similar al MJC salvo el término de interacción o potencial ya que se agregarán los términos del nivel intermedio. Hay que recordar ahora que en este problema los kets son de dimensión 3, es decir

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Tomaremos nuevamente el hamiltoniano como la suma de dos términos, esto para trabajar en el marco de interacciones.

$$H = H_0 + V \quad (3.2)$$

$$H_0 = \hbar\omega(a^\dagger a + |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \quad (3.3)$$

$$V = \hbar g(a(|i\rangle\langle g| + |e\rangle\langle i|) + a^\dagger(|g\rangle\langle i| + |i\rangle\langle e|)) \quad (3.4)$$

El potencial está construido de la siguiente manera, análogamente al modelo de JC en la parte de la interacción vimos que los elementos que aportaban a la ecuación eran los operadores que

CAPÍTULO 3. SISTEMA DE 3 NIVELES
3.1. DIAGONALIZACIÓN POR BLOQUES

correspondían con la creación del fotón con la excitación del átomo. Así que partiendo de la misma manera se propone dicha expresión, necesitamos al operador de destrucción a con el operador que desexcita al átomo de un nivel superior al inferior y el operador a^\dagger con los operadores que excitan al átomo, obteniendo así nuestro potencial V .

Además de esto, otra condición en nuestro sistema es la resonancia de 2 fotones esto es que la diferencia de energías entre el nivel excitado y el del estado base es igual al de dos fotones $E_e - E_g = 2\hbar\omega$. Verificamos que nuestra propuesta cumple con las condiciones de conmutación por lo que de aquí en adelante trabajaremos con la parte del potencial V .

$$[H_0, V] = 0 \quad (3.5)$$

3.1. Diagonalización por bloques

Utilizamos el método de diagonalización por bloques para nuestro potencial y usando una base similar al capítulo anterior para este sistema consideraremos en un mismo ket el estado del campo como del átomo $\{|e, n-1\rangle, |i, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$, en esta base el potencial V es diagonal por bloques dados por

$$V^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & g\sqrt{n} & 0 \\ g\sqrt{n} & 0 & g\sqrt{n+1} \\ 0 & g\sqrt{n+1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

De igual manera al capítulo anterior lo que haremos es resolver la ecuación de valores propios, ecuación (2.16), pero para esta matriz, usamos la misma notación para los eigenvalores y eigenvectores encontramos que sus expresiones son las siguientes

$$\omega_{n,l} = lg\sqrt{2n+1}$$

$$|\phi^\pm\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ \pm\sqrt{\frac{2n+1}{n+1}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\phi^0\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde l sólo es un subíndice para cada una de las frecuencias, $l \in \{-1, 0, 1\}$. Sin embargo lo que haremos es resolver por medio de aproximaciones. Trabajaremos con valores muy grandes para n , $n \gg 1$ así simplificando las expresiones para los eigenvectores obtenemos vectores más sencillos de manejar y además los normalizamos

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\phi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Como ya vimos la aproximación de estados coherentes es un método bastante útil para obtener los tiempos de resurgimiento, que de hecho siguiendo la intuición podemos deducirlo directamente derivando el valor de la eigenfrecuencia como en el caso anterior, sin embargo no se visualiza ni se justifica hasta tener dicho término del estado coherente.

3.2. Aproximación a estados coherentes

Comenzamos tomando los eigenvectores y agregando los vectores de estado del átomo combinando los kets de las ecuaciones (3.7) y (3.1)

$$|\phi_n^\pm\rangle = \frac{1}{2}|n-1, e\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|n, i\rangle + \frac{1}{2}|n+1, g\rangle \quad (3.8)$$

$$|\phi_n^0\rangle = \frac{|n-1, e\rangle + |n+1, g\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.9)$$

Para nuestro estado inicial usamos de igual manera la notación combinada de coeficientes para el átomo y el campo así como la base que elegimos para este sistema tenemos lo siguiente

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{g,n-1}|g, n-1\rangle + C_{i,n}|i, n\rangle + C_{e,n+1}|e, n+1\rangle). \quad (3.10)$$

Aplicando el operador de evolución temporal y reescribiendo en término de los eigenvectores obtenemos la nueva expresión de manera desarrollada

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} & \left(\frac{C_{e,n+1} + C_{g,n-1}}{2} + \frac{C_{i,n}}{\sqrt{2}} \right) e^{i\omega_n t} |\phi^- \rangle \\ & + \left(\frac{C_{e,n+1} + C_{g,n-1}}{2} - \frac{C_{i,n}}{\sqrt{2}} \right) e^{-i\omega_n t} |\phi^+ \rangle \\ & + \left(\frac{C_{e,n+1} + C_{g,n-1}}{2} \right) e^{-i\omega_{0,n} t} |\phi^0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Lo siguiente es reescribir y simplificar la expresión en términos de nuestra base a manera de poder factorizar en unos nuevos estados coherentes. Abusando un poco de la notación obtenemos un resultado similar al de la ecuación 2.33

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{l=-1}^1 \left(D_l e^{-il\omega'_n t} (|e\rangle + |g\rangle) + F_l |i\rangle \right) e^{-i\varphi_n t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(P_n e^{-il\omega'_n n t} |n\rangle \right) \quad (3.12)$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{l=-1}^1 \left(D_l e^{-il\omega'_n t} (|e\rangle + |g\rangle) + F_l |i\rangle \right) e^{-i\varphi_n t} |e^{-il\omega'_n t} \alpha\rangle \quad (3.13)$$

donde los valores para D_l y F_l las definimos como

$$D_l = \frac{1}{2^{|l|}} \left(\frac{C_e + C_g}{2} + l \frac{C_i}{\sqrt{2}} \right), \quad F_l = l\sqrt{2}D_l \quad (3.14)$$

Cabe recalcar que el procedimiento para las expresiones ω'_n y φ_n es el mismo al capítulo anterior donde se hizo una expansión en serie de Taylor alrededor de \bar{n} llegando a la forma $\omega_n = \varphi_{\bar{n}} + \omega'_n n$ las eigenfrecuencias son completamente distintas al de esta sección. Con estos resultados vemos que podemos hacer la misma consideración para los tiempos de resurgimiento de nuestro modelo de 3 niveles.

3.3. Dinámica, oscilaciones de Rabi

En el capítulo anterior encontramos la inversión de población y que se expresa como una diferencia de probabilidades de estar en un estado excitado $|e\rangle$ o base $|g\rangle$. Sin embargo en este modelo podemos tener una diferencia de probabilidades entre el estado excitado e intermedio y de igual manera con el estado base por lo que tomaremos ambos casos, análogo al capítulo anterior usaremos σ_z como la probabilidad de estar en el estado excitado menos la probabilidad de estar en el estado base.

$$W(t) = \langle \sigma_z \rangle$$

De igual manera podemos graficar la probabilidad de que el átomo esté en alguno de sus estados por ejemplo el excitado:

$$p_e = \langle \psi(t) | e \rangle \langle e | \psi(t) \rangle \quad (3.15)$$

Para calcular los tiempos de resurgimiento lo despejamos de considerar los periodos múltiplos de π y la frecuencia ω'_n

$$\omega'_n t = \pi \quad (3.16)$$

$$\omega'_n = \frac{d}{dn} (g\sqrt{2n+1})$$

$$t_r = \frac{\pi\sqrt{2n+1}}{g}. \quad (3.17)$$

Nuevamente con el programa de Octave se hizo la gráfica siguiente, el hamiltoniano que se utilizó fue únicamente con el potencial es decir la ecuación (3.4) y los parámetros son: $n = 60$ $\alpha = 5$ y una $g = 0,1$.

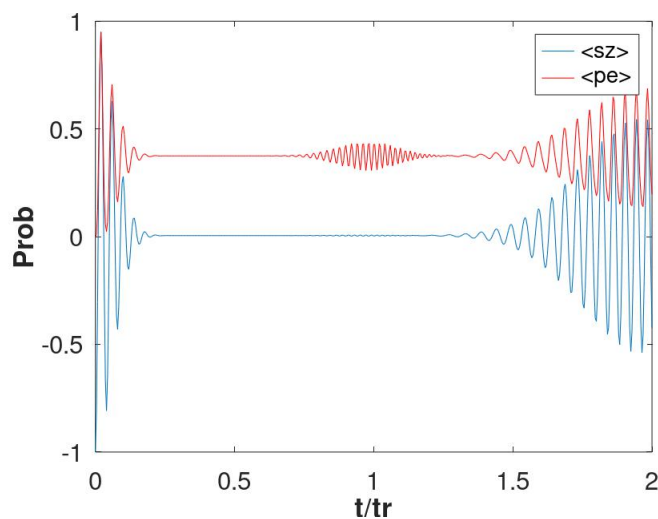


Figura 3.2: Colapso y resurgimientos de las oscilaciones de Rabi para el sistema de tres niveles con $n = 60$ $\alpha = 5$ y una $g = 0,1$

En la gráfica 3.2 podemos ver que hay otro resurgimiento mucho más pequeño y que corresponde al del promedio del estado excitado. En el modelo de JC vimos que se formaban dos objetos a la mitad del tiempo de resurgimiento ($t = t_r/2$), esto sucedía cuando las probabilidades de que el átomo se encontrara en el estado excitado como en el base eran las mismas. En este caso se vuelven a observar dos objetos pero con la diferencia de que existe uno más, esto tiene sentido al observar la gráfica de la Fig 3.2 pues existe una parte que es un resurgimiento y un colapso en el mismo tiempo.

Al igual que en el capítulo anterior graficamos la función de Husimi para los tiempos de resurgimiento a la mitad de dicho tiempo.

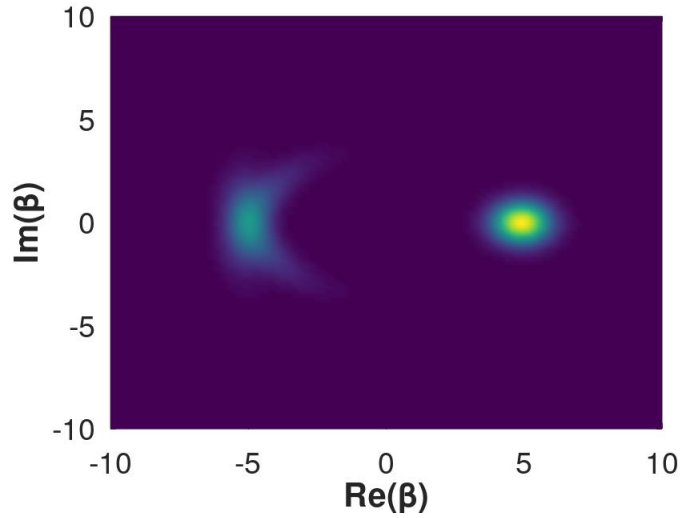


Figura 3.3: Función de Husimi para $|\psi(t)\rangle$ con $\alpha = 5$ al tiempo $t = t_r$

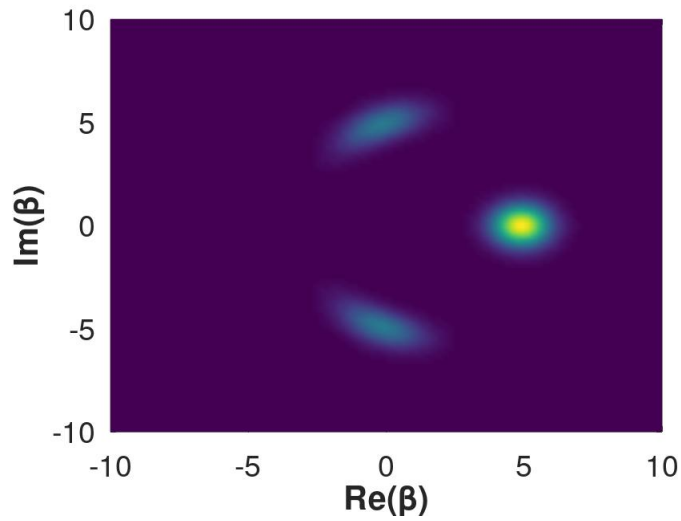


Figura 3.4: Función de Husimi para $|\psi(t)\rangle$ con $\alpha = 5$ al tiempo $t = t_r/2$

Con el modelo anterior podemos decir que al momento de un colapso se forma un objeto, mientras que en las oscilaciones se divide este objeto. En este caso que estamos tratando, observamos ambos fenómenos al mismo tiempo con un comportamiento similar y esto se debe a que existe tanto el colapso como el resurgimiento en el mismo momento.

Capítulo 4

Procesos de dos fotones (reducción a dos niveles)

En el capítulo anterior analizamos el caso de 3 niveles en el cual se introdujo un nivel intermedio. Para esta sección nuevamente consideraremos dicho modelo sin embargo ahora el interés cae en ver qué es lo que sucede cuando el nivel intermedio se encuentra muy cerca de alguno de los otros dos, en concreto lo consideraremos cerca del nivel excitado. Cabe mencionar que la distancia entre $|e\rangle$ y $|g\rangle$ continua siendo $2\hbar\omega$, lo cual, como mencionamos anteriormente, se conoce como resonancia de dos fotones.

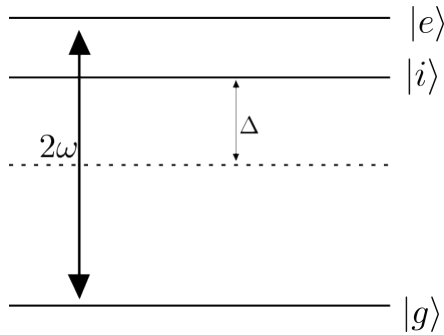


Figura 4.1: Diagrama del modelo de 3 niveles con el nivel intermedio desplazado en Δ con respecto a su posición en el modelo anterior

El hamiltoniano a usar es el mismo que en el caso de 3 niveles (3.3) y (3.4) salvo un pequeño término extra que representa la diferencia energética del nivel intermedio respecto a su posición anterior.

$$H = H_0 + \hbar\Delta |i\rangle \langle i| + V \quad (4.1)$$

$$H_1 = V + \hbar\Delta |i\rangle \langle i| \quad (4.2)$$

Representaremos este hamiltoniano de forma matricial diagonalizándolo con nuestra base que hemos usado hasta el momento. Comprobamos que este término extra no hace cambiar a las condiciones de conmutación, por lo que podemos trabajar con lo que hemos llamado H_1 . El término extra que aparece en el hamiltoniano ($\hbar\Delta |i\rangle \langle i|$) también lo encontramos en una de las entradas de la matriz que es la única diferencia notable hasta el momento comparada con la matriz del modelo

CAPÍTULO 4. PROCESOS DE DOS FOTONES (REDUCCIÓN A DOS NIVELES)
4.1. APROXIMACIÓN PARA EL SISTEMA PROPIO

anterior (3.6).

$$H_1^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & g\sqrt{n} & 0 \\ g\sqrt{n} & \Delta & g\sqrt{n+1} \\ 0 & g\sqrt{n+1} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Calculamos los eigenvalores y eigenvectores correspondientes de nuestra matriz que de manera explicita y exacta son los siguientes.

$$|\phi^0\rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{n+1}{n}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\phi^-\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ -\frac{-\Delta + \sqrt{4g^2(2n+1) + \Delta^2}}{2g\sqrt{n+1}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\phi^+\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ -\frac{-\Delta - \sqrt{4g^2(2n+1) + \Delta^2}}{2g\sqrt{n+1}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_0 = 0 \quad \omega_- = \frac{1}{2} \left(\Delta - \sqrt{4g^2(2n+1) + \Delta^2} \right) \quad \omega_+ = \frac{1}{2} \left(\Delta + \sqrt{4g^2(2n+1) + \Delta^2} \right) \quad (4.4)$$

A partir de este punto mostramos dos métodos distintos para llegar a nuestro objetivo, obtener los tiempos de resurgimiento, ambos son por aproximaciones.

4.1. Aproximación para el sistema propio

En este método nos basamos en el trabajo realizado por Haroche [6] donde se toman las siguientes consideraciones:

- $n \gg 1$
- $2g\sqrt{2n+1} \ll \Delta$

recordemos que los valores de n al ser parte del estado coherente del campo estos tienen a infinito. Para casos prácticos lo consideramos como un número muy grande. Como consecuencia de esas aproximaciones podemos reducir y simplificar el sistema propio, es decir los eigenvalores y eigenvectores.

$$|\phi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\phi^+\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\omega_0 = 0 \quad \omega_- = \Delta - \frac{g^2(2n+1)}{\Delta} \quad \omega_+ = \Delta + \frac{g^2(2n+1)}{\Delta} \quad (4.6)$$

en estos últimos valores se hizo además una expansión en serie de potencias de la forma

$$\sqrt{1+\epsilon} = 1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{4} + \dots$$

donde

$$1 \gg \epsilon = \frac{4g^2(2n+1)}{\Delta^2}.$$

Ahora usaremos el hecho de que un operador de dimensión d , de manera general se puede escribir en términos de sus eigenvectores y eigenvalores de la siguiente forma

$$H = \sum_j^d \omega_j |\phi^j\rangle \langle \phi^j| \quad (4.7)$$

Explícitamente para nuestro cálculo usamos los valores aproximados de nuestro sistema dando como resultado la nueva matriz aproximada $H_1^{(n)} \approx H_{\text{prox}}^{(n)}$

$$H_{\text{prox}}^{(n)} = \begin{pmatrix} -\frac{g^2}{\Delta}(n + \frac{1}{2}) & 0 & -\frac{g^2}{\Delta}(n + \frac{1}{2}) \\ 0 & \Delta - \frac{g^2}{\Delta}(n + \frac{1}{2}) & 0 \\ -\frac{g^2}{\Delta}(n + \frac{1}{2}) & 0 & -\frac{g^2}{\Delta}(n + \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Numéricamente nuestra aproximación funciona muy bien, esto debido al régimen en el que estamos trabajando. Por último recordemos nuestro modelo y lo que implican nuestras aproximaciones; esto significa que Δ al ser muy grande, el nivel intermedio se acerca al nivel excitado, por lo que prácticamente este nivel no está contribuyendo al proceso. Esto nos lleva a despreciar el eigenvector correspondiente al estado intermedio $|\phi^+\rangle$. Nuestra matriz aproximada del sistema propio puede escribirse entonces como una matriz de 2×2 convirtiendo la ecuación (4.8) en

$$H_{\text{prox}}^{(n)} = -\frac{g^2}{\Delta} \left(n + \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

4.2. Aproximación de pequeñas rotaciones

Continuando con el siguiente método, la aproximación que usaremos es la de pequeñas rotaciones, usando al expansión de Baker-Cambell-Hausdorff [12].

$$e^G H e^{-G} = H + [G, H] + \frac{1}{2!}[G, [G, H]] + \frac{1}{3!}[G[G[G, H]]] + \dots \quad (4.10)$$

La justificación o la interpretación que se le puede dar a este procedimiento es que un ket es muy similar al ser rotado por una fase muy pequeña. Esto lo podemos expresar como $|\gamma\rangle$ el vector original y $|\gamma'\rangle$ como el ket *rotado* donde A es un operador, llamémosle de transformación, y θ es muy pequeño.

$$|\gamma'\rangle = e^{-iA\theta} |\gamma\rangle \quad (4.11)$$

Para medir un operador H en el sistema primado o rotado es necesario que este se encuentre descrito en este espacio es decir necesitamos conocer H' , sin embargo lo podemos encontrar directamente substituyendo la definición de nuestra rotación.

$$\begin{aligned} \langle \gamma' | H | \gamma' \rangle &= \langle \gamma | e^{iA\theta} H e^{-iA\theta} | \gamma \rangle \\ &= \langle \gamma | H' | \gamma \rangle \end{aligned}$$

obteniendo así nuestro operado H' donde tomamos $iA\theta = G$

$$H' = e^G H e^{-G} \quad (4.12)$$

Con esto podemos utilizar el hamiltoniano primado o aproximado, al cual llamaremos como hamiltoniano efectivo H_{eff}

El problema ahora es conocer un operador G que nos ayude a encontrar el hamiltoniano efectivo, sin embargo conocemos el trabajo de Klimov [11] donde usa la siguiente expresión.

$$G = \frac{g}{\Delta} [a(|i\rangle\langle g| - |e\rangle\langle i|) - a^\dagger(|g\rangle\langle i| - |i\rangle\langle e|)]. \quad (4.13)$$

Substituyendo este valor que considera Klimov en la ecuación (4.10) obtenemos una expresión donde aparecen todos los términos, sin embargo como hemos considerado en la sección anterior podemos despreciar los elementos de $|i\rangle\langle i|$ sin ningún problema. También lo representamos en su forma matricial

$$H_{\text{eff}} = H_0 - \frac{g^2}{\Delta}(a^\dagger a + |e\rangle\langle e|) - \frac{g^2}{\Delta}(a^2 |e\rangle\langle g| + a^{\dagger 2} |g\rangle\langle e|) \quad (4.14)$$

$$H_{\text{eff}}^{(n)} = \begin{pmatrix} -\frac{g^2}{\Delta}n & 0 & -\frac{g^2}{\Delta}\sqrt{n(n+1)} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{g^2}{\Delta}\sqrt{n(n+1)} & 0 & -\frac{g^2}{\Delta}(n+1) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Por último haremos una pequeña pero importante consideración, esto es que al tener valores muy grandes para n podemos aproximar $n - \frac{1}{2} \approx n \approx n + \frac{1}{2}$, además podemos representar nuestra matriz en una de 2×2 ya que hemos despreciado la contribución de la componente $|i\rangle \langle i|$ esto nos lleva a obtener el mismo resultado de la ecuación (4.9), es decir

$$H_{\text{eff}}^{(n)} = -\frac{g^2}{\Delta} \left(n + \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

4.3. Dinámica en el espacio fase

Hemos encontrado de manera analítica que trabajar con el hamiltoniano aproximado es una buena alternativa al modelo original por lo que usaremos la ecuación (4.14) para el análisis de este modelo.

Hasta el momento sólo conocemos una parte en la solución del problema, recordemos que nuestro punto de interés es hallar el tiempo de resurgimiento. Tomemos como referencia el cálculo de la aproximación de estados coherentes para el modelo de tres niveles, en dicho resultado vimos que el primer tiempo de resurgimiento se encuentra en un periodo de π al igual que en el capítulo de JC, veamos si esto es válido para este modelo. Cabe destacar que la transición de dos fotones ocurre cuando $\Delta \gg g$ y es el caso general de nuestro sistema puesto que en el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$ volvemos al caso estudiado en el capítulo de 3 niveles. Tomando entonces los eigenvalores ω_{\pm} para encontrar los tiempos de resurgimiento obtenemos lo siguiente.

$$t_r = \frac{\pi}{\omega'_n} \quad (4.17)$$

$$t_r = \frac{\pi \sqrt{4g^2(2n+1) + \Delta^2}}{g^2}.$$

Donde ω'_n es la derivada de los eigenvalores con respecto a n . En el caso cuando delta tiende a cero, obtenemos nuevamente el tiempo de resurgimiento visto en el capítulo anterior, ecuación 3.17; mientras que en el otro caso cuando $\Delta \gg 4g^2(2n+1)$ obtenemos una nueva expresión.

$$t_r = \frac{\pi \Delta}{g^2} \quad (4.18)$$

Analicemos entonces lo que sucede con σ_z que utilizamos en el modelo de 3 niveles. Tomamos el hamiltoniano original sin ninguna aproximación, ecuación (4.2) con los siguientes valores $n = 60$, $\alpha = 5$, $g = 0,1$ y $\Delta = 1000$ además de que consideramos un estado inicial del átomo en el estado base $|g\rangle$.

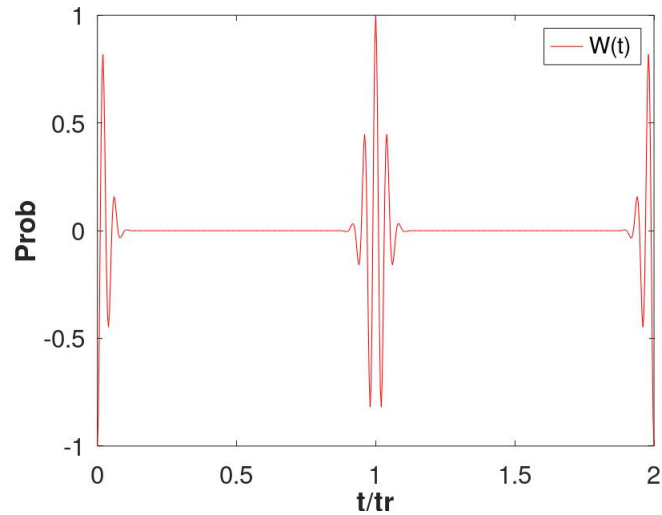


Figura 4.2: $W(t) = \langle \sigma_z \rangle$ utilizando el hamiltoniano original con parámetros $n = 60$, $\alpha = 5$, $g = 0,1$ y $\Delta = 1000$

Graficamos nuevamente la función de Husimi para los dos tiempos de interés, $t = t_r$ y $t = t_r/2$. En este caso se observan unos resurgimientos perfectos, al tiempo de resurgimiento vemos que la probabilidad llega al valor de $W(t) = 1$ lo que está comportándose completamente como un estado coherente.

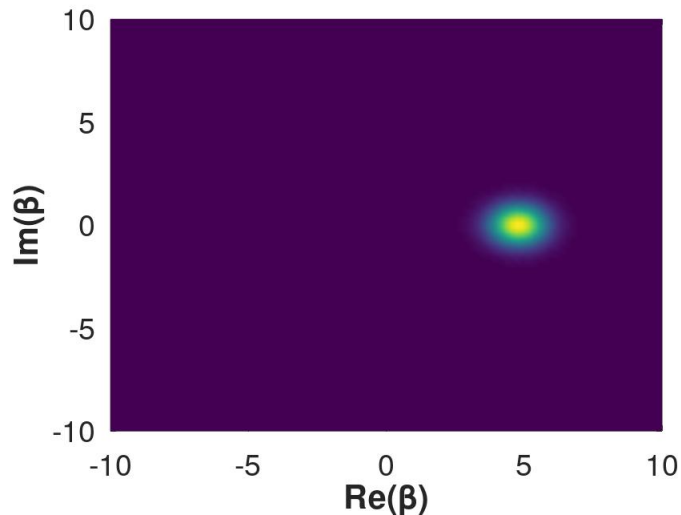


Figura 4.3: Función de Husimi al tiempo $t = t_r$ con $\alpha = 5$

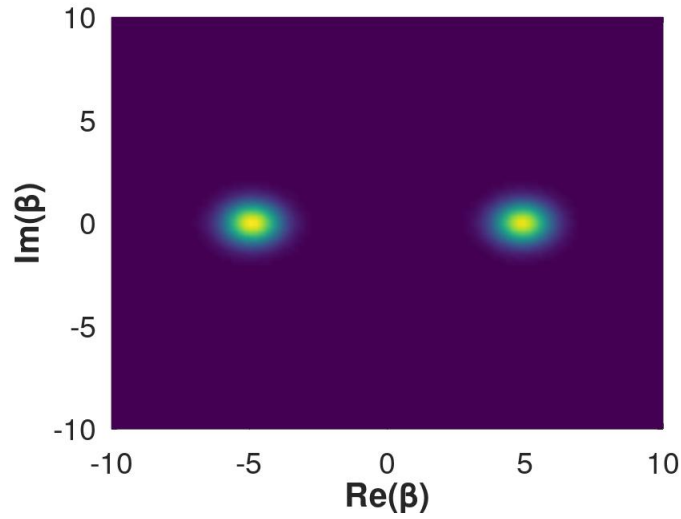


Figura 4.4: Función de Husimi al tiempo $t = t_r/2$ con $\alpha = 5$

Ahora volvemos a graficar tanto $W(t)$ como la función de Husimi pero utilizando el hamiltoniano con las aproximaciones que realizamos. Ya vimos que cualitativamente obtenemos el mismo resultado, ya sea por aproximación del sistema propio como por pequeñas rotaciones. Tomamos entonces el hamiltoniano efectivo (4.14)

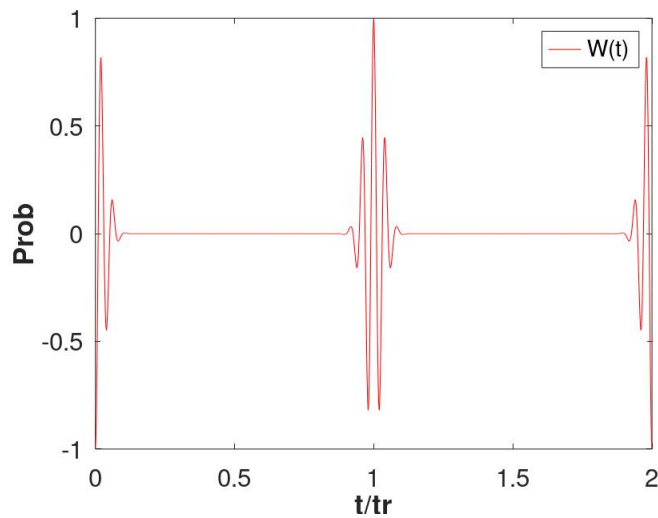


Figura 4.5: $W(t) = \sigma_z$ utilizando el hamiltoniano efectivo para el caso de $\Delta \gg n$ con $n = 60$, $\alpha = 5$, $g = 0,1$ y $\Delta = 1000$

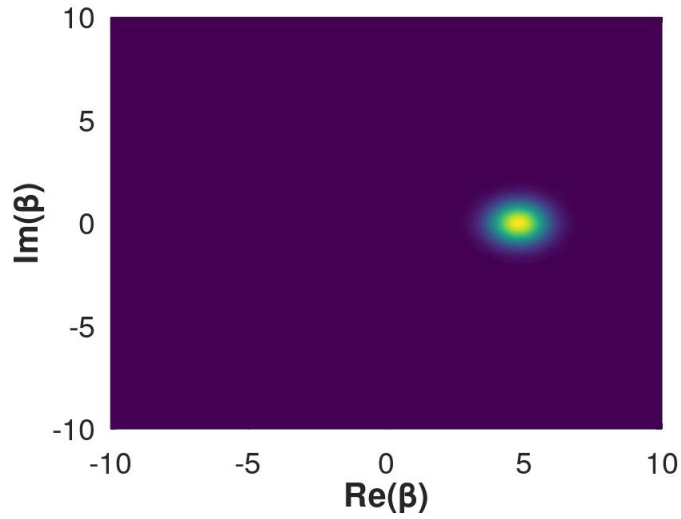


Figura 4.6: Función de Husimi al $t = t_r$ con $\alpha = 5$

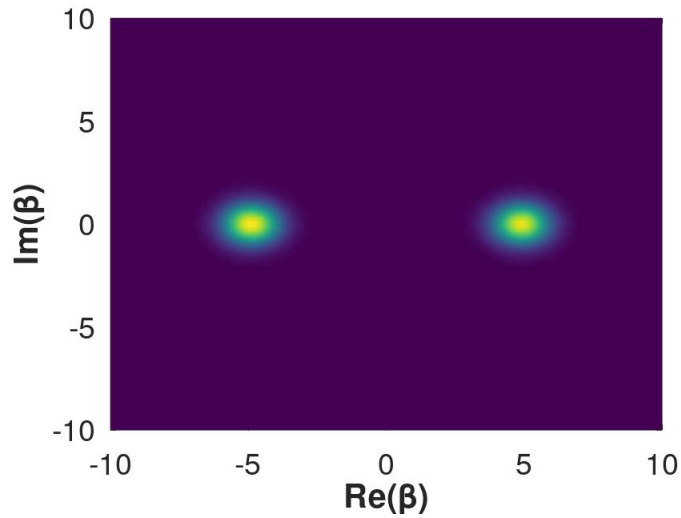


Figura 4.7: Función de Husimi al $t = t_r$ con $\alpha = 5$

Es evidente que las aproximaciones son muy buenas al menos cualitativamente ya que al comparar las gráficas son prácticamente idénticas.

4.4. Entrelazamiento

Por último, en esta sección analizamos el entrelazamiento del átomo y el campo mediante la pureza de la matriz de densidad reducida. Tomando nuestra matriz de densidad reducida de la cavidad óptica ρ_{cav} donde ρ es la matriz de densidad del sistema completo, podemos introducir su pureza como

$$P_{\text{cav}} = \text{Tr}(\rho_{\text{cav}}^2) \quad (4.19)$$

donde

$$\rho_{\text{cav}} = \text{Tr}_{\text{at}}(\rho) \quad (4.20)$$

y

$$\rho = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|. \quad (4.21)$$

De manera general hemos visto que el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ se puede factorizar en términos de los vectores que lo componen ($|n\rangle, |e, i, g\rangle$) por lo que lo escribimos de esta manera, aplicando la traza y siguiendo con el calculo correspondiente llegamos a encontrar los elementos de la matriz de densidad, que está expresada en términos de los coeficientes de nuestro vector $|\psi(t)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \sum_j C_{n,j} |n\rangle |j\rangle \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\text{at}}(\rho) &= \sum_j \langle j|\rho|j\rangle \\ &= \sum_{n,m} \left(\sum_j C_{n,j} C_{m,j}^* \right) |n\rangle \langle m| \\ (\rho_{\text{cav}})_{n,m} &= \sum_j C_{n,j} C_{m,j}^* \end{aligned} \quad (4.23)$$

De manera numérica, si guardamos los coeficientes $C_{n,j}$ en un amatriz rectangular C , la matriz de densidad reducida se obtiene de la multiplicacion matricial

$$\rho_{\text{cav}} = CC^\dagger \quad (4.24)$$

entonces podemos expresar a la matriz de densidad reducida como una matriz de coeficientes. Mientras que para el caso de la matriz reducida para el el átomo es

$$\rho_{\text{at}} = C^\dagger C. \quad (4.25)$$

De esta manera podemos conocer la pureza de nuestro sistema a un tiempo arbitrario, recordemos que los valores de C son dependientes del tiempo.

Analizando nuestro modelo de tres niveles cuando el nivel intermedio no se encuentra desplazado $\Delta = 0$, es decir que tenemos el modelo de cascada. Podemos observar que el entrelazamiento no llega a ser máximo y mucho menos un momento en que sea separable. Recordemos que el máximo entrelazamiento sucede cuando alcanza el valor de $1/n$ donde n es el número de dimensiones, en nuestro caso corresponden a los 3 niveles de energía. Por lo tanto el este máximo debería ocurrir en $P = 1/3$ pero no es el caso, a diferencia con la reducción de 2 fotones.

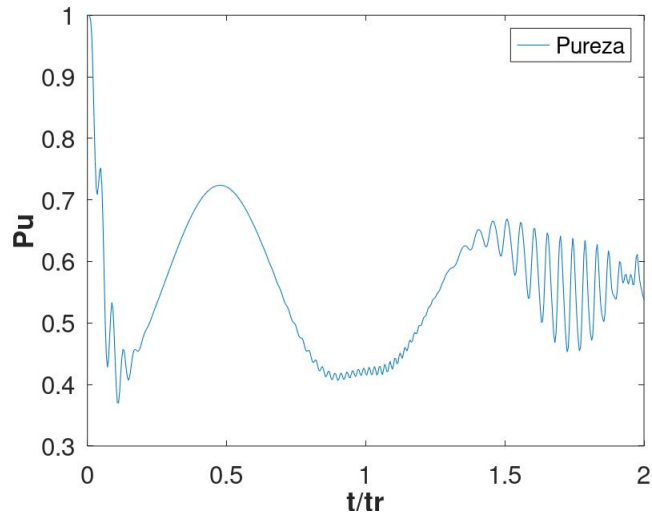


Figura 4.8: Pureza para el sistema de 3 niveles cuando $\Delta = 0$, correspondiente a la figura 3.2 usando el hamiltoniano original y con parámetros $n = 60$, $\alpha = 5$ y $g = 0,1$.

En el caso de la reducción a dos fotones vemos el entrelazamiento que existe en nuestro sistema, aquí se puede notar el máximo entrelazamiento. Esto corresponde cuando la pureza llega a valores de $P = 0,5$. De igual manera se hace visible el momento en que el sistema es completamente separable y sucede exactamente en el tiempo de resurgimiento ya que $P = 1$.

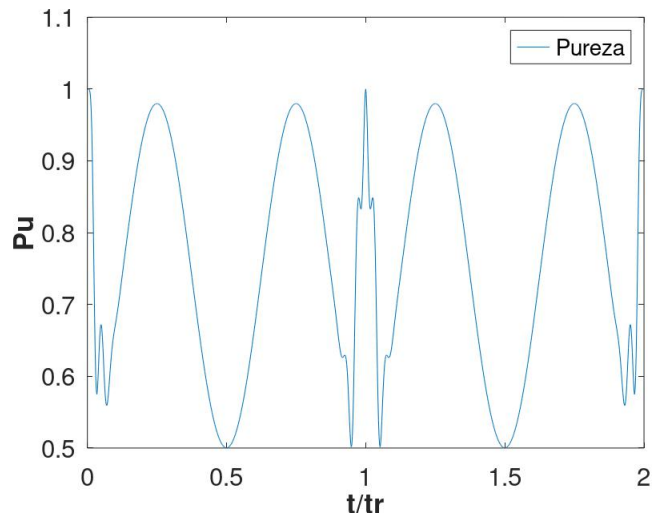


Figura 4.9: Pureza para el sistema reducido a dos fotones, correspondiente a la figura 4.2 cuando se toma el hamiltoniano original con los mismo parámetros $n = 60$, $\alpha = 5$, $g = 0,1$ y $\Delta = 1000$.

Capítulo 5

Conclusiones

Durante el estudio y el análisis que se realizó sobre el modelo de JC en el primer capítulo, se entendió de manera sencilla la forma de tratar al sistema así como su comportamiento utilizando el método de la aproximación de estados coherentes. Gracias a los antecedentes se corroboraron los resultados obtenidos, como resultado de ello se pudo extender al modelo propuesto.

En la sección siguiente donde se trabajó con el sistema de 3 niveles se pudo llevar a cabo sin mucha diferencia del desarrollo ya antes visto, la aproximación de estados coherentes, método que brinda una manera sistemática para calcular los tiempo de resurgimiento pues en estos valores de t coinciden de nuevo los estados coherentes y esto es gracias a la linealización de las frecuencias. Los resultados obtenidos en esta parte del trabajo eran consistentes comparados con el capítulo anterior, los tiempos de resurgimiento fueron calculados bajo el mismo método en ambos modelos y al igual comprobados numéricamente observando un comportamiento similar.

En el siguiente capítulo se analizó un modelo basado en el sistema de 3 niveles, donde el nivel energético intermedio se encuentra desplazado. En esta parte del trabajo se utilizaron métodos de aproximación para su análisis sin embargo no se usó la aproximación a estados coherentes sin embargo con lo visto en los capítulos previos se pudo inferir los tiempos de resurgimiento que además se corroboraron de manera numérica. Otro resultado importante es que se encontraron resurgimientos perfectos y con ayuda de la función de Husimi se puede ver el comportamiento de los estados del sistema y que estos casi no se deforman, en otras palabras se comportan como estados coherentes.

En este modelo en particular se pudo además reproducir los resultados del modelo en cascada haciendo $\Delta=0$.

En el capítulo final se encontró que existe un entrelazamiento en los sistemas propuestos, sin embargo en el caso que hay una transición de dos fotones existe un entrelazamiento máximo. De igual manera este sistema puede ser separable pero en un momento en específico y esto ocurre en los tiempo de resurgimiento.

Bibliografía

- [1] Bruce W. Shore, *The Jaynes-Cummings model*, JOURNAL OF MODERN OPTICS, VOL. 40, NO . 7, 1195-1238 (1993).
- [2] Neda Asili Firouzabadi, Mohammad Kazem Tavassoly, *Interaction of a three-level atom (Λ, V, Ξ) with a twomode field beyond rotating wave approximation: Intermixed intensity-dependent coupling* , International Journal of Optics and Photonics (IJOP) Vol. 15 No. 2 Summer -Fall (2021).
- [3] N.H. Abdel Wahab, *A three-level atom interacting with a single mode cavity field: different configurations*, Phys. Scr. 76, 244 (2007).
- [4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, (1994).
- [5] Marlan o. Scully, M. Suhail Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, (1997).
- [6] M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Theory of the Rydberg-atom two-photon micro-maser*, Phys. Rev. A 35, 154 (1987).
- [7] Wolfgang P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space* 1st ed. WILEY-VCH, (2001).
- [8] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theory with application to the beam maser*. P. IEEE 51, 89-109 (1963).
- [9] David J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* Prentice Hall, Inc. (1995).
- [10] D.F. Walls, G.J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer, (1995).
- [11] A. B. Klimov, J. Negro, R.Farias, S. M. Chumacov, *Nonlinear Dynamics of the two-Poton Dicke Model*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 1 562–570 (1999).
- [12] Carlos A. González Gutiérrez, Juan Mauricio Torres, *Atomic Bell measurement via two-photon interactions* PHYSICAL REVIEW A 99, 023854 (2019).
- [13] A. H. Toor, M. S. Zubairy, *Validity of the effective Hamiltonian in the two-photon atom-field interaction*, PHYSICAL REVIEW A 45 (1992).
- [14] Eugenio Roldan, *El modelo de Jaynes-Cummings*, Opt. Pura Apl. 44 (2) 361-379 (2011).