BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Elementos básicos del n-ésimo pseudohiperespacio suspensión de continuos

T E S I S

Que para obtener el título de:
Licenciada en Matemáticas

Presenta:
Patricia del Pilar Macías Patraca

Directores de Tesis:

Dr. Juan Carlos Macías Romero y
Dr. Fernando Macías Romero

Puebla, Pue, 14 de diciembre de 2015.

Introducción

El material que constituye esta tesis pertenece a la rama de la topología que se conoce como teoría de los hiperespacios de los continuos. En este trabajo se estudian las propiedades y los elementos básicos que cumplen los n-ésimos pseudohiperespacios suspensión de los continuos.

Un continuo es un espacio métrico, no vacío, que es compacto y conexo. Los hiperespacios en topología son los espacios constituidos por una clase específica de subconjuntos de un espacio dado. Los hiperespacios más comunes de un continuo X son:

$$2^X = \{A \subset X : A \textit{ es cerrado y } A \neq \emptyset\},$$

para $n > 0$:

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ tiene a lo más } n \textit{ componentes}\}$$

y

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ tiene a lo más } n \textit{ puntos}\}$$

a estos hiperespacios se les dota una métrica llamda métrica de Hausdorff (Teorema 3.1). En ocasiones, en la literatura, a $C_1(X)$ se le denota como $C(X)$.

La teoría de los hiperespacios tuvo sus inicios al principio del siglo XX con el trabajo de Hausdorff y Vietoris. Durante los años veinte y

treinta, gran parte de la estructura fundamental de los hiperespacios fue establecida.
Hasta ahora, los hiperespacios que más se han estudiado son 2^X y $C(X)$. Sobre el espacio $C_n(X)$ se sabe que, desde el trabajo de Wojdyslawski en 1939 [17], nadie se había encargado de su estudio, hasta que en 2001, Sergio Macías los tomó en cuenta y hasta la fecha es quien ha aportado más a su estudio general [15, Capítulo 6].

En 1979, Sam B. Nadler Jr. inició el estudio del hiperespacio suspensión de un continuo [19]. Este espacio, denotado por $HS(X)$, lo definió como el espacio cociente que se obtiene de $C(X)$ al identificar $F_1(X)$ a un punto, con la topología cociente.

Posteriormente, Raúl Escobedo, María de J. López y Sergio Macías consideraron importante la construcción hecha por Sam B. Nadler y decidieron hacer un estudio más profundo de la misma [13].

En 2004, Sergio Macías dio una generalización natural de $HS(X)$ usando los n-ésimos hiperespacios, $C_n(X)$, e introdujo el n-ésimo Hiperespacio Suspensión de un continuo. Este espacio, denotado por $HS_n(X)$, lo definió como el espacio cociente que se obtiene de $C_n(X)$ al identificar $F_n(X)$ a un punto, con la topología cociente [18]. En este trabajo Sergio Macías estudia varias propiedades generales que $HS_n(X)$ cumple. También, analiza propiedades específicas de los continuos tales como la aposindesis, la conexidad local y la disconexión por arcos. En 2006, Sergio Macías continúa el estudio de estos hiperespacios analizando propiedades tales como la contractibilidad, otro tipo de aposindesis y la indescomponibilidad hereditaria.

En 2008, Juan Carlos Macías define a los n-ésimos pseudohiperespacios suspensión de continuos, como el espacio cociente que se obtiene de $C_n(X)$ al identificar $F_1(X)$ a un punto y lo denota por $PHS_n(X)$. En este trabajo, J. Carlos Macías analiza varias propiedades generales que cumple el espacio $PHS_n(X)$. También, estudia propiedades específicas de los continuos tales como la conexidad local, la aposindesis y la disconexión por arcos; ademass de trabajar con las propiedades de las funciones inducidas entre los n-ésimos pseudohiperespacios suspensión [6].

El motivo principal por estudiar las propiedades elementales que cumple el $PHS_n(X)$, fue el interés por conocer y comprender las técnicas de demostración que se usan en la teoría de los hiperespacios y los resultados más recientes sobre el n-ésimo pseudohiperespacio suspensión.

La organización de la tesis es la siguiente. Está dividida en 4 capítulos.

En el capítulo 1, exponemos y estudiamos los conceptos y resultados básicos de la topología como lo son la compacidad y la conexidad. La finalidad de este capítulo es presentar en la medida de lo posible, un trabajo autocontenido de tal forma que facilite la lectura de los resultados. En algunos casos damos las pruebas para ejercitarnos con las técnicas de demostración y en otros, damos las referencias apropiadas.

En el capítulo 2, definimos a los continuos y damos varios ejemplos sencillos tales como el arco, la n-esfera, el n-odo simple, el continuo $\sin(\frac{1}{x})$, la grafica finita, la curva universal de Sierpinski, el cubo de Hilbert, entre otros. Además presentamos algunas propiedades que ellos cumplen y que necesitaremos para el desarrollo de nuestro estudio. Después definimos el espacio cociente y mostramos un método general de construir nuevos espacios a partir de otros que se conocen. Éste método nos sirve para construir los espacios, que son el tema principal de este trabajo.

En el capítulo 3, definimos a los hiperespaciones 2^X $C(X)$ $C_n(X)$ $F_n(X)$ y $F_1(X)$; a la métrica de Haurdoff y a la topología de Vietoris. Posteriormente estudiamos las propiedades que el hiperespacio $C_n(X)$ cumple bajo ciertas condiones tales como la conexidad local, la propiedad (b), la conexidad en pequeño; con la intención de poder usarlas para el estudio de nuestro espacio.

En el capítulo 4, definimos el hiperespacio $PHS_n(X)$ y en particular observamos que es un continuo y que la función cociente q_X^n es monótona. También demostramos una propiedad importante de la topología que cumple $PHS_n(X)$ (conexidad local) siempre y cuando el continuo X lo sea. Además, damos algunos resultados que involucran al cubo de Hilberth en el estudio de propiedades de $PHS_n(X)$, y por último hacemos notar que el intervalo y la circunferencia unitarios tienen n-ésimo pseudohiperespacio suspensión único.

Luego, estudiamos otra propiedad importante de la teoría de continuos (Aposindesis) y demostramos que el n-ésimo pseudohiperespacio suspensión $PHS_n(X)$ es aposindético (en particular colocalmente conexo) no importando si el continuo X lo es o no. También estudiamos otras propiedades que cumple el $PHS_n(X)$ bajo ciertas condiciones; por ejemplo, la propiedad (b), la contractibilidad, la dimensión topológica y el hecho de ser variedad de Cantor.

Por último nos enfocamos primordialmente a analizar y estudiar las propiedades que $PHS_n([0,1])$ y $PHS_n(S^1)$ cumplen, como ejemplos básicos de los n-ésimos pseudohiperespacios suspensión.

Al final de la tesis, presentamos las conclusiones de nuestro trabajo destacando la importancia que tuve en nuestra formación profesional el estudio de este tema.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos algunos conceptos y resultados básicos de la topología de espacios métricos, incluyendo los temas básicos (conexidad y compacidad) necesarios, que utilizaremos a lo largo de nuestro trabajo. En algunos casos, damos las pruebas para un mejor manejo de las técnicas de demostración que se usan en esta rama de las matemáticas. En otros casos, damos las referencias en donde se puede encontrar las pruebas de los resultados que enunciamos sin demostración.

1.1. Conceptos básicos

En esta sección exponemos los conceptos de la topología de espacios métricos, tales como punto interior, conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, funciones continuas y los resultados relacionados con ellos.

Definición 1.1. *Sean X un espacio métrico con métrica d, $p \in X$ y*

$\varepsilon > 0$, la ***bola abierta*** *en X con centro en p y radio ϵ, denotada por $B_\epsilon(p)$, es el conjunto*

$$B_\epsilon(p) = \{x \in X : d(p,x) < \epsilon\}.$$

Definición 1.2. *Sea X un espacio métrico con métrica d. Si $A \subset X$ y $\epsilon > 0$ entonces la* ***bola abierta de radio ϵ alrededor de*** *A, denotada por $B^d_\epsilon(A)$, es el conjunto:*

$$B^d_\epsilon(A) = \{x \in X : d(x,a) < \epsilon, \textit{para algún } a \in A\}.$$

A continuación definimos el punto interior, punto exterior, punto frontera, además del interior, exterior y frontera de un conjunto.

Definición 1.3. *Sean X un espacio métrico y Y un subconjunto de X. Un punto x es un* ***punto interior*** *de Y, si existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset Y$. Si $B_\epsilon(x) \subset (X \setminus Y)$ entonces x es un* ***punto exterior*** *de Y. Por último, si para toda $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(x) \bigcap Y \neq \emptyset$ y $B_\epsilon(x) \bigcap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ entonces x es un* ***punto frontera****.*

Definición 1.4. *Sea X un espacio métrico. El* ***interior*** *de un conjunto $Y \subset X$ es el conjunto de todos los puntos interiores de Y, y se denota como $int_X(Y)$. El conjunto de todos los puntos frontera de Y constituye la* ***frontera*** *de Y y es denotada como $\partial(Y)$. El conjunto $Y \bigcup \partial(Y)$ forma la* ***cerradura*** *de Y y será denotada como $\overline{Y}$ o $cl_X(Y)$.*

Definición 1.5. *Sea X un espacio métrico. Un conjunto $Y \subset X$ es* ***abierto en X*** *si todo punto de Y es un punto interior de Y, esto es si $Y = int_X(Y)$.*

Ahora veremos algunas propiedades de los conjuntos abiertos, las cuales nos serán de gran utilidad posteriormente.

Lema 1.6. *Sea X un espacio métrico:*

(1) Si $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ es un subconjunto abierto de X

(2) Si U_1y U_2 son subconjuntos abiertos de X entonces la intersección $U_1 \bigcap U_2$ es un subconjunto abierto de X

Demostración.

(1) Necesitamos probar que todo punto de $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es interior. Sea $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ entonces existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in U_{\lambda_0}$. Como U_{λ_0} es un abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset U_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es abierto en X.

(2) Si $U_1 \bigcap U_2 = \emptyset$ entonces $U_1 \bigcap U_2$ es un abierto. Supongamos que $U_1 \bigcap U_2 \neq \emptyset$. Sea $x \in U_1 \bigcap U_2$, como U_1 y U_2 son abiertos, existen $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_2 > 0$, tales que $B_{\epsilon_1}(x) \subset U_1$ y $B_{\epsilon_2}(x) \subset U_2$, respectivamente. Tomando $\epsilon = min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, se tiene que $B_\epsilon(x) \subset U_1 \bigcap U_2$, de donde $U_1 \bigcap U_2$ es abierto en X. □

Definición 1.7. *Sea X un espacio métrico. Un conjunto $Y \subset X$ es **cerrado en** X si $X \backslash Y$ es abierto en X.*

Dada la definición anterior, probamos el siguiente lema.

Lema 1.8. *Sean X un espacio métrico y $Y \subset X$.*

(1) Y es cerrado si y sólo si $Y = \overline{Y}$.

(2) $\overline{Y} = \bigcap \{F \subset X | Y \subset F$ y F es cerrado en $X\}$.

Demostración.

(1) Supongamos que $Y \subset X$ es cerrado. Probemos que $Y = \overline{Y}$. Es decir $Y = Y \bigcup \partial(Y)$. Como $Y \subset Y \bigcup \partial(Y)$, basta probar que $Y \bigcup \partial(Y) \subset Y$. Para esto, sea $x \in Y \bigcup \partial(Y)$. Luego $x \in Y$ ó $x \in \partial(Y)$. En el primer caso se tiene la contención. Así, supongamos que $x \in \partial(Y)$ y $x \notin Y$. De aquí $x \in (X \backslash Y)$. Como $X \backslash Y$ es abierto, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $B_{\epsilon_1}(x) \subset X \backslash Y$. Esto implica que $B_{\epsilon_1}(x) \bigcap (X \backslash Y) = \emptyset$. Lo cual contradice el hecho de que x es un punto frontera. Por lo tanto $Y = \overline{Y}$.

Ahora supongamos que $Y = \overline{Y}$ y probemos que Y es cerrado. Es decir, probemos que $X\backslash Y$ es abierto. Para esto, sea $x \in X\backslash Y$ y veamos que existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $B_{\epsilon_1}(x) \subset X\backslash Y$.

Como $x \notin Y$ y $Y = \overline{Y}$ se tiene que $x \notin (Y \bigcup \partial(Y))$. Así $x \notin \partial(Y)$. Luego, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $B_{\epsilon_1}(x) \bigcap Y = \emptyset$ ó $B_{\epsilon_1}(x) \bigcap (X\backslash Y) = \emptyset$. Note que si $B_{\epsilon_1}(x) \bigcap (X\backslash Y) = \emptyset$ entonces $B_{\epsilon_1}(x) \subset Y$, de aquí que $x \in Y$. Lo cual contradice que $x \in (X\backslash Y)$. Por consiguiente $B_{\epsilon_1}(x) \bigcap Y = \emptyset$ y esto implica que $B_{\epsilon_1}(x) \subset (X\backslash Y)$. Por lo tanto $X\backslash Y$ es abierto.

(2) **Nota 1**: Supongamos que $A \subset B$ y B es cerrado. Es decir, $\overline{A} \subset \overline{B}$. Del resultado (1) se sigue que $\overline{A} \subset B$.
Sea $\mathscr{F} = \{F \subset X : Y \subset F \textit{ y } F \textit{ es cerrado en } X\}$. Veamos primero que $\overline{Y} \subset \bigcap_{F \in \mathscr{F}} F$. Observe que para todo $F \in \mathscr{F}$, $Y \subset F$ y F es cerrado. Por Nota 1, se tiene que $\overline{Y} \subset F$. Luego, $\overline{Y} \subset \bigcap_{F \in \mathscr{F}} F$.
Ahora veamos que $\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F \subset \overline{Y}$. Como $\overline{Y}$ es cerrado en X tal que $Y \subset \overline{Y}$, se sigue que $\overline{Y} \in \mathscr{F}$. Luego $\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F \subset \overline{Y}$. $\square$

Utilizando las leyes de De Morgan en el Lema 1.6 se tiene que:

Lema 1.9. *Sea X un espacio métrico.*

(1) La intersección arbitraria de cerrados de X es un cerrado.

(2) La unión finita de cerrados de X es un cerrado.

Definición 1.10. *Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Dado $x \in X$, decimos que f es continua en x si para toda $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$. Diremos que **f es continua en X** si f es continua en cada uno de los puntos de X. Si f es biyectiva entonces f es un **homeomorfismo** si tanto f como f^{-1} son continuas.*

Lema 1.11. *Sean X y Y espacios métricos. Si $x \in X$ y $f : X \to Y$ es una función entonces f es continua en x si y sólo si para todo abierto V*

de Y que contiene a $f(x)$, existe un abierto U de X que contiene a x tal que $f(U) \subset V$.

Demostración. Sean $x \in X$ y $f : X \to Y$ función continua en X. Sea V un abierto de Y tal que $f(x) \in V$. Entonces $f(x)$ es punto interior de V, es decir existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(x)) \subset V$. Como f es continua, en particular para este ϵ, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$. Observe que $B_\delta(x)$ es un abierto de X que contiene a x tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)) \subset V$.

Ahora probemos la otra implicación. Tenemos que probar que f es continua en X. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Supongamos que para cualquier abierto V de Y que contiene a $f(x)$ existe un abierto U de X que contiene a x tal que $f(U) \subset V$. Note que $B_\epsilon(f(x))$ es un abierto en Y tal que $f(x) \in B_\epsilon(f(x))$. Luego, existe U un abierto de X tal que $x \in U$ y $f(U) \subset B_\epsilon(f(x))$. Como U es abierto, x es un punto interior de U, entonces existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $B_{\epsilon_1}(x) \subset U$. Luego, $f(B_{\epsilon_1}(x)) \subset f(U) \subset B_\epsilon(f(x))$. Si $\epsilon_1 = \delta$ se tiene la implicación. Por lo tanto f es continua. $\square$

Lema 1.12. *Si X y Y son espacios métricos y $f : X \to Y$ una función, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) f es continua.

(2) Para cada abierto V de Y se tiene que $f^{-1}(V)$ es un abierto en X.

(3) Para cada cerrado C de Y se tiene que $f^{-1}(C)$ es un cerrado en X.

Demostración. Veamos que (1) $\Longleftrightarrow$ (2). Sean $f : X \to Y$ función continua y V un abierto de Y. Por probar que $f^{-1}(V)$ es un abierto de X. Sea $x \in f^{-1}(V)$. Probemos que x es un punto interior de $f^{-1}(V)$. Note que $f(x) \in V$. Como V es abierto en Y, $f(x)$ es un punto interior de V. Luego existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(x)) \subset V$. Como f es continua, para este

ϵ, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$. Se tiene que $f(B_\delta(x)) \subset V$. Sea $\delta = \epsilon$ y probemos que $B_\epsilon(x) \subset f^{-1}(V)$, para esto sea $x^{'} \in B_\epsilon(x)$. Luego $f(x^{'}) \in f(B_\epsilon(x)) \subset V$. Por lo tanto, $x^{'} \in f^{-1}(V)$. Así, x es un punto interior de $f^{-1}(V)$.

Ahora veamos que f es continua en $x \in X$. Sea $\epsilon > 0$, note que $B_\epsilon(f(x))$ es un abierto en Y, por hipótesis se tiene que $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ es un abierto en X, es decir todo punto de $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ es interior. Note que $x \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$, luego existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$. Así que $f(B_\delta) \subset B_\epsilon(f(x))$, por lo tanto f es continua en x.

Ahora veamos (2) $\Longleftrightarrow$ (3). Sea C es un cerrado en Y. Luego, $Y\backslash C$ es un abierto en Y. Por hipótesis tenemos que $f^{-1}(Y\backslash C)$ es un abierto en X. Como $f^{-1}(Y\backslash C) = X\backslash f^{-1}(C)$, se sigue que $f^{-1}(C)$ es un cerrado en X. Sea V un abierto en Y. Note que $Y\backslash V$ es un cerrado en Y. Por hipótesis, se sigue que $f^{-1}(Y\backslash V)$ es un cerrado en X. Como $f^{-1}(Y\backslash V) = X\backslash f^{-1}(V)$ se tiene que $X\backslash f^{-1}(V)$ es un cerrado en X. Así $f^{-1}(V)$ es un abierto en X.

$\square$

Lema 1.13. *Sean X, Y y Z espacios métricos. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas, entonces la función $g \circ f : X \to Z$ es continua.*

Demostración. Como f y g son funciones continuas, significa que para cualquier $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(B_{\delta_1}(x)) \subset B_{\epsilon_1}(f(x))$ y para cualquier $\epsilon_2 > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que $g(B_{\delta_2}(y)) \subset B_{\epsilon_2}(g(y))$. Por probar que $g \circ f : X \to Z$ es continua, es decir, para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $(g \circ f)(B_\delta(x^{'})) \subset B_\epsilon((g \circ f)(x^{'}))$. Es decir, $g(f(B_\delta(x^{'}))) \subset B_\epsilon(g(f(x^{'})))$.

Sean $\epsilon > 0$ y $\delta = \delta_1$, veamos que $(g \circ f)(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon((g \circ f)(x))$. Tomemos $z \in (g \circ f)(B_\delta(x))$. Luego existe $a \in B_\delta$ tal que $z = (g \circ f)(a)$. Observe que $f(a) \in f(B_\delta(x)) \subset B_{\epsilon_1}(f(x))$. Como $z = g(f(a)) \in g(f(B_\delta(x))) \subset g(B_{\epsilon_1}(f(x))) \subset B_{\epsilon_2}(g(f(x)))$. Tomando $\epsilon = \epsilon_2$ terminamos.

$\square$

Definición 1.14. *Sea X un espacio métrico. Decimos que una sucesión*

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de puntos de* X *converge a un punto* x *de* X *si para toda* $\epsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N$ *entonces* $x_n \in B_\epsilon(x)$.

Para caracterizar la continuidad de las funciones entre espacios métricos por medio de las sucesiones se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.15. *Si* X *y* Y *son espacios métricos y* $f : X \to Y$ *es una función entonces* f *es continua en el punto* x *de* X *si y sólo si para cada sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de puntos de* X *que converge a* x *se tiene que la sucesión* $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $f(x)$.

Demostración. Supongamos que f es continua en x y tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X, que converge a x. Queremos mostrar que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. Para esto, sea $\epsilon > 0$, como f es continua en x, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in B_\delta(x)$, de donde se tiene que si $n \geq N$ entonces $f(x_n) \in B_\epsilon(f(x))$, lo que implica que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.

Ahora supongamos que f no es continua en x, es decir existe $\epsilon > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ $f(B_\delta(x)) \bigcap Y \backslash B_\epsilon(f(x)) \neq \emptyset$. De donde, en particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ tal que $f(x_n) \notin B_\epsilon(f(x))$. Observemos que en este caso la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, mientras que la sucesión $\{f(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x)$.

□

Definición 1.16. *Sean* X *un espacio métrico y* $Y \subset X$. *Dado* $y \in Y$, *un* ***abierto relativo*** *de* $y \in Y$ *es un subconjunto* V *de* Y *tal que* $y \in V$ *y* $V = Y \bigcap U$, *donde* U *es un abierto de* X. *Análogamente un conjunto* $C \subset Y$ *es un* ***cerrado relativo***, *si existe un cerrado* D *de* X *tal que* $C = Y \bigcap D$.

1.2. Conexidad y compacidad

Intuitivamente un conjunto debería de ser visto como conexo si consiste de "*una sola pieza*". Así, por ejemplo, un intervalo en $\mathbb{R}$ es conexo, mientras que el conjunto $[0,1]\bigcup[2,3]$ no es conexo. Para conjuntos más complicados la intuición no es muy confiable.

Definición 1.17. *Sea X un espacio métrico. Diremos que X es disconexo si existen dos abiertos U y V de X, no vacíos y ajenos, cuya unión es X. Si X no es disconexo entonces X es conexo. Si $Y \subset X$ entonces Y es disconexo o conexo si lo es como subespacio con la topología relativa.*

El siguiente resultado nos dará una caracterización de los conjuntos conexos de $\mathbb{R}$.

Teorema 1.18. *Un subconjunto $\mathscr{I}$ de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si $\mathscr{I}$ es un intervalo.*

Una propiedad importante de la conexidad es el hecho de que es preservada por las funciones continuas.

Teorema 1.19. *Sean X y Y espacios métricos. Si $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva y X es conexo entonces Y es conexo.*

Demostración. Si Y no fuera conexo, existirían dos abiertos ajenos U y V no vacíos de Y tales que $Y = U\bigcup V$. Como f es continua, por el Lema 1.12 tenemos que tanto $f^{-1}(U)$ como $f^{-1}(V)$ son abiertos de X, además $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U\bigcup V) = f^{-1}(U)\bigcup f^{-1}(V)$. Como $U\bigcap V = \emptyset$ se tiene que $f^{-1}(U)\bigcap f^{-1}(V) = \emptyset$, como $U \neq \emptyset$ y $V \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ y $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, de donde X no es conexo.

$\square$

Lema 1.20. *Sean X un espacio métrico y $Y \subset X$. Si $Y = A \bigcup B$, donde A y B son cerrados ajenos relativos a Y y no vacíos, entonces $cl_X(A) \bigcap B = \emptyset$ y $A \bigcap cl_X(B) = \emptyset$*

Demostración. Como A es cerrado relativo a Y, tenemos que $A = Y \bigcap cl_X(A)$. De donde $cl_X(A) \bigcap B = cl_X(A) \bigcap (Y \bigcap B) = (cl_X(A) \bigcap Y) \bigcap B = A \bigcap B = \emptyset$. Análogamente $A \bigcap cl_X(B) = (A \bigcap B) = \emptyset$.

□

El siguiente resultado nos será de ayuda para varios resultados en este capítulo.

Lema 1.21. *Sean X un espacio métrico, $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$ y U y V abiertos ajenos de X no vacíos. Si Y es conexo y $Y \subset U \bigcup V$ entonces $Y \subset U$ o $Y \subset V$.*

En particular el siguiente lema, nos dice que la cerradura de un conjunto conexo es conexa.

Lema 1.22. *Sean X un espacio métrico y Y, Z subconjuntos de X no vacíos. Si Y es conexo y $Y \subset Z \subset cl_X(Y)$, entonces Z es conexo.*

Demostración. Supongamos que Z no es conexo, entonces $Z = U \bigcup V$, donde U y V son abiertos ajenos relativos a Z y no vacíos. Como $Y \subset Z$, tenemos que, por el Lema 1.21, $Y \subset U$ o $Y \subset V$, digamos que $Y \subset U$. Por el Lema 1.20, como V también es cerrado relativo en Z, $cl_X(U) \bigcap V = \emptyset$. Como $Y \subset U$, $cl_X(Y) \subset cl_X(U)$ de donde $Z \bigcap V = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto Z es conexo. □

Lema 1.23. *Sea X un espacio métrico. Si $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de subconjuntos conexos de X tal que $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \neq \emptyset$ entonces $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ no es conexo. Es decir, existen U y V abiertos ajenos no vacíos de $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ tales que $U \bigcup V = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$. Luego, para cada $\lambda \in \Lambda$, $Y_\lambda \subset U \bigcup V$. Por el Lema 1.21 se sigue que $Y_\lambda \subset U$ o $Y_\lambda \subset V$. Sean $A = \{Y_\lambda : Y_\lambda \subset U\}$ y $B = \{Y_\lambda : Y_\lambda \subset V\}$. Note que $\bigcap A \subset U$ y $\bigcap B \subset V$, (donde $\bigcap A$ y $\bigcap B$ son las intersecciones de todos los elementos de A y de B respectivamente). Como $U \bigcap V = \emptyset$ se tiene que $(\bigcap A) \bigcap (\bigcap B) = \emptyset$. Luego, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda = \emptyset$. Esto contradice la hipótesis.

□

Definición 1.24. *Sean X un espacio métrico y $x, y \in X$. Una* ***trayectoria de*** *x* ***a*** *y es una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Si todo par de puntos de X pueden ser unidos por una trayectoria entonces X es* ***conexo por trayectorias****.*

Teorema 1.25. *Todo espacio métrico conexo por trayectorias es conexo.*

Demostración. Supongamos que X no es conexo. Existen U y V abiertos en X ajenos no vacíos tales que $X = U \bigcup V$. Sean $x \in U$ y $y \in V$. Note que $x \notin V$ y $y \notin U$ pues son ajenos. Como X es conexo por trayectorias, existe $f : [0,1] \to X$ función continua tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Como $[0,1]$ es conexo en X, por el Teorema 1.19 se tiene que $f([0,1])$ es un conexo en X. Luego, por el Teorema 1.21, $f([0,1]) \subset U$ o $f([0,1]) \subset V$. Si $f([0,1]) \subset U$ entonces $f(1) = y \in U$. Esto contradice que $y \notin U$. Similarmente, si $f([0,1]) \subset V$ entonces $f(0) = x \in V$ y esto contradice el hecho de que $x \notin V$. Por lo tanto, X es conexo. □

Definición 1.26. *Si X es un espacio métrico y $A \subset X$ entonces A es una* ***componente*** *de X si A es conexo y para cualquier subconjunto conexo B de X tal que $A \subset B$ se tiene que $B = A$.*

Notemos que si X es un conexo entonces la única componente de X es X mismo.

Lema 1.27. *Las componentes de un espacio métrico X son cerradas.*

Demostración. Sea A una componente de X. Note que $A \subset Cl_X(A) \subset Cl_X(X)$. Por el Lema 1.22 se tiene que $Cl_X(A)$ es un conexo. Como A es una componente se sigue que $A = Cl_X(A)$. Por lo tanto A es cerrada. □

La compacidad no es tan natural imaginarla como la conexidad, sin embargo es una de las nociones mas importantes de la topología. Aquí mostramos los resultados sobre la compacidad necesarios para nuestro trabajo.

Definición 1.28. *Sean X un espacio métrico. Una familia $\mathscr{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos de X es una **cubierta** de X si $X \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Si $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$ y $\mathscr{U}'$ también es una cubierta de X entonces $\mathscr{U}'$ es una **subcubierta** de X. Si todos los elementos de una cubierta $\mathscr{U}$ de X son abiertos de X entonces $\mathscr{U}$ es una **cubierta abierta** de X.*

Definición 1.29. *Un espacio métrico X es **compacto** si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

En [11, Teorema 1.41] se encuentra la prueba del teorema siguiente.

Teorema 1.30. *Todo intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ es compacto.*

A continuación se tiene el siguiente resultado debido a Heine Borel, el cual será muy útil posteriormente.

Teorema 1.31. *Si Y es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ entonces Y es compacto si y solo si Y es cerrado y acotado.*

El resultado anterior nos da una caracterización de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, de lo que se deduce que dicho espacio no es compacto.

El siguiente resultado nos dice que la compacidad es preservada bajo funciones continuas.

Teorema 1.32. *Sean X y Y espacios métricos. Si $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva y X es compacto entonces Y es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta de Y. Como f es continua, por el Lema 1.12, se tiene que la familia $\{f^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \Lambda$ tales que $X = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{\lambda_k})$. De donde

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{\lambda_k})\right) = \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(V_{\lambda_k})) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{\lambda_k}.$$

De aquí tenemos que $\{V_{\lambda_1}, ..., V_{\lambda_n}\}$ es una subcubierta finita de Y. $\square$

Teorema 1.33. *Sean X un espacio métrico compacto y $Y \subset X$.*

(1) Si Y es cerrado en X, entonces Y es compacto.

(2) Si Y es compacto, entonces Y es cerrado en X.

Demostración. (1) Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta de Y. Por probar que existe una subcubierta finita de Y. Note que $X\backslash Y$ es un abierto en X. Sea $U = X\backslash Y$. Observe que $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \bigcup U$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existe una subcubierta finita de X, $\{U_{\lambda_k}\}_{k=1}^{n} \bigcup U$. Como $Y \nsubseteq U$ se sigue que $Y \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{\lambda_k}$ por tanto $\{U_{\lambda_k}\}_{k=1}^{n} \bigcup U$ es una subcubierta finita de Y.
(2) La prueba la podemos encontrar en [12, Teorema 3.1.8]

$\square$

Definición 1.34. *Sea X un espacio métrico. Si $\mathscr{A} = \{\mathrm{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de que para cualquier subconjunto finito Λ' de Λ, se tiene que $\bigcap\limits_{\lambda\in\acute{\Lambda}} A_\lambda \neq \emptyset$ entonces diremos que la familia $\mathscr{A}$ tiene la* ***propiedad de intersección finita****.*

Lema 1.35. *Si X es un espacio métrico entonces X es compacto si y solo si cualquier familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.*

Demostración. Supongamos que X es compacto y $\mathscr{C} = \{C_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita. Por probar que $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, sea $U_\lambda = X \backslash C_\lambda$. Si $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \emptyset$, entonces por una de las leyes de De morgan:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \backslash C_\lambda) = X \backslash \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = X \backslash \emptyset = X.$$

Resumiendo $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$. Luego $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existe $\{U_1, ..., U_n\}$ subcubierta finita de X. Así:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \backslash C_i) = X \backslash \bigcap_{i=1}^{n} C_i$$

esto implica que $\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$, lo cual es una contradicción porque C tiene la propiedad de intersección finita.

Ahora supongamos que X no es compacto. Entonces existe una cubierta abierta $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de X tal que no tiene una subcubierta finita.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, sea $C_\lambda = X \backslash U_\lambda$. Note que $\mathscr{C} = \{X \backslash U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una colección de subconjuntos cerrados. Veamos que C tiene la propiedad de intersección finita.

Supongamos que no la tiene, entonces existe $\{C_1, ..., C_n\}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset$. Es decir, $\bigcap_{i=1}^{n} (X \backslash U_i) = \emptyset$. O sea, $X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} U_i = \emptyset$. Esto implica que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto C tiene la propiedad de intersección finita. Por hipótesis tenemos que:

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \neq \emptyset.$$

Por otra parte, note que

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \backslash U_\lambda) = X \backslash \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

y como $X = \bigcup U_\lambda$ ya que es cubierta abierta de X, entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por tanto X es compacto. $\square$

En [11, lema 1.48] se encuentra la prueba del resultado siguiente:

Lema 1.36. *Sean X un espacio métrico y compacto y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$. Si U es un abierto de X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset U$.*

Lema 1.37. *Sea X un espacio métrico. Si A y B son dos subconjuntos ajenos y compactos de X entonces existen abiertos ajenos U y V de X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Demostración. Como X es métrico entonces X es normal. Además A y B son cerrados en X por ser compactos. Luego, de la normalidad de X se sigue que existen abiertos ajenos de X tales que contienen a A y a B respectivamente. $\square$

Capítulo 2

Continuos

En este capítulo está dividido en dos secciones. En la primera, definimos a los continuos y damos varios ejemplos sencillos de ellos, tales como el arco, la n-esfera, el n-odo simple, el continuo $\sin(\frac{1}{x})$, la grafica finita, la curva universal de Sierpinski, el cubo de Hilbert, entre otros. Además, presentamos algunas propiedades que ellos cumplen y que necesitaremos para el desarrollo de nuestro estudio. En la segunda sección, definimos el espacio cociente y mostramos un método general de construir nuevos espacios a partir de otros que se conocen. Éste método nos sirve para construir los espacios, que son el tema principal de este trabajo.

2.1. Algunas propiedades de continuos

En esta sección damos la definición de un continuo y algunos ejemplos simples de continuos que usaremos en este trabajo. También presentamos algunos resultados relacionados con las propiedades tales como conexidad local, la propiedad del punto fijo, las retracciones, la contractibilidad, la homotopía y la unicoherencia.

Definición 2.1. *Un espacio métrico X es un **continuo** si X es compacto, conexo y no vacío. Dado $Y \subset X$, Y es un **subcontinuo** de X si Y es un continuo. X es **no degenerado** si tiene más de un punto.*

Definición 2.2. *Un **arco** es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$. Sean A un arco y $h : [0,1] \to A$ un homeomorfismo. Si denotamos $p = h(0)$ y $q = (1)$ entonces p y q se llaman los puntos extremos del arco A. Cuando escribimos que A es un arco desde p hasta q (o que A es un arco que va desde p hasta q) queremos decir que A es un arco con puntos extremos p y q.*

Definición 2.3. *Dada $n \in \mathbb{N}$, al producto topológico de n intervalos $[0,1]$ lo denotamos con I^n. Esto es:*

$$I^n = \prod_{k=1}^{n} I_k$$

*donde I_k es homeomorfo a $[0,1]$ para cada $k = 1, ..., n$. Una **n-celda** es un espacio homeomorfo a I^n.*

*Para cada $n \in \mathbb{N}$, la **frontera como variedad de** I^n denotada por ∂I^n, es el conjunto:*

$$\partial I^n = \{(x_i)_{i=1}^n \in I^n : x_i = 0 \text{ o } x_i = 1 \text{ para algun } i, \text{ con } i \in \{1, ..., n\}\}$$

Definición 2.4. *La **esfera unitaria n-dimensional** en $\mathbb{R}^{n+1}$ es el conjunto*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

*Una **n-esfera** es un espacio homeomorfo a S^n y una **curva cerrada simple** es un espacio homeomorfo a S^1. Notemos que una **(n-1)-esfera** es un espacio que es homeomorfo a ∂I^n.*

Definición 2.5. *Dado un entero $n > 3$, decimos que un continuo X es un **n-odo simple** si existen n subcontinuos, $A_1, A_2, ..., A_n$ de X y, un punto $v \in X$ tales que $X = A_1 \bigcup ... \bigcup A_n$, donde A_i es un arco que contiene a v como punto extremo, para cada $i = 1, ..., n$ y si $i \neq j$, $A_i \bigcap A_j = \{v\}$. En particular, cuando $n = 3$ decimos que X es un **triodo simple***

Definición 2.6. *El **continuo*** $\sin(\frac{1}{x})$. *Denotemos por* S *a la gráfica de* $\mathbb{R}^2$ *de la función* $\sin(\frac{1}{x})$ *para* $x \in (0,1]$ *tal que:*

$$S = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}.$$

*El **continuo*** $\sin(\frac{1}{x})$ *es la cerradura en* $\mathbb{R}^2$ *del conjunto* S.

Definición 2.7. *Una **gráfica finita** es un continuo que se puede expresar como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos, son ajenos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos*

Uno de los métodos de construir continuos interesantes es a partir de *intersecciones anidadas.*

En [7, teorema 1.8] se encuentra la prueba del siguiente resultado.

Teorema 2.8. *Si* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de subcontinuos de un espacio métrico* (Y, d), *tal que para toda* $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$ *entonces* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ *es un continuo.*

Ejemplo 2.9. ***La curva Universal de Sierpiński***. *Empezamos dividiendo el cuadrado* $S_0 = [0,1] \times [0,1]$ *en nueve cuadrados congruentes y tomamos* $S_1 = S_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. *Análogamente, dividimos cada uno de los restantes ocho cuadrados en nueve cuadrados congruentes, y llamamos* S_2 *al continuo que se obtiene al quitar el interior de cada uno de los ocho cuadrados centrales. Continuando de esta manera, definimos* S_3, S_4, *etc. Sea* $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$, *entonces* S *es un continuo, por teorema anterior, y es llamado la Curva Universal de Sierpiński. Ver Figura 2.1*

Ejemplo 2.10. *El **Cubo de Hilbert** es un espacio homeomorfo al producto cartesiano numerable:*

$$\prod_{i=1}^{\infty} I_i \quad para \quad cada \quad I_i = [0,1]$$

con la topología producto. Es un ejemplo de un continuo que tiene dimensión infinita.

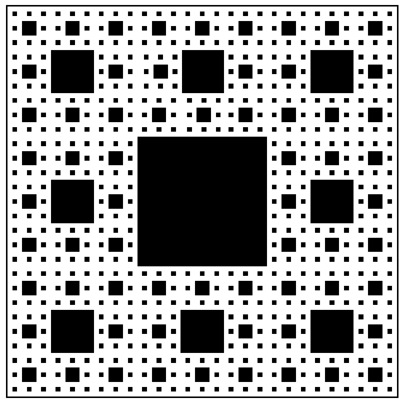

Figura 2.1: Curva universal de Sierpiński, primeros 4 pasos

Definición 2.11. *Un* ***arco libre*** *en un espacio métrico X es un arco α tal que $\alpha \backslash a, b$ donde a y b son puntos extremos de α, es un subconjunto abierto de X.*

A continuación estudiamos los conceptos de conexidad local, junto con algunas de sus propiedades.

Definición 2.12. *Sean X un continuo y $x \in X$. Decimos que X es* ***localmente conexo*** *en x, si para cada abierto U en X tal que $x \in U$, existe un abierto y conexo V en X tal que $x \in V \subset U$. Diremos que X es localmente conexo, si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

El intervalo cerrado $[0, 1]$ y la circunferencia unitaria S^1 son ejemplos de continuos localmente conexos. Otros ejemplos de continuos localmente conexos son las gráficas finitas, las n-celdas y el cubo de Hilbert. El continuo $\sin(\frac{1}{x})$ no es localmente conexo.

Teorema 2.13. *El cubo de Hilbert es localmente conexo.*

Demostración. Como el cubo de Hilbert es el producto numerable del intervalo $[0, 1]$ y este es conexo y localmente conexo, se tiene por [1, Teorema 6. A. 13] que $\prod_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$ es localmente conexo. $\square$

La prueba del siguiente lema la encontramos en [5, Teorema 5], el cual nos servirá posteriormente.

Lema 2.14. *La propiedad de ser un continuo localmente conexo es invariante bajo funciones continuas.*

La prueba del siguiente lema la podemos encontrar en [5, Teorema 3], el cual nos sera de mucha utilidad para nuestro trabajo.

Lema 2.15. *Todo subconjunto abierto de un espacio localmente conexo es localmente conexo.*

Definición 2.16. *Un continuo X es **descomponible** si X puede ser puesto como la union de dos subcontinuos propios. Diremos que X es **indescomponible** si X no es descomponible.*

Los continuos aquí estudiados son descomponibles, de hecho no es fácil encontrar continuos indescomponibles (diferentes de un punto).

Lema 2.17. *Un continuo X es descomponible si y solo si X contiene un subcontinuo propio con interior no vacío.*

Demostración. Si X es un continuo descomponible entonces X es la unión de dos subcontinuos propios Y y Z y, en este caso, $X\backslash Z$ es un abierto no vacío contenido en Y, de donde $int_X(Y) \neq \emptyset$.

Supongamos que X tiene un subcontinuo propio Y con interior no vacío. Si $X\backslash Y$ es conexo entonces por el Lema 1.22 $\overline{X\backslash Y}$ es conexo. Por el Teorema 1.33 (1) se tiene que $\overline{X\backslash Y}$ es compacto. Por lo tanto $\overline{X\backslash Y}$ es un subcontinuo propio de X. Luego $X = Y\bigcup \overline{X\backslash Y}$.

Ahora, si $X\backslash Y$ no es conexo entonces $X\backslash Y = U\bigcup V$, donde U y V son abiertos ajenos de X. Afirmamos que $Y\bigcup U$ y $Y\bigcup V$ son subcontinuos de X. Como $X\backslash(Y\bigcup U) = V$, se tiene que $Y\bigcup U$ es cerrado y, por el Teorema 1.33 (1) $Y\bigcup U$ es compacto. Análogamente se ve que $Y\bigcup V$ es compacto. Nos falta ver que $Y\bigcup U$ y $Y\bigcup V$ son conexos.

Si $Y\bigcup U$ no fuera conexo entonces $Y\bigcup U = K\bigcup L$, donde K y L

son abiertos en $Y \bigcup U$ ajenos no vacíos de $Y \bigcup U$, también K y L son cerrados de X. Puesto que $K = X \backslash L \bigcup V$ y $L = X \backslash K \bigcup V$ Como Y es conexo, por 1.21, $Y \subset K$ o $Y \subset L$, digamos que $Y \subset K$. Luego $L \subset U$, lo que implica que $L \bigcap Cl_X(V) = \emptyset$. Por lo anterior, se tiene que $X = L \bigcup (K \bigcup Cl_X(V))$. Pero L y $K \bigcup Cl_X(V))$ son cerrados no vacíos ajenos de X, lo que contradice la conexidad de X. Así $Y \bigcup U$ y $Y \bigcup V$ son conexos. Y por lo tanto son subcontinuos de X tales que, $X = (Y \bigcup U) \bigcup (Y \bigcup V)$. □

Una de las propiedades que estudiaremos mas adelante respecto de nuestro espacio es la siguiente:

Definición 2.18. *Un **punto fijo** de una función es un punto p tal que $f(p) = p$. Un espacio métrico X tiene la **propiedad del punto fijo** si toda función continua de X en X tiene un punto fijo.*

El intervalo $[0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo [19, Ejemplo 1.1]. Entre los espacios que no tienen la propiedad del punto fijo se encuentran las n-esferas, (en particular, S^1), el Toro $S^1 \times S^1$ y el Toro sólido $S^1 \times B^2$. [19, Ejemplo 1.4].

Respecto de esta propiedad, en [1, 2.B.6 (1)] se propone el siguiente ejercicio. Aquí nosotros lo resolvemos.

Ejemplo 2.19. *La propiedad del punto fijo es un invariante topológico (es decir, si X tiene la propiedad del punto fijo entonces cualquier espacio homeomorfo la tiene).*

Demostración. Sean X y Y dos espacios homeomorfos y supongamos que X tiene la propiedad del punto fijo. Sean $f : Y \to Y$ una función continua arbitraria y $g : X \to Y$ un homeomorfismo.

Observe que $g^{-1} \circ f \circ g : X \to X$ es continua. Como X tiene la propiedad del punto fijo, entonces $g^{-1} \circ f \circ g$ tiene un punto fijo, es decir, existe $p \in X$ tal que $g^{-1}(f(g(p))) = p$, aplicando g en ambos lados, ya que g es continua nos queda

$$f(g(p)) = g(p).$$

Así $g(p)$ es un punto fijo de f. Por lo tanto Y tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Por el ejemplo anterior y como $[0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo, entonces se tiene que cualquier arco tiene la propiedad del punto fijo.

Definición 2.20. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Se dice que A es un **retracto** de X si existe una función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para cualquier $a \in A$. En este caso se dice que r es una **retracción** de X en A. Un espacio métrico compacto X es un **retracto absoluto** si cada vez que X sea homeomorfo a un subconjunto cerrado B de un espacio métrico Y, resulta que B es un retracto de Y.*

El siguiente resultado se encuentra en [3, Corolario 9.2]

Teorema 2.21. *Sea K un espacio métrico compacto contenido en $\mathcal{Q} = \prod_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$. Si K es un retracto de $\mathcal{Q}$, entonces K es un retracto absoluto.*

Note que el Cubo de Hilbert es un retracto de sí mismo (la función identidad es una retracción). Luego se tiene el resultado siguiente:

Corolario 2.22. *El Cubo de Hilbert es un retracto absoluto.*

La prueba del siguiente resultado se puede encontrar en [3, Corolario 21.4]

Corolario 2.23. *Todo retracto absoluto tiene la propiedad del punto fijo.*

Por el Corolario 2.22 y el Corolario 2.23, tenemos que el cubo de Hilbert tiene la propiedad del punto fijo.

Lema 2.24. *Si X tiene la propiedad del punto fijo y A es un retracto de X, entonces A tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow A$ una función continua. Debemos probar que existe $a \in A$ tal que $f(a) = a$. Sea $r : X \to A$ una retracción, es decir $r(a) = a$ para cada $a \in A$. Observe que $f \circ r : X \longrightarrow A \subseteq X$ es una función continua. Como X tiene la propiedad del punto fijo, existe $p \in X$ tal que $(f \circ r)(p) = p$. Note que para toda $x \in X$ $(f \circ r)(x) \subseteq A$ para cada $x \in X$. Esto implica que $(f \circ r)(p) \in A$. Es decir, $p \in A$. Luego, $p = (f \circ r)(p) = f(r(p)) = f(p)$. Por lo tanto A tiene la propiedad del punto fijo. □

El siguiente resultado es el Teorema de Brower, el cual es el teorema más celebre sobre la propiedad del punto fijo. [3, Teorema 21.1].

Teorema 2.25. *Cualquier n-celda tiene la propiedad del punto fijo.*

El resultado que a continuación enunciamos es conocido como el **Teorema de Golpes en la Frontera**. Este Teorema tiene muchas aplicaciones en la teoría de continuos y en hiperespacios. Una prueba puede ser encontrada en [8, Teorema 5.4].

Teorema 2.26. *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto, propio y no vacío de X. Si K es una componente de $cl(U)$, entonces $K \bigcap Fr(U) \neq \emptyset$.*

La prueba del siguiente resultado la podemos encontrar en [8, Corolario 5.5].

Corolario 2.27. *Sea X un continuo no degenerado. Si A es un subcontinuo propio de X y U es un subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$ entonces existe un subcontinuo B de X tal que $A \subsetneq B \subset U$.*

Definición 2.28. *Sean X y Y espacios topológicos. Una función continua de $X \times [0,1]$ en Y se llama* ***homotopía.*** *Si f y $g : X \to Y$ son* *funciones continuas y si $h : X \times [0,1] \to Y$ es una homotopía tal que, para cada $x \in X$:*

$$h(x,0) = f(x)$$

$$y$$

$$h(x,1) = g(x),$$

*decimos que h es una homotopía de f a g. Cuando existe una homotopía de f a g, decimos que f y g son **homotópicas**.*

Definición 2.29. *Un espacio topológico X es **contraíble** si la función identidad en X es homotópica a una función constante de X en X. Más en general, X es contraíble con respecto a un espacio topológico Z si toda función continua de X en Z es homotópica a una función constante de X en Z.*

Entre algunos ejemplos de espacios contraíbles se encuentran todos los subconjuntos convexos de los espacios $\mathbb{R}^n$, [1, Ejemplo 5.B.4], en particular el intervalo $[0,1]$ es convexo y así contraíble, el abanico armónico, el cono sobre cualquier espacio, etc. Entre los ejemplos de espacios no contraíbles se encuentran, la circunferencia unitaria [1, Ejemplo 5.B.5], las esferas (*huecas*) de todas las dimensiones, los espacios que no son arco conexos, etc.

Teorema 2.30. *El cubo de Hilbert es contraíble.*

Demostración. Por el Corolario 2.22 se tiene que el Cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$ es un retracto absoluto. Y como todo retracto absoluto es contraíble por [3, 19.11] se tiene que el Cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$ es contraíble. $\square$

En 1926 Vietoris introdujo la noción de unicoherencia. Los resultados más importantes relacionados con este concepto se deben a Borsuk, Eilenberg y Ganea.

Definición 2.31. *Un continuo X es **unicoherente**, si para cada par de subcontinuos A y B de X tales que $A \bigcup B = X$, resulta que la intersección $A \bigcap B$ es conexa.*

El intervalo cerrado $[0,1]$ es unicoherente mientras que la circunferencia unitaria S^1 no lo es. [5, Ejemplos pag. 163].

El siguiente resultado lo encontramos en [3, Lema 19.7] y lo usaremos mas adelante.

Lema 2.32. *Si un continuo es contraíble con respecto a S^1 entonces el continuo es unicoherente.*

2.2. Espacios cociente

En esta sección, presentaremos un método general de construir nuevos espacios a partir de otros que se conocen. En particular, este método sirve para construir los espacios que son el tema principal de este trabajo.

Definición 2.33. *Una* ***Descomposición*** *(o* ***partición****) de un conjunto X es una colección de conjuntos no vacíos, ajenos entre sí cuya unión es X.*

Definición 2.34. *Sea $\mathscr{G}$ una descomposición de un espacio métrico X. El* ***espacio cociente,*** *$X/\mathscr{G}$, es el conjunto cuyos elementos son los elementos de la descomposición $\mathscr{G}$. La función $q : X \to X/\mathscr{G}$, la cual envía cada punto x de X al único elemento G de $\mathscr{G}$ tal que $x \in G$ se llama la* ***función cociente*** *(o función natural).*

Observación 2.35. *Dada una descomposición de un espacio métrico X, notemos que $q(x) = q(y)$ si y solo si x y y pertenecen al mismo elemento de $\mathscr{G}$. Al conjunto $X/\mathscr{G}$ se le da una topología de tal modo que la función q sea continua y que sea la más grande con esta propiedad.*

Definición 2.36. *Sean X un espacio métrico, $\mathscr{G}$ una descomposición de X y $q : X \to X/\mathscr{G}$ la función cociente. La topología:*

$$\mathscr{U} = \{U \subset X/\mathscr{G} : q^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

se llama la ***Topología cociente*** *para $X/\mathscr{G}$.*

Observación 2.37. *Sean* $\mathscr{G}$ *una descomposición de un espacio métrico* X *y* $q : X \to X/\mathscr{G}$ *la función cociente. Un subconjunto* U *de* $X/\mathscr{G}$ *es abierto (cerrado) si y solo si* $q^{-1}(U)$ *es un subconjunto abierto (cerrado) en* X*.*

Intuitivamente, un espacio cociente es el espacio que se obtiene del original al identificar todos los puntos de cada miembro de una partición dada. Los espacios cociente son una fuente importante de ejemplos, contraejemplos y de teoremas en la teoria de continuos. A los espacios cociente también se les llama **espacios de descomposición** o **de identificación.**

Cabe mencionar que un espacio cociente de un continuo no necesariamente es un continuo [8, pág. 37]. Un criterio para saber cuándo un espacio cociente de un continuo es un continuo es el siguiente:

Teorema 2.38. *Un espacio cociente de un continuo es un continuo si y solo si es de Hausdorff. [8, Teorema 3.4].*

Definición 2.39. *Sean* X *un espacio métrico y* $\mathscr{G}$ *una descomposición de* X*. Decimos que* $\mathscr{G}$ *es* ***semicontinua superiormente*** *si para cada* $G \in \mathscr{G}$ *y cada subconjunto abierto* U *de* X *tal que* $G \subset U$*, existe un subconjunto abierto* V *de* X *tal que* $G \subset V$ *y tal que si* $G' \in \mathscr{G}$ *y* $G' \bigcap V \neq \emptyset$ *entonces* $G' \subset U$*.*

El resultado siguiente es otro criterio útil para construir continuos.

Teorema 2.40. *Si* X *es un continuo y* $\mathscr{G}$ *es una descomposición semicontinua superiormente de* X *entonces* $X/\mathscr{G}$ *es un continuo [11, Teorema 1.7.3].*

Los ejemplos siguientes nos muestran cómo las descomposiciones semicontinuas superiormente dan como resultado continuos interesantes:

Ejemplo 2.41. ***La Banda de Moebius.*** *Sea* $\mathscr{G}$ *la partición del cuadrado sólido* $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ *cuyos miembros son:*

$$\{(x,0),(1-x,1)\} \text{ para } 0 \leq x \leq 1, \ \{(x,y)\} \text{ para } 0 < y < 1$$

Como $\mathscr{G}$ es una descomposición semicontinua superiormente tenemos, por el Teorema 2.40, que es el espacio cociente es un continuos. A este espacio se le llama la Banda de Moebius.

Ejemplo 2.42. ***El M-Continuo.*** *Sean X el continuo $\sin(\frac{1}{x})$ y, $\mathscr{G}$ la partición de X cuyos elementos no degenerados son:*

$$\{(0,y),(0,1-y)\} \quad \textit{para cada } y \textit{ tal que } 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$$

Como $\mathscr{G}$ es una descomposición semicontinua superiormente, tenemos por el Teorema 2.40, que el espacio cociente es un continuo. A este espacio se le llama el M-Continuo.

El ejemplo que sigue es de particular interés para nosotros pues es una construcción en la cual nos apoyamos para definir el espacio con el cual vamos a trabajar.

Ejemplo 2.43. ***Los espacios*** X/A. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto cerrado no vacío de X. Sea $\mathscr{G}_A$ la partición de X dada por:*

$$\mathscr{G}_A = \{A\} \bigcup \{\{z\} : z \in X \backslash A\}.$$

No es difícil ver que $\mathscr{G}_A$ es una descomposición semicontinua superiormente. Denotamos a este espacio cociente por X/A. Intuitivamente, X/A lo vemos como el espacio que se obtiene de X al identificar A a un punto. Si X es un continuo entonces, por el Teorema 2.40, tenemos que X/A es un continuo.

Ejemplo 2.44. *El* ***cono topológico:*** *y la* ***suspensión topológica:*** *son casos especiales de los espacios X/A [8, 3.15, 3.16].*

Capítulo 3

Propiedades de $C_n(X)$

En este capítulo definimos a los hiperespacios 2^X, $C(X)$, $C_n(X)$, $F_n(X)$ y $F_1(X)$ asociados a un continuo X y presentamos algunas de sus propiedades elementales.

3.1. Hiperespacios

Los hiperespacios son ciertas familias de subconjuntos de un continuo X con alguna característica en particular. Los que estudiaremos son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \textit{ es cerrado y no vacío}\}$$
$$C(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ es conexo}\}$$

Y para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ tiene a lo más } n \textit{ componentes}\}$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$$
$$F_1(X) = \{\{p\} : p \in X\}$$

Observe que estos espacios se definen como subespacios de 2^X. Además $C(X)$ es lo mismo que $C_1(X)$ y se conoce como el **hiperespacio de subcontinuos de** X.

El espacio $C_n(X)$ es llamado el **n-ésimo hiperespacio de** X, $F_n(X)$ es llamado el **n-ésimo producto simétrico** y $F_1(X)$ por tanto es llamado **producto simétrico**. Además observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n(X) \subset C_n(X),$$
$$C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$$
$$y$$
$$F_n(X) \subset F_{n+1}(X).$$

Aquí exhibiremos algunos de los resultados de los n-ésimos hiperespacios que vamos a utilizar.

En el siguiente resultado se define la métrica para 2^X :

Teorema 3.1. *Sea X un continuo con métrica d. La función $\mathcal{H} : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ dada por:*

$$\mathcal{H}(A, B) = \text{ínf}\,\{\epsilon > 0 : A \subset B^d_\epsilon(B) \text{ y } B \subset B^d_\epsilon(A)\}$$

es una métrica para 2^X.

Una prueba de que tal función es una métrica la encontramos en [11, Teorema 1.8.3].

A esta métrica se le llama **métrica de Hausdorff**.

Notemos que $F_1(X)$ es un subconjunto no degenerado de 2^X, pues X es un conjunto no degenerado y que la restricción de la métrica de Hausdorff $\mathcal{H}$ a $F_1(X)$, hace de éste un espacio métrico.

Es un hecho que si X es un continuo entonces $F_n(X)$ es un continuo [11, Corolario 1.8.8]. Para $C(X)$ y 2^X, se sabe más: son continuos arcoconexos [11, Teorema 1.8.10]. También $C_n(X)$ es un continuo arcoconexo para cada $n \in \mathbb{N}$ [11, Teorema 1.8.12].

Sea X un espacio métrico compacto. Dada una colección finita de conjuntos abiertos, $U_1, ..., U_m$, definimos:

$< U_1, ..., U_m >= \{A \subset 2^X : A \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_k \ y \ A \bigcap U_k \neq \emptyset \ para \ cada \ 1 \leq k \leq m\}$.

Definamos

$\mathscr{B} = \{< U_1, ..., U_m >: U_1, ..., U_m \ son \ subconjuntos \ abiertos \ de \ X, \ m \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 3.2. *Si X es un espacio métrico compacto entonces $\mathscr{B}$ es una base para una topología de 2^X.*

Una prueba del teorema anterior se encuentra en [7, Teorema 0.11].

Definición 3.3. *La topología para 2^X dada por el teorema anterior, es llamada la **Topología de Vietoris.***

Teorema 3.4. *Si X es un espacio métrico compacto entonces la topología inducida por la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris son la misma. [7, Teorema 0.13].*

Definición 3.5. *Sean X un espacio métrico compacto y A y $B \in 2^X$. Un **arco de orden** que va desde A hasta B (o que va de A a B) es una función continua e inyectiva, $\alpha : [0,1] \to 2^X$ tal que $\alpha(0) = A, \alpha(1) = B$ y cada $s, t \in [0,1]$ con $s < t$, $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.*

El concepto de arco de orden es de mucha utilidad para los resultados de la tesis.

Observación 3.6. *Un arco de orden en 2^X es un arco $\alpha \subset 2^X$ tal que si $A, B \in \alpha$ entonces $A \subset B$ o $B \subset A$ [7, Definición 1.2].*

Una prueba del teorema que sigue se encuentra en [7, Teorema 1.8]:

Teorema 3.7. *Sean X un espacio métrico compacto y A y $B \in 2^X$. Entonces existe un arco de orden que va desde A hasta B si y solo si $A \subset B$ y cada componente de B intersecta a A.*

3.2. Propiedades de $C_n(X)$

En 1939, Wojdislawski demostró que X es un continuo si y solo si $C_n(X)$ es un retracto absoluto, [17, Theoreme IIm] lo cual nos sirve para demostrar el siguiente resultado.

Teorema 3.8. *Sea n un entero positivo. Un continuo X es localmente conexo si y solo si $C_n(X)$ es localmente conexo. [11, 6.1.4]*

Demostración. Supongamos que X es un continuo localmente conexo, por el resultado de Wojdyslawski, tenemos que $C_n(X)$ es un retracto absoluto. Luego por [1, Teorema 2.6] se tiene que $C_n(X)$ es localmente conexo.

Ahora supongamos que $C_n(X)$ es localmente conexo. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X que contiene a x. Como $C_n(X)$ es localmente conexo existe un subconjunto abierto y conexo $\mathcal{V}$ de $C_n(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{V} \subset Cl(\mathcal{V}) \subset< U >_n$. Donde $< U >_n$ denota la intersección del conjunto abierto $< U_1, ..., U_n >_n$ de la topología de Vietoris con $C_n(X)$.

Sea $< V_1, ..., V_k >_n$ un Vietórico de $C_n(X)$ tal que

$$\{x\} \in< V_1, ..., V_k >_n \subset \mathcal{V}.$$

Sea $V = \bigcap_{j=1}^{k} V_j$. Ahora, si $y \in V$ entonces $y \in \sigma(Cl(\mathcal{V}))$, donde σ denota la función unión. Como $\{x\} \in Cl(\mathcal{V})$ se tiene que $\sigma(Cl(\mathcal{V})) \in$

$C(X)$ [7, Teorema 0.49]

Luego, x y y pertenecen a $\sigma(Cl(\mathcal{V})) \subset U$. Se sigue que X es conexo en pequeño en x. Como x es un punto arbitrario de X se tiene que X es localmente conexo. $\square$

La prueba del siguiente teorema la encontramos en [15, Teorema 7.1] y el cual será de utilidad para este trabajo.

Teorema 3.9. *Si X es un continuo localmente conexo y sin arcos libres entonces $C_n(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

En [11, Teorema 6.2.4] Sergio Macías prueba el siguiente resultado.

Teorema 3.10. *Si X es un continuo entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, cada función continua de $C_n(X)$ al círculo unitario S^1 es homotópica a una función constante. En particular se tiene que $C_n(X)$ es unicoherente.*

Definición 3.11. *Decimos que un espacio topológico, X, tiene **la propiedad (b)** si X es contraíble con respecto a S^1.*

El continuo $[0,1]$ tiene la propiedad (b) porque es contraíble. [3, Lema 19.4]

En [15, 4.8] Sergio Macías demuestra el siguiente resultado:

Teorema 3.12. *Si X es un continuo y n un entero positivo, entonces $C_n(X)$ tiene la propiedad (b).*

Definición 3.13. *Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces, X es **conexo en pequeño** en x, si para cada abierto U en X tal que $x \in U$, existe un conexo V en X tal que $x \in int(V) \subset V \subset U$. Diremos que X es conexo en pequeño, si X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.*

El resultado que sigue nos da una caracterización entre la conexidad local y la conexidad en pequeño. [11, Teorema 1.7.12]

Teorema 3.14. *Un continuo X es conexo en pequeño si y solo si es localmente conexo.*

El teorema anterior sirve para probar el lema siguiente. [18, Lema 5.1].

Lema 3.15. *Sea X un continuo y n un entero positivo. Si el espacio $C_n(X)\backslash F_1(X)$ es localmente conexo entonces X es localmente conexo.*

Capítulo 4

Propiedades del hiperespacio $PHS_n(X)$

En este capítulo, definimos al n-ésimo pseudohiperespacio suspensión de un continuo X y estudiamos las propiedades que cumplen bajo ciertas condiciones, tales como la conexidad local, la aposindesis, la propiedad (b) y la conexidad colocal, además de revisar otras propiedades como la contractibilidad, el hecho de ser variedad de Cantor, así como la dimensión topológica y la propiedad del punto fijo. Finalmente ejemplificamos estas propiedades basándonos en los hiperespacios $PHS_n([0,1])$ y $PHS_n(S^1)$.

4.1. El n-ésimo pseudohiperespacio suspensión

En esta sección definimos el hiperespacio $PHS_n(X)$ y en particular observamos que es un continuo y que la función cociente q_X^n es monótona.

Definición 4.1. ***El n-ésimo pseudohiperespacio suspensión de***

un continuo *X denotado por $PHS_n(X)$ es el espacio cociente:*

$$PHS_n(X) = C_n(X)/F_1(X)$$

con la topología cociente.

Intuitivamente podemos pensar en $PHS_n(X)$ cuando en $C_n(X)$ "apachurramos" su "base" $F_1(X)$ en un punto.

Como $F_1(X)$ es un continuo, en particular es un compacto contenido en el continuo $C_n(X)$ se tiene que $F_1(X)$ es cerrado.
Observemos que la partición:

$$\mathcal{D} = \{F_1(X)\} \bigcup \{\{A\} : A \in C_n(X) \backslash F_1(X)\}$$

es semicontinua superiormente. Ver Ejemplo 2.43.

Luego, por [8, Teorema 3.10] tenemos que $C_n(X)/F_1(X)$ es un continuo.

Notación 4.2. *Dado un continuo X la función:*

$$q_X^n : C_n(X) \to PHS_n(X)$$

denota la función cociente definida por:

$$q_X^n(A) = \{A\} \text{ si } A \in C_n(X) \backslash F_1(X)$$

$$q_X^n(F_1(X)) = \{F_X^n\}.$$

Observación 4.3. *Notemos que de la definición se sabe inmediatamente que:*

$$PHS_n(X) \backslash \{F_X^n\} \text{ es homeomorfo a } C_n(X) \backslash F_1(X).$$

Definición 4.4. *Una función continua y suprayectiva entre continuos $f : X \to Y$ es monótona si para $y \in Y$, $f^{-1}\{y\}$ es conexo.*

Lema 4.5. *La función cociente $q_X^n : C_n(X) \to PHS_n(X)$ es monótona*

Demostración. Veamos que q_X^n es monótona para esto primero veamos que q_X^n es suprayectiva.

Sea $\mathcal{D} \in PHS_n(X)$, es decir $\mathcal{D} = \{A\} \neq \{F_X^n\}$ ó $\mathcal{D} = \{F_X^n\}$. Si $\mathcal{D} = \{A\} \neq \{F_X^n\}$ entonces existe $A \in C_n(X)$ tal que $q_X^n(A) = \{A\}$. Si $\mathcal{D} = \{F_X^n\}$ entonces para cualquier $\{p\} \in F_1(X)$, $q_X^n(\{p\}) = F_X^n$.

Ahora veamos que si $\mathcal{D} \in PHS_n(X)$, $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{D})$ es conexo. Si $\mathcal{D} = \{A\}$ donde $\{A\} \neq \{F_X^n\}$ entonces

$$(q_X^n)^{-1}(\{A\}) = \{A \in C_n(X) : q_X^n(A) = \{A\}\} = \{A\}.$$

Luego, $(q_X^n)^{-1}(\{A\})$ es conexo por ser un conjunto de un solo punto.

Ahora si $\mathcal{D} = \{F_X^n\}$ entonces $(q_X^n)^{-1}(\{F_X^n\}) = \{A \in C_n(X) : q_X^n(A) = F_X^n\} = F_1(X)$, el cual es conexo. Por lo tanto q_X^n es monótona. $\square$

4.2. Conexidad local de $PHS_n(X)$

En esta sección demostramos una propiedad importante de la topología que cumple $PHS_n(X)$ (conexidad local) siempre y cuando el continuo X lo sea. Además, damos algunos resultados que involucran al cubo de Hilberth en el estudio de propiedades de $PHS_n(X)$, y por último hacemos notar que el intervalo y la circunferencia unitarios tienen n-ésimo pseudohiperespacio suspensión único.

En el Lema 3.15 mencionamos que si $C_n(X)\backslash F_1(X)$ es localmente conexo entonces X es localmente conexo. Esta propiedad de $C_n(X)$ la usamos en la demostración del siguiente resultado:

Teorema 4.6. *Un continuo X es localmente conexo si y solo si $PHS_n(X)$ es localmente conexo, para cada entero positivo n.*

Demostración. Si $n = 1$, el caso se reduce a probar que $PHS_1(X)$ es localmente conexo si y solo si X es localmente conexo, pero $PHS_1(X) =$

$HS_1(X) = HS(X)$. Luego por [13, Teorema 5.1] se tiene este caso.

Ahora para $n \geq 2$, supongamos que X es localmente conexo. Por el Teorema 3.8 $C_n(X)$ es localmente conexo. Como $q_X^n(C_n(X)) = PHS_n(X)$ y puesto que q_X^n es continua, tenemos por el Teorema 2.14 que $PHS_n(X)$ es localmente conexo.

Ahora supongamos que $PHS_n(X)$ es localmente conexo. Observe que $\{F_X^n\}$ es un cerrado en $PHS_n(X)$. Luego, $PHS_n(X)\backslash\{F_X^n\}$ es un subconjunto abierto de $PHS_n(X)$ y por el Lema 2.15 se tiene que $PHS_n(X)\backslash\{F_X^n\}$ es localmente conexo.

Si restringimos la función q_X^n a $C_n(X)\backslash F_1(X)$ se sigue que

$$q_X^n\mid_{C_n(X)\backslash F_1(X)}: C_n(X)\backslash F_1(X) \to PHS_n(X)\backslash\{F_X^n\}$$

es un homeomorfismo por la Observación 4.3. De esta manera $C_n(X)\backslash F_1(X)$ es localmente conexo. Ahora por el Lema 3.15 X es localmente conexo. □

Con el teorema anterior podemos ya saber que los n-ésimos pseudohiperespacios suspensión de los continuos localmente conexos que conocemos, son localmente conexos. En particular, el siguiente.

Ejemplo 4.7. *$PHS_n([0,1])$ es localmente conexo.*

Definición 4.8. *Una función $r : X \to Y$ es una **r-función** si existe una función $g : Y \to X$ tal que $r \circ g = I_Y$.*

Definición 4.9. *Dados una función continua $f : X \to Y$ entre continuos y $n \in \mathbb{N}$, la función $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ definida por $C_n(f)(A) = f(A)$, es la función inducida por f entre $C_n(X)$ y $C_n(Y)$. De [3, Lema 13.3] se sabe que $C_n(f)$ es continua.*
La función $PHS_n(f) : PHS_n(X) \to PHS_n(Y)$ dada por:

$$PHS_n(f)(A) = \begin{cases} q_Y^n(f((q_X^n)^{-1})(A)) & si \quad A \neq F_X^n. \\ \\ F_Y^n & si \quad A \neq F_X^n. \end{cases}$$

*se llama la **función inducida por f** entre $PHS_n(X)$ y $PHS_n(Y)$.*

Recordemos que un arco libre en un espacio métrico X es un arco α tal que $\alpha\setminus\{a,b\}$ donde a y b son puntos extremos de α es un subconjunto abierto de X.

El siguiente resultado muestra un ejemplo de un continuo localmente conexo X sin arcos libres tal que $PHS_n(X)$ no es homeomorfo al cubo de Hilbert.

Ejemplo 4.10. *Sean $X = S^1 \times [0,1]$ y $p : X \to S^1$ la función proyección. Note que p es una r-función de X sobre S^1 pues existe, por ejemplo, $g : S^1 \to X$ definida por $g(a) = (a,0)$ y tal que $(p \circ g)(a) = p(g(a)) = p(a,0) = a$. Es decir, $p \circ g = I_{S^1}$. También, la función inducida $PHS_n(p) : PHS_n(X) \to PHS_n(S^1)$ es una r-función. Por [6, Teorema 2.6], tenemos que $PHS_n(S^1)$ no tiene la propiedad del punto fijo. Así que, $PHS_n(X)$ tampoco tiene la propiedad del punto fijo. Por lo tanto $PHS_n(X)$ no es homeomorfo al cubo de Hilbert ya que el cubo de Hilbert si tiene la propiedad del punto fijo.*

En el ejemplo anterior, el espacio X cumple con ser localmente conexo y no tiene arcos libres y concluimos que su $PHS_n(X)$ no es homeomorfo al cubo de Hilbert. Sin embargo, si un espacio X cumple además la condición de ser contraíble entonces sí podemos concluir que su $PHS_n(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert, como se afirma en el siguiente teorema.

Teorema 4.11. *Si X es un continuo localmente conexo, contraíble y sin arcos libres entonces $PHS_n(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert, para cada entero positivo n.*

Para el caso $n = 1$, la prueba fue dada por [13, Teorema 5.4]. Para $n \geq 2$ la prueba se encuentra en [6, Teorema 2.25]

El corolario que sigue nos dice cuándo un n-ésimo pseudohiperespacio suspensión de un continuo es homeomorfo a su n-ésimo hiperespacio.

Corolario 4.12. *Si X es un continuo localmente conexo, contraíble y sin arcos libres, entonces $PHS_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(X)$.*

Demostración. Por el teorema anterior sabemos que $PHS_n(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert. Y por el Teorema 3.9, $C_n(X)$ también es homeomorfo al cubo de Hilbert. Por lo tanto $PHS_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(X)$. $\square$

Puesto que el cubo de Hilbert es un continuo localmente conexo, contraíble y sin arcos libres, el resultado que sigue es una consecuencia inmediata del Teorema 4.11.

Corolario 4.13. *Si X es el cubo de Hilbert entonces $PHS_n(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert, para cada entero $n \geq 2$.*

El resultado que sigue a continuación muestra que el intervalo y la circunferencia unitarios tienen n-ésimo pseudohiperespacio suspensión único y la prueba se encuentra en [6, Teorema 2.29].

Teorema 4.14. *Sean X un continuo y n un entero positivo tal que $n \geq 2$. Si $PHS_n(X)$ es homeomorfo a $PHS_n([0,1])$ entonces X es homeomorfo a $[0,1]$. También, si $PHS_n(X)$ es homeomorfo a $PHS_n(S^1)$ entonces X es homeomorfo a S^1.*

4.3. Aposindesis

En esta sección estudiamos otra propiedad importante de la teoría de continuos (Aposindesis) y demostramos que el n-ésimo pseudohiperespacio suspensión $PHS_n(X)$ es aposindético (en particular colocalmente conexo) no importando si el continuo X lo es o no.

Definición 4.15. *Un continuo X es **colocalmente conexo** en $p \in X$ si para cada subconjunto abierto V de X tal que $p \in V$, existe un subconjunto abierto W de X tal que $p \in W \subset V$ y $X \setminus W$ es conexo. El continuo X es colocalmente conexo si es colocalmente conexo en cada uno de sus puntos*

Ejemplo 4.16. *El intervalo unitario $I = [0,1]$ solamente es colocalmente conexo en $\{0,1\}$*

Demostración. Si $p = 0$, sea V un abierto en I tal que $0 \in V$. Luego V es de la forma $[0, a)$ $\forall a \in (0, 1]$. Sea $W = [0, b)$ donde $b < a$. Note que $0 \in W \subset V$. Además $X \backslash W = [b, 1]$ el cual es conexo. Por lo tanto I es colocalmente conexo en 0.

Análogamente I es colocalmente conexo en 1.

Ahora, supongamos que $p \in I$, donde $p \neq 0$ y $p \neq 1$. Sea V un abierto en I tal que $p \in V$. Sin pérdida de generalidad hagamos $V = (p - \epsilon, p + \epsilon)$ $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$. Considere $W = B_\delta(p)$ tal que $\delta < \epsilon$. También $p \in W \subset V$. Pero $X \backslash W = [0, p - \delta] \bigcup [p + \delta, 1]$ el cual no es conexo. Esto contradice nuestra suposición. $\square$

Ejemplo 4.17. *La circunferencia unitaria S^1 es colocalmente conexo.*

Demostración. Sean $p \in S^1$ y V un abierto de S^1 tal que $p \in V$. Observe que V es un arco. Consideremos W un arco sobre S^1 tal que $p \in W \subset V$, luego $X \backslash W$ es un arco y por tanto es conexo. Así S^1 es colocalmente conexo. $\square$

La prueba del siguiente teorema la encontramos en [6, Teorema 2.35].

Teorema 4.18. *Si X es un continuo y n es un entero tal que $n \geq 2$ entonces $PHS_n(X)$ es colocalmente conexo.*

El resultado anterior nos dice que no importa si el continuo X es colocalmente conexo o no, siempre su $PHS_n(X)$ lo será.

Definición 4.19. *Dados p y $q \in X$, se dice que X es* ***aposindético en p respecto de q*** *si existe un subcontinuo W de X tal que $p \in int(W)$ y $q \notin W$. Si X es aposindético en un punto $p \in X$ respecto de cada punto $q \in X \backslash \{p\}$ entonces X es aposindético en p. Se dice que X es aposindético si X es aposindético en p para cada $p \in X$.*

Ahora veamos que la conexidad colocal implica la aposindesis.

Teorema 4.20. *Si X es un continuo colocalmente conexo entonces X es aposindético.*

Demostración. Sean p y $q \in X$. Probemos que existe un subcontinuo Z tal que $p \in Int(Z)$ y $q \notin Z$ para cada $q \in X \setminus \{p\}$. Sea V un abierto de X tal que $q \in V$. Puesto que X es colocalmente conexo entonces existe un subconjunto abierto W de X tal que $q \in W \subset V$ y $X \setminus W$ es conexo. Note que $p \in X \setminus W$ y que $X \setminus W$ es cerrado en X. Como $X \setminus W$ es conexo, se sigue que $X \setminus W$ es un continuo tal que $p \in Int(X \setminus W)$ y $q \notin X \setminus W$. Por lo tanto X es aposindético en p y como p es cualquiera entonces X es aposiendético. $\square$

El recíproco del teorema anterior no se cumple pues el intervalo unitario es aposindético pero no es colocalmente conexo. Luego, el resultado siguiente es una consecuencia del Teorema 4.20 y del Teorema 4.18.

Corolario 4.21. *Si X es un continuo y n es un entero positivo tal que $n \geq 2$, entonces $PHS_n(X)$ es aposindético.*

El resultado anterior nos dice que siempre el $PHS_n(X)$ de un continuo será aposindético sin importar que el continuo X no lo sea.

Por ejemplo si $X = \sin(\frac{1}{x})$, el cual no es aposindético, se tiene que $PHS_n(\sin(\frac{1}{x}))$ si lo es.

4.4. Propiedades generales

En esta sección estudiamos otras propiedades que cumple el $PHS_n(X)$ bajo ciertas condiciones; por ejemplo, la propiedad (b), la contractibilidad, la dimensión topológica y el hecho de ser variedad de Cantor.

Recordemos que un continuo X tiene la propiedad (b) si X es contraíble respecto de S^1. Ver Definición 3.11.

Teorema 4.22. *Si X es un continuo y n es un entero positivo, entonces $PHS_n(X)$ tiene la propiedad (b).*

Demostración. En [13, Teorema 4.1] se demuestra que $HS(X)$ tiene la propiedad b) para el caso $n = 1$.

Para el caso $n \geq 2$, tenemos por el Teorema 3.12 que $C_n(X)$ tiene la propiedad b). Por otra parte, por el Lema 4.5 se tiene que q_X^n es monótona. Además en [5, Teorema 2, pag 434], Kuratowski demuestra que la imagen monótona de un continuo que tiene la propiedad b) también tiene la la propiedad b) y como $q_X^n(C_n(X)) = PHS_n(X)$, se sigue que $PHS_n(X)$ tiene la propiedad b). $\square$

Corolario 4.23. *Si X es un continuo y n es un entero positivo, $n \geq 2$ entonces $PHS_n(X)$ es unicoherente.*

Demostración. Dado que $PHS_n(X)$ tiene la propiedad (b), (Teorema 4.22), tenemos el resultado por el Lema 2.32. $\square$

En [6, Teorema 2.8], se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 4.24. *Si X es un continuo contraíble y n es un entero positivo entonces, $PHS_n(X)$ es contraíble.*

El teorema siguiente trata sobre la dimensión topológica de $PHS_n(X)$ y es importante para este trabajo pues nos servirá para analizar unos n-ésimos pseudohiperespacios suspensión particulares. Su prueba la encontramos en [6, Teorema 2.13].

Teorema 4.25. *Sean X un continuo de dimensión finita y n un entero tal que $n \geq 2$. Entonces $dim(C_n(X)) < \infty$ si y solo si $dim(PHS_n(X)) < \infty$. Aún más, si $dim(C_n(X)) < \infty$ o $dim(PHS_n(X)) < \infty$, entonces $dim(C_n(X)) = dim(PHS_n(X))$.*

Definición 4.26. *Sea X un continuo de dimensión finita, decimos que X es una **variedad de Cantor** si para cualquier subconjunto A de X tal que $dim(A) \leq dim(X) - 2$ entonces $X \backslash A$ es conexo.*

Los continuos $[0,1]$ y S^1 son ejemplos de variedades de Cantor.

La prueba del siguiente resultado la encontramos en [6, Teorema 2.18]

Teorema 4.27. *Sean X un continuo y n un entero positivo tal que $n \geq 2$. Si $C_n(X)$ es una variedad de cantor tal que $n+2 \leq dim(C_n(X)) \leq \infty$ entonces $PHS_n(X)$ es una variedad de Cantor tal que $dim(PHS_n(X)) \leq \infty$.*

4.5. Algunas propiedades de $PHS_n([0,1])$ y de $PHS_n(S^1)$

En esta sección nos enfocamos primordialmente a analizar y estudiar los propiedades que $PHS_n([0,1])$ y $PHS_n(S^1)$ cumplen, como ejemplos básicos de los n-ésimos pseudohiperespacios suspensión.

Como lo mencionamos en la sección 2.1 sabemos que el intervalo unitario es contraíble. Luego, por el Teorema 4.24 se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.28. *$PHS_n([0,1])$ es contraíble para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Por otra parte, sabemos que S^1 no es contraíble. En el teorema que sigue, demostramos que $PHS_n(S^1)$ tampoco lo es.

Teorema 4.29. *$PHS_n(S^1)$ no es contraíble para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. En [6, Teorema 2.6] J. C. Macías demuestra que existe una retracción $G_* : PHS_n(S^1) \to HS(S^1)$
Y como $HS(S^1)$ es una $2-esfera$ se tiene que $PHS_n(S^1)$ tiene un retracto homeomorfo a S^2, pero S^2 no es contraíble, (ver [4, Pag 123].) Por lo tanto $PHS_n(S^1)$ no es contraíble. □

De los teoremas anteriores se tiene el siguiente resultado, puesto que uno de los espacios es contraíble y el otro no.

Corolario 4.30. *$PHS_n([0,1])$ no es homeomorfo a $PHS_n(S^1)$.*

Sobre la dimensión de $PHS_n([0,1])$ y $PHS_n(S^1)$ tenemos lo siguiente.

Teorema 4.31. *Si X es un continuo de dimensión finita y n un entero positivo $n \geq 2$ entonces $dim(PHS_n([0,1])) = dim(PHS_n(S^1)) = 2n$*

Demostración. Sabemos que $dim(C_n([0,1])) = dim(C_n(S^1)) = 2n$, para cualquier entero positivo n, ver [11, Teorema 6.8.10] y por el Teorema 4.25 el resultado queda demostrado. □

Sergio Macías y Sam Nadler demuestran en [14, Teorema 4.6] el siguiente teorema:

Teorema 4.32. *$C_n([0,1])$ y $C_n(S^1)$ son variedades de Cantor de dimensión $2n$ para cada entero $n \geq 2$.*

Ahora, demostramos el siguiente:

Teorema 4.33. *$PHS_n([0,1]$ y $PHS_n(S^1)$ son variedades de Cantor de dimensión $2n$, para cada entero $n \geq 2$.*

Demostración. Sabemos por el Teorema 4.32 que $C_n([0,1])$ y $C_n(S^1)$ son variedades de Cantor de dimensión $2n$. Como $n \geq 2$ tenemos que $2n \geq n+2$.

De aquí que, la $dim(C_n([0,1]) = 2n \geq n+2$ y la $dim(C_n(S^1)) \geq n+2$. Así, por el Teorema 4.27 se sigue que $PHS_n([0,1])$ y $PHS_n(S^1)$ son variedades de Cantor. Finalmente por el Teorema 4.31 ambos espacios son de dimensión $2n$. □

Por [6, Teorema 2.5] sabemos que el segundo pseudohiperespacio suspensión del intervalo unitario es homeomorfo a $[0,1]^4$ y por el Teorema 2.25 sabemos que cualquier n-celda tiene la propiedad del punto fijo. Por lo tanto tenemos el resultado siguiente.

Teorema 4.34. $PHS_2([0,1])$ *tiene la propiedad del punto fijo.*

La prueba del resultado que sigue se encuentra en [6, Teorema 2.6].

Teorema 4.35. $PHS_n(S^1)$ *no tiene la propiedad del punto fijo.*

La demostración se basa en la construcción de una retracción $G_* : PHS_n(S^1) \to HS(S^1)$. Como $HS(S^1)$ es una $2-esfera$, entonces $HS(S^1)$ no tiene la propiedad del punto fijo. Por lo tanto $PHS_n(S^1)$ tampoco la tiene.

Note que el Teorema 4.34 nos da un ejemplo de un continuo cuyo segundo pseudohiperespacio suspensión tiene la propiedad del punto fijo, mientras que el Teorema 4.35 nos da un ejemplo de otro continuo cuyo n-ésimo pseudohiperespacio suspensión no la tiene.

A manera de resumen de las propiedades que cumplen $PHS_n([0,1])$ y $PHS_n(S^1)$ para $n \geq 2$ mostramos la siguiente tabla:

$[0,1]$	S^1	RESULTADOS	$PHS_n([0,1])$	$PHS_n(S^1)$
Localmente conexo	Localmente conexo	Teorema 4.6	Localmente conexo	Localmente conexo
No es colocalmente conexo	Colocalmente conexo	Teorema 4.18	Colocalmente conexo	Colocalmente conexo
Aposindético	Aposindético	Corolario 4.21	Aposindético	Aposindético
Propiedad (b)	Propiedad (b)	Teorema 4.22	Propiedad (b)	Propiedad (b)
Unicoherente	No es Unicoherente		Unicoherente	Unicoherente
Contraíble	No es Contraíble	Teoremas 4.28 y 4.29	Contraíble	No es Contraíble
Variedad de Cantor	Variedad de Cantor	Teorema 4.33	Variedad de Cantor	Variedad de Cantor
Propiedad del punto fijo	No tiene la Propiedad del punto fijo	Teoremas 4.34 y 4.35	Propiedad del punto fijo	No tiene la Propiedad del punto fijo
		Teorema 4.14	Tiene n-ésimo pseudohiperespacio suspensión único	Tiene n-ésimo pseudohiperespacio suspensión único
		[6, Teorema 2.5]	$PHS_n([0,1])$ $\approx$ 4-celda	No se sabe

Cuadro 4.1: Tabla de Propiedades.

Bibliografía

[1] C. O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[2] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[3] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y. 1999.

[4] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N. 28, Sociedad Matemática Mexicana, ISBN: 968-36-3594-6, 2004.

[5] K. Kuratowski, *Topology, vol. II*, Academic Press, New York, 1968

[6] J. C. Macías, *n-ésimo pseuhiperespacio suspensión*, Tesis de Doctorado en Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2007.

[7] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets.* Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49, Marcel Dekker, New York, 1978.

[8] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An introduction.*Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

[9] G. Salicrup, *Introducción a la Topología,* Aportaciones Matemáticas, Serie de Textos No. 1, Sociedad Matemática Mexicana, 1997.

[10] V. Tkachuk, *Curso Básico de Topología General,* Universidad Autónoma Metropolitana (Unidad Iztapalapa), ISBN:970-654-362-7, 1999.

[11] S. Macías, *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, vol. 275, Chapman and Hall/CRC, Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York, Sibgapore, 2005.

[12] R. Engelking, *General Topology*, Sigma series in pure Mathematics, Volúmen 6, ISBN: 3-88538-006-4.

[13] R. Escobedo, M. de Jesus López y S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum*, Topology Appl., 138 (2004), 109-104.

[14] S. Macías y S. B. Nadler Jr., *n-fold hyperspaces, cones and products*, Topology Proc., 26(2001-2002), 255-270.

[15] S. Macías, *On the hyperspace $C_n(X)$ of a continuum X*, Topology Appl., 109 (2001), 237-256.

[16] K. Borsuk, *Theory of Retracts, Monografie Mat.* Vol. 44, PWN (Polish Scientific Publishers), Warszawa, 1967.

[17] M. Wojdislawski, *Retracts absoluts et hyperspace des continus*, Fund. Math., 32(1939), 184-192.

[18] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl., 138 (2004), 125-138.

[19] S. B. Nadler Jr., *The fixed point property for continua*, Aportaciones Matemáticas de la sociedad matemática mexicana, textos, vol. 30, 2005.