



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

**SÍNTESIS DE PERFILES DE FASE EN UN PROCESADOR ÓPTICO DE
FOURIER UTILIZANDO UNA PANTALLA DE CRISTAL LÍQUIDO**

Tesis presentada al

**Posgrado en Ciencias
(Física Aplicada)**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**DOCTORADO EN CIENCIAS
(Física Aplicada)**

por

Ceciibet Mendoza Rodríguez

asesorada por

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Dr. Rigoberto Juárez Salazar

Puebla, Pue
Junio 2021

Título: Síntesis de perfiles de fase en un procesador óptico de Fourier utilizando unapantalla de cristal líquido.

Estudiante: M.C. Ceciibet Mendoza Rodríguez.

COMITÉ

Dr. Cruz Fabián Meneses
Presidente

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar
Secretario

Dra. Areli Montes Pérez
Vocal

Dr. Jorge Castro Ramos
Vocal externo

Dr. Rubén Ramos García
Vocal externo

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero
Suplente

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Asesor

Dr. Rigoberto Juárez Salazar
Co-asesor

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT, México) le agradezco la beca recibida durante el doctorado. Agradezco también al posgrado de la Facultad de Ciencias Físico Matemático, así como a Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP) por los múltiples apoyos para asistencia a congresos.

Quiero agradecer a mis asesores Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez y Dr. Rigoberto Juárez Salazar por sus conocimientos invaluable que me brindaron para llevar a cabo esta investigación, y sobre todo por su gran paciencia para la revisión de esta tesis. Agradezco su amistad a lo largo de más de 5 años, espero con ansia el café post-pandemia.

También agradezco a los miembros del jurado a la Dra. Areli Montes Pérez, Dr. Cruz Meneses Fabián y Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar por sus observaciones cada semestre, sugerencias y paciencia. Así como al Dr. Rubén Ramos García y al Dr. Jorge Castro Ramos, por el tiempo para la revisión de este trabajo de tesis doctoral a pesar de las actividades que los ocupan.

Quiero agradecer a mi padre José Manuel Mendoza, mi madre Alma Victoria Rodríguez, mi hermana Alma Guadalupe y mi sobrino Paquito por la paciencia brindada al escribir esta tesis en tiempos de pandemia, soportar mi estrés y quitar espacios en casa, y pese a eso, tener siempre su apoyo incondicional. A mi hermana Adriana, mi cuñado Carlos y a mis sobrinos Carlitos y Ximenita, mi angelita que nos cuida desde el cielo.

A mis amigos con los que conviví día a día en esta etapa de mi vida, sin ellos el posgrado no hubiera sido lo mismo. Entre risas y apoyo mutuo, el camino se hizo más ligero.

Síntesis de perfiles de fase en un procesador óptico de Fourier utilizando una pantalla de cristal líquido

Resumen: Una de las tareas más relevantes en óptica moderna es sintetizar objetos de fase a partir de objetos de amplitud. En la actualidad existen diferentes arreglos y tecnologías para realizar esta tarea. En esta tesis se propone un interferómetro versátil de trayectoria común de doble ventana con un modulador espacial de luz de cristal líquido en la entrada del sistema. La finalidad de esta propuesta es sintetizar perfiles de fase a partir de objetos de amplitud y realizar diferentes operaciones ópticas obtenidas por el fenómeno de superposición.

En esta tesis, para la superposición de objetos de amplitud, se propone un interferómetro basado en el procesador óptico de Fourier 4f. En el plano de entrada se coloca un modulador espacial de luz de cristal líquido que trabaja en modulación de amplitud. En el modulador se despliegan dos ventanas con los objetos de amplitud a superponer. En el plano de Fourier se coloca una rejilla de Ronchi con una frecuencia adecuada para lograr la superposición de las ventanas desplegadas en la entrada. En el plano de salida se coloca una cámara para capturar los patrones de franjas generados por el sistema. Con este arreglo, se sintetizaron objetos de fase aun cuando el modulador no trabaja con este tipo de configuración.

Análíticamente se muestra que los objetos de amplitud desplegados en el modulador en las dos ventanas en la entrada del interferómetro, se superponen aditiva y multiplicativamente en patrones moiré. De esta forma, procesando los patrones moiré resultantes, es posible recuperar la fase codificada. Asimismo, se encontró que cuando en las dos ventanas en la entrada del sistema se coloca un objeto con la misma fase, el resultado será un patrón moiré con la derivada espacial de la función de fase. Se presentan resultados que ejecutan la operación de derivada manipulando la información de la fase desde las ventanas de entrada. Mostrando la reconstrucción de la fase de estos resultados.

El análisis de los patrones de franjas requiere de algoritmos apropiados de extracción de fase. En esta tesis se estudiaron algunos de los algoritmos de corrimiento de fase más empleados en la literatura. Se obtuvieron resultados implementando algoritmos básicos donde se requiere conocer el corrimiento de fase, hasta algoritmos más avanzados donde no es necesario conocer el corrimiento de fase. Los resultados de esta investigación fueron publicados en el artículo titulado *How do phase shifting algorithms work?*, de la revista indizada *European Journal of Physics*.

Palabras clave: Procesador óptico de Fourier, modulador espacial de luz de cristal líquido, corrimiento de fase, rejilla de Ronchi, patrones moiré, derivada espacial de amplitud, derivada espacial de fase.

Synthesis of phase profiles in an optical Fourier processor using a liquid crystal display

Abstract: One of the most relevant tasks in modern optics is to synthesize phase objects from amplitude objects. Currently, there are different arrangements and technologies to perform this task. This thesis proposes a versatile double-aperture common path interferometer with a liquid crystal spatial light modulator at the input of the system. The purpose of this proposal is to synthesize phase profiles from amplitude objects and perform different optical operations obtained by the superposition phenomenon.

In this thesis, for the superposition of amplitude objects, an interferometer based on the 4f Fourier optical processor is proposed. A liquid crystal spatial light modulator working in amplitude modulation is placed in the input plane. In the modulator, two windows are displayed with the amplitude objects to be superposed. In the Fourier plane, a Ronchi grid is placed with an appropriate frequency to achieve superposition of the windows displayed at the entrance. A camera is positioned on the exit plane to capture the fringe patterns generated by the system. With this arrangement, phase objects were synthesized even though the modulator does not work with this configuration type.

Analytically, it is shown that the amplitude objects displayed in the modulator in the two input interferometer's windows are additively and multiplicatively superposed in moiré patterns. Thus, by processing the resulting moiré patterns, it is possible to recover it into the encoding phase. Also, it was found that when an object with the same phase is placed in both windows at the system input, the result will be a moiré pattern with the spatial derivative of the phase. Results are presented that execute the derivative operation manipulating the phase information from the input windows. Showing the reconstruction of the phase of these results.

Analysis of fringe patterns requires appropriate phase extraction algorithms. In this thesis, some of the most used phase shifting algorithms in the literature were studied. Results were obtained by implementing basic algorithms where it is required to know the phase shift, to more advanced algorithms where it is not necessary to know the phase shift. The results of this research were published in the paper entitled «How do phase shifting algorithms work?» in the indexed journal European Journal of Physics.

Keywords: Fourier optical processor, liquid crystal spatial light modulator, phase shifting, Ronchi grating, moiré patterns, spatial amplitude derivative, spatial derivative phase

Índice

1	Introducción	9
1.1	Objetivos	11
1.2	Contribuciones	11
1.3	Estructura del documento.....	12
2	Interferómetro de trayectoria común de doble ventana	13
2.1	Fundamentos teóricos	14
2.1.1	Teoría escalar de difracción	14
2.1.2	Difracción de Fresnel.....	15
2.1.3	Difracción de Fraunhofer	16
2.1.4	Fase introducida por una lente	17
2.1.5	Transformación de Fourier con una lente delgada	19
2.1.6	Teorema de la convolución	23
2.2	Interferómetro de trayectoria común de doble ventana	23
2.3	Arreglo experimental propuesto.....	25
2.4	Análisis matemático del arreglo propuesto	28
3	Síntesis y derivada de objetos de amplitud y fase	32
3.1	Síntesis de objetos de amplitud (moiré)	32
3.2	Características de superposición de patrones	34
3.2.1	Patrones moiré aditivos	36
3.2.2	Patrones moiré multiplicativos	38
3.3	Concepto de derivada	39
3.3.1	Tangente a una curva	40
3.3.2	Razón de cambio y velocidad instantánea.....	41
3.3.3	Síntesis de derivada con patrones moiré aditivos	42
3.3.4	Síntesis de derivada con patrones moiré multiplicativo.....	43
3.3.5	Síntesis de derivada de objetos de fase	43
3.4	Resultados	45
3.4.1	Derivación obtenida por simulación	45
3.4.2	Derivación usando patrones moiré.....	46

3.4.3	Derivación de fase	47
4	Procesamiento de patrones de franjas para extracción de fase	50
4.1	Demodulación de fase.....	51
4.2	Corrimiento de fase.....	51
4.2.1	Algoritmo de tres pasos	52
4.2.2	Algoritmo de cuatro pasos	53
4.2.3	Algoritmo de n pasos.....	54
4.2.4	Algoritmo de mínimos cuadrado.....	55
4.2.5	Algoritmo iterativo avanzado.....	56
4.3	Resultados	57
5	Conclusiones y trabajo futuro	62
	Bibliografía	64

Capítulo 1

Introducción

...sin causa y sin principio es imposible que algo exista o se lleve a cabo.
Aristóteles.
El arte de la retórica, Libro 1, Capítulo VII.

La interferometría óptica tiene como principal objetivo la medición de algún parámetro físico mediante la aplicación del fenómeno de interferencia [1]. Algunos de los interferómetros más empleados en la práctica para evaluar el frente de onda son: el interferómetro de Newton, Fizeau, Mach-Zehnder, Twymann-Green, y Michelson [2]. Sin embargo, algunos de ellos están sujetos a fuentes de error ambiental tales como vibraciones, turbulencias y gradientes de temperatura. La alta sensibilidad a fuentes de ruido de los interferómetros convencionales se debe en parte a que el haz de referencia y de prueba viajan por caminos ópticos diferentes [3]. Por otro lado, existen interferómetros de trayectoria común que son insensibles a fuentes de error ambiental debido a que los haces que interfieren viajan a través de las mismas componentes ópticas [4].

Dentro del grupo de interferómetros de trayectoria común, encontramos los interferómetros cíclicos [5]. Otro esquema importante son los interferómetros donde los haces viajan a través de caminos ópticos paralelos atravesando los mismos elementos ópticos. Un ejemplo de este último esquema es el interferómetro basado en el arreglo óptico

de Fourier $4f$ con doble ventana en la entrada del sistema como lo propuso Ebersole en 1975 [6]. A pesar de que este interferómetro no coincide con la definición de un interferómetro de trayectoria común, en la literatura se le considera cumplir con esta característica [3]. En este arreglo interferométrico, por una de las ventanas se hace pasar el haz de referencia, y por la otra ventana se hace pasar el haz de prueba. Ebersole coloca una rejilla en el plano de Fourier con la frecuencia adecuada con la cual logra superponer dos transparencias fotográficas colocadas en la entrada del sistema. En el 2004, Arrizón propone un arreglo para obtener directamente la fase del haz de prueba a través de la interferencia con el haz de referencia. En este trabajo se tiene como propósito usar el arreglo para explotar y ampliar de forma general las condiciones para obtener directamente la fase del haz de prueba, así como su derivada.

El arreglo óptico $4f$ de trayectoria común y doble ventana, se ha empleado en diferentes configuraciones que le han dado mucha versatilidad. Se ha empleado para producir corrimientos de fase en paralelo [7]. Asimismo, se ha usado para producir en el plano de salida ventanas con diferentes corrimientos de fase, lo que ha sido una alternativa en la interferometría de un solo disparo manipulando la polarización en el arreglo [8]. También, ha sido usado para manipular la frecuencia portadora trasladando axialmente la rejilla de Ronchi en el plano de Fourier [9]. Recientemente, se ha propuesto introducir corrimientos de fase aplicando traslaciones laterales a una rejilla de Ronchi colocada en el plano de entrada [10].

El interferómetro de trayectoria común también ha propiciado avances de nuevas aplicaciones en tomografía [11,12,13,14], microscopía [15,16], litografía de semiconductores [17,18], e inspección óptica de sistemas micro-electromagnéticos [19], entre muchos otros. Estas nuevas aplicaciones exigen el desarrollo de técnicas de interferometría óptica más robustas, flexibles, de alta exactitud, fáciles de usar, y de bajo costo.

La propuesta de esta tesis doctoral está basada en la incorporación de una pantalla de cristal líquido como dispositivo donde serán desplegadas las dos ventanas en la entrada del sistema, aportando versatilidad al arreglo interferométrico de trayectoria común $4f$. El arreglo inicialmente se usó para generar diferentes fases arbitrarias codificadas en una de las ventanas, y con la ventana de referencia inducir corrimientos de fase. Una de las ventajas obtenidas con este esquema es la posibilidad de generar corrimientos de fase en el intervalo de 0 a 2π radianes. Este trabajo de tesis propone generar en la salida del sistema objetos de fase empleando un modulador de amplitud. Con esta propuesta, se estudian fenómenos de superposición aditiva, multiplicativa e incluso la operación de derivación espacial de fase en la salida del sistema. Además, se encuentra la posibilidad de que el arreglo interferómetro

propuesto obtenga la derivada tanto de objetos de amplitud como de objetos de fase. Esta propuesta la podemos concebir como un arreglo óptico híbrido donde se explotan características tanto analógicas como numéricas para realizar tratamientos de análisis de diferentes tipos de objetos, y realizar diferentes operaciones matemáticas sobre objetos de amplitud y fase.

1.1 Objetivos

El objetivo general de esta tesis doctoral es proponer un método para generar fases arbitrarias en un interferómetro de trayectoria común de doble ventana, modificando el arreglo tradicional colocando en el plano de entrada un modulador espacial de luz.

Los objetivos específicos de la tesis se mencionan a continuación.

- i. Construir un interferómetro óptico de trayectoria común de doble ventana basado en el procesador óptico de Fourier $4f$.
- ii. Generar patrones moiré por superposición aditiva y multiplicativa usando el interferómetro de doble ventana.
- iii. Analizar teóricamente la posibilidad de realizar derivación espacial de patrones moiré en el interferómetro de doble ventana.
- iv. Análisis de derivada de objetos de fase por desplazamiento de las ventanas en la entrada del sistema.
- v. Desarrollar algoritmos de extracción de fase para procesamiento de patrones de tipo moiré usando el método de corrimiento de fase.

1.2 Contribuciones

Los resultados obtenidos de este trabajo de tesis doctoral fueron publicados como se describe a continuación. El estudio realizado sobre los métodos de corrimiento de fase generalizado fue publicado en un artículo científico en una revista indizada [1]. Parte de los resultados experimentales fueron presentados en diferentes foros académicos a través de una conferencia [2] y cuatro carteles [3-6]. A continuación, se enumeran las contribuciones de este trabajo de tesis doctoral.

[1] R. Juárez Salazar, C. Mendoza Rodríguez, J.E. Hernández Beltrán, C. Robledo Sánchez, “How do phase shifting algorithms work?”, *European Journal of Physics*, Vol. 39(6), pp. 065302, (2018). DOI: 10.1088/1361-6404/aae3c2

[2] Ceciibet Mendoza Rodríguez, Carlos Ignacio Robledo Sánchez, Rigoberto Juárez Salazar, Areli Montes Pérez, “Reconstrucción de objetos basado en holografía con corrimiento de fase,” conferencia en el LX Congreso Nacional de Física, (2017).

[3] Ceciibet Mendoza Rodríguez, Carlos Ignacio Robledo Sánchez, Rigoberto Juárez Salazar, Gustavo Rodríguez Zurita, “Derivadas de fase en un arreglo interferométrico de trayectoria común,” cartel presentado en el LXI Congreso Nacional de Física, (2018).

[4] Ceciibet Mendoza Rodríguez, Carlos Ignacio Robledo Sánchez, Rigoberto Juárez Salazar, “Derivadas espaciales de funciones de fase usando el procesador óptico de Fourier,” cartel presentado en el Congreso Internacional Luz Ciencia Arte II CILCA, (2019).

[5] Ceciibet Mendoza Rodríguez, Carlos Ignacio Robledo Sánchez, Rigoberto Juárez Salazar, “Derivación iterativa de frente de onda usando el procesador óptico de Fourier,” cartel presentado en el congreso X RIAO-OPTILAS-MOPM, (2019).

[6] Ceciibet Mendoza Rodríguez, Carlos Ignacio Robledo Sánchez, Rigoberto Juárez Salazar, “Síntesis de derivadas y derivadas fraccionarias en un procesador óptico de Fourier utilizando una pantalla de cristal líquido,” cartel presentado en el LXIII Congreso Nacional de Física, (2020).

1.3 Estructura del documento

Este documento de tesis doctoral está organizado en cuatro capítulos como se describe a continuación. En el capítulo 1 se presentan los fundamentos teóricos de interferometría usando el procesador óptico de Fourier. También, se describe el análisis matemático del arreglo propuesto. En el capítulo 2, se presenta el desarrollo teórico de la generación de perfiles de amplitud y fase, describiendo cómo se generan los patrones de franjas desplegados en el modulador. Se analizan por simulación patrones moiré del tipo aditivo y multiplicativo. Este capítulo se cierra abordando la propuesta de realizar derivación usando patrones moiré de tipo aditivo y multiplicativo, y derivación de objetos de fase. En el capítulo 3 se muestran cinco algoritmos de corrimiento de fase, útiles para realizar extracción de fase a partir de patrones de franjas generados experimentalmente usando los métodos descritos en el capítulo 2. Finalmente, en el capítulo 4, se presentan las conclusiones generales y trabajo futuro.

Capítulo 2

Interferómetro de trayectoria común de doble ventana

La interferometría tiene como principal objetivo obtener la medición de algún parámetro físico, lo cual es logrado mediante la interferencia del frente de onda de dos campos ópticos [20]. Algunas de las principales aplicaciones de la interferometría son pruebas de calidad de sistemas ópticos, análisis de deformación y esfuerzo en pruebas mecánicas, estudio de tejido biológico, en aplicaciones médicas, etc. La interferometría óptica es una técnica que data sus orígenes desde hace aproximadamente cien años. Conforme avanza la tecnología, la precisión requerida va en aumento. Esto requiere una búsqueda constante de nuevas alternativas y las correspondientes mejoras en los sistemas y la exactitud.

Existe una gran diversidad de instrumentos con los que se puede producir interferencia de dos o más ondas, llamados interferómetros. En la literatura se puede encontrar en la actualidad una gran variedad de propuestas sobre interferómetros [1]. Los arreglos comunes de interferómetros suelen componerse de dos brazos, donde los trayectos de cada haz cruzan por distintas componentes ópticas, lo que ocasiona que no haya una buena estabilidad mecánica y sean más sensibles a vibraciones, turbulencias del aire o fluctuaciones debido a la temperatura [4]. Se ha estudiado que los interferómetros de trayectoria común en comparación con otros interferómetros convencionales han sido de creciente interés debido a la simplicidad y robustez en la configuración [21]. A diferencia de los interferómetros de dos brazos, los arreglos interferométricos de trayectoria común permiten hacer viajar a las ondas de prueba y de referencia por las mismas componentes del sistema [3].

A continuación, se presentan los fundamentos teóricos para describir matemáticamente un sistema óptico de Fourier. Asimismo, se describen los principios físicos que rigen el funcionamiento del sistema y se plantea el arreglo propuesto de este trabajo de tesis doctoral.

2.1 Fundamentos teóricos

El fenómeno de difracción juega un papel importante en las ramas de la física donde se estudia la propagación de ondas. En este contexto, la propagación de ondas se emplea para comprender distintos procesos tales como la formación de imágenes y el tratamiento óptico de señales, entre muchas otras aplicaciones [22].

2.1.1 Teoría escalar de difracción

Sommerfeld define la difracción como «*cualquier desviación de los rayos de luz de su propagación rectilínea, y que no puedan ser interpretados como reflexión o refracción*». Sin embargo, el primero en reportar dicho fenómeno fue Grimaldi en 1665. Grimaldi observó que, al iluminar una varilla con una fuente puntual, la sombra recogida sobre la pantalla poseía sombras brillantes en su interior. Lo cual iba en contra de la propagación rectilínea de la luz, postulada por la teoría corpuscular de aquel entonces [22,23].

La difracción es un fenómeno que se produce cuando un frente de onda queda truncado por un obstáculo o una abertura que se interpone en su camino. La difracción que se genera cuando una abertura es iluminada depende de parámetros del montaje óptico tales como:

- i. Longitud de onda,
- ii. Distancia entre la fuente y la abertura,
- iii. Distancia entre la abertura y la pantalla de observación, y
- iv. De la geometría de la abertura.

Cuando la abertura difractante y la pantalla de observación se localizan a distancias muy grandes, la difracción es conocida como «Difracción de Fraunhofer». Otro caso sucede cuando la pantalla difractante y la pantalla de observación se localizan a una distancia

cercana, pero mayor que la longitud de onda, en este caso nos referimos a la «Difracción de Fresnel».

2.1.2 Difracción de Fresnel

Si se considera la distancia Z al plano de observación mucho mayor que el tamaño de la abertura, siendo el caso en que el ángulo entre los vectores \vec{n} y \vec{r} no exceda a $\pi/10$ rad (18°), entonces, bajo estas condiciones son válidas las siguientes aproximaciones:

$$\cos(\vec{n}, \vec{r}) \cong 1, \quad (2.1)$$

y

$$\frac{1}{r} \cong \frac{1}{Z}, \quad (2.2)$$

por lo tanto, el campo complejo $g(x, y)$ en la abertura se propaga como $G(\mu, \nu)$ en la pantalla de observación dado

$$G(\mu, \nu) = \frac{1}{i\lambda Z} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{(ikr)} dx dy \quad (2.3)$$

La magnitud del vector \vec{r} está definida como

$$r = Z\sqrt{1 + [(\mu - x)^2 + (\nu - y)^2]/Z^2} \quad (2.4)$$

aplicando la expansión binomial al radical de la ecuación (2.4), entonces

$$\sqrt{1 + b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots \quad (2.5)$$

y tomando solo los dos primeros términos de esta expansión, se obtiene la aproximación paraxial de la magnitud del vector \vec{r} , esto es

$$r = Z + \frac{(\mu - x)^2 + (\nu - y)^2}{2Z}, \quad (2.6)$$

al sustituir la ecuación (2.6) en la integral de difracción dada por la ecuación (2.3) se obtiene

$$G(\mu, \nu) = \frac{e^{(ikZ)}}{i\lambda Z} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{\left[\frac{ik}{2Z}((\mu-x)^2 + (\nu-y)^2)\right]} dx dy \quad (2.7)$$

a la ecuación (2.7) se le conoce como la integral de difracción de Fresnel o de campo cercano. Esta integral representa una superposición de ondas esféricas en la aproximación paraxial.

2.1.3 Difracción de Fraunhofer

La difracción de Fraunhofer es también conocida como «difracción de campo lejano» ya que tiene lugar en un plano de observación a una distancia mucho más lejana. De la ecuación (2.7) se encuentra la integral de difracción de Fraunhofer. Desarrollamos los términos cuadráticos de la exponencial

$$G(\mu, \nu) = \frac{e^{(ikZ)}}{i\lambda Z} e^{\left[\frac{ik}{2Z}(\mu^2 + \nu^2)\right]} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{\left[\frac{ik}{2Z}(x^2 + y^2)\right]} e^{\left[-\frac{ik}{Z}(x\mu + y\nu)\right]} dx dy \quad (2.8)$$

En el campo lejano se considera la siguiente aproximación

$$Z \geq \frac{k}{2}(x^2 + y^2), \quad (2.9)$$

o

$$1 \geq \frac{k}{2Z}(x^2 + y^2) \cong 0 \quad (2.10)$$

Sustituyendo la ecuación (2.9) y la magnitud $k = 2\pi/\lambda$ en la ecuación (2.8) se obtiene

$$G(\mu, \nu) = \frac{e^{(ikZ)}}{i\lambda Z} e^{\left[\frac{ik}{2Z}(\mu^2 + \nu^2)\right]} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{\left[\frac{-i2\pi}{\lambda Z}(x\mu + y\nu)\right]} dx dy, \quad (2.11)$$

a esta ecuación se le conoce como la integral de difracción de Fraunhofer o de campo lejano. Si se considera como cosenos directores los términos

$$L = \frac{\mu}{Z} \quad (2.12)$$

y

$$M = \frac{\nu}{Z} \quad (2.13)$$

entonces la ecuación (2.11) se puede expresar de la siguiente forma

$$G(L, M) = A \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-ik(Lx + My)} dx dy \quad (2.14)$$

donde A es una constante compleja. Esta ecuación es otra forma de expresar la integral de difracción de Fraunhofer. Comparando la forma de la ecuación (2.11) con la definición de la transformada de Fourier, el campo difractado puede ser expresado como

$$G(\mu, \nu) = \frac{e^{(ikZ)}}{i\lambda Z} e^{\left[\frac{ik}{2Z}(\mu^2 + \nu^2)\right]} \mathcal{F}\{g(x, y)\} \quad (2.15)$$

en donde las coordenadas de frecuencia espacial de la transformada de Fourier deben tomar los valores

$$\mu' = \frac{\mu}{\lambda Z} \quad (2.16)$$

y

$$\nu' = \frac{\nu}{\lambda Z} \quad (2.17)$$

En conclusión, la distribución del campo óptico en el patrón de difracción de Fraunhofer es la transformada de Fourier de la distribución del campo óptico de la abertura. El patrón de difracción de Fraunhofer es observado en intensidad, el cual está dado por la siguiente expresión

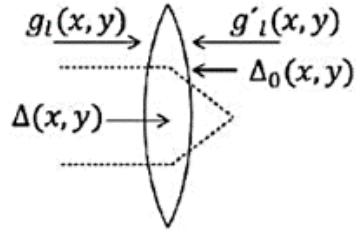
$$I(\mu, \nu) = \frac{1}{\lambda^2 Z^2} [\mathcal{F}\{g(x, y)\}]^2 \quad (2.18)$$

en donde son evaluadas las frecuencias espaciales dadas en las ecuaciones (2.16) y (2.17).

2.1.4 Fase introducida por una lente

Las lentes son elementos ópticos comúnmente utilizados para formar imágenes. Una lente generalmente está compuesta de vidrio el cual es un material ópticamente denso, la velocidad de propagación del campo eléctrico, es menor que en el aire, por lo que las lentes introducen un retardo óptico o un desfaseamiento en un frente de onda [22].

Se denota como $g_L(x, y)$ a la distribución de amplitud del campo óptico incidente en la lente, y como $g'_L(x, y)$ al campo óptico inmediato después de la lente. Así mismo, se denota como $\Delta(x, y)$ a la función de espesor de la lente, y a Δ_0 al máximo valor del espesor.


Figura 2.1. Lente convergente

Si se emplea esta notación, el retardo de fase total que sufre la onda será en la coordenada (x, y) que introduce la lente, y se expresa de la siguiente manera

$$\phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k[\Delta_0 - \Delta(x, y)] \quad (2.19)$$

en donde n es el índice de refracción del material de la lente, $kn\Delta(x, y)$ es el retraso de fase introducido por la lente y $k[\Delta_0 - \Delta(x, y)]$ es el retraso de fase introducido por la región permanente de espacio libre entre los dos planos que limitan la lente.

La lente puede ser representada por una transformación de fase, entre la amplitud del campo óptico incidente y la amplitud del campo óptico emergente.

$$t_L(x, y) = e^{(ik\Delta_0)} e^{[ik(n-1)\Delta(x, y)]}, \quad (2.20)$$

por lo tanto, el campo óptico $g'_L(x, y)$ después de cruzar la lente, se relaciona con el campo óptico $g_L(x, y)$ incidente, por medio de la relación

$$g'_L(x, y) = t_L(x, y)g_L(x, y) \quad (2.21)$$

En la aproximación paraxial la función de espesor tiene una relación geométrica simple

$$(n - 1)\Delta(x, y) = (n - 1)\Delta_0 - \frac{(x^2 + y^2)}{2f} \quad (2.22)$$

en donde f es la distancia focal de la lente. Al sustituir la ecuación (2.22) en la ecuación (2.20) se obtiene la transmitancia en amplitud de una lente

$$t_L(x, y) = e^{(ikn\Delta_0)} e^{\left[-\frac{ik}{2f}(x^2+y^2)\right]} \quad (2.23)$$

si f es positiva la lente es convergente y si es negativa entonces la lente es divergente.

Debido a la extensión finita de la abertura de la lente, es necesario asociarle una función que represente la acción de corte de su pupila. A esta función se le conoce como «Función de pupila», denotada por $\tilde{P}(x, y)$, y es definida en los siguientes términos

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x, y) &= 1, \text{ si } (x, y) \text{ está dentro de la lente,} \\ \tilde{P}(x, y) &= 0, \text{ si } (x, y) \text{ está fuera de la lente.} \end{aligned}$$

Al considerar el caso de las lentes delgadas, el espesor $\Delta_0 \rightarrow 0$, en consecuencia, el factor de fase será $\exp(ikn\Delta_0) \rightarrow 1$ y por lo tanto, la transformación de fase que introduce la lente quedará como

$$T_L(x, y) = \tilde{P}(x, y) e^{\left[-\frac{ik}{2f}(x^2+y^2)\right]}. \quad (2.24)$$

Finalmente, el campo óptico $g'_L(x, y)$ inmediatamente después de cruzar la lente está dado por la relación

$$g'_L(x, y) = T_L(x, y)g_L(x, y) \quad (2.25)$$

en donde $g_L(x, y)$ representa el campo óptico incidente en la lente.

2.1.5 Transformación de Fourier con una lente delgada

Existe una propiedad importante de una lente convergente, que es la de obtener la transformada de Fourier. Se considera la configuración general, para llevar a cabo la operación de transformación de Fourier, ver figura 2.2.

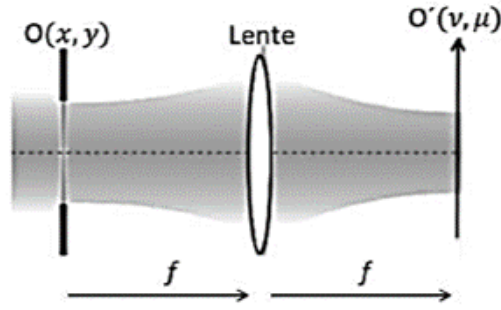


Figura 2.2. Configuración para llevar a cabo la transformada de Fourier por medio de una lente delgada.

Considérese un objeto con amplitud de transmitancia $t(x, y)$ localizado a una distancia d de la lente delgada convergente de distancia focal f . El frente de onda que ilumina al objeto incide en forma normal, este frente de onda incidente tiene una amplitud A .

La amplitud del campo óptico después del objeto es

$$g(x_0, y_0) = A_t(x_0, y_0). \quad (2.26)$$

Para hallar la distribución de amplitud del campo óptico $g_L(x, y)$ que incide sobre la lente, se puede aplicar la integral de difracción de Fresnel

$$g(x, y) = \frac{1}{i\lambda d} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_0, y_0) e^{\left\{ \frac{ik}{2d} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] \right\}} dx_0 dy_0 \quad (2.27)$$

Esta integral puede ser escrita como la convolución de las funciones $g(x, y)$ y $h(x, y)$ donde

$$h(x, y) = \frac{1}{i\lambda d} e^{\left[\frac{ik}{2d} (x^2 + y^2) \right]}, \quad (2.28)$$

entonces, $g_L(x, y)$ queda expresada así

$$g_L(x, y) = g(x, y) \otimes h(x, y). \quad (2.29)$$

La ecuación (2.30) describe la distribución de amplitud del campo óptico después de la lente

$$g'_L(x, y) = e^{\left[\frac{-ik}{2f}(x^2+y^2)\right]} g_L(x, y), \quad (2.30)$$

en donde se ha despreciado el factor de fase $\exp(ikn\Delta_0)$ para el caso de lentes delgadas, y se ha considerado que la abertura de la lente es de extensión infinita, lo cual indica que el espectro del objeto está contenido dentro de la abertura, por lo tanto, la función de la pupila es la unidad.

Para hallar la distribución de amplitud del campo $G(\mu, \nu)$ en el plano focal de la lente, se aplica nuevamente la integral de difracción de Fresnel en la aproximación paraxial, esto es

$$G(\mu, \nu) = \frac{1}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{+\infty} g'_L(x, y) e^{\left\{\frac{ik}{2f}[(\mu-x)^2+(\nu-y)^2]\right\}} dx dy \quad (2.31)$$

sustituyendo la ecuación (2.30) en la ecuación (2.31) obtenemos

$$G(\mu, \nu) = \frac{1}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{+\infty} g_L(x, y) e^{\left\{\frac{-ik}{2f}(x^2+y^2)\right\}} e^{\left\{\frac{ik}{2f}[(\mu-x)^2+(\nu-y)^2]\right\}} dx dy, \quad (2.32)$$

simplificando esta integral queda de la siguiente manera

$$G(\mu, \nu) = \frac{e^{\left\{\frac{ik}{2f}(\mu^2+\nu^2)\right\}}}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{+\infty} g_L(x, y) e^{\left\{\frac{-i2\pi}{\lambda f}(\mu x + \nu y)\right\}} dx dy, \quad (2.33)$$

la ecuación (2.33) se puede representar por la Transformada de Fourier del campo $g_L(x, y)$

$$G(\mu, \nu) = \frac{e^{\left\{\frac{ik}{2f}(\mu^2+\nu^2)\right\}}}{i\lambda f} \mathcal{F}\{g_L(x, y)\}. \quad (2.34)$$

De la ecuación (2.29) se tiene que

$$g_L(x, y) = g_0(x, y) \otimes h(x, y), \quad (2.35)$$

en donde el símbolo \otimes representa la operación de convolución.

Al aplicar el teorema de convolución, se tiene que la transformada de Fourier de $g_L(x, y)$ es

$$G_L(\mu, \nu) = G_0(\mu, \nu)H(\mu, \nu), \quad (2.36)$$

donde

$$\mu' = \frac{\mu}{\lambda f}, \quad (2.37)$$

y

$$\nu' = \frac{\nu}{\lambda f}, \quad (2.38)$$

$H(\mu, \nu)$ es la transformada de Fourier de $h(x, y)$

$$H(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)e^{\{-i2\pi(\mu x + \nu y)\}} dx dy, \quad (2.39)$$

sustituyendo la ecuación (2.28) en la ecuación (2.39) se obtiene

$$H(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\lambda f} e^{\left[\frac{ik}{2d}(x^2 + y^2)\right]} e^{\{-i2\pi(\mu x + \nu y)\}} dx dy, \quad (2.40)$$

al calcular la integral, se obtiene

$$H(\mu, \nu) = e^{\{-i\pi\lambda d(\mu^2 + \nu^2)\}}, \quad (2.41)$$

y al sustituir la ecuación (2.41) en la ecuación (2.36) tenemos

$$G_L = e^{\{-i\pi\lambda d(\mu^2 + \nu^2)\}} G_0(\mu, \nu), \quad (2.42)$$

por último, al sustituir esta expresión en la ecuación (2.34) y simplificando términos se obtiene el campo óptico en el plano focal de la lente. Evaluando en las frecuencias espaciales de la ecuación (2.39) el resultado queda expresado por

$$G(\mu, \nu) = \frac{1}{i\lambda f} e^{\left[\frac{ik}{2f}\left(1 - \frac{d}{f}\right)(\mu^2 + \nu^2)\right]} \mathcal{F}\{g_0(x_0, y_0)\}. \quad (2.43)$$

Concluyendo, el campo óptico en el plano focal de la lente es equivalente a obtener el patrón de difracción de Fraunhofer del campo óptico irradiante después del objeto. La distribución de intensidad del patrón de difracción en el plano focal de la lente esta dado por

$$I(\mu, \nu) = \frac{1}{\lambda^2 f^2} |\mathcal{F}\{g_0(x_0, y_0)\}|^2 \quad (2.44)$$

Por lo tanto, una lente delgada convergente tiene la propiedad de ejecutar transformaciones bidimensionales de Fourier. Esta es una propiedad muy útil en el desarrollo de sistemas ópticos modernos.

2.1.6 Teorema de la convolución

Es indispensable para describir teóricamente nuestro sistema $4f$ enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.1. (Teorema de convolución). *Dadas dos transformadas de Fourier de las funciones $\mathcal{F}(\mu)$ y $\mathcal{G}(\mu)$ el Teorema de convolución establece que:*

$$\mathcal{F}[\mathcal{H}(\mu)] = \mathcal{F}[\mathcal{F}(\mu)\mathcal{G}(\mu)] \quad (2.45)$$

es igual a

$$h(x) = f(x) \otimes g(x), \quad (2.46)$$

donde \otimes denota convolución, la cual es calculada de la forma

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s)ds. \quad (2.47)$$

2.2 Interferómetro de trayectoria común de doble ventana

En la literatura se encuentran variaciones en los interferómetros de trayectoria común, proponiendo diversas modificaciones al arreglo desde colocar en el plano de entrada dos ventanas, incluso tres ventanas, movimientos en la rejilla de Fourier, colocar prismas

difractivos, polarizadores, etc., con la intención de simplificar el proceso de extracción de fase [8,21,24].

Un interferómetro de doble ventana con rejilla en el plano de Fourier es mostrado en la figura 2.3. Este interferómetro consiste en colocar en el plano de entrada dos ventanas W_1 y W_2 , que están separadas una distancia x_0 . Seguido de las ventanas se tiene una lente L_1 de distancia focal f , en el plano de Fourier se coloca una rejilla de Ronchi de periodo d . En el plano focal posterior se coloca una segunda lente L_2 con su respectiva distancia focal, igualmente dada por f . En el plano de salida se forman las imágenes de las ventanas $W'_1(0)$ y $W'_2(0)$, pero, debido a la rejilla, también aparecen órdenes de difracción igualmente separados por $\lambda f/d$. Mostrando solo dos órdenes $W'_1(+1)$ y $W'_2(-1)$. En el caso en que x_0 se ajuste convenientemente, y que $d = \lambda f/x_0$, entonces podremos conseguir la superposición de, por ejemplo, el orden cero de W_1 , con el orden -1 de W_2 . Satisfecha esta condición, en automático se obtiene la superposición de los demás órdenes de las ventanas, aunque solo se observarán los más brillantes.

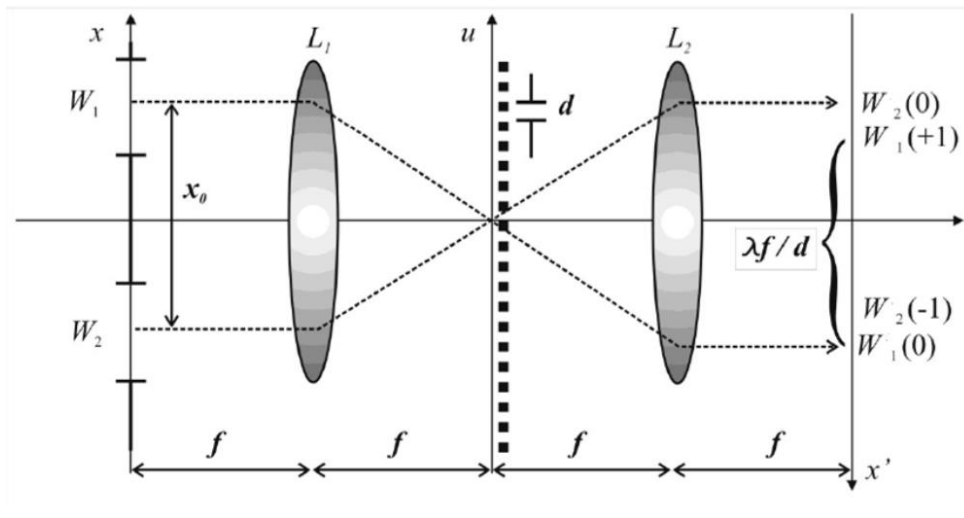


Figura 2.3. Interferómetro de doble ventana con una rejilla de difracción [20].

2.3 Arreglo experimental propuesto

El arreglo interferométrico propuesto consta de colocar en el plano de entrada un modulador espacial de luz donde se despliegan las dos ventanas. El arreglo experimental propuesto se observa en la figura 2.4.

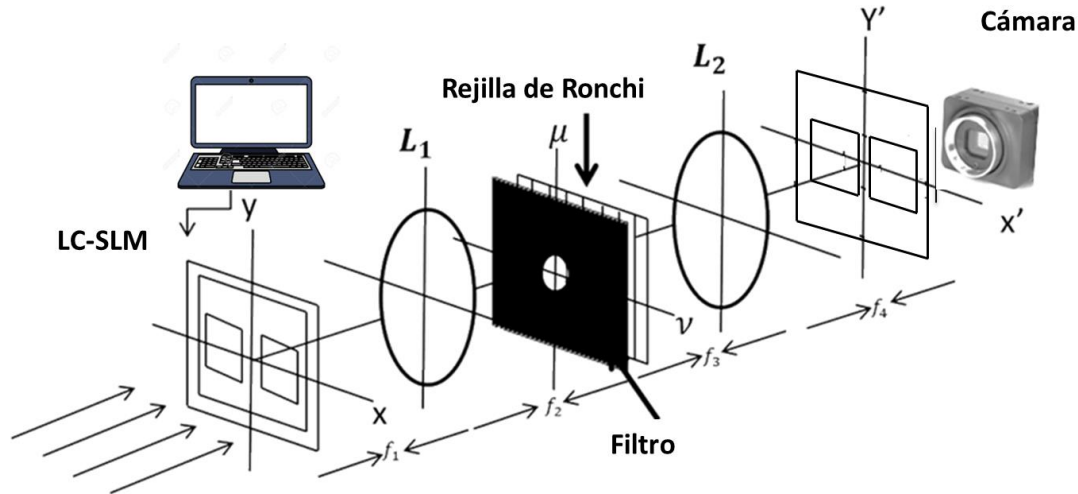


Figura 2.4. Arreglo experimental propuesto basado en el interferómetro de trayectoria común de doble ventana en un procesador óptico de Fourier $4f$.

La fuente es un láser He-Ne, con una longitud de onda $\lambda = 633 \text{ nm}$, el cual es expandido por un objetivo de microscopio y filtrado por un pinhole. Estos dos últimos elementos ópticos forman lo que llamamos «filtro espacial». El propósito de este filtro es eliminar el orden cero del patrón de difracción del láser, generando un frente de onda esférico. Seguido del filtro espacial colocamos una lente colimadora de una distancia focal de $f = 50 \text{ cm}$, para convertir el frente de onda esférico en un frente de onda plano que ilumina el interferómetro.

En el plano de entrada se coloca un modulador espacial de luz de cristal líquido de la marca Holoeye, modelo LC2002, que se muestra en la figura 2.5(a). El tamaño del área activa es de $26.6 \times 20 \text{ mm}$, con una resolución de 800×600 píxeles, siendo la distancia de centro a centro de los píxeles de $32 \mu\text{m}$ tanto en la dirección horizontal como en la vertical y 256 niveles de gris [47]. El modulador espacial de luz de cristal líquido fue modulado en amplitud, y controlado desde una Laptop de la marca Lenovo, desplegando las ventanas desde el

programa «Visualizador de fotos de Windows», previo a mandar las imágenes al modulador se comprobaba que la resolución de la Laptop fuera de 800×600 píxeles, y así obtener un óptimo funcionamiento del LC-SLM, la estructura pixelada al hacerle incidir una fuente de luz se muestra en la figura 2.5(b).

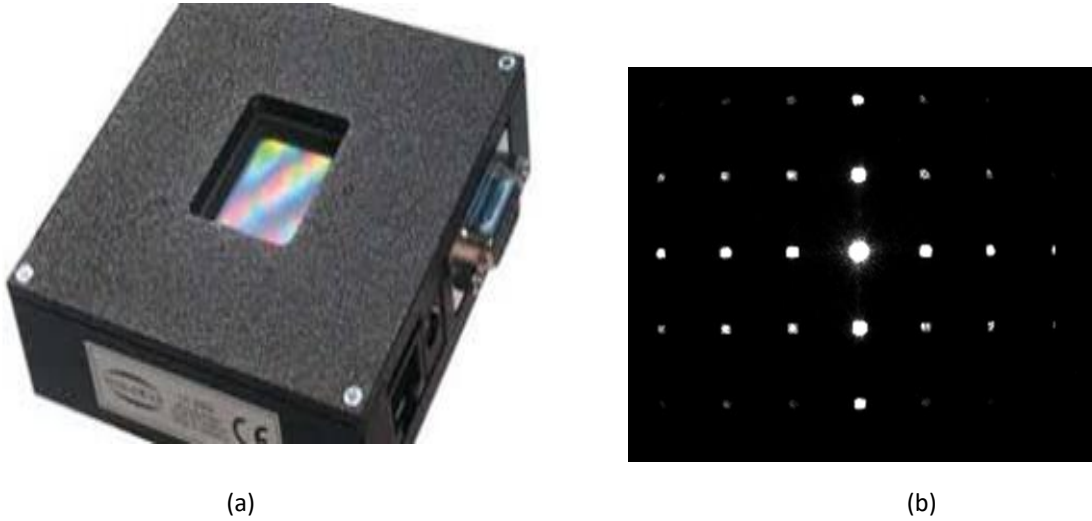


Figura 2.5. (a) Modulador espacial de luz de cristal líquido. (b) Estructura pixelada del modulador al hacerle incidir una fuente de luz.

En el modulador espacial de luz son desplegadas las dos ventanas, derecha e izquierda, con una separación x_0 como se puede observar en la figura 2.6.

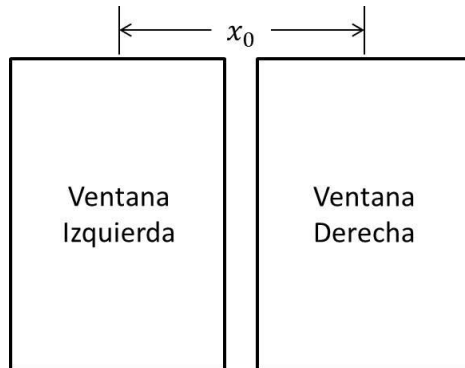


Figura 2.6. Dos ventanas, derecha e izquierda, colocadas en el plano de entrada, mostrando la separación x_0 entre ellas.

Posterior a las dos ventanas en el plano de entrada, dos lentes L_1 y L_2 con una misma distancia focal $f = 30 \text{ cm}$ son colocadas. En el plano de Fourier se posiciona una rejilla de Ronchi con un período dado por

$$p = \frac{\lambda f}{x_0} \quad (2.48)$$

donde p es el período de la rejilla, f la distancia focal de las lentes, λ la longitud de onda de la fuente de luz láser y x_0 la distancia que habrá entre las ventanas ($x_0 \approx 10 \text{ mm}$), dada esta condición en la salida del sistema se logra la superposición de ambas ventanas. Tomando en cuenta los parámetros del arreglo construido y la ecuación (2.48), se empleó una rejilla con una frecuencia de $\nu = 50 \text{ líneas/mm}$. Los órdenes debidos a la rejilla de Ronchi utilizada se observan en la figura 2.7.

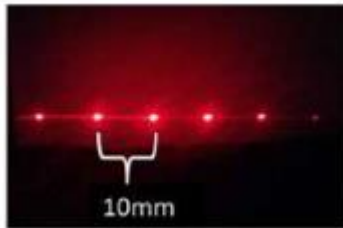


Figura 2.7. Órdenes de difracción de la rejilla de Ronchi.

Anterior a la rejilla se coloca un filtro, dejando pasar sólo el orden +1, el cual contiene información tanto del haz de prueba como del de referencia. Las condiciones para poder filtrar el orden y que lleve información de ambas ventanas se describen en el siguiente capítulo. Los interferogramas obtenidos a la salida del sistema se capturan con una cámara a color de la familia Chameleon, modelo CM3-U3-13Y3C, resolución 1.30 MegaPíxeles, y una velocidad de captura de 149 frames por segundo. La cámara se muestra en la figura 2.8



Figura 2.8. Cámara empleada en el arreglo experimental. Chameleon, modelo CM3-U3-13Y3C, resolución 1.30 MP, velocidad de captura de 149 capturas por segundo.

El arreglo montado en el Laboratorio de Pruebas Ópticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, se muestra en la figura 2.9. La descripción matemática del arreglo se describe en la siguiente sección.

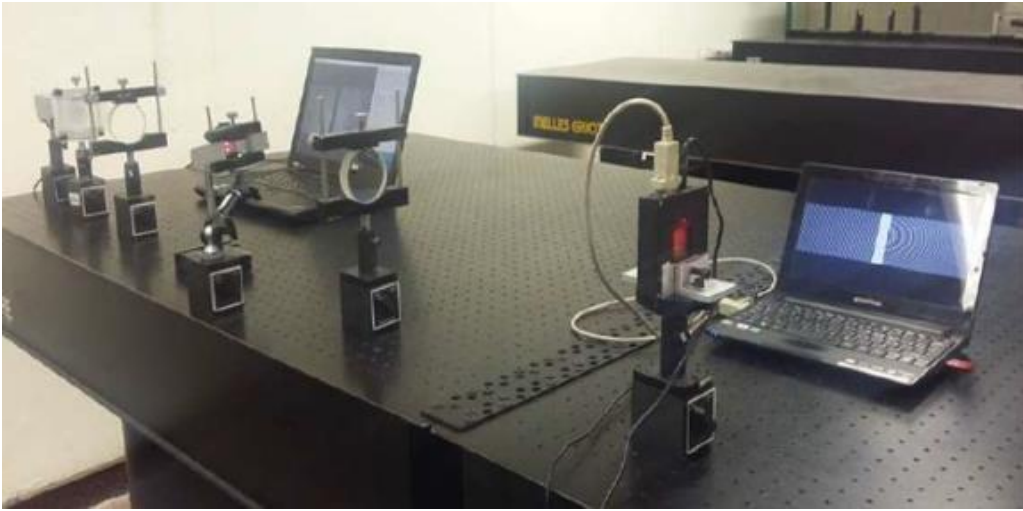


Figura 2.9. Arreglo montado en el laboratorio.

2.4 Análisis matemático del arreglo propuesto

El plano de entrada matemáticamente está descrito como

$$O(x, y) = \left[W \otimes \delta \left(x + \frac{x_0}{2}, y \right) \right] I_1 + \left[W \otimes \delta \left(x - \frac{x_0}{2}, y \right) \right] I_2 \quad (2.49)$$

Donde W representa las ventanas izquierda y derecha, centradas en $\left(x - \frac{x_0}{2}, y \right)$ y $\left(x + \frac{x_0}{2}, y \right)$, respectivamente.

Cada ventana es multiplicada por un patrón de intensidad dado por

$$I_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha_1, \quad (2.50)$$

y

$$I_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha_2. \quad (2.51)$$

siendo

$$\alpha_1 = 2\pi f x + \phi_1(x, y), \quad (2.52)$$

$$\alpha_2 = 2\pi f x + \phi_2(x, y). \quad (2.53)$$

En el plano de Fourier, se calcula una primer transformada de Fourier del plano de entrada, debido a la primera lente L_1

$$\mathcal{F}(O(x, y)). \quad (2.54)$$

Haciendo las respectivas operaciones ocupando el Teorema de convolución, llegaremos a lo siguiente

$$\left(W \cdot e^{i2\pi v \frac{x_0}{2}}\right) \otimes \left[\delta(0) + \frac{1}{2} C_i(v - f) + \frac{1}{2} C_i(v + f)\right] + \left(W \cdot e^{-i2\pi v \frac{x_0}{2}}\right) \otimes \left[\delta(0) + \frac{1}{2} C_d(v - f) + \frac{1}{2} C_d(v + f)\right], \quad (2.55)$$

donde

$$C_i = \mathcal{F}(e^{i\alpha_1}), \quad (2.56)$$

$$C_d = \mathcal{F}(e^{i\alpha_2}). \quad (2.57)$$

La finalidad del proceso de filtraje que se realiza en el plano de Fourier, es aislar la información del orden +1, por lo tanto, solo se eligen los términos $\frac{1}{2} C_i(v + f)$ y $\frac{1}{2} C_d(v + f)$, quedando simplificada la ecuación (2.55) como

$$\left[\left(W \cdot e^{i2\pi v \frac{x_0}{2}}\right) \otimes \frac{1}{2} C_i(v + f)\right] + \left[\left(W \cdot e^{-i2\pi v \frac{x_0}{2}}\right) \otimes \frac{1}{2} C_d(v + f)\right], \quad (2.58)$$

a la tercera distancia focal se coloca una segunda lente L_2 , indicando la transformada inversa de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \left[\left(W \cdot e^{i2\pi v \frac{x_0}{2}}\right) \otimes \frac{1}{2} C_i(v + f)\right] + \left[\left(W \cdot e^{-i2\pi v \frac{x_0}{2}}\right) \otimes \frac{1}{2} C_d(v + f)\right] \right\}. \quad (2.59)$$

Obteniendo finalmente a la salida del sistema sin el efecto de la rejilla de Ronchi en el plano de Fourier, la siguiente expresión

$$O'(x, y) = W\left(x - \frac{x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_1)} + W\left(x + \frac{x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_2)}, \quad (2.60)$$

donde se observa que en la salida no aparecen franjas.

Colocando la rejilla de Ronchi y realizando la convolución con la ecuación (2.60), tendremos ahora los órdenes correspondientes de los patrones desplegados. La rejilla de Ronchi se escribe como

$$\mathcal{R}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0), \quad (2.61)$$

entonces, al colocar la rejilla de Ronchi, la ecuación (2.60) se modifica como

$$\{O' \otimes \mathcal{R}\} = \left[W\left(x - \frac{x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_1)} + W\left(x + \frac{x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_2)} \right] \otimes \mathcal{R}(x, y), \quad (2.62)$$

aplicando el Teorema de convolución

$$\{O' \otimes \mathcal{R}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W\left(s - \frac{x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_1)} \mathcal{R}(x - nx_0 - s, y) + W\left(s + \frac{x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_2)} \mathcal{R}(x - nx_0, y) \right], \quad (2.63)$$

donde se reduce a la expresión

$$\{O' \otimes \mathcal{R}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[W\left(x - nx_0 - \frac{x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_1)} + W\left(x - nx_0 + \frac{x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_2)} \right], \quad (2.64)$$

Donde n nos indicará los órdenes de difracción

Si $n = 0$

$$O'(x, y) = \left[W\left(x - \frac{x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_1)} + W\left(x + \frac{x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_2)} \right] \quad (2.65)$$

Si $n = +1$

$$O'(x, y) = \left[W\left(x - \frac{3x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_1)} + W\left(x - \frac{x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_2)} \right] \quad (2.66)$$

Si $n = -1$

$$O'(x, y) = \left[W\left(x + \frac{x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_1)} + W\left(x + \frac{3x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_2)} \right] \quad (2.67)$$

a la salida del sistema tendremos la superposición de los órdenes 0 con los órdenes ± 1 de las ventanas. En el plano de salida $O'(x, y)$ por efecto de la rejilla de Ronchi se obtiene la superposición del orden cero de la ventana derecha con el orden $+1$ de la ventana izquierda.

$$O'(x, y) = \left[W\left(x - \frac{x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_1)} + W\left(x - \frac{x_0}{2}, y\right) e^{i(\alpha_2)} \right] \quad (2.68)$$

Obtenemos la intensidad multiplicando por su complejo conjugado

$$\begin{aligned} I &= O'(x, y) \cdot O'^*(x, y) \\ &= W\left(x - \frac{x_0}{2}, y\right) [e^{i(\alpha_1)} + e^{i(\alpha_2)}] \cdot W\left(x - \frac{x_0}{2}, y\right) [e^{-i(\alpha_1)} + e^{-i(\alpha_2)}] \\ &= 2 + e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} + e^{-i(\alpha_1 - \alpha_2)} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Usando la forma exponencial de la función coseno

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad (2.70)$$

tenemos entonces

$$I = W\left(x - \frac{x_0}{2}, y\right) [2 + 2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)], \quad (2.71)$$

sustituyendo α_1 y α_2 de las ecuaciones (2.52) y (2.53) respectivamente, llegamos finalmente

$$I = W\left(x - \frac{x_0}{2}, y\right) [2 + 2\cos(\phi_1(x, y) - \phi_2(x, y))]. \quad (2.72)$$

En la ecuación (2.72) se observa que en el plano de salida se tiene un patrón de tipo cosenoidal modulado por la ventana W . Asimismo, el argumento de la función coseno es la diferencia entre las fases ϕ_1 y ϕ_2 que se despliegan en las ventanas en el plano de entrada del interferómetro. Este resultado es importante porque permitirá plantear los resultados que se obtendrán en el capítulo 3 para síntesis de perfiles arbitrarios de fase, derivadas espaciales, y el fenómeno de moiré.

Capítulo 3

Síntesis y derivada de objetos de amplitud y fase

En este capítulo, se presenta el desarrollo teórico sobre síntesis de perfiles de amplitud y fase usando el procesador óptico de Fourier con doble ventana. Primero, se describe la forma en que se generan patrones de franjas que serán desplegados en la pantalla de cristal líquido ubicada en el plano de entrada. Segundo, se describe el análisis matemático de la superposición de patrones moiré aditivos y multiplicativos, mostrando resultados de simulación hechos en Matlab. Finalmente, se aborda la propuesta de obtener derivación espacial usando patrones moiré de tipo aditivo y multiplicativo con el procesador óptico de Fourier. Cada una de estas modalidades de superposición presentan ventajas y desventajas para el estudio y análisis de patrones de franjas.

Para abordar la posibilidad de observar en los patrones moiré la derivada de la función $\phi(x, y)$, se introduce en ella un desplazamiento lateral en x , tal como se considera en la definición matemática de la derivada de una función. Los resultados obtenidos son mostrados por simulación haciendo uso del software MatLab. En este capítulo se abordan los resultados de derivada visualizadas por efecto moiré y al final se describe una alternativa novedosa obteniendo la derivada en objetos de fase.

3.1 Síntesis de objetos de amplitud (moiré)

Comúnmente el término moiré se designa para denotar al patrón que se produce cuando se superponen dos rejillas de frecuencias similares. Existen tres casos típicos de generación de patrones moiré. El primero se presenta cuando se superponen dos rejillas de la misma frecuencia con cierto ángulo de inclinación entre ellas. El segundo se presenta cuando se superponen rejillas de diferente frecuencia sin inclinación sobre ellas.

Finalmente, el tercer caso es cuando se superponen dos rejillas de distinta frecuencia y un ángulo de inclinación entre ellas [25,26]. La figura 3.1 muestra estos tres casos típicos de generación de patrones moiré.

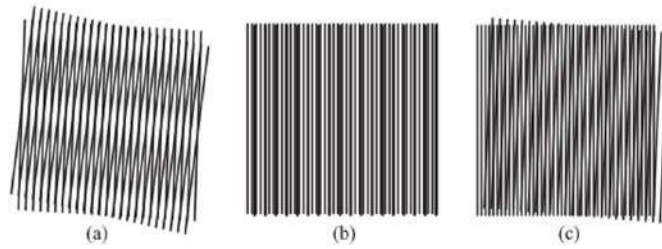


Figura 3.1. Generación de patrones moiré. (a) Rejillas de la misma frecuencia y con inclinación. (b) Rejillas de diferente frecuencia sin inclinación. (c) Rejillas de diferentes frecuencias con inclinación.

En el análisis matemático de patrones moiré, se consideran dos rejillas arbitrarias que pueden ser descritas por funciones de intensidad de la forma

$$I_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos[2\pi\omega x + \phi_1(x, y)], \quad (3.1)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos[2\pi\omega x + \phi_2(x, y)], \quad (3.2)$$

en donde ϕ_1 y ϕ_2 son las funciones que describen la forma básica de las rejillas.

Los patrones de amplitud I_1 e I_2 de las ecuaciones (3.1) y (3.2), respectivamente, son construidos usando el software Matlab. En la figura 3.2(a) se muestra el código empleado para esta tarea.

Es importante observar que el uso de este tipo de patrones en el arreglo interferométrico propuesto requiere que la frecuencia ω sea igual para ambos patrones de franjas. De esta forma los órdenes de difracción se encontrarán en la misma ubicación espacial. Así, se simplifica el proceso de filtraje en el plano de Fourier. Tomando en cuenta la resolución del modulador espacial de luz, la frecuencia espacial máxima para los patrones I_1 e I_2 debe ser $\omega = 2.23 \text{ líneas/mm}$. En la figura 3.2(b) se muestra un ejemplo de los patrones de franjas desplegados en las ventanas del arreglo interferométrico propuesto. En la figura 3.3 se observan los órdenes de difracción que se obtuvieron al generar los interferogramas. Se observa que entre los órdenes existe una separación que es posible filtrar.

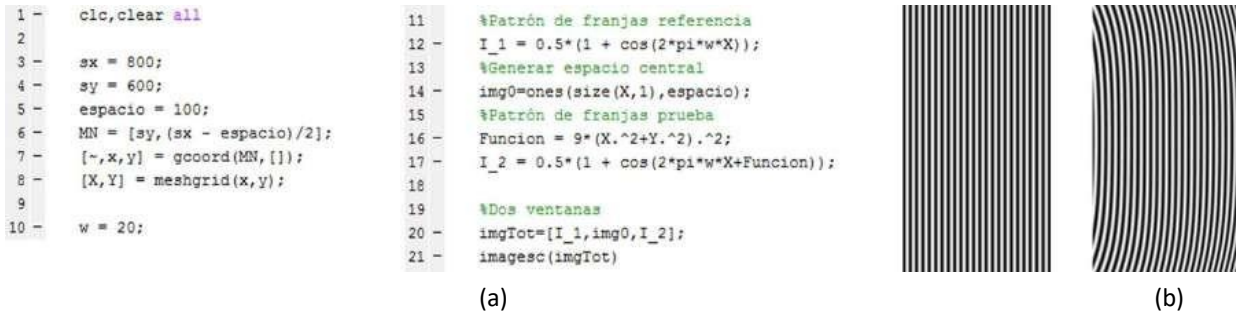


Figura 3.2. (a) Código escrito en Matlab para la generación de patrones I_1 e I_2 de las ecuaciones (3.1) y (3.2). (b) Patrones de franjas generados para ser desplegados en el modulador espacial de luz.

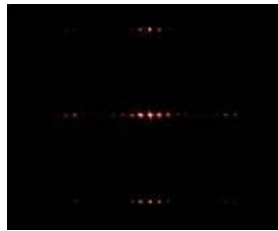


Figura 3.3. Órdenes de difracción de ambas ventanas en el plano de Fourier.

3.2 Características de superposición de patrones

La superposición de dos rejillas genera un patrón moiré que puede ser de tipo aditivo, sustractivo, o multiplicativo. A continuación, se describirán brevemente las referencias donde estas propuestas fueron analizadas.

John F. Ebersole en 1975, publicó un artículo donde presenta la revisión de distintas técnicas para generar imágenes ópticas por sustracción, incluyendo la holografía y la interferometría [6]. Una de las técnicas interferométricas propuestas es el método de rejilla, en el cual se utiliza el arreglo mostrado en la figura 3.4.

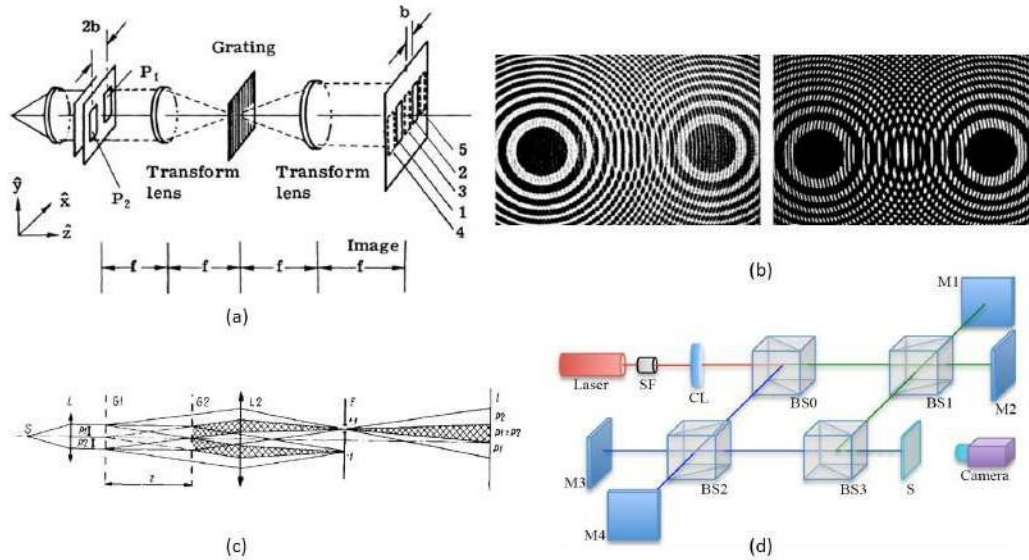


Figura 3.4. Arreglos interferométricos experimentales para la generación de patrones de tipo moiré. (a) Interferómetro propuesto por John F. Ebersole, (b) patrones tipo moiré aditivo (izquierda) y multiplicativo (derecha) generados por Olof Bryngdahl, (c) esquema experimental de un interferómetro de Mach - Zehnder, utilizado por K. Patorsky, (d) interferómetro doble de Twyman - Green propuesto por R. Juárez Salazar.

En 1976, Olof Bryngdahl explica tres tipos de superposiciones que ocurren con patrones de tipo moiré; aditiva, sustractiva y multiplicativa [27]. En este artículo se concluye que la superposición aditiva es la mejor opción para evitar la formación de patrones moiré indeseados. Asimismo, cuando es requerida la formación de patrones moiré de mayor contraste, es mejor utilizar la superposición multiplicativa.

K. Patorski en 1979, publica un artículo donde utiliza un interferómetro Mach-Zehnder para obtener superposición aditiva y sustractiva. Resaltando la capacidad de realizar operaciones matemáticas de señales ópticas que incrementan el rango de aplicaciones en interferometría [28]. En 2016, R. Juárez Salazar, C. Robledo Sánchez, et. Al, emplearon dos interferómetros de Twyman-Green en paralelo para realizar superposición de tipo aditiva. Este arreglo interferométrico permite generar patrones aditivos donde se codifican múltiples fases [29].

Una vez hecha la revisión correspondiente en la literatura, se procedió a analizar patrones moiré aditivos y multiplicativos matemáticamente, asimismo, se muestran simulaciones hechas en el software de Matlab.

3.2.1 Patrones moiré aditivos

Una superposición aditiva tiene la ventaja que al superponer dos patrones moiré, si una franja es blanca y la que se superpone es oscura, entonces, la primera la iluminará y podremos ver un patrón más completo.

La expresión analítica para describir la superposición aditiva de dos patrones I_1 e I_2 dados por las ecuaciones (3.1) y (3.2) nos lleva a

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi\omega x + \phi_1(x, y)) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi\omega x + \phi_2(x, y)), \quad (3.3)$$

$$I_1 + I_2 = 1 + \frac{1}{2} [\cos(2\pi\omega x + \phi_1(x, y)) + \cos(2\pi\omega x + \phi_2(x, y))]. \quad (3.4)$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad (3.5)$$

la ecuación (3.4) se puede escribir como

$$I_1 + I_2 = 1 + \frac{1}{2} \left[2\cos\left(\frac{4\pi\omega x + \phi_2(x, y) + \phi_1(x, y)}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y)}{2}\right) \right], \quad (3.6)$$

entonces, un patrón moiré aditivo vendría descrito como

$$I_1 + I_2 = 1 + \cos\left(2\pi\omega x + \frac{\phi_2(x, y) + \phi_1(x, y)}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y)}{2}\right). \quad (3.7)$$

El primer término de la ecuación (3.7) tiene dos factores. El primer factor es una rejilla con frecuencia espacial $2\pi\omega x$ más el promedio de las fases ϕ_1 y ϕ_2 . El segundo factor es una función moduladora con la mitad de la diferencia de fase entre ϕ_1 y ϕ_2 .

De las ecuaciones (3.1) y (3.2), se consideró $\phi_1 = 0$ y ϕ_2 igual a la imagen mostrada en la figura 3.5. La figura 3.6(a) muestra los patrones de franjas que fueron generados a partir de estas condiciones. Se consideró el caso de patrones de franjas con inclinación en y , los patrones de franjas obtenidos se muestran en la figura 3.6(b). evaluando por simulación con el software de Matlab la ecuación (3.7), tendremos como resultado un patrón moiré aditivo

con inclinación en x y un patrón moiré aditivo con inclinación en y , mostrados en la figura 3.7(a) y 3.7(b), respectivamente.

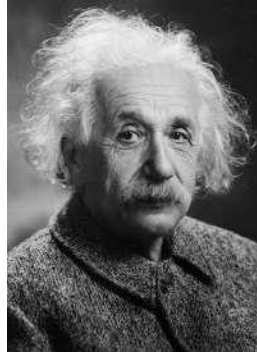


Figura 3.5. Imagen de Albert Einstein codificada en ϕ_2 .

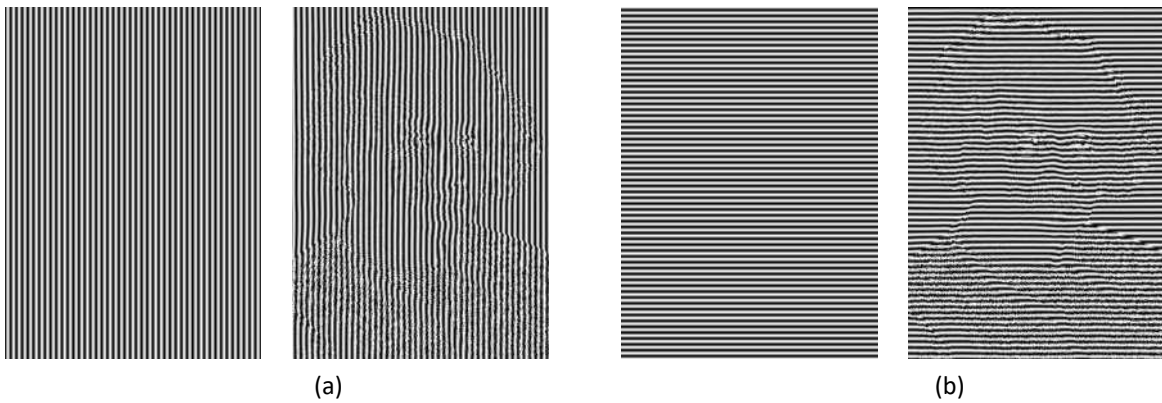


Figura 3.6. Patrones de franjas generados a partir de I_1 e I_2 . (a) Patrones de franjas con inclinación en x . (b) Patrones de franjas con inclinación en y .

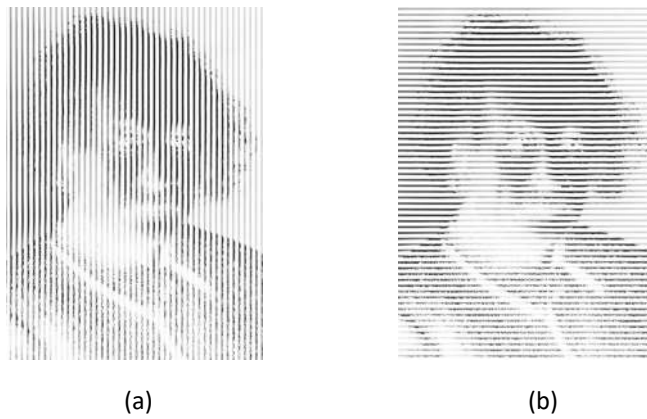


Figura 3.7. (a) Patrón moiré aditivo en x . (b) Patrón moiré aditivo en y .

De las figuras mostradas en 3.7, se aprecia la imagen codificada en la fase, viendo un patrón moiré aditivo muy iluminado. A continuación, se describirá el análisis matemático de un patrón moiré multiplicativo, mostrando resultados por simulación en Matlab.

3.2.2 Patrones moiré multiplicativos

Cuando se genera una superposición multiplicativa, hay una desventaja al observar el patrón superpuesto, ya que, si existe una franja oscura en uno de los patrones, digamos I_1 , esta franja oscura bloqueará al patrón I_2 , anulando la contribución de ésta. Por otro lado, la superposición multiplicativa, presenta la ventaja de generar patrones con mayor contraste en comparación con la superposición aditiva. Utilizando las rejillas dadas en las ecuaciones (3.1) y (3.2), el patrón moiré multiplicativo se describe como

$$I_1 \cdot I_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos (2\pi\omega x + \phi_1(x, y)) \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos (2\pi\omega x + \phi_2(x, y)) \right) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos [2\pi\omega x + \phi_2(x, y)] + \frac{1}{4} \cos [2\pi\omega x + \phi_1(x, y)] \\ &\quad + \frac{1}{4} \cos [2\pi\omega x + \phi_1(x, y)] \cos [2\pi\omega x + \phi_2(x, y)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Utilizando las identidades trigonométricas dadas por la ecuación (3.5) y

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cos(x - y) + \frac{1}{2} \cos(x + y) \quad (3.10)$$

obtenemos un patrón moiré multiplicativo de la forma

$$\begin{aligned} I_1 \cdot I_2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos \left(2\pi\omega x + \frac{\phi_2(x, y) + \phi_1(x, y)}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y)}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{8} \cos [\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y)] + \frac{1}{8} \cos [4\pi\omega x + \phi_2(x, y) + \phi_1(x, y)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tomando como base las figuras 3.6(a) y 3.6(b), se muestra en la figura 3.8 la simulación obtenida a partir de la ecuación (3.11) mostrando un patrón moiré multiplicativo, con inclinación en x y y .

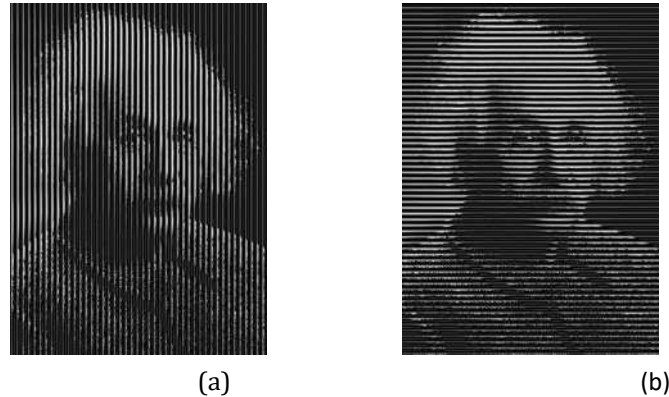


Figura 3.8. (a) Patrón moiré multiplicativo en x . (b) Patrón moiré multiplicativo en y .

De las figuras en 3.8, se puede observar el alto contraste que sugiere muestra un patrón moiré multiplicativo, sin embargo, vemos parte oscurecidas en la imagen, que es una desventaja debido a que nos hacen perder información al momento de hacer la reconstrucción.

En las figuras 3.7 y 3.8, se puede observar que el patrón moiré permite codificar y reconstruir una imagen como una función de fase. En otras palabras, una función de fase se puede recuperar empleando superposición multiplicativa o aditiva con rejillas de amplitud. A continuación, se describe el concepto de derivada y se analiza la propuesta de obtener derivación en objetos de amplitud y de fase.

3.3 Concepto de derivada

Todo lo que nos rodea está en continua modificación: el crecimiento de una planta, la temperatura ambiente varía, los cuerpos cambian de posición, la presión atmosférica se altera, la tasa de inflación se dispara, la población crece, etc. La palabra *variación* es una de las palabras más cotidianas en nuestro lenguaje, presente en ciencias exactas y sociales. Las matemáticas que utilizamos en nuestra vida cotidiana ayudan al hombre a entender su entorno, se crea el concepto de derivada para medir y conocer la variación de cualquier magnitud que depende funcionalmente de otra [30].

En la literatura, el precursor del concepto de derivada fue Issac Barrow (1630-1677) quien ideó un método para trazar la tangente a una curva en un punto dado. Tuvieron que transcurrir unos años más para que Sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) en caminos paralelos y lenguajes distintos formalizan este concepto. Sus

trabajos fueron decisivos por las aportaciones hechas, sin embargo, solo son el punto culminante de un largo proceso del trabajo de varios científicos como Johannes Kepler (1571-1630), René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Jhon Wallis (1616-1703), entre otros [31].

La derivada de una función puede interpretarse como un problema geométrico o mecánico, el primero, conocido como el problema de «la recta tangente a una curva», el cual se remonta a la época de Arquímedes (287 - 212 a. C.). Y el segundo, más reciente (1500 -1700 d.C), aparece con el intento de describir la velocidad de un cuerpo en movimiento, y es conocido como el problema de «la velocidad instantánea». En la siguiente sección se explicará en mayor detalle los dos enfoques del concepto de derivada.

3.3.1 Tangente a una curva

En una circunferencia, la recta tangente en un punto P es la recta perpendicular al radio que pasa por P ; como se muestra en la figura 3.9

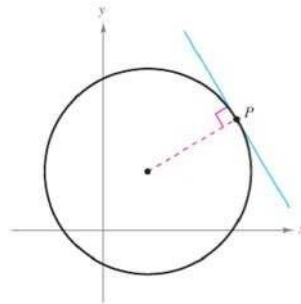


Figura 3.9. Recta tangente a una circunferencia.

Sin embargo, en una curva cualquiera diferente a la circunferencia el problema se complica ya que la definición no aplicaría igual. Newton y Leibniz encontraron la manera de poder darle solución a este problema. En esencia, el problema de encontrar la recta tangente en un punto P se reduce al de calcular su *pendiente* en ese punto. Se puede aproximar la pendiente de la recta tangente usando la recta secante que pasa por P y por otro punto cercano de la curva como se muestra en la figura 3.10.

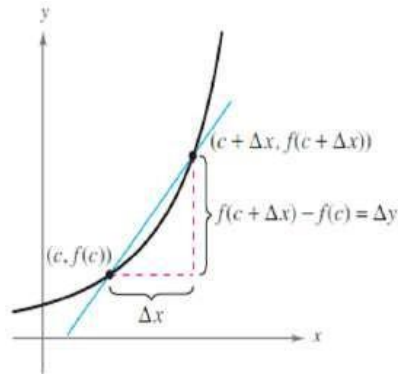


Figura 3.10. Recta secante que pasa por $(c, f(c))$ y $[c + \Delta x, f(c + \Delta x)]$.

Si $(c, f(c))$ es el punto de tangencia y $[c + \Delta x, f(c + \Delta x)]$ es el otro punto de la gráfica de f , la pendiente de la recta secante que pasa por ambos sería de la forma

$$m_{sec} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \quad (3.12)$$

Los términos a la derecha es un cociente de incremento. El denominador Δx es el incremento en x y el numerador es el incremento en y . Para obtener aproximaciones más precisas de la pendiente de la recta tangente se toman puntos de la gráfica cada vez próximos al punto P de tangencia. De donde se obtiene la definición de la recta tangente

Definición 3.1. Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el límite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m, \quad (3.13)$$

entonces la recta que pasa por $(c, f(c))$ y cuenta con una pendiente m es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

3.3.2 Razón de cambio y velocidad instantánea

La razón de cambio se aplica en una amplia variedad de situaciones, algunos ejemplos son las tasas de poblaciones, las tasas de producción, la velocidad y la aceleración, entre otras. Un uso frecuente es describir el movimiento de un objeto que va en línea recta. Definimos una función s que representa la posición de un objeto como función del tiempo t denominada función de posición. Si durante un lapso de tiempo Δt el objeto cambia su posición en una cantidad $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, entonces podemos describir la velocidad

promedio

$$v_{prom} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}, \quad (3.14)$$

Si se quisiera encontrar la velocidad instantánea del objeto, al igual que la pendiente de la recta tangente puede aproximarse utilizando las pendientes de rectas secantes, por medio de las velocidades medias durante un pequeño intervalo de tiempo Δt . Obteniendo la velocidad instantánea calculando el límite cuando Δt tiende a cero [48].

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{prom} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \quad (3.15)$$

Llegando así, a la definición de derivada

Definición 3.2. *La derivada de f en x está dada por*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.16)$$

Siempre que exista ese límite. Para todos los x para los que exista este límite, f' es una función de x .

Teniendo en mente los conceptos de derivada, se encuentra una relación con los patrones superpuestos que se observan a la salida de nuestro arreglo propuesto. En las subsecciones siguientes se muestra dos formas de derivación interferométrica. Derivada en amplitud de patrones moiré que se observa cuando una de las rejillas se desplaza. Y derivada en fase, que sucede cuando la rejilla de Ronchi no se sitúa en el plano de Fourier, generando a la salida un desplazamiento en los órdenes de las ventanas.

3.3.3 Síntesis de derivada con patrones moiré aditivos

Si se generan dos rejillas, cada una con una fase ϕ_1 y ϕ_2 descritas por la misma función, y una de ellas se desplaza lateralmente en x , al hacer una superposición de tipo aditiva, lo

que obtendremos será una aproximación de la derivada de la función $\phi(x, y)$ [32]. Las rejillas serían denotadas como:

$$I_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos [2\pi\omega x + \phi_1(x, y)], \quad (3.17)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos [2\pi\omega x + \phi_2(x - x_0, y)]. \quad (3.18)$$

Superponiendo ambos patrones aditivamente tendremos la ecuación (3.7), pero con las nuevas condiciones de un desplazamiento lateral en x . Observe que se obtiene un resultado importante cuando las fases $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. En este caso, la superposición aditiva resultará en un patrón moiré modulado en fase por la derivada de ϕ , es decir

$$I_1 + I_2 = 1 + \cos \left(2\pi\omega x + \frac{\phi(x - x_0, y) + \phi(x, y)}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi(x - x_0, y) - \phi(x, y)}{2} \right). \quad (3.19)$$

3.3.4 Síntesis de derivada con patrones moiré multiplicativo

De las rejillas dadas por las ecuaciones (3.17) y (3.18), y hacer una superposición del tipo multiplicativa, obtendremos la ecuación (3.11), pero con las nuevas condiciones y teniendo en cuenta que las fases $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, obtendremos la derivada de la función de fase ϕ .

$$\begin{aligned} I_1 \cdot I_2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos \left(2\pi\omega x + \frac{\phi_2(x, y) + \phi_1(x, y)}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y)}{2} \right) \\ &+ \frac{1}{8} \cos [\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y)] + \frac{1}{8} \cos [4\pi\omega x + \phi_2(x, y) + \phi_1(x, y)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.3.5 Síntesis de derivada de objetos de fase

En la literatura se ha reportado un método de derivación de señales ópticas donde se coloca un filtro del tipo $(i2\pi v)^N$ que multiplica al espectro de la señal óptica [33]. En esta tesis doctoral se propone obtener la derivada de señales ópticas por un procedimiento

alternativo que consiste en hacer uso del interferómetro propuesto. En esta propuesta, las ventanas del sistema se desplazan lateralmente. Esta alternativa es más simple de implementar experimentalmente. Los resultados muestran un efecto moiré que supera los resultados vistos previamente debido a que la señal portadora es eliminada.

En el capítulo 2, se analizó matemáticamente el caso ideal donde la rejilla de Ronchi acopla perfectamente las dos ventanas en la salida del arreglo interferométrico $4f$. Sin embargo, en la práctica el acoplamiento no es perfecto y por lo tanto en la salida del interferómetro la superposición se realizará con ventanas ligeramente desplazadas una respecto de otra.

$$O'(x, y) = W\left(x - \frac{x_0}{2}\right) e^{i(\alpha_1)} + W\left(x + \frac{x_0}{2}\right) e^{i(\alpha_2)}, \quad (3.21)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\pi\omega x + \phi_1(x, y), \\ \alpha_2 &= 2\pi\omega x + \phi_2(x, y). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Colocando la rejilla de Ronchi fuera del plano de Fourier, en el plano de salida se observarán un ligero desplazamiento de la superposición del orden 0 de la ventana derecha con el orden +1 de la ventana izquierda. Este desplazamiento se describe matemáticamente

$$\begin{aligned} O'(x', y') &= W\left(x - \frac{x_0}{2}\right) e^{\frac{ikd}{2\omega^2}[x^2+y^2]+ik\phi_1(x,y)} \\ &\quad + W\left(x - \frac{x_0}{2}\right) e^{\frac{ikd}{2\omega^2}[(x-\Delta)^2+y^2]+ik\phi_2(x-\Delta,y)} \\ &= W_{i,d}\left(x - \frac{x_0}{2}\right) e^{\frac{ikd}{2\omega^2}[x^2+y^2]+ik\phi_1(x,y)} + e^{\frac{ikd}{2\omega^2}[(x-\Delta)^2+y^2]+ik\phi_2(x-\Delta,y)}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

dónde $\Delta = \frac{\lambda}{p}f$ siendo p el período de la rejilla. En la salida del interferómetro, se observará un patrón de intensidad dado por

$$I = O'^*(x, y) \cdot O'(x, y), \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} &= W\left(x - \frac{x_0}{2}\right) \left[2 + e^{ik\left[-\frac{2d\Delta}{2\omega^2}x + \frac{d\Delta^2}{2\omega^2} - \phi_1(x) + \phi_2(x-\Delta, y)\right]} \right. \\ &\quad \left. + e^{-ik\left[-\frac{2d\Delta}{2\omega^2}x + \frac{d\Delta^2}{2\omega^2} - \phi_1(x) + \phi_2(x-\Delta, y)\right]} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$= W\left(x - \frac{x_0}{2}\right) \left[2 + 2\cos \left[ik \left(-\frac{d\Delta}{\omega^2} x + \frac{d\Delta^2}{2\omega^2} + \phi_2(x - \Delta, y) - \phi_1(x, y) \right) \right] \right]. \quad (3.26)$$

Sustituyendo el valor de Δ , de k y haciendo $\phi_1 = \phi_2$

$$I = W\left(x - \frac{x_0}{2}\right) \left[2 + 2\cos \left[ik \left(-\frac{2\pi d}{\omega p} x + \frac{\pi \lambda d}{p^2} + \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \right) \right] \right]. \quad (3.27)$$

La ecuación (3.27) muestra el resultado observado a la salida del interferómetro. Teniendo en la fase, un primer término de portadora, el segundo introduce una fase constante y al final la diferencia de $\phi_2 - \phi_1$ que se aproxima a la derivada de ϕ con respecto de x , cuando $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. El término de portadora aumenta o disminuye el número de franjas dependiendo de su posición con respecto al punto focal en el plano de Fourier. En la siguiente sección se muestran resultados de simulación y experimentales.

3.4 Resultados

3.4.1 Derivación obtenida por simulación

En la figura 3.11, se muestran dos patrones de franjas generados por simulación. La fase codificada en el patrón 3.11 (a) corresponde a la diferencia $\phi(x, y) - \phi(x - x_0, y)$ donde

$$\phi(x, y) = (x^2 + y^2)^2. \quad (3.28)$$

Por otro lado, la fase del patrón mostrado en 3.11(b) corresponde a la derivada

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2)^2. \quad (3.29)$$

Podemos notar en la figura 3.11 la similitud entre la diferencia de la fase codificada dentro de un coseno y la derivada matemática de la función.

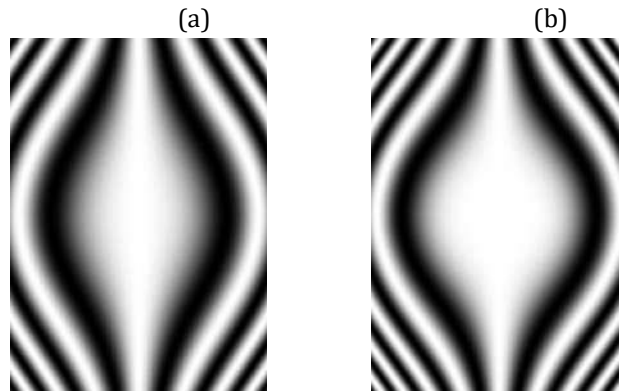


Figura 3.11. (a) Diferencia de fase $\phi(x, y) - \phi(x - x_0, y)$. (b) Derivada teórica de la fase $\phi(x, y)$.

3.4.2 Derivación usando patrones moiré

Para obtener la derivada de la función de fase usando patrones moiré, se generan dos patrones de franjas a partir de las ecuaciones (3.17) y (3.18). En esta simulación se consideró una frecuencia portadora $2\pi\omega x$ y la función de fase dada por la ecuación (3.28).

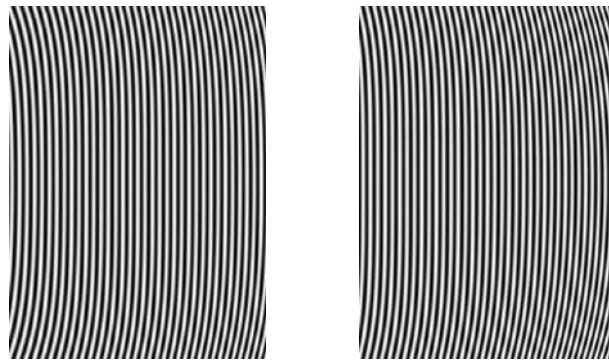


Figura 3.12. Patrones de franjas I_1 e I_2 generados para la simulación de derivada en amplitud de patrones moiré.

La figura 3.13 muestra lo que resultará de superponer los patrones de franjas aditivamente y multiplicativamente. Lo que se observa es la derivada de la función de fase en un patrón moiré, matemáticamente dado en la ecuación (3.19) para patrones moiré aditivos y (3.20) para patrones moiré multiplicativos. Comprobando esta afirmación al ver la figura 3.11(b), la cual muestra la derivada teórica de la función de fase.

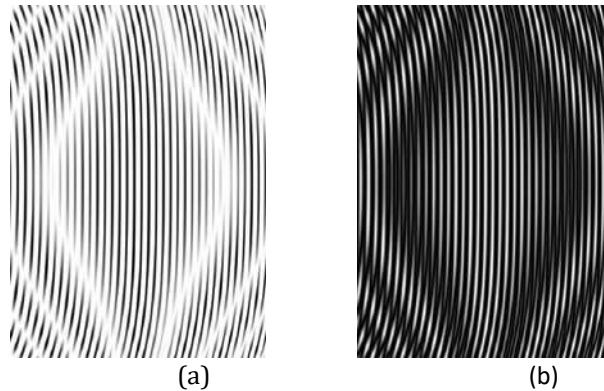


Figura 3.13. (a) Patrón moiré aditivo. (b) Patrón moiré multiplicativo.

3.4.3 Derivación de fase

Para eliminar el efecto moiré y obtener a la salida solo objetos de fase se filtra el orden $+1$ o -1 en el plano de Fourier. El resultado se muestra en la figura 3.14, pudiendo constatar que el objeto observado es solo de fase por tener una iluminación casi uniforme. Para lograr la superposición de las fases de esas ventanas, se usa una rejilla de Ronchi cerca del plano de Fourier, el resultado se muestra en la figura 3.15. En esta figura se puede observar la superposición de las ventanas con un desplazamiento lateral, pero sin una fase de estudio.

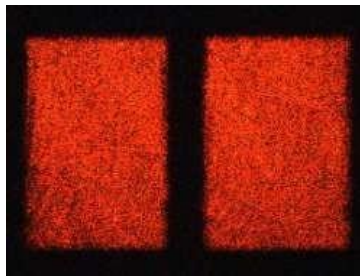


Figura 3.14. Ventanas sin efecto de la rejilla de Ronchi.

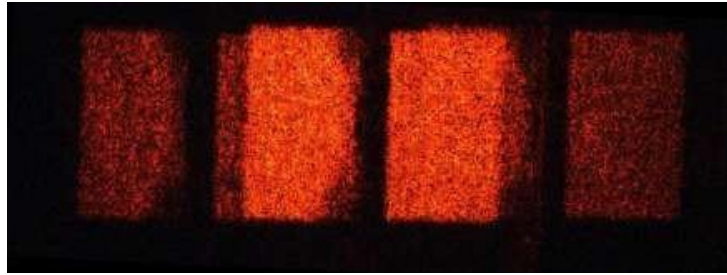


Figura 3.15. Desplazamiento de los órdenes de las ventanas con efecto de la rejilla de Ronchi. (Las ventanas no contienen patrones de franjas con la intención de mostrar el efecto de desplazamiento).

Al desplegar los patrones de franjas mostrados en la figura 3.16(a) con una función de fase dada por la ecuación (3.28), se obtiene la derivada de la función ϕ codificada como fase en la ecuación (3.29), y que se muestra en la figura 3.16(b).

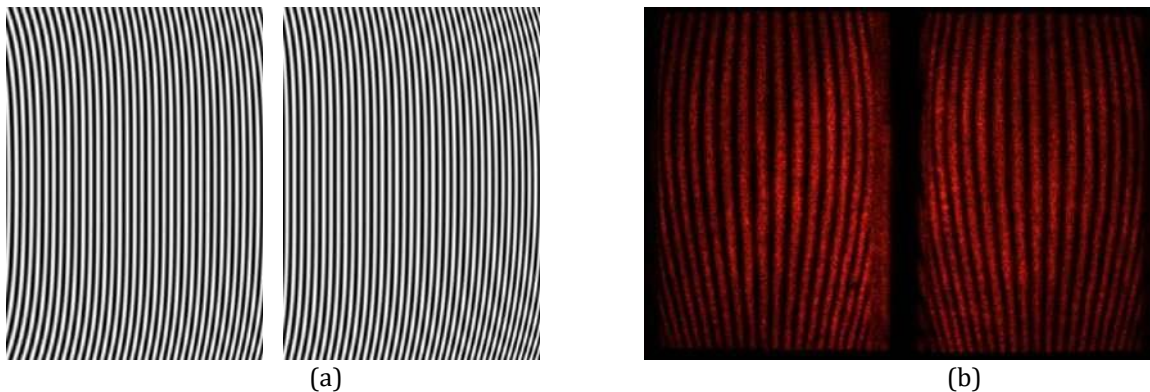


Figura 3.16. (a) Patrones de franja colocados en la ventana de entrada del interferómetro. (b) Derivada obtenida experimentalmente de la función ϕ .

Se ha mostrado en este capítulo la utilidad del arreglo de Fourier de doble ventana para sintetizar objetos de fase y amplitud en la salida del sistema. De igual forma, el arreglo propuesto es útil para obtener la derivada de funciones de fase arbitrarias. Esto se ha demostrado con patrones de moiré aditivos y multiplicativos (objetos de amplitud), asimismo, por interferencia en el plano de salida (objetos de fase).

El interferómetro propuesto en este capítulo genera patrones de franjas donde, bajo ciertas condiciones, el corrimiento de fase, se puede controlar de forma precisa. Específicamente, se puede inducir un corrimiento de fase controlando el patrón de franjas desplegado en la ventana de referencia. En otras aplicaciones, el corrimiento de fase se induce trasladando la rejilla colocada en el plano de Fourier; sin embargo, la precisión del

corrimiento de fase inducido es menor. En cualquier caso, los patrones de franjas generados por el interferómetro deben ser procesados para realizar extracción de fase. En el siguiente capítulo, se presenta un estudio sobre los métodos de corrimiento de fase que se emplearon en este trabajo de tesis.

Capítulo 4

Procesamiento de patrones de franjas para extracción de fase

En este capítulo se plantean algoritmos para extraer la fase de los perfiles codificados y obtenidos experimentalmente en el trabajo de tesis, los algoritmos de corrimiento de fase fueron publicados en el artículo titulado *How do phase shifting algorithms work?* en la revista *European Journal of Physics*.

En interferometría, el método de corrimiento de fase es uno de los más empleados para realizar extracción de fase a partir de un conjunto de patrones de franjas. En este capítulo se hace uso de la teoría desarrollada en los capítulos previos para extraer la fase codificada en una de las ventanas del interferómetro de trayectoria común de doble ventana. Para alcanzar este objetivo, en la ventana de prueba del interferómetro se codifica una fase arbitraria y en la otra ventana de referencia se induce el corrimiento de fase.

Existen algoritmos de corrimiento de fase que van desde los más básicos hasta los más complejos [34]. Los algoritmos básicos de corrimiento de fase son fáciles de implementar y entender [35,36], sin embargo, exigen el uso de equipos sofisticados para hacer corrimientos de fase precisos, así como mayor conocimiento y habilidades técnicas para manejar el equipo. Por otro lado, el interferómetro más elemental puede utilizarse casi sin ninguna habilidad técnica, implementando algoritmos más avanzados y complejos de corrimiento de fase.

En este capítulo se analizan cinco algoritmos de corrimientos de fase, presentándolos de menor a mayor complejidad. Primero se presentan los algoritmos de tres, cuatro y n-pasos, seguido de un algoritmo de mínimos cuadrados [37], y por último, el algoritmo iterativo avanzado [38]. Este capítulo finaliza empleando el algoritmo de cuatro pasos para extraer la fase de los interferogramas obtenidos experimentalmente en el capítulo 3.

4.1 Demodulación de fase

La interferencia es un fenómeno que juega un papel clave para la comprensión de las propiedades de la luz [39]. Hoy en día la interferencia óptica tiene usos y aplicaciones relevantes como espectroscopia y metrología [1,40,41]. Existen gran variedad de interferómetros que suelen ser utilizados para generar interferencia [42,43]. En esta tesis en particular, los patrones de franjas a analizar se obtienen con el interferómetro propuesto de doble ventana descrito en el capítulo 2.

Considerando el resultado de la ecuación (2.71), si $\alpha_1 = 2\pi\omega x + \phi(x, y)$ y $\alpha_2 = 2\pi\omega x + \delta$, entonces un patrón de franjas se puede escribir como

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \delta] + n(x, y), \quad (4.1)$$

donde $a(x)$ es la luz de fondo, $b(x)$ es la luz de modulación, $\phi(x, y)$ es la distribución de fase codificada en la ventana de prueba, δ un término de fase adicional conocido como corrimiento de fase, y que se codifica en la ventana de referencia, y $n(x, y)$ una señal de ruido aleatorio. En el arreglo propuesto en esta tesis doctoral, el corrimiento de fase es generado a partir del patrón de franjas de la ventana de referencia.

4.2 Corrimiento de fase

Uno de los propósitos de obtener corrimientos de fase es extraer la fase envuelta $\phi(x, y)$ de un conjunto de patrones de franjas. Para esto, los valores de desfase se usan como referencia. Si se conoce el corrimiento de fase, se puede utilizar un algoritmo básico, pero si es desconocido, se debe utilizar un algoritmo avanzado.

Los algoritmos básicos de corrimientos de fase se describen considerando n patrones de franjas $I_k(x, y)$, siendo $k = 1, 2, \dots, n$, descritos en la ecuación (4.1) pero con diferente corrimiento de fase; esto es

$$I_k = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \delta_k] + n_k(x, y). \quad (4.2)$$

Usando la identidad trigonométrica $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, la

ecuación puede ser escrita como

$$I_k = a(x, y) + b(x, y) \cos \phi(x, y) \cos \delta_k - b(x, y) \sin \phi(x, y) \sin \delta_k + n_k(x, y) \quad (4.3)$$

donde si el cambio de fase es conocido, se puede ver como un problema de estimación de tres incógnitas, por lo tanto, se requieren al menos tres patrones de franjas para trabajar.

4.2.1 Algoritmo de tres pasos

Consideramos tres corrimientos de fase uniformemente distribuidos en un intervalo de $[0, 2\pi]$

$$\delta_k = \frac{2\pi}{3}(k - 1), \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.4)$$

entonces, los patrones de franjas dados en la ecuación (4.3) se re-escriben como

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos \phi(x, y), \\ I_2(x, y) &= a(x, y) - \frac{1}{2} b(x, y) \cos \phi(x, y) - \frac{\sqrt{3}}{2} b(x, y) \sin \phi(x, y), \\ I_3(x, y) &= a(x, y) - \frac{1}{2} b(x, y) \cos \phi(x, y) + \frac{\sqrt{3}}{2} b(x, y) \sin \phi(x, y). \end{aligned} \quad (4.5)$$

La luz de fondo $a(x, y)$ puede ser obtenida como

$$a(x, y) = \frac{1}{3} [I_1(x, y) + I_2(x, y) + I_3(x, y)]. \quad (4.6)$$

Para calcular las funciones $b(x, y)$ y $\phi(x, y)$ serán requeridas las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \sqrt{3} b(x, y) \sin \phi(x, y) &= I_3(x, y) - I_2(x, y), \\ 3b(x, y) \cos \phi(x, y) &= 2I_1 - I_2(x, y) - I_3(x, y). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Usando la identidad trigonométrica $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ y $\tan \phi = \sin \phi / \cos \phi$, la luz de modulación $b(x, y)$ y la fase $\phi(x, y)$ son obtenidas de la ecuación (4.7)

$$b(x, y) = \frac{1}{3} \sqrt{3[I_3(x, y) - I_2(x, y)]^2 + [2I_1 - I_2(x, y) - I_3(x, y)]^2}, \quad (4.8)$$

$$\phi_\omega(x, y) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}[I_3(x, y) - I_2(x, y)]}{2I_1 - I_2(x, y) - I_3(x, y)}\right), \quad (4.9)$$

donde el subíndice ω indica que los valores de fase se dan solo en el intervalo $(-\pi, \pi]$, esto debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas. La eliminación de discontinuidades sintéticas para restaurar la función de fase $\phi(x, y)$ es un proceso que se conoce como desenvolvimiento de fase, y lo denotamos como

$$\phi(x, y) = W^{-1}[\phi_\omega(x, y)], \quad (4.10)$$

donde W es el operador de envolvimiento. Existen diversos algoritmos de desenvolvimiento de fase [44,45]. El algoritmo basado en mínimos cuadrados es uno de los más robustos para el proceso de desenvolvimiento de fase [46]. Más adelante se presentarán los detalles de este algoritmo de mínimos cuadrados.

4.2.2 Algoritmo de cuatro pasos

Si se requiere mejorar el método de corrimiento de fase, lo que se puede hacer es aumentar el número de patrones de franjas. Por ejemplo, cuatro patrones, los corrimientos de fase requeridos son

$$\delta_k = \frac{\pi}{2}(k - 1), \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (4.11)$$

Los cuatro patrones de franjas con corrimientos de fase dados en la ecuación (1.3) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos \phi(x, y), \\ I_2(x, y) &= a(x, y) - b(x, y) \sen \phi(x, y), \\ I_3(x, y) &= a(x, y) - b(x, y) \cos \phi(x, y), \\ I_4(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \sen \phi(x, y). \end{aligned} \quad (4.12)$$

El promedio de los patrones de franjas nos permite obtener la luz de fondo $a(x, y)$ como

$$a(x, y) = \frac{1}{4}[I_1 + I_2 + I_3 + I_4]. \quad (4.13)$$

Para obtener la extracción de fase $\phi(x, y)$ y la luz de modulación $b(x, y)$, se realizan las siguientes sustracciones

$$I_4(x) - I_2(x) = 2b(x) \text{ sen } \phi(x), \quad (4.14)$$

$$I_1(x) - I_3(x) = 2b(x) \text{ cos } \phi(x). \quad (4.15)$$

Así, la luz de modulación y la distribución de fase se obtiene por

$$b(x) = \frac{1}{2} \sqrt{[I_1(x) - I_3(x)]^2 + [I_4(x) - I_2(x)]^2}, \quad (4.16)$$

y

$$\phi(x) = \arctan \left(\frac{I_4(x) - I_2(x)}{I_1(x) - I_3(x)} \right). \quad (4.17)$$

4.2.3 Algoritmo de n pasos

Extendiendo el algoritmo de corrimientos de fase hasta n pasos. Se considera un conjunto de patrones de franjas, con corrimientos de fase uniformemente distribuidos en un intervalo de $[0, 2\pi p]$; esto es

$$\delta_k = p \frac{2\pi}{n} (k - 1), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.18)$$

donde $p \geq 1$ es un número entero que denota el número de franjas sobre las que se encuentra el patrón de franjas muestreado. Desarrollando podremos recuperar las funciones $a(x, y)$, $b(x, y)$ y $\phi(x, y)$, que nos quedarán de la forma

$$a(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_k(x, y), \quad (4.19)$$

$$b(x, y) = \frac{2}{n} \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n I_k(x, y) \text{ sen } \delta_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n I_k(x, y) \text{ cos } \delta_k \right)^2} \quad (4.20)$$

$$\phi(x, y) = -\arctan\left(\frac{\sum_{k=1}^n I_k(x, y) \operatorname{sen} \delta_k}{\sum_{k=1}^n I_k(x, y) \operatorname{cos} \delta_k}\right) \quad (4.21)$$

4.2.4 Algoritmo de mínimos cuadrado

Hasta ahora los algoritmos descritos están restringidos a patrones de franjas donde los corrimientos de fase son funciones lineales de k . Sin embargo, hay experimentos que no cumplen esta condición, un ejemplo es el interferómetro de Michelson, aquí el desplazamiento varía cuadráticamente cuando la fuente de iluminación se traslada lateralmente. Un algoritmo eficiente para estimar las funciones $a(x, y)$, $b(x, y)$ y $\phi(x, y)$ a partir de patrones de franjas con corrimientos de fase arbitrarios es el método de mínimos cuadrados propuesto por Greivenkamp [37].

Un conjunto de n patrones de franjas de la forma dada en la ecuación (4.3) se puede escribir en una matriz de la forma $Y = AC$ descrita

$$\begin{pmatrix} I_1(x_1) & I_1(x_2) & \cdots & I_1(x_N) \\ I_2(x_1) & I_2(x_2) & \cdots & I_2(x_N) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ I_n(x_1) & I_n(x_2) & \cdots & I_n(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{cos} \delta_0 & -\operatorname{sen} \delta_0 \\ 1 & \operatorname{cos} \delta_1 & -\operatorname{sen} \delta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \operatorname{cos} \delta_n & -\operatorname{sen} \delta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x_1) & \cdots & a(x_N) \\ b(x_1)\operatorname{cos} \phi(x_1) & \cdots & b(x_N)\operatorname{cos} \phi(x_N) \\ b(x_1)\operatorname{sen} \phi(x_1) & \cdots & b(x_N)\operatorname{sen} \phi(x_N) \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

donde Y es una matriz de tamaño $n \times N$ con n siendo el número de franjas, mientras que N representa el número total de píxeles en el patrón, A es una matriz de tamaño $n \times 3$ y C es una matriz de $3 \times N$. Las filas de la matriz C son definidas como

$$C = \begin{pmatrix} a(x) \\ b(x)\operatorname{cos} \phi(x) \\ b(x)\operatorname{sen} \phi(x) \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Se tiene en cuenta que hay nN restricciones (los elementos de la matriz Y) y $3N$ incógnitas (los elementos de la matriz C). Por lo tanto, para $n \geq 3$ y los corrimientos de fase tales que la matriz $A^T A$ no es singular, la ecuación $AC = Y$ dado en la ecuación (4.22) puede ser resuelto para C usando el método de mínimos cuadrados [46] como

$$C = (A^T A)^{-1} A^T Y, \quad (4.24)$$

donde $[\cdot]^T$ y $[\cdot]^{-1}$ denota la transpuesta y la inversa, respectivamente. Entonces, los valores de $a(x, y)$, $b(x, y)$ y $\phi(x, y)$ se obtienen de las filas de C como

$$a(x, y) = c_1(x, y), \quad (4.25)$$

$$b(x, y) = \sqrt{c_2^2(x, y) + c_3^2(x, y)}, \quad (4.26)$$

$$\phi_\omega(x, y) = \arctan\left(\frac{c_3(x, y)}{c_2(x, y)}\right). \quad (4.27)$$

Los algoritmos de tres, cuatro y n-pasos son casos particulares del algoritmo de mínimos cuadrados. Esto se puede corroborar utilizando los cambios de fase dados por las ecuaciones (4.4), (4.11), o (4.18) en la matriz A y luego verificar que los resultados sean los mismos que los algoritmos correspondientes.

4.2.5 Algoritmo iterativo avanzado

Finalmente, analizaremos el algoritmo iterativo avanzado (AIA) que no requiere dar como entrada los corrimientos de fase [38]. Este algoritmo consiste en un bucle formado por dos algoritmos de mínimos cuadrados uno de ellos mencionado arriba. En una primera etapa, el corrimiento de fase se utiliza para estimar la distribución de fase, en la segunda etapa, la distribución de fase se utiliza para calcular el corrimiento de fase. El AIA trabaja con tres o más patrones de franjas. Como condición inicial, el corrimiento de fase se puede establecer en

$$\delta_k^0 = \frac{2\pi}{n}(k - 1), \quad (4.28)$$

con $k = 1, 2, \dots, n$, donde el superíndice indica el número de iteración. Para la i -ésima iteración, las funciones $\phi^i(x, y)$ y δ_k^i serán más precisas que, $\phi^{i-1}(x, y)$ y δ_k^{i-1} de la iteración previa ($i - 1$).

Se utilizan dos criterios de parada, primero la convergencia relativa del corrimiento de fase dado por

$$\|\delta^i - \delta^{i-1}\| \leq \epsilon \quad (4.29)$$

donde $\delta^i = [\delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_n^i]$ es un vector con corrimiento de fase evaluado en δ_k^i de la i -ésima iteración, $\|\cdot\|$ denota la norma Euclidiana, y ϵ es un parámetro ya definido, usualmente como $\epsilon = 10^{-6}$. El segundo criterio consiste en alcanzar un número máximo de M iteraciones.

El algoritmo de cuatro pasos fue utilizado en este trabajo de tesis para extraer la fase de los interferogramas experimentales descritos en el capítulo 3 donde obtenemos derivación de fase.

4.3 Resultados

El diseño del experimento se especifica a continuación. Se aplicó el algoritmo de cuatro pasos para extraer la fase de patrones de franjas experimentales, obtenidas en el capítulo 3. Primero, se obtuvo la extracción de la función de fase $\phi(x, y)$ codificada en un patrón de franjas, y después, la extracción de fase de la derivada de esta función. En la ventana de prueba del interferómetro se desplegó una rejilla que codifica la fase portadora $2\pi\omega x$ más la fase a recuperar

$$\phi(x, y) = (x^2 + y^2)^2, \quad (4.30)$$

De forma similar, en la ventana de referencia del interferómetro se despliega una rejilla que codifica la fase portadora $2\pi\omega x$ más el corrimiento de fase

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0, \\ \delta_2 &= \pi/2, \\ \delta_3 &= \pi, \\ \delta_4 &= 3\pi/2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Como resultado, por cada corrimiento de fase, en la salida del sistema se obtendrá un patrón de franjas correspondiente a la superposición de las rejillas desplegadas en ambas ventanas del sistema. En la figura 4.1 se muestran los cuatro patrones de franjas obtenidos en este experimento.

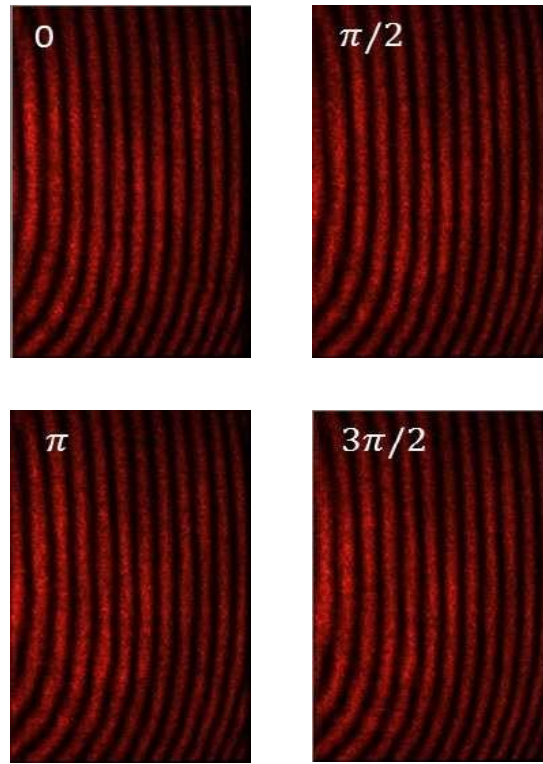


Figura 4.1. Patrones de franjas experimentales con corrimiento de fase de $\pi/2$ radianes.

La figura 4.2(a) muestra la fase envuelta obtenida por el algoritmo de cuatro pasos. La figura 4.2(b) muestra la fase envuelta extraída en un gráfico tridimensional con el fin de observarla de manera más intuitiva.

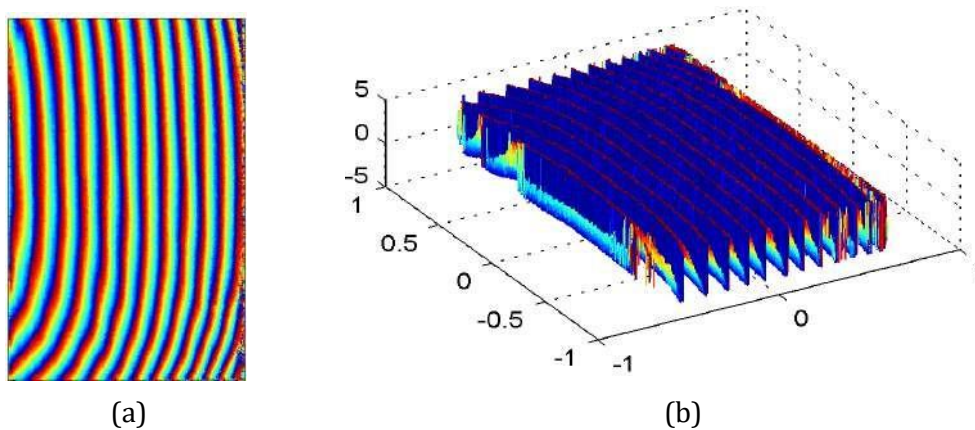


Figura 4.2. Fase envuelta de la función ϕ . (a) gráfica en 2D, (b) gráfica en 3D

Finalmente, la fase extraída se puede visualizar sin discontinuidades realizando el

desenvolvimiento de fase expresado por la ecuación (4.10). Las figuras 4.3(a) y 4.3(b) muestran las fases desenvueltas obtenidas.

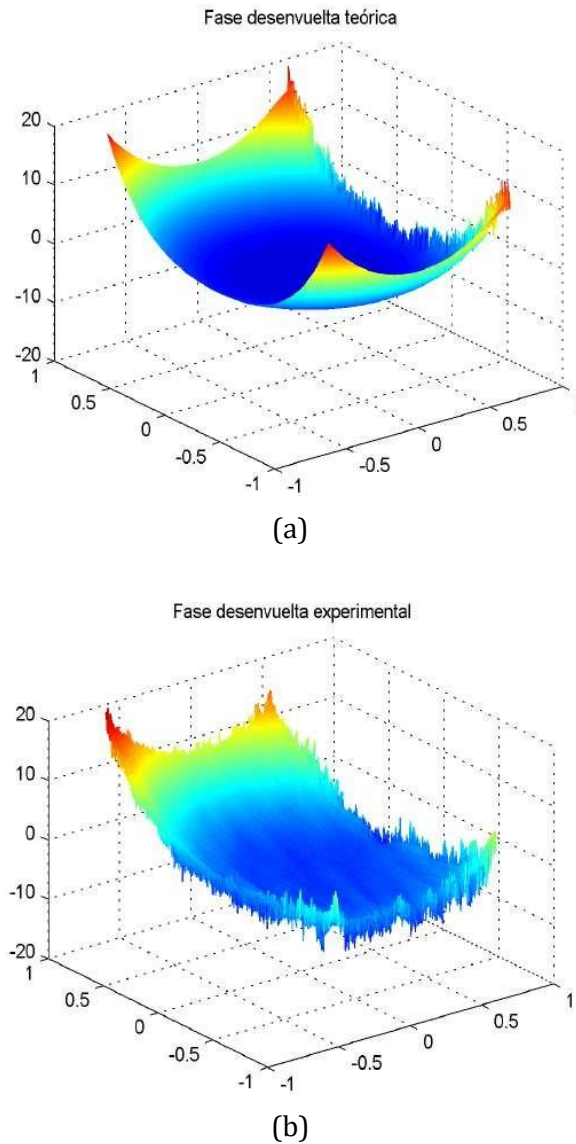


Figura 4.3. (a) Extracción de fase de la función matemática dada por $\phi(x, y)$. (b) Extracción defase de la función $\phi(x, y)$ obtenida experimentalmente.

En el capítulo 3, se abordó la propuesta de obtener la derivada de la función de fase $\phi(x, y)$ con el interferómetro de doble ventana. Para obtener la extracción de fase de este resultado, se utilizó el análisis descrito arriba, sin embargo, las condiciones de las rejillas desplegadas en la entrada del sistema cambian. En la ventana de prueba del interferómetro se despliega una rejilla que codifica la fase portadora $2\pi\omega x$ más la función de fase dada en la ecuación (4.30).

En la ventana de referencia del interferómetro se despliega una rejilla que codifica la suma de tres términos de fase: la portadora $2\pi\omega x$, la función de fase $\phi(x,y)$, y el corrimiento de fase de la forma dada en la ecuación (4.31). En la figura 4.4 se muestran los cuatro patrones de franjas obtenidos en la salida del arreglo, como resultado por cada corrimiento de fase.

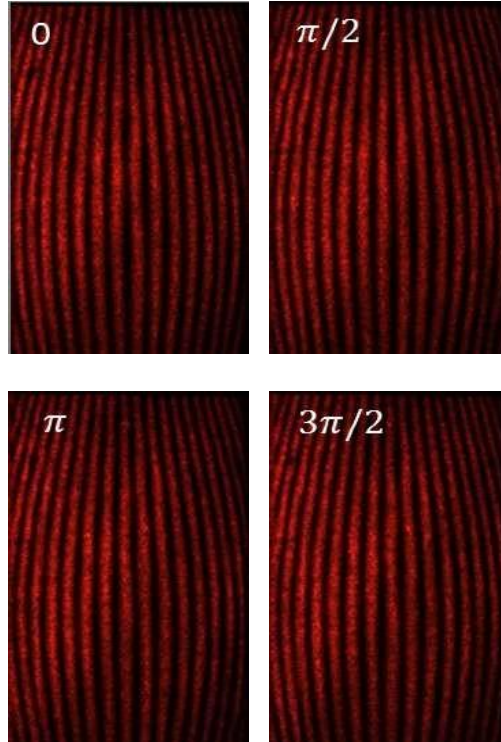


Figura 4.4. Patrones de franjas experimentales con corrimiento de fase de $\pi/2$ radianes.

Las figuras en 4.5 muestran la fase envuelta obtenida con el algoritmo de cuatro pasos, graficada en 2D y 3D. Y en la figura 4.6(a) se muestra la fase desenvuelta con la derivada matemática de la función de fase y la figura 4.6(b) la fase desenvuelta de la derivada de la función de fase experimental.

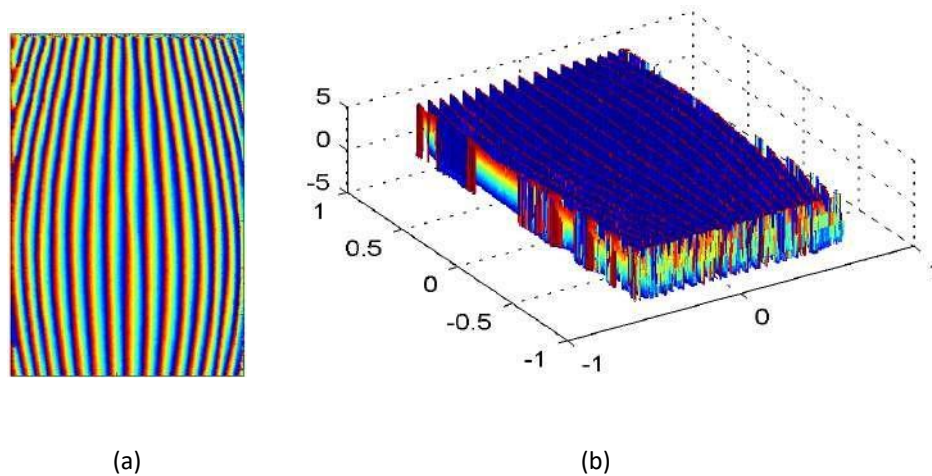


Figura 4.5. Fase envuelta de la derivada de la función $\phi(x,y)$. (a) Gráfica en 2D, (b) gráfica en 3D.

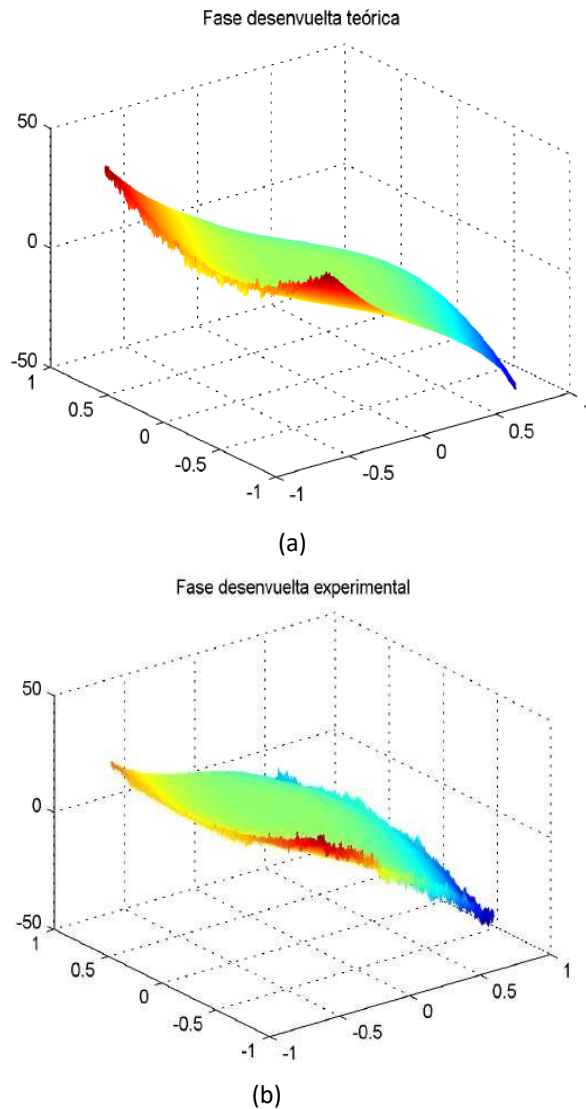


Figura 4.6. (a) Extracción de fase de la derivada matemática de la función $\phi(x, y)$ (b) Extracción de fase de la derivada de la función $\phi(x, y)$ obtenida experimentalmente.

En este capítulo fueron analizados cinco algoritmos de extracción de fase envuelta. Primero se analizaron cuatro algoritmos básicos que requieren el conocimiento del corrimiento de fase, y luego, se presentó un algoritmo avanzado que no necesita el corrimiento de fase ya que el mismo algoritmo lo estima.

Se recomienda emplear los algoritmos básicos de corrimiento de fase en perfilometría óptica debido a que los corrimientos de fase se pueden controlar con precisión. El arreglo propuesto permite controlar los corrimientos de fase con precisión debido a que el corrimiento de fase se introduce de manera computacional. Por lo tanto, en esta tesis se propone utilizar el algoritmo de cuatro pasos ya que es un algoritmo básico y fácil de implementar computacionalmente.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis, se implementó un interferómetro de trayectoria común de doble ventana en un arreglo óptico de Fourier $4f$, proponiendo colocar en la entrada del arreglo un modulador espacial de luz de cristal líquido con el fin de sintetizar objetos de fase a partir de objetos de amplitud en la salida del sistema óptico. El arreglo propuesto es muy versátil para estudiar fenómenos de superposición. Este fenómeno es obtenido al introducir una rejilla de Ronchi con una frecuencia adecuada en el plano de Fourier. La frecuencia de la rejilla de Ronchi, necesaria para lograr la superposición en la salida del sistema, se calcula usando la distancia focal de las lentes, la longitud de onda de la fuente de luz láser, y la distancia entre las ventanas. Las ventanas colocadas en la entrada del arreglo se despliegan en el modulador espacial de luz, siendo una ventana de prueba y otra de referencia. En la ventana de prueba se introduce un patrón de franjas donde se codifican perfiles de fase arbitrarios y en la ventana de referencia se introduce un patrón de franjas sumando un término de corrimiento de fase.

Este arreglo de trayectoria común ha sido de interés porque permite usarlo como un instrumento codificador de fase y al mismo tiempo como un arreglo interferométrico que analiza esta fase. Aunque en la literatura este arreglo ha sido implementado como un instrumento interferométrico para obtener directamente la fase, en esta tesis doctoral se exploró el potencial de este arreglo para obtener la derivada de objetos de fase y de amplitud.

Se simularon patrones moiré aditivos y multiplicativos en Matlab, observando que, si los patrones de franjas en la entrada del sistema son desplazados lateralmente, entonces se observará la derivada de la fase codificada. En la parte experimental, concluimos que el arreglo óptico genera la derivada de la fase, cuando el período de la rejilla de Ronchi no está acoplada a la separación de las ventanas. Obtuvimos resultados de derivada de fase de una función de cuarto grado, originando entonces en la salida una función de fase de tercer grado. Estos resultados fueron comprobados experimentalmente y computacionalmente.

El arreglo experimental propuesto es capaz de introducir corrimientos de fase en los patrones de franjas generados. De esta forma, la fase de los patrones de franjas en la salida del sistema puede ser recuperada usando un algoritmo de corrimiento de fase apropiado. En esta tesis, se describen cinco algoritmos de corrimiento de fase, cuatro algoritmos básicos y un algoritmo avanzado. Para usar los algoritmos básicos, se debe conocer el corrimiento de fase introducido, mientras que el algoritmo avanzado no requiere que el corrimiento de fase sea conocido. Una característica del arreglo propuesto es la posibilidad de introducir corrimientos de fase precisos controlados por computadora a través del modulador espacial de luz. De esta forma, es suficiente emplear algoritmos básicos para extraer la fase codificada en los patrones de franjas experimentales.

Los resultados obtenidos indican que el arreglo es adecuado para ejecutar la operación de derivada manipulando la información de la fase desde las dos ventanas de entrada y por lo tanto puede ser útil en el futuro como una alternativa para obtener derivadas fraccionales.

Bibliografía

- [1] Daniel Malacara. Optical shop testing, volumen 59. John Wiley y Sons, (2007).
- [2] Katherine Creath. Progress in optics. Wolf, ed, 26:350, (1988).
- [3] Victor Arrizón y David Sánchez de la Llave. Common-path interferometry with one dimensional periodic filters. Optics Letters, 29(2), (2004).
- [4] Bengong Hao, Minggu Shan, et al. Common-path interferometer with a tri-window. Optics Letters 37(15), (2012).
- [5] Yann Ferrec, et al. Optimal geometry for sagnac and michelson interferometers used as spectral imagers. Optical Engineering, 45(11), (2006).
- [6] John F. Ebersole. Optical image subtraction. Optical Engineering, 14(5), (1975).
- [7] Peng Gao, Baoli Yao, Junwei Min, et al. Parallel two-step phase-shifting point-difraction interferometry for microscopy based on a pair of cube beamsplitters. Optics Express, 19(3), (2011).
- [8] Zhi Zhong, Bengong Hao, Mingguang Shan, et al. Two-shot common-path phase-shifting interferometer with a four-step algorithm and an unknown phase shift. Applied Optics, 53(10), (2014).
- [9] Cruz Meneses Fabián y Gustavo Rodríguez Zurita. Carrier fringes in the two-aperture common-path interferometer. Optics Letters, 36(5), (2011).
- [10] Cruz Meneses Fabián, Rosaura Kantun Montiel, et al. Carrier fringes interferometry by superposing the first harmonic of two rulings with different period. Optics and Lasers in Engineering, 27–30, (2014).
- [11] Kang Jin U., Han Jae-Ho, et al.. Endoscopic functional fourier domain common-path optical coherence tomography for mycosurgery. IEEE Journal of selected topics in quantum electronics, 16(4), (2010).
- [12] Park Seok Jae, Chen Zhongping, Et al. Double common-path interferometer for flexible optical probe of optical coherence tomography. Optics Express, 20(2), (2012).
- [13] Sharma U., Fried Nathaniel M., Et al. All-fiber common-path optical coherence tomography: sensitivity optimization and system analysis. IEEE Journal of selected topics in quantum electronics, 11(4), (2005).
- [14] Kane J. Daniel Vakhtin B. Andrei y Peterson A. Kristen. Common-path interferometer for frequency-domain optical coherence tomography. Applied Optics, 42(34), (2003).
- [15] Ma Chaojie, Li Ying, Et al. Lateral shearing common-path digital holographic microscopy based on a slightly trapezoid sagnac interferometer. Optics Express, 25(12), (2017).
- [16] Wadduwage N. Dushan, Singh Raj Vijay, Et al. Near common-path interferometer for imaging fourier transform spectroscopy in wide field microscopy. Optics, 4(5), (2017).
- [17] Hans I. Bjelkhagen, editor. Common-path depth-filtered digital holography for high resolution of buried semiconductor structures, volumen 9771. (2016).
- [18] Otaki K., Yamamoto T., Et al. Accuracy evaluation of the point-difraction interferometer for extreme ultraviolet lithography aspheric mirror. American Vacuum Society, 20(1), (2002).
- [19] Wolfgang Osten. Optical Inspection of Microsystems. Taylor and Francis, (2019).
- [20] Gustavo Rodríguez Zurita. Apunte de interferometría óptica contemporánea. Technical Report, FCFM-BUAP, (2014).
- [21] Diao Ming, Hao Bengong, Et al. Tri-window common-path interferometer for quantifying phase objects. Applied Optics, 53(24), (2014).
- [22] Joseph W. Goodman. Introduction to Fourier Optics. McGraw-Hill physical and quantum electronics series, Third edition, (2005).
- [23] Daniel Malacara. Óptica básica. Ediciones científicas universitarias, Primera edition, (2004).
- [24] Cruz Meneses Fabián, Rosaura Kantun Montiel, Et al. Double aperture common-path phase-shifting interferometry by translating a ruling at the input plane. Optics Letters, 38(11), (2013).

- [25] Creath K. y Wyant J. C., Schmit J. Optical Shop Testing, capítulo Optical Metrology of Diffuse Surfaces. Third edition, (2007).
- [26] Gerald Oster y Yasunori-Nishijima. Moiré patterns. Scientific American, 208(5):54–63, (1963).
- [27] Bryngdahl Olof. Characteristics of superposed patterns in optics. Journal Optical Society of America, 66(2), (1976).
- [28] Patorsky K. Subtraction and addition of optical signals using a double-grating shearing interferometer. Optics Communications, 29(1), (1979).
- [29] Juárez Salazar R., Robledo Sánchez C., Et al. Intensity normalization of additive and multiplicative spatially multiplexed patterns with in encoded phases. Optics and Lasers in Engineering, 77:225–229, (2006).
- [30] Rivera Figueroa Antonio. Cálculo diferencial. Número 43. (2014).
- [31] Balabasquer Villa G. El concepto de derivada y sus aplicaciones. (1994).
- [32] Gómez G. Villa J., García G. Wavefront recovery in shearing interferometry with variable magnitude and direction shear. Optics Communications, :85–91, (2001).
- [33] Zerbino L. Rabal H. y Ojeda Castañeda J. Continuous order derivative for optical signals and images. Microwave and Optical Technology Letters, 1(2), (1988).
- [34] Juárez Salazar R., Mendoza Rodríguez C, Et al.. How do phase-shifting algorithms works? European Journal of Physics, 39, (2018).
- [35] Oreb B. F. Hariharan P. y Eiju T. Digital phase-shifting interferometry. Applied Optics, 26, (1987).
- [36] Ayubi G A., Perciante C. D. Martino, Et al. Generalized phase-shifting algorithms: error analysis and minimization of noise propagation. Applied Optics, 55, (2016).
- [37] Greivenkamp J. E. Generalized data reduction for heterodyne interferometry. Optical Engineering, Bellingham, 23, (1984).
- [38] Wang Z. y Han B. Advanced iterative algorithm for phase extraction of randomly phase-shifted interferograms. Optics Letters, 29, (2004).
- [39] Cavalcanti C. J. H., Ostermann F., Et al. Software-aided discussion about classical picture of mach-zehnder interferometer. European Journal Physics, 38(065703), (2017).
- [40] Born M. y Wolf E. Principles of optics Electromagnetic Theory of propagation, interference and diffraction of light. (1999).
- [41] Rastogi P. K. Digital Speckle Patterns interferometry and Related Techniques. 2001.
- [42] Hariharan P. Basic of interferometry. Second edition, (2007).
- [43] Goodwin E. P y Wyant J. C., editors. Field guide to interferometric optical testing. SPIE, Bellingham, (2006).
- [44] Ghiglia D. C y Pritt M. D. Two-dimensional phase unwrapping theory, algorithms and software. New York Wiley, (1998).
- [45] Constantini M. A novel phase unwrapping method based on network programming. Trans. Geosci. Remote Sens, (1998).
- [46] Juárez Salazar R., Robledo Sánchez C., Et al. Phase unwrapping algorithm by a rounding-least-squares. In Bellingham, editor, Optics Engineering, vol. 53 (2014).
- [47] Rückmann, G. W. L. OptiXplorer Laboratory Tutorials Hardware Operating Instructions Software. (2007).
- [48] Steward James and Romo Jorge Humberto, Cálculo de varias variables: Trascendentes tempranas, 6a. ed., Cengage Learning, (2008).