Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

NÚMEROS FIGURADOS Y SU USO DIDÁCTICO EN NIVEL MEDIO SUPERIOR

Diciembre del 2023

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

L I C E N C I A D O E N M A T E M Á T I C A S

P R E S E N T A

MARCO ANTONIO GARCÍA MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS

M. C. PABLO RODRIGO ZELENY VÁZQUEZ

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por brindarme el conocimiento para realizar este trabajo, a mis padres Adrián García Rodríguez y Marcela Martínez Espinoza los cuales me han apoyado incondicionalmente a lo largo de mi vida, a mi asesor de tesis Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez por la paciencia y el tiempo invertido para poder realizar este trabajo, a mi jurado por apoyarme, a mis hermanos: Ana Teresa García Martínez, Juan José García Martínez y José Luis Ordoñez Sánchez por no dejar de alentarme a terminar mi licenciatura, a mi novia Brenda Lizbeth Cuevas Juárez no tengo como agradecer todo lo que ha hecho por mí, a mi familia y amigos sin sus enseñanzas y llamadas de atención nunca hubiera podido terminar gracias a todos y cada uno por su cariño y apoyo.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

Resumen

En este trabajo se desarrolla el tema de números figurados con un enfoque didáctico, para que los alumnos de nivel medio superior tengan una mejor perspectiva de cómo trabajar con una sucesión de números (patrones numéricos) para lograr expresar el termino general.

Los números figurados son un tipo de sucesiones cuyos elementos tienen correspondencia con figuras construidas a base de puntos equidistantes que forman triángulos, cuadrados, pentágonos etc. en el plano, en el espacio se forman los “números piramidales”, si se sobreponen por capas, nosotros pretendemos utilizar un enfoque concreto al utilizar cubos de madera, dados y fichas para llevar al alumno de educación medio superior a la comprensión del término general en una sucesión, esto permitirá visualizar como se van generando los términos de la sucesión y será más fácil para el alumno poder comprender como se llega a expresar el término general.

Al poder observar cómo se forman los números figurados, los alumnos pueden percibir más fácilmente el patrón de crecimiento de una sucesión, al poder manipular objetos en lugar de puntos y con el apoyo del profesor los alumnos acceden poco a poco a la simbolización algebraica. Para llevar a cabo este trabajo nos ayudaremos de diferentes objetos como dados, cubos de madera, fichas circulares y en general del programa GeoGebra el cual nos ayudara a **visualizar** cualquier patrón numérico y así el alumno pueda comprender como se forma la sucesión, además de consultar la página web Wolfram Mathword para la visualización 3D.

Cabe señalar que este tema se trabaja desde hace varios años, y se incluyó en los planes oficiales de SEP para secundaria, por ejemplo, en el libro; Fichero de actividades didácticas matemáticas (2004), pero el “método algebraico” para

obtener el termino n-ésimo no es accesible a la mayoría de los alumnos. Dicho método consiste en obtener los coeficientes A, B, C para el termino general de la forma $Ax^2 +Bx +C$ y como se conocen los primeros términos de una sucesión concreta, se resuelve un sistema lineal de ecuaciones.

"Es más fácil entender un concepto cuando se dispone de una imagen, a cuando se carece de ella" (Shlomo Vinner)

Introducción

Nuestro primer contacto con los números figurados se dio en el libro “Estudio de las geometrías” de Howard Eves (1969), en el cual se indica que la creación de los números figurados se acredita a los pitagóricos antiguos (siglo VI antes de nuestra era), como un intento de conectar la geometría y la aritmética. Los pitagóricos, siguiendo su credo "todo es número", consideraron a cualquier entero positivo como un conjunto de puntos que se pude representar en el plano formando una figura geométrica. Posteriormente estudiando los apuntes de clase en el tema inducción matemática de Pablo Rodrigo Zeleny en la FCFM, vemos otra forma de trabajar, donde se hace énfasis en obtener algunas sumatorias al notar como van incrementando una sucesión y usando el método de diferencias, que los alumnos perciben de manera natural.

Actualmente esto se considera una buena opción para motivar el álgebra elemental, al usar expresiones simbólicas para el termino n-ésimo de una sucesión, esto lo indican como “Expresión de una generalidad”, Mason et al (1985).

Un número figurado es un número que se puede representar por un patrón geométrico regular y discreto de puntos equidistantes, forman un polígono regular, también pueden formar otras figuras como polígonos centrados, formas en L, y tridimensionales, estos son menos conocidos y casi no se consideran en los libros de texto de matemáticas (secundaria).

En particular, los números poligonales generalizan números que pueden representarse desde un triángulo (números triangulares), o un cuadrado, para cualquier figura con un número de lados entero $k \geq 5$ lo denotaremos como k-agonal.

Este trabajo mostramos las propiedades de los números figurados como “zona de trabajo” para acceder a la idea de “generalización algebraica”, esto permite que los alumnos hagan explicitas sus actividades cognitivas que surgen de manera natural al trabajar de manera concreta patrones numéricos y resulte natural pensar en ”n” como un numero entero cualquiera.

La propuesta es trabajar con alumnos de nivel medio superior, nos ayudara a dar un enfoque didáctico al proceso de generalización una literal como n, m, k etc., representa cualquier número natural, más adelante esto nos lleva al método de inducción matemática que se estudia en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) además obtenemos una visualización de algunas sucesiones que permite entender mejor las demostraciones formales de sucesiones y series.

Nosotros consideramos que el trabajar con sucesiones de números figurados brinda una manipulación, de tal forma que los alumnos de nivel medio superior pueden visualizarlas haciendo más fácil la comprensión de sus propiedades, en este trabajo comenzaremos realizando diferentes sucesiones con puntos y cubos, algunas nos permiten que los alumnos puedan dar una interpretación algebraica a partir de la visualización y manipulación de cubos de madera.

No omitimos mencionar que hay muchos trabajos de investigación respecto del uso de patrones numéricos como propuesta didáctica desde la primaria hasta nivel medio superior, pero claramente presentan limitaciones en cuanto a su desarrollo conceptual; por las limitaciones propias de la edad de los alumnos, preferimos desarrollar el tema por nuestra cuenta que dar muchas referencias, basándonos en el libro Figurate Numbers de Deza (2012) donde hacen un tratamiento más profundo del tema, pero no con fines didácticos. Somos conscientes que implementar una propuesta depende de muchos factores que salen del control del docente, por ello el éxito en la comprensión y avance al cubrir el material depende del contexto escolar y del tiempo que se trabaje.

Finalmente concluiremos con algunas de las respuestas de los alumnos a las actividades que se plantean a lo largo del trabajo y actividades realizadas con el material didáctico utilizado.

El álgebra escolar incluye sumar, restar multiplicar expresiones algebraicas, simplificación de términos semejantes, solución de ecuaciones de primer grado y segundo grado, así como resolver sistemas de ecuaciones 2x2, resolución de problemas con enunciado, en este trabajo no consideramos la solución de ecuaciones, para las ecuaciones líneas es común recurrir al método de la balanza para explicar cómo se resuelven, pero el uso de símbolos algebraicos para representar números requiere más trabajo, al no haber un modelo sencillo (como la balanza) Usiskin (2004) explica los diferentes significados del álgebra escolar dependiendo a que temas se de preferencia.

Sin embargo, rápidamente se puede comentar que, el trabajo con expresiones algebraicas al inicio del estudio del algebra escolar desconcierta a los alumnos, pues dichas expresiones se presentan sin relación a algo concreto, “caen del cielo” así que son víctimas de lo que se conoce “como falta de significado” de las literales. Al alumno no se le explica de donde surgen o a que se refieren las “expresiones algebraicas” que debe operar (sumar, restar, multiplicar y simplificar), en pocas palabras no sabe lo que esta “manipulando” y termina viendo los temas como conceptos aislados, la didáctica se reduce a la repetición mecánica de ejercicios típicos, en inglés algo como “drill algebra” o worksheets. Finalmente cabe hacer notar este tipo de ejercicios es lo que se evalúa y aparece en los exámenes de admisión, pero en la actualidad esto didácticamente no se considera lo más acertado, obviamente hay muchas propuestas.

Números figurados en el plano.

En este capítulo introducimos definiciones de los números figurados básicos y lo generalizamos para dar pauta a cualquier número k-agonal regular. Además de los números poligonales clásicos, consideramos los números poligonales centrados, es decir, son “capas o anillos crecientes” centradas en un punto. Finalmente, enumeramos otros números figurados bidimensionales y tridimensionales resaltado sus relaciones.

Los patrones numéricos se consideran de utilidad para iniciar la introducción al álgebra escolar básica, aparecen en los libros de texto para secundaria de años anteriores, pero los números figurados son muy útiles, se pueden expresar en forma de suma, esto indica que van creciendo lo cual requiere expresar el término general de la sumatoria e indicar la suma de manera algebraica, los niños dan la regla de forma verbal. Además de manera natural se relacionan entre sí, como veremos.

Con las actividades que se presentan se puede realizar un taller que se lleve a cabo con alumnos de nivel medio superior, donde se trabaja con los números figurados para así poder deducir a partir de ellos el término k-ésimo de una sucesión; no se da la sensación de ser “el álgebra de siempre”. El docente debe tener una idea clara de las posibilidades, en los primeros grados de secundaria se introducen las ideas concretas y en grados más avanzados se concretan los 4 pasos al trabajar con patrones:

1. Identificar que algo cambia, pero los incrementos van creciendo de acuerdo con una regla fija (que es necesario expresar, lo más claramente posible)
2. La regla que cumple el término k-ésimo se expresa verbalmente,
3. La regla se expresa simbólicamente.
4. La regla se justifica matemáticamente (en FCFM se usa inducción matemática o propiedades de las sumatorias).

Estamos conscientes de que una figura no es una demostración matemática, sin embargo, nuestra idea es la de ayudar al estudiante a visualizar y entender cómo se relacionan los números figurados entre: triangulares, cuadrados, pentagonales y los piramidales, porque estas relaciones pueden expresarse gráfica y algebraicamente.

Primeras sucesiones con números figurados

Antes de hablar de números figurados daremos la siguiente definición:

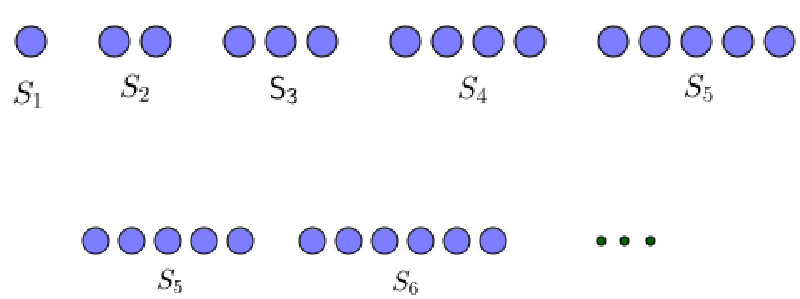
Definición 1: Llamaremos **sucesión** numérica a todo conjunto ordenado de números. A cada uno de sus elementos se le llama término y se caracteriza por un subíndice que indica el lugar que ocupa en la **sucesión**.

De esa forma a_3 representa el tercer término, el término decimocuarto se indicará por a_{14}, es decir, la sucesión de números naturales S_n es determinada por los números: 1,2,3,4,5,… y denotada de la siguiente manera.

$$S_n = \{1,2,3,4,5 \dots.\}$$

El segundo término de la sucesión es 2, es decir, $S_2 = 2$, el séptimo término de la sucesión será $S_7 = 7$, etc.

Como lo indicamos trabajaremos con sucesiones que podemos obtener a partir de figuras poligonales que se basan en puntos. Comenzaremos hablando de la sucesión de numero naturales es decir S_n ={1,2,3,4,5,6,….}, la cual representaremos con puntos apoyándonos del programa Geogebra y Wolfram Mathworld.

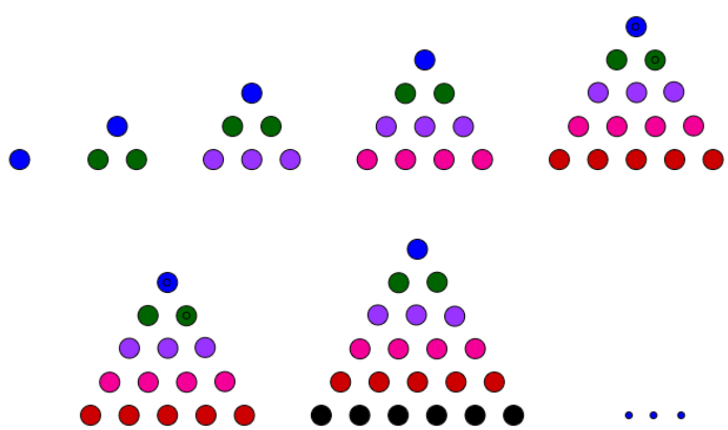


Cada punto azul representa un elemento que al contabilizarlo representa la cantidad en cada término es decir S_1=1 ya que solo consta de 1 punto azul, S_3=3 ya que consta de 3 puntos, etc. lo que se le muestra al alumno es como esta sucesión, se puede representar por medio de puntos.

Siguiendo a los matemáticos griegos, consideraremos los conjuntos de puntos que forman figuras geométricas en el plano comenzando con polígonos regulares y obtendremos sucesiones de números a partir de estos puntos, iniciando con las sucesiones de los números triangulares.

Números triangulares

Partiendo de un punto, agregue dos puntos en un nivel por debajo del punto base, de modo que obtenga un triángulo. Se puede obtener un triángulo de seis puntos a partir del triángulo de tres puntos, esto es añadiendo tres puntos; añadiéndole cuatro puntos obtendremos un triángulo de diez puntos, etc.



Entonces, al sumar a un punto base dos, tres, cuatro, etc. puntos, organizándolos en forma de un triángulo equilátero y contando el número total de puntos en cada triángulo, se pueden obtener los números: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55,. . .

conocidos como números triangulares. De esta manera formamos la sucesión de números triangulares T_n.

Esta sucesión se obtiene a partir de sumar números consecutivos;

$T_1 = S_1$ =1 ⟶ T_1 =1.

$T_2 = S_1 + S_2$= 1+2=3 ⟶ $T_2 = 3$.

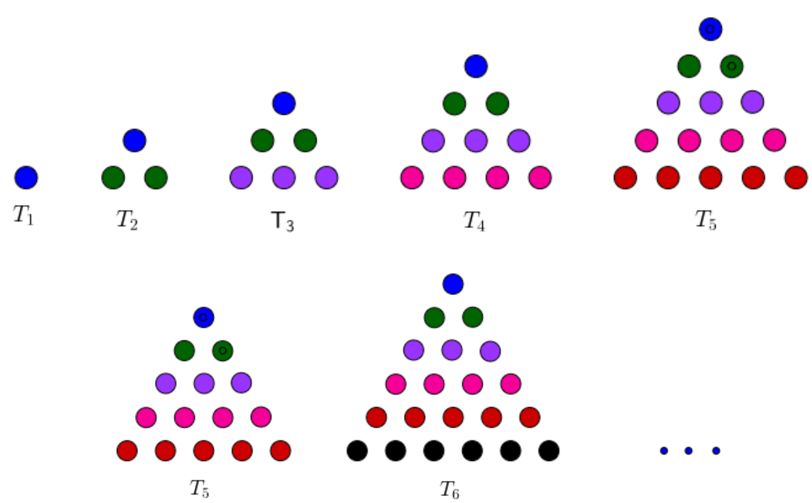
$T_3 = S_1 + S_2 + S_3$= 1+2+3=6 ⟶ $T_3 = 6$.

$T_4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$= 1+2+3+4=10 ⟶ $T_4 = 10$.

$T_5 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$= 1+2+3+4+5=15 ⟶ $T_5 = 15$.

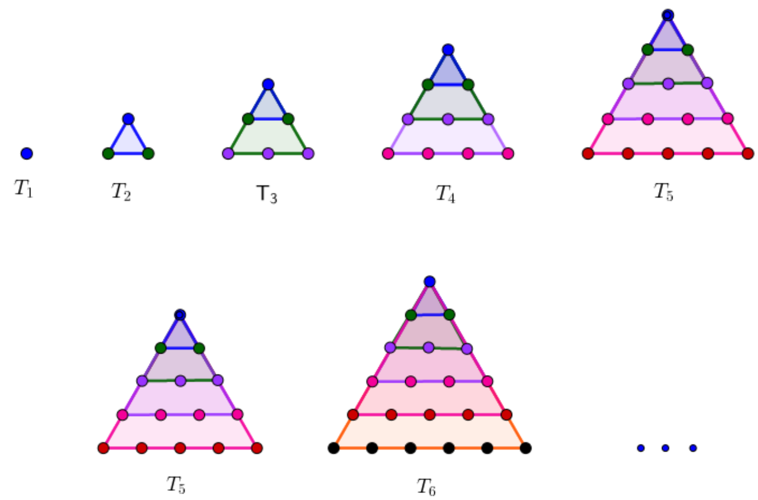
$T_6 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$ = 1+2+3+4+5+6=21 ⟶ $T_6 = 21$.

De esta sucesión de números se desprende un patrón en la formación de puntos, como se muestra en las siguientes figuras.



Donde los términos de la sucesión están determinados por el número de puntos que conforma a cada figura.

Al formar estas figuras es fácil mostrar a los alumnos que en cada término podemos formar una serie de triángulos que ellos pueden apreciar de la siguiente manera.



En este caso, el siguiente término se obtiene al añadir un nuevo lado a la base del triángulo anterior de manera que nos quede un nuevo triángulo cuya longitud de los lados es una unidad más que el anterior.

Después de mostrar estos ejemplos a los alumnos, se les pidió que determinaran los siguientes terminos de la sucesión mediante el uso de diversos materiales didácticos.

Término	1	2	3	4	5	6	7	8	10
T_n	1	3	6	10	15	21			

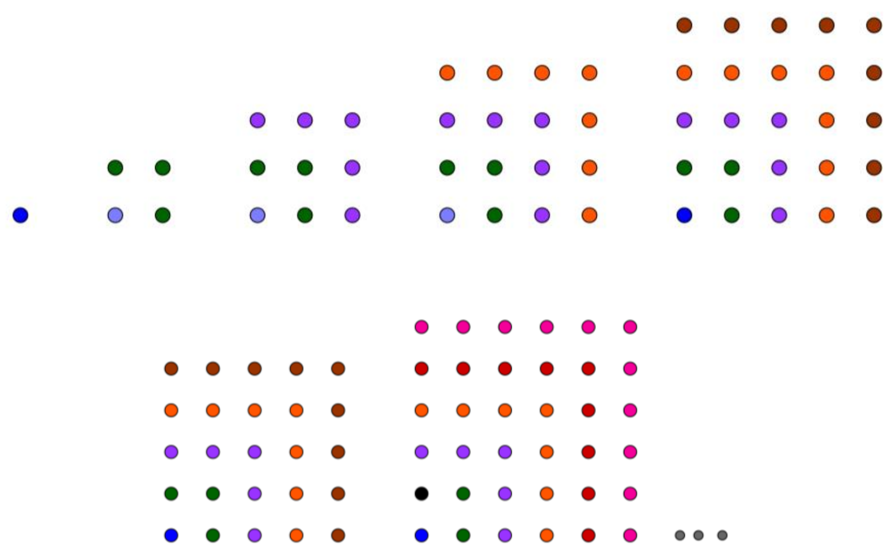
Los números triangulares *son* números enteros que se obtienen de la siguiente manera: $T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, la cual es la sucesión $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

A esta sucesión también se conoce “Suma de Gauss”, la cual se atribuye al problema de sumar 100 enteros consecutivos, según la leyenda del niño Gauss de la cual no se tiene un antecedente que demuestre su veracidad, sin embargo, esta anécdota es retomada por Max Wertheimer en su libro Productive Thinking(1945), quien propone como pudo el niño Gauss llegar al resultado solicitado de manera rápida.

Todo mundo sabe que el juego de domino tradicional (doble 6) tiene 28 fichas, si se colocan en orden creciente o decreciente vemos que se forma un patrón triangular, es decir, el juego de domino sigue un patrón de números triangulares, en la actualidad es fácil conseguir domino doble 9, doble 12 y doble 15 y el número de fichas que conforman a estos también es un triangular.

Números cuadráticos

Ahora, de manera análoga, partiendo de un punto base, agregamos tres puntos, de modo que se obtenga un cuadrado, después cinco puntos, siete puntos, etc.



Entonces, si a un punto base añadimos tres, cinco, siete, etc. puntos, organizándolos en forma de cuadrado, se obtienen los números 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,. . . que son llamados números cuadrados denotados por C_n.

A diferencia de la sucesión de números triangulares esta sucesión parte del producto de números naturales multiplicados por sí mismos, es decir, del cuadrado de los números naturales y se obtiene de la siguiente manera:

$C_1 = (S_1)(S_1) = (1)(1) = 1 \longrightarrow C_1 = 1.$

$C_2 = (S_2)(S_2) = (2)(2) = 4 \longrightarrow C_2 = 4.$

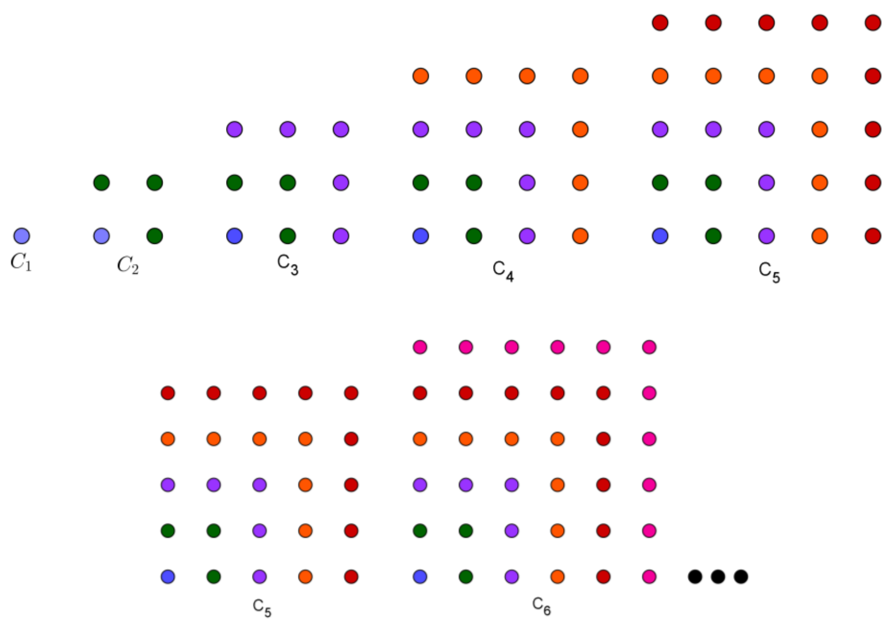
$C_3 = (S_3)(S_3) = (3)(3) = 9 \longrightarrow C_3 = 9.$

$C_4 = (S_4)(S_4) = (4)(4) = 16 \longrightarrow C_4 = 16.$

$C_5 = (S_5)(S_5) = (5)(5) = 25 \longrightarrow C_5 = 25.$

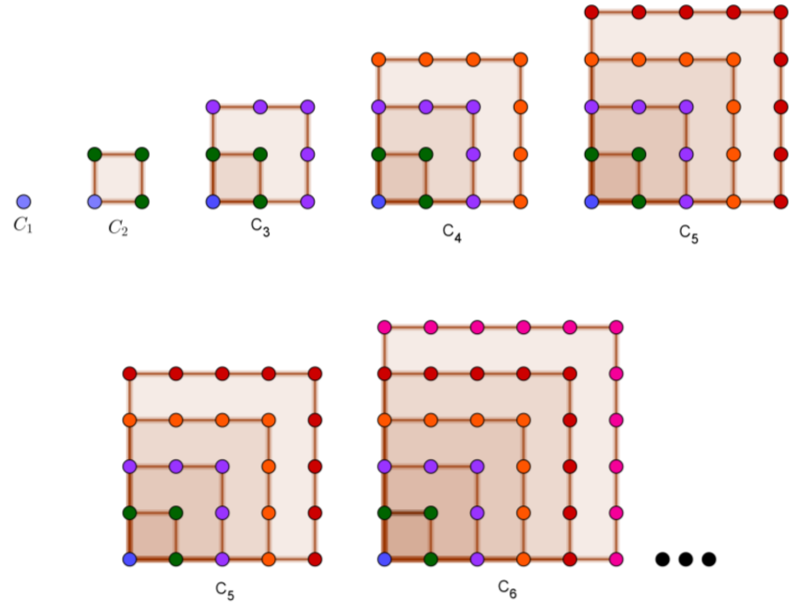
$C_6 = (S_6)(S_6) = (6)(6) = 36 \longrightarrow C_6 = 36.$

Esta sucesión de números se desprende de un patrón en la formación de puntos la cual se determina a partir de cuadrados, como se muestra en las siguientes figuras.



Donde los términos de la sucesión están determinados por el número de puntos que tiene cada figura.

Al formar estas figuras es fácil mostrar a los alumnos que en cada término podemos formar una serie de cuadrados que ellos pueden apreciar de la siguiente manera.



En este caso, el nuevo término se obtiene añadiendo un par de lados del cuadrado original y un punto en su unión, formando un nuevo cuadrado cuya longitud de sus lados es una unidad más que el anterior, donde los cuadrados tienen bases distintas por esto esta sucesión se conoce como sucesión de números cuadrados.

Después de mostrar estos ejemplos, se pidió a los alumnos determinar los siguientes elementos de la sucesión mediante el uso de diversos materiales.



Término	1	2	3	4	5	6	7	8	10
C_n	1	4	9	16	25	36			

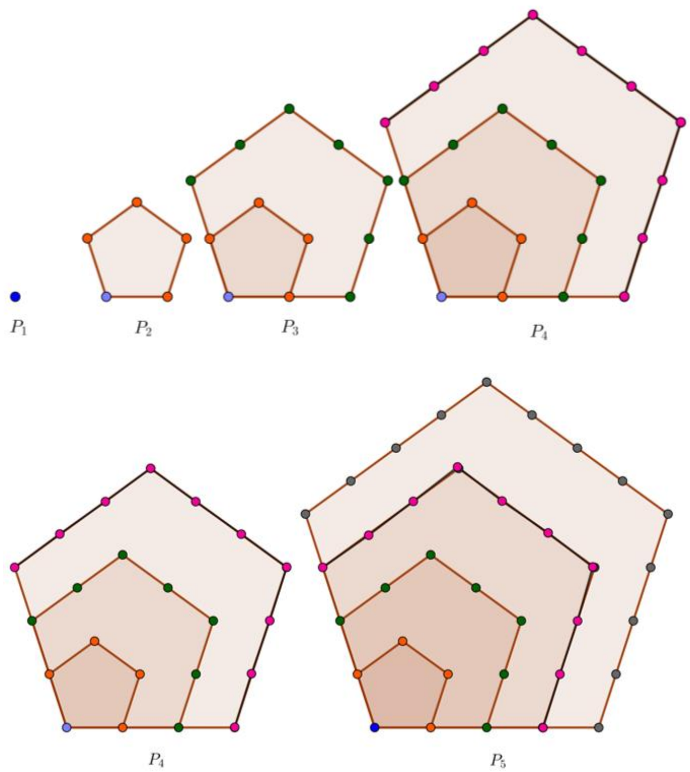
Obteniendo la sucesión de números cuadrados

$$C_n = \{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100, \dots\}.$$

La cual se determina contando el número de puntos que conforma cada cuadrado.

Números pentagonales

De igual manera en que hemos venido trabajando, partimos de un punto base añadiendo cuatro, siete, diez, etc. puntos, formando pentágonos regulares, llegamos a la sucesión de números pentagonales $P_n = \{1,5,12,22,35,51,70, \dots\}$.



Aquí GeoGebra es de mucha utilidad, pues permite fácilmente generar polígonos regulares, lo que facilita los dibujos para visualizar claramente el patrón.

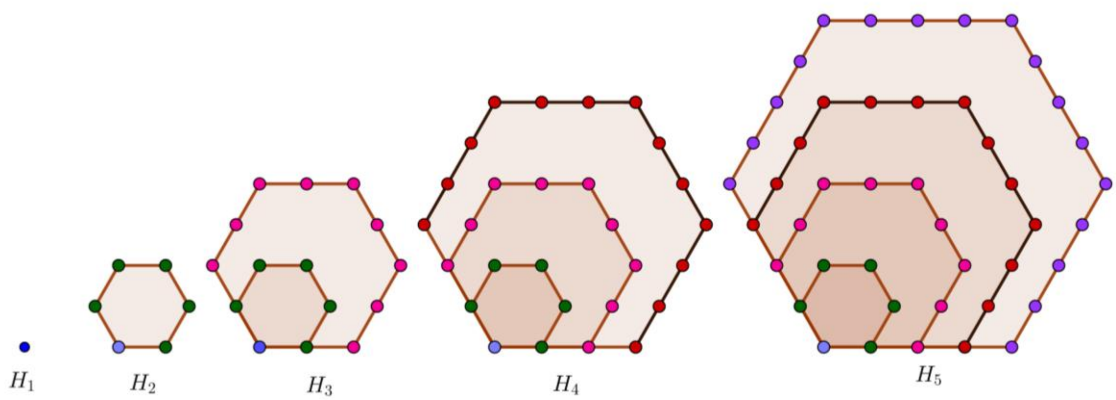
Esta sucesión se logra a partir de utilizar como base un pentágono regular, la sucesión de números pentagonales es:

$$P_n = \{1,5,12,22,35,51,70,\dots\}.$$

Números hexagonales

Partiendo de un punto agregamos cinco, nueve, trece, diecisiete puntos progresivamente, formando hexágonos regulares, determinamos los números hexagonales

$$H_n = \{1,6,15,28,45,66,91,\dots\}.$$



Esta sucesión se obtiene a partir de utilizar como base un hexágono regular, la sucesión de números hexagonales es:

$$H_n = \{1,6,15,28,45,66,91,120,153, \dots\}.$$

Números figurados poligonales

Como podemos observar utilizando este procedimiento a partir de polígonos regulares podemos obtener las siguientes sucesiones:

Números heptagonales

$$Hep_n = \{1,7,18,34,55,81,112,148,189,235, \dots\}.$$

Números octagonales

$$O_n = \{1,8,21,40,65,96,133,176,225, \dots\}.$$

Números nonagonales

$$N_n = \{1,9,24,46,75,111,154,204,261, \dots\}.$$

Análogamente, podemos obtener los términos de cada sucesión de números poligonales recordando agregar la terminación k-agonal dependiendo del polígono regular que estemos usando.

Como podemos notar, hemos construido varias sucesiones simples de números correspondientes a puntos en el plano, que forman un polígono regular a partir de un punto base y lo llamaremos k-anomon regular (pentanomon, hexanomon, etc).

Definición y formula de números figurados poligonales.

Antes de empezar con nuestro tema, hablaremos de la generalidad de las sesiones de números triangulares, para ello definiremos el concepto de sucesión aritmética y sucesión geométrica que son las formas generalizadas de las sucesiones básicas.

Definición 2: La sucesión aritmética es la sucesión donde la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.

Definición 3: La sucesión geométrica es la sucesión donde el cociente de dos términos consecutivos es constante.

Al hablar de los números figurados como una sucesión de números enteros debemos tomar en cuenta que no podemos expresar los números figurados como una sucesión del tipo geométrica, pues al realizar el cociente de dos términos consecutivos no obtenemos una constante

Por ejemplo, si tomamos de T_n ={1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, . . .}, los términos consecutivos: T_3=6, $T_4 = 10$, $T_5 = 15$ y $T_6 = 21$,si los dividimos tenemos los siguientes resultados:

$\frac{T_4}{T_3} = \frac{10}{6} = 1.66$, $\frac{T_5}{T_4} = \frac{15}{10} = 1.5$ y $\frac{T_6}{T_5} = \frac{21}{15} = 1.4$

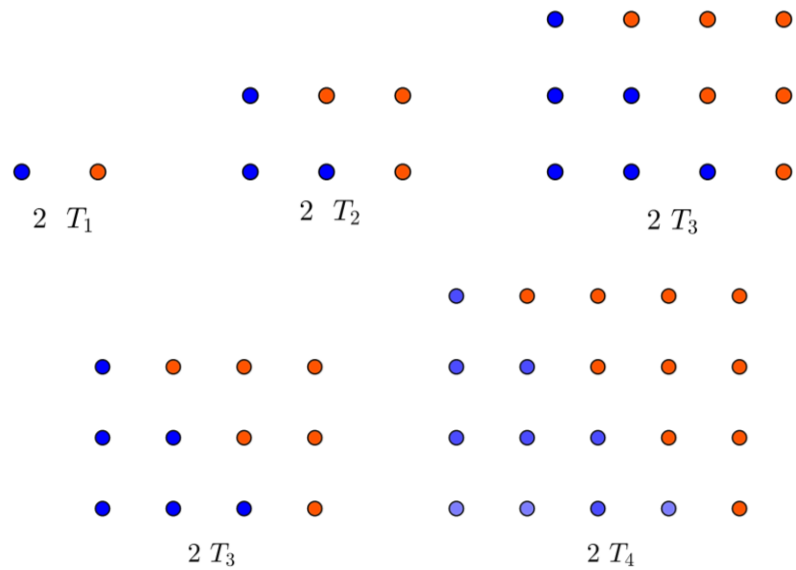
Notemos que los resultados son distintos, por lo tanto, la sucesión T_n no es una sucesión geométrica.

Tampoco se trata de una sucesión aritmética, ya que al realizar la resta de dos elementos consecutivos no arrojan un resultado constante, por ejemplo, tomando:
T_3=6 , $T_4 = 10$, $T_5 = 15$ y $T_6 = 21$ obtenemos:

$T_4 - T_3 = 4$ y $T_6 - T_5 = 6$

Los resultados son distintos por tal motivo la sucesión T_n no es una sucesión aritmética.
Esto nos lleva a determinar que las sucesiones de números figurados son un tipo especial de sucesión, para obtener el término general de la sucesión de números

triangulares usaremos un método que utiliza representación puntual; el cual consiste en considerar dos secuencias de número triangulares y unirlas, de la siguiente manera:



Al utilizar este método de puntos podemos mostrar al alumno como obtener el término general en la sucesión de números triangulares a partir de una nueva sucesión $2T_n$, la cual asocia nuestro número triangular con una figura que resulta familiar para él y, por lo tanto, es más fácil llegar a una generalización, esto es tomando 2 veces el número triangular obtenemos un rectángulo, por ejemplo, para $2T_1$ se formaría un rectángulo de base 2 y altura 1, $2T_2$ es un rectángulo de base 3 y altura 2, $2T_3$ un rectángulo de base 4 y altura 3, $2T_4$ un rectángulo de base 5 y altura 4.Utilizando este proceso los alumnos de educación media superior pueden visualizar mediante figuras que la altura del rectángulo que formamos coincide con el lugar que ocupa en la sucesión, por ejemplo, $2T_3$ es el rectángulo que ocupa el lugar 3 de la sucesión $2T_n$ y 3 es su altura, además se puede hacer notar que la base de la figura está dada por la altura más 1, es decir para $2T_3$ su altura será 3 y su base seria 3+1=4, de esta manera se forma la sucesión de números rectangulares la cual reescribiremos R_n en la que cada elemento es el doble del número triangular del mismo orden. El número de puntos de cada uno de estos rectángulos se obtiene con:

$R_1 = 2x1 = 2;\ R_2 = 3x2 = 6;\ R_3 = 4x3 = 12;\ R_4 = 5x4 = 20; \ldots\ldots;$

Generalizando, para obtener el número de puntos del lugar n-ésimo de la sucesión R_n basta aplicar lo siguiente:

$$R_n = 2T_n = (n+1)(n)$$

Como construimos R_n utilizando 2 veces un número triangular, para obtener el número de puntos en la sucesión de números triangulares T_n, debemos dividir entre 2 nuestra fórmula R_n es decir:

$$Si,\ R_n = n(n+1)$$

Dividiendo entre 2 la igualdad tenemos

$$\frac{R_n}{2} = T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Esta generalización nos permite obtener el número de puntos que contiene cualquier elemento de nuestra sucesión, sin necesidad de dibujar los términos anteriores al que se pretende analizar.

Por ejemplo, para obtener el número de puntos que contiene T_6, sabemos que $n = 6$, sustituyendo en nuestra formula tenemos:

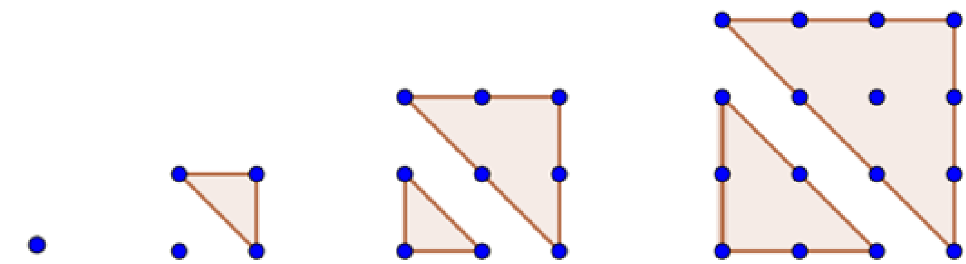
$$T_6 = \frac{(6)(6+1)}{2} = \frac{(6)(7)}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

Es decir $T_6 = 21$, el sexto término de mi sucesión consta de 21 puntos.

De esta manera es como obtenemos el valor de los números triangulares dependiendo de su lugar en la sucesión T_n.

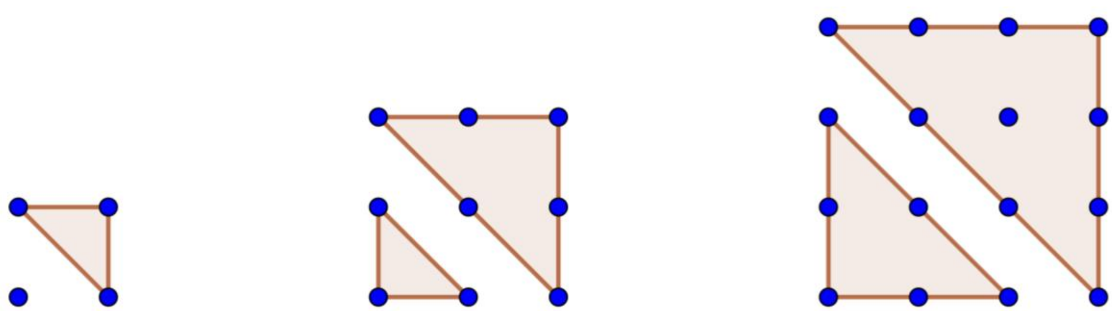
Con esto se lleva al alumno a pensar que el número de puntos que conforman cada término en la sucesión de números triangulares, solo aplicando la fórmula: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Recordemos que esta fórmula fue estudiada por Max Wertheimer (1945), a la cual nosotros llegamos por visualización y utilizando nuestros materiales didácticos. Esto es generalización porque insinuamos a los niños que nuestro n puede ser cualquiera y que nuestra figura tiene (n puntos en algún lado, pero nosotros queremos el total de puntos en la figura que es un poligonal).

Para obtener los términos de la sucesión de números cuadrangulares C_n ={1,4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,. . .}, dividiremos la figura “cuadrado” en dos triángulos de la siguiente manera:



C_1 C_2 C_3 C_4

Donde uno de ellos está en la misma posición que el cuadrado y el otro una posición anterior.



$C_2 = T_2 + T_1$ $C_3 = T_3 + T_2$ $C_4 = T_4 + T_3$

De esta manera aplicando la anterior, conoceríamos el número de puntos que conforman cada término de la sucesión sin necesidad de conocer sus términos anteriores, por ejemplo:

1) $C_2 = T_2 + T_{2-1};\ C_2 = T_2 + T_1;\ C_2 = \frac{(2)(2+1)}{2} + \frac{(1)(1+1)}{2};$

$$C_2 = \frac{(2)(3)}{2} + \frac{1(2)}{2}; \quad C_2 = \frac{6}{2} + \frac{2}{2}; \quad C_2 = 3 + 1; \quad C_2 = 4.$$

2) $C_4 = T_4 + T_{4-1};\ C_4 = T_4 + T_3;\ C_4 = \frac{(4)(4+1)}{2} + \frac{(3)(3+1)}{2};$

$$C_4 = \frac{(4)(5)}{2} + \frac{3(4)}{2}; \quad C_4 = \frac{20}{2} + \frac{12}{2}; \quad C_2 = 10 + 6; \quad C_4 = 16.$$

De manera general para conocer el número de puntos para el termino n-ésimo de la sucesión C_n, tenemos:

$$C_n = T_n + T_{n-1}; \quad C_n = \frac{(n)(n+1)}{2} + \frac{(n)(n-1)}{2};$$

Realizando las operaciones en el numerador obtenemos:

$$C_n = \frac{n^2+n}{2} + \frac{(n^2-n)}{2};$$

sumando las fracciones tenemos:

$$C_n = \frac{n^2+\ n^2+n-n}{2};$$

finalmente:

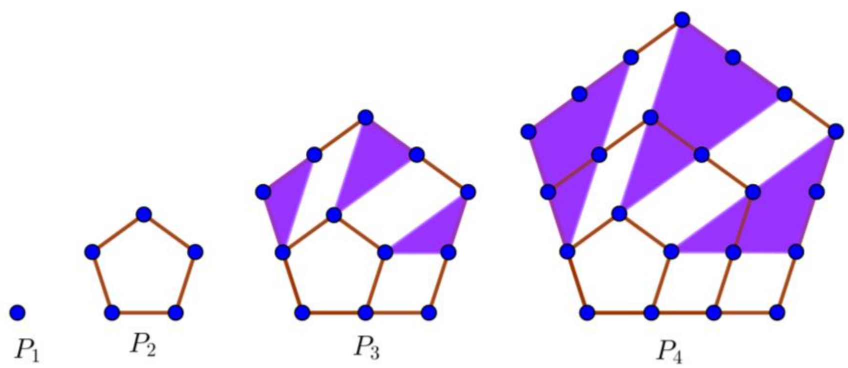
$$C_n = \frac{2n^2}{2};$$

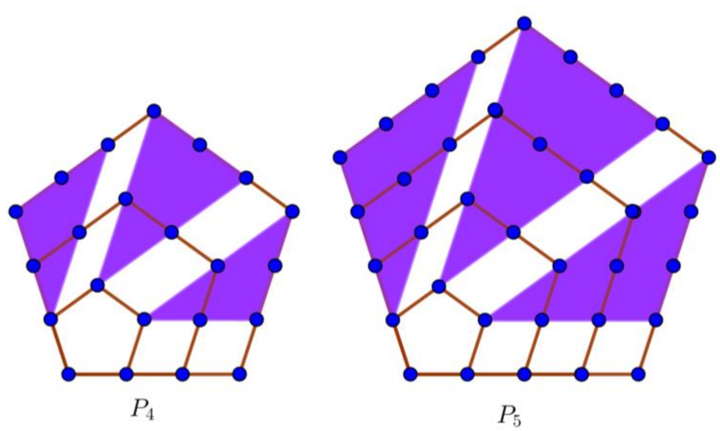
Por lo tanto:

$$C_n = n^2.$$

Así podemos determinar que la sucesión C_n es igual a n^2.

Continuando con los números pentagonales $P_n = \{1,5,12,22,35,51,70,\ldots\}$ los cuales se obtendrán al dividir la figura pentagonal en triángulos.





El esquema anterior sugiere que la figura pentagonal se expresa como la suma de tres números triangulares de un lugar inferior al pentagonal, con los puntos de uno de sus lados:

$$P_n = 3T_{n-1} + n$$

De esta ecuación podemos ver que

$$P_n = 3T_{n-1} + n; \quad P_n = 3(\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}) + n; \quad P_n = 3(\frac{(n-1)(n)}{2}) + n;$$

$$P_n = \frac{3n^2 - 3n}{2} + n; \qquad P_n = \frac{3n^2 - 3n}{2} + \frac{2n}{2};$$

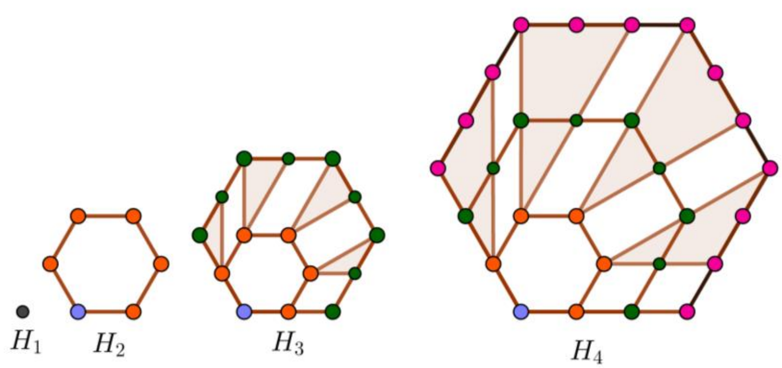
$$P_n = \frac{3n^2 - 3n + 2n}{2}; \quad P_n = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

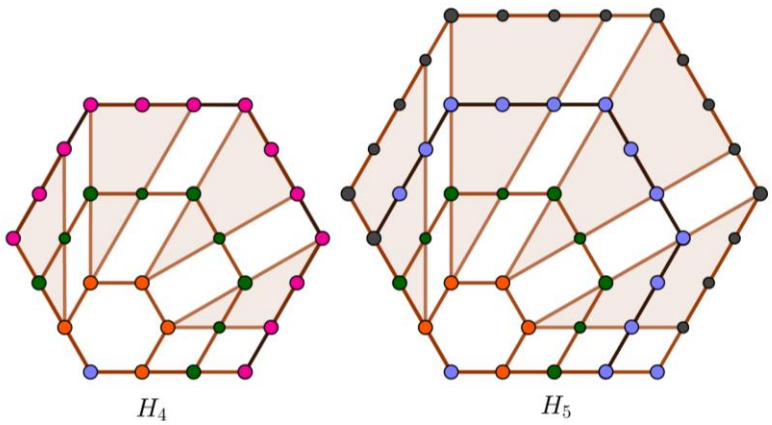
Por ejemplo

1) $P_2 = \frac{3(2)^2-2}{2}$; $\quad P_2 = \frac{3(4)-2}{2}$; $\quad P_2 = \frac{12-2}{2}$; $\quad P_2 = \frac{10}{2}$; $\quad P_2 = 5$.
2) $P_5 = \frac{3(5)^2-5}{2}$; $\quad P_5 = \frac{3(25)-5}{2}$; $\quad P_5 = \frac{75-5}{2}$; $\quad P_5 = \frac{70}{2}$; $\quad P_5 = 35$.

Con estos ejemplos verificamos que la fórmula es correcta.

Pasando a los números hexagonales $H_n\{1,6,15,28,45,66,91,120,153,\ldots\}$, esta sucesión se puede obtener a partir de dividir la figura hexagonal en triángulos:





Del esquema anterior se sigue que un número pentagonal se expresa como la suma de cuatro números triangulares de un orden menor y los puntos de uno de sus lados:

$$H_n = 4T_{n-1} + n$$

De esta ecuación podemos definir que

$$H_n = 4T_{n-1} + n; \quad H_n = 4(\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}) + n; \quad H_n = 4(\frac{(n-1)(n)}{2}) + n;$$

$$H_n = \frac{4n^2 - 4n}{2} + n; \quad H_n = \frac{4n^2 - 4n}{2} + \frac{2n}{2}; \quad H_n = \frac{4n^2 - 4n + 2n}{2}; \quad H_n = \frac{4n^2 - 2n}{2}.$$

$$H_n = 2n^2 - n$$

Por ejemplo

1) $H_3 = 2(3^2) - 3 = 2(9) - 3 = 18 - 3 = 15$
2) $H_6 = 2(6^2) - 6 = 2(36) - 6 = 72 - 6 = 66$.

Rectificando que la fórmula utilizada es correcta.

Podemos notar que las sucesiones de números poligonales se pueden obtener a partir de los números triangulares, de esta manera tenemos que las sucesiones de números poligonales se pueden obtener mediante una fórmula generalizada. La cual podemos definir para cualquier número poligonal de lados “m”:

m-agonal $= \frac{(\mathrm{m}-2)n^2-[(\mathrm{m}-4)n]}{2}$; donde m es el número de los lados del polígono y n representa el término en la sucesión.

Concluimos que se puede obtener el número de puntos que conforman a cualquier término en la sucesión m-poligonal de números figurado sin necesidad de conocer los términos anteriores en la sucesión.

Número Poligonal	Fórmula		Elemento de la sucesión									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Triangular	$\frac{n^2+n}{2}$	$\frac{1}{2}n(n+1)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Cuadrangular	n^2	$\frac{1}{2}n(2n-0)$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagonal	$\frac{3n^2-n}{2}$	$\frac{1}{2}n(3n-1)$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Hexagonal	$2n^2-n$	$\frac{1}{2}n(4n-2)$	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Heptagonal	$\frac{5n^2-3n}{2}$	$\frac{1}{2}n(5n-3)$	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Octagonal	$3n^2-2n$	$\frac{1}{2}n(6n-4)$	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Nonagonal	$\frac{7n^2-5n}{2}$	$\frac{1}{2}n(7n-5)$	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Decagonal	$4n^2-3n$	$\frac{1}{2}n(8n-6)$	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370
Undecagonal	$\frac{9n^2-7n}{2}$	$\frac{1}{2}n(9n-7)$	1	11	30	58	95	141	196	260	333	415
Dodecagonal	$5n^2-4n$	$\frac{1}{2}n(10n-8)$	1	12	33	64	105	156	217	288	369	460
13-agonal	$\frac{11n^2-9n}{2}$	$\frac{1}{2}n(11n-9)$	1	13	36	70	115	171	238	316	405	505
14-agonal	$6n^2-5n$	$\frac{1}{2}n(12n-10)$	1	14	39	76	125	186	259	344	441	550
15-agonal	$\frac{13n^2-11n}{2}$	$\frac{1}{2}n(13n-11)$	1	15	42	82	135	201	280	372	477	595

Tabla 1 NUMEROS POLIGONALES

Otra forma de proceder es pedir a los alumnos que se fijen en la figura y normalmente ellos detectan la primera y segunda diferencia, la cual es constante. En esta generalización al factorizar el término $\frac{1}{2}n$ obtenemos las fórmulas de la tercer columna de la tabla.

Este es nuestro primer estudio de los números figurados, los números m-**poligonales,** con nuestras fórmulas y apoyándose de la tabla se realiza la siguiente actividad con los alumnos

Determinar:

T_{21}	$Octa_{12}$	$20-agono_8$

Números poligonales centrados

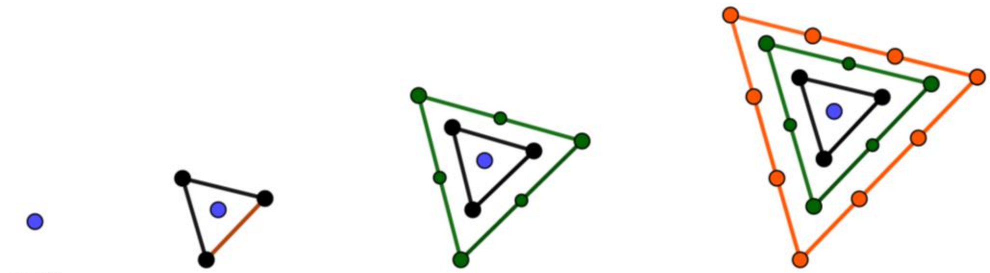
Detrás de los números poligonales clásicos, hay muchos otros números, que pueden construirse en el plano. Los números poligonales centrados forman la siguiente clase importante de tales números.

Los números poligonales centrados (o números poligonales de segundo orden) son una sucesión de números, en los que se dibujan capas de polígonos centrados en un punto. Cada número poligonal centrado está formado por un punto central, rodeado de capas poligonales con un número constante de lados. Cada lado del polígono contiene un punto más, que lado de la capa anterior, es decir, a partir de la segunda capa, la siguiente capa del número k-agonal centrado contiene ¨k¨ más puntos que la capa anterior.

Números triangulares centrados

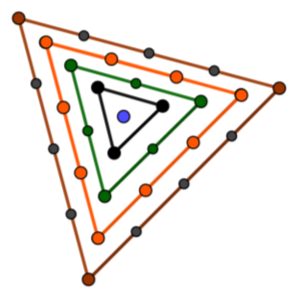
Un número triangular centrado representa un triángulo con un punto en el centro y todos los demás puntos que rodean el centro en capas o anillos triangulares sucesivos.

La siguiente imagen muestra la construcción de los números triangulares centrados:



TC_1 TC_2 TC_3 TC_4

TC_4



TC_5

Los primeros números triangulares centrados son:

$TC_1 = 1$.   Se explica a los alumnos que: $TC_2 = 4$ Es la suma de los puntos en la figura con 2 capas, donde la primera es el punto inicial y la segunda se conforma de tres puntos, el numero centrado es la suma de los puntos que conforman la figura, esto nos da 1+3=4

$TC_3 = 10$ Es la suma de los puntos en la figura con 3 capas donde la primera es el punto inicial, la segunda se conforma de tres puntos y la tercera capa está formada los puntos de la capa anterior más k puntos, así el valor del número centrado es la suma de los puntos que conforma la figura esto nos daría 1+3+6=10

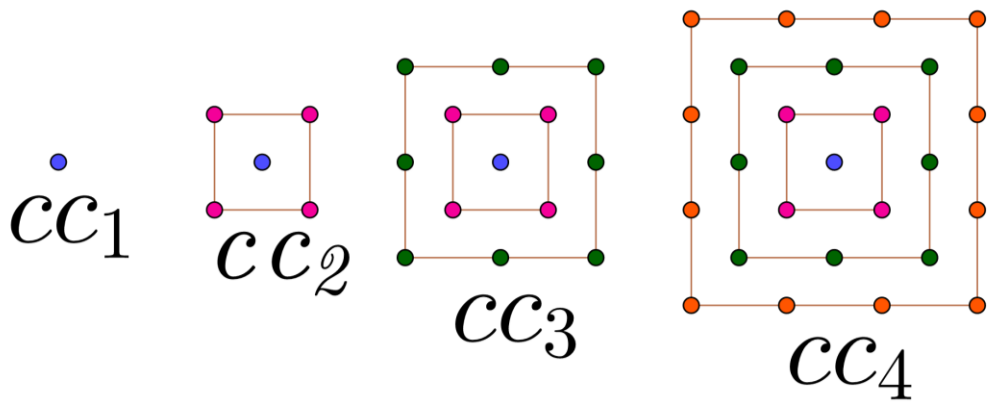
$TC_4 = 19$ Es la suma de los puntos en la figura con 4 capas.

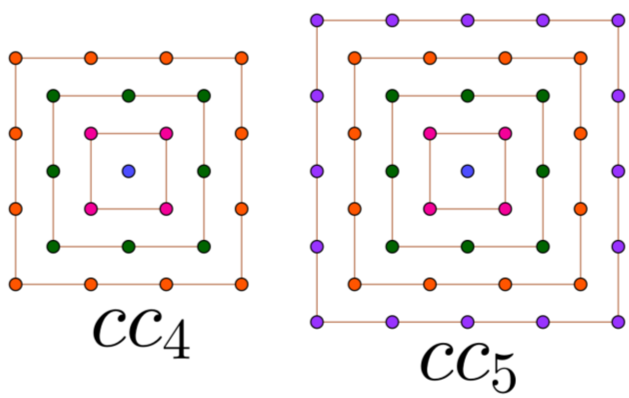
Así la sucesión de números triangulares centrados TC_n seria

$$TC_n = \{1,4,10,19,31,46,64,85,109,136 \dots\}$$

Números cuadrados centrados

Un número cuadrado centrado se conforma con un punto central y cuatro puntos a su alrededor, y luego puntos adicionales que se agregan en forma de anillo cuadrado.



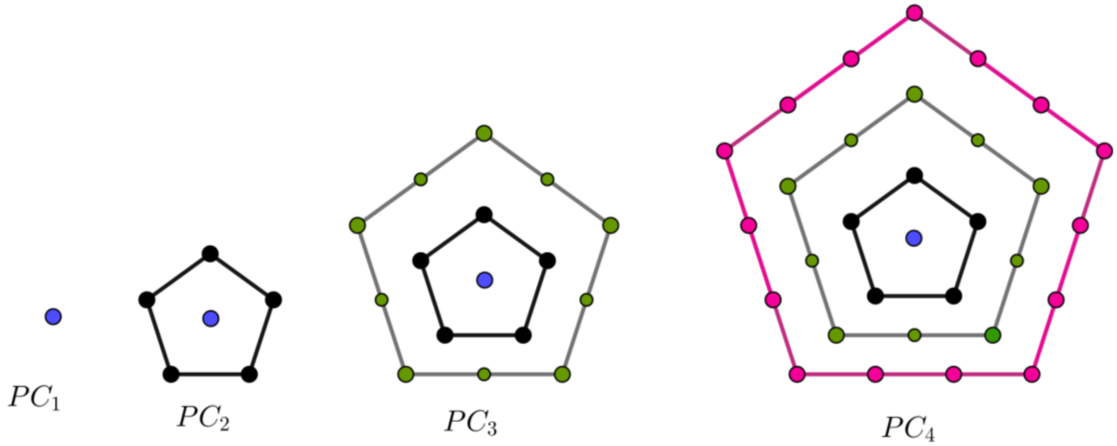


Siguiendo el proceso de los números triangulares centrados podemos construir los números cuadrados centrados con la diferencia de usar como base la figura de un cuadrado, así la sucesión de números cuadrados centrados CC_n seria:

$$CC_n = \{1,5,13,25,41,61,85,113,145,181,\dots\}$$

Números pentagonales centrados

Los números pentagonales centrados se representa con un punto en el centro rodeado por capas pentagonales sucesivas.



Así la sucesión de números pentagonales centrados PC_n seria;

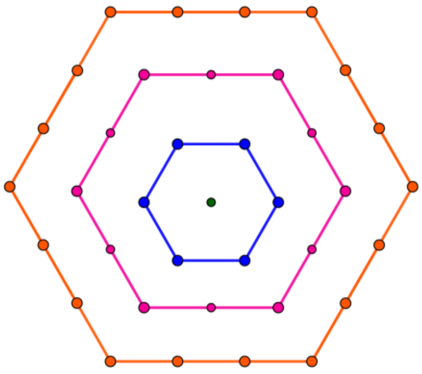
$$PC_n = \{1,6,16,31,51,76,106,141,181,226,\dots\}$$

Números poligonales centrados

Podemos definir que la sucesión de números m-poligonal centrado depende de la figura poligonal que se tome como base y con esto se obtiene dicha sucesión.

Siguiendo este procedimiento, podemos construir la sucesión de los números. Hexagonales centrados, que son representados por un punto en el centro y todos los demás puntos que rodean el punto central en una celosía hexagonal. Así la sucesión de números hexagonales centrados HC_n seria

$$HC_n = \{1,7,19,37,61,91,127,169,217,271,\dots\}$$



Números heptagonales centrados

$$HepC_n = \{1,8,22,43,71,106,148,197,253,316, \dots\}$$

Números octagonales centrados

$$OC_n = \{1,9,25,49,81,121,169,225,289,361,441, \dots\}$$

Formula general de los números poligonales centrados

Denotaremos la sucesión de números k-agonales centrados como $CS_k(n)$, donde: CS representara el polígono centrado k el número de lados del polígono regular base y n el término de la sucesión, por ejemplo $CS_6(10)$ se refiere al décimo término de la sucesión de números hexagonales centrados (seis lados del polígono).

Así $CS_k(n)$ se obtiene como la suma de los primeros n elementos de la secuencia 1, k, 2k, 3k, …. Donde k es número de lados del polígono de la sucesión que se estudia, entonces, se tiene:

$$CS_k(n) = 1 + k + 2k + 3k + \cdots + (n-1)(k)$$

Con k el número de lados del polígono y n el término de la sucesión k-agonal centrada.

En particular tenemos

$$CS_3(n) = 1 + 3 + 2(3) + 3(3) + \cdots + (n-1)(3)$$

$$CS_4(n) = 1 + 4 + 2(4) + 3(4) + \cdots + (n-1)(4)$$

$$CS_5(n) = 1 + 5 + 2(5) + 3(5) + \cdots + (n-1)(5)$$

$$CS_6(n) = 1 + 6 + 2(6) + 3(6) + \cdots + (n-1)(6)$$

$$CS_7(n) = 1 + 7 + 2(7) + 3(7) + \cdots + (n-1)(7)$$

$$CS_8(n) = 1 + 8 + 2(8) + 3(8) + \cdots + (n-1)(8)$$

De la fórmula anterior podemos definir los números k-agonales centrados, tomando el factor común, 1+k(1+2+3+⋯+(n-1))=$1 + k\frac{(n-1)n}{2}$ con lo anterior obtenemos el término n de la sucesión k-agonal centrado.

$$CS_k(n) = 1 + k\frac{(n-1)n}{2} = 1 + k\frac{(n^2-n)}{2} = 1 + \frac{kn^2-kn}{2} = \frac{kn^2-kn+2}{2}$$

Es decir

$CS_k(n) = \frac{kn^2-kn+2}{2}$, además, si separamos los términos del numerador y factorizamos $\frac{1}{2}kn$ de los 2 primero términos tendríamos $\left(\frac{1}{2}nk(n-1)\right) + 1$,

En particular, obtenemos

$$CS_3(n) = \frac{3n^2-3n+2}{2} = \left(\frac{1}{2}3n(n-1)\right) + 1$$

$$CS_4(n) = \frac{4n^2-4n+2}{2} = (\frac{1}{2}4n(n-1)) + 1 = 2n^2 - 2n + 1$$

$$CS_5(n) = \frac{5n^2-5n+2}{2} = \left(\frac{1}{2}5n(n-1)\right) + 1$$

$$CS_6(n) = \frac{6n^2-6n+2}{2} = (\frac{1}{2}6n(n-1)) + 1 = 3n^2 - 3n + 1$$

$$CS_7(n) = \frac{7n^2-7n+2}{2} = \left(\frac{1}{2}7n(n-1)\right) + 1$$

$$CS_8(n) = \frac{8n^2 - 8n + 2}{2} = \left(\frac{1}{2}8n(n-1)\right) + 1 = 4n^2 - 4n + 1$$

.

.

.

$$CS_k(n) = \frac{kn^2 - kn + 2}{2} = \left(\frac{1}{2}kn(n-1)\right) + 1$$

Estas fórmulas generalizan la manera de obtener el número de elementos que conforman cualquier término de la sucesión de un número k-agonal centrado sin llevar a cabo la realización de las figuras anteriores. Con k el número de lados del polígono y n el término de la sucesión.

Por ejemplo, para $CS_3(n)$ tenemos $k = 3$, es decir, $CS_3(n) = \frac{3n^2-3n+2}{2}$ con esta fórmula se puede obtener el número de elementos que tendrá cualquier término de la sucesión de triangulares centrados, por ejemplo, para el tercer término se tomará n=3 obteniendo:

$$CS_3(3) = \frac{3(3^2) - 3(3) + 2}{2} = \frac{3(9) - 6 + 2}{2} = \frac{27 - 9 + 2}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Es decir, el tercer término de la sucesión tiene 10 puntos.

Para el décimo término se tendría n=10

$$CS_3(10) = \frac{3(10^2) - 3(10) + 2}{2} = \frac{3(100) - 30 + 2}{2} = \frac{300 - 30 + 2}{2} = \frac{272}{2} = 136$$

Es decir, el décimo término de la sucesión de triangulares centrados se conformará de 136 puntos.

Las sucesiones de números k-agonales centrados no son del tipo sucesión aritmética o geométrica ya que al tomar los elementos $PC_3 = 16$, $PC_4 = 31$ y $PC_5 = 51$, no se obtendrá un valor constante en su cociente o en su diferencia, es decir.

$$\frac{PC_4}{PC_3} = \frac{31}{16} = 1.9 \quad y \quad \frac{PC_5}{PC_4} = \frac{51}{31} = 1.6$$

No se trata de una sucesión geométrica, del mismo modo, si tomamos.

$$PC_4 - PC_3 = 31 - 16 = 15 \qquad y \qquad PC_5 - PC_4 = 51 - 31 = 20$$

Tampoco se trata de una sucesión aritmética.

Así los valores de la sucesión de números centrados se pueden apreciar en la siguiente tabla.

Número Poligonal Centrado	Fórmula		Elemento de la sucesión									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Triangular k=3	$\frac{3n^2-3n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}3n(n-1)\right)+1$	1	4	10	19	31	46	64	85	109	136
Cuadrangular k=4	$\frac{4n^2-4n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}4n(n-1)\right)+1$	1	5	13	25	41	61	85	113	145	181
Pentagonal k=5	$\frac{5n^2-5n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}5n(n-1)\right)+1$	1	6	16	31	51	76	106	141	181	226
Hexagonal k=6	$\frac{6n^2-6n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}6n(n-1)\right)+1$	1	7	19	37	61	91	127	169	217	271
Heptagonal k=7	$\frac{7n^2-7n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}7n(n-1)\right)+1$	1	8	22	43	71	106	148	197	253	316
Octagonal k=8	$\frac{8n^2-8n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}8n(n-1)\right)+1$	1	9	25	49	81	121	169	225	289	361
Nonagonal k=9	$\frac{9n^2-9n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}9n(n-1)\right)+1$	1	10	28	55	91	136	190	253	325	406
Decagonal k=10	$\frac{10n^2-10n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}10n(n-1)\right)+1$	1	11	31	61	101	151	211	281	361	451
Undecagonal k=11	$\frac{11n^2-11n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}11n(n-1)\right)+1$	1	12	34	67	111	166	232	309	397	496
Dodecagonal k=12	$\frac{12n^2-12n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}12n(n-1)\right)+1$	1	13	37	73	121	181	253	337	433	541
13-agonal k=13	$\frac{13n^2-13n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}13n(n-1)\right)+1$	1	14	40	79	131	196	274	365	469	586
14-agonal k=14	$\frac{14n^2-14n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}14n(n-1)\right)+1$	1	15	43	85	141	211	295	393	505	631
15-agonal k=15	$\frac{15n^2-15n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}15n(n-1)\right)+1$	1	16	46	91	151	226	316	421	541	676

Tabla 2 NUMEROS POLIGONALES CENTRADOS

Con ayuda de esta tabla se deja la siguiente actividad al alumno.

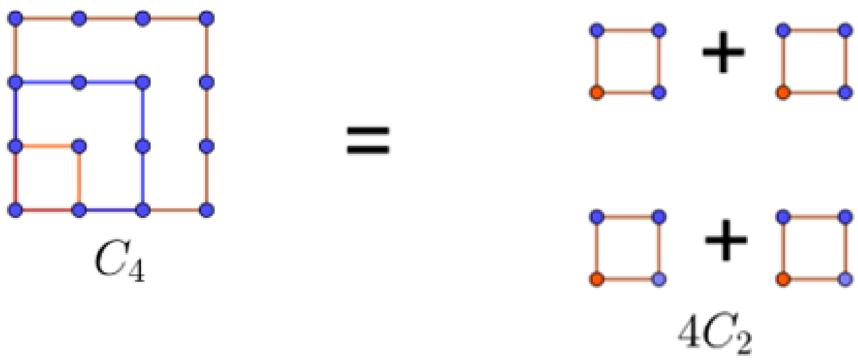
Determinar

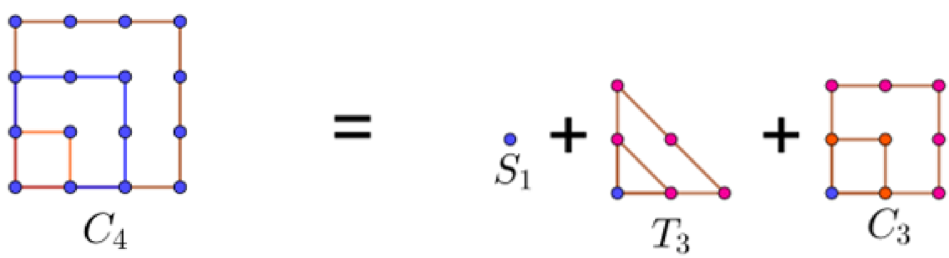
$TC(11)$	$PC(12)$	$NC(13)$

Descomposición de números figurados

En este apartado veremos algunas descomposiciones de los números figurados a partir del número de elementos que las conforman para llegar a las propiedades de los números centrados.

Por ejemplo, C_4, este se puede descomponer como 4 veces C_2, al igual que $C_3 + T_3 + S_1$.

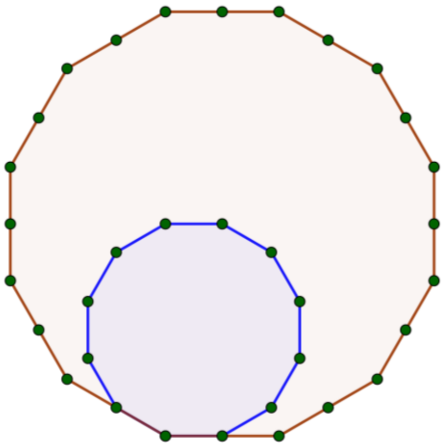




A C_3, podemos descomponerlo como el número cruzado $C(3)$ o el número octagonal centrado OC_2 o el tercer número gnomonico $GN(5)$

El numero centrado C_7, se puede ver como la suma de 2 números triangulares T_7 mas T_6, o como la suma de S_1 más 4 veces el número triangular T_3 mas 4 veces el numero rectangular R_2, al igual que como el tercer número octagonal centrado OC_4.

Ahora el tercer número dodecagonal DD_3 con 33 elementos lo podemos ordenar como el tercer número cuadrado C_3 y 4 veces el tercer número triangular T_3.

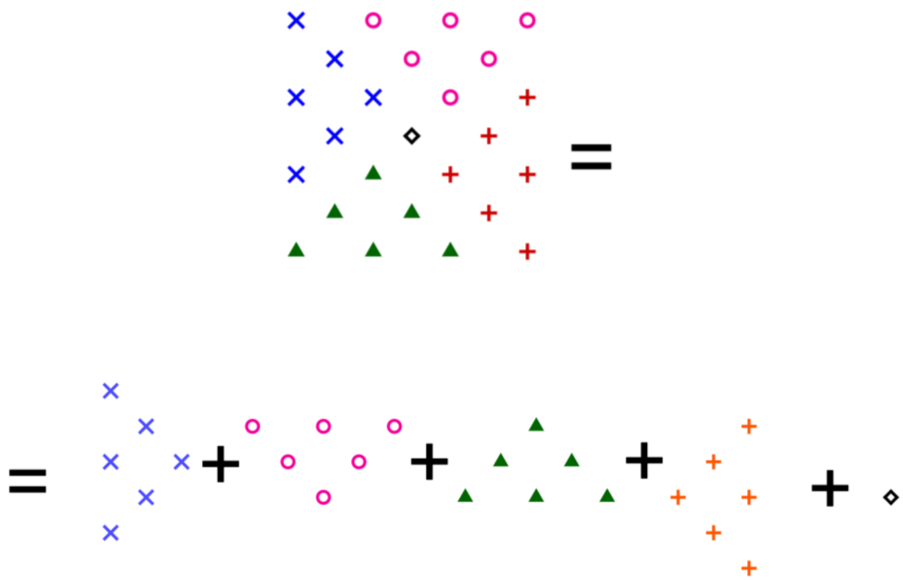


Propiedades de los números centrados

Propiedad 1: Los números k-agonales centrados $CS_k(n)$ se puede componer de un punto central con una cantidad M de números triangulares iguales. Por ejemplo:

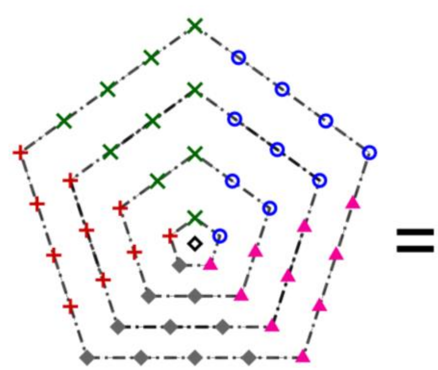
1.- El cuarto número triangular centrado se compone de 3 veces el tercer número triangular y un punto central de la siguiente manera

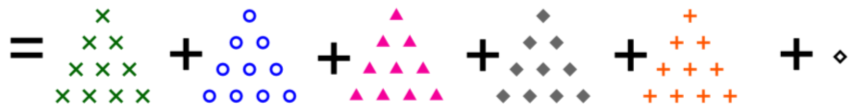
2.- El cuarto número cuadrado centrado es igual a 4 veces el tercer número triangular y un punto central.



Finalmente, si utilizáramos un numero centrado con más elementos se puede descomponer en una cantidad finita de números triangulares con termino menor en su sucesión que el número centrado y este número finito esta dado por la cantidad de lados del polígono en el número centrado.

Por ejemplo, el quinto número pentagonal centrado se conformará de 5 veces el cuarto número triangular y un punto.





Ya que los números k-agonales centrados $CS_k(n)$ se pueden obtener por la formula:

$$CS_k(n) = 1 + kT_3(n-1)$$

Donde k es el número de lados del polígono que se formara y n el término que se estudia en la sucesión.

Sustituyendo la fórmula de los números triangulares tenemos

$$CS_k(n) = 1 + k(\frac{(n-1)^2 + n - 1}{2})$$

Realizando la operación.

$$CS_k(n) = 1 + k(\frac{n^2 - 2n + 1 + n - 1}{2})$$

$$CS_k(n) = 1 + k(\frac{n^2 - n}{2})$$

$$CS_k(n) = 1 + (\frac{kn^2 - kn}{2})$$

$$CS_k(n) = \frac{kn^2 - kn + 2}{2}$$

La cual es la fórmula que anteriormente se obtuvo para los números k-agonales centrados.

Propiedad 2: Los números triangulares centrados $CS_3(n)$ se pueden descomponer como 3 números triangulares consecutivos $T_3(n) + T_3(n-1) + T_3(n-2)$, siempre que el término tenga al menos 10 elementos.

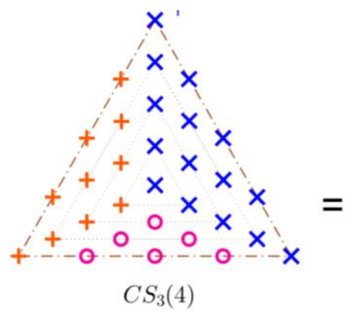
Por ejemplo

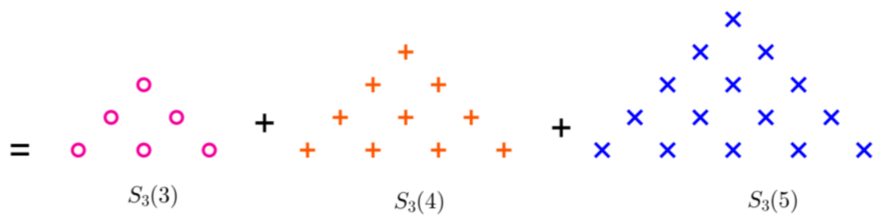
El quinto número triangular centrado $CS_3(5)$ será igual a

$$CS_3(5) = T_3(5) + T_3(5-1) + T_3(5-2)$$

$$CS_3(5) = S_3(5) + S_3(5-1) + S_3(5-2)$$

Se representa con el siguiente esquema





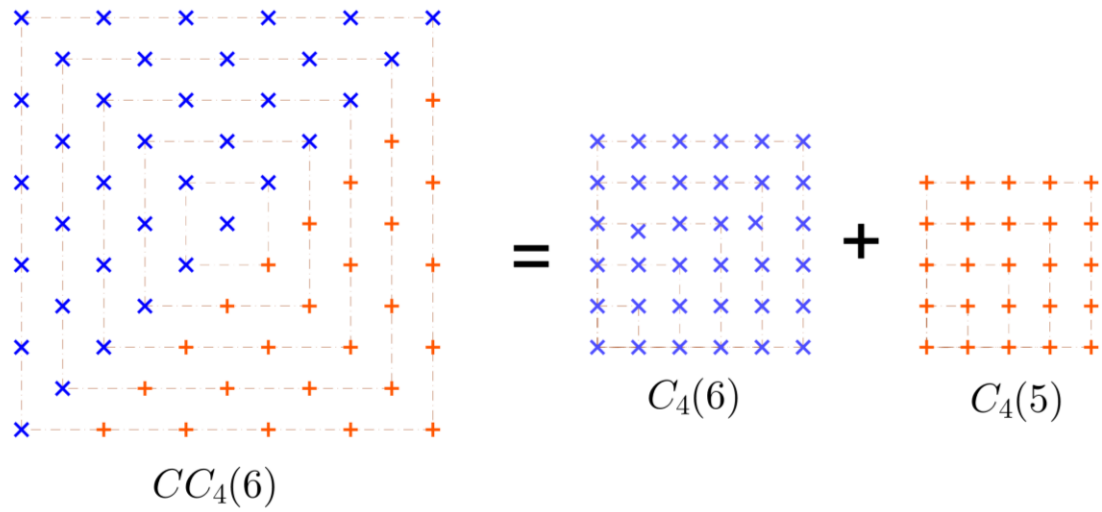
Propiedad 3: de manera similar, cualquier número cuadrado centrado $CS_4(n)$ es la suma de dos números cuadrados consecutivos:

$$CS_4(n) = S_4(n) + S_4(n-1)$$

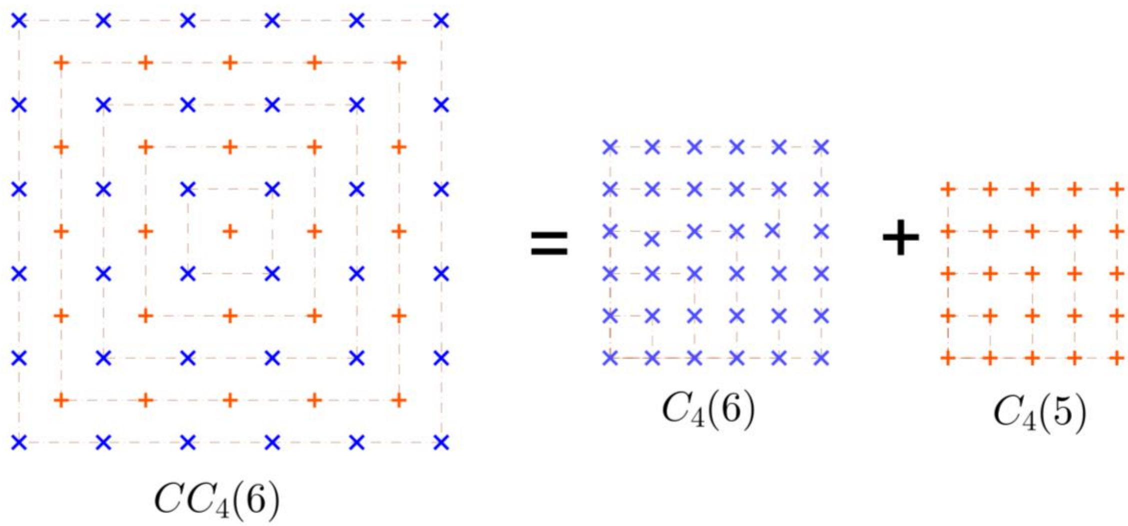
Por ejemplo, si tomamos el sexto cuadrado centrado $CS_4(6)$ este será igual a la suma de 2 números cuadrados consecutivos.

$$CS_4(6) = C_4(6) + C_4(6-1)$$

Se representa en el siguiente esquema



Lo anterior nos da una representación de $CC_4(6)$ como 2 cuadrados consecutivos pero los números cuadrados no se pueden visualizar sin embargo el siguiente esquema nos permite observar su forma, pero no de manera consecutiva.



Propiedad 4: Los números cuadrados centrados se pueden obtener utilizando números cuadrados y triangulares juntos.

Sabemos que el número de elementos en un numero cuadrado centrado se obtiene mediante la siguiente formula

$CS_4(n) = \frac{4n^2-4n+2}{2} = 2n^2 - 2n + 1$, sumamos un cero para obtener el binomio cuadrado $2n^2 - 2n + 1 + 2n^2 - 2n - (2n^2 - 2n)$ obtenemos

$$4n^2 - 4n + 1 - (2n^2 - 2n)$$

$$(2n-1)^2 - (2n^2 - 2n)$$

$$(2n-1)^2 - 2((n)(n-1))$$

$$(2n-1)^2 - \frac{4((n)(n-1))}{2}$$

$$(2n-1)^2 - 4\frac{((n)(n-1))}{2}$$

de esto la primera parte seria $C_4(2n-1) = (2n-1)^2$ y la segunda parte seria $T_3(n) = \frac{((n)(n-1))}{2}$, es decir,

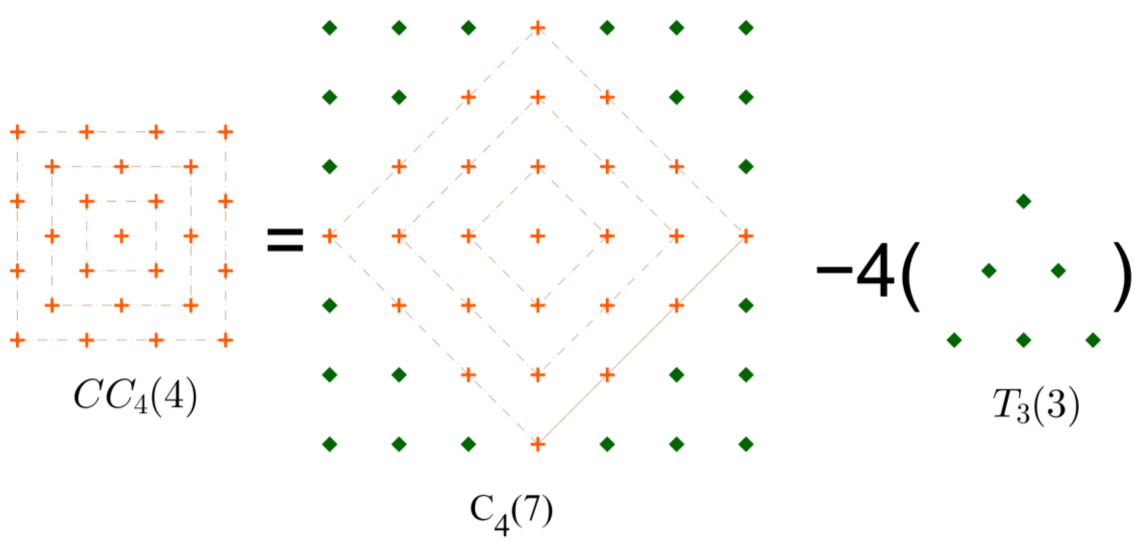
$$CS_4(n) = C_4(2n-1) - 4T_3(n-1)$$

Como podemos observar cualquier número cuadrado centrado se puede obtener operando un numero cuadrado y 4 triangulares.

Por ejemplo, para el cuarto termino cuadrado centrado se tiene que

$$CS_4(4) = C_4(2(4)-1) - 4T_3(4-1)$$

Se representa en el siguiente esquema



Propiedad 5: Existe una conexión similar entre los números hexagonales centrados y los números triangulares, esta se da por:

$CS_6(n) = \frac{6n^2-6n+2}{2}$, desarrollando el numerador tenemos

$$\frac{(3n-2)(3n-1) - 3n^2 + 3n}{2},$$

$$\frac{(3n-2)(3n-1)}{2} - \frac{3n^2 - 3n}{2}$$

$$\frac{(3n-2)(3n-1)}{2} - 3\frac{n^2 - n}{2}$$

$$\frac{(3n-2)(3n-1)}{2} - 3\frac{(n-1)(n)}{2}$$

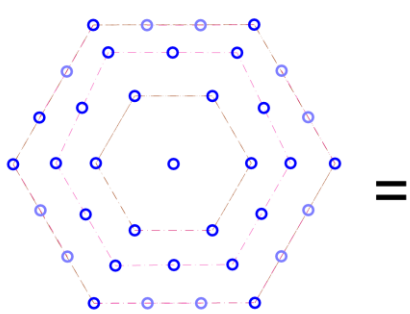
$$T_3(3n-2) - 3T_3(n-1)$$

$$CS_6(n) = T_3(3n-2) - 3T_3(n-1)$$

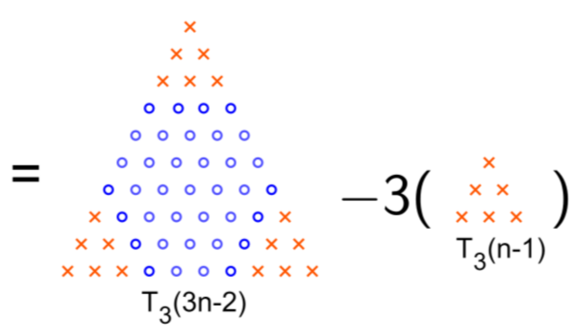
Por ejemplo, para el cuarto número hexagonal centrado se tiene que

$$CS_6(4) = T_3(3(4)-2) - 3T_3(4-1)$$

Se representa en el siguiente esquema

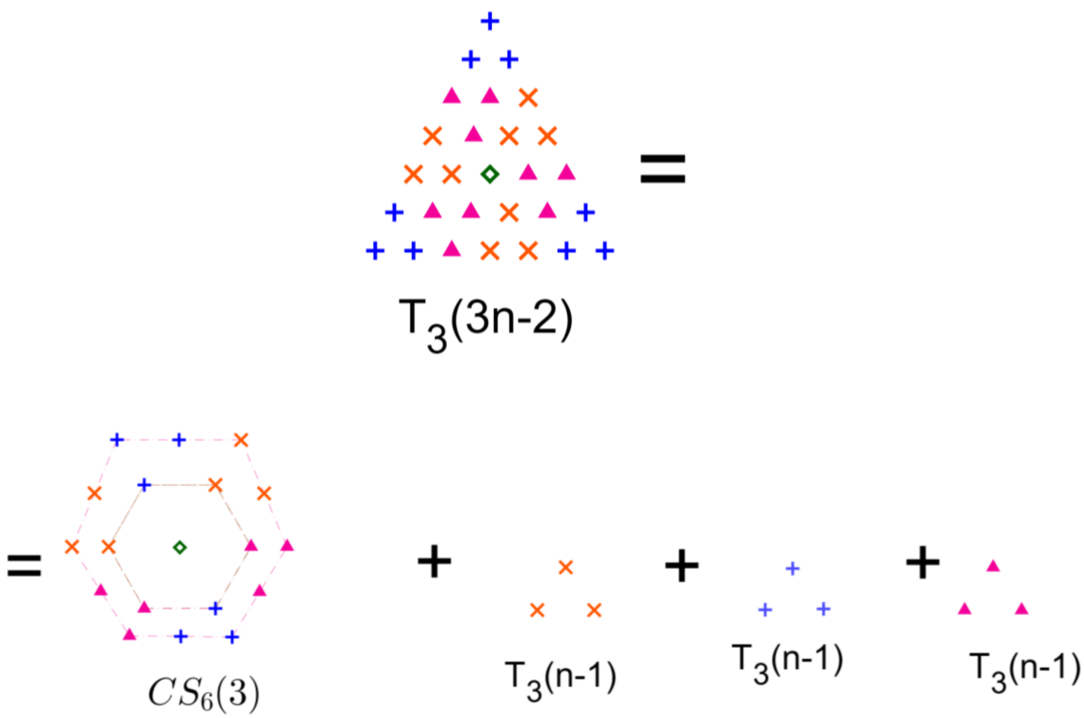


$CS_6(4)$



Lo cual implica que cualquier número hexagonal centrado se pude obtener con seis números triangulares y un punto central, y al mismo tiempo un número triangular se puede reescribir como un hexagonal centrado más tres triangulares y también como nueve números triangulares más un punto.

$$T_3(3n-2) \;=\; CS_6(n) + 3T_3(n-1) \;=\; 9T_3(n-1) + 1$$



Propiedad 6: Cualquier número hexagonal centrado es la diferencia de dos cubos perfectos consecutivos.

De la fórmula para el número hexagonal centrado tenemos:

$$CS_6 = \frac{6n^2 - 6n + 2}{2} = 3n^2 - 3n + 1 = n^3 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1$$
$$= n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) = n^3 - (n-1)^3$$

Propiedad 7: Siguiendo la propiedad 6, tendríamos que la suma de los números hexagonales centrados es un cubo perfecto.

Esto se desprende de.

$CS_6(1)+CS_6(2)+CS_6(3)+CS_6(4)+CS_6(5)+\cdots+CS_6(n)$ seria igual a

$$1^3-(1-1)^3+2^3-(2-1)^3+3^3-(3-1)^3+4^3-(4-1)^3+5^3-(5-1)^3 \\ +\cdots n^3-(n-1)^3$$

$$=1^3-(0)^3+2^3-(1)^3+3^3-(2)^3+4^3-(3)^3+5^3-(4)^3+\cdots n^3-(n-1)^3$$

Lo cual utilizando la suma telescópica es fácil determinar el resultado

$n^3-(0)^3=n^3-0=n^3$.

Propiedad 8: Los números hexagonales centrados satisfacen la ecuación de recurrencia

$$CS_6(n)=2CS_6(n-1)-CS_6(n-2)+6.$$

En efecto, $2CS_6(n-1)-CS_6(n-2)+6=$

$=2(3(n-1)^2-3(\mathrm{n}-1)+1)-(3(n-2)^2-3(n-2)+1)+6$, desarrollando tenemos

$$=2((3n^2-6\mathrm{n}+3)-3\mathrm{n}+3+1)-(3n^2-12n+12-3n+6+1)+6$$

$$=6n^2-18n+14-(3n^2-15n+19)+6$$

$$=6n^2-18n+14-3n^2+15n-19+6$$

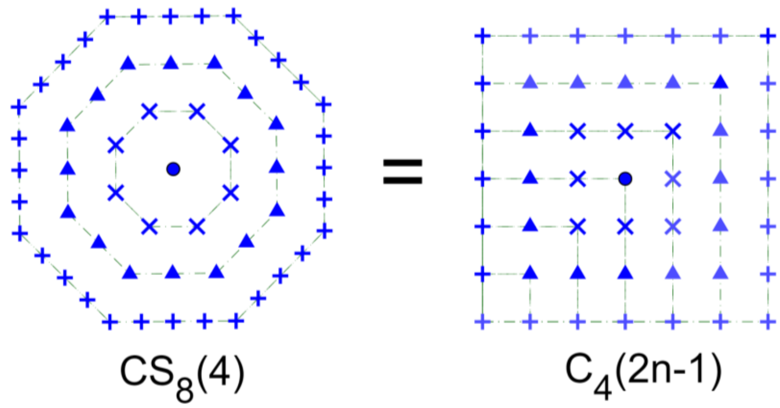
$$=3n^2-3n+1=CS_6(n)$$

Propiedad 9: Cualquier número octagonal centrado es igual a un número cuadrado con índice impar, es decir:

$$CS_8(n)=\frac{8n^2-8n+2}{2}=4n^2-4n+1=(2n-1)^2=C_4(2n-1)$$

El siguiente esquema, dado para n = 4, muestra como el número octágono centrado $CS_8(n)$ y el número cuadrado $C_4(2n-1)$ tienen la misma cantidad de elementos, con una ubicación diferente en el plano.

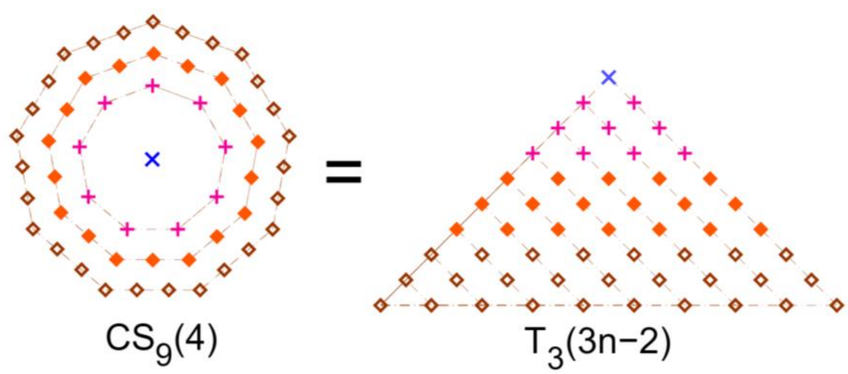
Se representa en el siguiente esquema



Propiedad 10: Cada número nonagonal centrado es un numero triangular:

$$CS_9(n) = T_3(3n-2)$$

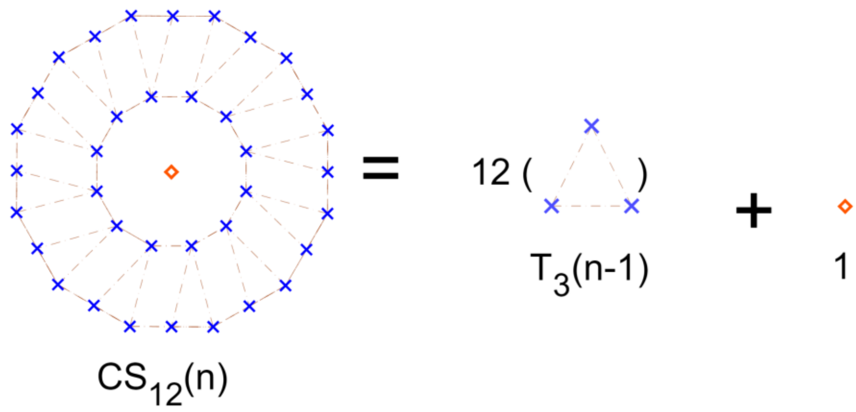
Esto se desprende de: $CS_9(n) = \frac{9n^2-9n+2}{2} = \frac{(3n-2)(3n-1)}{2} = T_3(3n-2)$, esto se representa en el siguiente esquema para n=4



Propiedad 11: Un numero dodecágono centrado $CS_{12}(n)$ puede obtenerse a partir de un punto central y 12 números triangulares iguales $T_3(n-1)$

Esto es: $CS_{12}(n) = \frac{12n^2-12n+2}{2} = \frac{12n^2-12n}{2} + 1 = \frac{12(n^2-n)}{2} + 1 = 12(\frac{n(n-1)}{2}) + 1$, es decir, $CS_{12}(n) = 12T_3(n-1) + 1$.

Esto se representa en el siguiente esquema para n=3



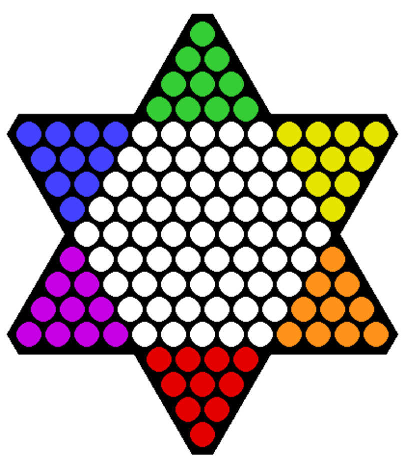
Esta propiedad corresponde al número de elementos triangulares de la tabla del juego de damas chinas (hexagrama) que es llamado número de la estrella y denotado por S(n). Ya que, cualquier número dodecágono centrado $CS_{12}(n)$ coincide con el número de la estrella S(n) correspondiente:

$$CS_{12}(n) = S(n)$$

De hecho, por la definición, el número estrella S(n) se construye como un número hexagonal centrado y un número triangular añadió a cada lado, es decir,

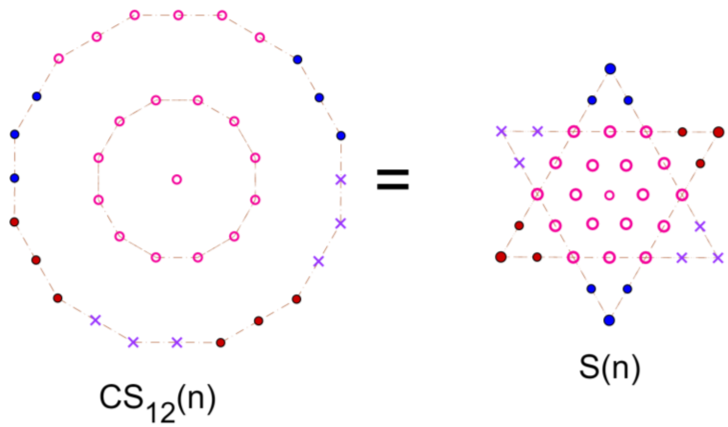
$$S(n) = CS_6(n) + 6T_3(n-1)$$

La tabla del juego de damas, mostrada en el cuadro debajo, tiene un total de 121 agujeros representa a S(5).

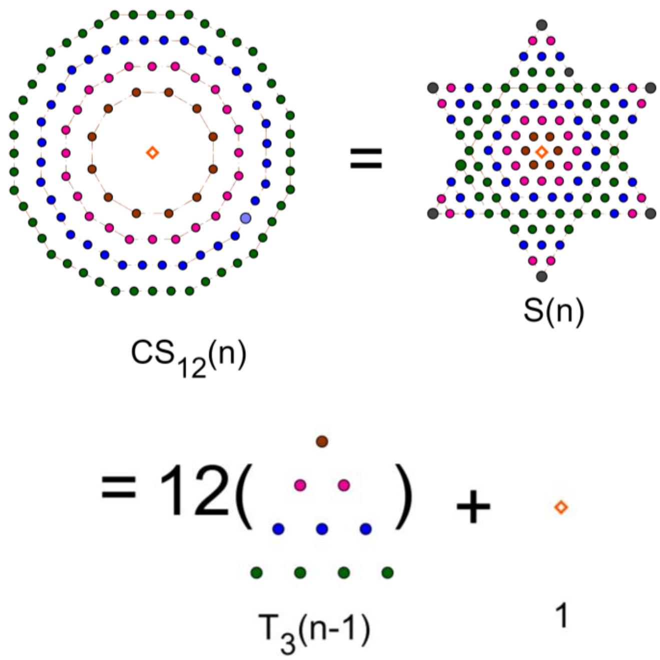


Así que, nosotros tenemos $S(n) = CS_6(n) + 6T_3(n-1) = 1 + 6T_3(n-1) + 6T_3(n-1) = 1 + 12T_3(n-1)$=$CS_{12}(n)$, el numero estrella es igual al número dodecágono centrado, $CS_{12}(n) = S(n)$ con sus elementos colocados de diferente manera

Esta propiedad se representa en el siguiente esquema para n=3.



Además de la propiedad anterior podemos definir que un número estrella es igual a un número dodecágono centrado y a su vez esto es igual a uno más doce números triangulares, $S(n) = CS_{12}(n) = 1 + 12T_3(n-1)$, lo cual se representa en el siguiente esquema para n=5.



La sucesión de los números estrella S_n es:

$$S_n = \{1,13,37,73,121,181,253,337,443,541,\dots\}$$

Estos números también se pueden contar y visualizar de diversas maneras.

Propiedad 12: Los números dodecágonos centrados satisfacen la ecuación lineal recurrente.

$$CS_{12}(n) = CS_{12}(n-1) + 12(n-1)$$

Esto se desprende de; $CS_{12}(n-1) + 12(n-1) = \frac{12(n-1)^2-12(n-1)+2}{2} + 12n - 12 = \frac{12n^2-24n+12-12n+12+2}{2} + 12n - 12 = 6n^2 - 18n + 13 + 12n - 12 = 6n^2 - 6n + 1 = CS_{12}(n)$

Propiedad 13: Dado que, $CS_6(n) = 3n^2 - 3n + 1$ y $CS_{12}(n) = 6n^2 - 6n + 1$ podemos determinar que $CS_6(n) = \frac{6n^2-6n+1+1}{2} = \frac{CS_{12}(n)+1}{2}$ en otros términos

$CS_{12}(n) \cdot CS_6(n) = CS_{12}(n) \cdot \frac{CS_{12}(n)+1}{2}$ es decir $CS_{12}(n) \cdot CS_6(n) = \frac{CS_{12}(n)(CS_{12}(n)+1)}{2}$, el producto de un número hexagonal centrado y un número dodecagonal centrado es igual a un número triangular.

$$CS_{12}(n) \cdot CS_6(n) = T_3\big(CS_{12}(n)\big).$$

NUMEROS FIGURADOS NO POLIGONALES EN EL PLANO

Existen algunos números que se pueden representar en el plano, pero para dibujarlos no es necesario tomar como referencia un polígono regular, como pasa con los números figurados poligonales y los números poligonales centrados, tomamos en cuenta el estudio de estos números con el fin mostrar su importancia, ya que, algunas sucesiones con estos números son del tipo geométrica o aritmética.

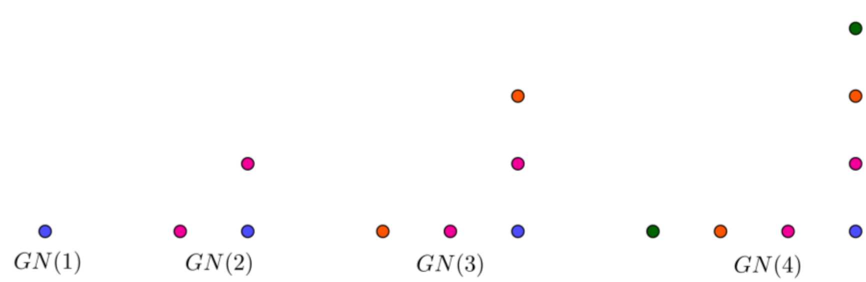
Números gnomonicos

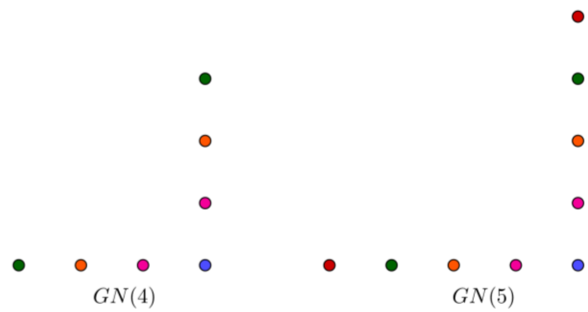
Los números gnomonicos son estrechamente asociados con los números cuadrados. Un número gnomonico es un número figurado en forma de L,(Mason 2005) el número gnomonico se representa por los elementos que se obtienen al sustraer los laterales al número cuadrado en el lugar n es decir al quitar n-1 elementos al número cuadrado.

La sucesión gnomónica de números figurados GN(n) seria

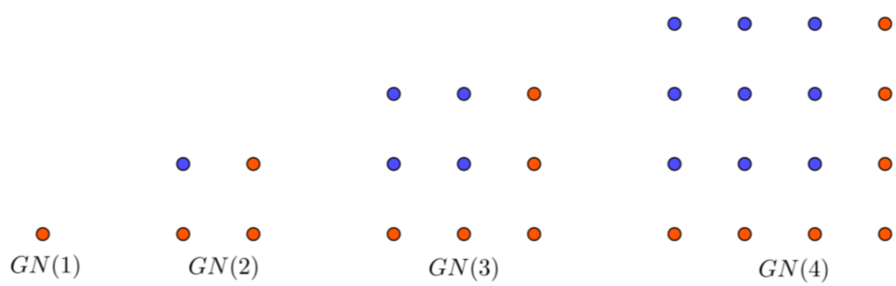
$$GN(n) = \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,\dots\}$$

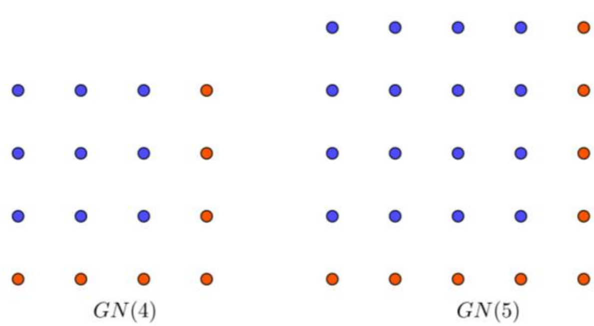
Los números gnomonicos se ilustran a continuación.





Veamos que los números gnomonicos se pueden obtener quitando de un número cuadrado n, sus elementos menos sus elementos laterales.





Así podemos concluir que la sucesión de los números gnomonicos se puede obtener como la diferencia de la ecuación de los números cuadrados el número cuadrado anterior es decir $n^2 - (n-1)^2$= $n^2 - (n^2 - 2n + 1)$= $n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1$, de esta forma la ecuación para obtener los números gnomonicos es 2n-1. Que es equivalente a la sucesión de números impares (Mason 2005) y sabemos se trata de una sucesión aritmética.

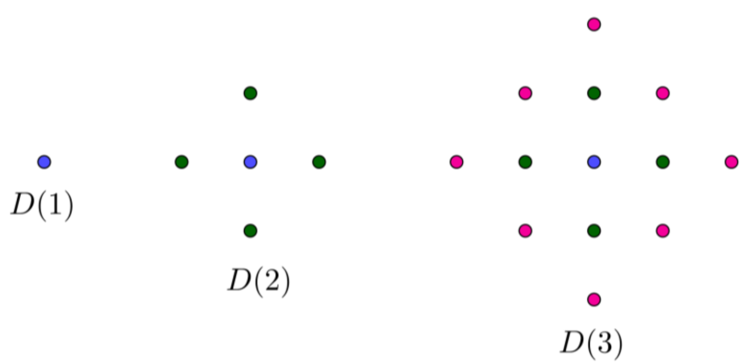
Así tenemos dos formas de visualizar los números cuadrados: como suma de dos triangulares consecutivos y como suma de impares.

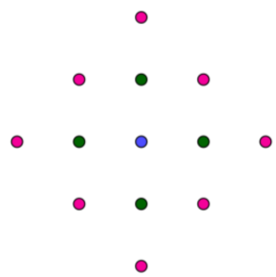
Números diamantes

Los números diamantes D(n) son números que tienen como base un punto centro y alrededor de este punto se pondrá un nuevo elemento haciendo capas a este punto, este número diamante se puede obtener por $2n(n-1)+1$, los valores de la sucesión de los números diamantes D(n) son:

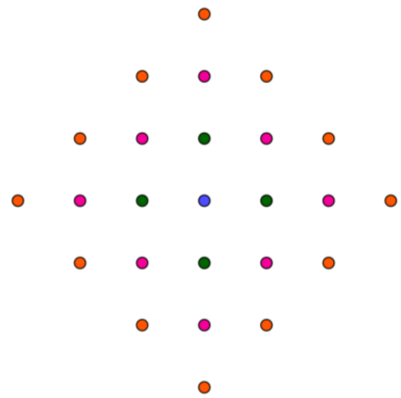
$$D_{(n)} = \{1,5,13,25,41,61,85,113,145,181, \dots\}$$

Geométricamente tendríamos.





$D(3)$



$D(4)$

Precisamente esta sucesión es numéricamente igual al valor de la sucesión de números cuadrados centrados y puede verse geométricamente como el numero cuadrado centrado correspondiente, pero con una rotación de 45°.

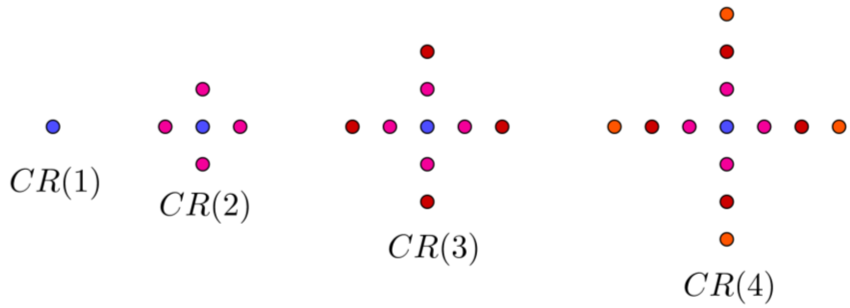
Números en cruz

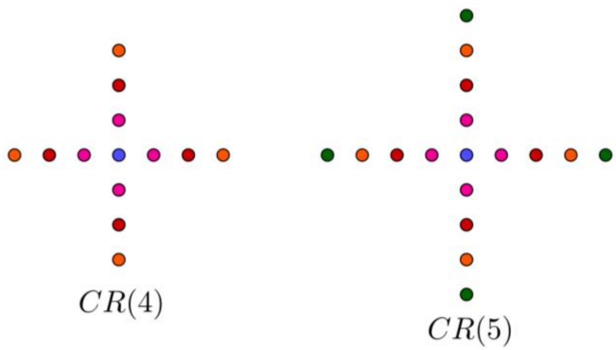
Los números en cruz se definen como los números que se obtienen de la ecuación 4n – 3 y puede representarse geométricamente como un cruce de ejes simétricos de manera perpendicular con un punto base en el cruce y agregando puntos a la misma distancia en cada eje. Así la sucesión de números en cruz $CR(n)$ es:

$$CR(n) = \{1,5,9,13,17,21,25,29,33,37,\dots\}$$

Esta sucesión es del tipo aritmética ya que si tomamos CR(5)=17, CR(6)=21 y CR(7)=25, de esto tenemos que CR(6)−CR(5)=21-15=4 y CR(7)−CR(6)=25-21=4, es decir se obtiene el valor constante 4.

Gráficamente son de la siguiente manera.





Números figurados en el espacio (espaciales)

Al colocar objetos en el espacio en un orden especial se obtienen los números figurados en el espacio, al formar figuras con elementos en el espacio que se utilizaran como puntos o elementos que conforman el numero figurado en el espacio. Los números figurados espaciales más conocido son los números piramidales, los cuales se obtienen al formar pirámides tomando como base los números poligonales correspondientes a triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales, heptagonales, en general, pirámide del k-agonal.

Su valor numérico se puede representarse como las sumas de los números poligonales correspondientes.

Números piramidales

Los números piramidales $S_k^3(n)$ se definen como la suma de los primeros n números k-agonales donde n es el término que ocupa en la sucesión y k representa el número de lados del k-agonal base.

$$S_k^3(n) = S_k(1) + S_k(2) + \cdots + S_k(n).$$

De esta fórmula se puede obtener la siguiente fórmula para los números k-piramidales

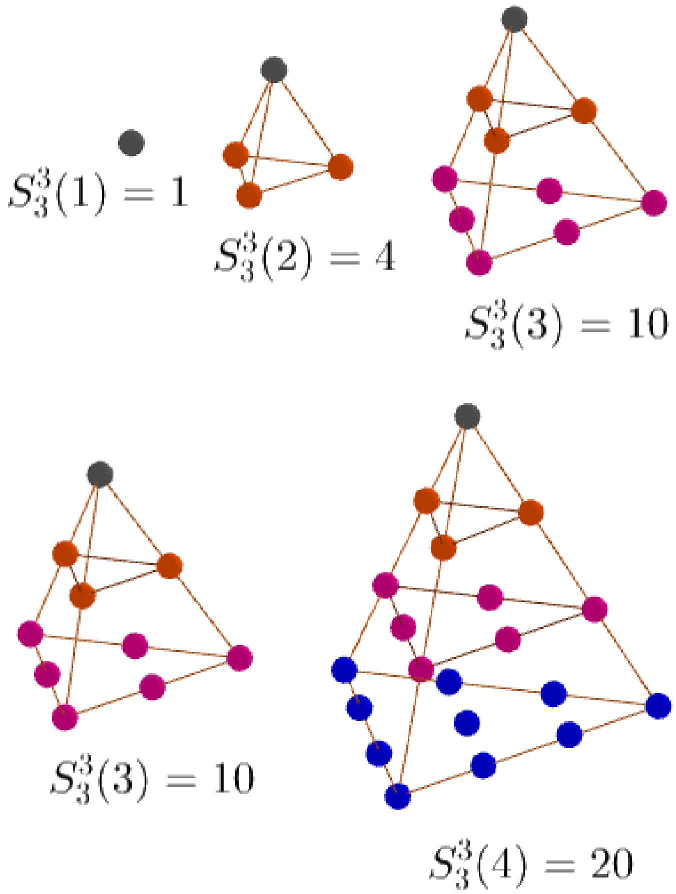
$$S_k^3(n) = S_k^3(n-1) + S_k(n).$$

La fórmula general para obtener el elemento n de la sucesión k-piramidales es de la forma

$$S_k^3(n) = \frac{n(n+1)((k-2)n-k+5))}{6}.$$

Números triangulares piramidales

Los números triangulares piramidales o también llamado tetraedro, es la suma de los primeros números triangulares, de la siguiente manera.



La sucesión de los números triangulares piramidales es.

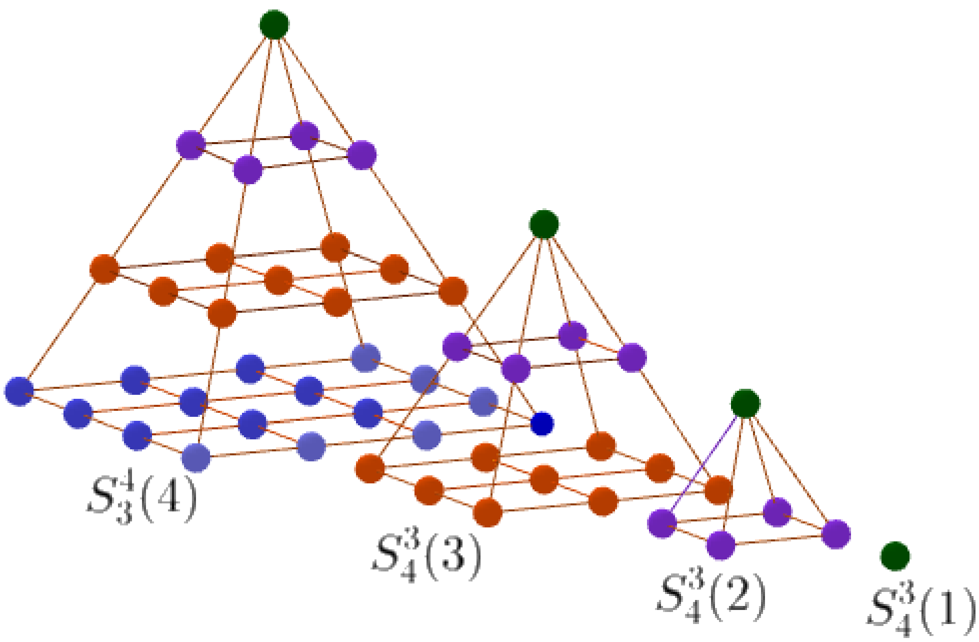
$$S_3^3(n) = \{1,4,10,20,35,56, \dots\}.$$

Así la fórmula para obtener los números triangulares piramidales es:

$$S_3^3(n) = \frac{(n)(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

Números cuadrados piramidales

Los números cuadrados piramidales son la suma de los primeros números cuadrados, tomando como base a los números cuadrados de la siguiente manera.



La sucesión de los números cuadrados piramidales es.

$$S_4^3(n) = \{1,5,14,30,55,91,140, \dots\}.$$

Así la fórmula para obtener los números cuadrados piramidales está dada por:

$$S_4^3(n) = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

Así los números k-agonales piramidales y sus fórmulas se pueden observar en la siguiente tabla.

Nombre	Formula	Elemento de la sucesión							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Triangular piramidal	$\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$	1	4	10	20	35	56	84	120
Cuadrado piramidal	$\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$	1	5	14	30	55	91	140	201
Pentagonal piramidal	$\frac{3n^3+3n^2}{6}$	1	6	18	40	75	126	196	288
Hexagonal piramidal	$\frac{4n^3+3n^2-n}{6}$	1	7	22	50	95	161	252	372
Heptagonal piramidal	$\frac{5n^3+3n^2-2n}{6}$	1	8	26	60	115	196	308	456
Octagonal piramidal	$\frac{6n^3+3n^2-3n}{6}$	1	9	30	70	135	231	364	540
Nonagonal piramidal	$\frac{7n^3+3n^2-4n}{6}$	1	10	34	80	155	266	420	624

Tabla 3 NUMEROS PIRAMIDALES

Utilizando la tabla y la formula general se plantea la siguiente actividad con los alumnos.

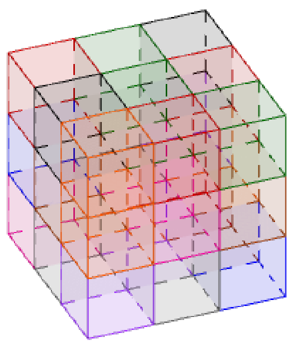
Determinar los valores de la siguiente tabla.

$\boldsymbol{S_5^3(9)}$	$\boldsymbol{S_{10}^3(4)}$	$\boldsymbol{S_7^3(10)}$

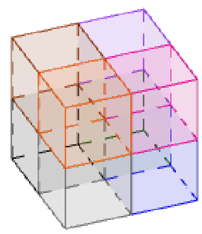
Números cúbicos

Un número cúbico (o el cubo perfecto) es una figura en el espacio cuyo número de elementos son correspondientes a n^3, nosotros lo construiremos con cubos en el espacio donde un cubo denota un elemento del número cubico, denotado como, C(n)=n^3, la sucesión de números cúbicos será.

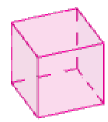
C(n)={1,8,27,64,125,216,343,512,729,1000……}.



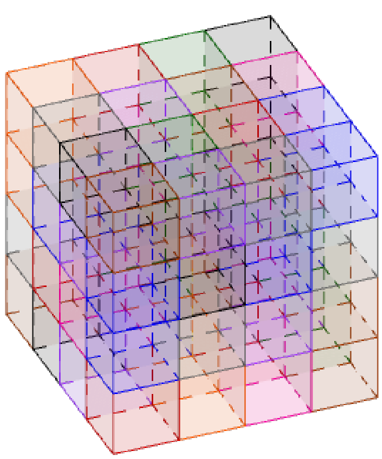
$C(3) = 27$



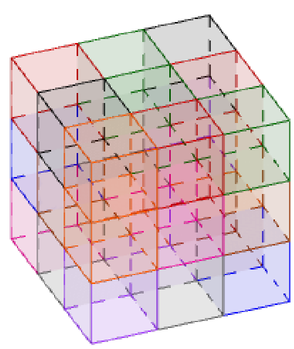
$C(2) = 8$



$C(1) = 1$



$C(4) = 64$



$C(3) = 27$

Números octaédricos

Un número octaédrico es un número figurado en el espacio que representa
un octaedro, o dos pirámides que se ponen juntas, una por debajo de la otra. Por consiguiente, los números octaédricos $O_k(n)$ es la suma de dos números piramidales consecutivos.

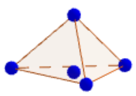
Es decir, un numero octaédrico es la suma de 2 números piramidales consecutivos

$$O_k(n) = S_k^3(n) + S_k^3(n+1)$$

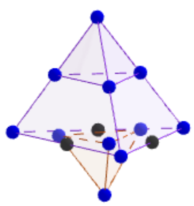
A diferencia de los números figurados que se han estudiado, los números octaédricos no comienzan su sucesión con un punto base, es decir, su primer elemento no será 1 como en los casos anteriores ya que se trata de la suma de dos números consecutivos y es necesario empezar sumando el punto base con un numero piramidal consecutivo, por tal razón el primer elemento de la sucesión de números octaédricos no puede ser la unidad.

De aquí la sucesión de números octaédricos piramidales $O_3(n)$ serian

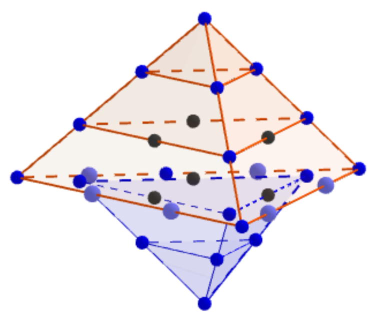
$$O_3(n) = \{5,14,30,55,91,140, \dots\}$$



$O_3(1) = 5$



$O_3(2) = 14$



$O_3(3) = 30$

De esta manera algunas de las sucesiones de los números octaédricos serian:

Octaédrico cuadrado

$$O_4(n) = \{6,19,44,85,146,231, \dots\}.$$

Octaédrico pentagonal

$$O_5(n) = \{7,24,58,115,201,322, \dots \dots\}.$$

Octaédrico hexagonal

$$O_6(n) = \{8,29,72,145,256,413, \dots \dots\}.$$

Retomando forma de la ecuación para obtener los números octaédricos

$$O_k(n) = S_k^3(n) + S_k^3(n+1).$$

Se puede desarrollar una fórmula para generalizarla de la siguiente manera.

$$O_k(n) = S_k^3(n) + S_k^3(n+1)$$

$$O_k(n) = \left\{\left(\frac{n(n+1)((k-2)n-k+5}{6}\right) + \left(\frac{\big((n+1)\big((n+1)+1\big)\big)\Big(\big((k-2)(n+1)\big)-k+5\Big)}{6}\right)\right\}.$$

$$O_k(n) = \left\{\left(\frac{(n^2+n)(kn-2n-k+5)}{6}\right) + \left(\frac{((n+1)(n+2))((kn+k-2n-2))-k+5)}{6}\right)\right\}.$$

$$O_k(n) = \left\{\left(\frac{(kn^3 - 2n^3 - kn^2 + 5n^2 + kn^2 - 2n^2 - kn + 5n)}{6}\right) + \left(\frac{(n^2 + 3n + 2)(kn - 2n + 3)}{6}\right)\right\}$$

$$O_k(n) = \left\{\left(\frac{(kn^3 - 2n^3 + 3n^2 - kn + 5n)}{6}\right) + \left(\frac{(kn^3 - 2n^3 + 3n^2 + 3kn^2 - 6n^2 + 9n + 2kn - 4n + 6)}{6}\right)\right\}$$

$$O_k(n) = \left\{\left(\frac{(kn^3 - 2n^3 + 3n^2 - kn + 5n)}{6}\right) + \left(\frac{(kn^3 - 2n^3 - 3n^2 + 3kn^2 + 5n + 2kn + 6)}{6}\right)\right\}.$$

$$O_k(n) = \frac{kn^3 - 2n^3 + 3n^2 - kn + 5n + kn^3 - 2n^3 - 3n^2 + 3kn^2 + 5n + 2kn + 6}{6}\ .$$

$$O_k(n) = \frac{2kn^3 - 4n^3 + 3kn^2 + kn + 10n + 6}{6}\ .$$

Con k el número de lados del polígono que se estudia y n término de la sucesión octaédrica que se quiere obtener.

Los números octaédricos se pueden apreciar en la siguiente tabla.

Octaédrico	Formula	Elemento de la sucesión							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Triangular k=3	$\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$	5	14	30	55	91	140	204	285
Cuadrado k=4	$\frac{4n^3+12n^2+14n+6}{6}$	6	19	44	85	146	231	344	489
Pentagonal k=5	$\frac{6n^3+15n^2+15n+6}{6}$	7	24	58	115	201	322	484	693
Hexagonal k=6	$\frac{8n^3+18n^2+16n+6}{6}$	8	29	72	145	256	413	624	897
Heptagonal k=7	$\frac{10n^3+21n^2+17n+6}{6}$	9	34	86	175	311	504	764	1101
Octagonal k=8	$\frac{12n^3+24n^2+18n+6}{6}$	10	39	100	205	366	595	904	1305
Nonagonal k=9	$\frac{14n^3+27n^2+19n+6}{6}$	11	44	114	235	421	686	1044	1509

Tabla 4 NUMEROS OCTAÉDRICOS

Utilizando la formula general y la tabla se planteó la siguiente actividad para el alumno.

Determinar los valores solicitados en la siguiente tabla.

$O_{12}(3)$	$O_7(11)$	$O_{15}(1)$

Aplicación didáctica

En nuestro trabajo abordamos las propiedades de los números figurados. Pero su aplicación didáctica es para mejorar la comprensión de las sucesiones de números, en nuestro caso nos apoyamos de la idea de Mason et al (op cit, 1985) “Expresiones de la generalidad” siguiendo su idea de que la generalidad se alcanza en cuatro etapas para obtener el conocimiento esperado, fue como lo aplicamos con los alumnos de nivel medio superior, las etapas de las que hablamos son:

1)Ver un patrón
2) Decir cuál es el patrón
3) Registrar un patrón
4) Prueba de la validez de las fórmulas.

El conocimiento del alumno al seguir estos pasos se llevó de la manera esperada, la mayor parte de nuestra población de alumnos fue capaz de generalizar una sucesión de números, aun cuando presentaron dificultades en el traslado de la generalidad, el poder manipular los elementos de las figuras formadas en nuestro curso hizo que esto fuera más factible, es decir el apoyo que se brinda a los alumnos generalmente es simbólico haciendo que no puedan notar la importancia de definir una variable como se debe, sino como una letra la cual es generalmente “X”, nosotros notamos que al hacer un manejo de figuras el alumno es capaz de determinar donde se ocupa la variable ya que él lo realiza por construcción y no como una imposición, notamos que si se apoya a los alumnos con patrones ellos son capaces de usar símbolos algebraicos y notar que la variable “X” **puede ser cualquier número**, en los reales aun cuando nuestro caso se utilizó en su mayoría los enteros positivos.

Los números figurados nos ayudaron a la comprensión de las sucesiones además brindaron un enfoque de la existencia de sucesiones distintas a las usualmente utilizadas para mostrar generalmente este tema a los alumnos, dando un panorama más amplio a los alumnos de nivel medio superior, la generalidad implica una gran inversión de tiempo con los alumnos, pero nos permite la posibilidad de explotar diferentes contenidos matemáticos al mismo tiempo que trabajamos con sus conocimientos algebraicos, lo cual consideramos de suma importancia en el desarrollo del estudiante además de la ventaja considerable para el docente al abarcar no solo un tema al mismo tiempo, fomentando que el estudio del siguiente tema sea más fácil y eficaz en cuanto al aprendizaje del alumno.

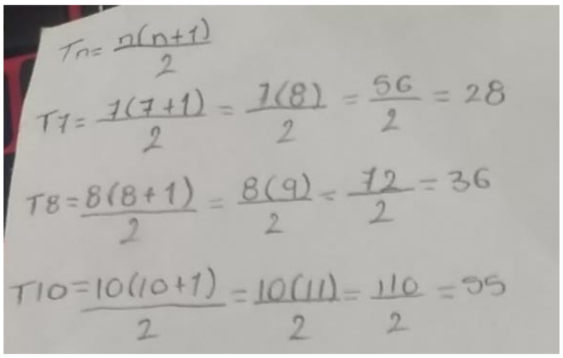
Conclusión

En conclusión la experiencia que se obtuvo al realizar este trabajo con los alumnos fue reconfortante al poder ayudar a estos a conocer de manera factible términos algebraicos y de sucesiones que ellos pudieron reforzar al realizar este taller, dentro de la experiencia que se obtuvo en este trabajo es observar que el algebra básica es un tema de los que más se complican en el aula de clases con los alumnos, esto se debe a la imposición de fórmulas lo que hace que el alumno tenga una baja comprensión en los conceptos y tenga dificultades al desarrollar los temas, que si bien es algo que aplica en su vida diaria, le es muy complicado el apreciarlo de esa manera, el poder llevar al alumno a una visualización de los objetos con los que trabaja le brinda un mejor aprovechamiento en el aprendizaje de los temas, además hace más factible la generalidad de estos, finalmente el trabajar con diferentes materiales y de manera tecnológica con el programa Geogebra nos ayudó a que el alumno comprenda la generalidad ya que su atención se presenta de manera motora y no escuchando solo lo que el docente dice en el aula de clases, nos sentimos conformes con los resultados aun sabiendo que no todos los alumnos alcanzaron el aprendizaje esperado, sabemos que se causó un impacto favorable en el desarrollo de los temas que se abordaron y para ellos resultaban complicados.

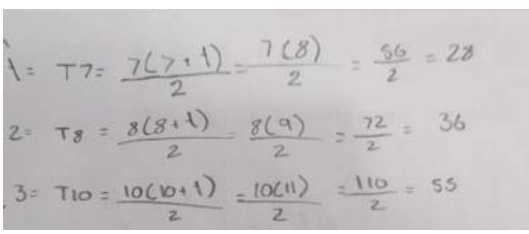
Respuestas a las actividades realizadas por los alumnos

Actividad 1. Números triangulares:

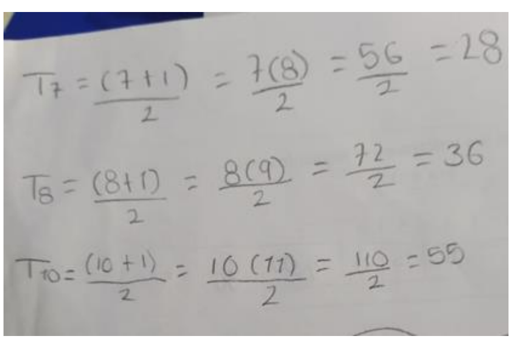
Término	1	2	3	4	5	6	7	8	10
T_n	1	3	6	10	15	21			



Alumno 1



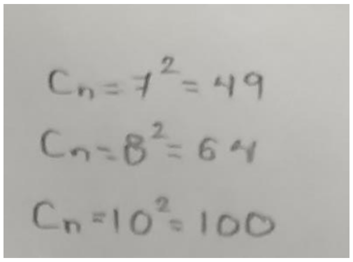
Alumno 2



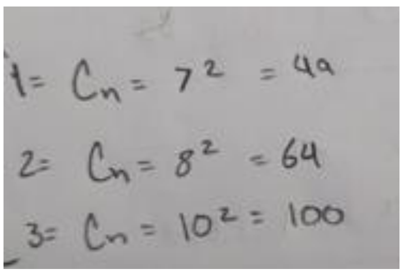
Alumno 3

Actividad 2. Números cuadrados

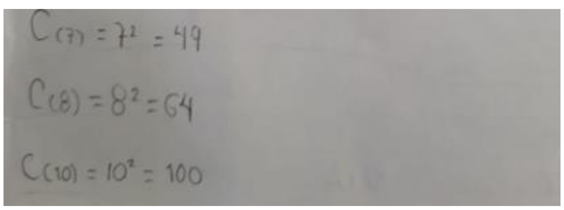
Término	1	2	3	4	5	6	7	8	10
C_n	1	4	9	16	25	36			



Alumno 1



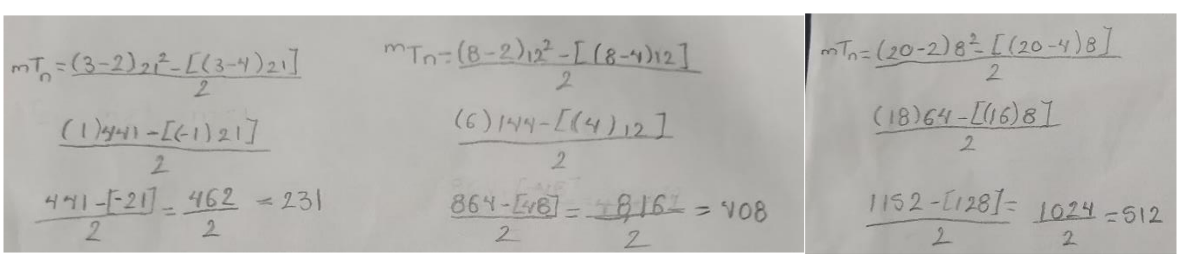
Alumno 2



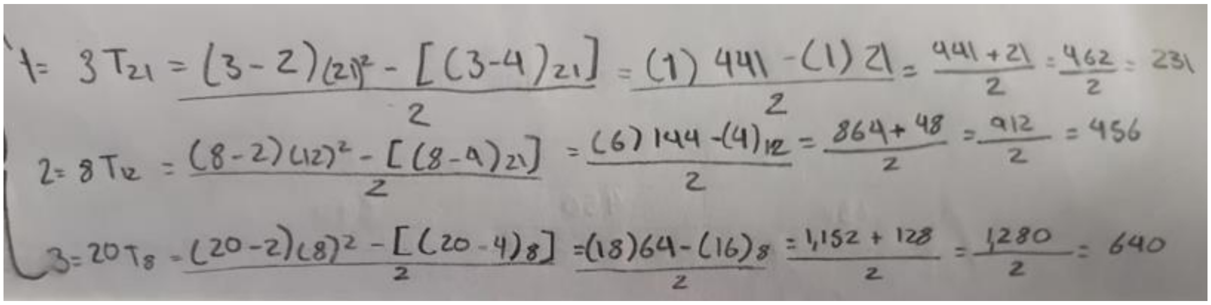
Alumno 3

Actividad 3. Números poligonales

T_{21}	$Octa_{12}$	$20-agono_8$



Alumno 1

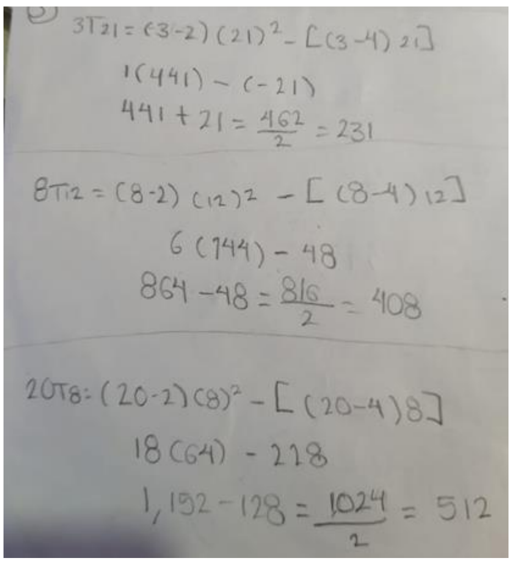


$1 = 3T_{21} = \frac{(3-2)(21)^2 - [(3-4)21]}{2} = \frac{(1)\,441 - (1)\,21}{2} = \frac{441+21}{2} = \frac{462}{2} = 231$

$2 = 8T_{12} = \frac{(8-2)(12)^2 - [(8-4)21]}{2} = \frac{(6)\,144 - (4)12}{2} = \frac{864+48}{2} = \frac{912}{2} = 456$

$3 = 20T_8 = \frac{(20-2)(8)^2 - [(20-4)8]}{2} = \frac{(18)64 - (16)8}{2} = \frac{1{,}152 + 128}{2} = \frac{1280}{2} = 640$

Alumno 2



$3T_{21} = (3-2)(21)^2 - [(3-4)21]$

$1(441) - (-21)$

$441 + 21 = \frac{462}{2} = 231$

$8T_{12} = (8-2)(12)^2 - [(8-4)12]$

$6(144) - 48$

$864 - 48 = \frac{816}{2} = 408$

$20T_8 = (20-2)(8)^2 - [(20-4)8]$

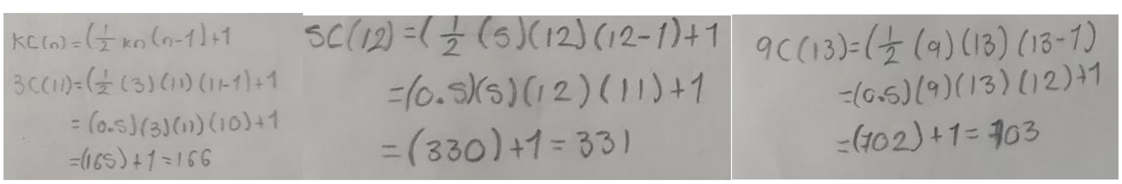
$18(64) - 218$

$1{,}152 - 128 = \frac{1024}{2} = 512$

Alumno 3

Actividad 4. Números centrados

$TC(11)$	$PC(12)$	$NC(13)$



$KC(n) = (\frac{1}{2} kn(n-1)) + 1$

$3C(11) = (\frac{1}{2}(3)(11)(11-1)) + 1$

$= (0.5)(3)(11)(10) + 1$

$= (165) + 1 = 166$

$5C(12) = (\frac{1}{2}(5)(12)(12-1)) + 1$

$= (0.5)(5)(12)(11) + 1$

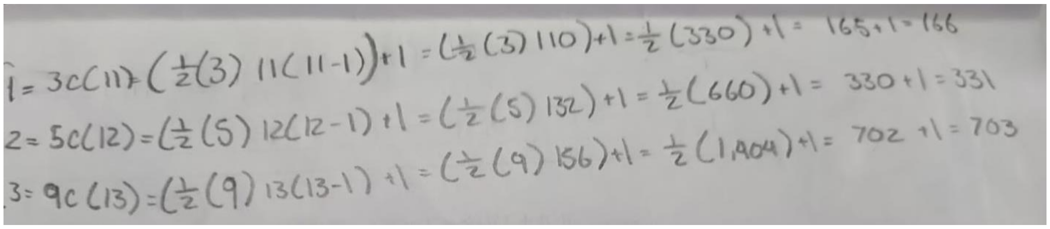
$= (330) + 1 = 331$

$9C(13) = (\frac{1}{2}(9)(13)(13-1))$

$= (0.5)(9)(13)(12) + 1$

$= (702) + 1 = 703$

Alumno 1

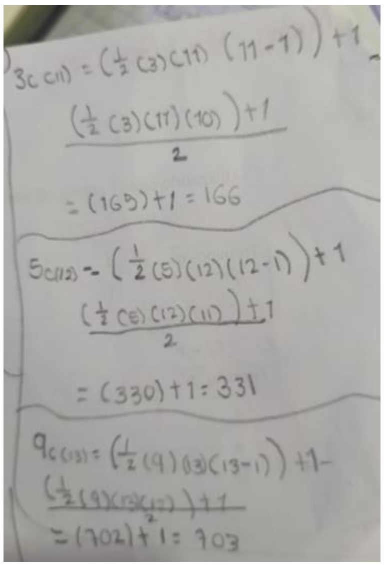


$1 = 3c(11) = \left(\frac{1}{2}(3)\ 11(11-1)\right)+1 = \left(\frac{1}{2}(3)\ 110\right)+1 = \frac{1}{2}(330)+1 = 165+1 = 166$

$2 = 5c(12) = \left(\frac{1}{2}(5)\ 12(12-1)+1 = \left(\frac{1}{2}(5)\ 132\right)+1 = \frac{1}{2}(660)+1 = 330+1 = 331$

$3 = 9c(13) = \left(\frac{1}{2}(9)\ 13(13-1)+1 = \left(\frac{1}{2}(9)\ 156\right)+1 = \frac{1}{2}(1{,}404)+1 = 702+1 = 703$

Alumno 2



$3c(11) = \left(\frac{1}{2}(3)(11)\ (11-1)\right)+1$

$\frac{\left(\frac{1}{2}(3)(11)(10)\right)+1}{2}$

$= (165)+1 = 166$

$5c(12) = \left(\frac{1}{2}(5)(12)(12-1)\right)+1$

$\frac{\left(\frac{1}{2}(5)(12)(11)\right)+1}{2}$

$= (330)+1 = 331$

$9c(13) = \left(\frac{1}{2}(9)(13)(13-1)\right)+1$

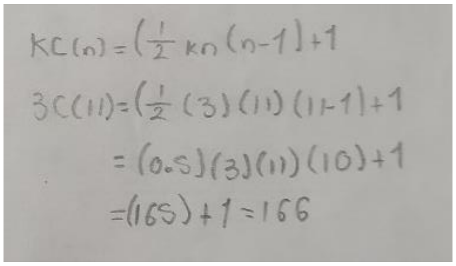
$\frac{\left(\frac{1}{2}(9)(13)(12)\right)+1}{2}$

$= (702)+1 = 703$

Alumno 3

Actividad 5. Números piramidales

$S_5^3(9)$	$S_{10}^3(4)$	$S_7^3(10)$

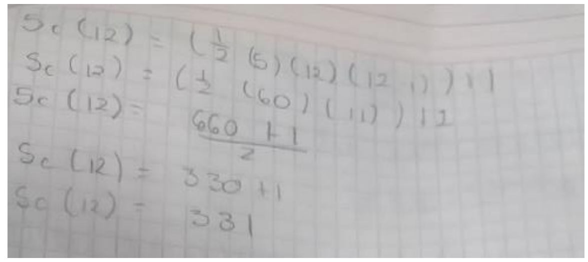


$KC(n) = \left(\frac{1}{2} kn(n-1)\right)+1$

$3C(11) = \left(\frac{1}{2}(3)(11)(11-1)\right)+1$

$= (0.5)(3)(11)(10)+1$

$= (165)+1 = 166$



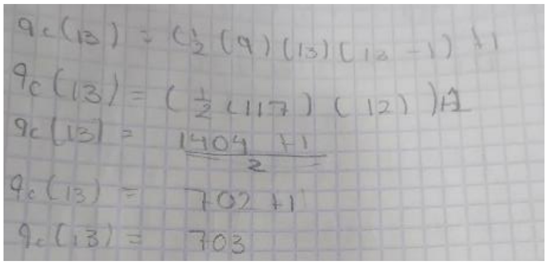
$S_c(12) = \left(\frac{1}{2}(5)(12)(12-1)\right)+1$

$S_c(12) = \left(\frac{1}{2}(60)(11)\right)+1$

$S_c(12) = \frac{660}{2}+1$

$S_c(12) = 330+1$

$S_c(12) = 331$



$9_c(13) = \left(\frac{1}{2}(9)(13)(13-1)\right)+1$

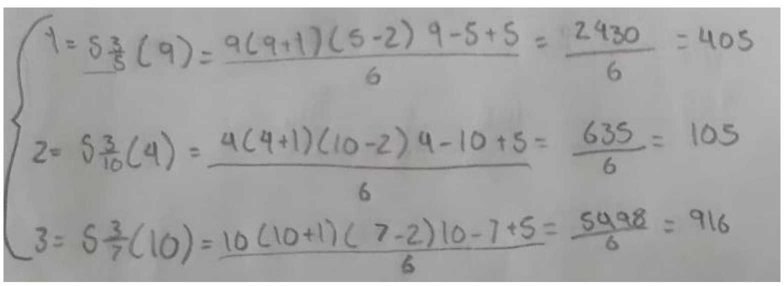
$9_c(13) = \left(\frac{1}{2}(117)(12)\right)+1$

$9_c(13) = \frac{1404}{2}+1$

$9_c(13) = 702+1$

$9_c(13) = 703$

Alumno 1

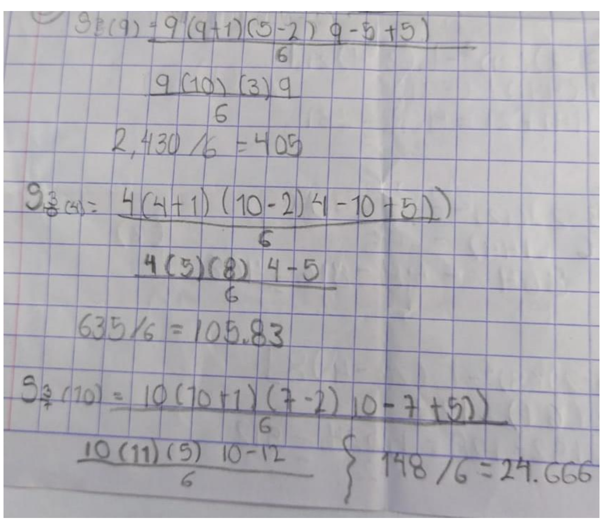


$1 = S\frac{3}{5}(9) = \frac{9(9+1)(5-2)\,9-5+5}{6} = \frac{2430}{6} = 405$

$2 = S\frac{3}{10}(4) = \frac{4(4+1)(10-2)\,4-10+5}{6} = \frac{635}{6} = 105$

$3 = S\frac{3}{7}(10) = \frac{10(10+1)(7-2)\,10-7+5}{6} = \frac{5498}{6} = 916$

Alumno 2



$S\frac{3}{5}(9) = \frac{9(9+1)(5-2)\,9-5+5)}{6}$

$\frac{9(10)(3)\,9}{6}$

$2{,}430/6 = 405$

$S\frac{3}{8}(4) = \frac{4(4+1)(10-2)\,4-10+5))}{6}$

$\frac{4(5)(8)\,4-5}{6}$

$635/6 = 105.83$

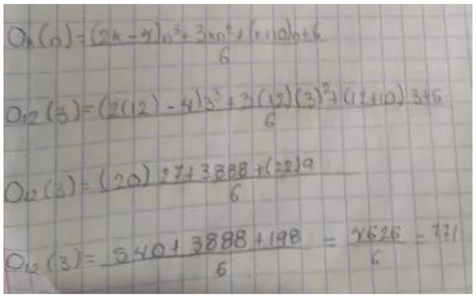
$S\frac{3}{7}(10) = \frac{10(10+1)(7-2)\,10-7+5))}{6}$

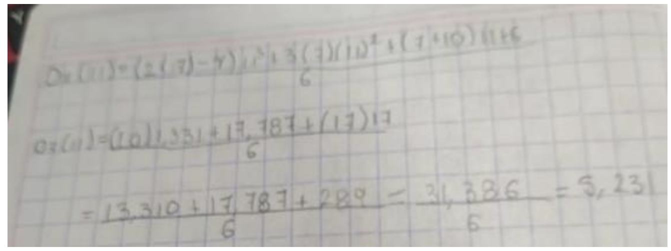
$\frac{10(11)(5)\,10-12}{6}$ $\Big\}$ $148/6 = 24.666$

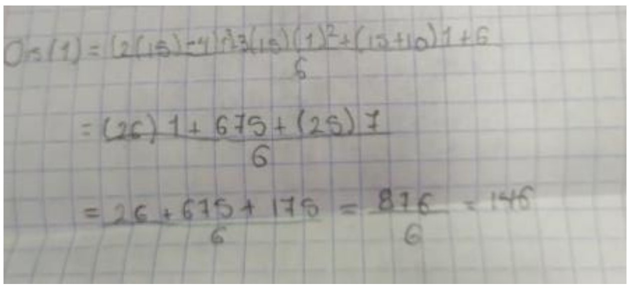
Alumno 3

Actividad 6. Números Octaédricos

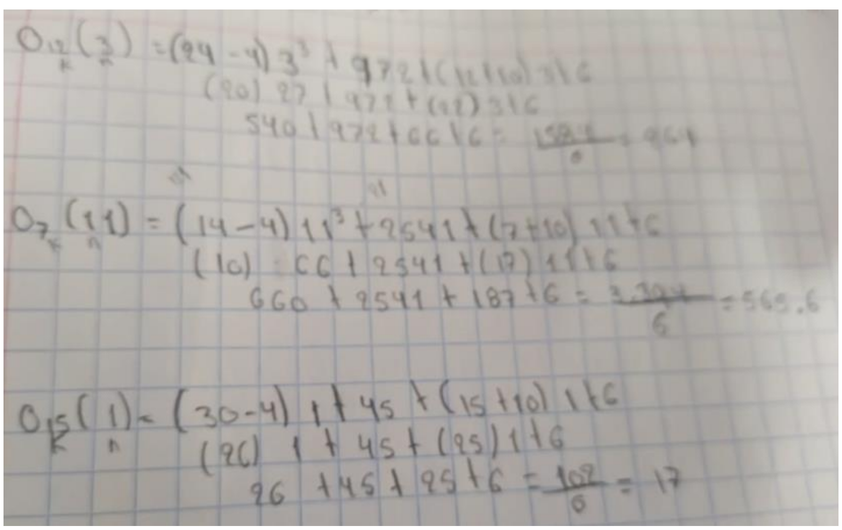
$O_{12}(3)$	$O_{7}(11)$	$O_{15}(1)$



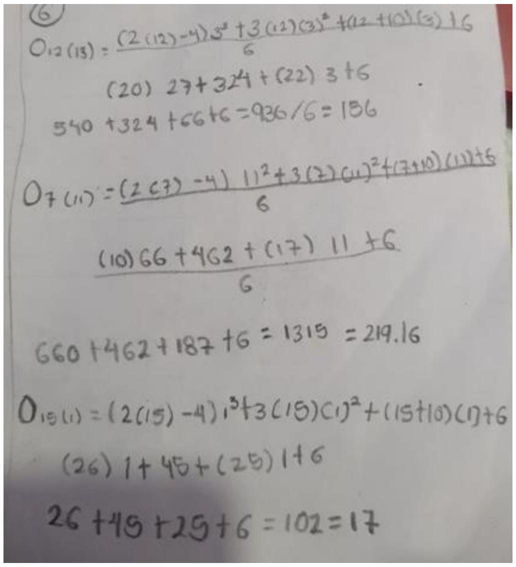




Alumno 1



Alumno 2



6

$$O_{12}(13) = \frac{(2(12)-4)3^3 + 3(12)(3)^2 + (12+10)(3)+6}{6}$$

$$(20)\ 27 + 324 + (22)\ 3 + 6$$

$$540 + 324 + 66 + 6 = 936/6 = 156$$

$$O_7(11) = \frac{(2(7)-4)\ 11^2 + 3(7)(11)^2 + (7+10)(11)+6}{6}$$

$$\frac{(10)\ 66 + 462 + (17)\ 11 + 6}{6}$$

$$660 + 462 + 187 + 6 = 1315 = 219.16$$

$$O_{15}(1) = (2(15)-4)\ 1^3 + 3(15)(1)^2 + (15+10)(1)+6$$

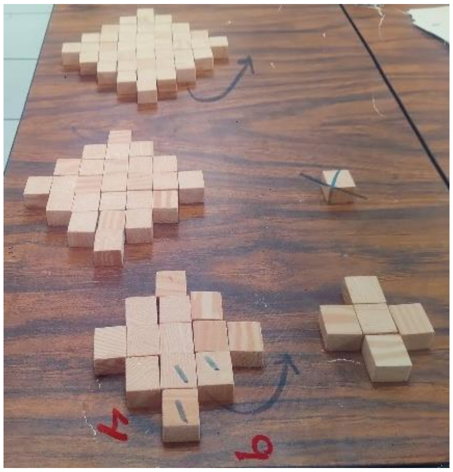
$$(26)\ 1 + 45 + (25)\ 1 + 6$$

$$26 + 45 + 25 + 6 = 102 = 17$$

Alumno 3

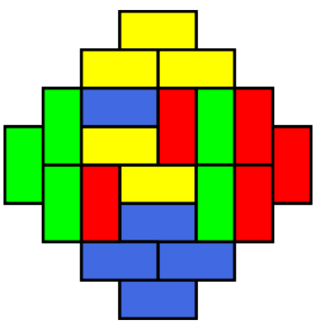
Material didáctico y Anexos

Anexo 1



Anexo 1 Nos muestra la actividad realizada por el profesor Pablo Rodrigo Zeleny en su curso de inducción matemática, donde se hace énfasis en obtener algunas sumatorias al notar como van incrementando y usando el método de diferencias entre sucesiones formadas con cubos de madera.

Teselado



Anexo 2

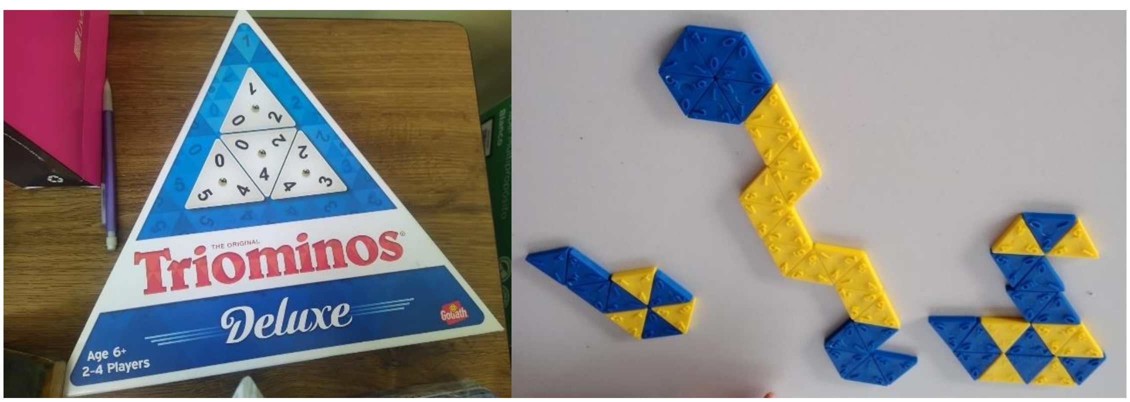
Un teselado es una sucesión de figuras que se repiten con regularidad para cubrir el plano, es decir el patrón de las figuras se repite hasta dejar toda la zona completamente cubierta. En nuestro trabajo estos teselados se realizaron con fichas de dominó la figura que se aprecia en el Anexo 2 es un ejemplo de lo realizado el cual se nombra también sucesión azteca.

Dominós

Anexo 3

Estos son los dominós utilizados para realizar los teselados, además de ser utilizados para formar las sucesiones de teselados se preguntó ¿Cuál es relación existe entre el número de fichas de dominó y el valor más alto de la ficha? La cual como hicimos notamos tiene que ver con los números triangulares. Dependiendo del número que tenga la ficha más grande es la relación que guarda con los números triangulares, por ejemplo, para el domino de valor máximo 15, Anexo 3 para obtener el número de fichas que tendrá se utilizaría la fórmula de triangulares con k=n+1, esto se debe a que contamos a la ficha cero como nuestro primer número, es decir para saber cuántas fichas tiene el domino doble 15 en nuestra formula de números triangulares k=15+1, k=16.

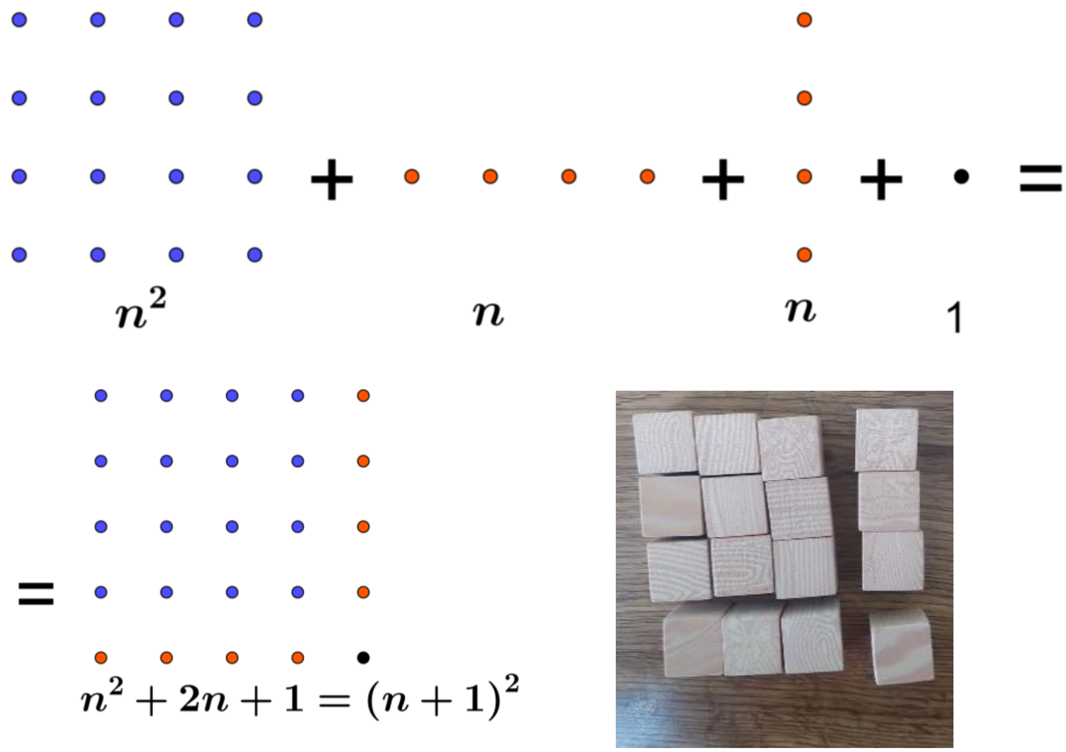
Triominos



Anexo 4

El Anexo 4 nos muestra a los triominos los cuales se utilizaron para realizar teselados y además se estudió la relación que existe entre estos y los números triangulares piramidales.

Cuadrado perfecto

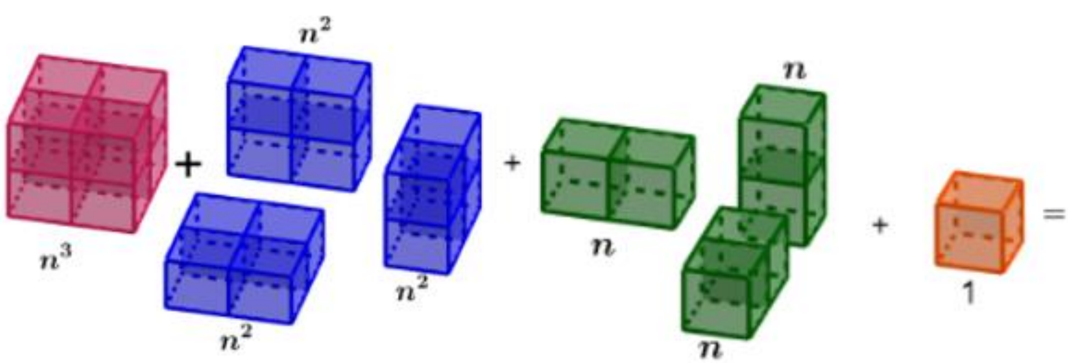


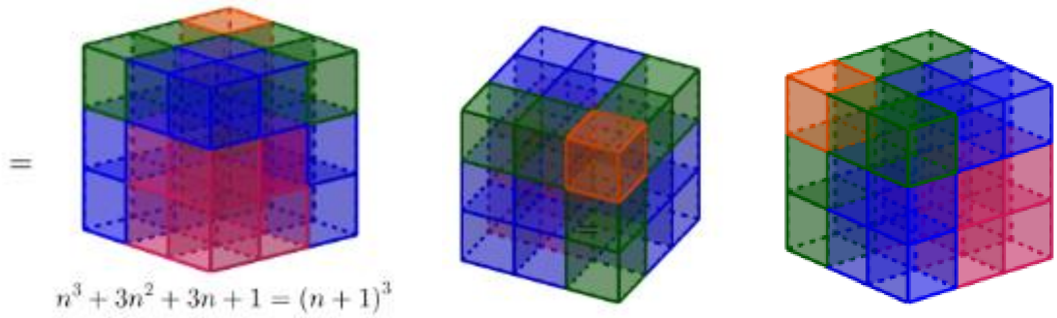
Anexo 5

El Anexo 5 nos muestra la idea con la que mostramos a los alumnos la generalidad del binomio al cuadrado perfecto, esto es suponiendo que n es el número de puntos que conforman el lado de nuestro cuadrado, entonces si aumento n veces de un lado, n veces del otro lado y además de un punto extra, nos daría $(n^2 + 2n + 1)$ lo cual como se hizo notar en el taller seria $(n + 1)^2$, esto con la visualización de las figuras por parte del alumno.

Cubo perfecto

 **Se observan el cubo de medidas n, tres capas cuadradas, tres tiras y un elemento.**	 **Se colocaron dos de las 3 caras cuadradas al nuevo cubo.**
 **Se colocaron las 3 caras cuadradas y dos de las tres nuevas tiras en el nuevo cubo.**	 **Se colocan las tres caras cuadradas y las tres tiras faltando el último elemento que complete el nuevo cubo.**



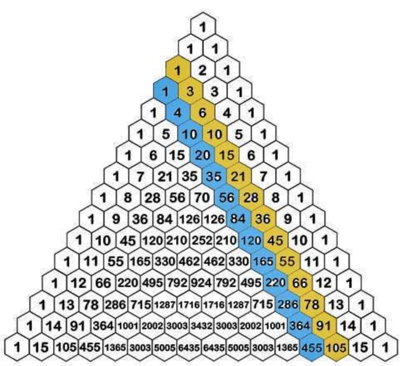


Anexo 6

El Anexo 6 nos muestra como mostramos a los alumnos la generalidad del binomio al cubo perfecto, la generalidad se mostró tomando un cubo de lado igual a n, agregando 3 lados de medida n, 3 caras cuadradas de medida $nxn = n^2$ y un punto más, esto no llevo a que al colocarlos todos juntos nos daría. $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$.

Claramente el trabajo realizado en Anexo 5,Anexo 6 mostro que en una ecuación para el alumno no es lo mismo usar material concreto visualizándolo, a aprender el desarrollo abstracto.

Triangulo de pascal



Anexo 7

El uso del triángulo de pascal con alumnos de nivel medio superior generalmente se realiza para mostrar las propiedades del binomio, sin embargo, en nuestro trabajo mostramos como podemos notar los números triangulares y los números piramidales (tetraedros), esto se mostró en la tercera y cuarta columna respectivamente, como hicimos notar la primera diagonal a partir del primer 1 representara a nuestro primer elemento con valor constante 1, la segunda diagonal representa la sucesión de números enteros, la tercera diagonal muestra los números triangulares y finalmente la cuarta diagonal muestra los números triangulares piramidales (tetraedros) Anexo 7.

Tablas de números figurados

Números Poligonales

Número Poligonal	Fórmula		Elemento de la sucesión									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Triangular m=3	$\frac{n^2+n}{2}$	$\frac{1}{2}n(n+1)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Cuadrangular m=4	$\frac{2n^2-0(n)}{2}=n^2$	$\frac{1}{2}n(2n-0)$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagonal m=5	$\frac{3n^2-1(n)}{2}=\frac{3n^2-n}{2}$	$\frac{1}{2}n(3n-1)$	1	5								
Hexagonal m=6	$\frac{4n^2-2(n)}{2}=2n^2-n$	$\frac{1}{2}n(4n-2)$	1	6								
Heptagonal m=7	$\frac{5n^2-3(n)}{2}=\frac{5n^2-3n}{2}$	$\frac{1}{2}n(5n-3)$	1	7								
Octagonal m=8	$\frac{6n^2-4(n)}{2}=3n^2-2n$	$\frac{1}{2}n(6n-4)$	1	8								
Nonagonal m=9	$\frac{7n^2-5(n)}{2}=\frac{7n^2-5n}{2}$	$\frac{1}{2}n(7n-5)$	1	9								
Decagonal m=10	$\frac{8n^2-6(n)}{2}=4n^2-3n$	$\frac{1}{2}n(8n-6)$	1	10								
Undecagonal m=11	$\frac{9n^2-7(n)}{2}=\frac{9n^2-7n}{2}$	$\frac{1}{2}n(9n-7)$	1	11								
Dodecagonal m=12	$\frac{10n^2-8n}{2}=5n^2-4n$	$\frac{1}{2}n(10n-8)$	1	12								
13-agonal m=13	$\frac{11n^2-9(n)}{2}=\frac{11n^2-9n}{2}$	$\frac{1}{2}n(11n-9)$	1	13								
14-agonal m=14	$\frac{12n^2-10(n)}{2}=6n^2-5n$	$\frac{1}{2}n(12n-10)$	1	14								
15-agonal m=15	$\frac{13n^2-11(n)}{2}=\frac{13n^2-11n}{2}$	$\frac{1}{2}n(13n-11)$	1	15								

Números poligonales centrados

Número Poligonal Centrado	Fórmula		Elemento de la sucesión									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Triangular k=3	$\frac{3n^2-3n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}3n(n-1)\right)+1$	1	4	10	19	31	46	64	85	109	136
Cuadrangular k=4	$\frac{4n^2-4n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}4n(n-1)\right)+1$	1	5	13	25	41	61	85	113	145	181
Pentagonal k=5	$\frac{5n^2-5n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}5n(n-1)\right)+1$	1	6	16	31	51	76	106	141	181	226
Hexagonal k=6	$\frac{6n^2-6n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}6n(n-1)\right)+1$	1									
Heptagonal k=7	$\frac{7n^2-7n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}7n(n-1)\right)+1$	1									
Octagonal k=8	$\frac{8n^2-8n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}8n(n-1)\right)+1$	1									
Nonagonal k=9	$\frac{9n^2-9n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}9n(n-1)\right)+1$	1									
Decagonal k=10	$\frac{10n^2-10n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}10n(n-1)\right)+1$	1									
Undecagonal k=11	$\frac{11n^2-11n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}11n(n-1)\right)+1$	1									
Dodecagonal k=12	$\frac{12n^2-12n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}12n(n-1)\right)+1$	1									
13-agonal k=13	$\frac{13n^2-13n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}13n(n-1)\right)+1$	1									
14-agonal k=14	$\frac{14n^2-14n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}14n(n-1)\right)+1$	1									
15-agonal k=15	$\frac{15n^2-15n+2}{2}$	$\left(\frac{1}{2}15n(n-1)\right)+1$	1									

Números poligonales piramidales

Nombre	Formula	Elemento de la sucesión							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Triangular piramidal	$\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$	1	4	10	20	35	56	84	120
Cuadrado piramidal	$\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$	1	5	14	30	55	91	140	201
Pentagonal piramidal	$\frac{3n^3+3n^2}{6}$	1	6	18	40	75	126	196	288

Hexagonal piramidal	$\frac{4n^3+3n^2-n}{6}$	1							
Heptagonal piramidal	$\frac{5n^3+3n^2-2n}{6}$	1							
Octagonal piramidal	$\frac{6n^3+3n^2-3n}{6}$	1							
Nonagonal piramidal	$\frac{7n^3+3n^2-4n}{6}$	1							

Números poligonales octaédricos

Octaédrico	Formula	Elemento de la sucesión							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Triangular k=3	$\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$	5	14	30	55	91	140	204	285
Cuadrado k=4	$\frac{4n^3+12n^2+14n+6}{6}$	6	19						
Pentagonal k=5	$\frac{6n^3+15n^2+15n+6}{6}$	7	24						
Hexagonal k=6	$\frac{8n^3+18n^2+16n+6}{6}$	8	29						
Heptagonal k=7	$\frac{14n^3+21n^2+17n+6}{6}$	9	34						
Octagonal k=8	$\frac{12n^3+24n^2+18n+6}{6}$	10	39						
Nonagonal k=9	$\frac{14n^3+27n^2+19n+6}{6}$	11	44						

Anexo 8

El Anexo 8 nos muestra las tablas que se realizaron con los alumnos a lo largo del curso.

Bibliografía

Wijers, M., Roodhardt, A., van Reeuwijk, M., Burrill, G., Cole, B. R., & Pligge., M. A. (2010). *Building Formulas Algebra.* Chicago: Encyclopædia Britannica, Inc.

Arcaví, A. (2003). *The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics.* Educational Studies of MAthematics.

Arriaga García, G., & Butto Zarzar, C. M. (2009). *PROCESOS DE GENERALIZACIÓN CON ESTUDIANTES DE 1º Y 2º DE SECUNDARIA DE UNA ESCUELA PÚBLICA DEL DISTRITO FEDERAL: UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA.* VERACRUZ, VERACRUZ.

Deza, E., & Deza, M. M. (2012). FIGURATE NUMBERS. In E. DEZA, & M. M. DEZA, *FIGURATE NUMBERS* (pp. 1-145). NEW JERSEY: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Retrieved from www.worldscientific.com

Drijvers, P. (2011). Secondary Algebra Education. In P. Drijvers, *Secondary Algebra Education* (pp. 89-99). Holanda: Sense Publishers.

Espinosa Pérez, H., García Peña, S., & García Juárez, M. A. (2004). Fichero de actividades didácticas Matemáticas Educación secundaria . In H. Espinosa Pérez, S. García Peña, & M. A. García Juárez, *Fichero de actividades didácticas Matemáticas Educación secundaria* (pp. 10-22, 112-115). Mexico, D.F.: Alejandro Portilla de Buen.

Herrera, A. P., & Zeleny, P. R. (2011, DICIEMBRE 12). PRUEBAS VISUALES Y SU USO DIDÁCTICO. *PRUEBAS VISUALES Y SU USO DIDÁCTICO*. PUEBLA.PUE, PUEBLA, MEXICO.

Howard, E. (1969). ESTUDIO DE LAS GEOEMTRIAS. In E. HOWARD, *ESTUDIO DE LAS GEOMETRIAS* (pp. 1-25). MÉXICO: UTEHA.

Mason , J., Wilder, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra.* Gran Bretaña: The Open University Press.

Mason, J., Graham, A., & Wilder, S. J. (2005). *Developing Thinking in Algebra.* London: Paul Chapman Publishing.

Nadine Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *APPROACHES TO ALGEBRA Perspectives for Research and Teaching.* DORDRECHT / BOSTON / LONDON: KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS.

Usiskin, Z. (1995). Why is algebra important to learn. In Z. Usiskin, *Why is algebra important to learn* (pp. 30-37). Chicago: Spring.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In Z. Usiskin, *Conceptions of School Algebra and Uses of Variables* (pp. 7-13).

Usiskin, Z. (2004). A significant amount of algebra. In Z. Usiskin, *A significant amount of algebra* (pp. 147-151). Chicago, Illinois: Verenigde Staten.

Weisstein, Eric. (2023, 10 12). *Wolfram MathWorld*. Retrieved from Wolfram MathWorld: https://mathworld.wolfram.com/FigurateNumber.html

Wertheimer, M. (1945). Productive Thinking MAx Wertheimer. In M. Wertheimer, *Productive Thinking MAx Wertheimer* (pp. 99-123). Springer Nature Switzerland AG.