



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA



Licenciatura en Ingeniería Química

TESIS

Título de tesis:

**FENÓMENOS DE TRANSPORTE CON UN ENFOQUE
ANALÍTICO Y NUMÉRICO.**

Presenta:

BONILLA HERNÁNDEZ REYMUNDO MIGUEL

Tesis presentada para obtener el grado de:

LICENCIATURA EN INGENIERÍA QUÍMICA

Director de Tesis:

M. I. JOSÉ BLAS MARTÍN GARCÍA CUEVAS

07 Marzo, 2023

Dedicatoria

*A mis padres, por ser quienes me apoyaron
en mi formación como estudiante y persona.*

Agradecimientos

A mi padre Reymundo Moisés Bonilla Méndez y mi madre María Coralia Hernández Olmos, porque siempre se han esforzado por darme todo su apoyo, aunque estemos separados por cientos de kilómetros eso nunca ha sido impedimento para sentir el calor y aprecio de su enorme corazón y confianza que me han dado, los amo con todo mi corazón y siempre los llevo en mi corazón ♡, esta tesis se la dedico a los dos.

A mi hermana Ana Gabriela Bonilla Hernández, para que sea de inspiración para que ella también culmine su carrera, y aunque nos peleamos y casi no hablemos, quiero que sepa que la aprecio mucho.

A mi abuelito Miguel Hernández, quien siempre estuvo atento en lo que necesitaba, quien me apoyo de igual manera en mi formación como persona y siempre estuvo presente en sus oraciones hasta el ultimo día. Q.E.P.D.

A mi directo de tesis el M. I. José Blas Martín García Cuevas por ser un guía y consejero durante la realización, redacción y conclusión de esta tesis, así como al tenerme paciencia por ser sumamente extenso el trabajo que se elaboró.

A mis amigos Antonio Mota, Farid Capilla, Pedro Vázquez y Adolfo Rodríguez, quienes también estuvieron en mi formación como persona y nunca nos separamos a pesar de luego no tener horarios y/o materias iguales, quienes luego me invitaban a comer cuando la sufría siendo foráneo, nunca se olvidara la **fila de los compas**, gracias por todo y en especial su amistad que no tiene precio alguno y si lo tuviera, nunca se los podría pagar, los aprecio mucho.

A mi mejor amiga Andrea Méndez, por ser una persona especial en mi vida, quien me brindo su apoyo moral y emocional para poder terminar esta tesis, quien me regalo de su tiempo y a sus padres también que me brindaron su apoyo.

A mi amiga Minelly Espinoza, por ser una gran amiga y *roomie*, que siempre me escucho y de igual manera me alimento, muchas gracias Vale.

A mis mejores amigos de la infancia el Monty, el Wero y el Baez, ya que aunque no nos viéramos seguidos, siempre confiaron en mí y cada que nos encontramos es como regresar a los tiempos de primaria, donde hablamos y actuamos como niños.

Quisiera también mencionar a Liss Escalera, por su apoyo, confianza, paciencia, y tiempo en este último trayecto de tesis, por auxiliarme en la redacción de ortografía.

"Cuando la gratitud es tan absoluta, las palabras sobran"

Álvaro Mutis

Índice general

I	Prefacio	2
II	Conocimientos Previos	9
1	Introducción a los conocimientos previos	10
1.1	Álgebra lineal	10
1.2	Química	18
1.3	Física	21
1.4	Termodinámica	30
1.5	Balance de materia y energía	32
1.6	Cálculo diferencial	35
1.7	Cálculo Integral	42
1.7.1	Cálculo Integral de una variable	43
1.7.2	Cálculo Integral de múltiples variables	45
1.8	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	46
2	Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP)	58
2.1	EDP el comienzo	59
2.2	Condiciones de frontera	60
2.3	Ecuación Diferencial Parcial Lineal	62
2.4	Principio de Superposición	63
2.5	Series de Fourier de senos y cosenos	64
2.6	Separación de Variables para EDP lineales homogéneas	69
2.7	Las tres grandes EDP	75
2.8	Problemas no Homogéneos	76
3	Métodos numéricos	80
3.1	Introducción de comandos	80
3.2	Generación de matrices	83
3.3	Cálculo	88
3.4	Ecuaciones diferenciales	95
3.5	Métodos numéricos	98
3.5.1	Series de Taylor	98
3.5.2	Errores	99
3.5.3	Resolución de ecuaciones no lineales	101
3.6	Método Gráfico - Diferencias finitas	104
3.7	Ecuaciones Diferenciales Parciales	110

III	Fenómeno de transporte I: Cantidad de Movimiento	113
4	Introducción de conocimientos de cantidad de movimiento	114
4.1	Tipos de fluidos	121
4.2	Tipos de flujo	124
4.3	Volumen de control	126
4.4	Medidores de Viscosidad dinámica	127
4.4.1	Viscosímetros de uso laboratorio	128
4.4.2	Viscosímetros de uso industria	129
5	Deducciones matemáticas para flujos laminar y estado estacionario	131
5.1	Coordenadas rectangulares	144
5.1.1	Valores reales	159
5.1.2	Solución numérica	161
5.2	Coordenadas cilíndricas	163
5.2.1	Valores reales	173
5.2.2	Solución numérica	176
5.3	Placa en movimiento	179
5.3.1	Valores reales	188
5.3.2	Solución numérica	190
5.4	Diferencia de presiones	193
5.4.1	Valores reales	200
5.4.2	Solución numérica	202
6	Las ecuaciones de variación para sistemas isotérmicos	206
6.1	Ecuación de continuidad	206
6.2	Ecuación de movimiento	210
6.3	Ecuación de energía mecánica	219
7	Aplicación de las ecuaciones de Navier-Stokes	220
7.1	Viscosímetro de tambor rotatorio.	220
7.1.1	Valores reales	225
7.2	Fuente de cascada de piscina	227
7.2.1	Demostración de la ecuación	228
7.2.2	Resolución de la ecuación	230
7.2.3	Solución numérica	236
7.3	Tubería con variación en el tiempo	239
7.3.1	Demostración de la ecuación	239
7.3.2	Resolución de la ecuación	241
7.3.3	Solución numérica	242
7.4	Teoría de la capa límite	249
7.4.1	Demostración de la ecuación	250
8	Distribución de velocidad en flujo turbulento	253
9	Transporte de interfase en sistemas isotérmicos	256
9.1	Factor de fricción	256

9.2	Factor de fricción en tuberías	257
9.2.1	Diagrama de Moody	257
9.3	Factor de fricción de pruebas experimentales	261
10	Balances macroscópicos para sistemas con flujo isotérmico	262
10.1	Balance macroscópico de materia	262
10.2	Ecuación de energía mecánica	263
10.2.1	Factor de corrección para la velocidad cinética	267
10.3	Longitud equivalente en equipos	268
11	Uso de ecuaciones de balance macroscópico	269
11.1	Llenado de un tanque de agua	269
11.2	Balance de energía para una bomba	270
IV	Fenómeno de transporte II: Transporte de Calor	274
12	Mecanismos de transferencia de calor	275
12.1	Conducción	277
12.2	Convección	279
12.2.1	Convección natural en superficies	280
12.2.2	Convección forzada	282
12.3	Radiación	282
13	Ecuaciones de Variación para sistemas no isotérmicos	285
13.1	Coordenadas rectangulares	294
13.1.1	Valores reales	298
13.1.2	Solución numérica	299
13.2	Coordenadas cilíndricas	300
13.2.1	Valores reales	307
13.2.2	Solución numérica	307
13.3	Coordenadas esféricas	310
13.4	Lampara de lava	317
13.5	Resistencia térmica	322
13.5.1	Programación	326
13.6	Aletas de enfriamiento	328
13.6.1	Eficiencia de las aletas	334
14	Distribución de temperatura con más de una variable independiente	337
14.1	Placa delgada aislada térmicamente	337
14.1.1	Solución numérica	338
14.1.2	Solución numérica - Método de diferencias finitas	341
14.2	Horno	346
14.2.1	Solución numérica - Diferencias finitas	348
14.3	Elementos finitos	353
14.3.1	Modelado en 2D	355
14.3.2	Modelado en 3D	360

15	Balances macroscópicos para sistemas no isotérmicos	361
15.1	Balance de energía para un compresor	361
15.2	Determinación de temperatura	363
16	Conclusión	366
V	Apéndices	379
A	Datos generales	380
A.1	Tabla de constantes universales y conversiones	380
B	Cantidad de Movimiento	382
B.1	Ley de viscosidad de Newton	382
B.2	Ecuaciones de continuidad	384
B.3	Ecuación de movimiento en términos de τ	384
B.4	Ecuación de movimiento para fluidos newtonianos con ρ y μ constantes	385
C	Transferencia de calor	387
C.1	Ley de conducción de calor de Fourier	387
C.2	Ecuación de conducción en función del flux de calor q	387
C.3	Ecuación de conducción en función de las propiedades de transporte, para k constante y uniforme	388
C.4	Ecuación de energía en función de las propiedades de transporte de fluidos con ρ , C_p y k constantes	388
C.5	Ecuación de energía en función del flux de calor q	389

Índice de tablas

Tabla 1.1.1	Ejemplo de ecuaciones lineales y no lineales con sus respectivos criterios. . . .	11
Tabla 1.1.2	Tipos de soluciones, ejemplos y representaciones gráficas.	12
Tabla 1.1.3	Tipos de vectores.	14
Tabla 1.6.1	Cuando la función $f(t) = \frac{t^2-1}{t-1}$ tiende por la derecha	36
Tabla 1.6.2	Cuando la función $f(t) = \frac{t^2-1}{t-1}$ tiende por la izquierda	36
Tabla 1.6.3	Demostración gráfica de cuando un límite existe y cuando es inexistente en cuatro casos posibles	37
Tabla 3.1.1	Ventanas de MATLAB [30].	81
Tabla 3.1.2	Operaciones aritméticas con escalares.	82
Tabla 3.1.3	Orden de precedencia.	82
Tabla 3.1.4	Operaciones matemáticas.	82
Tabla 3.1.5	Funciones trigonométricas. El valor de x , cual debe estar en radianes.	83
Tabla 3.1.6	Operaciones lógicas.	83
Tabla 3.2.1	Operaciones aritméticas para matrices y vectores.	88
Tabla 3.6.1	Resumen de formulas para aproximación de las derivadas. Donde x , sera el valor inicial, Δx es el tamaño de paso dado o incremento, siendo la longitud del intervalo sobre el cual se realiza la aproximación y O el error de entruncamiento.	105
Tabla 4.1.1	Tabla de tipos de fluidos con sus respectivos ejemplos	123
Tabla 4.2.1	Numero de Reynolds para fluidos contenidos en una tubería circular.	124
Tabla 5.1.3	Formulas ocupadas durante el desarrollo del Ejemplo 1 , en coordenadas rectangulares.	159
Tabla 5.2.1	Formulas ocupadas durante el desarrollo del Ejemplo 2 , en coordenadas cilíndricas para una velocidad en z	173
Tabla 5.2.2	Tabla de conversión de <i>ssu</i> a <i>stokes</i>	174
Tabla 5.3.1	Formulas ocupadas durante el desarrollo del Ejemplo 1 , en coordenadas rectangulares para una velocidad en z	188
Tabla 5.4.3	Formulas ocupadas durante el desarrollo del Ejemplo 2 , en coordenadas cilíndricas para una velocidad en z	200
Tabla 7.3.1	Resultados de la velocidad máxima a cierto tiempo y con su margen de error.	248

Índice de figuras

Figura 1.3.1	Movimiento de caja [13].	22
Figura 1.3.2	Polea fija con un objeto con cierto peso W [13].	25
Figura 1.3.3	Representación del carro en movimiento [13].	27
Figura 1.4.1	Tipos de sistemas	30
Figura 1.4.2	Representación de cuando el calor y el trabajo tendrán signo positivo o negativo	31
Figura 1.4.3	Según la ley cero de la termodinámica, aunque el cuerpo A y B no están en contacto térmico directo, se encuentran en equilibrio térmico gracias al cuerpo C	32
Figura 1.5.1	Representación gráfica de un proceso, donde entra materia y energía, se realiza el proceso de transformación y sale materia y energía, donde puede existir una recirculación.	33
Figura 1.5.2	Transición del estado transitorio al estado estacionario.	33
Figura 1.6.1	Método gráfico de la función $f(t) = \frac{t^2-1}{t-1}$. Donde (a) cuando se dice que $t \rightarrow a^+$ indica que t tiende por la derecha, es decir, a través de los números que son mayores que a . (b) Cuando se dice que $t \rightarrow a^-$ indica que t tiende por la izquierda, es decir, a través de los números que son menores que a . (c) Cuando se dice que $t \rightarrow a$ indica que t tiende por ambos lados.	36
Figura 1.6.2	Función de una derivada.	38
Figura 1.6.3	Rectas secantes se mueven hacia la recta tangente L cuando $h \rightarrow 0$	39
Figura 2.2.1	Tubería metálica $u(x, t)$ = temperatura del punto x , en el tiempo t	61
Figura 2.5.1	Sumas parciales de una serie de Fourier.	68
Figura 2.6.1	Comportamiento gráfico de $u(x, t)$, cuando $t = 1$	75
Figura 3.1.1	Escritorio de MATLAB	81
Figura 3.5.1	Descripción gráfica del método. Gráficas obtenidas de E. Mora [37].	102
Figura 3.6.1	Gráficas de aproximaciones con diferencias finitas divididas de la primera derivada.	104
Figura 3.6.2	Comparación entre el sistema de ecuaciones generada y la solución analítica .	107
Figura 3.6.3	Gráfica de aproximación entre la solución generada por diferencias finitas y la solución analítica	109
Figura 4.0.1	Ejemplo de tasas de deformación en fluidos.	115
Figura 4.0.2	Caja completamente vacía con una tapa encima deslizándose.	115
Figura 4.0.3	Caja completamente llena con un fluido con una tapa encima deslizándose, la cual dicha tapa debe ser empujada más veces para hacer todo el recorrido de la figura 4.0.2.	116
Figura 4.0.4	Fluido dividido por capas que va desde la 1 hasta n , siendo la capa 1 la más pegada a la tapa en movimiento y n la que está pegada al fondo de la caja. . .	116

Figura 4.0.5	Movimiento de las capas representada por flechas, las cuales indican la dirección en la cual se desplaza la tapa.	117
Figura 4.0.6	Fluido comprendido entre dos tapas con una separación Y , una tapa en movimiento siendo la superior y otra tapa estática, siendo la inferior. El fluido se encuentra dividido en capas y con un eje coordinado entre la tapa en movimiento y la primera capa de fluido.	117
Figura 4.0.7	Movimiento de las capas representada por flechas, las cuales indican la dirección en la cual se desplaza la tapa.	118
Figura 4.0.8	Representación de la fuerza aplicada y la fuerza opuesta siendo la fuerza viscosa.	119
Figura 4.0.9	La fuerza cortante aplicada se resiste uniformemente por el área de la parte que se corta.	120
Figura 4.1.1	Representación esquemática de tipos de fluidos	122
Figura 4.1.2	Representación gráfica del esfuerzo cortante contra la relación de deformación de los tipos de fluidos no Newtonianos que dependen del tiempo [42].	122
Figura 4.1.3	Representación gráfica del esfuerzo cortante contra la relación de deformación de los tipos de fluidos independientes del tiempo [42].	123
Figura 4.2.1	Flujo saliendo a velocidad constante de una tubería. Obtenido de F. White [38].	125
Figura 4.3.1	Tipos de volúmenes de control. (a) Es el volumen de control, en color gris, para coordenadas rectangulares, donde el flujo es vertical. (b) Es el volumen de control, en color gris, para coordenadas cilíndricas, donde el flujo es horizontal dentro del cilindro. (c) Es el volumen de control, en color gris, para coordenadas esféricas, donde el flujo es sobre el borde de la esfera	127
Figura 4.4.1	Viscosímetros de vidrio capilar [48].	128
Figura 4.4.2	Viscosímetro de caída de bola tipo C Thermo Scientific HAAKE TM [49].	128
Figura 4.4.3	Viscosímetro rotacional tipo Brookfield IKA Rotavisc [50].	129
Figura 4.4.4	Viscosímetro automático Saybolt [51].	129
Figura 4.4.5	Viscosímetro ViscoScope Inline VA-100 [52].	130
Figura 4.4.6	Viscosímetro portátil B-ONE [53].	130
Figura 5.0.1	Fluido siendo transportado entre dos placas paralelas verticales en estado <i>no estacionario</i>	132
Figura 5.0.2	Vista bidimensional del problema.	133
Figura 5.0.3	Movimiento del fluido en un pequeño tiempo, donde las flechas indican la dirección en que se mueve el fluido.	134
Figura 5.0.4	Movimiento del fluido en un lazo grande de tiempo, donde las flechas indican la dirección en que se mueve el fluido.	134
Figura 5.0.5	Eje coordinado para un diagrama de cuerpo libre.	135
Figura 5.0.6	Eje coordinado para un diagrama de cuerpo libre.	136
Figura 5.0.7	Diagrama de cuerpo libre con las fuerzas que intervienen para el fluido comprendido entre dos placas paralelas inmóviles.	137
Figura 5.0.8	Posición del eje coordinado del volumen de control comprendido entre dos placas.	137
Figura 5.0.9	Desplazamiento del fluido por capas rectangulares, el cual fluye a través de dos placas paralelas.	138
Figura 5.0.10	Desplazamiento de una pelota de béisbol. Obtenido de P. Tippens [13].	138

Figura 5.0.11	Movimiento por placas del fluido contenido entre dos placas paralelas donde el color azul más intenso es el movimiento molecular con mayor velocidad que mientras que el azul menos intenso es el que tiene menor velocidad molecular.	140
Figura 5.0.12	El control de la presión diferencial en un sistema suele ser clave para que dicho sistema funcione [54].	142
Figura 5.1.1	Placa con corriente de agua [55]	145
Figura 5.1.2	Representación esquemática de la cascada de agua con sus dimensiones.	145
Figura 5.1.3	Establecimiento del eje de coordenadas dependiendo de la interfase que se encuentre.	146
Figura 5.1.4	Volúmenes de control	147
Figura 5.1.5	Problema visto desde vista bidimensionales.	148
Figura 5.1.6	Dimensiones del volumen de control.	149
Figura 5.1.7	Eje coordenado para un diagrama de cuerpo libre.	150
Figura 5.1.8	Diagrama de cuerpo libre con las fuerzas que intervienen para el fluido que desciende de una pared.	151
Figura 5.1.9	Desplazamiento del fluido por capas rectangulares, el cual fluye a través de una pared vertical.	151
Figura 5.1.10	Movimiento por placas del fluido contenido entre dos placas paralelas, una placa es solida y la otra placa es un gas, donde el color azul más intenso es el movimiento molecular con mayor velocidad, mientras que el color azul menos intenso es el que tiene menor velocidad molecular.	153
Figura 5.1.11	Función graficada de (5.64).	158
Figura 5.2.1	Oleoduto de crudo [59].	163
Figura 5.2.2	Representación esquemática de la tubería inclinada a cierto ángulo.	163
Figura 5.2.3	Volúmenes de control.	164
Figura 5.2.4	Escurridor de platos [60].	165
Figura 5.2.5	Servitoallas.	165
Figura 5.2.6	Vista central de la tubería para especificar los límites y además establecer el volumen de control para el cilindro.	165
Figura 5.2.7	Flujo laminar dentro de la tubería, entra más obscuro sea el color mayor velocidad tendra el fluido.	167
Figura 5.2.8	Dimensiones del volumen de control.	168
Figura 5.2.9	Desdoblamiento del volumen de control.	168
Figura 5.2.10	Función graficada de (5.85).	172
Figura 5.2.11	Ángulo de inclinación de la tubería.	175
Figura 5.3.1	El derrame de petróleo en los océanos se considera una catástrofe ambiental [63].	180
Figura 5.3.2	Skimmer de cinta transportadora fue utilizado con gran éxito durante el derrame del Prestige para la recuperación de hidrocarburo semisólido, tal como se muestra en las fotografías [62].	181
Figura 5.3.3	Diseño de cinta transportadora llevando el crudo, con eje coordenado.	182
Figura 5.3.4	Volúmenes de control.	182
Figura 5.3.5	Volúmenes de control en vistas laterales.	183
Figura 5.3.6	Diseño de cinta transportadora llevando el crudo, con eje coordenado.	183
Figura 5.3.7	Dimensiones del volumen de control.	184

Figura 5.3.8	Perfil de velocidad de una placa de liquido en movimiento [65]	186
Figura 5.3.9	Variación de velocidad de la banda respecto al número de Re	192
Figura 5.4.1	Columnas de fraccionamiento industriales típicas [69].	193
Figura 5.4.2	Vista completa de una columna de destilación [70].	193
Figura 5.4.3	Tubería por donde se transporta el fluido, debido a una diferencias de presiones. 194	
Figura 5.4.4	Dimensiones y establecido el volumen de control del tubo a estudiar.	194
Figura 5.4.5	Desdoblamiento del volumen de control.	196
Figura 6.1.1	Volumen de control (fijo en el espacio) a través del cual esta circulando un fluido. 207	
Figura 6.1.2	Pequeño elemento de volumen fijo $\Delta x \Delta y \Delta z$ a través del cual pasa un fluido. Las flechas indican el transporte masivo dentro y fuera del volumen a través de las dos caras ubicadas, por ejemplo en x y la distancia recorrida $x + \Delta x$	210
Figura 6.2.1	Representación esquemática de nuestro problema.	211
Figura 6.2.2	Vista bidimensional de nuestro fluido.	213
Figura 6.2.3	Vista 3D del fluido.	214
Figura 7.1.1	Viscosímetro de tambor rotatorio.	220
Figura 7.1.2	Representación gráfica del viscosímetro de tambor rotatorio.	221
Figura 7.1.3	Representación gráfica del viscosímetro de tambor rotatorio con un volumen de control.	223
Figura 7.2.1	Fuente de cascada de piscinas.	228
Figura 7.2.2	Representación esquemática de la cascada de agua.	228
Figura 7.2.3	Vista lateral del fluido problema. Donde el color más intenso es la capa molecular donde el fluido adquiere más velocidad, mientras que el menos intenso es la capa molecular que adquiere menos velocidad.	230
Figura 7.2.4	Condiciones de frontera para el flujo a través de la sección rectangular de tubería. 231	
Figura 7.2.5	Fuente de cascada donde tiene dimensiones cuadradas.	237
Figura 7.2.6	Gráfico cuando el tiempo es igual a 1 s.	238
Figura 7.2.7	Gráfico cuando el tiempo es igual a 1 s.	238
Figura 7.2.8	Menisco de aforo en dos recipientes de diferente tamaño.	239
Figura 7.3.1	Red de oleoductos [91].	239
Figura 7.3.2	Tubería en la cual fluye un fluido newtoniano en estado no estacionario.	240
Figura 7.3.3	Entre mayor sea el tiempo, el perfil de velocidad empezará a desarrollar, llegando incluso a tiempos muy grandes a sobreponerse las gráficas, significando que se encuentra en un estado estacionario.	249
Figura 7.4.1	Sistema de coordenadas para el flujo bidimensional en el cual fluye uniforme- mente un flujo paralelo a lo largo de una placa plana que esta alineada con el <i>eje x</i>	250
Figura 8.0.1	Diferencia entre el flujo laminar y flujo turbulento [94].	254
Figura 9.2.1	Rugosidades en el interior de una tubería.	257
Figura 9.2.2	Diagrama de Moody: factor de fricción por flujo en tubería [95].	258
Figura 10.2.1	Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica a un sistema.	264
Figura 11.1.1	Tanque parcialmente vacío.	269

Figura 11.2.1	Esquema compresor.	271
Figura 12.0.1	Tipos de energía [126].	276
Figura 12.0.2	Mecanismos de transferencia de calor [127].	276
Figura 12.1.1	Fluido comprendido entre dos placas rectangulares con la misma temperatura T_0 , $t < 0$	277
Figura 12.1.2	Fluido comprendido entre dos placas rectangulares con una temperatura mayor T_1 y una temperatura menor T_0 , $t = 0$	277
Figura 12.1.3	Transferencia de calor entre dos placas que comprenden un fluido, cuando el $t > 0$ y se mantiene constante.	278
Figura 12.1.4	Capa límite térmica. Cuando un fluido a una temperatura específica fluye sobre una superficie que está a una temperatura diferente, el espesor de la capa límite térmica aumenta en la dirección del flujo, ya que se sienten los efectos de la transferencia de calor a distancias más grandes de la superficie.	280
Figura 12.2.1	Enfriamiento de una pellet esférico de hierro a <i>fuego vivo</i> por medio de convección forzada y natural.	281
Figura 12.3.1	Energía en forma de radiación emitida por un foco hacia los alrededores.	283
Figura 12.3.2	Transferencia de calor por radiación entre una superficie y las superficies que la circundan. Obtenido de Y. Cengel [149].	284
Figura 13.0.1	Reactor de refinería petrolera [129].	285
Figura 13.0.2	Vista esquemática del reactor de lecho fijo monotubo [130].	286
Figura 13.0.3	Volumen de control.	286
Figura 13.0.4	Reactor batch en forma cilíndrica.	292
Figura 13.1.1	Panel de cristal.	294
Figura 13.1.2	Representación esquemática del panel de cristal.	295
Figura 13.1.3	Volumen de control de una pared rectangular.	295
Figura 13.1.4	Perfil de temperatura.	297
Figura 13.2.1	Botella de acero inoxidable de pared simple sin aislamiento [138].	301
Figura 13.2.2	Esquema del recipiente con sus dimensiones respectivamente.	301
Figura 13.2.3	Representación lateral del cilindro.	302
Figura 13.3.1	Tanque esférico [144].	310
Figura 13.3.2	Esquema del tanque esférico.	311
Figura 13.4.1	Lampara de lava [145].	317
Figura 13.4.2	Esquema de la lampara de lava.	317
Figura 13.4.3	Transferencia de calor del cilindro cónico.	318
Figura 13.5.1	Arreglo de tuberías en una planta industrial.	322
Figura 13.5.2	Tubería aislada, donde las temperaturas son $T_{f1} > T_0$, $T_0 > T_1$, $T_1 > T_2$, $T_2 > T_3$ y $T_3 > T_{f2}$	323
Figura 13.5.3	Representación esquemática de las resistencias térmicas de nuestra tubería.	323
Figura 13.5.4	Analogía entre los conceptos de resistencia térmica y eléctrica.	324
Figura 13.5.5	Red de resistencia térmicas para la transferencia de calor a través de una tubería sujeta a convección interna del cilindro y externa.	325
Figura 13.6.1	Aletas de enfriamiento de aluminio [147].	328
Figura 13.6.2	Representación esquemática de una aleta de enfriamiento rectangular.	329
Figura 13.6.3	Aleta con aislante térmico al final.	332

Figura 13.6.4	Comparación gráfica de las tres ecuaciones deducidas para los tres posibles casos.	334
Figura 14.1.1	Distribución de temperaturas para la placa.	337
Figura 14.1.2	Mallado de la placa rectangular con sus respectivos nodos.	338
Figura 14.1.3	Nodo para discretizar.	339
Figura 14.1.4	Discretización de la placa delgada aislada térmicamente.	342
Figura 14.1.5	Gráficas de comportamiento término de la placa a distintas temperaturas con diferente cantidad de nodos.	346
Figura 14.2.1	Horno de refinería de petróleo.	347
Figura 14.2.2	Esquema de tubería a estudiar.	347
Figura 14.2.3	Función de la temperatura respecto al radio y longitud de tubería.	353
Figura 14.3.1	Tipos de mallado.	354
Figura 14.3.2	Pantalla de comando.	355
Figura 14.3.3	Pantalla EDP en 2D.	356
Figura 14.3.4	Pestaña de selección de modelo matemático.	356
Figura 14.3.5	Diseño de pieza 2D.	357
Figura 14.3.6	Dimensiones de la placa.	357
Figura 14.3.7	Condiciones de frontera Dirichlet para las semicírculos.	358
Figura 14.3.8	Condiciones de frontera Dirichlet para las paredes rectangulares.	358
Figura 14.3.9	Parámetros para la EDP.	358
Figura 14.3.10	Mallado.	359
Figura 14.3.11	Solución de la EDP de forma gráfica.	359
Figura 14.3.12	Solución gráfica de la EDP.	360
Figura 15.1.1	Esquema compresor.	361
Figura 15.2.1	Intercambiador de calor.	363

Parte I

Prefacio

Problemática

Una materia indispensable para el desarrollo de cualquier Ingeniero Químico es aquella donde se empiezan a combinar y dar un sentido físico a todos los conocimientos adquiridos desde matemáticas, física, química e incluso métodos numéricos, una de ellas son los **fenómenos de transporte**. Dicha materia es una de las más complicadas porque se debe recordar muchas definiciones, términos, simbología, leyes e incluso hipótesis. Muchos profesores que la enseñan e incluso alumnos en pleno desarrollo de licenciatura ocupan como base el famoso libro Fenómenos de transporte de Bird, R., Stewart, W. y Lightfoot, E., [1], siendo este un libro excepcional, aunque a la vez es uno de los más complejos de entender, esto es debido a que se omiten varios pasos algebraicos e identidades que como alumno en pleno desarrollo ingenieril no llega a comprenderse bien, causando muchas veces confusión al interpretar lo que representan las ecuaciones que se deducen, ya sea de forma aritmética (como ecuación) o de forma gráfica. Además, en algunos ejemplos se hace caso omiso de aplicaciones de casos reales. Es por ello, que con este trabajo se pretende entender más a fondo los fenómenos de transporte, explicados de una forma sencilla, clara, precisa y sobre todo, sin omitir ningún paso en el proceso, con el objetivo de que el alumno entienda mejor el origen de las variables y el porqué de las mismas; Implementando un software llamado MATLAB-2020a que ayude al alumno a llegar de manera más rápida y dinámica a la solución de ecuaciones, ya que se ha visto que los problemas que se plantean a lo largo de la carrera son en **estado estacionario** y con muchas consideraciones de **idealidad** cuando en la vida cotidiana no es así, surgiendo las famosas **ecuaciones diferenciales parciales** las cuales también se resolverán y programarán para que el alumno comprenda y pueda empezar a desarrollar sus propios códigos o incluso optimizar éstos, con esto se pretende que las nuevas generaciones reconozcan alcances y propongan mejoras al sistema a través de una reflexión constante durante el planteamiento de ecuaciones para la resolución de problemas optimizando cálculos [1].

Pregunta de investigación

Con la realización de este documento ¿se podrá comprender mejor los fenómenos de transporte y el cómo optimizar los cálculos con la implementación del software MATLAB-2020a?

Alcances

Se implementará el software de MATLAB para optimizar los cálculos sobre problemas relacionados acerca de los fenómenos de transporte, haciendo que sean más rápido, con menos margen de error y el lector vaya desarrollando la capacidad de empezar a implementar algoritmos que permiten encontrar una solución numérica o gráfica a ecuaciones que analíticamente serían muy tardas o complejas de desarrollar. MATLAB es un software de paga, pero gracias a la oportunidad de estudiar en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) permite obtener el software mediante una versión para estudiantes.

Limitaciones

No abarcar el fenómeno de transporte de transferencia de masa, ya que el documento sería bastante extenso para su revisión a profundidad.

Justificación

A lo largo de la carrera de **Ingeniería Química** se ha venido estudiando y preparando al alumno, bajo la disciplina de las **Operaciones Unitarias**, las características, los fundamentos y los métodos de cálculo sobre los procesos y equipos de transporte de fluidos, intercambiadores de calor, separaciones mecánicas, transferencia de masa y reactores, ya que la Ingeniería Química trata de procesos industriales en los que las materias primas se transforman o separan en productos útiles [2]. Dados los objetivos de las operaciones unitarias, y los requerimientos organizativos del plan, así como los programas de estudio, estas temáticas se imparten en diferentes semestres de forma independiente. La literatura abarca información acerca de la mecánica de los fluidos, los procesos de transferencia de calor y masa, es suficientemente amplia y, en los últimos años, ha alcanzado una gran importancia siendo la base de toda ingeniería de procesos, sin embargo, debido a las limitaciones de tiempo que exigen los estudios de licenciatura, no es posible abarcar todo el temario en un solo semestre de carrera universitaria debido a que cada año se incrementa y se enriquece al ser humano con conocimiento. Es por ello que, en la enseñanza de la Ingeniería Química, existe un interés creciente por consolidar el dominio de los principios fundamentales que facilite a los egresados asimilar los avances teóricos, prácticos en el campo de la tecnología química, haciendo énfasis en que el alumno debe empezar a ser autodidacta e investigar por cuenta propia, ya que muchos libros manejan la idealidad, cuando en la realidad los modelos son más complejos y no se pueden resolver de una manera analítica.

Cada día es más evidente que el conocimiento de las leyes básicas de transporte de cantidad de movimiento, de energía calorífica y de masa, adquieren gran importancia en el análisis de sistemas de ingeniería. Pues fue hasta el año de 1960 cuando fue publicado por Bird, R., Stewart, W. y Lightfoot, E., el famoso libro de **Fenómenos de Transporte** [1], donde se consolidó por primera vez como una disciplina perteneciente a las ciencias ingenieriles y se añadió al plan de estudio de Ingeniería Química en varias universidades. Donde esta disciplina se enfoca a las leyes naturales que gobiernan los procesos de transporte, ya que, si se desea mejorar la operación de un equipo es necesario entender qué ocurre en éste desde un nivel atómico hasta macroscópico, para proceder a tomar la decisión más adecuada para los cálculos correspondientes.

Desde un punto de vista práctico, cuando el ingeniero desea diseñar y/u optimizar algún equipo o proceso se debe considerar su capacidad de poder predecir matemáticamente la cantidad de calor, masa o movimiento, que se forma y eso únicamente se logra mediante el **transporte molecular**, mejor conocidos como **gradientes de potencial**. Para el estudio del mecanismo de transferencia de cantidad de movimiento el gradiente de potencial está expresado en términos del **gradiente de transporte molecular** o **gradiente de velocidad** (cuando la viscosidad del fluido es constante), para el caso de transferencia de calor será el **gradiente de temperatura**, y finalmente para el caso de transferencia de masa su potencial es el **gradiente de concentración** [3]. El estudio de estos mecanismos son de suma importancia puesto que los principios teóricos combinados con datos experimentales y algunos modelos empíricos, son considerados en el diseño de una gran diversidad de equipos de ingeniería. Gracias a los métodos utilizados en los fenómenos de transferencia es una forma menos costosa y generalmente más confiable de obtener un

acercamiento del comportamiento a nivel molecular hasta un nivel macroscópico [4]. Obviamente no todos los problemas actuales pueden resolverse por los métodos de los fenómenos de transporte de una forma analítica, sin embargo, con la implementación de los sistemas numéricos y la programación hace más fácil el poder resolverlos debido a la gran cantidad de variables que se empiezan a interrelacionar.

Si se les desea dar a los estudiantes de Ingeniería Química, una educación que no sea obsolescente, debemos prepararlos con la comprensión de los métodos de los fenómenos de transporte, para que hagan uso de los métodos de deducción, cálculo y números que aparecen día con día. Tanto por su uso potencial como por su utilidad actual, un curso en **Fenómenos de Transporte** finalmente deberá ser el más útil y práctico en una carrera de licenciatura. El uso de analogías hace el proceso de aprendizaje más sencillo y debido a estas similitudes podemos estudiar tres temas (transferencia de calor, de masa y movimiento) como si fuese uno, partiendo de un simple balance y consideraciones se pueden desarrollar ecuaciones tan sencillas como el saber que la entrada es igual a la salida o tan complejas como el describir la difusión catalítica de un pellet de hematita dentro de un horno de fusión.

En el presente documento se estudian los principios físicos y matemáticos que describen los fenómenos de transporte de transferencia de cantidad de movimiento y de calor, y también un análisis de programación sobre el cómo se puede eficientizar un problema, debido a que, a nivel industrial el tiempo siempre es oro y resolver un problema a mano suele ser tardado y en ocasiones laborioso. Es por eso, que planteando un modelo matemático y programando en un software podemos tener un mejor acercamiento de lo que ocurre en un proceso. Con estos conocimientos, el estudiante cuenta con una herramienta que le permita ampliar los fundamentos teóricos de las operaciones unitarias y sus posibilidades de aplicación. El texto plantea un desarrollo matemático que propicia la accesibilidad de los contenidos, haciendo uso de los principios y generalizaciones matemáticas necesarias que facilitan la comprensión y aplicación de los temas tratados de acuerdo con los objetivos de la disciplina. Para el desarrollo de los problemas, de una manera numérica, también se ocupó el sistema operativo **MATLAB-2020a**, del cual se dará una breve introducción en cuanto a su uso, así como, conforme se vaya avanzando en la lectura, se empezarán a ver con mayor profundidad ciertos comandos, por otro lado, gracias a que tiene una gran librería, es de fácil uso y sobre todo se pueden programar modelos matemáticos de diversa complejidad. Cabe recalcar que un software, cual sea, hará lo que se le pida, y arrojará un resultado numérico o algún comportamiento gráfico, pero quien debe saber qué está programando, desde un análisis dimensional correcto (ya que muchas veces por no hacerlo correctamente se obtienen números excesivamente grandes o irreales), hasta el poder interpretar el resultado obtenido, teniendo el último criterio, siempre será uno mismo.

”Siempre la generación más joven de profesionistas es la que ve el futuro con mayor claridad y es la que debe construir su realidad sobre una herencia imperfecta [1]. ”

Objetivo general

Desarrollar de una manera ordenada, desglosada, sencilla, problemas planteados y ecuaciones sobre los fenómenos de transporte siendo: **movimiento** y **calor**. Así como la solución de ellos de forma analítica y numérica.

Objetivo específicos

- Desarrollar los conocimientos previos para el entendimiento de los fenómenos de transporte.
- Introducir al lector sobre la resolución de las ecuaciones diferenciales parciales
- Conducir al lector sobre los métodos numéricos y programación en el software MATLAB-2020a.
- Desarrollar el primer fenómeno de transporte que se estudia, en cantidad de movimiento.
- Desarrollar el segundo fenómeno de transporte que es transferencia de energía.
- Agregar anexos donde se incluyan las ecuaciones que se utilizarán a lo largo de cada fenómeno de transporte.

Hipótesis

Con este documento, el alumno comprenderá mejor los fenómenos de transporte, el cómo solucionarlos de forma tanto analítica como numérica. Llegará a plantear los límites para establecer una ecuación que permita definir todo el sistema, partiendo de un análisis microscópico hasta llevarlo a un análisis macroscópico.

Marco teórico

Los procesos industriales tienen como objetivo principal la transformación de insumos o materias primas en productos o bienes de consumo, siendo unos de los sectores más importante de un país o mejor dicho, del mundo entero [5]. Desde que el ser humano apareció, ha tenido la habilidad de ir creando y fabricando instrumentos de uso cotidiano y de trabajo, desde una lanza de obsidiana, un martillo o inclusive su misma ropa, es por ello que empezaron a surgir talleres artesanales donde se ofrecía dicho servicio a cambio de algún otro bien, como productos agrícolas. Surgiendo así el principio de la empresa industrial: *la transformación de materias primas obtenidas de la naturaleza en productos finales de consumo*. Con el pasar del tiempo han ido surgiendo nuevas tecnologías y complejos procesos físicos y químicos en la producción, haciendo que las empresas artesanales vayan desapareciendo y surjan industrias de talla global, esto debido a la competitividad que existe en el mercado.

A finales del siglo XIX surgió como disciplina la **Ingeniería Química**, que se desarrollaba a partir de quienes practicaban la industria química. Todo inicia con la **Revolución Industrial**, ya que la demanda creció, tanto respecto a la cantidad como a la calidad de productos, significando dos cosas: que el tamaño de la actividad junto con la eficiencia debía aumentar y que los procesos que antes eran producidos por lotes, debían modificarse para ser procesos continuos. Es por ello, que la Ingeniería Química se enfoca en resolver los problemas de una industria cuyos procesos de fabricación resultaban inoperantes y en muchos casos eran simplemente versiones a gran escala de equipo de laboratorio. De esta forma, se dio importancia a la utilización de resultados de experimentos del laboratorio para el diseño de equipos de procesos que cumpliera el ritmo industrial de producción.

La industria en la que está más enfocado un Ingeniero Químico es la **Industria Química**, ya que se rige por el principio de empresa industrial. Para obtener los cambios deseados de la materia prima se debe

considerar que los procesos químicos, físicos y la combinación de ambos siendo los fisicoquímicos, se deben clasificar en una serie de etapas individuales y diferentes llamadas **operaciones unitarias** [6]. Estas operaciones unitarias son comunes a todos los tipos de industrias de proceso. La definición de Ingeniero Químico se puede establecer como *la profesión que requiere la aplicación creativa de principios científicos tales como los conceptos de masa, energía, cantidad de movimiento y cambios fisicoquímicos en la materia.*

Un proceso de fabricación típico está formado por combinaciones de operaciones unitarias, requiriéndose entonces la misma habilidad para diseñar cada unidad que para el diseño de procesos. El origen de los conocimientos en operaciones unitarias fue en gran parte empírico, y además, en la práctica se adoptaron formas de análisis y diseños específicos para cada proceso industrial particular. Es decir, si bien se fueron conociendo los fundamentos de cada etapa unitaria, era menester un conocimiento enciclopédico para abarcar todas las aplicaciones de la misma. Es por ello que las operaciones unitarias se empezaron a fundamentar en principios científicos y técnicas [2]. Algunos de ellos son leyes físicas y químicas elementales que intervienen en el transporte de masa, energía y cantidad de movimiento.

La **ciencia ingenieril** ha dado una mayor relevancia a los conocimientos matemáticos con respecto a los fundamentos empíricos, pero a su vez, busca encontrar un equilibrio entre ambas que permita desarrollar conceptos fundamentales en el diseño de la enseñanza de la ingeniería. Para expresar concisamente los procesos de ingeniería se le debe dar una forma cuantitativa, sólo así, se puede formular, interpretar y usar un principio físico fundamental o un experimento y luego llevarlo a una aplicación real, fuera del laboratorio. Esta capacidad es diferente de la habilidad matemática y se llama **análisis**. El análisis se puede aplicar a multitud de problemas diferentes, no sólo de ingeniería, siendo un elemento necesario para la formación del ingeniero. Esta expresión cuantitativa se aplica a las situaciones de interés para obtener modelos matemáticos. Los modelos matemáticos permiten observar el comportamiento y el efecto de las variables sobre el mismo. Por lo tanto, la descripción matemática de un fenómeno es una manera concisa y efectiva de comunicar la información y además puede manipularse con las reglas formales para proporcionar información esencial de la evolución. Si se comprende el uso de un modelo matemático, se podrá definir, organizar y entender, tanto las leyes fundamentales como cualquier problema de ingeniería química.

Para realizar un análisis ingenieril sobre los fenómenos de transporte se debe conocer tres leyes fundamentales de la físicas:

1. El transporte de cantidad de movimiento (flujo viscoso de fluidos), basado en el principio de conservación de la cantidad de movimiento.
2. El transporte de energía calorífica (conducción del calor en sólidos y fluidos, convección, radiación), basado en la ley de conservación de la energía.
3. El transporte de materia (difusión ordinaria, térmica, de presión), basado en el principio de conservación de la materia.

Junto con otros postulados fundamentales de la física, tal como la gravitación, permitirían obtener una descripción matemática de cualquier fenómeno. Estas tres leyes físicas en Ingeniería Química describen los sujetos de mecánica de fluidos, transferencia de calor y masa, usualmente denominados, **Fenómenos de Transporte**. El primer curso especializado en los fenómenos de transporte dentro del plan de estudio de Ingeniería Química, ocurrió probablemente con la publicación en 1923 del libro *Principios de Ingeniería Química* de Walker, Lewis y McAdam [7]. Siendo la primera vez que se consideraba que las técnicas involucradas en la producción de productos específicos eran en gran medida únicas, reconociendo formal-

mente que ciertos procesos físicos o químicos así como los principios fundamentales correspondientes, eran comunes a muchas tecnologías industriales muy diferentes.

El resultado de esta nueva visión, fue la aparición gradual de la mecánica de fluidos y el transporte, la transferencia de calor y la transferencia de masa, conceptos que tanto en la docencia como en la investigación, son la base física o química fundamental para muchas de las operaciones unitarias. Es cierto que muchas de las operaciones unitarias son equipos con una alta complejidad geométrica a la hora de diseñarlas para la industria, ya que intervienen tanto la transferencia de calor, como la de masa y movimiento, sin dejar de lado las reacciones químicas causantes de que las ecuaciones exactas no se puedan resolver, teniendo que recurrir, al **ensayo y error** o a la **experiencia misma**.

Para los Ingenieros Químicos fue aceptable comenzar a ocupar la premisa del **empirismo**, para los procesos de transporte a escala de las operaciones, sin embargo, debían comprender al menos lo que ocurría con los principios físicos que se llevaban a cabo dentro de la operación. Es por ello que en el año de 1960 apareció el histórico libro de Bird, R., Stewart, W. y Lightfoot, E., llamado *Fenómenos de Transporte* [1], donde se introdujo no sólo la idea de un análisis detallado de procesos de transporte en el nivel continuo, sino que también enfatizó la similitud matemática de las ecuaciones de campo gobernantes, junto con las aproximaciones constitutivas más simples para mecánica de fluidos y transferencia de calor y masa. La presentación de Bird et al. [1] estaba principalmente centrado en resultados y soluciones más que en los métodos de solución o análisis. Sin embargo, fue pionero dentro de la comunidad química de ingenieros proponiendo el manejo de las matemáticas sólidas [7].

Los antecedentes produjeron las transiciones más recientes en nuestras formas de pensar y comprender los procesos de transporte. Actualmente, se pretende optimizar los cálculos siendo lo más exactos y precisos a la realidad mediante el uso de softwares especializados en la simulación para un análisis detallado y poder comprender el cómo las variables se van colacionado para transformar un diseño de planta piloto a una red compleja industrial. Es por ello la importancia de la labor de los Ingenieros Químicos, ya que desempeñan un papel importante en la aplicación, comprensión, diseño, simulación y solución de los procesos de mecánica de fluidos, transferencia de calor y masa a una gran escala dentro de las industrias, razón por la cual el crecimiento y desarrollo de un país se ve favorecida.

Parte II

Conocimientos Previos

Capítulo 1

Introducción a los conocimientos previos

Con la finalidad de poder introducir directamente a las deducciones matemáticas, físicas y aplicaciones de los fenómenos de transporte, se debe tener en consideración ciertas capacidades y conocimientos que a lo largo de la carrera se han adquirido.

En el presente documento, se dará una breve recapitulación de los conocimientos mínimos necesarios para el manejo de los fenómenos de transporte, durante el desglose de los apartados del documento, se podrán encontrar ciertos ejercicios con su respectiva teoría, la cual se ocupara como planteamiento para la resolución de problemas enfocados al manejo de los fenómenos de transporte. Por otra parte, con esta obra, se pretende que el alumno fomente en sí mismo, el ser autodidacta, que tenga interés en investigar más a fondo y con ello favorezca la adquisición de habilidades que le permitan actuar de manera más crítica y creativa.

1.1. Álgebra lineal

El álgebra lineal, se puede decir en un aspecto ingenieril, que es una matemática ya aplicada, siendo una de las ramas de las matemáticas más paradójicas por combinar una aparente simplicidad con un enorme campo de aplicación en las ciencias física y aportando en gran medida para modelos matemáticos prácticos. La palabra **lineal**, en el aspecto matemático, tiene un significado diverso. Mucha de la teoría de el álgebra lineal viene conjunta con las propiedades de la línea recta, la cual se puede representar en un plano xy mediante la siguiente expresión algebraica

$$y = mx + b \tag{1.1}$$

Donde se le conoce como una ecuación lineal en las variables x y y . Normalmente, se define una **ecuación lineal** en las n variables x_1, x_2, \dots, x_n como aquella que se puede expresar en la forma [8]

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \tag{1.2}$$

Donde a_1, a_2, \dots, a_n y b son constantes reales. Cabe mencionar que todas las ecuaciones lineales se presentan únicamente a la primera potencia y no aparecen como argumentos para funciones trigonométricas.

Tabla 1.1.1: Ejemplo de ecuaciones lineales y no lineales con sus respectivos criterios.

Ecuaciones Lineales	Ecuaciones No Lineales
$2x + 3y = 10$ $z = 2x + 3y$	$3y = 10 - \sin 3x$ $z = 2x + 3y^3$
$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{7}{2}x_4 = -1$	$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \sqrt{\frac{7}{2}}x_4 = -1$

Para hallar la solución de una ecuación lineal, en una sucesión de n números s_1, s_2, \dots, s_n tales que la ecuación se satisface cuando se hace la sustitución $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$. El conjunto de todas las soluciones de la ecuación es un **conjunto de soluciones**. Para encontrar la solución de las ecuaciones lineales se debe establecer un sistema que permita la resolución con lo antes mencionado, por lo que puede existir tres casos posibles [9], como se muestra en la tabla 1.1.2. En donde el sistema de ecuaciones que se presentan como ejemplo es un sistema de ecuaciones de 2×2 el cual es el más conocido, pero mientras más variables se vayan sumando más ecuaciones e incógnitas aparecerán, teniendo como un sistema arbitrario de m ecuaciones lineales en n incógnitas

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \vdots + \vdots + \vdots + \vdots &= \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

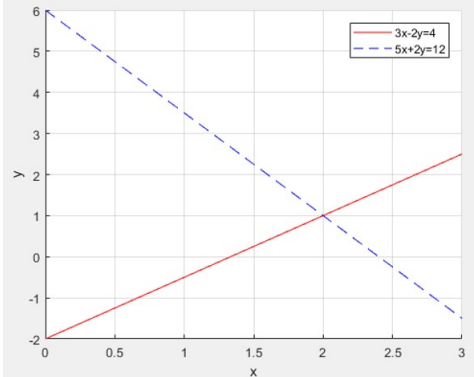
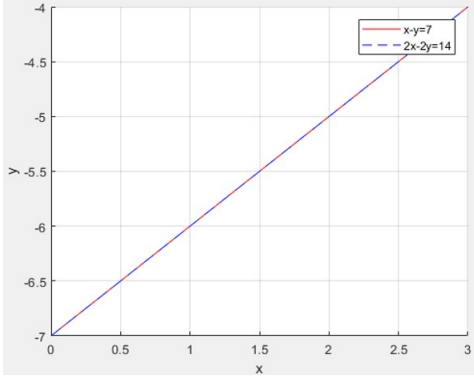
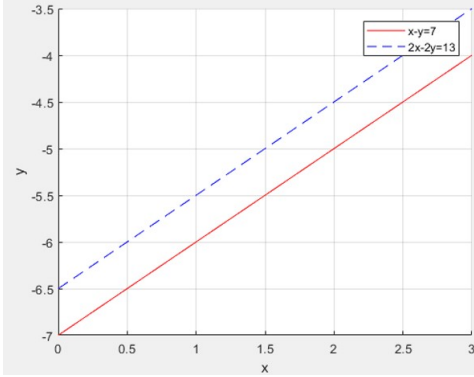
Donde x_1, x_2, \dots, x_n son las incógnitas, a indica el coeficiente de las variables y b es la variable independiente. Los subíndices dobles en los coeficientes de las incógnitas son utilizados para indicar una ubicación del coeficiente en el sistema, siendo el primer subíndice el que indica la ecuación en la que se encuentra, mientras que el segundo ubica la incógnita que está multiplicando. Si se mentaliza la ubicación de los signos de más (+) y de menos (-), las incógnitas (x_n) y los signos de igual (=), es posible abreviar un sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas escribiendo únicamente el arreglo rectangular como:

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Conocida como **matriz aumentada** para el sistema. Donde el concepto de **matriz** aparece en una gran variedad de aplicaciones de las matemáticas, siendo un modelo excelente para describir los llamados problemas lineales desde sistemas mecánicos hasta la solución de las ecuaciones diferenciales parciales, como establece Alain y Saucez [10]. Así mismo, el método de solución para este sistema de ecuaciones sería el de **eliminación de Gauss-Jordan**. Este método consiste en reducir por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones, hasta que quede una **matriz identidad**, usando las operaciones elementales sobre los renglones las cuales son:

1. Multiplicar uno de los renglones por una constante diferente de cero.
2. Intercambiar dos de los renglones.
3. Sumar un múltiplo de uno de los renglones a otro renglón.

Tabla 1.1.2: Tipos de soluciones, ejemplos y representaciones gráficas.

Soluciones	Sistema de ecuaciones	Gráfica
<p>Única Las rectas tienden a cruzarse en un punto</p>	$3x - 2y = 4$ $5x - 2y = 12$	
<p>Número infinito Ambas rectas tienden a sobreponerse, una encima de la otra.</p>	$x - y = 7$ $2x - 2y = 14$	
<p>Sin Solución Las rectas siempre se encuentran en paralelo, haciendo que nunca se junten</p>	$x - y = 7$ $2x - 2y = 13$	

Algunas notaciones que se llegan a utilizar cuando se resuelven este tipo de matrices son:

1. $R_i \rightarrow cR_i$ que indica reemplazara el i -ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicando por c .
2. $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ significa que se sustituye el j -ésimo renglón por la suma del renglón j más el renglón i multiplicado por c .
3. $R_i \leftrightarrow R_j$ quiere decir que se están intercambiando los renglones i y j .

Ejemplo 1.1.1: La papelería

Un día van tres amigos a una papelería. Juan compra un lápiz, 3 lapiceros y 3 gomas, al final pago 24 pesos. Fernanda compra un lápiz, 4 lapiceros y una goma, pagando 25 pesos. Para finalizar Alberto compra 2 lápices, 5 lapiceros y 5 gomas, le llegan a cobrar 41 pesos. Si cada amigo quiere determinar cuánto cuesta cada artículo.

Resolución:

1. Primero se establece un sistema de ecuaciones, denominado a lápices como x , a lapicero como y y a goma como z .

$$\begin{array}{lcl} \text{Juan} & : & x + 3y + 3z = 24 \\ \text{Fernanda} & : & x + 4y + z = 25 \\ \text{Alberto} & : & 2x + 5y + 5z = 41 \end{array}$$

2. Se realiza la matriz aumentada, con los coeficientes de cada incógnita.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 24 \\ 1 & 4 & 1 & 25 \\ 2 & 5 & 5 & 41 \end{array} \right)$$

3. Se resuelve la matriz con las operaciones elementales de renglón. Empezando primero por restarles el renglón 1 al renglón 2 y el doble del renglón 1 al renglón 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 24 \\ 1 & 4 & 1 & 25 \\ 2 & 5 & 5 & 41 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 24 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 41 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 24 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \end{array} \right)$$

4. Al renglón 3 le sumamos el renglón 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 24 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 24 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right)$$

5. Multiplicando el renglón 3 por $-1/3$. Nota: los renglones y matrices no se pueden dividir, solo

multiplicar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 24 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -3 & \vdots & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1/3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 24 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

6. Se suma al renglón 2 el doble del renglón 3 y a restarle al renglón 3 el triple del renglón 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 24 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 24 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \vdots & 18 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

7. Para finalizar, se resta el triple del renglón 2 al renglón 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \vdots & 18 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

8. Quedando la matriz identidad, por lo cual se puede deducir que el precio de cada artículo es de:

$$\begin{aligned} \text{Juan} & : x = 3 \\ \text{Fernanda} & : y = 5 \\ \text{Alberto} & : z = 2 \end{aligned}$$

Una matriz se compone de dos aspectos: Los **vectores renglón o fila** (**n**) de n componentes y los **vectores columna** (**m**) de m componentes. Los cuales al hacer un producto cruz de $m \times n$ da como resultado una matriz. En cambio, si m tiene el mismo número de elementos que n dará como resultados una matriz cuadrada.

Tabla 1.1.3: Tipos de vectores.

Vector renglón o fila	Vector columna
$(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Explicado esto, se puede utilizar un método distinto para resolver un sistema de ecuaciones, el cual consiste en usar una **matriz cuadrada**, y obtener sus **determinantes** (**D**), la cual se obtiene con la siguiente formula (sólo válida para Matrices de 3×3)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Para hallar la determinante de una matriz 3 x 3, se debe simplificar (así como para cualquier matriz de $n \times n$) a una matriz de 2 x 2, mediante la siguiente ecuación

$$|D| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

Antes de resolver para $|D|$ se debe identificar la diagonal principal y la diagonal secundaria para una matriz 2 x 2. La **diagonal principal** va de la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha, mientras que la **diagonal secundaria** va de la esquina superior derecha hasta la esquina inferior izquierda. Por poner un ejemplo, para la ecuación (1.5) la diagonal principal estará dada por los colores en azul y la diagonal secundaria los colores rojo

$$|D| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Para evaluarla $|D|$ va a ser la diferencia de productos de la diagonal principal menos los productos de la diagonal secundaria.

$$|D| = a_{11} (a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{32}) - a_{12} (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) \quad (1.6)$$

Una vez obtenida, indicara si los sistemas son singulares o mal condicionados, dicho de otra forma, expresa la existencia y la unicidad de los resultados de los sistemas de ecuaciones lineales. La determinante puede tener tres resultados:

1. La determinante de una matriz es un número real.
2. Un determinante con valor de cero indica que se tiene un sistema singular. Esto ocurre cuando el sistema de ecuaciones al graficarlo las rectas que se generan son paralelas entre si o se contraponen, haciendo que su pendiente sea la misma.
3. La determinante tiene un valor cercano a cero indica que se tiene un sistema mal condicionado, que es cuando es difícil identificar el punto exacto en que se insertan las ecuaciones lineales.

La **función determinante (def)** se define con la suma de todos los productos elementales con signos tomados de una matriz A . Y una vez que sea obtenida se puede decir que es un **sistema de Cramer** [8] [9], la cual debe cumplir dos requisitos:

1. $n = m$ (la matriz A es cuadrada).
2. La matriz A es invertible [8], $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot Adj A$.

En este caso siempre existe una solución única al sistema

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

Donde \mathbf{A} es la matriz cuadrada de los coeficientes, \mathbf{X} son las incógnitas y \mathbf{b} son los términos independientes, dados en un vector columna. Donde la regla de Cramer está dada por

$$X_1 = \frac{D_1}{\det A}, X_2 = \frac{D_2}{\det A}, \dots, X_n = \frac{D_n}{\det A} \quad (1.7)$$

Donde D_j es el determinante de la matriz obtenida al reemplazar la columna j de A por el vector columna \mathbf{b} [8].

Ejemplo 1.1.2: La papelería II

Ocupando los datos del ejemplo 1.1.1, pero resolver por el método de Cramer.

Resolución:

1. Estableciendo e un sistema de ecuaciones, denominado a lápices como x , a lapicero como y y a goma como z .

$$\begin{array}{lcl} \text{Juan} & : & x + 3y + 3z = 24 \\ \text{Fernanda} & : & x + 4y + z = 25 \\ \text{Alberto} & : & 2x + 5y + 5z = 41 \end{array}$$

2. Realizando la matriz cuadrada de solo los coeficientes de las incógnitas, y un vector columna.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 24 \\ 25 \\ 41 \end{pmatrix}$$

3. Se obtiene la *determinante*.

- a) Para ello, se ocupa la ecuación (1.5) en la matriz A .

$$|D| = 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

- b) Para evaluarla va a ser la diferencia de productos de la diagonal principal menos la diagonal secundaria, ecuación (1.6).

$$|D| = 1[(4 \cdot 5) - (1 \cdot 5)] - 3[(1 \cdot 5) - (1 \cdot 2)] + 3[(1 \cdot 5) - (4 \cdot 2)] = -3$$

4. Determinando la primera incógnita que es x , para la cual se sustituye la primera columna por los términos independientes.

$$|D_x| = \begin{pmatrix} 24 & 3 & 3 \\ 25 & 4 & 1 \\ 41 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

- a) Ocupando la ecuación (1.5), para la **determinante** respecto a x .

$$|D_x| = 24 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 25 & 1 \\ 41 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 25 & 4 \\ 41 & 5 \end{vmatrix}$$

- b) Para evaluarla se ocupa la ecuación (1.6).

$$\begin{aligned} |D_x| &= 24[(4 \cdot 5) - (5 \cdot 1)] - 3[(25 \cdot 5) - (1 \cdot 41)] + 3[(25 \cdot 5) - (41 \cdot 4)] \\ &= -9 \end{aligned}$$

- c) Una vez obtenido $|D_x|$, se divide entre la determinante principal $|D|$ para obtener el valor de la incógnita x , ecuación (1.7).

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-9}{-3} = 3$$

5. Para determinar la segunda incógnita, y , se sustituye la segunda columna por los términos independientes.

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 1 & 25 & 1 \\ 2 & 41 & 5 \end{vmatrix}$$

- a) Ocupando (1.5), para la **determinante** respecto a y .

$$|D_y| = 1 \begin{vmatrix} 25 & 1 \\ 41 & 5 \end{vmatrix} - 24 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 25 \\ 2 & 41 \end{vmatrix}$$

- b) Para evaluarla se ocupa la ecuación (1.6).

$$\begin{aligned} |D_y| &= 1[(25 \cdot 5) - (1 \cdot 41)] - 24[(1 \cdot 5) - (1 \cdot 2)] + 3[(1 \cdot 41) - (25 \cdot 2)] \\ &= -15 \end{aligned}$$

- c) Una vez obtenido $|D_y|$ se divide entre la determinante principal $|D|$ para obtener el valor de la incógnita y , ecuación (1.7).

$$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{-15}{-3} = 5$$

6. Para determinar la tercera incógnita, z , se sustituye la tercera columna por los términos independientes.

$$|D_z| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 24 \\ 1 & 4 & 25 \\ 2 & 4 & 41 \end{vmatrix}$$

- a) Ocupando (1.5), para la **determinante** respecto a z .

$$|D_z| = 1 \begin{vmatrix} 4 & 25 \\ 5 & 41 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 25 \\ 2 & 41 \end{vmatrix} + 24 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

- b) Para evaluarla se ocupa la ecuación (1.6).

$$\begin{aligned} |D_z| &= 1[(41 \cdot 4) - (25 \cdot 5)] - 3[(1 \cdot 41) - (2 \cdot 45)] + 24[(1 \cdot 5) - (4 \cdot 2)] \\ &= -6 \end{aligned}$$

- c) Una vez obtenido la D_z se divide entre la determinante principal D para obtener el valor de la incógnita z , ecuación (1.7).

$$z = \frac{|D_z|}{|D|} = \frac{-6}{-3} = 2$$

7. Por último, ordenan los resultados.

$$\begin{array}{lcl} \text{Juan} & : & x = 3 \\ \text{Fernanda} & : & y = 5 \\ \text{Alberto} & : & z = 2 \end{array}$$

La expresión matemática para cualquier determinante de $m \times n$ sea A una matriz cuadrada se denota como [9]

$$Det_A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k} \quad (1.8)$$

Entre mayor número de incógnitas se establezcan, la matriz crecerá haciendo que el proceso sea más tardado de una forma manual, es por ello que se opta por usar métodos numéricos y/o programas que ayuden a la resolución.

1.2. Química

En la literatura y bajo la experiencia de muchos profesores, doctores e investigadores se dice que la **química** es considerada como la ciencia central, ya que se encuentra presente en el día con día, desde algo sencillo como utilizar un quitasarro para destapar drenajes hasta algo más complejo como el cuerpo humano. Es por eso que en la enseñanza y aplicación de los fenómenos de transporte no puede faltar esta ciencia. Según la hipótesis del químico británico John Dalton (1766-1844) propuso que toda la materia está hecha de pequeñas partículas, las cuales llamó **átomos**, no obstante, ciertos hallazgos hechos en el siglo XX concluyeron que los átomos están compuestos por tres partículas aún más pequeñas llamadas **electrones** (e^-), **protones** (P^+) y **neutrones** (N). Un concepto fundamental que se enseña desde el nivel educativo básico y que su manejo es primordial en la resolución de problemas químicos, es el **número atómico** (**A**) siendo definida como *el número total de neutrones y protones que se encuentran dentro del núcleo de un átomo de un elemento* [11]

$$\begin{aligned} A &= P^+ + N \\ &= e^- + N \end{aligned}$$

El número atómico de los elementos viene establecido en la tabla periódica. Cuando dichos elementos se llegan a juntar entre sí, se forman los **compuestos**. Entonces la suma del número atómico de cada uno de los elementos recibirá el nombre de **peso atómico** (**PM**).

$$PM = \sum_{i=1}^n A \quad (1.9)$$

Para la formación de compuestos se debe llevar a cabo un proceso químico, en el cual se combinan dos o más sustancias (reactivos) para formar nuevos productos con propiedades físicas y químicas diferentes, a esto proceso se define como **reacción química**. La mayoría de las reacciones químicas, no sólo llegan a ocurrir entre los sólidos, líquidos o gases puros, sino entre iones y moléculas disueltas en agua o en otros disolventes. En el estudio cuantitativo de una disolución (soluta + disolvente) se requiere que se conozca su concentración, existiendo varios tipos de unidades para su medición. A continuación se presentarán las más comunes [11] [12].

El primero es **porcentaje en masa** el cual indica *la relación de la masa de un soluto en la masa de la disolución, multiplicada por 100 %*

$$\text{Porcentaje masa} = \frac{\text{masa}_{\text{solute}}}{\text{masa}_{\text{disol}}} 100 \% \quad (1.10)$$

La segunda unidad de medición es la **fracción molar (x)** la cual expresa *la proporción en que se encuentra cierta sustancia respecto a los moles (n) totales de la disolución*. La fracción molar es adimensional y la suma de las fracciones debe ser igual a 1

$$X_w = \frac{n_w}{\sum_{i=1}^n n_{\text{componente}}} \quad (1.11)$$

La **molaridad (M)** se define como *el número de moles del soluto en un litro de disolución*

$$M = \frac{n}{\text{Volumen}_{\text{disol}}} = \left[\frac{\text{moles}}{\text{Lt}_{\text{disol}}} \right] \quad (1.12)$$

Por último, es la **molalidad (m)** que es *el número de moles de soluto disueltos en 1 kg de disolvente*

$$m = \frac{\text{Moles}_{\text{solute}}}{\text{Masas}_{\text{solvente}}} = \left[\frac{\text{moles}}{\text{kg}_{\text{solvente}}} \right] \quad (1.13)$$

La diferencia entre molaridad y molalidad radica en qué la primera, para casos experimentales, es más fácil su medición volumétrica utilizando matraces volumétricos y probetas graduadas. Por su parte, la molalidad es **independiente de la temperatura**, a diferencia de la molaridad que el volumen de la disolución aumentará al existir un incremento en la temperatura, causando inexactitud a la hora experimental.

Ejemplo 1.2.1: Aplicación de las unidades de concentración

En el laboratorio de química analítica se está llevando a cabo cierta práctica de laboratorio, la temperatura del laboratorio marca que se encuentra a 16 °C. En la práctica se van a disolver 3.5 g de sal de mesa (NaCl, $\rho = 2160 \text{ kg/m}^3$) en 250 mL en agua ($\rho = 999 \text{ kg/m}^3$). El profesor indica que al final de la clase deben entregar la fracción molar por componente y molalidad de la mezcla obtenida.

Resolución:

1. Determinar la masa atómica de los compuestos NaCl y agua.

a) Masa atómica de NaCl.

$$\begin{aligned} PM_{\text{NaCl}} &= A_{\text{Na}^+} + A_{\text{Cl}^-} \\ &= 22.98 \frac{\text{g}}{\text{mol}} + 35.45 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \\ &= 58.43 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \end{aligned}$$

b) Masa atómica del Agua.

$$\begin{aligned} PM_{\text{Agua}} &= 2A_{\text{H}^+} + A_{\text{O}^{-2}} \\ &= 2 \left(1 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \right) + 15.99 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \\ &= 17.99 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \end{aligned}$$

2. Se procederá a obtener el número de moles de ambos compuestos.

a) Número de moles de NaCl.

$$\begin{aligned} n_{NaCl} &= \frac{masa_{NaCl}}{PM_{NaCl}} \\ &= \frac{3.5 \text{ g}}{58.43 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 0.0599 \text{ mol} \end{aligned}$$

b) Número de moles de Agua.

1) Convirtiendo el volumen a masa usando su densidad.

$$\begin{aligned} masa &= \rho \cdot V \\ &= \left(0.999 \frac{\text{g}}{\text{mL}}\right) (250 \text{ mL}) \\ &= 249.75 \text{ g} \end{aligned}$$

2) Se procede a obtener los moles de agua.

$$\begin{aligned} n_{Agua} &= \frac{masa_{Agua}}{M_{Agua}} \\ &= \frac{249.75 \text{ g}}{17.99 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \\ &= 13.8827 \text{ mol} \end{aligned}$$

3. Para obtener la fracción molar se ocupa (1.11).

a) Fracción molar de NaCl.

$$\begin{aligned} X_{NaCl} &= \frac{n_{NaCl}}{n_{NaCl} + n_{Agua}} \\ &= \frac{0.0599 \text{ mol}}{0.0599 \text{ mol} + 13.8827 \text{ mol}} \\ &= 0.0043 \end{aligned}$$

b) Fracción molar de Agua.

$$\begin{aligned} 1 &= X_{NaCl} + X_{Agua} \\ X_{Agua} &= 1 - X_{NaCl} \\ &= 1 - 0.0043 \\ &= 0.9957 \end{aligned}$$

4. Para calcular molalidad de la mezcla se procede a utilizar la ecuación (1.13), con la variación

de que los 249.75 g de agua se conviertan a kilogramos.

$$\begin{aligned} m &= \frac{n_{NaCl}}{masa_{Agua}} \\ &= \frac{0.0599 \text{ mol}}{0.24975 \text{ kg}} \\ &= 0.2398 \frac{\text{mol}}{\text{kg}} \end{aligned}$$

1.3. Física

Uno de los pilares en el entendimiento del universo es la **física**, esta es una disciplina que demostrar las *causa effectum* de los hechos que ocurren a los alrededores y gracias a la continua experimentación y observación de estos fenómenos, es que los científicos han podido estudiar los cuerpos tanto en reposo como en movimiento, dando paso a deducir las leyes fundamentales con gran aplicación en la ingeniería. En el año 1687 fue publicado por el matemático, físico, astrónomo y teólogo inglés Sir Isaac Newton (1642 – 1726) en su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* tres leyes denominadas **Leyes de Newton** o **Leyes de la Dinámica** [13] las cuales permiten describir el movimiento de cualquier cuerpo relativo al movimiento.

La **primera ley de Newton (Ley de Inercia)** establece que *un cuerpo permanecerá en estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme a menos que una fuerza externa no equilibrada actúe sobre él* [14]. Por ejemplo, un balón de fútbol, el cual está estático hasta que alguien llegue y lo pateé, entonces su estado inicial se verá modificado, ya que cambiara de posición, estar fijo a adquirir movimiento por la aplicación de una fuerza, siendo la patada que se le da. Una vez que el balón fue pateado este adquirirá movimiento, si el balón rodara por un piso de azulejo que acaban de lavar, éste tenderá a recorrer una gran distancia antes de que llegue a pararse completamente. En caso contrario si se hace rodar el mismo balón en un campo de fútbol con pasto, llegará a recorrer una menor distancia, esto es debido a la interacción horizontal, llamada **fricción**. La primera ley es solo aplicable en **casos ideales**, ya que en la vida cotidiana existe la fricción, haciendo que ningún cuerpo este totalmente libre de las fuerzas externas. Newton llamó **inercia** a la propiedad de una partícula que le permite mantenerse en un constante estado de movimiento o reposo.

En virtud de que el estado de un objeto en reposo o en movimiento no será modificado sin la acción de una fuerza de desequilibrio, ahora se debe considerar qué sucede si hay una fuerza resultante. Newton llegó a demostrar que existe una relación entre la fuerza aplicada y el cambio de movimiento en un cuerpo (aceleración resultante), esto es denominado en la **Segunda ley de Newton: la aceleración (a) de un objetivo es directamente proporcional a la suma de fuerzas externas (F) que se este aplicando sobre él e inversamente proporcional a la masa (m) del cuerpo** [13] [14].

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

O también

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (1.14)$$

La ecuación anterior es una expresión vectorial, por lo cual puede contener dirección X , Y y Z .

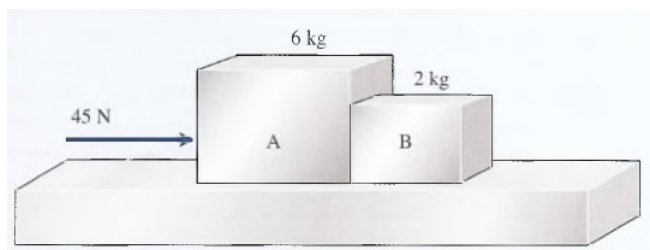


Figura 1.3.1: Movimiento de caja [13].

Ejemplo 1.3.1: Aceleración de cajas

En una industria de autopartes se empacaron dos cajas para su distribución, la caja A tiene una masa de 6 kg en cambio la caja B es de 2 kg. Se le pide a un trabajador mover ambas cajas del almacén al camión de carga. ¿Cuál debería ser su aceleración mínima necesaria si aplica una fuerza de 45 N? Observar la figura 1.3.1. Desprecie las pérdidas por fricción. Obtenido de [13].

Resolución:

1. Despejando de la ecuación (1.14) la aceleración.

$$a = \frac{F}{m}$$

2. Sustituyendo los valores en la ecuación anterior.

$$\begin{aligned} a &= \frac{45 \text{ N}}{6 \text{ kg} + 2 \text{ kg}} \\ a &= 5.6250 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Es común que en la sociedad las palabras masa y peso sean tomadas como sinónimos, sin embargo, no lo son. La masa es la cantidad cuantificada de materia contenida en un cuerpo, en cambio el peso es una fuerza siendo el producto de la masa por gravedad [14]

$$\vec{W}_g = m \cdot \vec{g} \tag{1.15}$$

La gravedad como la aceleración pueden tener tanto signo positivo como negativo. La **gravedad** tendrá signo positivo (+) cuando su dirección sea hacia abajo y signo negativo (-) cuando su dirección sea hacia arriba. La **aceleración** será positiva (+) cuando su velocidad inicial (v_i) sea menor que la velocidad final (v_f), en caso contrario será negativa (-) cuando su velocidad inicial (v_i) sea mayor que la velocidad final (v_f), conocida también como **desaceleración**. La aceleración se define como

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{dv}{dt} \tag{1.16}$$

Donde t_i y t_f representa el tiempo inicial y final, respectivamente, por lo regular, el tiempo inicial se considera como 0, siendo el tiempo de partida. La aceleración también se puede ver como la derivada de la velocidad o la segunda derivada respecto a la distancia

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Donde en este caso x representa la *distancia*.

Ejemplo 1.3.2: Star Trek

En una de las expediciones la nave USS Enterprise el capitán James T. Kirk descubre un nuevo planeta el cual quiere conocer, antes de bajar le dice al general Spock que determine la gravedad y condiciones del planeta, al hacer un escaneo rápido determinan que se le puede clasificar como planeta Tipo B (Gravedad similar a Mercurio $g = 3.7 \text{ m/s}^2$). (a) ¿Cuál sería la masa en dicho planeta? (b) Determinar cuál sería el peso añadido en sus trajes para caminar como si estuvieran en la Tierra ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$) si el capitán Kirk tiene una masa 78 kg y el general Spock de 86 kg.

Resolución:

Inciso (a):

1. La masa de ambos personajes será la misma, ya que esta no varia, lo único que cambia es su peso debido a la gravedad

Inciso (b):

1. Determinar el peso (W_T) de ambos personajes en el planeta tierra, mediante (1.15).

a) Peso del capitán Kirk.

$$\begin{aligned} W_T &= m \cdot g \\ &= (78 \text{ kg}) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\ &= 765.18 \text{ N} \end{aligned}$$

b) Peso del general Spock.

$$\begin{aligned} W_T &= m \cdot g \\ &= (86 \text{ kg}) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\ &= 843.66 \text{ N} \end{aligned}$$

2. Determinar el peso (W_N) de ambos nuevamente, pero con bajo la gravedad del planeta.

a) Peso del capitán Kirk.

$$\begin{aligned} W_N &= m \cdot g \\ &= (78 \text{ kg}) \left(3.7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\ &= 288.60 \text{ N} \end{aligned}$$

b) Peso del general Spock.

$$\begin{aligned} W_N &= m \cdot g \\ &= (86 \text{ kg}) \left(3.7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\ &= 318.20 \text{ N} \end{aligned}$$

3. Realizar una diferencia de pesos entre el obtenido de la Tierra y el del Nuevo Planeta.

a) Peso añadido al traje del capital Kirk.

$$\begin{aligned} W &= W_T - W_N \\ &= 765.18 \text{ N} - 288.60 \text{ N} \\ &= 476.58 \text{ N} \end{aligned}$$

b) Peso añadido al traje del general Spock.

$$\begin{aligned} W &= W_T - W_N \\ &= 843.66 \text{ N} - 318.20 \text{ N} \\ &= 525.460 \text{ N} \end{aligned}$$

Al hacer mención de una fuerza deben estar comprometidos dos cuerpos. En el antiguo Egipto, las personas dejaban jeroglíficos en tablillas de arcilla, el proceso consistía en golpear con un martillo un cincel ejerciendo una fuerza de *acción* sobre este. Pero el cincel también *reacciona* haciendo que el martillo se mueva hacia atrás. Cuando dos cuerpos están implicados siempre la fuerza ejercida por el segundo sobre el primero (**fuerza de reacción**) es igual en magnitud, pero de sentido contrario a la dirección de la fuerza ejercida por el primero sobre el segundo (**fuerza de acción**), dando paso a la **Tercera ley de Newton** plantea que *toda fuerza de acción tendrá una fuerza de reacción con la misma intensidad, pero en sentido opuesto*. La **fuerza resultante** se puede precisar como una sola fuerza cuyo efecto es igual al de un sistema de fuerzas en particular. Si la tendencia de un conjunto de fuerzas es producir un movimiento, la resultante también lo produce [14], por lo que se puede escribir mediante tres ecuaciones, las cuales indican la sumatoria de fuerzas en un eje respectivo que sería igual a la masa constante del cuerpo por su aceleración

$$R_x = \sum F_x = F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Cx} + \dots = m_x \cdot a_x \quad (1.17)$$

$$R_y = \sum F_y = F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy} + \dots = m_y \cdot a_y \quad (1.18)$$

$$R_z = \sum F_z = F_{Az} + F_{Bz} + F_{Cz} + \dots = m_z \cdot a_z \quad (1.19)$$

Existe una condición de **equilibrio** cuando la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el objeto es igual a cero, en consecuencia, aplicando la primera ley de Newton en las tres ecuaciones anteriores, obtenemos que no hay una fuerza externa que actúe sobre éstas.

$$R_x = \sum F_x = F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Cx} + \dots = 0 \quad (1.20)$$

$$R_y = \sum F_y = F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy} + \dots = 0 \quad (1.21)$$

$$R_z = \sum F_z = F_{Az} + F_{Bz} + F_{Cz} + \dots = 0 \quad (1.22)$$

Un sistema de fuerzas que no está en equilibrio puede equilibrarse si se sustituye la fuerza resultante por una fuerza igual pero opuesta denominada **equilibrante**. Para el eje de las abscisas la fuerza resultante en muchos casos es la **fricción** (f), solo aplicable cuando hay rozamiento de una superficie con otra, mientras que para el eje de las ordenadas será la **Normal** (N). Para hallar la fricción va a ser igual al producto

de la normal por el **coeficiente de fricción cinética** (μ_k) o **estática** (μ_s). Este coeficiente viene ya establecido en varias tablas. [13]

$$f_k = \mu_k \cdot N \quad (1.23)$$

$$f_s = \mu_s \cdot N \quad (1.24)$$

Para aplicar la condición de equilibrio en la resolución de problemas físicos es necesario aprender a construir diagramas vectoriales.

1. Trace un bosquejo e indique las condiciones del problema. Asegurando representar todas las fuerzas conocidas, desconocidas y sus ángulos correspondientes.
2. Aislar cada cuerpo del sistema en estudio. Realice esto mentalmente o dibujando un círculo alrededor del punto donde se aplican todas las fuerzas.
3. Construya un diagrama de fuerzas para cada cuerpo que va a estudiar. Las fuerzas se representan como vectores con su origen situado al centro de un sistema coordenado rectangular.
4. Represente los ejes x y y con líneas punteadas.
5. Con líneas punteadas trace los rectángulos correspondientes a las componentes x y y de cada vector, y determine los ángulos conocidos a partir de las condiciones dadas en el problema.
6. Marque todas las componentes conocidas y desconocidas, opuestas y adyacentes a los ángulos conocidos.

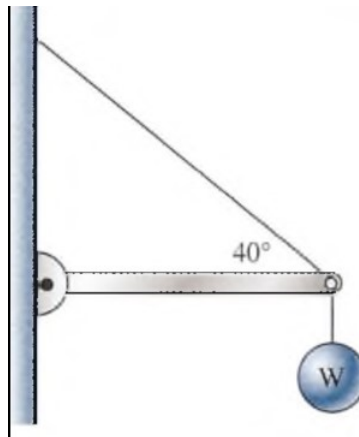


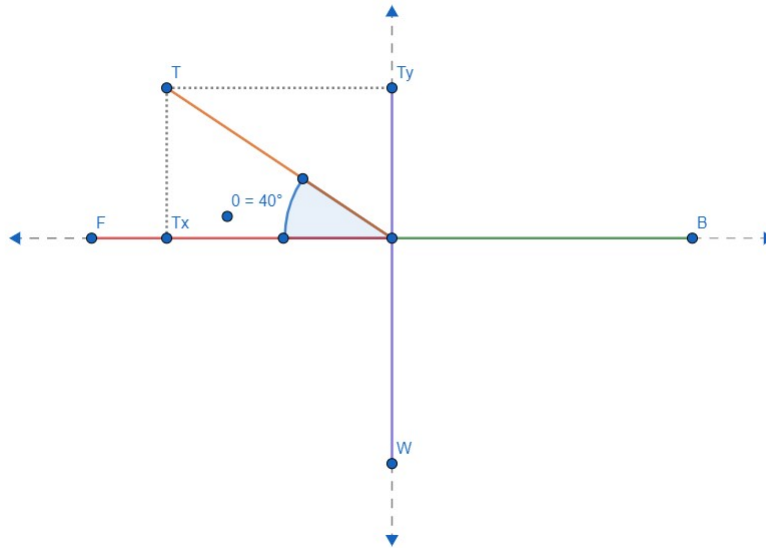
Figura 1.3.2: Polea fija con un objeto con cierto peso W [13].

Ejemplo 1.3.3: El Revocado

En construcción unos albañiles ocupan una polea para mantener fija una cubeta llena de mezcla de cemento para hacer un revocado en una pared, como se ilustra en la imagen 1.3.2. Si la cubeta tiene una capacidad máxima de 65 kg de mezcla ¿Cuál deberá ser la tensión que ejerce la cuerda, si el ángulo de inclinación es de 40° ?

Resolución:

1. Realizar el diagrama de cuerpo libre de la cuerda del sistema



2. Determinar el peso que ejerce la cubeta de mezcla llena mediante (1.15) y sustituyendo sus valores.

$$\begin{aligned} W_g &= m \cdot g \\ &= (65 \text{ kg}) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\ &= 637.65 \text{ N} \end{aligned}$$

3. Aplicando la tercera ley de Newton, donde habrá fuerza que se opone, siendo en caso T_y , que es el cable, el subíndice y indica la coordenada respecto al eje de la ordenada. Gracias a que el sistema se encuentra en *equilibrio*, se procede a ocupar (1.21).

$$\begin{aligned} \sum F_y &= T_y - W = 0 \\ T_y &= W = 637.65 \text{ N} \end{aligned}$$

4. Para hallar la tensión del cable total se ocupan las funciones trigonométricas, sabiendo que T es la hipotenusa T_y es opuesta al vértice, la función indicada es *seno*.

$$\sin \theta = \frac{T_y}{T}$$

5. Despejamos T y se procede a sustituir valores.

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_y}{\sin \theta} \\ &= \frac{637.65 \text{ N}}{\sin 40} \\ &= 992.0073 \text{ N} \end{aligned}$$



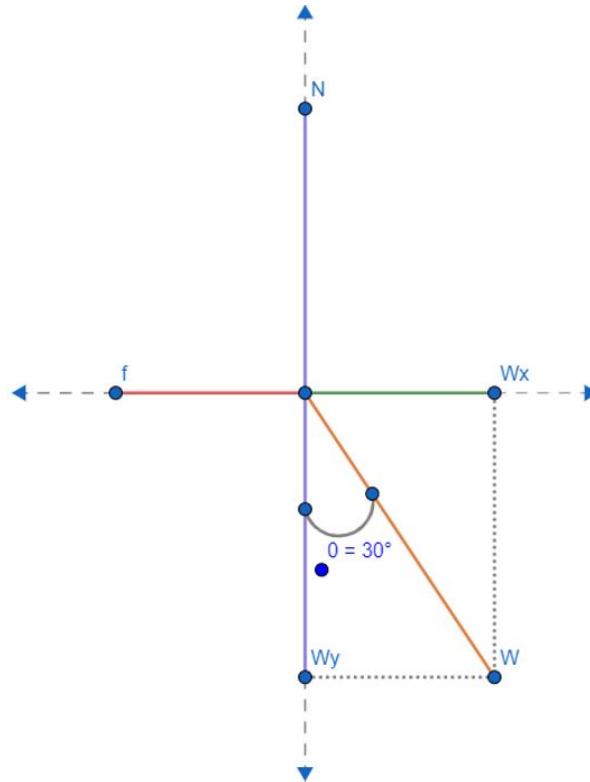
Figura 1.3.3: Representación del carro en movimiento [13].

Ejemplo 1.3.4: El impacto

Raúl llega un día a su casa en su Tsuru (masa de 1343 kg) después de llover todo el día, al bajar de su vehículo se le olvida poner el freno de mano, por lo cual el auto empieza a moverse sin control con dirección a impactarse con otro auto. Raúl vive en una pendiente de 30° de inclinación. Determine en que tiempo se impactará su vehículo si se encuentra a 60 metros, si el coeficiente de fricción estático (μ_s) entre el caucho y cemento húmedo es de 0.3. Ver figura 1.3.3.

Resolución:

1. Realizar el diagrama de cuerpo libre de la cuerda del sistema



2. Como se aprecie el vector peso (W) se debe descomponer en sus componentes x y y :

a) Para el eje de la ordenada y se ocupa la función trigonométrica *coseno*.

$$\begin{aligned} W_y &= m \cdot g \cdot \cos \theta \\ &= (1343 \text{ kg})(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cos (30) \\ &= 11410 \text{ N} \end{aligned}$$

b) Para el eje de las abscisa x se ocupa la función trigonométrica *seno*.

$$\begin{aligned} W_x &= m \cdot g \cdot \sin \theta \\ &= (1343 \text{ kg})(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \sin (30) \\ &= 6587.4 \text{ N} \end{aligned}$$

3. Al aplicar (1.21), esto es debido a que no hay velocidad en el eje y . Para además determinar la Normal (N), que es la fuerza opuesta al vector peso en y (W_y).

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ \sum F_y &= N - W_y \\ N - W_y &= 0 \\ N &= W_y \\ N &= 11410 \text{ N} \end{aligned}$$

4. Se deberá ocupar la ecuación 1.24 para encontrar la fricción entre la llanta y el pavimento húmedo. Se ocupa el coeficiente de fricción estática ya que parte del reposo.

$$\begin{aligned} f_s &= \mu_s \cdot N \\ &= (0.3)(11410 \text{ N}) \\ &= 3422.9 \text{ N} \end{aligned}$$

5. Ocupando la ecuación 1.17 ya que hay movimiento en el sistema respecto al eje de las x . Despejamos la aceleración en x (a_x) y se sustituye los valores correspondientes.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m_x \cdot a_x \\ \sum F_x &= W_x - f_s \\ W_x - f_s &= m_x \cdot a_x \\ a_x &= \frac{W_x - f_s}{m} \\ a_x &= \frac{6587.4 \text{ N} - 3422.9 \text{ N}}{1343 \text{ kg}} \\ &= 2.3563 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

6. Ocupando la ecuación 1.16 se puede determinar el tiempo de impacto, ya que si se sabe que parte del reposo el vehículo, su velocidad inicial es cero ($v_i = 0$).

$$\begin{aligned} a &= \frac{v_f - v_i}{t} \\ &= \frac{v_f - (0)}{t} \\ &= \frac{v_f}{t} \end{aligned}$$

7. Sabiendo de base que la velocidad (v) es igual el coeficiente de la distancia (d) entre el tiempo (t) se sustituye v_f .

$$\begin{aligned} a &= \frac{d/t}{t} \\ &= \frac{d}{t^2} \end{aligned}$$

8. Despejando la variable de; tiempo (t) de la ecuación anterior y se evalúa.

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{d}{a}} \\ t &= \sqrt{\frac{60 \text{ m}}{2.3563 \text{ m/s}^2}} \\ t &= 5.0462 \text{ s} \end{aligned}$$

1.4. Termodinámica

Con la llegada de la revolución industrial en el siglo XIX ocurrieron grandes avances para la humanidad, ya que la mano de obra se reemplazó por las **máquinas de vapor** haciendo que los procesos de manufactura se realizarán de manera más rápida y con una producción en masa. Al mismo tiempo surge la necesidad de poder describir, entender y limitar el funcionamiento de éstas, dando paso hacia la ciencia denominada **termodinámica**.

La termodinámica se define como una parte de la física que comprende la acción mecánica del calor y las restantes formas de energía. La aplicación de esta ciencia en la vida real comienza con la identificación de un cuerpo particular de materia como foco de atención, recibiendo el nombre de **sistema** [15] y el estado termodinámico se define en cuantas propiedades macroscópicas son medibles, las cuales dependerán de las dimensiones utilizadas como son: longitud, tiempo, masa, temperatura y concentración.

Los sistemas se pueden encontrar en tres tipos:

- Los sistemas **abiertos** puede intercambiar masa y energía (calor) con sus alrededores.
- Los sistemas **cerrados** son aquellos que pueden intercambiar energía con sus alrededores, pero no la masa.
- Los sistemas **aislados** no permiten la transferencia de calor ni de masa con sus alrededores.

La energía, la presión, el volumen y la temperatura son funciones de estado, es decir, que son las propiedades que determinan el estado del sistema, sin importar como se haya logrado esa condición. Dicho de una manera más sencilla, cuando el estado de un sistema cambia, solo dependerá, del estado inicial y el final sin importar como se halla logrado.

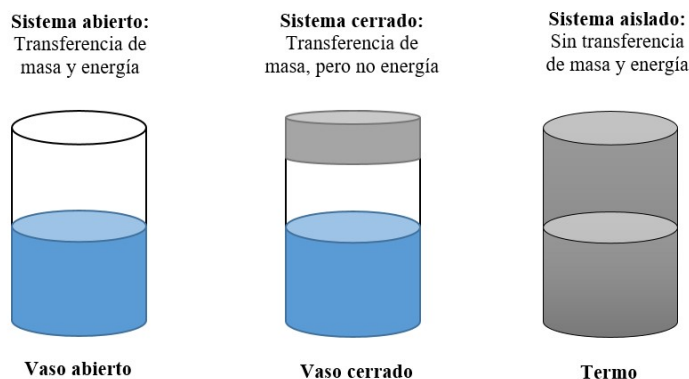


Figura 1.4.1: Tipos de sistemas

Durante los años de 1840 a 1878, el físico inglés James P. Joule fue uno de los pioneros en la experimentación e investigación sobre la naturaleza del trabajo y el calor. Teniendo éxito en sus resultados, llegando a reconocer el calor (Q) y la energía interna (U) como formas de energía, modernizando el concepto de energía y permitiendo comprender la **primera ley de la termodinámica** o **ley de la conservación de la energía** [15] [16] la cual establece que, *aunque la energía tome muchas formas, la cantidad total de energía es constante, y cuando la energía desaparece en una forma, aparece simultáneamente en otras formas*, es decir, que la energía no se crea ni se destruye, únicamente se transforma. Esta ley se puede

representar de la siguiente manera

$$\Delta\dot{U} + \Delta\dot{E}_K + \Delta\dot{E}_P = \dot{Q} - \dot{W} \quad (1.25)$$

Donde la $\Delta\dot{U}$ indica el cambio de energía interna, la $\Delta\dot{E}_K$ es el cambio de energía cinética, $\Delta\dot{E}_P$ sera el cambio de energía potencial, la \dot{Q} el calor y por último \dot{W} que es el trabajo.

El calor (\dot{Q}) y el trabajo (\dot{W}) pueden tender tanto signo positivo como negativo y esto dependerá de cual sea su dirección. Esto se refiere a que el calor tendrá signo positivo cuando se suministra calor al sistema y cuando sale tendrá signo negativo. Para el trabajo, será negativo cuando el sistema ejerce el trabajo, es decir, cuando entra al sistema, y positivo cuando salga del sistema. Solo se podrá aplicar la ley de signos una vez que se vayan a sustituir los valores en cada literal, esto se hace después de que se hayan realizado los despejes y la eliminación de las variables correspondientes.



Figura 1.4.2: Representación de cuando el calor y el trabajo tendrán signo positivo o negativo

La **segunda ley de la termodinámica** [15] [16] establece dos parámetros importantes. El primero es que *ningún equipo puede funcionar de modo tal que su único efecto sea convertir completamente todo el calor absorbido por el sistema en trabajo hecho por el sistema* y el segundo enunciado es que *no existe ningún proceso que consista exclusivamente en la transferencia de calor de un nivel de temperatura a otro mayor*. El primer enunciado afirma que el calor no puede convertirse en trabajo, mientras que el segundo dice que el calor jamás fluye del objeto con mayor temperatura (caliente) al de menor temperatura (frío) llegando hasta el equilibrio.

Aunque suene ilógico, **la ley cero de la termodinámica** [16] [17] fue la última en demostrarse y la razón fue que, aunque precede a la primera ley y segunda ley, la necesidad de establecerla como principio de la termodinámica sólo se admitió después de que la primera hubiese tomado su nombre y ésta establece que *dos cuerpos están en equilibrio térmico cuando, al ponerse en contacto, sus variables de estado no cambian*. Observar la figura 1.4.3.

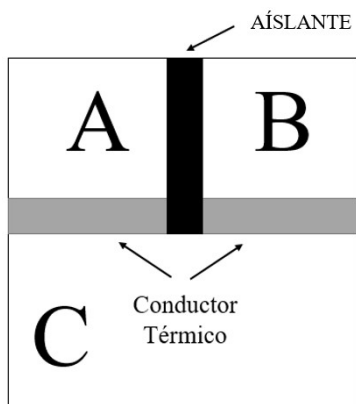


Figura 1.4.3: Según la ley cero de la termodinámica, aunque el cuerpo A y B no están en contacto térmico directo, se encuentran en equilibrio térmico gracias al cuerpo C

Un tercer postulado de la fisicoquímica, que algunos toman como ley (lo cual no es) y que es digno de mencionar es el **Teorema de Nernst** [17], el cual establece que *no se puede alcanzar el cero absoluto (0 K) en cualquier proceso físico ya que tendería a detenerse y la entropía se volverá un valor mínimo que se vuelve constante*. El **estado gaseoso** es de los más estudiados de los tres estados de la materia, ya que su comportamiento se encuentra inmerso en tres grandes variables que estudia la fisicoquímica que son: el volumen, la presión y la temperatura. Estas tres variables pueden relacionarse en la siguiente fórmula:

$$PV = nRT \quad (1.26)$$

Esta ecuación es mejor conocida como la **ecuación de los gases ideales**, donde la P será la presión, la V el volumen contenido del gas, n los moles de gas, la R es la constante de gases ideales (que se encuentran en el apéndice A.1) y T que indica la temperatura. La cual sólo es aplicable para aquellos gases que son ideales, ya que en gases reales existen modelos más complejos que se ajustan a las condiciones de operación.

1.5. Balance de materia y energía

Como en todas las industrias a nivel mundial, su objetivo es el poder transformar la materia prima y secundaria, en productos de mayor valor agregado, considerando que la transición es económica y favorable con el medio ambiente. A esta transformación se le conoce como procesos químicos, que son el conjunto de operaciones y procesos unitarios el cual se divide en dos partes,; el primera con respecto al **balance de materia** y el segundo al **balance de energía**.

Un **proceso** se define como una agrupación de transformaciones sean físicas, químicas, biológicas o una mezcla de ellas sobre las materias primas [18]. Todo proceso sigue un mismo patrón que es una entrada de insumos y una salida de productos, donde puede existir una recirculación de materia que no interacciona y de energía recuperada, como se muestra en la figura 1.5.1.

Los procesos para llevar a cabo la transformación de la materia prima siguen un orden: se parte de un **estado transitorio** o **no estacionario** que consiste en cambios en la materia respecto al tiempo. Conforme el tiempo pase todas las variables que intervienen se tornaran constantes, llamando a este estado

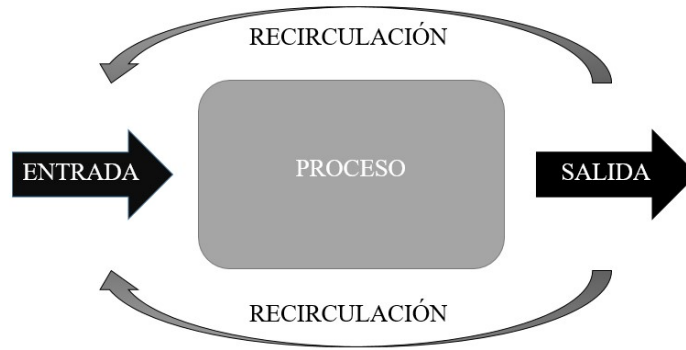


Figura 1.5.1: Representación gráfica de un proceso, donde entra materia y energía, se realiza el proceso de transformación y sale materia y energía, donde puede existir una recirculación.

estacionario, muchos libros de ingeniería manejan este último estado para varios de sus problemas, ya que facilitan al estudiante el entendimiento de lo que ocurre en la vida real de una forma sencilla, pero conforme se va apegando más a la realidad el alumno notará que el estado no estacionario es más utilizado para medir los cambios en el proceso y para su solución se aplican las famosas *ecuaciones diferenciales*.

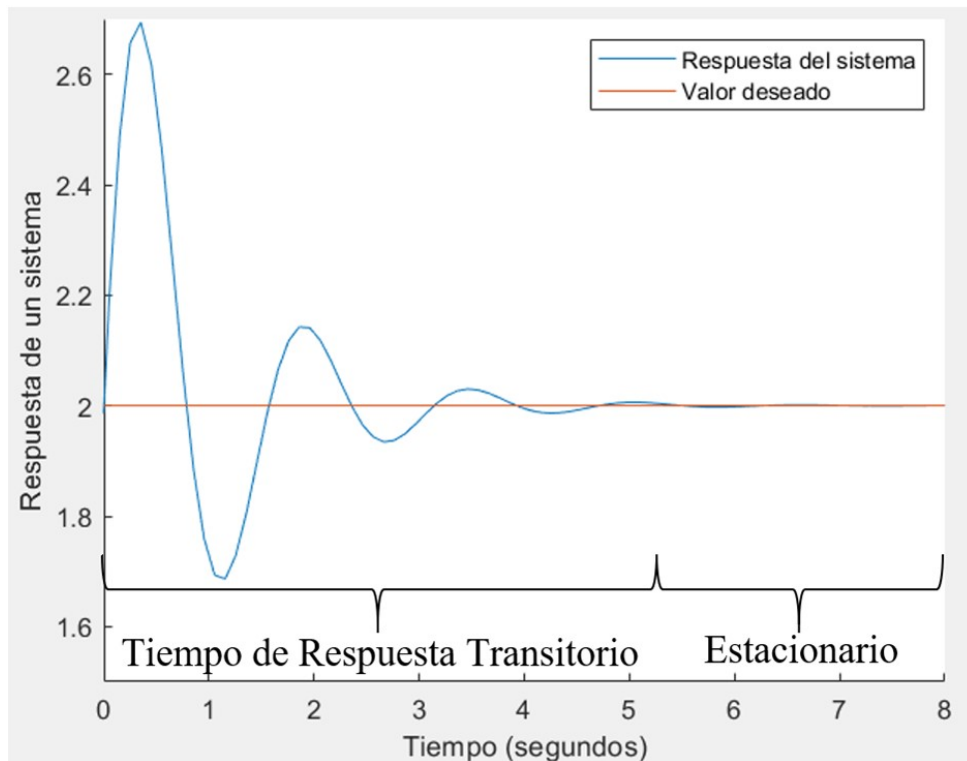


Figura 1.5.2: Transición del estado transitorio al estado estacionario.

En la ingeniería básica se requiere de algunos conceptos básicos [5] como son: la temperatura, presión, densidad, volumen específico, gasto volumétrico, gasto másico. A continuación se explica brevemente cada una de ellas.

La **temperatura** (T) siendo una magnitud escalar relacionada con la energía interna de un sistema

termodinámico, la cual se define por la ley cero de la termodinámica, dicho de otra forma, es la energía cinética que se presenta en forma de vibraciones moleculares, entre mayor energía cinética el cuerpo se encontrará más caliente.

La **presión** (P), se define como la fuerza (F) ejercida por unidad de área (A).

$$P = \frac{F}{A} \quad (1.27)$$

La **densidad** (ρ) es la relación entre la masa (m) por unidad de volumen (V), esta es una propiedad intensiva, la cual puede determinarse mediante formula o en ocasiones en tablas.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.28)$$

A la reciproca de la densidad se le conoce como **volumen específico** (ν), este se define como el volumen por unidad de masa o cantidad de materia.

$$\nu = \frac{V}{M} = \frac{1}{\rho} \quad (1.29)$$

El **gasto volumétrico** o también llamado **caudal** (\dot{V}) es la cantidad de volumen (V) que se transfiere por unidad de tiempo (t).

$$\dot{V} = \frac{V}{t} \quad (1.30)$$

Otra forma de determinar el caudal es, obtener el producto de la velocidad del fluido (v) por la unidad de área de transferencia (A).

$$\dot{V} = v \cdot A \quad (1.31)$$

La **fracción másica** (ω_i) es la fracción de una sustancia de masa m_i con respecto a la masa total de una mezcla m_{total} .

$$\omega_i = \frac{m_i}{m_{total}} \quad (1.32)$$

La suma de las fracciones de masa es igual a 1:

$$m_{total} = \sum_{i=1}^N m_i \quad \sum_{i=1}^N \omega_i = 1$$

Por último, el **gasto másico** o **flujo másico** (\dot{m}) será la transferencia de cantidad de materia (m) por unidad de tiempo (t).

$$\dot{m} = \frac{m}{s} \quad (1.33)$$

También se puede evaluar el flujo másico mediante el producto de caudal (\dot{V}) por la densidad (ρ).

$$\dot{m} = \dot{V} \cdot \rho \quad (1.34)$$

Al diseñar o analizar cualquier tipo de sistema [18] [19] se debe tener en cuenta ciertas restricciones impuestas por la naturaleza, siendo la primera la **ley de la conservación de la materia**, que establece de manera objetiva que la materia no se crea ni se destruye, solo se transforma, se ve representada en el **balance de materia**

$$\begin{aligned} & \text{Flujo de } \mathbf{entrada} \text{ de masa al sistema} && - \\ & \text{Flujo de } \mathbf{salida} \text{ de masa al sistema} && + \\ & \text{La } \mathbf{Generación} \text{ de masa dentro del sistema} && - \\ & \text{El } \mathbf{Consumo} \text{ de masa dentro del sistema} && = \\ & \text{Razón de } \mathbf{acumulación} \text{ de masa dentro del sistema} && \end{aligned} \quad (1.35)$$

Dentro del sistema es aplicable cuando exista un estado transitorio. Cuando el sistema llega al estado estacionario la acumulación tiende a cero, por lo tanto, el balance se ve modificado a

$$\begin{aligned}
 & \text{Flujo de **entrada** de masa al sistema} && - \\
 & \text{Flujo de **salida** de masa al sistema} && + \\
 & \text{La **Generación** de masa dentro del sistema} && - \\
 & \text{El **Consumo** de masa dentro del sistema} && = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.36}$$

Si no hubiera reacción química durante el proceso, la generación y el consumo se eliminan, quedando únicamente como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Flujo de **entrada** de masa al sistema} && - \\
 & \text{Flujo de **salida** de masa al sistema} && = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.37}$$

Para la realización del **balance de energía** es muy similar al de materia, pero este se fundamenta principalmente en la antes mencionada **ley de la conservación de la energía**, la cual se ocupa principalmente en los procesos industriales para realizar separaciones por medio de un cambio de fase o de la transformación química de la materia, quedando como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Flujo de **entrada** de calor al sistema} && - \\
 & \text{Flujo de **salida** de calor al sistema} && + \\
 & \text{La **Generación** de calor dentro del sistema} && - \\
 & \text{El **Consumo** de calor dentro del sistema} && = \\
 & \text{Razón de **acumulación** de calor dentro del sistema} &&
 \end{aligned}
 \tag{1.38}$$

Como ocurrió en el caso anterior, este balance se aplica cuando el sistema está en estado transitorio, cuando se llega el equilibrio la acumulación de energía tiende a cero, que es el estado estacionario, por lo cual la acumulación se elimina

$$\begin{aligned}
 & \text{Flujo de **entrada** de calor al sistema} && - \\
 & \text{Flujo de **salida** de calor al sistema} && + \\
 & \text{La **Generación** de calor dentro del sistema} && - \\
 & \text{El **Consumo** de calor dentro del sistema} && = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.39}$$

Y por último, si es que no existiera alguna fuente que genere o consuma calor, estos se eliminan, por lo cual se expresa como

$$\begin{aligned}
 & \text{Flujo de **entrada** de calor al sistema} && - \\
 & \text{Flujo de **salida** de calor al sistema} && = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.40}$$

1.6. Cálculo diferencial

El cálculo se distingue de otras ramas de las matemáticas ya que este es el estudio de los límites. El cálculo diferencial estudia los **límites en una función**, es decir, se refiere a la cercanía entre un punto y un valor. Lo podemos ver de la siguiente manera considerando la función

$$f(t) = \frac{t^2 - 1}{t - 1}$$

Donde el dominio (t) pertenece a todos los números reales exceptuando el 1, esto debido a que al evaluar la función ($f(t)$) en $t = 1$ el denominador se vuelve cero haciendo que la función se vuelva indefinida, pero puede calcularse una aproximación mediante un método gráfico.

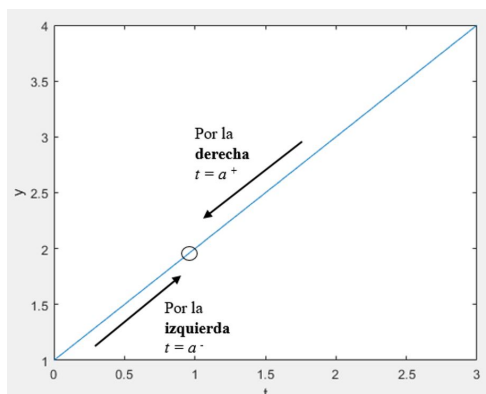


Figura 1.6.1: Método gráfico de la función $f(t) = \frac{t^2-1}{t-1}$. Donde (a) cuando se dice que $t \rightarrow a^+$ indica que t tiende por la derecha, es decir, a través de los números que son mayores que a . (b) Cuando se dice que $t \rightarrow a^-$ indica que t tiende por la izquierda, es decir, a través de los números que son menores que a . (c) Cuando se dice que $t \rightarrow a$ indica que t tiende por ambos lados.

Tabla 1.6.1: Cuando la función $f(t) = \frac{t^2-1}{t-1}$ tiende por la derecha

Un punto después de...				
t	1.1	1.01	1.001	1.0001
$f(t)$	2.1	2.01	2.001	2.0001

Tabla 1.6.2: Cuando la función $f(t) = \frac{t^2-1}{t-1}$ tiende por la izquierda

Un punto antes de...				
t	0.9	0.99	0.999	0.9999
$f(t)$	1.9	1.99	1.999	1.9999

Como se muestra en las tablas 1.6.1, 1.6.2 y con la figura 1.6.1 nos hace una referencia de que un valor cercano cuando $f(t) = \frac{t^2-1}{t-1}$ es igual a 2. Una forma de obtener el valor cercano es ocupando el **álgebra**, usando el método de eliminación.

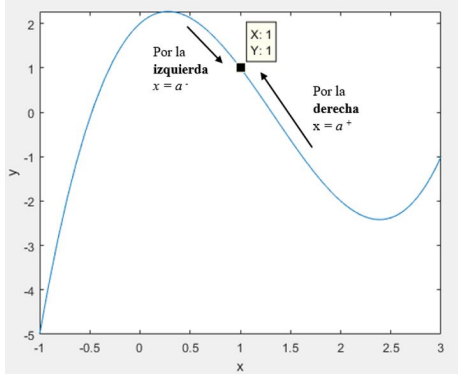
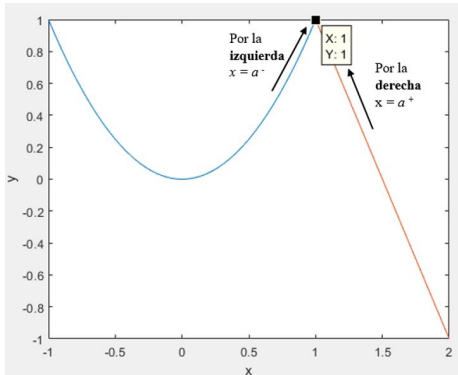
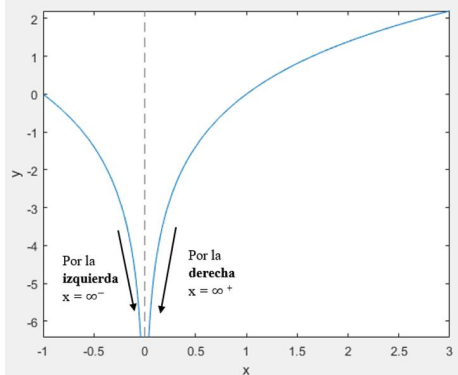
$$f(t) = \frac{t^2 - 1}{t - 1} = \frac{(t + 1)(t - 1)}{t - 1} = (t + 1) = 1 + 1 = 2$$

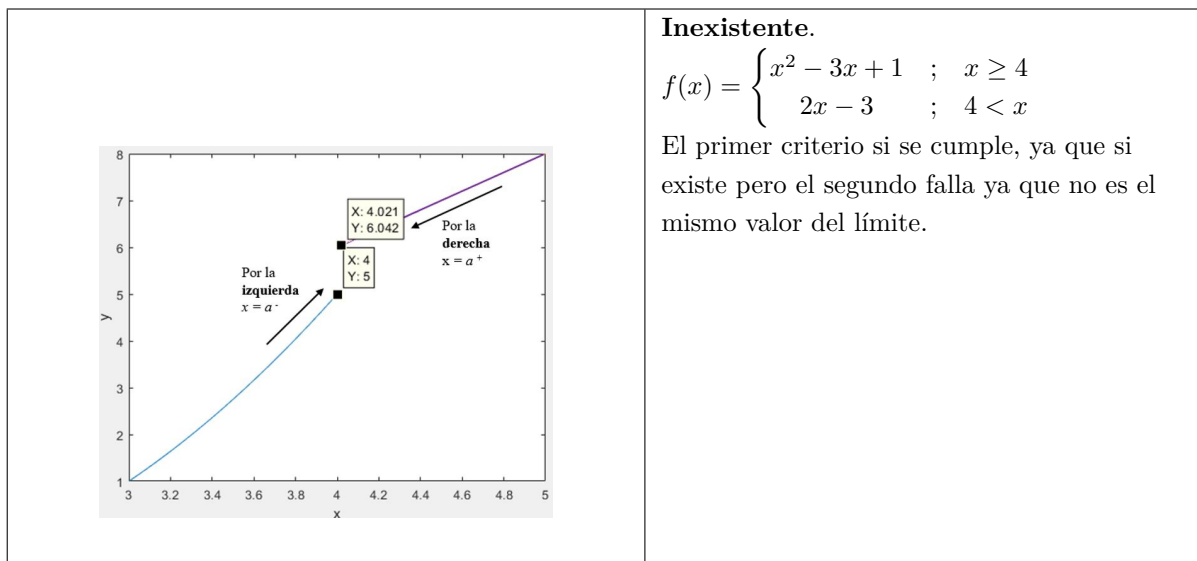
En el caso de los límites puede haber el caso de que **existan** o que sean **inexistentes**, esto dependerá si está definida para el caso de que el **dominio** esté cerca del número de a . Para ver si un límite existe debe cumplir dos requisitos: [20]

1. Si alguno de los límites laterales $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ si existen.
2. Si el $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, donde $L_1 = L_2; L \in \mathbb{R}$.

En caso de que alguno de estos dos criterios no se cumpla, el límite no existe. Como se muestra en el recuadro 1.6.3 algunos ejemplos de cuando el límite existe y cuando no.

Tabla 1.6.3: Demostración gráfica de cuando un límite existe y cuando es inexistente en cuatro casos posibles

Gráfica	Límite
	<p>Existe. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 2$ Cumple con ambos criterios</p>
	<p>Existe. $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 1 \\ -2x + 3 & ; 1 < x \end{cases}$ Cumple con ambos criterios aunque la función sea por partes</p>
	<p>Inexistencia. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln x^2$ El límite de ambos lados tiende al infinito, haciendo que el primer criterio no se cumpla</p>



El cálculo diferencial surge de poder encontrar soluciones a problemas geométricos y físicos dando como resultados la **derivada**. El concepto de derivada como interpretación **geométrica** es hallar la **recta tangente** a la gráfica de una función f . Mientras que en un aspecto **físico** es una razón instantánea de **cambio** [21].

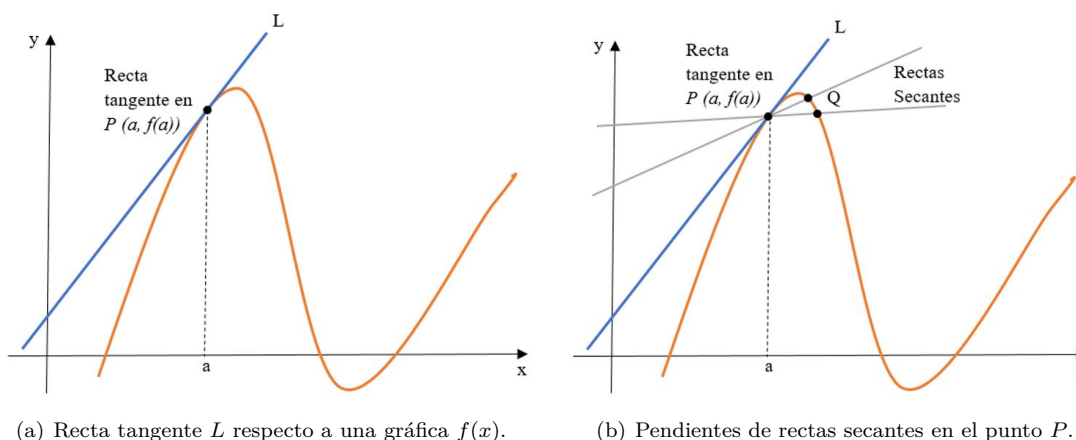


Figura 1.6.2: Función de una derivada.

Se debe suponer que $y = f(x)$, como se muestra en la figura 1.6.2(a). Donde L es la recta tangente a la función y el punto P es el punto donde la toca. Para encontrar la ecuación de la recta tangente se requiere de las coordenadas de P y la pendiente m_{tan} .

Determinar las coordenadas de P no es complicado ya que este debe especificarse, pero el problema surge a raíz de encontrar el valor de la pendiente m_{tan} , por lo cual una aproximación fácil es usando las pendientes de las rectas secantes m_{sec} , que pasan por el punto P y cualquier otro punto Q sobre la gráfica. Observase la figura 1.6.2(b).

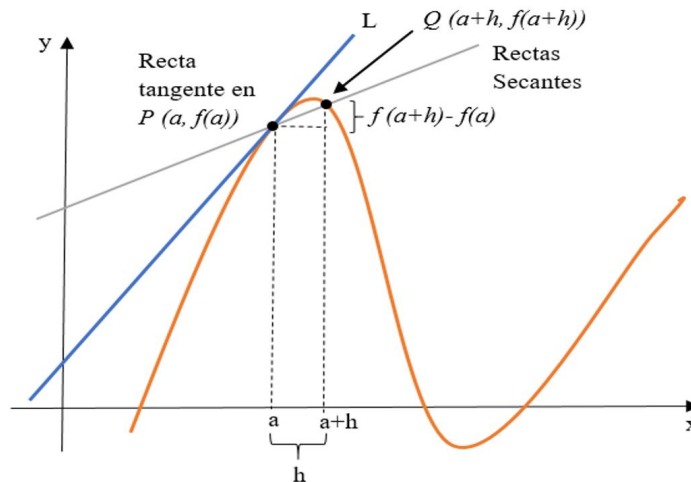


Figura 1.6.3: Rectas secantes se mueven hacia la recta tangente L cuando $h \rightarrow 0$

Analizando la figura 1.6.3 se aprecia que las coordenadas de P son $(a, f(a))$ y la coordenada Q serán $(a + h, f(a + h))$ siendo la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q es

$$m_{sec} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (1.41)$$

En la ecuación 1.41 la expresión de la derecha se llama **coeficiente diferencial**. Cuando h tiende a valores más cercanos a cero ($h \rightarrow 0$) el punto Q se mueve más cerca del punto P . Entonces la recta secante se aproxima a la recta tangente, en otras palabras

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} m_{sec} \quad (1.42)$$

Sustituyendo la pendiente de la recta secante (m_{sec}) en la expresión anterior dada por la ecuación 1.42

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (1.43)$$

Ejemplo 1.6.1: Velocidad instantánea

La velocidad instantánea es aplicable cuando una partícula se desplaza a lo largo de un eje de coordenadas en función de su posición $f(t)$, siempre y cuando el límite exista y no tienda a más/menos infinito ($\pm\infty$). Demostrar si $f(t) = 9t^2$ cuando el tiempo corresponde a 2 segundos. Problema tomado de [21].

Resolución:

1. Aplicando (1.42), sustituyendo las pendientes por velocidades (v).

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{v}$$

2. Sustituyendo por (1.43).

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

3. El valor de a corresponde al tiempo indicado de 2 segundos mientras que h se mantiene cons-

tante.

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9(2+h)^2 - 9(2)^2}{h}$$

4. Resolviendo el binomio.

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9(h^2 + 4h + 4) - 9(4)}{h}$$

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9h^2 + 36h + 36 - 36}{h}$$

5. Se eliminan términos semejantes y se simplifica la ecuación.

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9h^2 + 36h}{h}$$

6. Se factoriza el polinomio por factor común.

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(9h + 36)}{h}$$

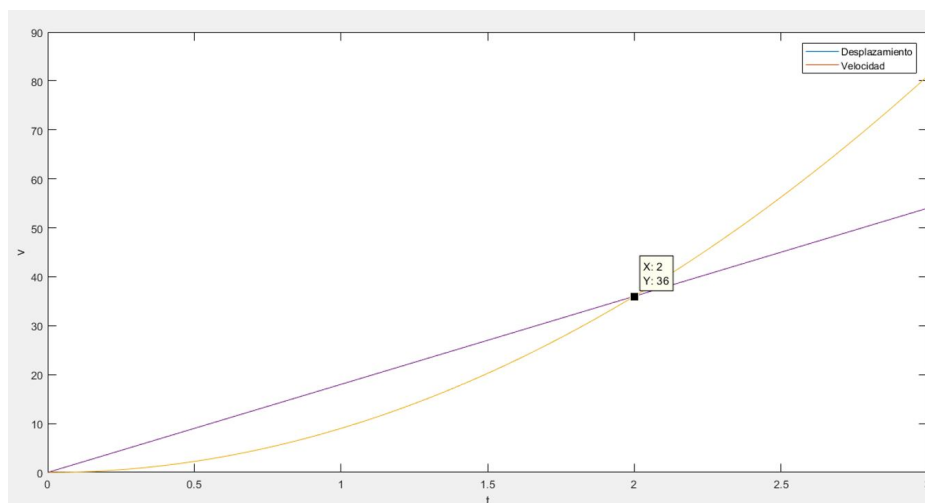
7. Se eliminan términos semejantes y se simplifica la ecuación.

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} 9h + 36$$

8. Se aplica el valor del límite, cuando $h \rightarrow 0$.

$$v = 36$$

9. Esto se puede comprobar mediante un método gráfico



Como se explicó la pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea son **cambios**. Por lo que la **derivada** en su explicación más sencilla es eso un cambio, entonces la derivada de cualquier función f es otra función f' (f prima) cuyo valor en cualquier número x es

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.44}$$

Solo cuando el límite existe, se dice que f es derivable en x . La **derivación** es el nombre que recibe el

determinar una derivada [22].

Ejemplo 1.6.2: Encontrar la derivada

Encuentra la derivada de las siguientes funciones.

- (a) $f(x) = -x^{-2}$
 (b) $f(x) = 4x + 9$; cuando $x = 3$

Resolución:

Para la parte (a)

1. Ocupando (1.44), se sustituye por la función que se esta proporcionando en el inciso (a) y se evalúa quitando paréntesis

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h)^{-2} - (-x^{-2})}{h}$$

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2 + 2hx + h^2} + \frac{1}{x^2}}{h}$$

2. Se realiza una suma de fracciones y se simplifica.

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{x^2(x^2 + 2hx + h^2)}}{h}$$

$$f' = \frac{2hx + h^2}{x^2(x^2 + 2hx + h^2)h}$$

3. Se juntan términos semejantes y se hace división de fracciones (**Método del sándwich**).

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h(x^2 + 2hx + h^2)x^2}$$

4. Se factoriza el numerador y se eliminan términos semejantes (h).

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h(x^2 + 2hx + h^2)x^2}$$

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + h}{(x^2 + 2hx + h^2)x^2}$$

5. Se aplica el valor del límite, cuando $h \rightarrow 0$ y se simplifica.

$$f' = \frac{2x}{(x^2)(x^2)} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

Para la parte (b)

1. Ocupando (1.44), se sustituye la función por la que se nos proporciona en el inciso (b), cambiando el valor de x por el valor de 3.

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[4(3+h) + 9] - [4(3) + 9]}{h}$$

2. Se evalúa la expresión quitando paréntesis y se eliminan términos semejantes.

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 + 4h + 9 - 12 - 9}{h}$$

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h}$$

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} 4$$

$$f' = 4$$

Para finalizar el método de derivación entre mayor cantidad de variables independientes (x) mayor será el proceso para evaluar la función, por lo que a lo largo de la historia se han encontrado varias fórmulas para facilitar el proceso las cuales se pueden encontrar en la literatura como [20] [21] [23].

1.7. Cálculo Integral

El cálculo integral, es conocido como una extensión del cálculo el cual estudia el proceso de integración, también es conocido como la **antiderivada**, esto es debido a que una de sus aplicaciones es encontrar la derivada original. El cálculo integral se origina al cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas en la antigua Grecia, pero no fue que hasta el siglo XIX que adquirió su propio estudio independiente, esto debido a que las funciones empezaron a ser más complejas para explicar los fenómenos que ocurrían en las áreas de física y matemáticas.

Haciendo que la integración sea una de las herramientas más útiles del cálculo, tanto para ingenieros como para matemáticos, ya que no solo se limita al cálculo de áreas de regiones planas o volúmenes de sólidos, si no también en calcular longitudes de curvas, centros de masas, momentos de inercia, representación de magnitudes físicas como: el trabajo, la fuerza ejercida por la presión, o la energía potencial en un campo de fuerzas [22].

La integración para su demostración en el área de matemáticas es la **integral de Lebesgue** y para un aspecto de ingeniería se ocupa la **integral de Riemann** [21] los cuales son bastante largas, a comparación del cálculo diferencial, y la resolución de una integral dependerá del método a ocupar como puede ser una integración directa, por sustitución, por partes, productos de dos funciones, entre otras. Existiendo ya formulas para su integración que solo es cuestión de buscarlas en libros como [22] [23] [24] o en el mismo Internet buscar formulas de integración.

La integral puede ser **definida**, mediante valores límites (valor superior y valor inferior) definidos o puede ser **indefinida** lo cual no contiene valores límites, pero debe contener siempre un $+C$ que indica una constante finita. A su vez se subdivide dependiendo del número de variables, como es:

1.7.1. Cálculo Integral de una variable

Ejemplo 1.7.1: Resolver las siguientes integrales

Resolver las siguientes integrales ocupando las fórmulas que se encuentran en el apéndice A.4.

$$(a) \int x^2 dx$$

$$(b) \int_1^3 \left(\frac{x^3}{2} + 3x + 2 \right) dx$$

Resolución:

Para la parte (a)

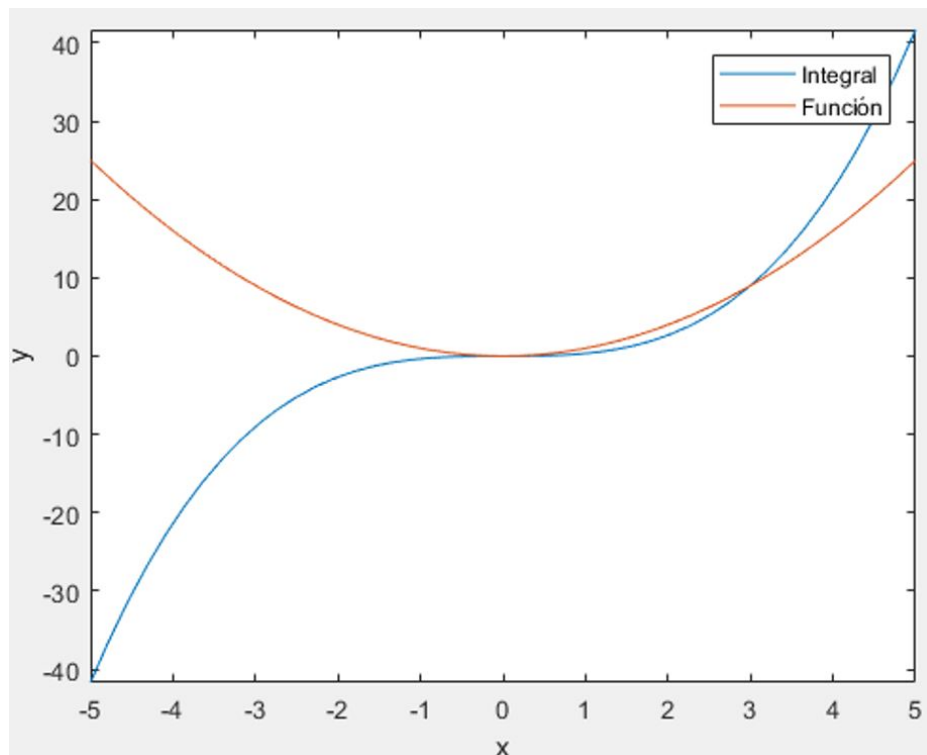
1. Ocupando la fórmula de.

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C; \text{ si } n \neq -1$$

2. Donde u será x y n será la exponente que es 2, para después sustituir dichos valores.

$$\begin{aligned} \int x^2 dx &= \frac{1}{2+1} x^{2+2} + C \\ &= \frac{1}{3} x^3 + C \end{aligned}$$

3. Gráficando la función.



Para la parte (b)

- Debido a que no existe una fórmula directa, sin embargo al ser una suma, la integral se puede dividir en varias partes.

$$\int_1^3 \frac{x^3}{2} dx + \int_1^3 3x dx + \int_1^3 2 dx$$

- Se deberá a ocupar las fórmulas adecuadas, para la primera integral que es:

$$\int_1^3 \frac{x^3}{2} dx$$

- Ocupando la fórmula adecuada

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C; \quad \text{si } n \neq -1$$

- Sustituyendo

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{x^3}{2} dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3+1} x^{3+1} \right) \\ &= \frac{1}{8} x^4 \Big|_1^3 \end{aligned}$$

- Debido a que es una integral definida no se debe poner el $+C$, sino un $|$ que indica de donde a donde se esta evaluando y se procede a hacer una sustitución, donde al límite superior se le resta el límite inferior.

$$\frac{1}{8}(3)^4 - \frac{1}{8}(1)^4 = 10 \text{ unidades cuadradas } (u^2)$$

- Se procede a ocupar las fórmulas adecuadas para la segunda integral que es:

$$\int_1^3 3x dx$$

- Ocupando la fórmula adecuada

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C; \quad \text{si } n \neq -1$$

- Sustituyendo

$$\begin{aligned} \int_1^3 3x dx &= 3 \left(\frac{1}{1+1} x^{1+1} \right) \\ &= \frac{3}{2} x^2 \Big|_1^3 \end{aligned}$$

- Evaluamos la integral

$$\frac{3}{2}(3)^2 - \frac{3}{2}(1)^2 = 12 u^2$$

4. Para la tercera integral:

$$\int_1^3 2dx$$

a) Se ocupa la fórmula

$$\int adu = a \cdot u + C$$

b) Sustituyendo

$$\int_1^3 2dx = 2x|_1^3$$

c) Evaluando

$$2(3) - 2(1) = 4 u^2$$

5. Se realiza la suma adecuada de cada valor obtenido de la integral

$$10 u^2 + 12 u^2 + 4 u^2 = 26 u^2$$

1.7.2. Cálculo Integral de múltiples variables

Las integrales de una variable son bastante sencillas ya que solo hay una variable que se está evaluando. El problema surge cuando se quieren evaluar áreas o volúmenes. Es por eso que una **integral doble** es una manera de integración sobre una región bidimensional, la cual permite calcular el área bajo una superficie [21]. Dada una función de dos variables $f(x, y)$, en coordenadas rectangulares, se puede encontrar la gráfica y una región rectangular del plano xy al tomar la integral de una integral esta es la función de y .

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx \right) dy \quad (1.45)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy \right) dx \quad (1.46)$$

La otra integral está en función de x que podrá verse muy diferente pero el resultado será el mismo, lo que se hace es evaluar dos veces la integral aplicando los límites que se establezcan. Así como existen coordenadas rectángulas en planos bidimensionales también hay coordenadas polares y la integral se modifica, ya que tendrá el siguiente aspecto

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) dr d\theta \quad (1.47)$$

Donde r será el radio y θ el ángulo.

Ejemplo 1.7.2: Integral doble

Evaluar la siguiente integral doble.

$$\int_1^2 \int_1^4 \frac{y}{x} dy dx$$

Resolución:

1. Evaluamos primero la variable y .

- a) Considerando la ecuación, la variable x se puede determinar qué es una constante, por lo que sale de la integral y se integra únicamente en y para después evaluarla.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} \left(\int_1^4 y dy \right) dx &= \int_1^2 \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_1^4 \right) dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x} \left[\frac{1}{2} (4^2 - 1^2) \right] dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x} \frac{15}{2} dx \end{aligned}$$

2. Evaluando la variable x .

- a) Sacamos las constantes de la integral y se resuelve mediante fórmula directa y después se procede a evaluar los valores límites en x .

$$\begin{aligned} \frac{15}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx &= \frac{15}{2} \ln(x) \Big|_1^2 \\ &= \frac{15}{2} (\ln 2 - \ln 1) \\ &= \frac{15}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Así como existen dobles integrales para hallar áreas, también existen triples integrales para encontrar volúmenes:

- Para coordenadas rectangulares, encontrar el volumen de un cubo o un prisma rectangular:

$$dV = dx dy dz \tag{1.48}$$

$$\int \int \int_R f(x, y, z) dV \tag{1.49}$$

- Para coordenadas cilíndricas, encontrar el volumen de un cilindro:

$$dV = r dr d\theta dz \tag{1.50}$$

$$\int \int \int_R f(r, \theta, z) dV \tag{1.51}$$

- Para coordenadas esféricas, encontrar el volumen de una esfera:

$$dV = r^2 \sin(\phi) dr d\theta d\phi \tag{1.52}$$

$$\int \int \int_R f(r, \theta, \phi) dV \tag{1.53}$$

1.8. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Las ecuaciones diferenciales surgen íntimamente para la resolución de cuestiones físicas y geométricas, como por ejemplo el movimiento planetario. Siendo el padre de la física Isaac Newton quien comenzó con el nacimiento de éstas ecuaciones en su tipo ordinaria, la cual planteó una relación entre dos cantidades y sus diferencias, para hallar una relación entre ambas cantidades. La definición de ecuación diferencial

[23] de una manera técnica es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes. Este tipo de ecuaciones se clasifican de tres formas:

■ **Tipo**

Cuando una ecuación diferencial solo contiene variables de una o más variables dependientes respecto a una variable independientes es conocida como **ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)**

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dw}{dx} = w^3 - 3y$$

En cambio, si esta ecuación tiene varias variables independientes es una **ecuación diferencial parcial (EDP)** [25] las cuales se verán en la siguiente sección

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial t} + 1$$

■ **Orden**

Sea una EDO o EDP el orden la determina la mayor derivada en la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} - 2 \frac{x}{t} = 3x$$

Una EDO de orden se puede expresar matemáticamente con una forma general

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0 \tag{1.54}$$

Donde F nos indica una función con valores reales y^n será la máxima derivada.

■ **Linealidad**

Una ecuación diferencial de n -ésimo orden es lineal (ecuación 1.54) si F es lineal en y, y', \dots, y^n . Esto significa que una EDO de n -ésimo orden es lineal cuando

$$a(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{m-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x) \tag{1.55}$$

Las condiciones para que sea una EDO lineal es que cumpla dos requisitos [23]:

1. Las variables dependientes y y todas sus derivadas y, y', \dots, y^n son de primer grado, es decir, la potencia de cada termino que contiene y es igual a 1.
2. Los coeficientes de a_0, \dots, a_n de y, y', \dots, y^n depende a lo más de la variable independiente x .

Para resolver este tipo de ecuaciones existen una gran variedad de procedimientos, pero para los fenómenos de transporte los que tienen mayor aplicación son cuatro: variable separables, EDO homogéneas, EDO no homogéneas y de tipo Cauchy-Euler. El método de **variables separables** [24], donde su fórmula general es

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \tag{1.56}$$

Donde $g(x)$ es una función lineal respecto a x , mientras que $h(y)$ es una función lineal respecto a y donde ambas funciones se están multiplicando. La forma de resolver esta EDO es mediante un despeje, para que cada función quede con su respectiva variable, e integrar ambos aspectos de la igualdad y finalmente despejar la variable dependiente.

Ejemplo 1.8.1: EDO por variables separables

Resolver la siguiente EDO por el método de variables separables.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1-x}{t^3}$$

Resolución:

1. Viendo la forma que tiene la ecuación e identificando $g(x)$ y $h(t)$.

$$g(x) = 1 - x$$

$$h(t) = \frac{1}{t^3}$$

2. Despejando a (1.56) y sustituyendo las variables.

$$\frac{dx}{g(x)} = h(t) \cdot dt$$

$$\frac{dx}{1-x} = \frac{dt}{t^3}$$

3. Integrando ambos aspectos de la ecuación.

$$\int \frac{dx}{1-x} = \int \frac{dt}{t^3}$$

4. Resolviendo cada aspecto de la integral, debido a que es una integral indefinida recordar el $+C$.

$$-\ln(1-x) + C_1 = -\frac{1}{2(t-2)} + C_2$$

5. Despejando la variable dependiente, siendo x .

- a) Aplicando la leyes de los exponentes.

$$\frac{1}{1-x} = e^{-\frac{1}{2(t-2)} + C_2 + C_1}$$

$$\frac{1}{e^{-\frac{1}{2(t-2)} + C_2 + C_1}} = 1-x$$

$$x = 1 + \frac{1}{e^{-\frac{1}{2(t-2)} + C_2 + C_1}}$$

- b) Simplificando la ecuación. Cabe destacar que cuando se suman o restan varias constantes, como es el caso de $C_2 - C_1$ se puede poner como una sola constante C .

$$x = 1 + \frac{1}{e^{-\frac{1}{2(t-2)} + C}}$$

- c) Aplicamos ley de multiplicación de exponentes.

$$x = 1 + \frac{1}{e^{-\frac{1}{2(t-2)}} e^C}$$

d) Cuando se haya e^C la constante C absorbe a la e y se vuelve una constante.

$$x = 1 + \frac{1}{C \cdot e^{-\frac{1}{2(t-2)}}}$$

$$x = 1 + C \cdot e^{\frac{1}{2(t-2)}}$$

6. Obteniendo que la función solución es

$$x(t) = 1 + C \cdot e^{1/(2t-2)}$$

Las ecuaciones diferenciales de primer orden pueden expresarse en forma general como

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = R(x) \tag{1.57}$$

Donde P y R son dos funciones únicas de x que son continuas en un intervalo de interés. Para la resolución de este tipo de problemas se ocupa un **factor de integración** [24] que en varias literaturas se denota como $\mu(x)$ que es igual a

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \tag{1.58}$$

Y la forma para evaluar esta EDO es mediante la siguiente forma

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x) \cdot R(X)dx + C \right) \tag{1.59}$$

Como se observa, al resolver una ecuación diferencial sale una constante C la cual tiene una cantidad infinita de números reales, por lo que si se desea tener una solución única se deben implementar **valores iniciales** que se definen como una ecuación diferencial ordinaria junto con un valor específico (f) de la función desconocida en un punto dado del dominio de la solución. Su definición matemática es

$$y^n(x) = f(x, y(t))$$

Las definiciones matemáticas pueden ser algo complejas a primera vista, pero ya aplicadas es más sencillo su entendimiento.

Ejemplo 1.8.2: EDO con valores iniciales

Resolver la siguiente EDO lineal, aplicando su valor inicial.

$$B \frac{dA}{dB} - A = 2B^2$$

Con valor inicial de

$$A(1) = 5$$

Resolución:

1. Dividiendo toda la ecuación entre B , para que la ecuación diferencial quede sola y se pueda simplificar.

$$\frac{dA}{dB} - \frac{A}{B} = 2B$$

2. Determinar las funciones P y R de la ecuación.

$$\begin{aligned} P(B) &= -\frac{1}{B} \\ R(B) &= 2B \end{aligned}$$

3. Se procede a determinar el factor de integración (1.58).

$$\begin{aligned} \mu(B) &= e^{\int -\frac{1}{B} dB} \\ &= e^{-\ln B} = B^{-1} \end{aligned}$$

4. Sustituyendo los datos obtenidos en (1.59).

$$A(B) = \frac{1}{B^{-1}} \left[\int B^1(2B)dB + C \right]$$

5. Resolviendo la integral.

$$\begin{aligned} A(B) &= \frac{1}{1/B} \left(\int \frac{2B}{B} dB + C \right) \\ &= \frac{2B}{1/B} + \frac{C}{1/B} \end{aligned}$$

6. Se obtiene la ecuación general.

$$A(B) = 2B^2 + C \cdot B$$

7. Para aplicar el valor inicial y encontrar la constante C .

a) Se despeja la constante de integración C .

$$C = \frac{A(B) - 2B^2}{B}$$

b) Se sustituye los valores iniciales en cada literal.

$$\begin{aligned} C &= \frac{5 - 2(1)^2}{1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

8. Para hallar la solución particular se sustituye el valor obtenido de C en la ecuación general y se simplifica.

$$\begin{aligned} A(B) &= 2B^2 + 3B \\ &= B(2B + 3) \end{aligned}$$

Las ecuaciones diferenciales de primer orden pueden resolverse de una manera "sencilla" ocupando un factor de integración o por variables separables. Pero no ocurre el mismo caso para las ecuaciones diferenciales de segundo orden o de orden superior, ya que no presentan un procedimiento general. Este trabajo se enfocará principalmente en las ecuaciones lineales de segundo orden ya que se encuentran con mayor frecuencia en la práctica. Estas **ecuaciones lineales de segundo orden** se pueden expresar de la siguiente forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \tag{1.60}$$

Donde P , Q y R son funciones dadas quienes, no dependen solo de la variable independiente y son constantes. La función $R(x)$ es diferente de cero se dice que es una ecuación diferencial lineal **no homogénea**, mientras que cuando es igual a cero se dice, que es una ecuación lineal **homogénea** de segundo orden, como

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1.61)$$

Las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden, cuando sus **coeficientes son constantes** [23] [24] se pueden resolver de una manera sistemática, las cuales primero deben tener una estructura similar a la siguiente ecuación, donde a , b y c son coeficientes reales y diferentes de cero

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1.62)$$

Este tipo de ecuaciones siempre tienen dos soluciones lineales independientes que son y_1 y y_2 que son aplicables en cualquier intervalo con una solución general que se expresa como

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \quad (1.63)$$

Donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. El poder hallar estas dos soluciones, y_1 y y_2 , es agregando una función solución y sus derivadas después de multiplicarlas por algunas constantes. La única función elemental cuyas derivadas son múltiplos constantes de la misma función exponencial es e^{mx} , donde m es una constante, por lo tanto

$$\begin{aligned} y &= e^{mx} \\ y' &= me^{mx} \\ y'' &= m^2e^{mx} \end{aligned}$$

Sustituyendo estas tres funciones en (1.62), se obtiene

$$a(m^2e^{mx}) + b(me^{mx}) + c(e^{mx}) = 0$$

Factorizando la expresión anterior y simplificando

$$\begin{aligned} e^{mx}(am^2 + bm + c) &= 0 \\ am^2 + bm + c &= 0 \end{aligned}$$

Esta última expresión algebraica obtenida es llamada **ecuación característica**, ya que se obtienen los valores aceptables de m que caracterizan la solución de una ecuación diferencial dada. Para resolver el polinomio de segundo grado se resuelve mediante la fórmula cuadrática o fórmula general

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.64)$$

Esto da los valores permisibles de m y las soluciones son

$$y_1 = e^{m_1x} \quad y_2 = e^{m_2x} \quad (1.65)$$

Ejemplo 1.8.3: EDO de segundo orden homogénea

Resolver la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden.

$$3y'' - 4y' + \frac{1}{2}y = 0$$

Con valor inicial de

$$y(0) = 2 \quad y \quad y'(0) = 0$$

Resolución:

1. Determinando los coeficientes constantes a , b y c .

$$a = 3 \quad b = -4 \quad c = 1/2$$

2. Sustituyendo en (1.64), las constantes.

a) Para m_1 , el signo \pm será positivo.

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{-(-4) + \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(1/2)}}{2(3)} \\ &= \frac{4 + \sqrt{10}}{6} \end{aligned}$$

b) Para m_2 , el signo \pm será negativo.

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{-(-4) - \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(1/2)}}{2(3)} \\ &= \frac{4 - \sqrt{10}}{6} \end{aligned}$$

3. Sustituyendo los valores en las soluciones en (1.65)

$$y_1 = e^{\frac{4+\sqrt{10}}{6}x} \quad y_2 = e^{\frac{4-\sqrt{10}}{6}x}$$

4. Sustituyendo en la ecuación (1.63).

$$y = C_1 e^{\frac{4+\sqrt{10}}{6}x} + C_2 e^{\frac{4-\sqrt{10}}{6}x}$$

5. Obtenida la solución solución general, se evalúa las condiciones iniciales, tomando el primer valor inicial donde $y(0) = 2$ y sustituyendo en los valores de $x = 0$ y $y = 2$.

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 e^{\frac{4+\sqrt{10}}{6}(0)} + C_2 e^{\frac{4-\sqrt{10}}{6}(0)} \\ 2 &= C_1 e^0 + C_2 e^0 \\ 2 &= C_1 + C_2 \end{aligned}$$

6. Al no tener solución ya sea para C_1 o C_2 , se aplica la segunda condición inicial, donde la ecuación general se debe derivar respecto a la variable independiente, en este caso es x .

$$y = \frac{4 + \sqrt{10}}{6} C_1 e^{\frac{4+\sqrt{10}}{6}x} + \frac{4 - \sqrt{10}}{6} C_2 e^{\frac{4-\sqrt{10}}{6}x}$$

7. Una vez derivado, se procede a ocupar la segunda condición de frontera $y'(0) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4 + \sqrt{10}}{6} C_1 e^{\frac{4+\sqrt{10}}{6}(0)} + \frac{4 + \sqrt{10}}{6} C_2 e^{\frac{4-\sqrt{10}}{6}(0)} \\ 0 &= \frac{4 + \sqrt{10}}{6} C_1 e^0 + \frac{4 + \sqrt{10}}{6} C_2 e^0 \\ 0 &= \frac{4 + \sqrt{10}}{6} C_1 + \frac{4 + \sqrt{10}}{6} C_2 \end{aligned}$$

8. Se obtienen dos ecuaciones y hay dos incógnitas, C_1 y C_2 , se procede a resolver el sistema de ecuaciones. Obteniendo

$$C_1 = -342/1291 \quad \text{y} \quad C_2 = 1291/570$$

9. Sustituyendo los valores obtenidos en la solución general para obtener la solución particular.

$$y = -\frac{342}{1291} e^{\frac{4+\sqrt{10}}{6}x} + \frac{1291}{670} e^{\frac{4-\sqrt{10}}{6}x}$$

Para resolver las ecuaciones lineales no homogéneas es favorable el utilizar el método de **variación de parámetros** [23] [24]. El método consiste en volver primero una ecuación no homogénea en homogénea relacionada (y_h) y resolverla llegando a la ecuación (1.63).

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{1.66}$$

Posteriormente para la solución particular de la ecuación no homogénea (y_p), de la forma de la ecuación 1.60, las constantes de la ecuación (1.66) se sustituyen por u_1 y u_2 .

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \tag{1.67}$$

Para hallar las funciones u_1 y u_2 se ocupan las siguientes formulas.

$$u_1 = - \int \frac{y_2 \cdot R(x)}{W} dx \tag{1.68}$$

$$u_2 = \int \frac{y_1 \cdot R(x)}{W} dx \tag{1.69}$$

Donde y_1 y y_2 son soluciones de la homogénea, $R(x)$ es la que aparece en la parte derecha de la ecuación no homogénea y la W que es el **Wronskiano** de las soluciones y_1 y y_2 . Para determinar el Wronskiano se ocupa la siguiente ecuación, por el método de determinante.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \tag{1.70}$$

Y para obtener la solución general de la ecuación diferencial no homogénea va a ser la suma de la solución particular más la solución homogénea relacionada.

$$y = y_p + y_h = u_1 y_1 + u_2 y_2 + C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{1.71}$$

Ejemplo 1.8.4: EDO de segundo orden no homogénea

Resolver la siguiente ecuación diferencial.

$$y'' - 4y = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Resolución:

1. Pasar la ecuación no homogénea a homogénea.

$$y'' - 4y = 0$$

2. Determinemos los coeficientes constantes a , b y c .

$$a = 1 \quad b = 0 \quad c = -4$$

3. Sustituyendo en la ecuación (1.64), las constantes.

- a) Para m_1 , el signo \pm será positivo.

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{0 + \sqrt{0^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

- b) Para m_2 , el signo \pm será negativo.

$$\begin{aligned} m_3 &= \frac{0 - \sqrt{0^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} \\ &= -2 \end{aligned}$$

4. Sustituyendo los valores de m_1 y m_2 en la ecuación (1.65).

$$y_1 = e^{2x} \quad y \quad y_2 = e^{-2x}$$

5. Sustituyendo en la ecuación (1.66).

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

6. Para obtener el Wronskiano.

- a) Primero se obtienen las derivadas de y_1 y y_2 .

$$y_1' = 2e^{2x} \quad y \quad y_2' = -2e^{-2x}$$

- b) Generamos la matriz.

$$W = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{pmatrix}$$

- c) Se ocupa el método de la determinante.

$$W = (e^{2x})(-2e^{-2x}) - (e^{-2x})(2e^{2x}) = -4$$

7. Se procede a determinar las funciones u_1 y u_2 .

a) Para la función u_1 se ocupa (1.68).

$$\begin{aligned} u_1 &= - \int \frac{e^{-2x} \cdot 1/2e^{2x} \cdot x}{-4} dx \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4} \int x dx \\ &= \frac{1}{16} x^2 \end{aligned}$$

b) Para la función u_2 se ocupa (1.69).

$$\begin{aligned} u_2 &= \int \frac{e^{2x} \cdot 1/2e^{2x} \cdot x}{-4} dx \\ &= \frac{1}{2 \cdot (-4)} \int e^{4x} x dx \\ &= -\frac{1}{1298} (4x - 1)e^{4x} \end{aligned}$$

8. Sustituyendo en (1.67)

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{16} x^2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{1298} (4x - 1)e^{4x} \cdot e^{-2x} \\ &= \frac{1}{16} x^2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{1298} (4x - 1)e^{2x} \\ &= e^{2x} \left[\frac{1}{16} x^2 - \frac{1}{1298} (4x - 1) \right] \end{aligned}$$

9. La solución general sigue la ecuación (1.71).

$$y = e^{2x} \left[\frac{1}{16} x^2 - \frac{1}{1298} (4x - 1) \right] + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

En matemática, la **ecuación de Cauchy-Euler**, se trata de una ecuación con coeficientes variables cuya solución general siempre se puede expresar en términos de potencias, senos, cosenos, funciones logarítmicas y exponenciales. Este método de solución es bastante similar al de las ecuaciones con coeficientes constantes porque se debe resolver la homogénea asociada. La ecuación de Cauchy-Euler sigue la siguiente forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \quad (1.72)$$

Donde los coeficientes a_0, a_{n-1}, \dots, a_0 son constantes reales. La ecuación de Cauchy-Euler tiene la característica de que el grado $k = n, n-1, \dots, 1, 0$ de el grado de la potencia x^k coincide con el orden k de la diferencial $d^k y/dx^k$. Algunos ejemplos son

$$3x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} x \frac{dy}{dx} + y = 5x^3 e^{2x}$$

Para empezar la resolución de este tipo de ecuaciones, primero se debe resolver como si fuera una ecuación homogénea y posteriormente resolver la parte no homogénea por variación de parámetros. Para la solución de la ecuación diferencial de Cauchy, se supone que dicha solución tiene la forma $y = x^m$ donde m será

una variable por determinar en la cual dependiendo de los valores que resulten viene dada la solución. Al aplicar esta solución se deben encontrar las derivadas que aparezcan en la ecuación diferencial, realizar las respectivas sustituciones y proceder a resolver la ecuación polinómica en función de m que resulte. Supongamos que tenemos una ecuación de Cauchy-Euler de segundo grado homogénea

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$$

Así si $y = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial siempre que m sea una solución de la ecuación auxiliar. Como la ecuación diferencial es de segundo orden, se debe determinar la segunda derivada.

$$\begin{aligned} y &= x^m \\ y' &= mx^{m-1} \\ y'' &= m(m-1)x^{m-2} \end{aligned}$$

Al realizar las sustituciones en la ecuación diferencial, se tiene

$$a_2x^2m(m-1)x^{m-2} + a_1mx^{m-1} + a_0x^m = 0$$

Realizando las multiplicaciones de términos semejantes en x , se llega

$$a_2m(m-1)x^m + a_1mx^m + a_0x^m = 0$$

Aplicando factor común

$$x^m[a_2m(m-1) + a_1m + a_0] = 0$$

Como $x^m \neq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} a_2m(m-1) + a_1m + a_0 &= 0 \\ a_2m^2 - a_2m + a_1m + a_0 &= 0 \\ a_2m^2 + (a_1 - a_2)m + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

Hay tres casos distintos a considerar que depende de si las raíces de esta ecuación cuadrática son reales y distintas, reales e iguales o complejas. En el ultimo caso las raíces aparecen como un par conjunto.

Caso I: Raíces reales y distintas Sean m_1 y m_2 las raíces reales, con $m_1 \neq m_2$. Entonces $y_1 = x^{m_1}$ y $y_2 = x^{m_2}$ forman un conjunto fundamental de soluciones. Por consiguiente, la solución general es:

$$y = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2} \tag{1.73}$$

Caso II: Raíces reales repetidas Si las raíces son repetidas (esto es, si $m_1 = m_2$), la solución general es de la forma

$$y = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_1} \ln x \tag{1.74}$$

Caso III: Raíces complejas conjugadas Si la ecuación característica de segundo orden tiene las raíces complejas conjugadas, entonces $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, donde α y $\beta > 0$ son reales, entonces una solución

$$y = C_1x^{\alpha+i\beta} + C_2x^{\alpha-i\beta}$$

O visto de una solución general [23]

$$y = x^\alpha [C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x)] \tag{1.75}$$

Ecuaciones con coeficientes constantes	Soluciones generales
$y' + \alpha y = 0$	$y = C_1 e^{-\alpha x}$
$y'' + \alpha y = 0, \alpha > 0$	$y = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)$
$y'' - \alpha y = 0, \alpha > 0$	$\begin{cases} y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} & \text{o} \\ y = C_1 \cosh(\alpha x) + C_2 \sinh(\alpha x) \end{cases}$
Ecuación de Cauchy-Euler	Soluciones generales, $x > 0$
$x^2 y'' + x y' - \alpha y = 0, \alpha \geq 0$	$\begin{cases} y = C_1 x^{-\alpha} + C_2 x^{\alpha} & \alpha > 0 \\ y = C_1 + C_2 \ln(x) & \alpha = 0 \end{cases}$
Ecuación paramétrica de Bessel ($\nu = 0$)	Soluciones generales, $x > 0$
$x y'' + y' + \alpha^2 x y = 0$	$y = C_1 J_0(\alpha x) + C_2 Y_0(\alpha x)$
Ecuación de Legendre ($n = 0, 1, 2, \dots$)	Las soluciones particulares son polinomios
$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$	$\begin{aligned} y &= P_0(x) = 1, \\ y &= P_1(x) = x, \\ y &= P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ y &= \dots = \dots \end{aligned}$

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP)

Esta disciplina suele ser de las más confusas para el alumno, debido a que se debe tener suficiente dominio sobre álgebra, identidades trigonométricas, hiperbólicas, calculo, teoremas, saber resolver EDO, así como tener conocimiento mínimo en programación, ya que muchas soluciones de las parciales son soluciones gráficas. Las ecuaciones diferenciales parciales tiene una gran aplicación tanto física como matemática, ya que permite evaluar el comportamiento en dos o más variables en un sistema [23] [25], ya que en el área de ingeniería y sobre todo cuando recién se esta en formación, es común trabajar con ejercicios de idealidad y referirse a tablas para la obtención de ciertos datos, pero en la vida cotidiana se ven involucrados muchos factores que impiden trabajar con procesos ideal. Empezando por definir que las **Ecuaciones Diferenciales Parciales** (EDP) son similares a las **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias** con la diferencia que la función ahora depende de más de una variable. De una forma más precisa, teniendo una función $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, una ecuación diferencial parcial en u es una ecuación que relaciona cualquiera de las derivadas parciales de u entre sí y/o con cualquiera de las variables (x_1, x_2, \dots, x_n) y u . Antes de empezar con los ejemplos, se necesita conocer la notación que se maneja en las EDP. En vez de poner algo difícil de manejar como $\frac{\partial u}{\partial x}$, se puede escribir escribirla como

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Para derivadas de orden superior, se leen los subíndices de izquierda a derecha, por ejemplo

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$u_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Es importante categorizar las EDP por su **orden**, así como se hizo con las EDO, sucediendo lo mismo [25] [26] [27]. Se define el orden de la EDP de acuerdo a la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación, por ejemplo si se tiene $u_{xxx} + u_{xy} - u_y = 0$, la derivada de mayor orden es u_{xxx} , la cual indica que es de tercer orden. Al igual que con las ODE, la variable dependiente en una EDP generalmente se desconoce y se debe resolver. Una solución de una EDP, entonces, es cualquier función u que satisface la EDP de manera idéntica, es decir, para todos los valores posibles de la variables. Con frecuencia, se buscan

funciones que sean soluciones de un EDP dado en alguna **región restringida** [23] [26]. Además, para garantizar que nunca haya un problema con el orden de diferenciación, se necesita cualquier solución u de n -ésimo orden EDP para tener la propiedad de que todas las n -ésimas derivadas parciales de u existen y son continuos.

2.1. EDP el comienzo

Para resolver una EDO de este tipo

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Se integra por partes y se obtiene $y = C$, algo igual ocurre con las EDP, excepto que hay que recordar que son derivadas parciales, por lo que cualquier antiderivada que se tome será, en un sentido, *antiderivadas parciales* o *integrales parciales* [26]. Sí se tiene EDP de la forma $u_x = 0$, donde únicamente hay una variable independiente que es x . Para ser más precisos el orden de la función corresponde a $u = u(x, y)$.

Para resolver

$$\begin{aligned} u_x &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \partial u &= (0)\partial x \\ \int \partial u &= 0 \int \partial x \\ u &= f(y) \end{aligned}$$

Donde f es alguna función arbitraria en y y representa una **solución general** de la EDP $u_x = 0$. Sí se quiere determinar una solución particular, se ven involucradas **funciones arbitrarias** o **condiciones de frontera** [26] [27].

Ejemplo 2.1.1: Resolver la primera EDP

Buscar la solución general de $u = (x, y)$ de la función

$$u_x = x^2 + y^2$$

Resolución:

1. Aplicando la integra en función de x

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial u}{\partial x} dx &= \int (x^2 + y^2) dx \\ u(x, y) &= \frac{x^3}{3} + xy^2 + f(y) \end{aligned}$$

Donde $f(y)$ es una función arbitraria de y .

Ejemplo 2.1.2: Resolver la siguiente EDP

Buscar la solución general de $u = (x, y, z)$ de la función

$$u_{xzz} = x - yz + y^3$$

Resolución:

1. Se resuelve mediante la primera integral en función de z .

$$\int \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} dz = \int (x - yz + y^3) dz$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = xz + \frac{1}{2}yz^2 + y^3z + f(x, y)$$

2. Nuevamente, se aplica la segunda integral en función de z .

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dz = \int \left[xz + \frac{1}{2}yz^2 + y^3z + f(x, y) \right] dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}xz^2 + \frac{1}{6}yz^3 + \frac{1}{2}y^3z^2 + zf(x, y) + g(x, y)$$

3. Por ultimo, se realiza la ultima integral, en función de la variable x

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int \left[\frac{1}{2}xz^2 + \frac{1}{6}yz^3 + \frac{1}{2}y^3z^2 + zf(x, y) + g(x, y) \right] dx$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4}x^2z^2 + \frac{1}{6}xyz^3 + \frac{1}{2}xy^3z^2 + zf(x, y) + g(x, y) + h(y, z)$$

Donde finalmente f, g y h son funciones arbitrarias.

De seguro existirá la pregunta de ¿por qué las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ al ser integradas respecto a x pasaron iguales? La respuesta es que si se tiene, por suponer, una función sencilla $u_x = f(x)$, en función de $u(x, y)$ y se integra respecto a x , se obtendrá otra función de x . Sin embargo, también se obtendrá una *constante arbitraria*, que es, en este caso, una función arbitraria de y . Así que

$$\int f(x) dx = f_1(x) + g(y)$$

En todo caso, se puede transcribir como

$$u(x, y) = f_1(x) + g(y)$$

2.2. Condiciones de frontera

Cuando se habla de edp la pregunta siempre será ¿cómo resolverla? Para esto, siempre habrá condiciones de frontera que satisfagan las condiciones de frontera en un entorno físico o condiciones iniciales. Por poner un ejemplo, la ecuación de calor se define por [26] [27] [28]

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{2.1}$$

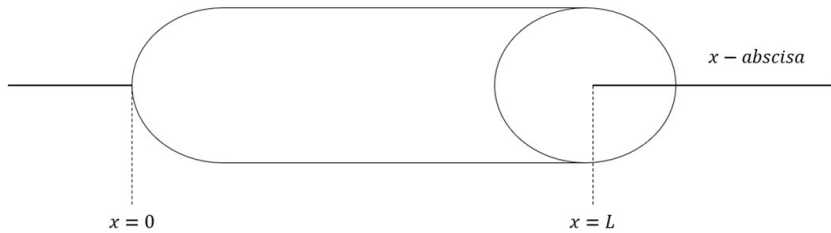


Figura 2.2.1: Tubería metálica $u(x, t)$ = temperatura del punto x , en el tiempo t

Donde, α es una constante y la función $u = u(x, t)$ representa la temperatura en un punto x a lo largo de una pieza estrecha de material, en un tiempo t (como se muestra en la figura 2.2.1). Al resolver la ecuación (2.1) existirá múltiples soluciones, pero solo una será predeterminada el comportamiento, bajo las condiciones de frontera o iniciales que se establezcan, conocida como **solución única**.

Parece bastante claro que no se puede conocer la temperatura a través del tiempo si no se tiene claro a temperatura que esta ocurriendo en este preciso momento, o al menos, en algún punto definido en el tiempo. De modo que se debe esperar que se proporcione al dato, o se pueda medir. Es llamado *temperatura inicial* a la temperatura en la que inicia la transferencia de calor, cuando el tiempo $t = t_0$, es decir

$$u(x, t_0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.2)$$

Llamado como **condición inicial**. En la práctica, el tiempo generalmente se toma como un valor inicial de $t_0 = 0$ [27]. ¿Qué requisitos adicionales son necesarios para resolver la ecuación (2.1)? Resulta que la EDP se deriva del supuesto de que toda la pieza de material está aislado excepto, posiblemente, en sus extremos, y que el calor *fluye* sólo en la dirección x . Por tanto, se necesita saber que sucede en los extremos. En la práctica, generalmente los extremos del tubo están bajo control de los experimentadores, así, por ejemplo, el extremo izquierdo puede mantenerse a una constante temperatura de u_0 grados, es decir,

$$u(0, t) = u_0, \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

Alternativamente, si se aísla el extremo derecho de la tubería, matemáticamente se representaría

$$u(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.4)$$

Las ecuaciones (2.3) y (2.4) son llamadas **condiciones de frontera** y en sistema que sea consistente con la EDP (2.1), esta sujeta a las condiciones (2.2), (2.3) y (2.4). En la práctica, una de las variables a menudo representará el tiempo, por lo que la condición lateral será una condición inicial, y el problema será un valor inicial problema. Ahora, resulta que el problema del valor en la frontera inicial de las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) tiene una solución única, llamando a este problema un problema **bien planteado**. Para ser precisos, un problema de valor inicial o valor límite inicial está bien planteado si

1. Existe una solución.
2. Solo existe una solución de este tipo, es decir, la solución es única.
3. El problema es estable, es decir, que el problema no existen cambios en las condiciones iniciales o perturbaciones.

2.3. Ecuación Diferencial Parcial Lineal

Una EDP lineal, se define exactamente de la misma manera que una EDO lineal, recordando que ésta última se puede escribir de la forma [23] [27]

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

Donde $y = y(x)$ y $y^k = d^k y / dx^k$. Sin embargo, una forma más fructífera de verlo es definir con el llamado operador, L , por lo que

$$L[y] = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y$$

Entonces es fácil demostrar que, si c es cualquier constante y y cualquier función en el dominio de L , entonces

$$L[cy] = cL[y]$$

Y si y_1 y y_2 son funciones en el dominio de L , entonces

$$L[cy] = cL[y]$$

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

Usamos la idea de un operador para definir EDP lineales, primero, dado una EDP en $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, escribiendo la ecuación de la forma

$$L[u] = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Donde f es una función dada.

Ejemplo 2.3.1: Demostración de las EDP lineales

Demostrar las siguientes EDP son lineales, mediante la definición anterior

- a) $u_y = k^2 u_{zz}$
 b) $u_t + yu_y - xy^2 + \cos y = 0$

Resolución:

Caso a)

- Despejando la ecuación, con la finalidad de que este igualada a cero.

$$u_y - k^2 u_{zz} = 0$$

- La ecuación anterior se puede escribir como

$$L[u] = 0$$

- Donde el operador L esta definido por

$$L[u] = u_y - k^2 u_{zz}$$

Caso b)

1. Debido a que la EDP ya esta despejada, lo que se hace es pasar del lado izquierdo las parciales y del otro lado las funciones

$$u_t + yu_y = xy^2 - \cos y$$

2. La ecuación anterior se puede escribir como

$$L[u] = xy^2 - \cos y$$

3. Donde el operador L esta definido por

$$L[u] = u_t + yu_y$$

2.4. Principio de Superposición

Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, de orden ≥ 2 , ya presentan de cierta manera, las EDP lineales son de un nivel aún mayor de dificultad, y sólo un pequeño puñado de ecuaciones específicas se puede resolver por completo. Además, las soluciones explícitas tienden a ser expresable sólo en forma de series infinitas, que requieren sutiles herramientas analíticas para comprender su convergencia y propiedades. Para la gran mayoría de EDP el único medio factible de producir soluciones generales es mediante aproximación numérica. Resolver este tipo de ecuaciones es mediante la aplicación de *funciones especiales* que normalmente no se encuentran en un curso de cálculo básico [25].

La característica distintiva de la linealidad es que permite combinar directamente soluciones para formar nuevas soluciones, a través de un **Principio de Superposición** general [25] [27]. Lineal superposición es universalmente aplicable a todas las ecuaciones y sistemas lineales, incluidos los lineales sistemas algebraicos, ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, ecuaciones diferenciales parciales lineales, problemas lineales de valores iniciales y de frontera, así como: ecuaciones integrales lineales, sistemas de control lineal, etc. Introduciendo la idea básica en el contexto de una sola ecuación diferencial.

Ecuación Diferencial Lineal Homogénea La ecuación siempre estará igualada a cero y no tendrá alguna función de la variable independiente sola f y tiene la forma

$$L[u] = 0 \tag{2.5}$$

Si u_1, u_2, \dots, u_n son soluciones de una ecuación lineal homogénea común $L[U] = 0$, luego la combinación lineal, o superposición $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_n$ es una solución para cualquier elección de constantes c_1, c_2, \dots, c_n , es conocido como el **principio de superposición** para la solución de las EDP. La demostración es sabiendo que u_1, u_2, \dots, u_n son las soluciones que nos da

$$L[u_1] = L[u_2] = \dots = L[u_n] = 0$$

Entonces, para cualquier combinación lineal $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_n$,

$$\begin{aligned} L[c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_n] &= c_1L[u_1] + c_2L[u_2] + \dots + c_nL[u_n] \\ &= c_1(0) + c_2(0) + \dots + c_n(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, en la teoría de las EDO, para una ecuación lineal homogénea de n -ésimo orden, solo se debe encontrar n soluciones linealmente independientes. Entonces, la solución general consta de todas las combinaciones lineales posibles (finitas) de estas soluciones [23]. Sin embargo, la vida es mucho más complicada en el ámbito de las EDP. A menudo, es necesario encontrar infinitas soluciones, u_1, u_2, \dots , de una EDP lineal y homogénea antes de construir una solución general

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n \quad (2.6)$$

Y dado que esta combinación lineal infinita en realidad es una serie infinita [25]. Para cualquier elección dada de los coeficientes, puede divergir para todos los valores de x , o puede converger para algunos valores de x pero no para otros. Baste decir que, a lo largo de este trabajo, se asumirá que la ecuación (2.6) siempre tiende a converger y satisfacer la condición de linealidad, por lo cual

$$L \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} C_n L[u_n] \quad (2.7)$$

Y, por tanto, que si cada u_n es una solución de $L[u] = 0$, entonces también es lineal, (2.6). Cuando se cumple (2.7), se dice que puede diferenciar la serie término por término.

Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea Tiene la forma de

$$L[v] = f \quad (2.8)$$

Donde L es un operador diferencial lineal, v es la función desconocida y f es un función distinta de cero de las variables independientes solas. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} L[v] &= \partial_t v - \partial_x^2 v \\ &= v_t - v_{xx} \\ &= f(t, x) \end{aligned}$$

Donde $f(t, x)$ es una función especificada.

2.5. Series de Fourier de senos y cosenos

Cuando existe un conjunto de funciones de valor real $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$ se dice que es **ortogonal** en un intervalo $[a, b]$ si

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0 \quad ; \quad m \neq n \quad (2.9)$$

Un conjunto ortogonal que es de interés, son el de funciones trigonométricas sin y cos

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{\pi}{p}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right), \cos\left(\frac{3\pi}{p}x\right), \dots, \sin\left(\frac{\pi}{p}x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{p}x\right), \sin\left(\frac{3\pi}{p}x\right), \dots \right\} \quad (2.10)$$

Este conjunto esta en el intervalo $[-p, p]$ y es de especial importancia en la solución de ciertas clases de problemas con valores a la frontera donde intervienen las EDP lineales. Suponiendo que f esta definida en

el intervalo antes mencionado y que se puede desarrollar en una serie ortogonal formada por las funciones trigonométricas del conjunto ortogonal (2.10), es decir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \right] \quad (2.11)$$

Antes de proseguir, observe que se ha elegido escribir el coeficiente de 1 en el conjunto (2.10) como $1/2 a_0$ en lugar de a_0 . Esto es sólo por conveniencia; la fórmula de a_n se reducirá después a a_n para $n = 0$. Al integrar ambos miembros de la ecuación (2.11), desde $-p$ hasta p , se obtiene

$$\int_{-p}^p f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx + b_n \int_{-p}^p \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx \right]$$

Puesto que $\cos(n\pi x/p)$ y $\sin(n\pi x/p)$, $n \geq 1$ son ortogonales a 1 en el intervalo, el miembro de la derecha de la ecuación anterior se reduce a un solo término

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx \\ &= \frac{a_0}{2} x \Big|_{-p}^p \\ &= pa_0 \end{aligned}$$

Despejando para a_0

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx$$

Multiplicando la ecuación (2.11) por $\cos(m\pi x/p)$ e integrando posteriormente

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-p}^p \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx + b_n \int_{-p}^p \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx \right] \end{aligned}$$

Por ortogonalidad, se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx &= 0 & ; & \quad m > 0 \\ \int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx &= 0 \\ \int_{-p}^p \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx &= \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ p & ; \quad m = n \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación se reduce a

$$\begin{aligned} a_n \cdot p &= \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx \\ a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx \end{aligned}$$

Por último, multiplicando (2.11) por $\sin(m\pi x/p)$, integrando y utilizando los resultados

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p \sin\left(\frac{m\pi}{p}x\right) dx &= 0 & ; & \quad m > 0 \\ \int_{-p}^p \sin\left(\frac{m\pi}{p}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx &= 0 \\ \int_{-p}^p \sin\left(\frac{m\pi}{p}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx &= \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ p & ; \quad m = n \end{cases} \end{aligned}$$

Se encuentra que

$$b_n \cdot p = \int_{-p}^p f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx$$

Por lo cual una **serie de Fourier** [25] [27] de una función f definida en el intervalo $(-p, p)$ dada por la ecuación (2.11), donde los coeficientes a_0 , a_n y b_n se definen por las tres ecuaciones deducidas

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx \tag{2.12}$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx \tag{2.13}$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx \tag{2.14}$$

Ejemplo 2.5.1: Serie de Fourier

Encuentra la serie de Fourier de f en el intervalo dado. Problema obtenido de [23]

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Resolución:

1. Para obtener a_0 se ocupa la ecuación 2.12. En la que se sustituyen los valores y se evalúan.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx \\ &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (0) dx + \int_0^1 (x) dx \\ &= 0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Para obtener a_n se ocupa la ecuación 2.13. En la que se sustituyen los valores y se evalúan.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx \\ &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{1}x\right) dx \\ &= \int_{-1}^0 (0) \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 (x) \cos(n\pi x) dx \\ &= 0 + \left[\frac{n\pi x \sin(n\pi x) + \cos(n\pi x)}{\pi^2 n^2} \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{n\pi \sin(n\pi) + \cos(n\pi) - 1}{\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

3. Al simplificar la expresión anterior, si se recuerda la identidad de Euler $e^{i\pi} = -1$. Además, que el número de Euler vale $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Por lo cual si elevamos el número de Euler a la n potencia, donde $n \in \mathbb{N}$.

$$(e^{i\pi})^n = e^{i\pi n} = (-1)^n = \cos(n\pi) + i \sin(n\pi)$$

4. Una vez obtenido esta expresión, se sabe que la función $\sin(n\pi) = 0$. Por lo cual se queda establecido como

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

5. Entonces

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n\pi(0) + (-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

6. Para obtener b_n se ocupa la ecuación 2.14. En la que se sustituyen los valores y se evalúan.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx \\ &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{1}x\right) dx \\ &= \int_{-1}^0 (0) \sin(n\pi x) dx + \int_0^1 (x) \sin(n\pi x) dx \\ &= 0 + \left[\frac{\sin(n\pi x) - n\pi x \cos(n\pi x)}{\pi^2 n^2} \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{\sin(n\pi) - n\pi \cos(n\pi)}{\pi^2 n^2} \\ &= \frac{-n\pi(-1)^n}{\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

7. Simplificando la expresión anterior, si $-(-1)^n = (-1)(-1)^n = (-1)^{(n+1)}$

$$b_n = \frac{(-1)^{(n+1)}}{\pi n}$$

8. Por último, queda sustituir los resultados en la ecuación 2.11.

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi x) + \frac{(-1)^{(n+1)}}{\pi n} \sin(n\pi x) \right]$$

Como se observa en la figura 2.5.1, se aprecia el comportamiento gráfico de la serie de Fourier, donde entre más iteraciones se generen la función se aproximara más a la función por partes que se dio en el problema, en los intervalos de $[-1, 1]$.

El esfuerzo que se invierte en la evaluación de las integrales definidas que calculan los coeficientes a_0 , a_n y b_n al desarrollar una función f en una serie de Fourier se reduce significativamente cuando f es una

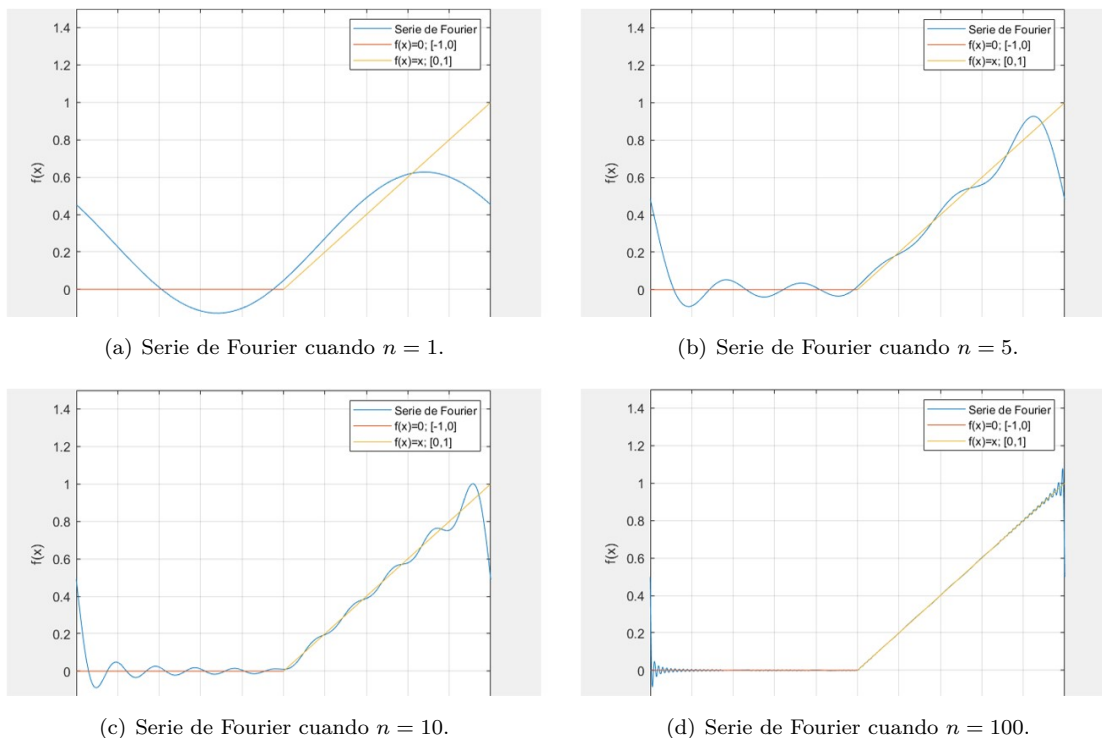


Figura 2.5.1: Sumas parciales de una serie de Fourier.

función par o impar. Recuerde que se dice que una función f es

$$\text{par si } f(-x) = f(x) \quad e \quad \text{impar si } f(-x) = -f(x)$$

Por lo cual, la series de Fourier de senos y cosenos se pueden simplificar. Para una serie de Fourier de una función **par** en el intervalo $(-p, p)$ siendo la **serie de cosenos**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi}{p} x \right) \right] \tag{2.15}$$

Donde

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx \tag{2.16}$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \left(\frac{m\pi}{p} x \right) dx \tag{2.17}$$

En cambio, una serie de Fourier de una función **impar** en el intervalo $(-p, p)$ es la **serie de senos**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \sin \left(\frac{n\pi}{p} x \right) \right] \tag{2.18}$$

Donde

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \left(\frac{m\pi}{p} x \right) dx \tag{2.19}$$

2.6. Separación de Variables para EDP lineales homogéneas

A mediados de la década de 1700, Daniel Bernoulli y, más tarde, Jean le Rond d'Alembert experimentaron con una nueva técnica para producir soluciones lineales de las EDP homogéneas [25]. Este método, llamado **separación de variables**, implicando la reducción de una EDP a una EDO (o, más comúnmente, a una serie de EDO, cada una correspondiente a una variable independiente diferente), un tema recurrente en el estudio de EDP. Teniendo una EDO en la forma $u = u(x, y)$, podemos decir que u es un *solución producto* si

$$u(x, y) = f(x)g(y)$$

Para las funciones f y g . Mas generalmente $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un producto de la solución de la EDP en las n variables x_1, x_2, \dots, x_n si

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$$

Para las funciones $f_1(x_1)f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$. En la práctica es común escribir a $u(x, y) = X(x)Y(y)$, $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, etc.

Ejemplo 2.6.1: EDP lineal homogénea de primer orden

Encuentre todas las soluciones de productos de primer orden, lineales, homogéneas de la EDP

$$u_x + u_y = 0$$

Resolución:

1. Buscamos todas las soluciones de la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Usando los hechos ese.

$$u_x = X'Y \quad \text{y} \quad u_y = XY'$$

2. Sustituyendo en la EDP y obteniendo

$$X'Y + XY' = 0$$

3. ¿Cómo ayuda esto? Bueno, con un poco de álgebra (específicamente, dividir ambos lados por XY) da

$$\frac{X'}{X} = -\frac{Y'}{Y}$$

4. Se ha logrado separar la variable x de la variable y . Diciendo que la ecuación es separable y se ha podido separar las variables. Ahora, se tiene una situación en la que una función de x es igual a una función de y , en otras palabras, donde

$$f(x) = g(y)$$

5. Para todos los valores de x y y en el dominio del problema. Así que elige cualquiera de esos valor x , $x = x_0$. Entonces se obtiene

$$f(x_0) = g(y)$$

6. para todos los valores de y , es decir, que $g(y)$ es una función constante. Entonces, sigue que $f(x)$ es una función constante también. Por lo que, en este punto, se tiene

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \Rightarrow \frac{X'}{X} = -\frac{Y'}{Y} = \lambda \quad (2.20)$$

7. Para alguna constante real λ . Por el contrario, dada cualquier constante real λ , si (2.20) se satisface, entonces $u = XY$ es una solución de la EDP. La ecuación (2.20) en realidad son dos ecuaciones:

$$\frac{X'}{X} = \lambda \quad y \quad \frac{Y'}{Y} = -\lambda$$

8. Por lo tanto, se concluye que $u = XY$ es una solución de la EDP, si y solo si, X y Y satisfacen las EDO

$$X' - \lambda X = 0 \quad y \quad Y' + \lambda Y = 0$$

9. Para lo mismo λ . Las soluciones de producto son

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} \quad y \quad Y(y) = C_2 e^{-\lambda y}$$

10. Sabiendo que $u(x, y) = X(x)Y(y)$ y denotando que $A_n = C_1 C_2$. Entonces

$$\begin{aligned} u(x, y) &= X(x)Y(y) \\ &= C_1 e^{\lambda x} C_2 e^{-\lambda y} \\ &= A_n e^{\lambda x - \lambda y} \\ &= A_n e^{\lambda(x-y)} \end{aligned}$$

11. Aplicando el principio de superposición (2.7).

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda(x-y)}$$

Lo ultimo que faltaría sería proponer valores iniciales para hallar la constante A_n

Aunque parece que se ha encontrado una única solución, en si son combinaciones lineales de soluciones de productos, en muchos casos que serán suficientes para resolver cualquier problema bien planteado que involucre una EDP. En el proceso de resolver estos problemas de valores en la frontera inicial, se encuentran que ciertos valores de λ conducirán a soluciones no triviales de el problema, es decir, a soluciones distintas de la función cero. Para hallar la solución de la ecuación de calor, que corresponde a $u_t = u_{xx}$, donde $\alpha = 1$. Para esto, sabiendo que se puede representar como un producto a $u(x, t) = X(x)T(t)$ y sustituyendo

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

Despejando y hallando la constante, por conveniencia, llamada $-\lambda$

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

O visto de otra manera

$$X'' + \lambda X = 0 \quad y \quad T' + \lambda T = 0$$

Entonces, para cada número real $-\lambda$, se debe resolver ambas EDO. La forma de la solución del primer EDP dependerá del signo de λ (esto no sucedió en el ejemplo anterior), por lo que se consideran tres casos:

1. Caso 1: $\lambda = \alpha^2 > 0$

$$X = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x) \quad \text{y} \quad T = e^{-\alpha t}$$

Donde las eigenfunciones son las funciones $\cos(\alpha x)$ y $\sin(\alpha x)$. Para hallar la eigenfunción será $u(x, t) = X(x)T(t)$

$$u(x, t) = e^{-\alpha t}[C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)]$$

2. Caso 2: $\lambda = \alpha^2 = 0$

$$X = C_1 x + C_2 \quad \text{y} \quad T = 1$$

Donde los eigenfunciones son las funciones x y 1 . Para hallar la eigenfunción será $u(x, t) = X(x)T(t)$

$$u(x, t) = C_1 x + C_2$$

3. Caso 3: $\lambda = \alpha^2 < 0$

$$X = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} \quad \text{y} \quad T = e^{-\alpha t}$$

Donde las eigenfunciones son las funciones $e^{\alpha x}$ y $e^{-\alpha x}$. Para hallar la eigenfunción será $u(x, t) = X(x)T(t)$

$$u(x, t) = e^{-\alpha t}[C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}]$$

Ejemplo 2.6.2: Ecuación de Calor

Tomando de referencia la figura 2.2.1 y la ecuación (2.1). Considere una varilla delgada de longitud L con una temperatura inicial $f(x)$ en toda la varilla y cuyos extremos se mantienen a temperatura cero durante todo el tiempo $0 < t$. Encuentre la función de la temperatura $u(x, t)$ a lo largo varilla con valores en la frontera.

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

Resolución:

1. Usando el producto $u(x, t) = X(x)T(t)$, para usar el método de variables separables. Entonces, si $-\lambda$ es la constante de separación, las dos igualdades quedan

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T} = -\lambda$$

2. Se sabe que dicha ecuación conduce a dos EDO

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ T' + \alpha^2 \lambda T &= 0 \end{aligned}$$

3. Antes de resolver la ecuación en X , se debe analizar las condiciones de frontera que se están aplicando para $u(x, t) = X(x)T(t)$

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad \text{y} \quad u(L, t) = X(L)T(t) = 0$$

4. Puesto que tiene sentido esperar que $T(t) \neq 0$ para toda t , las igualdades anteriores valen sólo si $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$. Estas condiciones frontera homogéneas junto con las ED homogéneas, constituyen un problema regular de Sturm-Liouville [23] [27]:

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X(0) = 0 \quad \text{y} \quad X(L) = 0$$

5. En este ejemplo, se considera tres casos posibles para el parámetro λ , siendo cero, negativo o positivo. Las soluciones correspondientes de las EDP están, dadas por

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 + C_2 x & ; \quad \lambda &= 0 \\ X(x) &= C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x} & ; \quad \lambda &= \beta^2 < 0 \\ X(x) &= C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) & ; \quad \lambda &= \beta^2 > 0 \end{aligned}$$

6. Se debe hallar la ecuación que sea **no trivial**. Para esto se deben ocupar los valores de frontera antes ya establecidos

- a) Para donde $\lambda = 0$.

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

- 1) Para la condición de frontera $X(0) = 0$.

$$0 = C_1 + C_2(0)$$

$$0 = C_1$$

$$X(x) = C_2 x$$

- 2) Para la condición de frontera $X(L) = 0$.

$$0 = C_2(L)$$

$$C_2 = 0/L$$

$$C_2 = 0$$

$$X(x) = 0$$

Por lo cual, para $\lambda = 0$ en estas condiciones, da una solución trivial

- b) Para donde $\lambda < 0$.

- 1) Para la condición de frontera $X(0) = 0$.

$$0 = C_1 e^{-\beta(0)} + C_2 e^{\beta(0)}$$

$$0 = C_1 + C_2$$

$$C_1 = -C_2$$

$$X(x) = -C_2 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x}$$

$$X(x) = C_2 (e^{\beta x} - e^{-\beta x})$$

2) Para la condición de frontera $X(L) = 0$.

$$(0) = C_2 \left[e^{\beta(L)} - e^{-\beta(L)} \right]$$

$$C_2 = \frac{0}{e^{\beta L} - e^{-\beta L}}$$

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = 0$$

$$X(x) = 0$$

Por lo cual, para $\lambda < 0$ en estas condiciones, da una solución trivial

c) Para donde $\lambda > 0$.

1) Para la condición de frontera $X(0) = 0$.

$$(0) = C_1 \cos[\beta(0)] + C_2 \sin[\beta(0)]$$

$$0 = C_1$$

$$C_1 = 0$$

$$X(x) = C_2 \sin(\beta x)$$

2) Para la condición de frontera $X(L) = 0$.

$$(0) = C_2 \sin[\beta(L)]$$

3) Para no obtener una solución no trivial, se debe obtener que $C_2 \neq 0$ y $\sin(\beta L) = 0$. Siendo que esta ecuación solo se satisface cuando $\beta L = n\pi$ o $\beta = n\pi/L$. Por lo cual, la solución no trivial cuando $\lambda_n = \beta_n^2 = (n\pi/L)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Estos valores de λ son los **eigenvalores** del problema y las **eigenfunciones** son

$$X(x) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

7. Se resuelve la EDO para $T(t)$, donde sabiendo que la única función que no sea trivial es para $\lambda > 0$

$$T(t) = C_3 e^{-\alpha^2 \beta^2 t}$$

$$T(t) = C_3 e^{-\alpha^2 (n\pi/L)^2 t}$$

8. Sustituyendo por $u(x, t) = X(x)T(t)$ y donde $A_n = C_2 C_3$

$$u(x, t) = A_n e^{-\alpha^2 (n\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

9. Ocupando el principio de superposición

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha^2 (n\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

10. Se procede a ocupar la condición de frontera donde $u(x, 0) = f(x)$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha^2 (n\pi/L)^2 (0)} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

11. Aplicando la serie Fourier en serie de senos

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

12. Suponiendo que la temperatura inicial es $u(x, 0) = 50$, $L = 1$ y $\alpha = 0.5$. Se evalúa A_n

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 50 \sin\left(\frac{n\pi}{1}x\right) dx \\ &= 100 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \\ &= -100 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 \\ &= 100 \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \\ &= 100 \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n\pi} \\ &= \frac{100}{n\pi} [1 + (-1)^{n+1}] \end{aligned}$$

13. Sustituyendo en la ecuación

$$u(x, t) = \frac{100}{\pi} \sum_1^{\infty} \left[\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n} \right] e^{-(0.5)^2 (n\pi)^2 t} \sin(n\pi x)$$

Se puede observar en la figura 2.6.1 la representación gráfica 3D del problema.

Ahora que sucedería si tuviéramos una EDP que depende de tres variables, por ejemplo la función en $u(x, y, z)$.

$$u_x - 2u_{yy} + 3u_z = 0$$

Como se vio en el ejemplo de dos variables, se sabe que $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, se sustituye y se obtiene que

$$X'YZ - 2XY''Z + 3XYZ' = 0$$

Como mínimo, se puede separar cualquiera de las variables de la otra dos. Por ejemplo, escribir

$$\frac{X'}{X} = \frac{2Y''}{Y} - \frac{3Z'}{Z} = -\lambda_1$$

Donde a cada lado de la ecuación separada debe ser constante. Ahora, inmediatamente se obtiene la EDO

$$X' + \lambda_1 X = 0$$

En cuanto a la segunda mitad, se puede reescribir como

$$\frac{2Y''}{Y} = \frac{3Z'}{Z} - \lambda_1$$

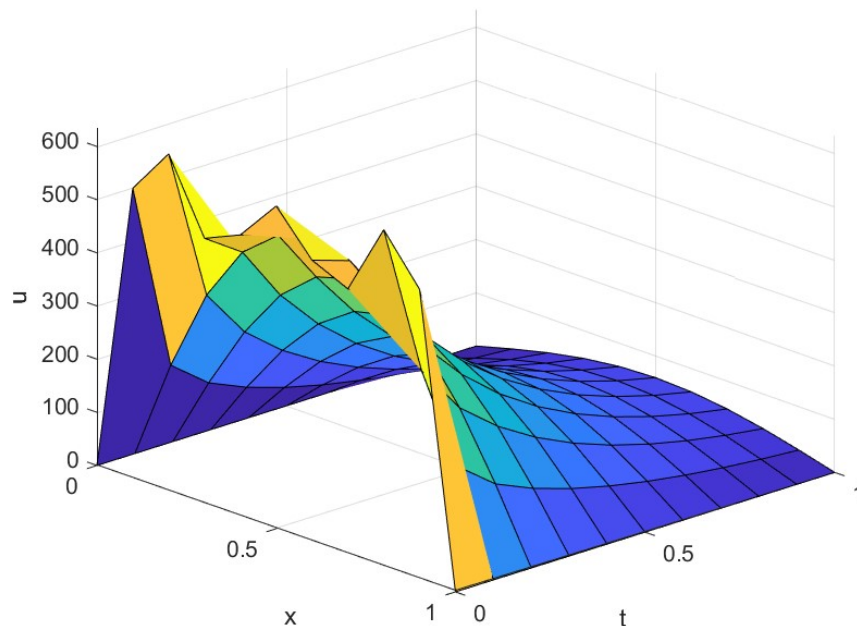


Figura 2.6.1: Comportamiento gráfico de $u(x, t)$, cuando $t = 1$.

Y se ha separado las variables y y z . Por lo tanto, se concluye que

$$\frac{2Y''}{Y} = \frac{3Z'}{Z} - \lambda_1 = -\lambda_2$$

Para cualquier λ_2 real, o

$$2Y'' + \lambda_2 Y = 0 \quad \text{y} \quad 3Z' + (\lambda_2 - \lambda_1)Z = 0$$

Por lo tanto, $u = XYZ$ es una solución si y solo si existen constantes λ_1 y λ_2 tal que X , Y y Z satisfacen las tres EDO anteriores (con, por supuesto, la mismo λ_1 y el mismo λ_2 en cada uno). No se quiere dar la impresión de que todas las EDP lineales y homogéneas son separables. Sin embargo, muchas de las ecuaciones que son importantes en las aplicaciones son separables (más bien, muchos de los las simplificaciones que se realizan al derivar EDP se realizan de modo que el resultado de las EDP son lineales y, a menudo, separables). Es muy fácil demostrar que un EDP es separable, sin embargo, es más difícil de probar que un EDP no es separable.

2.7. Las tres grandes EDP

Una EDP lineal de segundo orden con dos variables independientes y con coeficientes constantes se puede clasificar en uno de los tres tipos [28] [29]. Esta clasificación sólo depende de los coeficientes de las derivadas de segundo orden. Por supuesto, suponemos que al menos uno de los coeficientes A , B y C es distinto de cero.

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0 \quad (2.21)$$

Donde A , B , C , D , E , y F son nuestras constantes reales y esta ecuación se clasifica en

Hiperbólica	si	$B^2 - 4AC > 0$
Parabólica	si	$B^2 - 4AC = 0$
Eléptica	si	$B^2 - 4AC < 0$

Se hace mención de esta clasificación, debido a que tiene una gran importancia matemática y va más allá de su conexión con problemas físicos. Esta clasificación corresponde a la ecuación de calor la cual es una parabólica, la ecuación de onda es hiperbólica y por ultimo, la ecuación de Laplace es una elíptica. De hecho, cada una de estas ecuaciones es una ecuación estándar o ecuación prototipada de cada uno.

2.8. Problemas no Homogéneos

Se dice que un problema con valores en la frontera es **no homogéneo** si la EDP o las condiciones de frontera son no homogéneas [26] [29]. Tomando la ecuación (2.1), pero considerando que dicha varilla tiene una longitud finita y consta de una generación de calor a una razón h , la ecuación de calor es

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.22)$$

$$0 < x < L, \quad y \quad t > 0$$

La ecuación (2.22) es no homogénea y se observa con facilidad que no es separable. Por otro lado, se desea resolver la ecuación de calor homogénea $\alpha^2 u_{xx} = u_t$ cuando las condiciones de frontera en $x = 0$ y $x = L$ son no homogéneas, por ejemplo, que las fronteras se mantengan a temperaturas distintas de cero: $u(0, t) = u_0$ y $u(L, t) = u_1$. Aun cuando la sustitución $u(x, t) = X(x)T(t)$ separa a $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, se encuentra rápidamente un obstáculo en la determinación de los eigenvalores y las eigenfunciones porque lo que no se puede concluir nada acerca de $X(0)$ y $X(L)$ de $u(0, t) = X(0)T(t) = u_0$ y de $u(L, t) = X(L)T(t) = u_1$. A continuación se mostraran dos métodos de solución distintos para los diferentes tipos de EDP no homogéneos.

Método 1: Considerando la siguiente EDP con condiciones de frontera independientes del tiempo tales como [23] [27]

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$0 < x < L \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u_0 \quad u(L, t) = u_1 \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < L$$

Donde u_0 y u_1 son constantes. Cambiando la variable dependiente u a una nueva variable dependiente v sustituyendo $u(x, t) = v(x, t) + \xi(x)$, el problema anterior se puede reducir a dos problemas:

$$\text{Problema A : } \begin{cases} \alpha^2 \xi'' + F(x) = 0 \\ \xi(0) = u_0, \quad \xi(L) = u_1 \end{cases}$$

$$\text{Problema B : } \begin{cases} \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t} \\ v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0 \\ v(x, 0) = f(x) - \xi(x) \end{cases}$$

Observe que el problema A implica una EDO que se puede resolver por integración, mientras que el problema B es un EDP homogéneo que se puede resolver por la separación de variables común. Una solución del problema original, es la suma de las soluciones de los problemas A y B .

Ejemplo 2.8.1: EDP no homogénea independiente del tiempo

Resolver el problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu &= \frac{\partial u}{\partial t} & ; & \quad 0 < x < \pi & \quad ; & \quad t > 0 \\ u(0, t) &= 0 & ; & \quad u(\pi, t) = u_0 & ; & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= 0 & ; & \quad 0 < x < \pi \end{aligned}$$

La ecuación diferencial parcial es una forma de la ecuación de calor cuando hay pérdida de calor por radiación de la superficie lateral de una varilla delgada en un medio a temperatura cero. Problema obtenido de [23].

Resolución:

1. Se sustituye a $u(x, t) = v(x, t) + \xi(x)$, dentro de nuestra EDP

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha^2 \xi'' - hv - h\xi = \frac{\partial v}{\partial t}$$

2. La ecuación será homogénea si se hace que ξ satisfaga

$$\alpha^2 \xi'' - h\xi = 0$$

3. Si α^2 y h son positivos, la solución general para la ecuación de segundo orden es

$$\xi(x) = C_1 e^{x\sqrt{h/\alpha^2}} + C_2 e^{-x\sqrt{h/\alpha^2}}$$

4. Aplicando los valores de frontera.

- a) Para $\xi(0) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 e^{(0)\sqrt{h/\alpha^2}} + C_2 e^{-(0)\sqrt{h/\alpha^2}} \\ 0 &= C_1 + C_2 \\ C_1 &= -C_2 \end{aligned}$$

- b) Para $\xi(\pi) = u_0$.

$$\begin{aligned} u_0 &= -C_2 e^{(\pi)\sqrt{h/\alpha^2}} + C_2 e^{-(\pi)\sqrt{h/\alpha^2}} \\ u_0 &= C_2 \left(-e^{\pi\sqrt{h/\alpha^2}} + e^{-\pi\sqrt{h/\alpha^2}} \right) \\ C_2 &= \frac{u_0}{-e^{\pi\sqrt{h/\alpha^2}} + e^{-\pi\sqrt{h/\alpha^2}}} \end{aligned}$$

c) Sustituyendo en la ecuación original

$$\xi(x) = -\frac{u_0}{-e^{\pi\sqrt{h/\alpha^2}} + e^{-\pi\sqrt{h/\alpha^2}}} e^{x\sqrt{h/\alpha^2}} + \frac{u_0}{-e^{\pi\sqrt{h/\alpha^2}} + e^{-\pi\sqrt{h/\alpha^2}}} e^{-x\sqrt{h/\alpha^2}}$$

$$\xi(x) = \frac{u_0}{-e^{\pi\sqrt{h/\alpha^2}} + e^{-\pi\sqrt{h/\alpha^2}}} \left(-e^{x\sqrt{h/\alpha^2}} + e^{-x\sqrt{h/\alpha^2}} \right)$$

$$\xi(x) = u_0 \frac{-e^{x\sqrt{h/\alpha^2}} + e^{-x\sqrt{h/\alpha^2}}}{-e^{\pi\sqrt{h/\alpha^2}} + e^{-\pi\sqrt{h/\alpha^2}}}$$

d) Ocupando identidades hiperbólicas de $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$ y de $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$

$$\xi(x) = u_0 \frac{-\cosh(x\sqrt{h/\alpha^2}) - \sinh(x\sqrt{h/\alpha^2}) + \cosh(x\sqrt{h/\alpha^2}) - \sinh(x\sqrt{h/\alpha^2})}{-\cosh(\pi\sqrt{h/\alpha^2}) - \sinh(\pi\sqrt{h/\alpha^2}) + \cosh(\pi\sqrt{h/\alpha^2}) - \sinh(\pi\sqrt{h/\alpha^2})}$$

$$\xi(x) = u_0 \frac{-\sinh(x\sqrt{h/\alpha^2}) - \sinh(x\sqrt{h/\alpha^2})}{-\sinh(\pi\sqrt{h/\alpha^2}) - \sinh(\pi\sqrt{h/\alpha^2})}$$

$$\xi(x) = u_0 \frac{-2\sinh(x\sqrt{h/\alpha^2})}{-2\sinh(\pi\sqrt{h/\alpha^2})}$$

$$\xi(x) = u_0 \frac{\sinh(x\sqrt{h/\alpha^2})}{\sinh(\pi\sqrt{h/\alpha^2})}$$

5. Ahora el problema queda establecido como

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - hv = \frac{\partial v}{\partial t} \quad ; \quad 0 < x < \pi \quad ; \quad t > 0$$

$$v(0, t) = 0 \quad ; \quad v(\pi, t) = 0 \quad ; \quad t > 0$$

$$v(x, 0) = -\xi(x) \quad ; \quad 0 < x < \pi$$

6. Si se sabe que $v(x, t) = X(x)T(t)$, se obtiene que

$$\frac{X''}{X} = \frac{T' + hT}{\alpha^2 T} = -\lambda$$

7. Donde $\lambda = \beta^2 > 0$, ocupando el método de variable separable para la ecuación

$$X'' + \beta X = 0 \quad y \quad T' + (h + \alpha^2 \beta)T = 0$$

8. Obteniendo la solución respectiva da

$$X(x) = C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)$$

$$T(t) = C_5 e^{-(h + \alpha^2 \beta^2)t}$$

9. Para $X(0) = 0$, por lo que $C_3 = 0$ y para $X(\pi) = 0$, obteniendo que $\beta = n$ donde $n = 1, 2, 3, \dots$ por consiguiente se tiene que

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(h + \alpha^2 n^2)t} \sin(nx)$$

10. Donde

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \xi(x) \sin(nx) dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0 \frac{\sinh(x\sqrt{h/\alpha^2})}{\sinh(\pi\sqrt{h/\alpha^2})} \sin(nx) dx \end{aligned}$$

11. Resolviendo

$$A_n = \frac{2u_0 n \alpha^2 [(-1)^n]}{\pi(h + \alpha^2 n^2)}$$

12. La solución del problema es

$$u(x, t) = u_0 \frac{\sinh(x\sqrt{h/\alpha^2})}{\sinh(\pi\sqrt{h/\alpha^2})} + \frac{2u_0 \alpha^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{h + \alpha^2 n^2} e^{-(h + \alpha^2 n^2)t} \sin(nx)$$

Método 2: Otro tipo de problemas implica una ecuación homogénea dependiente del tiempo y condiciones frontera homogéneas [23] [27]. A diferencia del método 1, en el que $u(x, t)$ se encontró al resolver dos problemas separados, es posible encontrar la solución completa de un problema tal como

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial t} & ; & \quad 0 < x < L & \quad ; & \quad t > 0 \\ u(0, t) &= 0 & ; & \quad u(L, t) = 0 & \quad ; & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & ; & \quad 0 < x < L \end{aligned}$$

Haciendo la suposición de que los coeficientes dependientes del tiempo $u_n(t)$ y $F_n(t)$ se pueden encontrar tanto $u(x, t)$ como $F(x, t)$ en la ecuación (7) se puede desarrollar en las series

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{y} \quad F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Capítulo 3

Métodos numéricos

Durante el trayecto académico de un alumno que tiene como mente fija algún área de exactas para su estudio de licenciatura, maestría o doctorado los métodos tradicionales es enseñar primero la teoría y posteriormente los ejercicios ocupando siempre una pluma, hojas y calculadora científica. Sin embargo, los tiempos cambian reflejándose claramente en las nuevas tecnologías que salen, por ejemplo, un celular de la época 80's no sera el mismo que uno del 2020. El poder resolver cualquier problema de exactas tiene tres caminos diferentes, el primero es de forma analítica, otro gráfico y por ultimo el numérico, es por ello que en este trabajo se pretende instruir al lector en ocupar un software que permita programar, resolver y graficar cierto tipo de ecuaciones de manera rápida, sencilla, ordenada y con un margen de error muy pequeño, que le permita también poder programar desde cero al gusto del lector, es por ellos que se ocupara el programa numérico *MATLAB* (Versión 2020a). Se sabe que hay más programas en el mercado, pero se prefirió ésta fueron las siguientes razones:

- Su paquete es interactivo, fácil de usar, ordenamiento y que no se requiere de un amplio conocimiento de lenguaje de programación.
- Su funcionamiento es rápido, ya que contiene un gran paquete incluido de algoritmos y funciones fiables. Muchos de hecho se encuentran en las siguientes páginas web, en caso de necesitar ayuda:
 - <https://la.mathworks.com/> [31]
 - <https://www.lawebdelprogramador.com/>
- Ofrece excelentes posibilidades a la hora de graficar en planos bidimensionales y tridimensionales.

3.1. Introducción de comandos

MATLAB es un potente lenguaje diseñado para la computación técnica. Su nombre proviene de Laboratorio de Matrices (Matrix Laboratory) esto es a que el tipo básico que gestiona es una matriz. Para empezar con el desarrollo del lenguaje de la programación y análisis numérico es competente conocer el escritorio como esta ordenado, mostrada en Figura 3.1.1.

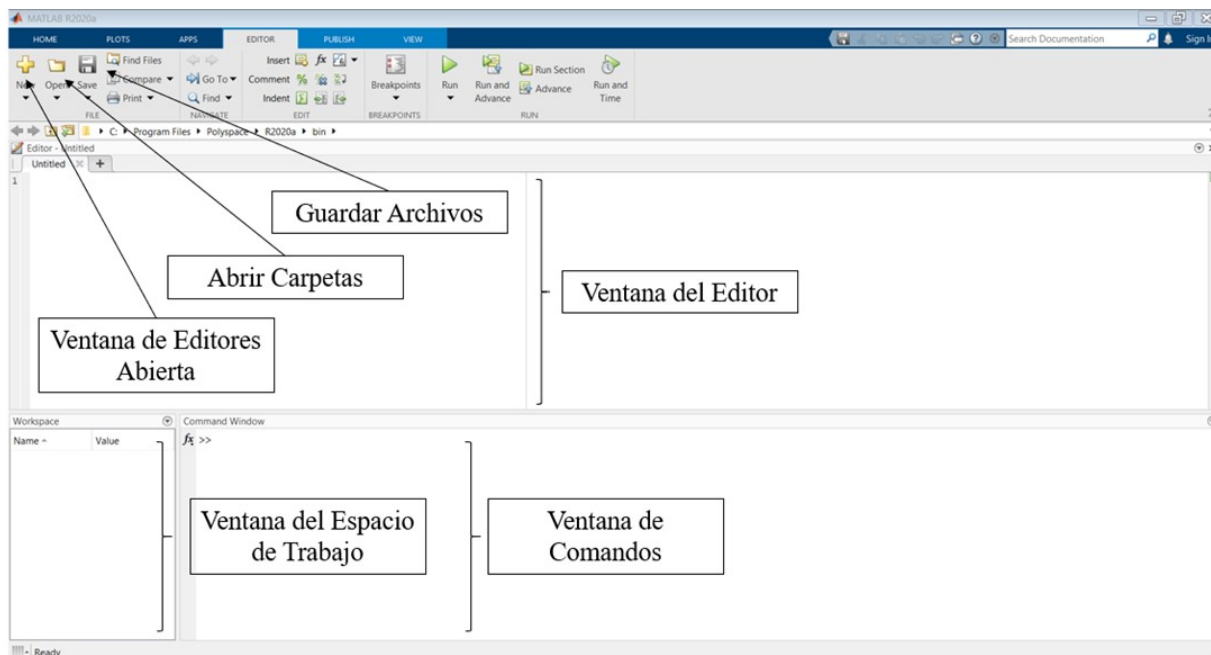


Figura 3.1.1: Escritorio de MATLAB

Tabla 3.1.1: Ventanas de MATLAB [30].

Nombre	Significado	Objetivo
+	Ventana de Editores Abierto	Se puede generar nuevas ventanas de editor e indica cuales están abierta.
Command Window	Ventana de Comando	Ventana principal, se utiliza para introducir variables y ejecutar programas.
Editor Window	Ventana del Editor	Usada para crear y perfeccionar ficheros de script y funciones MATLAB.
New Script	Nueva Ventana de Editor	Generación de nuevos ficheros.
Open	Abrir Carpetas	Puedes abrir carpetas de programas guardados.
Workspace Window	Ventana del Espacio de Trabajo	Proporciona información sobre las variables utilizadas.

En la resolución de los problemas, que se demostraran posteriores a este capítulo, se ocupara la ventana de *Command Window*, esto ya que se facilita a la hora de cambiar comandos, literales y ciertos número, por ello se deben conocer tres parámetros esenciales a la hora de programar, siendo:

El **punto y coma (;)** se utiliza al final de cualquier comando en la ventana del programador, esto para evitar que cuando se corra el programa con **Run and Advances** se visualice en la ventana de comandos.

El **símbolo %** al insertarlo y escribir cualquier cosa a la derecha de este automáticamente el texto se pondrá en verde y lo tomará como un comentario. A la hora de ejecutar cualquier comando este no se verá en la ventana de comandos ni se aplicará en lo que se esté programando.

Y el **comando clc** (teclear clc y pulsar enter) el cual borra el contenido en la ventana de comandos.

Esto debido a medida que se van tecleando y ejecutando comandos en la ventana de comandos, éste se va llenando, por lo que es recomendable poner el primer lugar el comando `clc`.

Las operaciones aritméticas únicamente se pueden efectuar en un escalar (Éstos pueden ser asignadas con una variable):

Tabla 3.1.2: Operaciones aritméticas con escalares.

Operación	Símbolo	Ejemplo
Suma	+	$3 + 4$
Resta	-	$3 - 4$
Multiplicación	*	$3 * 4$
División derecha	/	$3/4$
División izquierda	\	$3 \backslash 4$
Exponencial	^	$3 \wedge 4 (3^4)$
Mayor que	>	$4 > 3$
Igual o mayor que	>=	$4 >= 3 (4 \geq 3)$
Menor que	<	$3 < 4$
Igual o menor que	<=	$3 <= 4 (4 \leq 3)$
Idéntico a	==	$4 == 4 (4 \equiv 4)$

Hay que recalcar que la división a la izquierda es la inversa de la división a la derecha y es ampliamente utilizada para operaciones con matrices [30] [32]. MATLAB al igual que todas las calculadoras científicas ejecuta los cálculos en función de un orden de precedencia.

Tabla 3.1.3: Orden de precedencia.

Precedencia	Operación matemática
1°	Paréntesis. Para paréntesis anidados, el más interno es el que primero se ejecuta.
2°	Exponencial.
3°	Multiplicación, división (igual precedencia).
4°	Suma y resta.

Aparte de las operaciones aritméticas básicas, las expresiones que se construyen en MATLAB pueden contener funciones predefinidas, gracias a tu amplia colección en librerías.

Tabla 3.1.4: Operaciones matemáticas.

Función	Descripción	Ejemplo	Representación
<code>sqrt(x)</code>	Raíz cuadrada	<code>sqrt(3)</code>	$\sqrt{3}$
<code>exp(x)</code>	Exponencial	<code>exp(3)</code>	e^3
<code>abs(x)</code>	Valor absoluto	<code>abs(-3)</code>	$ -3 $
<code>log(x)</code>	Logaritmo natural	<code>log(3)</code>	$\ln 3$
<code>log10(x)</code>	Logaritmo base 10	<code>log10(3)</code>	$\log 3$
<code>factorial(x)</code>	Función factorial	<code>factorial(3)</code>	$3!$
<code>pi</code>	Número π	<code>pi</code>	π

Tabla 3.1.5: Funciones trigonométricas. El valor de x , cual debe estar en radianes.

Función	Descripción	Ejemplo	Representación
$\sin(x)$	Seno del ángulo x	$\sin(\pi/3)$	$\sin \frac{\pi}{3}$
$\cos(x)$	Cos del ángulo x	$\cos(\pi/3)$	$\cos \frac{\pi}{3}$
$\tan(x)$	Tangente del ángulo x	$\tan(\pi/3)$	$\tan \frac{\pi}{3}$
$\cot(x)$	Cotangente del ángulo x	$\cot(\pi/3)$	$\cot \frac{\pi}{3}$

Otra funciones a conocer son las **operaciones lógicas**, las cuales son expresiones matemáticas cuyo resultado es un valor booleano (verdadero o falso). El tipo de dato `logical` representa estados `true` (verdaderos) o `false` (falsos) mediante el uso de los números 1 y 0, respectivamente. Determinadas funciones y operadores de MATLAB devuelven valores lógicos para indicar que se cumple una condición. Es posible usar dichos valores lógicos para indexar un arreglo o ejecutar código condicional [30] [32].

Tabla 3.1.6: Operaciones lógicas.

Función	Significado
Short-circuit <code>&&</code> , <code> </code>	Operaciones lógicas con cortocircuito
<code>&</code>	Encontrar lógica Y
<code>~</code>	Find logical NOT
<code> </code>	Encontrar lógica O
<code>xor</code>	Encontrar lógica exclusiva-O
<code>all</code>	Determine si todos los elementos de la matriz son distintos de cero o verdaderos
<code>any</code>	Determinar si algún elemento de la matriz es distinto de cero
<code>false</code>	Logical 0 (false)
<code>find</code>	Buscar índices y valores de elementos no nulos
<code>islogical</code>	Determinar si la entrada es una matriz lógica
<code>logical</code>	Convertir valores numéricos en lógicos
<code>true</code>	Lógica 1 (verdadera)

3.2. Generación de matrices

Un operador que se utiliza en toda la programación es el signo de `=` (llamado asignación), tiene la finalidad de dar un valor a una variable.

`Nombre_de_la_Variable = Valor_Num_o_expresion_computable`

En la parte de la izquierda de la operación (`Nombre_de_la_Variable`) únicamente puede existir un nombre de la variable, mientras que en la parte derecha (`Valor_Num_o_expresion_computable`) puede ser un número o una expresión computable que pueden incluir números y/o variables que anteriormente se le asignaron previamente valores numéricos. La información (*arrays*) que se almacena y manipula en MATLAB es la estructura fundamental la cual se agrupa en forma de fila o columna, los cuales son llamados **vectores**. Para la creación de un **vector fila** deben teclearse las variables o números, separados por una coma (`,`) o un espacio (*space bar*) y entre un corchete (`[]`). Para un **vector columna**

se puede realizar de dos formas. La primera es hacer un vector fila, luego hacer un cambio de variable agregándole al final un (') y el segundo método es similar que un vector fila, cambiando la separación por un punto y coma (;). Para producir un vector con distancia constante a partir de la especificación del primer termino, de la distancia y del ultimo termino es

$$\text{Nombre_de_la_Variable} = m:q:n$$

Param sera el valor inicial, para q es el espacio entre cada término y para n es el último termino. En ocasiones los vectores se deben mostrar en forma de tabla, para observar los datos obtenido, respeto a las variables medidas. Usando el comando `table` permite la formación de éste, pero con la condición de que los vectores deben tener los mismos tamaños (usando el comando `length (x)` permite saber el número de elementos de cualquier vector) y deben estar en vector columna.

La dirección de un elemento en un vector es su posición en la fila (o columna). Si se tiene un vector, que se llamara `vec`, `vec(k)` se hace referencia al elemento en la posición k . La primera posición es 1. Un elemento de un vector $v(k)$ se puede utilizar como una variables. Por ejemplo, es posible cambiar el valor de un solo elemento de un vector reasignando un nuevo valor a la dirección específica del elemento en cuestión. Esto se hace tecleando: `v(k) = valor`. Un elemento de un vector puede ser utilizado también como variable en expresión matemática. Suponiendo que en el vector `vec` cuenta con diez elementos

```
>> vec = [13 20 32 12 0 1 9 4 40 99]
- - -
vec =
    13 20 32 12 0 1 9 4 40 99
>> vec(3)
- - -
ans =
    32
- - -
vec(7) = 3.14
- - -
ans =
    13 20 32 12 0 1 3.14 4 40 99
- - -
>> vec(10) + vec(6)
- - -
ans =
    100
```

Ejemplo 3.2.1: Ecuación de Van der Waals

Un profesor de fisicoquímica aplica un examen a sus alumnos sobre cuatro gases reales siendo Metano, Monóxido de Carbono, Hidrógeno y Argón que ocupan un volumen molar de $50L/mol$, $277 mL/mol$, $500 cm^3/mol$ y $0.02 m^3/mol$, respectivamente. Les pide determinar la temperatura (K) de los gases si el primer gas se encuentra a $0.80 atm$, el segundo a $450 mmHg$, el tercero a $1 bar$ y el último a $93.2 kPa$. Los alumnos saben que deben ocupar la ecuación de Van der Waals [16].

$$R \cdot T = \left(P + \frac{a}{\bar{V}^2} \right) (\bar{V} - b)$$

Donde:

$$a = \frac{27R^2T_c^2}{64P_c} \quad b = \frac{R \cdot T_c}{8P_c}$$

Formulas tomados de [15]

Resolución:

1. Ocupar un mismo sistema de unidades, definiendo a la constante R como igual a $8.3144 L \cdot kPa/(K \cdot mol)$. Se procede a convertir los volúmenes a Litros, la presión a kPa y además agregar la masa molecular, la presión y temperatura crítica. Datos tomados del [16].
2. Ocupando los métodos numéricos mediante MATLAB, se proceder a hacer un vector fila con los datos proporcionados de la tabla anterior.

```
P = [81.06 59.9951 100 93.2]; % Presión [kPa]
V = [50 0.277 0.500 20]; % Volumen molar [L/mol]
Tc = [190.6 132.9 33.19 150.9]; % Temperatura crítica [K]
Pc = [4599 3499 1313 4898]; % Presión crítica [kPa]
```

3. Se procede a ocupar las ecuaciones para determinar a y b , ocupando los vectores antes generados.

```
% Valores para (a)
a = (27*R^2*Tc.^2) ./ (64*Pc);
% Valores ara (b)
b = (R*Tc) ./ (8*Pc);
```

4. Se ocupa la ecuación de estado de Van der Waals.

```
T = (1/R) * (P+a ./ (V.^2)) .* (V-b);
```

5. Por ultimo, se hace un cambio de variable y se presenta en forma de tabla.

```
% Representación de forma de tabla
Gas = {'Metano';'Monóxido de Carbono';'Hidrogeno';'Argón'};
Presion\_kPa = P';
Volumen\_molar = V';
Temperatura\_K = T';
Resultados = table(Gas,Presion\_kPa,Volumen\_molar,
                  Temperatura\_K)
```

```
Resultados =

4×4 table

      Gas      Presion_kPa      Volumen_molar      Temperatura_K
-----
'Metano'      81.06           50           487.6
'Monóxido de Carbono'  59.995        0.277        56.525
'Hidrogeno'    100            0.5          11.274
'Argón'       93.2           20           224.64
```

Así como MATLAB tiene la capacidad de hacer hacer varias operaciones a partir de vectores del mismo tamaño, se pueden generar matrices, conocidos en la programación como *array bidimensionales*, a partir de la generación de vectores columna y vectores fila. Las matrices se usan para almacenar información como si fuera una tabla, formando un papel importante para el álgebra lineal, como se mencionó con anterioridad, y que es comúnmente utilizada en las ciencias exactas para modelizar y resolver problemas. Para la generación de una matriz es cuestión de asignar los valores correspondientes a una variable. Para hacer esto es necesario teclear los elementos, fila por fila entre corchetes []. Primero escribiendo el corchete izquierdo [, posteriormente se tecla la primera columna separando los elementos por espacio o comas. Antes de teclear la siguiente se coloca un punto y como o pulsar **enter**. Se concluye poniendo el corchete de la derecha al final de la última fila.

```
nombre_variable : [elementos de la 1° Fila; elementos de la 2° Fila;
                  elementos de la 3° Fila; ... ;elementos de la última Fila];
```

Los elementos de una matriz pueden ser números o expresiones matemáticas que incluyen números, variables predefinidas y funciones. Todas las filas deben tener el mismo número de elementos. Si un elemento es cero, también debe ser teclado.

Cuando se pone punto y coma después de cada línea (antes de la siguiente fila):

```
>> A = [1,2,3;4,5,6;7,8,9]
- - -
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

Poniendo **Intro** después de cada línea y poniendo espacio entre cada número:

```
>> B = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
- - -
B =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

Las variables en MATLAB, una vez creadas, se pueden realizar operaciones matemáticas de diferente índole. La operación más simple es la **suma y resta** de matrices, la cual para efectuarse deben tener el mismo tamaño de arrays, esto quiere decir que, debe haber el mismo número de filas y de columnas.

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6];
>> B = [7 8 9; 1 2 3];
>> C = A + B
- - -
C =
     8    10    12
     5     7     9
```

La multiplicación `*` es ejecutada por MATLAB según las reglas propias del álgebra lineal [9]. Esto significa que si A y B son dos matrices la operación $A * B$ se ejecuta solamente si el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B . El resultado es una matriz que tiene el mismo número de filas de A y el mismo número de columnas de B .

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
>> B = [9 8; 7 6; 5 4];
>> C = A .* B
- - -
C =
    38    32
   101    86
   164   140
```

El producto de la multiplicación de dos matrices cuadradas es también una matriz cuadrada del mismo tamaño, pero no es el mismo resultado, recordando que $A * B \neq B * A$. Hablando de matrices cuadradas, como se vio en la sección de álgebra lineal, a partir de estas se puede hallar la determinante de algún sistema de ecuaciones para luego encontrar la solución de cada incógnita, la cual existe el comando `det(A)` o `|A|`, la cual ayuda a encontrarlo de una forma sumamente rápida. Pero existe una forma de resolver ecuaciones matriciales ocupa únicamente `\`, sabiendo que $AX = B$, por lo tanto, despejando a X se obtiene que $X = A^{-1}B$. Por ejemplos, suponiendo que

$$\begin{array}{rclcl} 4x & -2y & +6z & = & 8 \\ 2x & +8y & +2z & = & 4 \\ 6x & +10y & +3z & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo en MATLAB

```
>> A = [4 -2 6; 2 8 2; 6 10 3];
>> B = [8 4 0]';
>> C = A\B
- - -
C =
    -1.8049
     0.2927
     2.6341
```

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x &= -1.80498 \\ y &= 0.2927 \\ z &= 2.6341 \end{aligned}$$

Para las operaciones de multiplicación, exponenciación y división de arrays se realizan elemento a elemento, en MATLAB hay que teclear un punto delante del operador aritmético correspondiente.

Tabla 3.2.1: Operaciones aritméticas para matrices y vectores.

Simbología	Descripción
.*	Multiplicación
Exponenciación	
./	División a la derecha
.\	División a la derecha

3.3. Cálculo

A partir de este punto, se debe conocer lo que son las **variables simbólicas** que representa una incógnita que puede tomar cualquier valor. Por tanto, una operación que involucra una o más variables simbólicas no devuelve un valor numérico, sino una expresión simbólica que involucra números, operaciones, funciones y variables simbólicas. MATLAB tiene dos comandos que son `sym` y `syms`, la cual tiene la misma utilidad pero su diferencia radica en que `syms` es un atajo a la función `sym`, facilita al usuario la creación de variables simbólicas.

```
>> x=sym('x');
>> y=sym('y');
```

Usando los símbolos de atajos, haces lo mismo, solo con el código:

```
syms x y
```

MATLAB contiene en su software una gran cantidad de comandos ya preestablecidos para la resolución de una cierta variedad de ecuaciones, pero se pueden programar por uno mismo. Como es el caso de la resolución de poder calcular las **derivadas de una variable** [30] [33], la cual para poder hacerlo se sigue los pasos siguientes:

1. Se pone el comando `syms x` donde x va a ser la variable a derivar, se da enter (no requiere punto y coma).
2. Seguido se pone el comando `diff(f(x))`, donde $f(x)$ va a ser la función.
3. Si después de la función se agrega una `como` y un número natural cual sea (n), `diff(f(x), n)`, indicaras el orden de la derivada.
4. Para evaluar una derivada se usa el comando `subs(f(x), 'x', v)`, donde $f(x)$ será la función, entre comillas ira la variable independiente ' x ' y por ultimo v el número que a evaluar la función.
5. Si es requerido graficar se pone el comando `fplot(diff(f(x), [a,b]))` donde $diff(f(x))$ será la derivada y $[a, b]$ será un intervalo.

Ejemplo 3.3.1: Movimiento de una partícula

Cierta partícula se determinó en un laboratorio que su distancia (m) que esta proporcionada en metros, es dependiente del tiempo (t), dado en segundos, mediante la siguiente ecuación.

$$m = t^5 - 3t^4 + \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 2.1t + 7$$

Se pide encontrar la distancia la velocidad, la aceleración en el segundo 2.05 y además graficar las tres curvas generadas en un intervalo de tiempo que vaya de 0 a 3 segundos.

Resolución:

1. Poner el comando `syms t` e introducir la función a evaluar (m), dando enter y agregaremos el comando `diff(m)` aplicando la primera y segunda derivada.

```
syms t
m = t^5-3*t^4+2/3*t^3-2*t^2+2.1*t+7;%Función [Distancia]
v = diff(m);%Primera derivada [Velocidad]
a = diff(m,2);%Segunda derivada [Aceleración]
```

2. Evaluando las funciones como en el paso 4, en el punto 2.05. Observe que se introdujo un comando `double(n)` el cual sirve para que arroje el resultado en forma decimal en caso que de fracciones.

```
syms t
m1 = double(subs(m, 't', 2.05));%Distancia
v1 = double(subs(v, 't', 2.05));%Velocidad
a1 = double(subs(a, 't', 2.05));%Aceleración
```

3. Realizando una tabla.

```

syms t
Valores = {'Distancia'; 'Velocidad'; 'Aceleración'};
Datos = [m1; v1; a1];
Unidades = {'m'; 'm/s'; 'm/s^2'};
Resultados = table (Valores, Datos, Unidades)

```

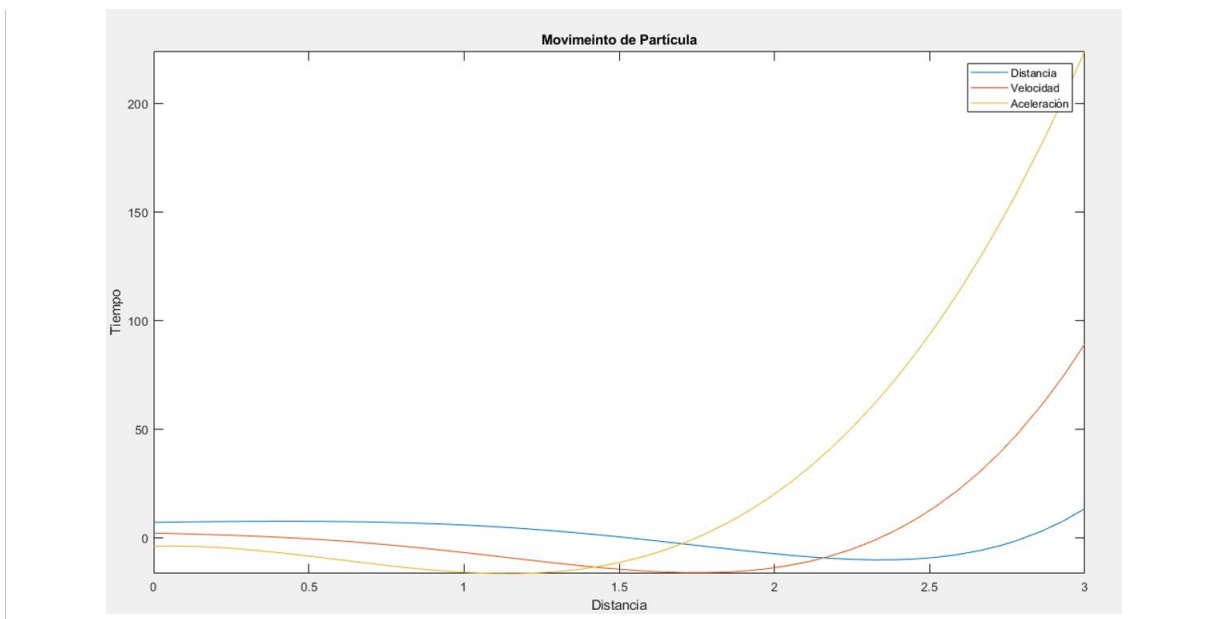
Valores	Datos	Unidades
'Distancia'	-8.1345	'm'
'Velocidad'	-12.771	'm/s'
'Aceleración'	25.212	'm/s^2'

4. Se obtienen tres funciones, por lo que se procede a poner la primera función, seguido se pone el comando `hold on` que sirve para introducir varias gráficas en un mismo plano, seguido se ponen las funciones restantes. Los comandos `xlabel('Nombre')` y `ylabel('Nombre')` sirven para nombrar la abscisa y ordenada respectivamente. El comando `title('Título')` pone un título a la gráfica, mientras que `legend('Función1', 'Función2', ..., 'Función')` inserta una leyenda, la cual debe nombrarse de acuerdo al orden de las gráficas. Y para finalizar se coloca `hold off` que indicando que ya no se pueden poner más gráficas en el mismo plano.

```

fplot(m, [0, 3])
hold on
fplot(v, [0, 3])
fplot(a, [0, 3])
xlabel('Distancia'); %Nombre de las abscisa
ylabel('Tiempo'); %Nombre de la ordenada
title('Movimiento de Partícula'); %Nombre del título
legend('Distancia', 'Velocidad', 'Aceleración'); %Leyenda
hold off

```



Como se pudo ver en el ejemplo anterior, MATLAB posee una gran potencia para resolver derivadas y no solo quedarse allí, si no, que puede resolver su inversa siendo la **integral**, ya sea con una o múltiples variables, siendo definida o no. Para resolver una **integral simple** [33] [34] en MATLAB se sigue los pasos siguientes:

1. Se pone el comando `syms x` donde x es la variable que se quiere integrar.
2. Luego se introduce `int (F (x))` donde $F(x)$ es la función a integrar.
3. Si se quiere una integral definida se pone de la siguiente forma `int (F (x) , a , b)` donde a será el límite inferior y b el límite superior.
4. Si es requerido graficar se pone el comando `fplot (int (F (x)) , [a , b])` donde $int(F(x))$ será la integral y $[a, b]$ será un intervalo.

Ejemplo 3.3.2: Reactor PFR

En cierta universidad se está probando en un laboratorio un reactor PFR que contiene una sustancia *alpha*. Varias tomas de datos demostraron sugieren que la siguiente ecuación demuestra la conversión de la sustancia del reactor respecto a su volumen [cm^3]:

$$V = \int \left(\frac{x^4}{x^2 - 5} + \frac{2}{3}x^2 \right) dx$$

Se le dice al encargado de laboratorio que grafique la conversión (x) respecto al volumen (V) y determine el volumen obtenido cuando la conversión se encuentra en el intervalo 0.2839 y 0.8375.

Resolución:

1. Poner el comando `syms x` y la función $F(x)$ a evaluar.

```
syms x
F = (x^4)/(x^2-5)+2/3*x^2;
```

- Se pone el comando `int(F(x), a, b)` luego un `double(V)` para que arroje de manera simplificada.

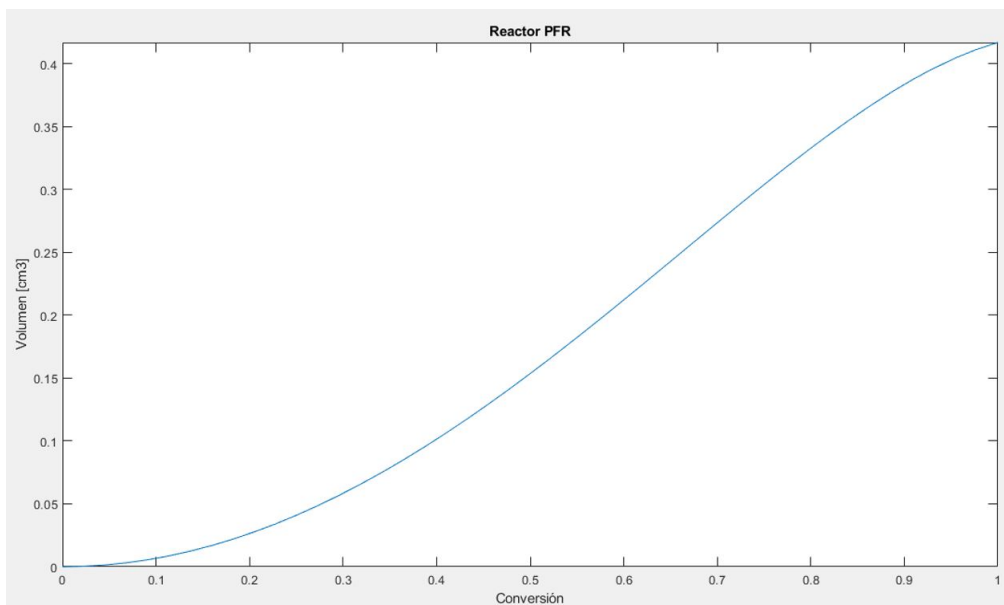
```
V = int(F, 0.2839, 0.8375);
Volumen = double(V)
```

- Dando como resultados que el volumen generado es de.

$$V = 0.1072 \text{ cm}^3$$

- Se gráfica en el intervalo pedido con `fplot(F(X), [a, b])`.

```
fplot(F, [0, 1])
xlabel('Conversión'); %Nombre de las abscisa
ylabel('Volumen [cm3]'); %Nombre de la ordenada
title('Reactor PFR'); %Nombre del título
```



Así como se puede resolver una integral simple, se puede resolver una múltiple, sea de dos o tres variables, lo único que se necesita es meter la integral dentro de otra integral e indicar con respecto a que se esta integrando. Se puede hacer por tres pasos distintos, teniendo en cuenta la siguiente integral:

$$\int_{a_x}^{b_x} \int_{a_y}^{b_y} F[x, y] dy dx$$

- La primera forma, siendo la más simple, es metiendo la integral dentro de otra, para MATLAB seria algo tal que

```

syms x y
F = F[x,y];%Función a evaluar
int = int((int(F,y,a_y,b_y))x,a_x,b_x)%Integral doble
%Gráficar
G = solve(F,y);%Despeja la ecuación respecto a y
fplot(G,[Ix,Sx]);%Función para graficar
xlabel('x');ylabel('y');%Titulos

```

Donde $(\text{int}(F, x, a_x, b_x))$ esta integrando primero con respecto a y . Posteriormente se integra con respecto a x .

2. La segunda forma es similar, pero un poco mas desarrollada y organizada, donde se hace un cambio de nombre.

```

syms x y
%Datos
F = F[x,y];%Función a evaluar
Ix = a_x;%Límite Inferior en x
Sx = b_x;%Límite Superior en x
Iy = a_y;%Límite Inferior en y
Sy = b_y;%Límite Superior en y
F1 = int(F,y,Iy,Sy);%Integrando primero respecto a y
F2 = int(F1,x,Ix,Sx);%Integrando respecto a x
%Gráficar
G = solve(F,y);%Despeja la ecuación respecto a y
fplot(G,[Ix,Sx]);%Función para graficar
xlabel('x');ylabel('y');%Titulos

```

Como se puede observar, es un poco mas desglosada, algo más tardado pero puedes ir identificando todo en el programa permitiéndote ser más organizado.

3. La última forma, es idéntica a la segunda, solo que se hace es ponerla como `function`, la cual esta puede guardarse en una carpeta y seguir utilizando el programa en varios problemas más.

```

function R = Integral_Doble (F,Ix,Sx,Iy,Sy)
%Este programa permite calcular integrales dobles
%Para el intervalo de Y [Iy,Sy]
%Para el intervalo de X [Ix,Sx]
%Donde I indica límite inferior
%Donde S indica límite superior
syms x y
F1 = int(F,y,Iy,Sy);%Integración respecto a Y
R = int(F1,x,Ix,Sx);%Integración respecto a X

%Grafica
G = solve(F,y);%Despeja la ecuación respecto a Y

```

```
fplot(G, [Ix, Sx]); %Función para graficar
xlabel('x'); ylabel('y'); %Titulos
```

Cabe recalcar, que esto se puede programar a gusto de cada lector y hacer inca-pie de que en este caso, primero se esta integrando respecto a x y después a y , pero puede existir el caso de que sean otras literales o en otro orden, y lo único que se debe hacer es cambiar el orden de integración, así como el de graficar, ya que los programas siguen una secuencia de integración, pero en ocasiones hay que modificar el orden manualmente, cambiando únicamente las literales de integración.

Ejemplo 3.3.3: Resolver la siguientes integral doble

Resolver la siguientes integral múltiple por método numérico.

$$\int_{-1}^1 \int_{-x^2}^{x^2} (x^2 - y) dy dx$$

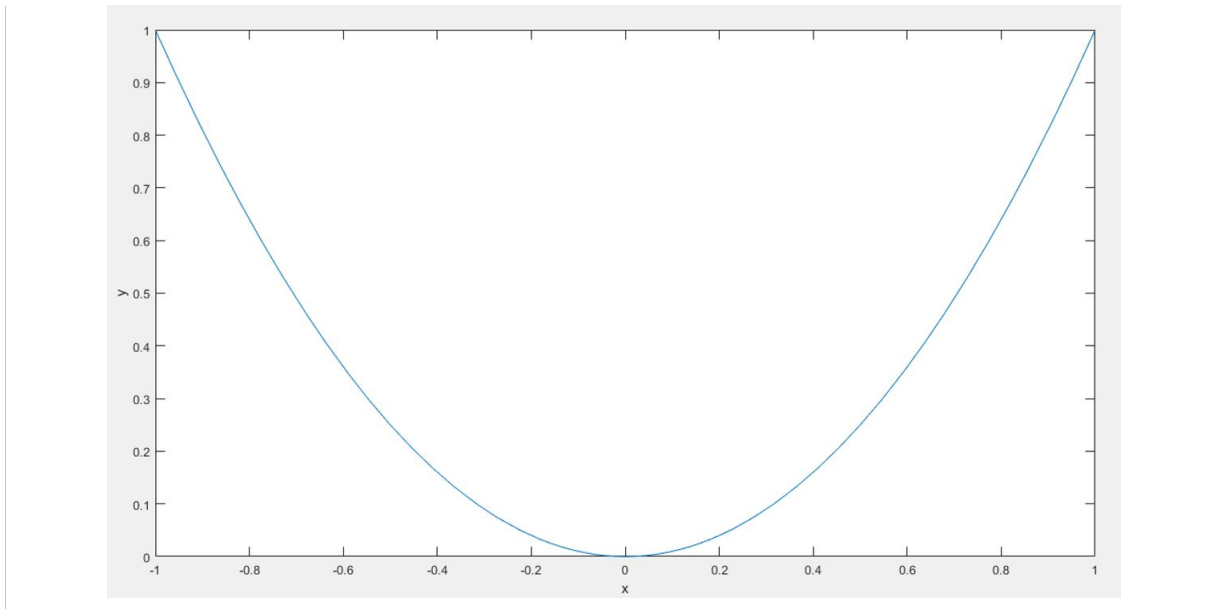
Problema obtenido de [23].

Resolución:

1. Se deberá copiar el programa en MATLAB con sus respectivos límites y solo queda correr el programa.

```
F = x^2-y;
Ix = -1;   Sx = 1;   %Límites de X
Iy = -x^2; Sy = x^2; %Límites de Y
R = Integral_Doble (F, Ix, Sx, Iy, Sy);
- - -
R =
    0.800
```

2. Gráficamente se obtiene.



3.4. Ecuaciones diferenciales

MATLAB no se queda allí, debido a su alta capacidad, podemos resolver EDO hasta EDP. Empezando primero por las Ordinarias, por ser algo más fácil de resolverlas. Para saber como evaluar una EDO, se puede hacer de dos formas: La primera es programando todo desde cero, a justo del programador, y la segunda es mediante el comando `dsolve()`. Empezaremos ocupando la segunda forma, la cual se empieza con:

1. Se usará el comando `dsolve('Ecu_Dif','variable_independiente')`.
2. Donde dice 'Ecu_Dif' se introducirá la ecuación diferencial de la siguiente manera $a_n \cdot D^n y + \dots + a_2 \cdot D^2 y + a_1 \cdot D y + a \cdot y = g(x)$, donde a será el coeficiente de la ecuación diferencial, D^n marcará el orden en que se encuentra la ecuación, y puede cambiar ya que era la variable dependiente y $g(x)$ es una función de la variable independiente.
3. Se pondrá el comando `simplify(y)`, para simplificar la ecuación diferencial.
4. Si contiene valores en la frontera o iniciales entonces el comando de la parte 1 se modifica a `dsolve('Ecu_Dif','y(i)=j','Dy(i)=j','D1y(i)=j','...','Dny(i)=j','variable')`, donde i es la condición inicial en la variable independiente y j de la variable dependiente, para D^n será el orden de la derivada donde se aplica el valor inicial.
5. Por último, queda graficar `fplot(y,[a,b])`, para y será la solución de la ecuación diferencial y $[a,b]$ será un intervalo.

Ejemplo 3.4.1: Movimiento críticamente amortiguado

Una masa que pesa 12 libras se alargara hasta 5 pies un resorte. Suponiendo que una fuerza amortiguada que es igual a dos veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema, determine la ecuación de movimiento si la masa inicial se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 2.5 ft/s y la longitud máxima alcanzada. Problema obtenido del [23].

Resolución:

1. Ocupando la Ley de Hooke se observa que $12 = k(2) \rightarrow k = 6 \text{ lb/ft}$ y que $W = m \cdot g$ da que $m = W/g = 12/32 = 3/8$. La ecuación diferencial de movimiento adquiere la siguiente forma.

$$\frac{3}{8} \frac{d^2x}{dt^2} = -6x - 5 \frac{dx}{dt}$$

2. Se deberá meter la ecuación en MATLAB, aplicando los valores límites que son $x(0) = 0$, ya que parte del reposo y $x'(0) = -2.5$, que es la velocidad ascendente. Con la variable independiente de t .

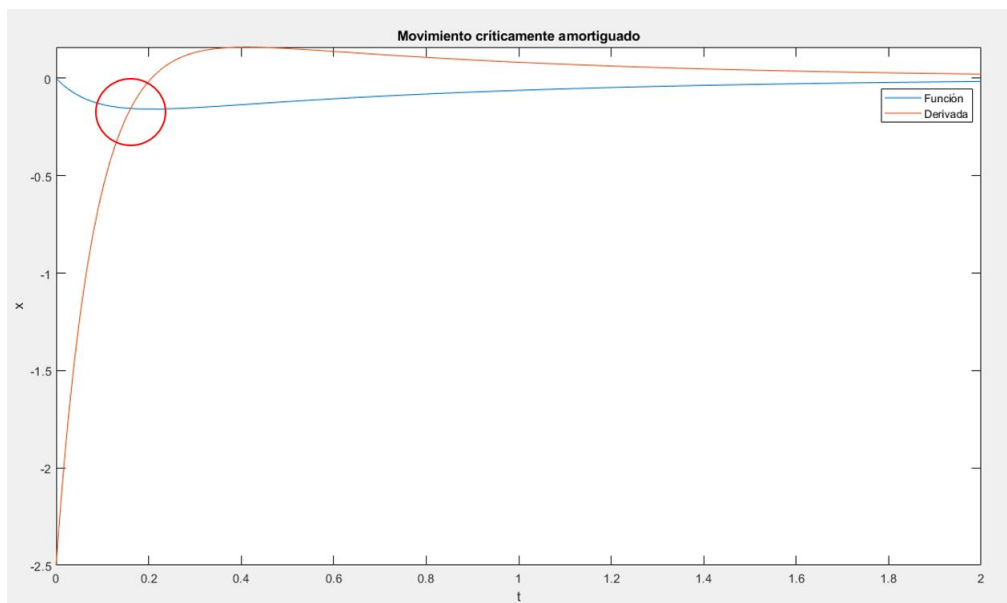
```
%Ecuación diferencial
x = dsolve('3/8*D2x=-6*x-5*Dx','x(0)=0','Dx(0)=-2.5','t');
x = simplify(x)
- - -
x =
-(15*exp(-12*t))*(exp((32*t)/3) - 1)/64
```

$$x(t) = -\frac{1}{64} \left[15e^{-12t} \cdot (e^{32t/3} - 1) \right]$$

3. Para obtener la distancia máxima requerida, de deben graficar dos funciones, la primera será la función obtenida anteriormente y la segunda la derivada de dicha función.

```
%Ecuación diferencial
x = dsolve('3/8*D2x=-6*x-5*Dx','x(0)=0','Dx(0)=-2.5','t');
%Derivada
x1 = diff(x);

%Gráfica
fplot(x,[0,2])
hold on
fplot(x1,[0,2])
xlabel('t');ylabel('x')
title('Movimiento críticamente amortiguado')
legend('Función','Derivada')
hold off
```



4. Como se observa en la gráfica ??, se haya una intersección entre ambas funciones, la cual su interpretación se da como la distancia máxima del resorte. Lo común es igualar ambas ecuaciones y resolver, por lo que se programó un comando llamado `[E, x1]=Newton_Rhap(f, x0, tol)`, el cual es el método de **Newton Raphson** o también conocido como método de **Newton para raíces** [33] [35] [36], siendo muy útil para hallar las raíces de cualquier función, (donde f , que es la función debe estar igualado a cero) a partir de una tolerancia (tol) y un valor inicial ($x0$). El programa se vera más adelante en la siguiente sección o se puede descargar en línea.

```
%Ecuación diferencia
x = dsolve('3/8*D2x=-6*x-5*Dx','x(0)=0','Dx(0)=-2.5','t');
x = simplify(x);
%Derivada
x1 = diff(x);

syms t
f = x1-x;%Función
x0 = 0.1;%Valor inicial
tol = 10^-10;%Tolerancia
[R,I]=NewtonRaphson(f,x0,tol)
- - -
R =
    0.1610
I =
    6
```

5. Por lo tanto, R es el tiempo en que logra su mayor distancia, lo único que falta solo es resolver le ecuación.

```

Distancia = double(subs(x, 't', R))
- - -
Distancia =
    -0.1551

```

6. Como se observa la distancia obtenida tiene un número negativo, lo cual indica que la distancia máxima se encuentra debajo del punto de equilibrio y se toma como valor absoluto.

Distancia = 0.1551 ft; bajo el punto de equilibrio

3.5. Métodos numéricos

El análisis numérico esta encargada de diseñar algoritmos para simular una aproximación de una solución a problemas de índice matemático, es por ello que se ocupan ordenadores para la utilización de cálculos matemáticos, desde sencillos hasta muy complejos. El análisis numérico proporciona los pilares necesario para llevar a cabo todos aquellos procedimientos matemáticos susceptibles de expresarse algorítmicamente, basándose en algoritmos que permitan su simulación o cálculo en procesos más sencillos empleando números. En cualquier programación se debe establecer un **error** junto con el error **admisibile**. Muchas de las operaciones matemáticas pueden llevarse adelante a través de la generación de una serie de números que a su vez alimentan de nuevo el algoritmo (feedback). Esto proporciona un poder de cálculo y refinamiento importante a la máquina que a medida que va completando un ciclo va llegando a la solución. El problema ocurre en determinar hasta cuándo deberá continuar con el ciclo, o si nos estamos alejando de la solución del problema.

3.5.1. Series de Taylor

Una **Serie de Taylor** [30] [34] [35] de una función es una suma infinita de términos que se expresan en términos de las derivadas de la función en un solo punto. Para las funciones más comunes, la función y la suma de su serie de Taylor son iguales cerca de este punto. Por poner un ejemplo, la serie de Taylor del numero de euler (e^x) se expresa de la siguiente manera

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Para programar una aproximación de esta serie, se debe conocer el comando `for`, el cual permite hacer bucles y una vez finalizado se sierra con el comando `end`. Dicho eso, se comienza poniendo la literal `x` siendo el valor a determinar, seguido de `m`, la cual será el número máximo de iteraciones, `s = 0`, que indica la suma inicial que parte de cero. Seguido de esto se pone el comando `for` y en el mismo renglón se introduce `n=0:m`, el cual indica que el valor de `n` es igual a 0 hasta `m`. Dando `enter` y después introduciremos la ecuación de sumatoria, partiendo de `s = s + ecuación`, se termina poniendo `end` y haciendo un cambio de variable, donde `s` pasara a ser `Iteracion`, poniendo `Real`, el cual sera igual a `exp(x)` y se concluye poniendo el margen de error como `error` el cual será el $(Real - Iteraciones)/Real \cdot 100$. Entre mayor sea el número de `m`, el margen de error sera más pequeño y la aproximación numérica sera mejor. Suponiendo que se quiere conocer cuando $x = 5$.

```

%Serie de Taylor de exp(x)
x = 5;%Valor de X
m = 100;%Número de iteraciones
s = 0;%Valor inicial de la sums
for n=0:m
    s = s+x^n/factorial(n);%Expresión algebraica
end
Iteracion = s;%Resultado de la iteración
Real = exp(x);%Resultado real
error = abs((Real-Iteracion)/Real*100);%Margen de error

```

Iteraciones [m]	Valor de iteraciones	Error [%]
5	91.4167	38.4039
10	146.3806	1.3695
100	148.4132	1.9150e-14

3.5.2. Errores

En la programación numérica existen tres tipos de errores básicos siendo: **inherentes**, por **redondeo** y por **truncamiento**.

Errores inherentes Son aquellos errores que existen en los valores de los datos, esto se debe a la incertidumbre de las mediciones, debido a equivocaciones o por su naturaleza de aproximación. Por poner un ejemplo, el valor de la gravedad (g), algunos ingenieros para cálculos rápidos, en situaciones que lo ameriten, pueden tomarlo como 10 m/s^2 , pero durante mucho tiempo se ha enseñado que se ocupa como 9.81 m/s^2 , aunque si le pregunta a un físico, podría decirte que se ocupa la gravedad como 9.80665 m/s^2 .

Errores por redondeo Este tipo de error se produce debido a que la computadora o el operador debe manejar un número finito de dígitos después del punto decimal y por ende, se tiende al redondeo. Por ejemplo, el valor el vapor π que es un número infinito pero se tiende solo a ocupar 4 dígitos.

Errores por truncamiento Estos son debidos a la omisión de términos en una serie que tiene un número infinito de términos. Por ejemplo, se puede utilizar la serie infinita de Taylor para calcular el $\cos(x)$, expresado en radianes

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Lo que se hace en la programación, es que sabiendo que el porcentaje de error sera

$$Error = \frac{Real - Ideal}{Real}$$

Se puede hacer con un valor antes del valor final de la sucesión (n_{f-1}) menos el valor final de la sucesión (n_f), dividido entre el valor antes de la sucesión, multiplicado por 100

$$Error = \frac{n_{f-1} - n_f}{n_{f-1}} \cdot 100\%$$

Para esto, se propone conocer el valor de la serie de Taylor para $\cos(x)$, cuando $x = 10$, si se permite un error mínimo de entuncamiento de 1×10^{-8} . Antes de empezar con el desarrollo del problema, se debe conocer el comando `if expression, statements, end` evalúa una expresión y ejecuta un grupo de instrucciones cuando la expresión es verdadera. Una expresión es verdadera cuando su resultado no está vacío y contiene solo elementos no nulos (numéricos reales o lógicos). De lo contrario, la expresión es falsa. Los bloques `elseif` y `else` son opcionales. Las instrucciones se ejecutan solo si las expresiones anteriores del bloque `if...end` son falsas. Un bloque `if` puede incluir varios bloques `elseif`.

```

if expression
    statements
elseif expression
    statements
else
    statements
end

```

Entonces, para desglosar el problema que se plantea, se repite el procedimiento que se planteó para la serie de Taylor de e^x . Se introduce las variables definidas, como son el valor x , el número de iteraciones m , el valor inicial de la suma $s=0$, el margen de error `error` y por último el valor real de $\cos(x)$. Posteriormente, ocupando dos comandos `for`, el primero para hacer la sumatoria hasta n_f y cerrando, el segundo `for` es para encontrar el valor de n_{f-1} . Implementamos dos ecuaciones de error, una que será con respecto al valor final y el otro que será el valor final y el valor final menos, con la finalidad de ver su comportamiento. Para finalizar se ocupa el comando `if` para decir que sí el error del entuncamiento es igual o menor (\leq) al error establecido, y que arroje el resultado con una frase que diga: 'El valor está en el margen de error (error = error hallado)'. En caso contrario, si el error no está dentro del margen de error se ocupará el comando `else` la cual muestre la frase: 'El valor NO está en el margen de error (error = error hallado), aumentar iteraciones', para que arroje dichas oraciones, se ocupa el comando `R = sprintf ('Oración %s', %s)`, donde `R` es la respuesta y `%s` permite mostrar el valor numérico obtenido, en este caso será el error porcentual.

```

clc
x = 10;%Valor de X
m = 25;%Número de iteraciones
s = 0;%Valor inicial de la suma
error = 1e-8;%Error mínimo
r = cos(x);%Valor real

%Sumatorias
for n=0:m
    s = s+(-1)^n*(x^(2*n))/factorial(2*n);%Expresión algebraica
end

p = m-1;
s1 = 0;
for n1=0:p
    s1 = s1+(-1)^n1*(x^(2*n1))/factorial(2*n1);%Expresión algebraica
end

```

```

end

%Ecuaciones de error
er1 = abs((r-s)/r)*100;%Error con el valor real
er2 = abs((s1-s)/s1)*100;%Error con el valor de entrucamiento

%Deducición de error
if er2 <= error
    R = sprintf('El valor esta en el margen de error (error = %s)',er2)
else
    R = sprintf('El valor NO esta en el margen de error (error = %s),
    aumentar iteraciones',er2)
end

```

Iteraciones [m]	Error real [%]	Error truncamiento [%]	Respuesta
5	1.5445×10^5	1.5445×10^5	Fuera del margen de error
10	894.2785	1.1935×10^2	Fuera del margen de error
20	8.0531×10^{-8}	1.4607×10^{-6}	Fuera del margen de error
25	1.7505×10^{-11}	3.9694×10^{-13}	Dentro del margen de error

3.5.3. Resolución de ecuaciones no lineales

La resolución de ecuaciones lineales es mediante el uso de las matrices, pero ¿qué sucede cuando dichas ecuaciones no son lineales? Es donde entran los métodos numéricos, entre ellos están el método del trapecio, el de simpson, pero el más efectivo, debido a que tienen un margen de error de entrucamiento, es el **método de Newton-Raphson** el cual es un algoritmo para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real. Este método se describirá mediante la siguiente formula de iteración:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (3.1)$$

El método de Newton-Raphson es un método que garantiza una convergencia, pero no global, es decir, siempre que la función toque un punto de la abscisa dará un resultado. Es por eso, que la formula $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$, $f(x_n)$ no representa grande variaciones mientras que $f'(x_n)$ puede variar bastante. Si $f'(x_n)$ es grande entonces la corrección $f(x_i)/f'(x_i)$ que se le aplica a x_n para aproximar el cero es pequeña. Por otro lado, si $f'(x_n)$ es pequeña entonces la corrección sería mayor por lo que aproximar un cero de f puede ser un proceso lento o a veces imposible. Es posible hacer un análisis geométrico del método a partir de las siguientes gráficas, ver la figura 3.5.1.

Datos de entrada

- Función $f(x)$ (igualada a cero).

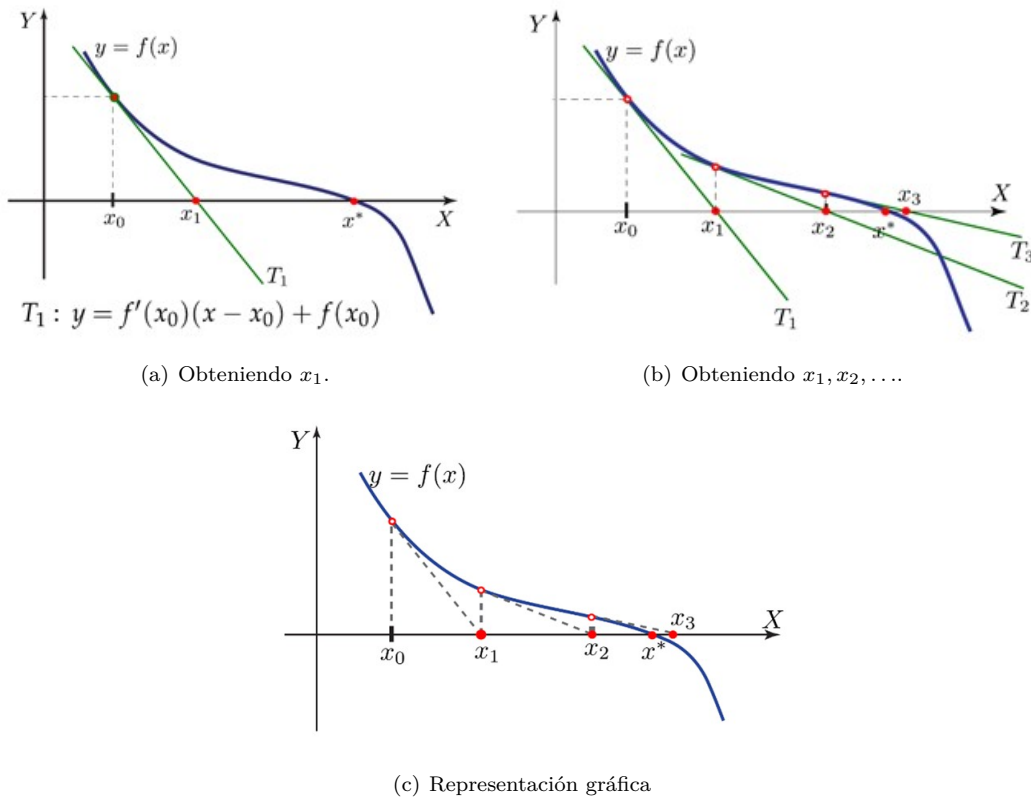


Figura 3.5.1: Descripción gráfica del método. Gráficas obtenidas de E. Mora [37].

- Punto de inicio (x_i).
- Porcentaje de error % (tolerancia).

Datos de salida

- Respuesta (R).
- Número de iteraciones (I).

Para poder programar el método de Newton-Raphson, se debe introducir primero el comando `function [y1, ..., yn] = miFun(x1, ..., xm)`, el cual permite declarar una función con entradas y salidas; `miFun` será el nombre de la función, en este caso se nombrará como `NewtonRaphson`, pero el nombre es al justo del programaodr; (x_1, \dots, x_m serán las variables de entrada, para el método establecido, debiendo meter tres variables, siendo la función igualada a cero, que la denominaremos como f , el punto de inicio (x_i) el cual será x_0 y por último la tolerancia o porcentaje de error, nombrada como `tol`. Por último, queda establecer las variables de salida, el cual serán dos, la respuesta R y el número de iteraciones I . Por lo cual, el programa tendrá la siguiente estructura

```
function [R, I]=NewtonRaphson(f, x0, tol)
```

Desarrollando el programa, y siguiendo la definición del principio de esta apartado, se debe primero derivar la función principal, por lo cual se obtendrá como `d = diif(f)`. Posteriormente, se ocupa el comando `f = inline(exp)`, donde `inline` construye un objeto de función en línea a partir de la expresión de MATLAB contenida en `expr`, o dicho de otra manera, convierte la función aritmética, a partir de un

punto de referencia, a un valor numérico, viendo la ecuación (3.1) se debe volver numérica la función original y la derivada, por lo cual sería $f = \text{inline}(f)$, que será la conversión de la función a una expresión numérica, y $d = \text{inline}(d)$, que es la conversión de la derivada a una expresión numérica. Se introduce el error absoluto, que es del 100%, $E = 100$ y un contador de inicio, para el total de iteraciones, $j = 0$. Igual que el `for` permite generar bucles, existe otro comando que hace lo mismo, pero sin introducir cuantas iteraciones, sino estableciendo el resultado de una expresión algebraica, se habla del comando `while` y se finaliza con el comando `end`. Para usar dicho comando, se estable una expresión algebraica y sabiendo que el método de Newton-Raphson trabaja mediante un error pequeño, se dice que mientras el error sea mayor que la tolerancia, este entrara al bucle, quedando como `while E>tol`, posteriormente se introducen las ecuaciones, la primera que sera la ecuación (3.1), donde se expresara como $x_1 = x_0 - (f(x_0)/d(x_0))$, donde $f(x_0)$ representa la función evaluada en el punto inicial dado y $d(x_0)$ la derivada en el función evaluada en el punto inicial dado y donde x_1 , sera la respuesta. Seguido, se pondrá el error que se viene manejando $E = \text{abs}((x_1 - x_0)/x_1) * 100$, después se hará un cambio de variable donde el valor obtenido ahora se sustituirá por el nuevo valor de entrada $x_0 = x_1$, ya por ultimo, se agrega el contador, donde sera una sumatoria de uno en uno, con la finalidad de conocer el total de iteraciones que hizo $j = j + 1$, se cierra el bucle con `end`. Se agrega a las respuestas de salida, para $R = \text{sprintf}('Raiz en \% 0.4f', x_0)$ y $I = \text{sprintf}('Con \%d iteraciones', j)$, donde el comando `sprintf` sirve para plasmar alguna oración que se quisiera o si el autor lo prefiere, se puede eliminar, solo recordando que representa cada variable de salida y por finalizar, se puede graficar la función de entrada con el comando `ezplot(f)`. Se guarda el archivo en una carpeta correspondiente para que llegue a ejecutarse correctamente, con el mismo nombre que el programa, ya que si se nombra con otro que no es o con espacios, **no correrá** adecuadamente.

```
function [R,I]=NewtonRaphson(f,x0,tol)
%Este programa calcula la raíz de una función (f) a partir de un valor
%cercano a ésta (x0), mediante un margen de error que será la
%tolerancia (tol)
d = diff(f);%Derivada de la función
d = inline(d);%Conversión de la derivada a una expresión numérica
f = inline(f);%Conversión de la función a una expresión numérica
E = 100;%Error absoluto
j = 0;%Contador de inicio
while E>tol
    x1 = x0-(f(x0)/d(x0));%Ecuación de Newton-Raphson
    E = abs((x1-x0)/x1)*100;%Error
    x0 = x1;
    j = j+1;%Contador
end
R = x1;%Respuesta
I = j;%Número de iteraciones
%Gráfica
ezplot(f)
grid on
```

Para poder utilizar el comando que se acaba de generar, se supondrá que se obtiene la ecuación siguiente, donde se quiere hallar el valor comprendido en el intervalo entre $[0, 1]$ con una tolerancia de orden $1 \cdot 10^{-10}$

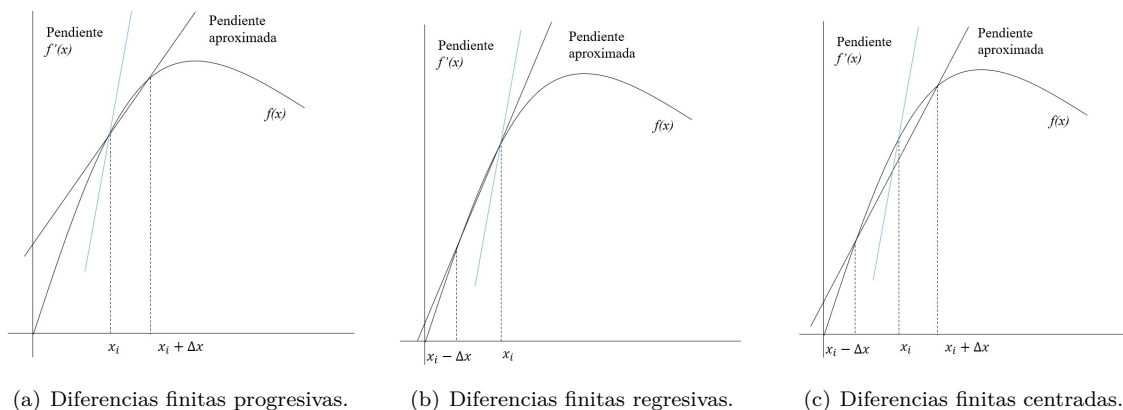


Figura 3.6.1: Gráficas de aproximaciones con diferencias finitas divididas de la primera derivada.

y se da un valor inicial de 2

$$x^2 - 3x^3 + x^{-4} = 0$$

Lo que se hace primero es poner `syms x`, ya que x es la variable a evaluar, metiendo las funciones de entrada como en el programa. Después, se abre en una nueva ventana de editor el programa hecho, se dará `Run` para ejecutar el programa, copiando únicamente `[R, I]=NewtonRaphson(f, x0, tol)` y se pega donde se este llevando a cabo el problema, se da correr en `Run and advance`, donde los resultados se darán en la pantalla de ventana de comandos o ventana del espacio de trabajo.

```
syms x
f = x^2-3*x^3+x^(-4);
x0 = 2;
tol = 1e-10;
[R, I]=NewtonRaphson(f, x0, tol)
---
```

R =
0.9121

I =
7

3.6. Método Gráfico - Diferencias finitas

Al alumno se le ha inculcado que siempre se debe llegar a una solución numérica, pero no en todas las ocasiones es aplicable. En algunos casos solo se quiere ver el comportamiento gráfico de una ecuación para darle una interpretación. Es por ello, que para las ecuaciones diferenciales surge el método de diferencias finitas, este método consiste en aproximar las diferentes derivadas que aparecen en la ecuación diferencial que se esta dando con expresiones algebraicas más simples y más sencillas. Dichas expresiones algebraicas de pueden obtener por tres aproximaciones: **Diferencias finitas progresivas**, **Diferencias finitas regresivas** y **Diferencias finitas centradas**, ver la figura 3.6.1

De manera análoga a la interpolación polinomial, el uso de más puntos en la evaluación de la derivada producirá mayor exactitud; aunque esto implica mayor cantidad de evaluaciones funcionales y aumento

de error de redondeo. Para cada aproximación cuenta con su expresión algebraica que la representa, la cual se muestra en la tabla siguiente

Tabla 3.6.1: Resumen de formulas para aproximación de las derivadas. Donde x , sera el valor inicial, Δx es el tamaño de paso dado o incremento, siendo la longitud del intervalo sobre el cual se realiza la aproximación y O el error de entruncamiento.

Primera derivada		
Formula de diferencias finitas progresivas	$f'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$	Ox
Formula de diferencias finitas centradas	$f'(x) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x}$	Ox^2
Formula de diferencias finitas regresivas	$f'(x) = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}$	Ox
Segunda derivada		
Formula de diferencias finitas progresivas	$f''(x) = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\Delta x}$	Ox
Formula de diferencias finitas centradas	$f''(x) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x}$	Ox^2
Formula de diferencias finitas regresivas	$f''(x) = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x}$	Ox
Tercera derivada		
Formula de diferencias finitas progresivas	$f'''(x) = \frac{y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i}{2\Delta x^3}$	Ox
Formula de diferencias finitas centradas	$f'''(x) = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i+2}}{2\Delta x^3}$	Ox^2
Formula de diferencias finitas regresivas	$f'''(x) = \frac{y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}}{2\Delta x^3}$	Oh

Como se observa, la aproximación en diferencias centrales es más exacta que las diferencias hacia adelante y hacia atrás, esto se puede ver claramente en que las diferencias centrales el error es de orden Δx^2 , a diferencia de las otras diferencias que únicamente son de orden Δx , en otras palabras, es que converge rápidamente a cero. Suponiendo que se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 8 \cos(2x)$$

Se quiere hallar su representación gráfica ocupando el método de diferencias finitas, si sus valores iniciales son $y(0) = 0$ y $y(10) = 18.2589$. Lo primero que se debe hacer es sustituir la formula de diferencia finita centrales, por ser más exacta. de la segunda derivada, en la ecuación problema, así como renombrando y a i_i

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + 4y_i = 8 \cos(2x)$$

Multiplicando toda la expresión por Δx^2

$$\begin{aligned} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + 4\Delta x^2 y_i &= 8\Delta x^2 \cos(2x) \\ y_{i+1} + y_{i-1} + (4\Delta x^2 - 2)y_i &= 8\Delta x^2 \cos(2x) \end{aligned}$$

Sabiendo que el intervalo en $x[0, 10]$ y para comenzar a discretizar en 5 intervalos (i), entonces $10/5 = 2$, siendo el tamaño de paso de 2, $\Delta x = 2$. Una vez obtenido esto, se debe hallar una sucesión constante en las ecuaciones para programar. Para esto, se comienza a iterar:

1. En la iteración $i = 0$, $x = 0$, $y_0 = 0$.

2. En la iteración $i = 1$, $x = 2$

$$\begin{aligned} y_{1+1} + y_{1-1} + [4(2)^2 - 2]y_1 &= 8(2)^2 \cos(2 \cdot 2) \\ y_2 + y_0 + 14y_1 &= 32 \cos(4) \end{aligned}$$

3. En la iteración $i = 2$, $x = 4$

$$\begin{aligned} y_{2+1} + y_{2-1} + [4(2)^2 - 2]y_2 &= 8(2)^2 \cos(2 \cdot 4) \\ y_3 + y_1 + 14y_2 &= 32 \cos(8) \end{aligned}$$

4. En la iteración $i = 3$, $x = 6$

$$\begin{aligned} y_{3+1} + y_{3-1} + [4(2)^2 - 2]y_3 &= 8(2)^2 \cos(2 \cdot 6) \\ y_4 + y_2 + 14y_3 &= 32 \cos(12) \end{aligned}$$

5. En la iteración $i = 4$, $x = 8$

$$\begin{aligned} y_{4+1} + y_{4-1} + [4(2)^2 - 2]y_4 &= 8(2)^2 \cos(2 \cdot 8) \\ y_5 + y_3 + 14y_4 &= 32 \cos(16) \end{aligned}$$

6. En la iteración $i = 5$, $x = 10$, $y_5 = 18.2589$.

Se tienen cinco incógnitas con cinco ecuaciones, por lo cual se puede resolver por medio de una matriz y posteriormente graficar, si se sabe que la solución analítica de la EDO es

$$y(x) = 2x \sin(2)$$

```
A = [1 0 0 0 0 0;
      1 14 1 0 0 0;
      0 1 14 1 0 0;
      0 0 1 14 1 0;
      0 0 0 1 14 1;
      0 0 0 0 0 1];
B = [0 32*cos(4) 32*cos(4) 32*cos(4) 32*cos(4) 18.2598];
B = B';
C = A \ B;
x = 0:2:10;

syms x2
f = 2*x2*sin(2*x2);

hold on
plot(x,C,'-g')
fplot(f,[0 10],'b')
```

```
hold off
```

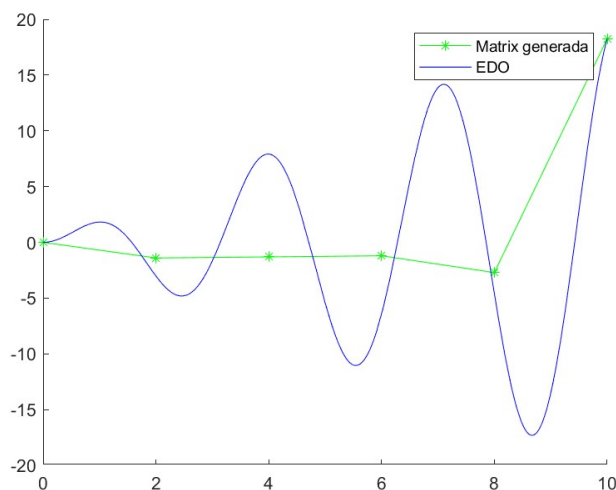


Figura 3.6.2: Comparación entre el sistema de ecuaciones generada y la solución analítica

En la figura 3.6.2 es la solución por diferencias finitas con tamaño de paso $\Delta x = 2$, no se aproxima nada a la solución analítica, es muy pobre ya que tiene muy pocos datos. Es por ello que entre mayor sea el tamaño de paso será más exacto, pero trae consigo la generación de más ecuaciones y hacerlo a mano es muy tarde, por eso se apoya en los métodos numéricos. Para programar, hay que darse cuenta del patrón que sigue la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 14 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 14 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde en la diagonal principal es el 1, 14, 14, ..., 14, 14, 1, que a los lados de cada número 14, va el 1 y que al final todo se rellena con ceros. Para establecer los límites superior e inferior en que se estará trabajando, tanto para x , como para y , además acordar el número de iteraciones n en el MATLAB

```
clear
clc
%Derivada de segundo orden
limI = 0;%Límite inferior
limS = 10;%Límite superior
n = 100;%Numero de iteraciones
YlimI = 0;%Límite inferior Y
YlimS = 18.2589;%Límite superior Y
```

Se procede a encontrar las ecuaciones que permitan a generar la matriz. Primero hallando el tamaño de paso Δx , sacando la diferencia entre el límite superior y límite inferior en x y dividiéndolo entre el número

de iteraciones $(\text{limS}-\text{limI})/n$. Generando y_{i+1} y y_{i-1} , por lo cual, para y_{i+1} será $S=\text{limS}-\text{deltax}$ y y_{i-1} será $S=\text{limS}+\text{deltax}$. Generando primero la sucesión de la diagonal principal, para ello se obtiene el intervalo entre y_{i+1} y y_{i-1} , mediante $v = I:\text{deltax}:S$ el cual permite determinar el número de vectores que se generaran de acuerdo al tamaño de paso $n1 = \text{length}(v)$. Para el producto escalar, $(4\Delta x^2 - 2)$, se traduciría en lenguaje de programación como $v1 = 4*\text{deltax}^2-2$. Generando un vector de unos mediante el comando $A0 = \text{ones}(1, n1)$, ese vector fila se multiplica por el productor escalar, $(4\Delta x^2 - 2)$, renombrando a $A0$ como $A0 = A0*v1$ y por finalizar, se añade los *vectores unos* del inicio y final de la sucesión, todo esto para generar los datos diagonal principal.

```
%Ecuaciones
deltax = (limS-limI)/n;
S = limS - deltax;
I = deltax + limI;
v = I:deltax:S;
n1 = length(v);
v1 = 4*deltax^2-2;
A0 = ones(1, n1);
A0 = A0*v1;
v2 = [1 A0 1];
```

Para generar la matriz diagonal, mediante el comando $A = \text{diag}(v2)$, se genera una matriz cuadrada con los datos previamente cargados o generados, y hacer un conteo de cuantos datos se tienen a lo largo, mediante $\text{cont1} = \text{length}(A)$, la finalidad de los contadores es saber si todas las matrices que se generan tienen el mismo número de datos y saber si alguna al hacer una operación aritmética marca algún error, identificar rápidamente cual es. Para generar la diagonal de 1 de y_{i+1} , se hace primero una vector fila de 1 de largo $n1$, quedando $A1 = \text{ones}(1, v3)$, luego agregado el 0 inicial mediante $A2 = [A2 \ 0]$, se convierte dicho vector fila en una diagonal principal, pero con el detalle que se desplazará hacia la derecha mediante $A1 = \text{diag}(A1, 1)$ y agregando un contador $\text{cont2} = \text{length}(A1)$. En el caso de y_{i-1} , se similar a y_{i+1} , pero al generar la diagonal principal y moverla a la derecha, sera a la izquierda mediante $A2 = \text{diag}(A2, -1)$ y se finaliza igual con un contador $\text{cont3} = \text{length}(A2)$. Por ultimo, sumando las tres matrices, $AA = A+A1+A2$, y generando la matrices que al inicio se propuso.

```
%Generador de matriz
A = diag(v2);
cont1 = length(A);

v3 = n1;
A1 = ones(1, v3);
A1 = [0 A1];
A1 = diag(A1, 1);
cont2 = length(A1);

A2 = ones(1, v3);
A2 = [A2 0];
A2 = diag(A2, -1);
cont3 = length(A2);
```

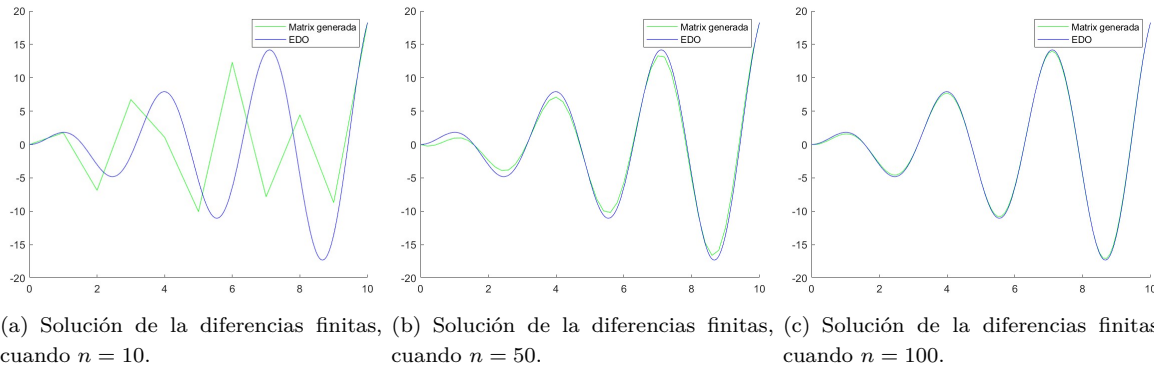


Figura 3.6.3: Gráfica de aproximación entre la solución generada por diferencias finitas y la solución analítica

```
AA = A+A1+A2;
```

Para generar las respuestas, se traduce a $8\Delta x^2 \cos(2x)$ como $B = (\text{deltax}^2 * 8) * \cos(2 * v)$ y se colocan las respuestas de las condiciones de frontera en un vector fila $B = [\text{YlimI} \ B \ \text{YlimS}]$ y dicho vector fila, se convierte en un vector columna $B = B'$.

```
%Imagen
B = (deltax^2*8)*cos(2*v);
B = [YlimI B YlimS];
B = B';
```

Por ultimo, queda resolver la matriz, $C = AA \setminus B$ y gráficar tanto los resultado y compararlo contra la solución analítica. Cabe destacar que la programación que se hizo, es única y exclusivamente para este problema, pero son las bases para que el lector pueda programar el suyo a su gusto y se de una idea de como empezar.

```
%Resultados
C = AA \ B;

%Gráficas
x = limI:deltax:limS;
syms x2
f = 2*x2*sin(2*x2);

hold on
plot(x,C,'-g')
fplot(f,[0 10],'b')
hold off
```

Como se puede observar en las gráficas generadas, figura 3.6.3, entre mayor sea el número de iteraciones que se quiera generar, se tendrá mejor una aproximación a la solución de la ecuación, pero trae consigo mismo la generación de un numero finito de ecuaciones, que hacerlas a mano sería una tarea muy pesada,

por ello la importancia de poder implementar los recursos de los métodos numéricos y saber conocer de un software que sea capaz de hacer tal tarea. Además a partir de las diferencias finitas pueden resolverse las EDP y también surgen los métodos de **elementos finitos** y **volúmenes finitos**, el cual todos son métodos más gráficos y hay que darle una interpretación a dichos resultados, siendo la labor de un investigador, ingenieros o alumno pensar que significa el resultado obtenido y cuál es su finalidad.

3.7. Ecuaciones Diferenciales Parciales

Una forma de resolver las EDP, es mediante el método analítico, que con anterioridad se menciona. Pero no se puede quedar allí, ya que se debe expresar el resultado ya sea numérico o gráfico. Es por ello que retomando el siguiente problema:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

Ocupando el método de separación de variable ha permitido demostrar que la solución de esta ecuación se expresa mediante la suma de serie, donde la temperatura inicial es $u(x, 0) = 50$, $L = 1$ y $\alpha = 0.5$.

$$u(x, t) = \frac{100}{\pi} \sum \left[\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n} \right] e^{-(0.5)^2 (n\pi)^2 t} \sin(n\pi x)$$

Si se quiere obtener la temperatura de dicha serie en el instante $t = 1$ y en el punto $x = \pi/4$. Se debe calcular primero la aproximación del valor de la serie mediante una suma parcial, analizando su convergencia con un parámetro de tolerancia de $1 \cdot 10^{-10}$.

```

clc
t = 1;%Tiempo
x = pi/4;%Distancia a evaluar
a = 100/pi;%Constante
m = 5;%Número de iteraciones
tol = 1e-10;%Tolerancia
s1 = 0;s = 0;%Sumatorias

for n = 1:m
    a_n = (1+(-1)^(n+1))/n;
    v_t = exp(-(0.5)^2*(n*pi)^2*t);
    v_x = sin(n*pi*x);
    s = s + a_n*v_t*v_x;
    if norm(s-s1)<=tol
        break
    end
    s1=s;
end
end

```

```

if n==m
    disp('La ecuación de sumas parciales no converge')
else
    disp(['La temperatura es ...', num2str(a*s)])
end
---
```

La temperatura es ...3.3703

Si se quiere graficar el comportamiento 3D de la temperatura, distancia y tiempo, se hace algo similar, pero en vez establecer puntos definidos, se ponen como si fueran variables.

```

syms x t
a = 100/pi;
s = 0;
m = 5;
for n = 1:m
    a_n = (1+(-1)^(n+1))/n;
    v_t = exp(-(0.5)^2*(n*pi)^2*t);
    v_x = sin(n*pi*x);
    s = s + a_n*v_t*v_x;
end
s = a*s;
```

Posteriormente, la ecuación que se genera en s , se copia y pega en otra ventana de operación, escribiéndose de la siguiente manera para generar el gráfico 3D, donde se puede ver representado en la figura 2.6.1, donde $t = 1$.

```

clc
X = 0:0.1:1;
T = 0:0.1:1;
[x,t] = meshgrid(X,T);
u = (2239906695008851*exp(-(8681395840437547*t)/140737488355328) *
    sin(5*pi*x))/175921860444160+(2239906695008851*
    exp(-(3125302502557517*t)/140737488355328)*sin(3*pi*x))
    /105553116266496+(2239906695008851*exp(-(2778046668940015*t)
    /1125899906842624)*sin(pi*x))/35184372088832;
surf(x,t,u)
xlabel('x');ylabel('t');zlabel('u');
view(20,35)
```

Nomenclatura

D	Determinante	PM	Masa atómico
n	Moles	\vec{F}	Vector fuerza
m	Masa	\vec{a}	Vector aceleración
\vec{g}	Vector gravedad	\vec{W}	Vector peso
v	Velocidad	t	Tiempo
\dot{E}_k	Energía cinética	\dot{E}_p	Energía potencial
\dot{U}	Energía interna	\dot{Q}	Calor
\dot{W}	Trabajo de fluido	P	Presión
V	Volumen	T	Temperatura
R	Constante de los gases ideales	ρ	Densidad
ν	Volumen específico	\dot{V}	Flujo volumétrico
\dot{m}	Flujo másico	$f(x)$	Función de x , variable
ω_i	Fracción másica	X_i	Fracción molar
A	Área	N	Fuerza normal

Parte III

Fenómeno de transporte I: Cantidad de Movimiento

Capítulo 4

Introducción de conocimientos de cantidad de movimiento

El manejo de *cantidad de movimiento* (en inglés **momentum**) es una de las enseñanzas conocidas más antiguas, siendo la primera en explicarse y dar teoría, por su origen coinciden al tiempo de la agricultura y la formación de las primeras ciudades-estados, esto se puede ver reflejado en las antiguas civilizaciones que van del viejo hasta el nuevo mundo mediante los canales de riego, diques, los colectores de aguas y acueductos, a pesar de ello, en sus inicios, el único fluido que se podía transportar era el agua, no fue hasta que a mediados de revolución industrial se empezaron a producir materiales más resistentes capaces de oponerse a las altas presiones y la corrosión de líquidos diferentes al agua para su transporte, lo que permitió empezar a implementar el transporte de gases, como el gas natural [38].

En la industria actual se maneja un gran número de fluidos, pero ¿qué es un **fluido**? Un fluido es cualquier materia compuesta por moléculas con una atracción entre si, impidiendo que puedan mantener una forma fija y por lo tanto adopten la forma del recipiente que los contenga. La principal característica física de un fluido, es que sufre una deformación continuamente cuando se encuentra bajo acción de un esfuerzo cortante. Sí este esfuerzo cortante cesa, la deformación irreversible del fluido también. Dentro de la ingeniería a las líquidos y gases se le consideran como fluidos, ya que su comportamiento se describe a lo que se menciono con anterioridad, adoptan la forma del recipiente que lo contienen y se deforman continuamente bajo un esfuerzo cortante. Para ejemplificar la deformación de un fluido es como si se lanzara una piedra a través de una laguna, el cual a la hora de arrojar la piedra dejará una serie de ondas en el agua, ver figura 4.0.1(a). Al aplicar una fuerza externa sobre el agua que esta estática, ésta también aplicara una fuerza opuesta pero en sentido opuesto, pero debido a que los átomos de agua están unidos débilmente tenderán a deformarse continuamente y no regresará a su estado original, hasta pasado un cierto tiempo que el agua regrese a estar tranquila, pero a nivel molecular los átomos de agua habrán cambiado de posición a la que estaban originalmente.

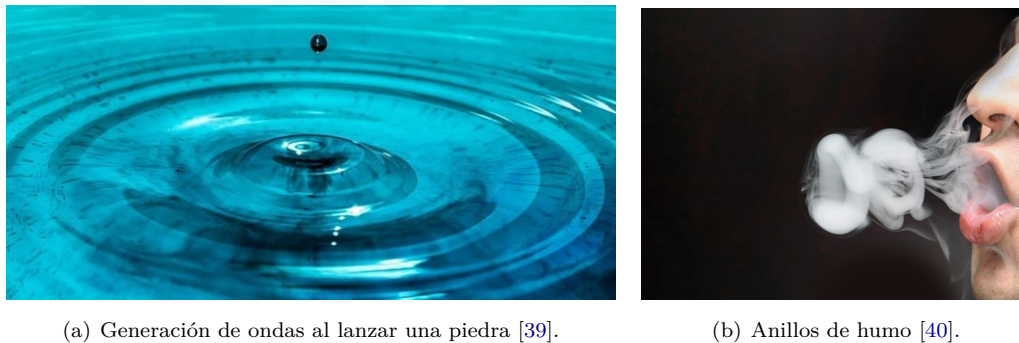


Figura 4.0.1: Ejemplo de tazas de deformación es fluidos.

Ese sería un ejemplo para un líquido, para un gas se podría ejemplificar cuando uno fuma algún cigarro o tabaco, lo tiende a sacar y algunos pueden sacarlo en forma de anillos de humo, ver figura 4.0.1(b), donde con una pequeña presión que se haga de los pulmones hacia afuera el humo saldrá lentamente por la boca haciendo los anillo y este al ser más ligeros que el aire tenderán a dispersarse, haciendo que se deformen de igual manera y al tener una menor interacción molecular que un líquido, sus moléculas ya no regresaran a su estado original. En comparación con un sólido, que aunque se le aplique una fuerza moderada es sumamente difícil que se deforme. En la dinámica de fluidos es importante conocer la fuerza ejercida por el fluido, conocida también como **fuerza viscosa**. Dicha fuerza se puede obtener a partir de la tercera ley de Newton, partiendo del siguiente ejemplo: se *supondrá* que hay una caja completamente vacía, la caja cuenta con una tapa, despreciando la resistencia, al darle un empujón a la tapa esta se moverá una cierta distancia a una velocidad constante, como se logra apreciar en la figura 4.0.2

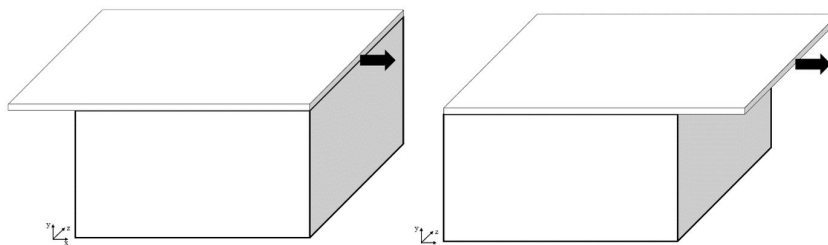


Figura 4.0.2: Caja completamente vacía con una tapa encima deslizándose.

Ahora, se procede a llenar la caja con un fluido newtoniano, como puede ser agua, hasta el tope de ésta. Repitiendo el mismo procedimiento de empujar la tapa de la caja, con la misma fuerza, ésta tendera a moverse más lento y se detendrá en un punto más corto que si estuviera vacía la caja, como en el caso anterior. Si se le da otro empujón este de igual manera se seguirá moviendo de manera lenta y su distancia recorrida será pequeña, que si estuviera vacía. En el caso anterior se necesito un empujón para mover la tapa totalmente, ahora con el fluido dentro de la caja, éste necesito de dos empujones para recorrer la misma distancia que la caja vacía, como se muestra en la figura 4.0.3.

Para explicar este fenómeno hay que ver el fluido contenido en la caja como si tuviera un cierto número de capas, ver figura 4.0.4, que va desde la capa 1, siendo la más cerca a la tapa en movimiento, hasta un número finito n de capas, donde n es la más placa más pegada a la base de la caja que no está en movimiento.

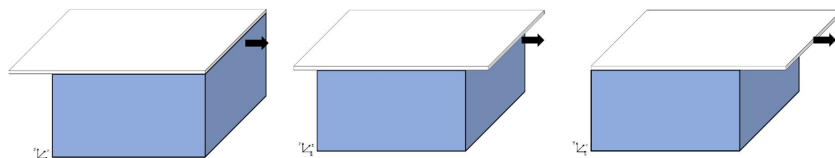


Figura 4.0.3: Caja completamente llena con un fluido con una tapa encima deslizándose, la cual dicha tapa debe ser empujada más veces para hacer todo el recorrido de la figura 4.0.2.

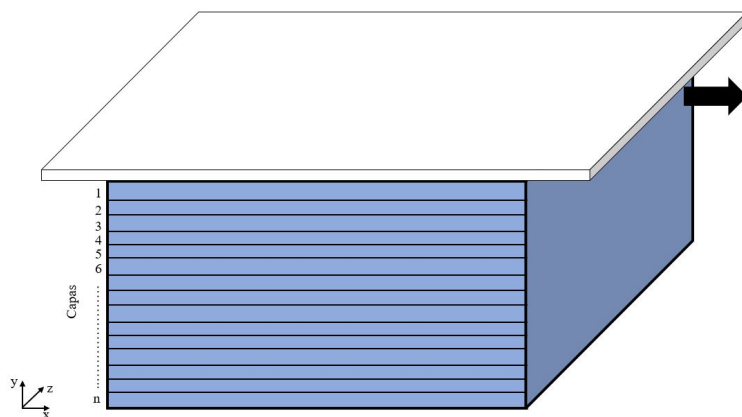


Figura 4.0.4: Fluido dividido por capas que va desde la 1 hasta n , siendo la capa 1 la más pegada a la tapa en movimiento y n la que esta pegada al fondo de la caja.

Representando las capas de la figura 4.0.4 como si fueran flechas, esto para indicar su movimiento, tal y como se muestra en la figura 4.0.5. El hecho de tener un fluido viscoso hará que la tapa se resista al movimiento, es decir, que cuando la tapa se este moviendo por encima el hecho del que el fluido este en contacto con la tapa va a ser que esta primera capa de fluido se mueva con la velocidad que tenga la tapa, existiendo fuerzas de adhesión entre el fluido y la tapa a un nivel molecular, cuando se mueve la tapa el fluido también se mueve con esta y resiste el movimiento. Viendo la segunda capa, esta se moverá a la velocidad de la primera capa, pero con la desventaja de que se moverá un poco menos y esta segunda capa hará que la capa que este debajo también se mueva, pero con una distancia aun menor y así sucesivamente hasta llegar a la capa n , la cual dicha capa su velocidad es tan baja que es nula, debido a que la parte inferior de la caja no tiene movimiento y opone una resistencia.

Se debe observar la figura 4.0.5 de una perspectiva lateral, apreciando el movimiento de las placas del fluido y no únicamente eso, si no que además permite establecer un punto de eje coordenado en un plano bidimensional. Viendo la figura 4.0.2 hasta la 4.0.5 el eje coordenado se localizaba a un lado de la caja, pero se debe establecer en un punto del problema, esto con la finalidad de poder indicar que dirección tiene la fuerza que se ejerce, para fines prácticos, el punto coordenado se colocara entre la tapa de la caja y la primera capa del fluido que se encuentra en contacto con la tapa de la caja, tal como en la figura 4.0.6(b)

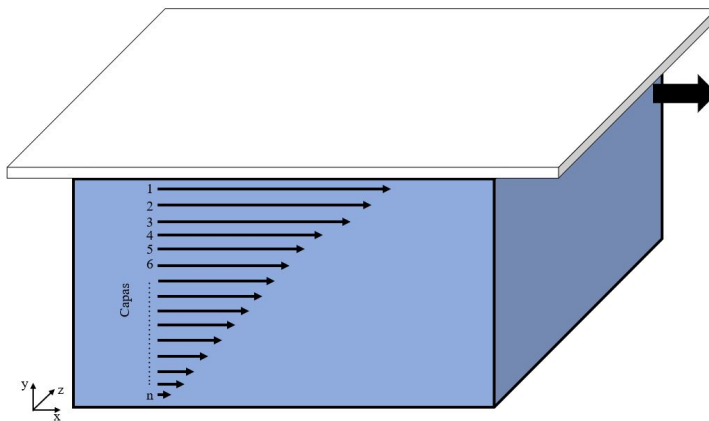
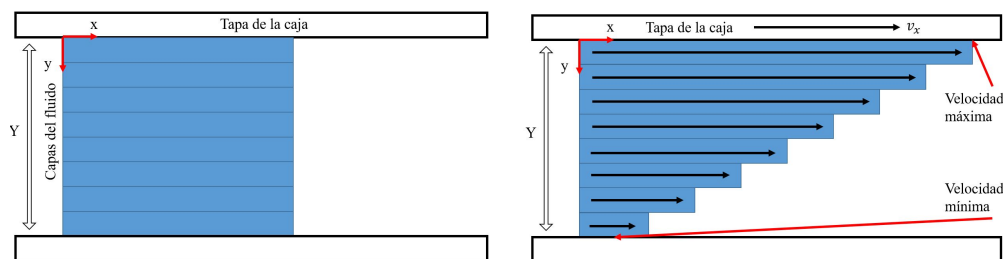


Figura 4.0.5: Movimiento de las capas representada por flechas, las cuales indican la dirección en la cual se desplaza la tapa.



(a) Fluido estático, es decir, cuando la tapa superior no está en movimiento, por lo regular se establece cuando la **condición inicial** es el tiempo es menor a cero, $t < 0$.
 (b) Fluido en movimiento, es decir, cuando la tapa superior está en movimiento, por lo regular se establece cuando la **condición inicial** es el tiempo es mayor a cero, $t > 0$.

Figura 4.0.6: Fluido comprendido entre dos tapas con una separación Y , una tapa en movimiento siendo la superior y otra tapa estática, siendo la inferior. El fluido se encuentra dividido en capas y con un eje coordenado entre la tapa en movimiento y la primera capa de fluido.

En la figura 4.0.6(b), se aprecia una zona de deformación o una reducción de velocidad donde la primera capa, siendo la más pegada a la tapa en movimiento, tendrá una mayor cantidad de movimiento que la capa inferior, siendo esta denominada como **velocidad máxima** y cada capa tendrá una mayor velocidad que la capa inferior así sucesivamente hasta llegar a la capa más baja, donde el fluido que está en contacto con la base de la caja que no tiene movimiento y por lo tanto esta capa no se moverá, conocida como **velocidad mínima**. Como se aprecia en la figura 4.0.6(b) cada capa tiene su propia velocidad, la cual al conjunto de estas se le conoce como **perfil de velocidad**, la cual ocupan ingenieros y científicos para comprender la hidrodinámica. Para determinar la velocidad máxima del fluido, es sencillo, porque es la capa que está en contacto con la tapa de la caja en movimiento, pero que pasará si se desea medir la velocidad en algún otro punto del fluido. Es por ello que para medir el perfil de velocidad se requiere *parámetros medibles* que ayuden a determinarlo, por ello se recurre en primera instancia a la ecuación de

velocidad, la cual se define como el cambio de posición respecto al cambio del tiempo

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad (4.1)$$

v_x es la velocidad de la tapa respecto al eje x ; dx la distancia recorrida del fluido; dt el cambio del tiempo. Determinar la distancia recorrida del fluido sería algo complicado, ya que cada capa del fluido recorre una distancia diferente, por eso hay se recurre a la trigonometría, donde uno se imaginará un triángulo rectángulo tal como se ve en la figura 4.0.7, el cual tiene un ángulo θ el cuál se encuentra comprendido entre la distancia entre las placas y la distancia recorrida entre la velocidad mínima y la velocidad máxima.

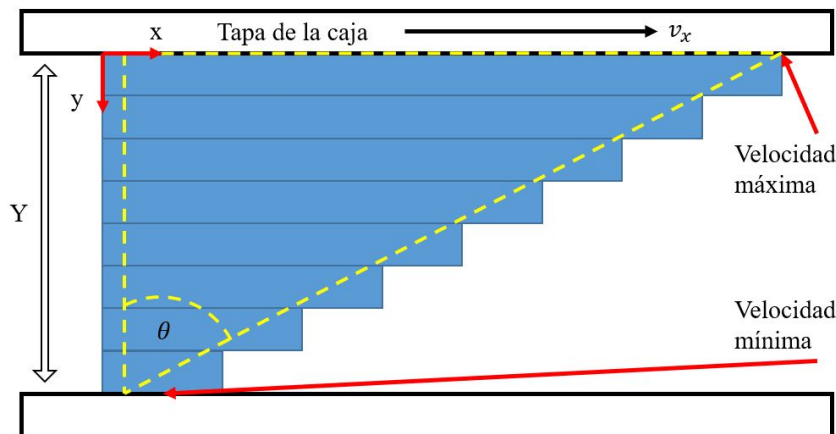


Figura 4.0.7: Movimiento de las capas representada por flechas, las cuales indican la dirección en la cual se desplaza la tapa.

El ángulo θ indica que tanto se ha ido deformando el fluido, este puede ir variando respecto al tiempo incrementando dicho ángulo. El ángulo θ se define como

$$\tan(\theta) = \frac{dx}{dy} \quad (4.2)$$

Donde dy es el cambio de la distancia que puede haber entre la tapa móvil y la tapa inmóvil. Despejando dx de la ecuación (4.2) y sustituyendo en (4.1)

$$v_x = \frac{\tan(\theta) \cdot dy}{dt} \quad (4.3)$$

Pasando del lado izquierdo de la ecuación (4.3) la variable dy

$$\frac{v_x}{dy} = \frac{\tan(\theta)}{dt} \quad (4.4)$$

Para finalizar, a la expresión anterior la función $\tanh(\theta)$ se puede aproxima como $d\theta$, ya que hay un cambio en el ángulo. Y la v_x es la velocidad que tiene la tapa de la caja, siendo conocida como *velocidad máxima*, para medir el perfil de velocidad se ocupan las cambios, es decir $\Delta v_x = v_{min} - v_{max}$, debido a que la v_{max} ocurre cuando la distancia vale 0 y v_{min} en Y

$$\begin{aligned} \frac{v_{min} - v_{max}}{Y - 0} &= \frac{\Delta v_x}{\delta y} \\ &= \frac{dv_x}{dy} \end{aligned}$$

Debido a que $v_{min} = 0$ la expresión anterior también se puede representar como

$$-\frac{v_{max}}{Y} = \frac{dv_x}{dy}$$

$$-\frac{v_x}{Y} = \frac{dv_x}{dy} \quad (4.5)$$

Ya que $v_{max} = v_x$. Sustituyendo dicha expresión en (4.4)

$$-\frac{dv_x}{dy} = \frac{d\theta}{dt} \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) permite estudiar mejor el perfil de velocidad del fluido sin la necesidad de medir cada una de las distancia que pueda existir entre las diferentes placas del fluido. A la parte izquierda de la igualación se le conoce en física como **gradiente de velocidades**. La tercera ley de Newton dice habrá una fuerza en un sentido y existirá otra con la misma magnitud, pero sentido opuesto. Para esto hay que ver la figura 4.0.8, donde la fuerza que se esta aplicando tendrá una opuesta la cual se llamará **Fuerza viscosa**, F_v .

$$F_{aplicada} = F_v \quad (4.7)$$

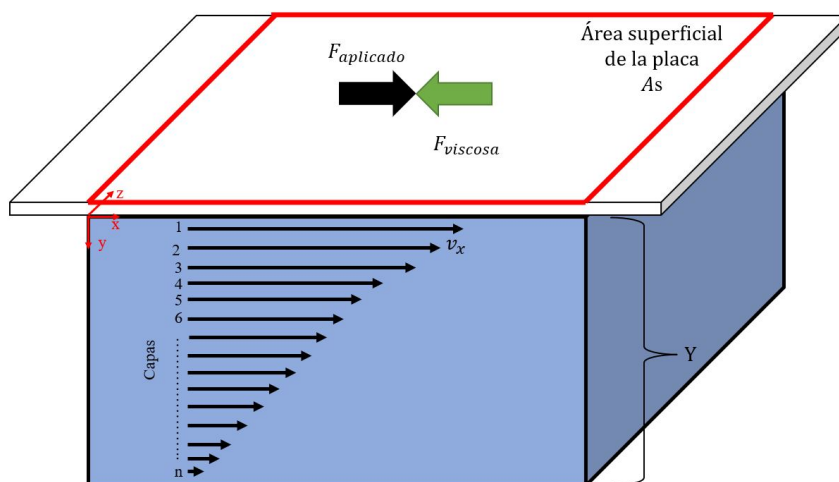


Figura 4.0.8: Representación de la fuerza aplicada y la fuerza opuesta siendo la fuerza viscosa.

Esta fuerza viscosa se ha demostrado por experimentos que depende del área de contacto superficial de la placa, A_s , la cual no es el área total de la tapa, solo solo aquella que esta en contacto con el fluido, por eso en la figura 4.0.8 esta contorneada de rojo. Por eso entre más grande sea el área, más fluido se estará arrastrando con ella y será más grande la fuerza de viscosidad, a esta área se le llega a llamar **área de sección transversal**. Otra cosa que depende la fuerza de viscosidad es la **velocidad**, v , ya que entre más veloz sea el movimiento de la tapa, el fluido tendrá a desplazarse más rápido de igual manera. Pero entre más **distancia** tenga de profundidad, en este caso detonando como Y , más fuerza se tendrá que aplicar para mover el fluido. Por lo tanto, se puede decir que la fuerza viscosa es directa mente proporcional al área de sección transversal y la velocidad, pero inversamente proporcional a la distancia de profundidad quedando nuestra ecuación como

$$F_v \propto A_s \frac{v_x}{Y} \quad (4.8)$$

Para quitar el símbolo de proporcionalidad, \propto , en álgebra se ocupa el signo de igual y una constante siendo en este caso el coeficiente de **viscosidad del fluido**, μ , siendo el factor más importa de la ecuación, ya que este número nos indica que tan viscoso es un fluido.

$$F_v = \mu \cdot A_s \frac{v_x}{Y} \quad (4.9)$$

Donde μ tiene unidades de $Pa \cdot s$. Si μ no depende de la velocidad con que se mueve el fluido se considera un fluido Newtoniano, pero sí μ depende de la velocidad del fluido será un fluido No Newtoniano. Ya que los fenómenos de transporten su base son los gradientes de potencial para medir los cambios, se tomara la ecuación (4.9) para sustituir a v_x/y por la expresión (4.5) que es el gradiente de velocidades o potencial de velocidad, ya que si se quiere evaluar la velocidad que pueda existir en alguna de las otras placas aplicando el potencial

$$F_v = \mu \cdot A_s \frac{dv_x}{dy} \quad (4.10)$$

Cuando se habla de un diferencial de velocidad, se dice que habrá una diferencia entre la velocidad final, v_{xf} , y la velocidad final inicial, v_{xi} , es decir

$$dv_x = v_{xf} - v_{xi} \quad (4.11)$$

La ecuación (4.10) solo es valida cuando el gradiente de velocidad es negativo, o de que la $v_{xi} < v_{xf}$ esto sería cierto si se fuera de una región de baja velocidad y este tendiera aumentar a una región con mayor velocidad, pero como ya se explicó, el fluido hará que la tapa tienda a disminuir su velocidad inicial, hasta el punto de que ya no se mueva, por lo tanto $v_{xi} > v_{xf}$. Por lo tanto, la ecuación (4.11) cambiara a

$$-dv_x = v_{xf} - v_{xi} \quad (4.12)$$

La ecuación anterior es valida, ya que se considera que las capas de fluido se mueven de manera lineal, como si fueran un vehículo que se mueve en línea recta. Sustituyendo la ecuación (4.12) en la (4.10)

$$F_v = -\mu \cdot A_s \frac{dv_x}{dy} \quad (4.13)$$

En este punto, se introducirá una nueva definición, siendo el **esfuerzo cortante** o también llamado **esfuerzo tangencial**, que se define como la relación entre la fuerza y el área a través de la cual se produce un deslizamiento, siendo producido por fuerzas que actúan paralelamente al plano que la resiste, y se denota por la letra griega τ . Ver figura 4.0.9.

$$\tau_{ij} = \frac{F_i}{A_{s(j)}} \quad (4.14)$$

Donde el subíndice i representa la dirección del plano de la superficie en el que se aplica (perpendicular a la superficie), y j representa la dirección de la fuerza aplicada.



Figura 4.0.9: La fuerza cortante aplicada se resiste uniformemente por el área de la parte que se corta.

Tomando la ecuación (4.13) y dividiendo toda entre A_s se obtiene

$$\frac{F_v}{A_s} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad (4.15)$$

La expresión de la izquierda de la ecuación (4.15), es idéntica al esfuerzo cortante τ_{ij} de la ecuación (4.14)

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad (4.16)$$

El símbolo τ_{yx} se interpreta de la siguiente manera: el primer subíndice y indica la dirección que tiene el **esfuerzo cortante**, la cual se puede ver como la distancia que hay entre una interfase y otra, mientras que el segundo subíndice x representa la dirección del movimiento del fluido. La magnitud τ se mide en pascal (Pa). A la ecuación (4.16) se le conoce como **Ley de Newton de la viscosidad**. Esta ecuación describe el transporte de cantidad de movimiento en materiales que fluyen en régimen laminar. Según la ley de Newton, la transferencia de cantidad de movimiento ocurre de una región de velocidad de alta a otra de baja velocidad. Siendo el gradiente de velocidad la fuerza impulsora de transporte de cantidad de movimiento. Para ocupar la ecuación (4.16) se debe tener cuidado, ya que únicamente es aplicable bajos ciertas condiciones: los fluidos Newtonianos, el sistema es isotérmico, con un flujo laminar y las propiedades fisicoquímicas del fluido son constantes.

4.1. Tipos de fluidos

Los fluidos se clasifican de acuerdo a sus propiedades termodinámicas, teniendo: fluidos ideales y fluidos reales. Los fluidos ideales, son incompresibles y de viscosidad nula. Los **fluidos reales** contienen viscosidad y son todos los que existen en la naturaleza. A partir de los fluidos reales se desprenden dos tipos, siendo el primero los **fluidos newtonianos** que son aquellos que se rigen por las leyes de *viscosidad de Newton*, es decir que su viscosidad no varía de acuerdo con la fuerza que se aplique y depende mayoritariamente de la temperatura y poco de la presión. Aquellos materiales que poseen una alta viscosidad tienden a clasificarse como **fluidos no newtonianos** dado que su viscosidad no es función del gradiente de velocidad o, dicho de otra forma, *no* siguen la ley de viscosidad de newton, estos últimos se categorizan en dos ramas los dependientes del tiempo y los independientes del tiempo. En el esquema (Figura 4.1.1) se pueden observar los tipos de fluidos que existen de acuerdo a sus propiedades termodinámicas.

La primera categoría de fluidos es fuertemente dependiente respecto al tiempo llegando a subdividirse en tres ramas. Los **fluidos tixotrópicos** exhiben una reducción de la viscosidad aparente con el tiempo ante la aplicación de un esfuerzo de corte constante, en otras palabras, es que un fluido tarda un tiempo finito en alcanzar una viscosidad de equilibrio cuando hay un cambio instantáneo en el esfuerzo cortante. Los **fluidos reopécticos** muestran un aumento de viscosidad aparente con el tiempo. Los **fluidos viscoelásticos**, después de la deformación, algunos regresan parcialmente a su forma original cuando se liberan del esfuerzo aplicado (figura 4.1.2).

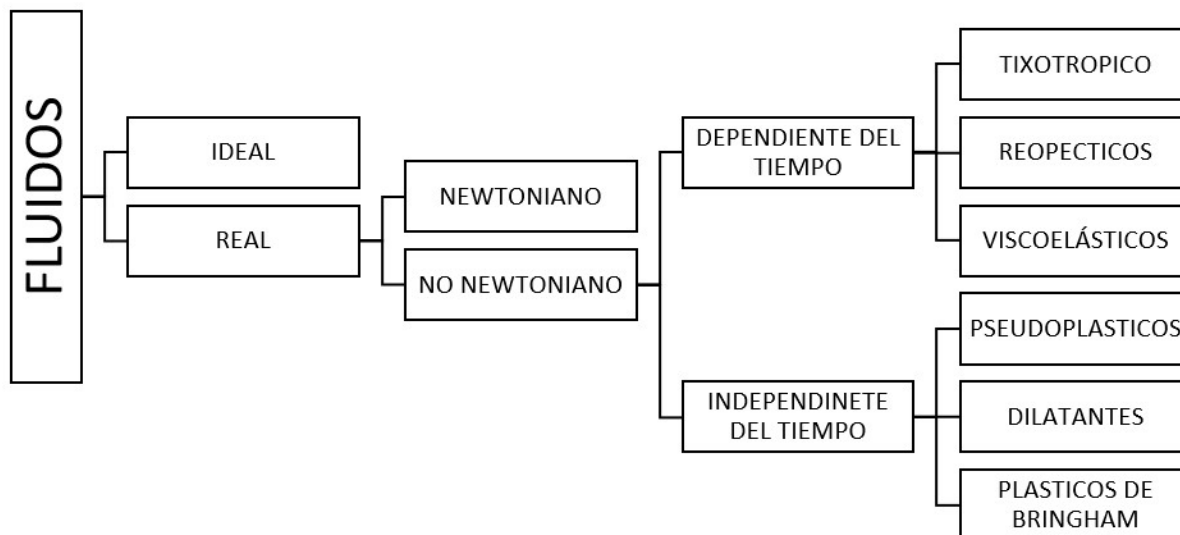


Figura 4.1.1: Representación esquemática de tipos de fluidos

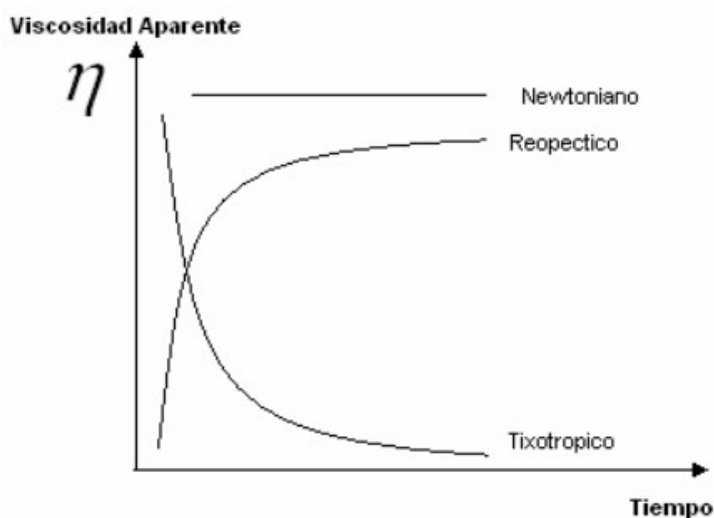


Figura 4.1.2: Representación gráfica del esfuerzo cortante contra la relación de deformación de los tipos de fluidos no Newtonianos que dependen del tiempo [42].

Los independientes del tiempo se subdividen en tres: los primeros son los **fluidos pseudoplásticos**, los cuales su viscosidad aparente disminuye con el aumento de la relación de deformación, sus opuestos serían los **fluidos dilatantes**, en ellos su viscosidad aparente aumenta con el incremento de la relación de deformación y, por último, se encuentran los **fluidos plásticos de Bringham** son especiales debido a que se comportan como un sólido hasta que excede de deformación mínima mostrando una relación lineal entre el esfuerzo y relación de deformación (Figura 4.1.3).

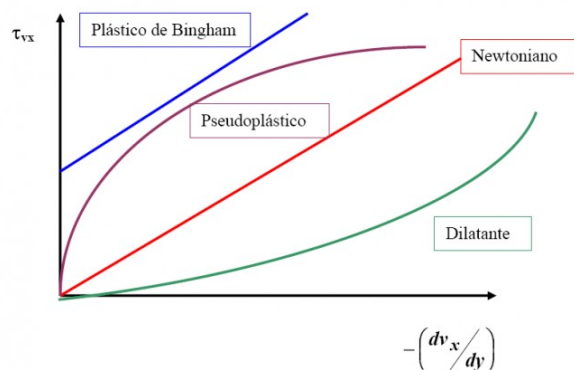


Figura 4.1.3: Representación gráfica del esfuerzo cortante contra la relación de deformación de los tipos de fluidos independientes del tiempo [42].

Tabla 4.1.1: Tabla de tipos de fluidos con sus respectivos ejemplos

FLUIDO REAL	TIEMPO	CLASIFICACIÓN	EJEMPLO
Newtoniano	-	-	<ul style="list-style-type: none"> • Agua a baja velocidad • Jarabe de maíz • Miel
No Newtoniano	Dependiente	Tixotropico	<ul style="list-style-type: none"> • Yogures • Pinturas • Ketchup
		Reopecticos	<ul style="list-style-type: none"> • Lubricantes • Pastas de yeso • Tintas de impresora
		Viscoelásticos	<ul style="list-style-type: none"> • Polímeros • Nata • Gelatina • Helados
	Independientes	Pesudoplasticos	<ul style="list-style-type: none"> • Gel de cabello • Ketchup
		Dilatantes	<ul style="list-style-type: none"> • Maizena con agua • Arena con agua • Sílice y polietilenglicol
		Plasticos de Bringham	<ul style="list-style-type: none"> • Mantequilla • Chocolate • Arcilla • Pasta de dientes

Los fluidos ocupados en la totalidad dentro de la industria son no newtonianos, siendo calculados bajo las leyes de los flujos newtonianos causando gran incertidumbre a la hora de presentar reportes, por lo que se empezaron a desarrollar herramientas prácticas para el estudio de éstos, siendo una de éstas la ecuación de Ostwald of Waele (Ley de potencias, ecuación (4.17), en donde $n = 1$ se modifica en la ley de viscosidad de Newton, por lo tanto, la desviación del valor de n con respecto a la unidad es una medida

de grado de desviación del comportamiento newtoniano, cuando $n < 1$ son los pseudoplásticos y si $n > 1$ son dilatantes [43].

$$\tau_{yx} = -m \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1} \cdot \frac{dv_x}{dy} \quad (4.17)$$

4.2. Tipos de flujo

Un concepto que fue introducido por Osborne Reynolds en el año de 1883 es el número adimensional **Número de Reynolds (Re)** el cual es muy utilizado en la mecánica de fluidos, diseño de reactores, y sobre todo en los fenómenos de transporte ya que es un parámetro que determina el comportamiento de los fluidos newtonianos. El número de Re viene dado por la ecuación:

$$Re = \frac{D \cdot \rho \cdot v}{\mu} = \frac{D \cdot v}{\nu} \quad (4.18)$$

Donde D es la dimensión lineal característica de recorrido del fluido que para el caso del conducto circular representa el diámetro mientras que para placas cuadradas [107] y rectangulares cambiara cambiara [108], se mide en m ; ρ es la densidad del fluido, kg/m^3 , donde variara de acuerdo a la temperatura y si es en gases se ocupa alguna ecuación de estado; la v es la velocidad promedio del fluido, m/s ; La μ que representa la viscosidad dinámica, $kg/(s \cdot m)$; y por último la viscosidad cinemática representada por la letra griega ν donde no es más que el cociente de densidad entre viscosidad, m^2/s , como se representa en la ecuación:

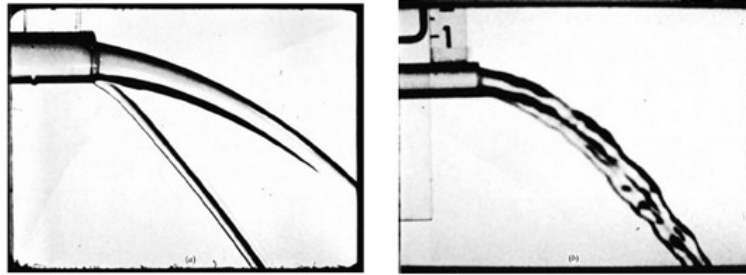
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (4.19)$$

Lo primero que se debe de hacer al estudiar un flujo es calcular el valor de Re . En donde, valores muy pequeños indican un movimiento *lento* correspondiendo a un **flujo laminar** ya que sus variaciones son suaves y es menor a 2100. Valores altos de Re suelen estar relacionados con el **flujo turbulento**, el cual se caracteriza por tener variaciones fluctuantes aleatorias tendiendo a aparecer remolinos, este es el más común a nivel industrial, teniendo valores mayores a 4200, y cuando el valor de Re se encuentra en estos dos límites se llama **flujo transitorio** en donde tiene un régimen inestable y puede cambiar a laminar a turbulento o viceversa (Tabla 4.2.1).

Tabla 4.2.1: Numero de Reynoldls para fluidos contenidos en una tubería circular.

Flujo	Número de Reynolds
Laminar	$2100 < Re$
Transitorio	$2100 \leq Re \leq 4200$
Turbulento	$Re > 4200$

Los flujos de acuerdo al número de Re se aprecian en la figura 4.2.1, donde se muestra un chorro de agua a la salida de un tubo. A bajo número de Re , figura 4.2.1(a), es suave y laminar. Y a alto número de Re , figura 4.2.1(b), es no estacionario, caótico, irregular y turbulento, pero cuando se promedia con el tiempo resulta estacionario y predecible.



(a) Viscosidad alta, bajo número de Re, flujo laminar. (b) Viscosidad baja, número de Reynolds elevado, flujo turbulento.

Figura 4.2.1: Flujo saliendo a velocidad constante de una tubería. Obtenido de F. White [38].

Ejemplo 4.2.1: Número de Reynolds en gases

Cierto fluido en estado gaseado viaja por una tubería de acero comercial de 3" con cédula 40 (Diámetro interno $[Di] = 3.0680''$), el fluido es calentado hasta 250 °F manteniendo la temperatura constante y mediante pruebas de laboratorio se determina que tiene una viscosidad dinámica de 1.672 cP. El flujo volumétrico que determina el compresor marca 500 Galones por Minuto (*GPM*). Determina que el número de Reynolds y en qué tipo de flujo es, si el fluido tiene una masa atómica de 27 una a presión del estado de Puebla (560 *mmHg*).

Resolución:

1. Se determina primero la densidad del fluido, suponiendo que es un gas ideal, entonces a partir de la ecuación de *gases ideales*

$$PV = nRT$$

$$PV = \frac{m}{M}RT$$

$$\rho = \frac{P \cdot M}{R \cdot T} \quad (4.20)$$

2. Sustituyendo los valores correspondientes, pero recordando el análisis dimensional, por lo que una correlación adecuada de $R = 2.2024 \text{ (ft}^3\text{mmHg)/(K}\cdot\text{lb}_{mol})$ y pata $T = 250^\circ F = 394.261 K$.

$$\rho = \frac{(560 \text{ mmHg})(27 \text{ lb}_m/\text{lb}_{mol})}{\left(2.2024 \frac{\text{ft}^3\text{mmHg}}{\text{K}\cdot\text{lb}_{mol}}\right) (394.261 \text{ K})}$$

3. El siguiente paso, es hallar la velocidad el fluido. Para los *GPM* se deben transformar en ft^3/s

siendo igual a 1.1140.

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{\dot{V}}{A} \\
 &= \frac{\dot{V}}{\pi i \cdot \frac{D^2}{4}} \\
 &= \frac{1.1140 \text{ ft}^3/\text{s}}{\pi \cdot \frac{(3.0680/12 \text{ ft})^2}{4}} \\
 &= 21.6993 \frac{\text{ft}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

4. La viscosidad dinámica del fluido es de 1.672 cP. Para el análisis dimensional se deben pasar a $lbm/(ft \cdot s)$ los cuales dan como resultados 0.0011, ya teniendo esta relación se ocupa la ecuación (4.18) y se sustituyen valores

$$\begin{aligned}
 Re &= \frac{D \cdot \rho \cdot v}{\mu} \\
 &= \frac{(3.0680/12 \text{ ft}) \cdot (17.4129 \text{ lb}_m/\text{ft}^3)(21.6993 \text{ ft/s})}{0.0011 \text{ lb}_m/(\text{ft} \cdot \text{s})} \\
 &= 87820.9749
 \end{aligned}$$

Siendo un **flujo turbulento**.

4.3. Volumen de control

Una de las herramientas que es de bastante ayuda en el proceso de entendimiento de un sistema a analizar, no solo en flujo de fluidos si no en el intercambio de masa o calor (fenómenos de transporte), consiste en establecer una región en el espacio, dentro del sistema en cuestión, a la cual se le aplican las leyes físicas fundamentales para obtener las ecuaciones que describen los fenómenos que ocurren en el sistema. Esta región, que se caracteriza por tener un volumen constante, se denomina **volumen de control** y, las superficies que lo limitan **superficies de control** (figura 4.3.1).

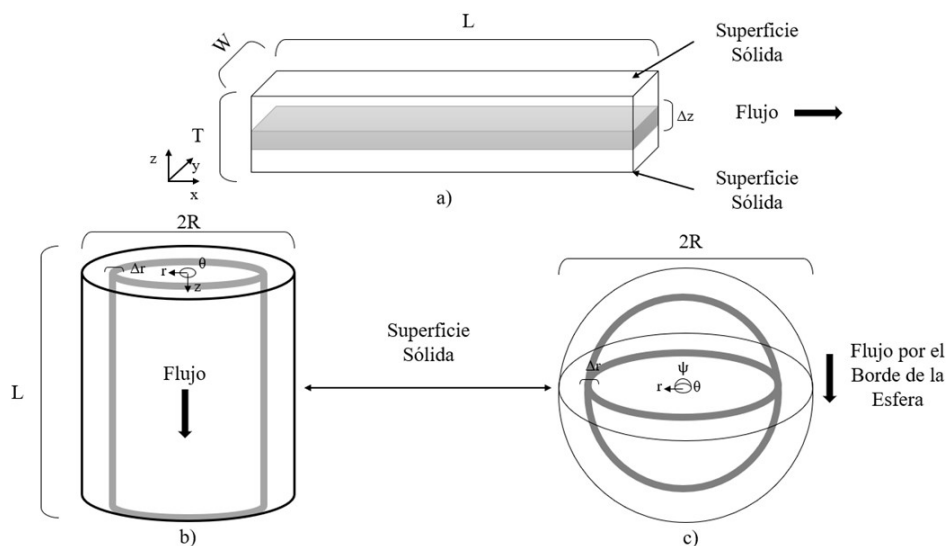


Figura 4.3.1: Tipos de volúmenes de control. (a) Es el volumen de control, en color gris, para coordenadas rectangulares, donde el flujo es vertical. (b) Es el volumen de control, en color gris, para coordenadas cilíndricas, donde el flujo es horizontal dentro del cilindro. (c) Es el volumen de control, en color gris, para coordenadas esféricas, donde el flujo es sobre el borde de la esfera

La forma del volumen de control depende de la **geometría del sistema que se estudia**, así como la dirección en que se este llevando a cabo el **diferencial de potencial**. Por poner unos ejemplos, para sistemas rectangulares, pueden adoptar la forma de un cubo o de un paralelepípedo. En la figura 4.3.1 (a) se ilustra un sistema de flujo constituido por un líquido que fluye entre dos láminas sólidas paralelas de longitud L y anchura W y separadas entre sí por una distancia pequeña T . El volumen de control situado en el seno del líquido será lado por lado $(L \cdot W \cdot \Delta z)$ o visto por medio de diferenciales como $dx dy dz$, cuando la velocidad ocurre en v_x . Para el mismo caso sería en coordenadas cilíndricas la cual tendrá la forma de un tubo, donde se muestra en la figura 4.3.1 (b) donde el fluido fluye por dentro de un cilindro que tiene de diámetro $2R$ y una longitud L , por lo cual el volumen de un cilindro esta dado por $2\pi L r \Delta r$ o visto por medio de diferenciales como $r dr d\theta dz$, cuando la velocidad ocurre en v_z . Por ultimo, queda la esfera, que su volumen de control viene dado por una esfera hueca $4/3\pi r^2 \Delta r$ o visto por medio de diferenciales como $r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$, cuando la velocidad ocurre en v_ϕ , como se muestra en la figura 4.3.1 (c).

4.4. Medidores de Viscosidad dinámica

Una forma de determinar la viscosidad cinemática es mediante medidores de viscosidad, también llamados **viscosímetros**, los cuales son instrumentos que permiten determinar la resistencia de diferentes líquidos. Los medidores de viscosidad se usan principalmente en laboratorios, pero también puede verse en el control de procesos que necesiten de una regulación.

4.4.1. Viscosímetros de uso laboratorio

Viscosímetros capilares Es uno de los viscosímetros más antiguo y más empleados. Este tipo de viscosímetros funciona haciendo pasar un fluido a través de un tubo observándose una distribución de velocidad en el tubo de tipo parabólico, de forma que la porción del fluido que está en contacto con la paredes del capilar tiene una velocidad nula y la porción del fluido que se encuentra en el centro del tubo tiene una velocidad máxima. El único inconveniente es que son normalmente utilizados para *fluidos newtonianos*.



Figura 4.4.1: Viscosímetros de vidrio capilar [48].

Viscosímetros de cuerpo móvil Este instrumento de medición se fundamenta bajo la ley de Stokes, que relaciona la viscosidad de un fluido con la velocidad de caída. Los viscosímetros más conocidos son los de caída de esfera, los cuales poseen un tubo que puede ser de plástico o vidrio, que se llena con el volumen del fluido al que se le determinará la viscosidad, permitiendo de esta manera conocer la velocidad de caída que alcanza una bola esférica arrojada dentro de un fluido



Figura 4.4.2: Viscosímetro de caída de bola tipo C Thermo Scientific HAAKETM [49].

Viscosímetros rotacionales Los viscosímetros rotacionales constan básicamente de dos partes que se encuentran separadas por el fluido a estudiar. Dichas partes pueden ser dos cilindros, dos superficies paralelas, una superficie y un cono de pequeño ángulo, un rotor en el interior de un cilindro. El movimiento

de una de estas partes provoca la aparición de un gradiente de velocidades a lo largo del fluido. Para determinar la viscosidad del fluido se mide el esfuerzo necesario para producir una determinada velocidad angular. Este tipo de viscosímetros son mucho más versátiles que los estudiados anteriormente y pueden ser utilizados para fluidos no Newtonianos.



Figura 4.4.3: Viscosímetro rotacional tipo Brookfield IKA Rotavisc [50].

4.4.2. Viscosímetros de uso industria

Viscosímetro Saybolt Siendo uno de los viscosímetros más utilizados para la determinación de viscosidad de un líquido. En este caso, el fluido se vierte en un recipiente con orificio, que a su vez se encuentra dentro de otro que sirve de baño termostático, de manera que pueda determinarse las viscosidades a temperaturas variadas. Dicho instrumento posee un sistema de calentamiento integrado. Como la exactitud es imprescindible en la medición de viscosidad, con este tipo de viscosímetro se realizan tres mediciones a tres temperaturas diferentes.



Figura 4.4.4: Viscosímetro automático Saybolt [51].

Viscosímetro ViscoScope Este viscosímetro diseñado por la empresa *MARIMEX* [52] tiene un diseño modular que permite crear el sistema óptimo para prácticamente cualquier aplicación. Desde temperaturas de -40°C a 450°C , o incluso hasta 1500°C con diseños especiales, presiones de vacío a 550 bar y

viscosidades de 0.1 a $2.5 \cdot 10^6 \text{ mPa} \cdot \text{s}$. Tiene aplicaciones de medición en la industria química como en la industria petroquímica. Siendo esta última donde se manejan las viscosidades más elevadas con un grado de hasta IFO 580 (El IFO es una mezcla de fuel-oil pesado (HFO) barato y gasoil caro). A 15°C , el IFO tiene una consistencia similar a la del betún y apenas es bombeable, por lo que debe calentarse a unos $50\text{-}60^\circ\text{C}$. El viscosímetro ViscoScope mide continuamente la viscosidad del combustible durante el abastecimiento para garantizar que se añade la cantidad correcta de gasóleo. Además, documenta los cambios de viscosidad a lo largo del proceso hasta un nivel muy superior a los requisitos de la normativa MARPOL.



Figura 4.4.5: Viscosímetro ViscoScope Inline VA-100 [52].

Viscosímetro portátil Entre toda la gama de viscosímetros que cumplen con diferentes propósitos de medición, los modelos industriales portátiles permiten no sólo mediciones en un punto (laboratorio), sino que permiten también mediciones durante los procesos de producción, permitiendo un examen detallado de muestras de líquidos.



Figura 4.4.6: Viscosímetro portátil B-ONE [53].

Capítulo 5

Deducciones matemáticas para flujos laminar y estado estacionario

Antes de deducir las ecuaciones de flujo laminar se definirá lo que es **Cantidad de movimiento** o **momentum**, siendo una magnitud física la cual describe el movimiento de un cuerpo. La mecánica newtoniana define el movimiento de una partícula (cuerpo) como que el producto de la masa por su velocidad

$$p = m \cdot v \quad (5.1)$$

Donde p es la cantidad de movimiento lineal; m es la masa del cuerpo constante; v es la velocidad. A la ecuación (5.1) se le conoce como la primera ley de Newton de la inercia y solo es valida cuando el cuerpo no esta sometido a fuerzas externas. Cuando se requiere determinar la cantidad de movimiento de un fluido que se mueve en un campo de velocidades, es importante tomar en cuenta la contribución de cada una de las partículas que forman el fluido, de tal manera que la suma de esas contribuciones da el momento total expresado por la siguiente ecuación

$$p = \int v dm = \int_V v \rho dV \quad (5.2)$$

Donde: ρ es la densidad y V el volumen del fluido. Al tratarse de un fluido, este tiene la característica que se pueden deformar, cuando actúan fuerzas sobre dicho fluido en un tiempo determinado de manera irreversible. Dichas fuerzas que se actúan sobre el fluido, se pueden calcular mediante la expresión:

$$\sum \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \quad (5.3)$$

Donde $\sum \vec{F}$ es la suma de fuerzas totales que actúa sobre el cuerpo; $\Delta \vec{p}$ es la variación del momento lineal producida en un intervalo de tiempo, donde $\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$, siendo el subíndice f el valor final e i el valor inicial; Δt el intervalo de tiempo. A la ecuación (5.3) también es conocida como **segunda ley de Newton** y expresa la rapidez con que cambia el momento lineal, siendo igual a la suma de fuerzas que actúan sobre el fluido. Para calcular la fuerza instantánea total se puede aproximar cuando $\Delta t \mapsto 0$

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \\ &= \frac{d\vec{p}}{dt} \end{aligned}$$

Suponiendo que el fluido mantiene su masa constante a lo largo de todo su desplazamiento (fluidos incompresibles), se puede sustituir \vec{p} de la expresión anterior por (5.1)

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \frac{\vec{p}}{dt} \\ &= \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} \\ &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \end{aligned}$$

Donde $d\vec{v}/dt$ es la aceleración, ecuación (1.16)

$$\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (5.4)$$

Conocida como **ecuación de cantidad de movimiento en un fluido**, siendo la segunda expresión de la ley de Newton aplicada en un fluido. Se puede hacer un **balance de cantidad de movimiento** para sistemas que operan en estado estacionario o régimen permanente (no hay variaciones de la velocidad con respecto al tiempo), partiendo de la ecuación (5.4):

$$\begin{aligned} \text{Suma de fuerzas que actúan sobre el sistema} &= \\ \text{Cantidad de movimiento que sale del sistema} &- \\ \text{Cantidad de movimiento que entra al sistema} & \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para realizar los balances en *estado estacionario*, tomando en cuenta que las variables como temperatura, densidad y velocidad se mantienen constantes, es decir, que en cada punto de la corriente no cambian respecto al tiempo. Además, la velocidad del flujo es relativamente baja que puede considerarse como un flujo laminar. Para empezar a resolver los problemas, se debe establecer un **balance general de cantidad de movimiento** sobre el fluido a analizar. Partiendo de un fluido que se encuentra en reposo, dicho fluido será un volumen de control el cual se encuentra contenido entre dos placas rectangulares que son paralelas entre sí. Las placas tienen dimensiones de alto Δy , ancho Δz y la distancia interna entre placa y placa (el grosor del fluido) es de Δx , como la figura 5.0.1.

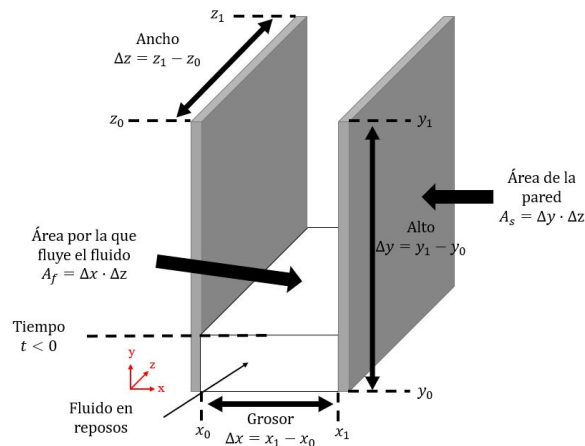


Figura 5.0.1: Fluido siendo transportado entre dos placas paralelas verticales en estado *no estacionario*.

La figura 5.0.1 al tener una geometría de prisma rectangular, es como usar coordenadas cartesianas $x-y-z$ para especificar discretiones vectoriales. Se deber ver el fluido de una perspectiva lateral en el eje xy , ver figura 5.0.2(a). Si se tomará el eje yz se vería únicamente una pared, como se ve en 5.0.2(b), y para el eje

xz se verían rectángulos a todo lo largo, tal como en la figura 5.0.2(c), y lo que se quiere apreciar es el comportamiento del fluido a lo largo de las placas .

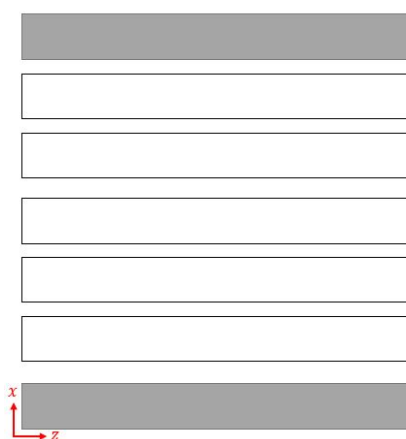
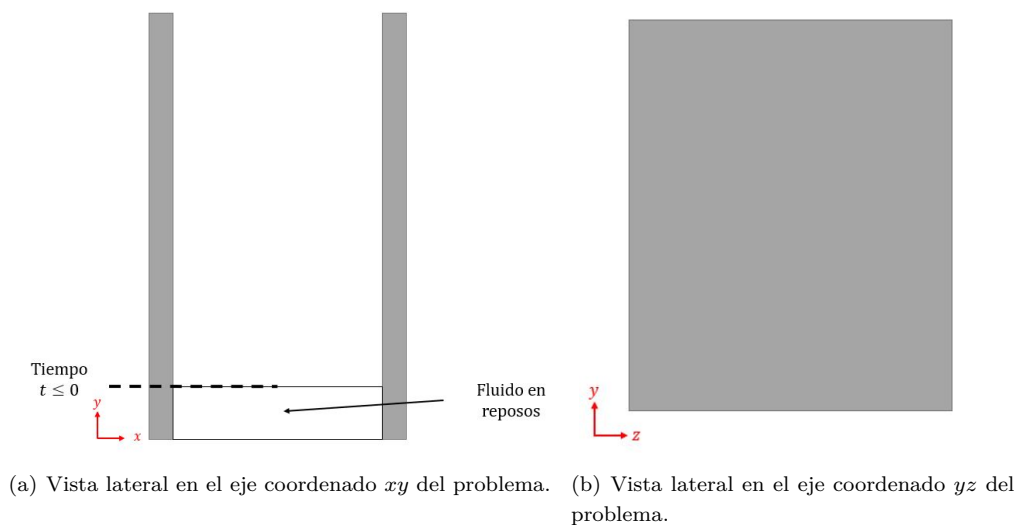


Figura 5.0.2: Vista bidimensional del problema.

Establecido la vista lateral a trabajar, se debe poner el eje coordenado en algún punto del espacio, por comodidad, el eje se establecerá en un **vértice** del volumen de control, siendo el que esta a la izquierda inferior, el cual colinda la pared con el fluido. Además, el fluido empezara a moverse poco a poco, gracias a una **fuerza de empuje** que hará que suba a lo largo de ambas placas, tal como la figura 5.0.3.

Con el paso tiempo, el fluido empezara a tener mayor distancia a lo largo de ambas placas paralelas, tal como la imagen 5.0.4, el cual el desplazamiento del fluido Newtoniano en régimen laminar estará indicado por las flechas negras.

Seguramente surgirá la duda del ¿por qué el movimiento del fluido de la figura 5.0.4 no se parece a la figura 4.0.6(b)? La explicación se debe a que la figura 4.0.6(b) el movimiento del fluido es debido al movimiento que se ejerce sobre una de las tapas, siendo la superior, mientras que la inferior esta inmóvil, y la velocidad

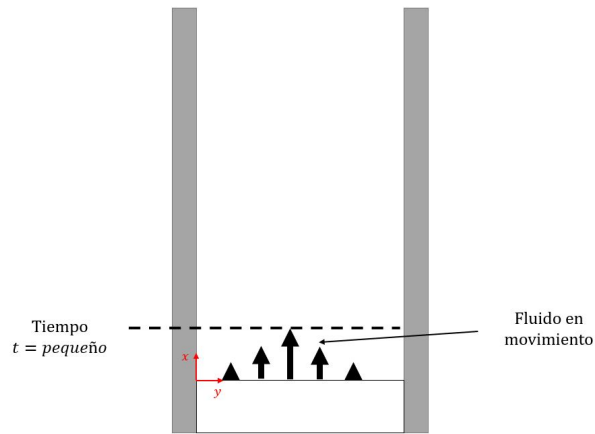


Figura 5.0.3: Movimiento del fluido en un pequeño tiempo, donde las flechas indican la dirección en que se mueve el fluido.

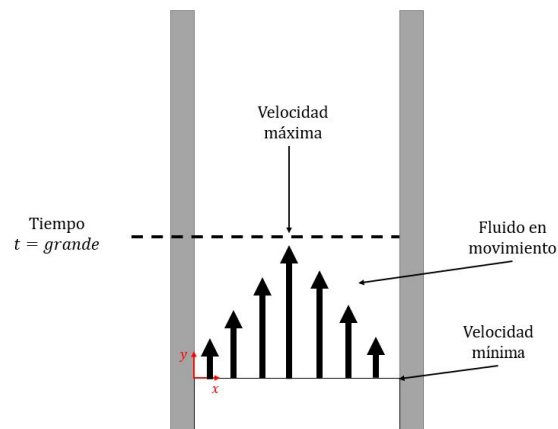


Figura 5.0.4: Movimiento del fluido en un lazo grande de tiempo, donde las flechas indican la dirección en que se mueve el fluido.

máxima es aquella donde la tapa se esta movimiento, mientras que la tapa inmóvil es la velocidad mínima. Resulta algo similar al caso de la figura 5.0.4, con la variación de que ambas paredes son inmóviles, por lo tanto el fluido tendrá velocidad muy bajas en ambas paredes, mientras que la velocidad máxima se encuentra en medio del fluido gracias a que es la zona más alejada de la fuerza que puedan ejercer las paredes, recordando que esta fuerza del fluido se llama, **fuerza tangencial** y la que ejerce las paredes se llama **fuerza opuesta**. Dicho esto, se pueden explicar las **condiciones de frontera**, y estas existirán en un punto donde halla una separación entre dos fases o medios diferentes, son de enorme importancia ya que en esta región ambas propiedades fisicoquímicas se ven modificadas. Para el estudio de flujo de fluidos existe tres de suma importancia, siendo la interfase sólido-líquido, líquido-líquido y líquido-gas. Pudiera existir también la interfase sólido-gas, pero en dicha interfase el gas se comportaría igual como un líquido, ya que es un fluido, pero dicha interfase es más ocupada en transferencia de masa.

- **Interfase sólido-líquido:** La velocidad del fluido es igual a la velocidad con que se mueve la superficie sólida, $v_{liq} = v_a$. Si el sólido no se moviera; la velocidad del líquido sería nula $v_{liq} = 0$. Para el esfuerzo cortante τ_{ij} , cuando la pared es inmóvil será igual a 0, $\tau_{ij} = 0$, mientras que para una pared en movimiento será el mismo tanto para la parte sólida como la parte líquida, es decir $\tau_{ij} = \tau_a$, pero en la mayoría de los casos esta es sumamente complicada de medir, no es valido utilizarlo.

- En la interfase **líquido-líquido:** solo es valido cuando son **líquidos inmiscible** y la velocidad será la misma para ambos, ya que el esfuerzo es el mismo, es decir $\tau_{ab}^I = \tau_{ab}^{II}$ y $v_{liq}^I = v_{liq}^{II}$, donde el índice I y II , indicaran que es líquido uno, I , y el líquido dos, II . Puede existir la excepción de que existe una interfase líquido-líquido, aunque sea el mismo fluido y esta excepción se da por lo regular en coordenadas cilíndricas y esféricas. También se llama **condición de simetría**.

- En la interfase **líquido-gas:** los componentes de tensor de esfuerzo, τ_{ab} , se toman igual a cero, $\tau_{ij} = 0$, siempre que el gradiente de velocidad del lado de gas no sea demasiado grande. Esto es coherente, ya que la viscosidad de los gases es mucho menor que la de los líquidos. Para la velocidad en esta interfase, será la máxima $v_{liq} = v_{max}$, siempre y cuando la pared sea fija y no tenga movimiento alguno

Otra condición que hay que tener en cuenta es la pared [58], ya que esta demostrado físicamente que a un nivel microscópico tiene pequeños relieves, sea del material sólido que sea (exceptuando el hielo), haciendo que se tenga que ejercer una mayor fuerza sobre el fluido para que se mueva, a esta oposición de fuerza, se le llama **fricción**, la cual se retomara en capítulos posteriores.

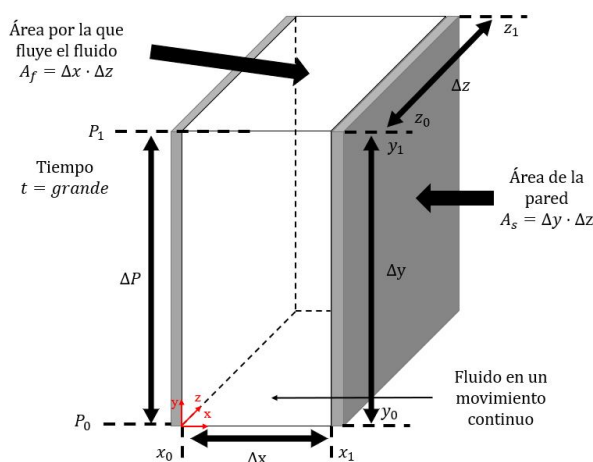


Figura 5.0.5: Eje coordenado para un diagrama de cuerpo libre.

Regresando al problema original. Cuando el fluido esta completamente desarrollado, es decir, que esta en un estacionario se comportará como la figura 5.0.5, todo la velocidad es uniforme. Para establecer el balance se debe establecer ciertas condiciones, como son que el sistema no contiene reacción química, opera de forma isotérmica, esta en estado estacionario, es un flujo laminar y es un fluido Newtoniano.

Posteriormente, se hay recordar las clases de física, donde se realizaban diagramas de cuerpo libre, donde se representará las fuerzas que interactúan con el fluido. Realizando un plano bidimensional en los ejes xy , como la figura 5.0.6. Los ejes yz y xz no se tomaran en cuenta, ya que no permiten ver el comportamiento del fluido a lo largo de las placas, ver las figuras 5.0.2(b) y 5.0.2(c).

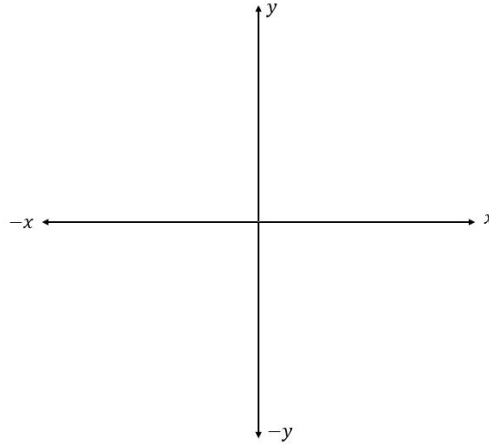


Figura 5.0.6: Eje coordenado para un diagrama de cuerpo libre.

Hecho el diagrama, para empezar a deducir las fuerzas que intervienen en el sistema, se debe recordar que son las fuerzas que ayudan y/o impiden al movimiento del fluido:

1. La primera fuerza que interviene para un *fluido* es la **fuerza por transporte convectivo**, F_{conv} , la cual tiene dirección hacia arriba, es decir en el eje y .
2. La segunda fuerza que interviene es la **fuerza tangencial**, la cual parte del esfuerzo cortante, ecuación (4.14), siendo despejado el término de F . Remitiéndose a la figura 4.0.9 se aprecia que al aplicar una fuerza habrá otra en sentido opuesto y misma magnitud, recordar que es la definición de la tercera ley de Newton. El fluido esta aplicando una fuerza en dirección y , la cual se llama fuerza viscosa o fuerza tangencial F_{tang} . Mientras que, la fuerza opuesta será las paredes, ya que no tienen movimiento, pero si ejercen una fuerza de resistencia hacia la dirección $-y$ y se denotara como F_{opu} .
3. La tercera fuerza a considerar es la **fuerza de empuje**, la cual es la fuerza necesaria para empujar al fluido de entrada a la salida, F_{empu} , con dirección en y .
4. La ultima fuerza conocida es el **peso del fluido**, ya que aquí actúa la gravedad, con dirección a $-y$, esto es porque la gravedad siempre va hacia abajo y se denotara como w .

Por lo tanto, el diagrama de fuerzas quedaría como la figura 5.0.7. Sí el sistema opera en estado estacionario se puede suponer que esta en equilibrio, haciendo que se pueda realizar una suma de fuerzas en equilibrio:

$$\sum F_i = F_{conv} + F_{tang} - F_{opu} + F_{empu} - w = 0 \quad (5.6)$$

Determinado las fuerzas que intervienen en el sistema, se establece el eje coordenado en un punto fijo, permitiendo a saber en que dirección se esta desplazando el fluido y tambien la dirección de las interfases, tal como la figura 5.0.8

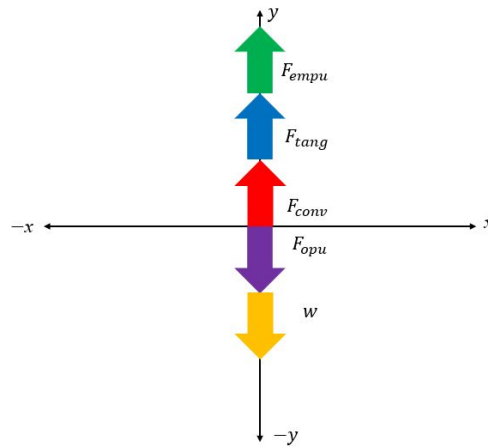


Figura 5.0.7: Diagrama de cuerpo libre con las fuerzas que intervienen para el fluido comprendido entre dos placas paralelas inmóviles.

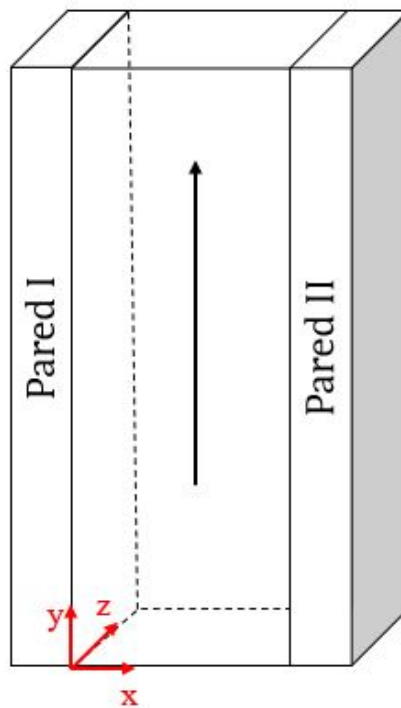


Figura 5.0.8: Posición del eje coordenado del volumen de control comprendido entre dos placas.

Existirá la duda de ¿qué es la fuerza por transporte convectivo? Hay que imaginarse que el fluido se está moviendo como una placa rectangular inicialmente, figura 5.0.9, el cual parte desde abajo y se le aplica una fuerza para que tienda a subir poco a poco, hasta llegar a la parte superior, a este desplazamiento de masa de un punto inicial a un final con una desaceleración se le conoce como **fuerza por transporte convectivo**.

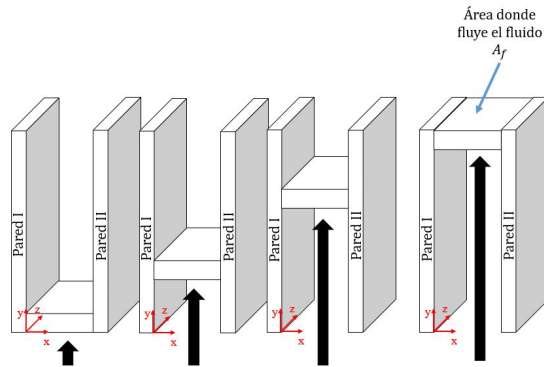


Figura 5.0.9: Desplazamiento del fluido por capas rectangulares, el cual fluye a través de dos placas paralelas.

Pero ¿Por qué desaceleración y no aceleración? Se debe a que la masa va a tender a disminuir su velocidad inicial debido a una fuerza externa que actúa llamada gravedad. Se puede ver ejemplificado esta desaceleración con la figura 5.0.10, ya que la única fuerza que actúa sobre ella durante su recorrido es su peso, el cual siempre está dirigido hacia abajo. Por tanto, el signo de la aceleración es negativo (hacia abajo) durante todo el movimiento.

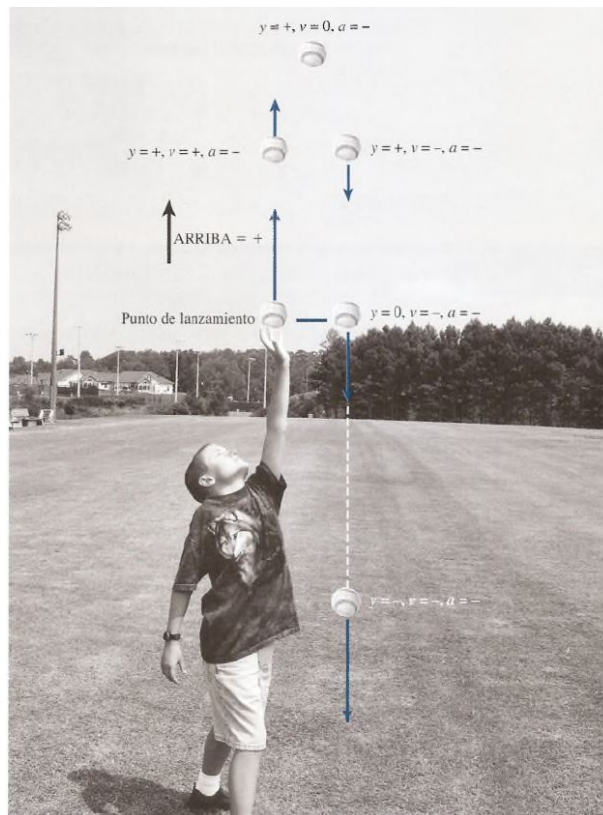


Figura 5.0.10: Desplazamiento de una pelota de béisbol. Obtenido de P. Tippens [13].

La definición antes mencionada para el *transporte convectivo* corresponde bastante con la definición de la

segunda ley de Newton:

$$F_{conv} = -m \cdot a \quad (5.7)$$

El signo negativo corresponde a la desaceleración; además de que la aceleración es una magnitud vectorial, por lo cual se debe indicar cual es su dirección. Viendo el eje coordenado el movimiento de la placa tiene lugar en y , por lo tanto $a_y x$ donde el subíndice y indica el eje en el cual se está desplazando

$$F_{conv} = -m \cdot a_y \quad (5.8)$$

Aplicando la definición de aceleración, ecuación (1.16), la cual dice que es un cambio de velocidad por unidad de tiempo, la ecuación (5.8) quedaría como

$$F_{conv} = -m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{m}{dt} dv_y \quad (5.9)$$

El término m/dt se interpreta como el flujo másico, es decir, la cantidad de masa que fluye en una cantidad de tiempo dada y se puede transcribir como \dot{m} en la ecuación (5.9)

$$F_{conv} = -\dot{m} \cdot dv_y \quad (5.10)$$

Aplicando la definición de flujo másico donde corresponde a la ecuación (1.34), con el objetivo de convertir el flujo másico a flujo volumétrico, para la ecuación (5.10)

$$F_{conv} = -\rho \cdot \dot{V} \cdot dv_y \quad (5.11)$$

Aplicando la definición de flujo volumétrico, ecuación (1.31), en la ecuación (5.11)

$$F_{conv} = -\rho \cdot A_f \cdot v_y \cdot dv_y \quad (5.12)$$

La variable d corresponde a un cambio y se expresa como

$$d = final - inicial$$

Entonces habrá una velocidad inicial y una velocidad final. Viendo las figura 5.0.5, corresponde a las dimensiones del problema, pudiendo decir que la velocidad inicial parte de punto y_0 y finaliza en el punto y_1 , por lo tanto, la ecuación (5.12) será

$$F_{conv} = -\rho \cdot A_f \cdot v_y \cdot (v_{(y_1)} - v_{(y_0)}) \quad (5.13)$$

$$= \rho \cdot A_f \cdot v_y \cdot (v_{(y_0)} - v_{(y_1)}) \quad (5.14)$$

Quitando los paréntesis

$$F_{conv} = \rho \cdot A_f \cdot v_y \cdot v_{(y_0)} - \rho \cdot A_f \cdot v_y \cdot v_{(y_1)} \quad (5.15)$$

En vez de poner $v_{(i_0)}$ y $v_{(i_1)}$ se sustituyen por barras verticales, tal que $v_y|_{(y_0)}$ y $v_y|_{(y_1)}$, las barras verticales con subíndices en matemáticas representan un rango, siendo el rango inicial en el punto y_0 y finalizando en el punto y_1

$$F_{conv} = \rho \cdot A_f \cdot v_i \cdot v_i|_{(i_0)} - \rho \cdot A_f \cdot v_i \cdot v_i|_{(i_1)} \quad (5.16)$$

Haciendo el producto de velocidades

$$F_{conv} = \rho \cdot A_f \cdot v_y^2|_{(y_0)} - \rho \cdot A_f \cdot v_y^2|_{(y_1)} \quad (5.17)$$

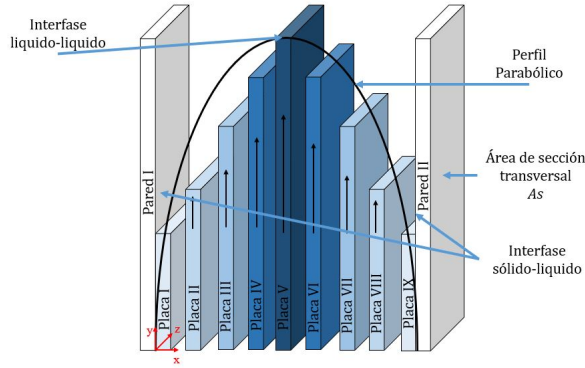


Figura 5.0.11: Movimiento por placas del fluido contenido entre dos placas paralelas donde el color azul más intenso es el movimiento molecular con mayor velocidad que mientras que el azul menos intenso es el que tiene menor velocidad molecular.

Algunos autores como el Bird [1] ponen a v_y^2 como v_{yy} , quedando la ecuación (5.17)

$$F_{conv} = \rho \cdot A_f \cdot v_{yy}|_{(y_0)} - \rho \cdot A_f \cdot v_{yy}|_{(y_1)} \quad (5.18)$$

A la primera parte de la igualdad de la derecha se le conoce como *velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte convectivo* y a la segunda parte de la igualdad de la derecha como *velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte convectivo*.

Para la demostración de la segunda fuerza, se establece que existe una fuerza de empuje que lleva el fluido Newtoniano de forma ascendente, se puede suponer que además el movimiento se efectúa por capas adyacentes, constituidas por moléculas que se deslizan una sobre otra con una velocidad constante, pero con valores diferentes, en la dirección del eje y , como se muestra en la figura 5.0.11. En dicha figura se aprecia lo que se conoce como un perfil parabólico y se presenta cuando hay flujos laminares, es decir que existen velocidades bajas y/o el fluido es muy viscosos. El perfil parabólico se debe a las fuerzas de resistencia que existen dependiendo de la interfase en la que este. Hay que ver la placa I, siendo donde se colocó el eje coordenado, entre la placa I y la pared (interfase sólido-líquido), al desplazarse a lo largo del eje x , la velocidad de las placas irán aumentando consecutivamente hasta la placa V, que en está es donde existe la mayor velocidad y se encuentra la monofase líquido-líquido. Al seguirse desplazando a lo largo del eje x , de la placa V hasta la placa IX la velocidad ira disminuyendo hasta tocar la pared II, siendo la interfase sólido-líquido, tanto la placa I como la IX tendrán una velocidad de 0, debido a que la pared no se mueve pero mientras más se van acercando al centro del fluido las placas moleculares van adquiriendo mayor velocidad, este fenómeno se explico con anterioridad, y se debe a la resistencia de movimiento entre placas el cual se denomina **fuerza tangencial** o **fuerza viscosa**, la cual viene dada por la ecuación (4.14)

$$F_{tang} = A_s \cdot \tau$$

Pero τ tiende a tener dos subíndices los cuales se llamarán por el momento a y b , poniendo a τ_{ab} . El primer subíndice a indica la dirección que tiene el **esfuerzo cortante** y será aquella que se da entre la separación de interfase e interfase, teniendo en este caso dos interfases, la primera que es sólido-líquido y la segunda que es igual sólido-líquido, la cual su separación se da a lo largo del eje x , por lo tanto $a = x$. El segundo subíndice b indica la dirección de desplazamiento del fluido, viendo la figura 5.0.11, las flechas indican que tiene dirección ascendente hacia el eje y , por lo tanto $b = y$, quedando τ_{xy} . Sustituyendo

$$F_{tang} = A_s \cdot \tau_{xy}$$

Así como existe una fuerza tangencial existirá una fuerza opuesta, F_{opu} , siendo la que se opone al movimiento del fluido, siendo en este caso la pared. Retomando la ecuación (4.7)

$$F_{opu} = F_{tang}$$

O también como

$$F_{opu} = A_s \cdot \tau_{xy} \quad (5.19)$$

El esfuerzo cortante τ_{xy} es perpendicular al flujo y tendrá un punto inicial y un punto final. Esto se refiere a que al evaluar la F_{tang} en una de las dos interfases, para la F_{opu} se deberá desplazar hacia la otra interfase que no se ocupo, haciendo que el esfuerzo cortante tenga un rango. Este rango tendrá la dirección separación entre interfases, de acuerdo al punto eje coordenado establecido. Es decir, que para el rango del esfuerzo cortante de la primera fuerza, siendo la tangencial, viendo las dimensiones del problema y establecido el eje coordenado (ver figura 5.0.5) se sabe que la interfase sólido-líquido (pared I con placa I) sería en el punto x_0

$$F_{tang} = A_s \cdot \tau_{xy}|_{(x_0)} \quad (5.20)$$

Donde $\tau_{xy}|_{(x_0)}$ representa el rango inicial en punto x_0 para el esfuerzo cortante. Así mismo, la fuerza opuesta también tendrá dirección, pero ahora su rango será del punto coordenado hasta donde ocurre la segunda interfase sólido-líquido (placa IX con pared II). Viendo de nuevo la figura 5.0.5, la interfase se encuentra en el punto x_1 ,

$$F_{opu} = A_s \cdot \tau_{xy}|_{(x_1)} \quad (5.21)$$

x_1 representa el punto coordenado final de la fuerza opuesta, pero no se puede quedar así, debido a que en la dirección el eje x ocurre un **diferencial**. El diferencial se debe a que cada placa (figura 5.0.11) tendrá una velocidad diferentes a lo largo del eje x y este diferencial siempre es perpendicular al eje de flujo. Para determinar el diferencial viene dado representado como un **cambio** entre el punto final menos el punto inicial y viene dado por la letra griega Δ

$$\Delta = final - inicial \quad (5.22)$$

Donde únicamente se despeja *final*

$$final = inicial + \Delta \quad (5.23)$$

Representando la ecuación (5.23), en el eje coordenado

$$x_1 = x_0 + \Delta x \quad (5.24)$$

La cual sustituyendo (5.24) en (5.21)

$$F_{opu} = A_s \cdot \tau_{xy}|_{(x_0+\Delta x)} \quad (5.25)$$

El punto inicial donde se esta llevando a cabo el diferencial se hace un cambio de nomenclatura, como x_0 es el punto de partida y y parte de eje coordenado, se puede decir que $x = x_0$. Haciendo este cambiando de nomenclatura en las ecuaciones (5.20) y (5.25) quedaría tal que

$$F_{tang} = A_s \cdot \tau_{xy}|_{(x)} \quad (5.26)$$

$$F_{opu} = A_s \cdot \tau_{xy}|_{(x+\Delta x)} \quad (5.27)$$

A la ecuación (5.26) se le conoce en la literatura como *velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte molecular*. A la ecuación (5.27) es la *velocidad de salida de cantidad de movimiento por*

transporte molecular. Para demostrar, la tercera, siendo la **fuerza de empuje** hay que ver la figura 5.0.9, donde se esta ejerciendo una fuerza en dirección al eje y , la cual es directamente proporcional a la *presión* que se este ejerciendo por el *área por el cual fluye el fluido*, esta descripción tiene relación con la ecuación (1.27)

$$F_{empu} = Pd \cdot A_f \quad (5.28)$$

La pregunta es ¿Por qué se puso Pd y no P ? Pd significa básicamente el valor diferencial entre dos presiones. Este diferencial de presiones es importante en la industria, ya que permite medir el valor de perdida de carga o de presión que existe entre dos puntos determinados. Para medir la presión diferencial se utilizan equipos que hacen una lectura entre dos puntos del elemento a medir. Pueden ser mecánicos como los manómetros de presión diferencial o electrónicos como los transmisores de presión diferencial, tal como se muestra en la figura 5.0.12. La presión diferencial va de una presión inicial mayor a una presión final menor y se calcula como

$$Pd = P_0 - P_1 \quad (5.29)$$

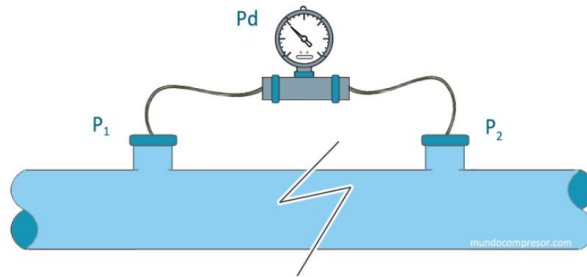


Figura 5.0.12: El control de la presión diferencial en un sistema suele ser clave para que dicho sistema funcione [54].

Sustituyendo la ecuación (5.29) en (5.25)

$$F_{empu} = (P_0 - P_1) \cdot A_f$$

Quitando paréntesis

$$F_{empu} = P_0 \cdot A_f - P_1 \cdot A_f \quad (5.30)$$

La ultima fuerza que actúa es el peso del fluido moviéndose, debido a que actúa algo llamado la gravedad. El peso se define como el producto de su masa por la gravedad

$$w = m \cdot g \quad (5.31)$$

Aplicando la definición de densidad dada por la ecuación (1.28), de la cual se despeja m se obtiene que

$$w = \rho \cdot V_{cont} \cdot g \quad (5.32)$$

Por ultimo, sustituyendo las ecuaciones (5.17), (5.20), (5.25), (5.30) y (5.32) en (5.6)

$$\rho \cdot A_f \cdot v_y^2|_{(y_0)} - \rho \cdot A_f \cdot v_y^2|_{(y_1)} + A_s \cdot \tau_{xy}|_x - A_s \cdot \tau_{xy}|_{(x+\Delta x)} + P_0 \cdot A_f - P_1 \cdot A_f - \rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.33)$$

El signo del peso del fluido puede ser positivo, +, si el fluido no se esta oponiendo a la gravedad, o en otras palabras, que va en dirección hacia abajo; sera negativo, -, si el fluido se opone a la gravedad, es decir, que va hacia arriba; la gravedad será 0 si el fluido se mueve totalmente horizontal. Se modificará un poco

la ecuación (5.33) donde el subíndice $x = i$ y $y = j$ y el signo $-$ de la gravedad será \pm , representando que puede ser tanto $+$ como $-$, dependiendo el caso o despreciarse:

$$\rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(j_0)} - \rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(i_1)} + A_s \cdot \tau_{ji}|_j - A_s \cdot \tau_{ij}|_{(i+\Delta i)} + P_0 \cdot A_f - P_1 \cdot A_f \pm \rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.34)$$

La ecuación (5.34) es el balance de cantidad de movimiento en estado estacionario con un esfuerzo cortante y se traduce literalmente como

$$\begin{aligned} & \text{velocidad de **entrada** de cantidad de movimiento por transporte convectivo} && - \\ & \text{velocidad de **salida** de cantidad de movimiento por transporte convectivo} && + \\ & \text{velocidad de **entrada** de cantidad de movimiento por transporte molecular} && - \\ & \text{velocidad de **salida** de cantidad de movimiento por transporte molecular} && + \\ & \text{Suma de **fuerzas externas** sobre que actúan sobre el fluido} && = 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Donde las expresiones de $P_0 \cdot A_f - P_1 \cdot A_f - \rho \cdot V_{cont} \cdot g = \sum F_{externas}$ representan la suma de fuerzas externas que actúan sobre el fluido. La ecuación (5.34) es valida para flujos laminares, fluidos newtonianos, variables como temperatura, densidad y velocidad constante y en estado estacionario. Si el sistema operará de manera no estacionaria, se tendría que agregar el término de acumulación, dado por un sistema de fuerza en no equilibrio (ecuación 1.17), por lo tanto la ecuación (5.34) sería

$$\rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(j_0)} - \rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(i_1)} + A_s \cdot \tau_{ij}|_i - A_s \cdot \tau_{ij}|_{(i+\Delta i)} + P_0 \cdot A_f - P_1 \cdot A_f \pm \rho \cdot V_{cont} \cdot g = m \cdot a_j \quad (5.36)$$

Y se traduce como

$$\begin{aligned} & \text{velocidad de **entrada** de cantidad de movimiento por transporte convectivo} && - \\ & \text{velocidad de **salida** de cantidad de movimiento por transporte convectivo} && + \\ & \text{velocidad de **entrada** de cantidad de movimiento por transporte molecular} && - \\ & \text{velocidad de **salida** de cantidad de movimiento por transporte molecular} && + \\ & \text{Suma de **fuerzas externas** sobre que actúan sobre el fluido} && = \\ & \text{Acumulación} && \end{aligned} \quad (5.37)$$

En ciertos sistema, puede ser que el sistema a evaluar tenga un *cierto ángulo* de inclinación, por lo que se deberá multiplicar la fuerza del **peso** por el $\cos(\delta)$, donde el argumento δ corresponde al ángulo comprendido entre la vertical y la pendiente. Por lo tanto la ecuación (5.34) quedaría como

$$\rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(j_0)} - \rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(i_1)} + A_s \cdot \tau_{ij}|_i - A_s \cdot \tau_{ij}|_{(i+\Delta i)} + P_0 \cdot A_f - P_1 \cdot A_f \pm \cos(\delta)\rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.38)$$

Cuando el sistema se encuentra en posición totalmente **vertical** (90°) el termino de $\cos \delta$ se desprecia de la ecuación (5.38), quedando como únicamente como la expresión (5.34). La ecuación (5.34) es una forma de representar la ecuación de movimiento con una velocidad y una fuerza tangencial, puede existir que halla dos fuerzas o dos velocidad, pero eso será asunto para temas más adelante. Tanto A_f como A_s dependerán de la geometría en la que se este evaluando, ya que podrá ser cartesianas, cilíndrica, esférica o o incluso variable. Los subíndices i y j pueden mordicarse dependiendo del eje que se este ocupando y su posición, ya que de igual manera se puede trabajar en coordenadas cartesianas, cilíndrica o esférica. Tener cuidado al evaluar la ley de viscosidad de Newton, ya que dependiendo la geometría y la dirección de la velocidad variara; no será la misma para cartesianas que para rectangulares y así mismo para esferas. Para resolver este tipo de problemas que tratan de **movimiento** se siguen una serie de pasos a seguir, para poder hallar la solución a partir de un *volumen de control*

1. Establecer las condiciones de estudio, para facilitar mejor la resolución del problema:
 - a) Estado estacionario.
 - b) Sistema Isotérmico.
 - c) Flujo newtoniano.
 - d) Flujo laminar.
 - e) Condiciones constantes (Presión, Temperatura, Viscosidad, Concentración, etc).
2. Decidir que coordenadas utilizar:
 - a) Rectangulares.
 - b) Cilíndricas.
 - c) Esféricas.
3. Establecer el punto de coordenadas según la interfase que sea más adecuada:
 - a) Sólido-líquido.
 - b) Líquido-líquido.
 - c) Líquido-gas.
4. Desarrollar el volumen de control. Dicho volumen sera perpendicular al eje del **esfuerzo cortante**.
5. Escribir un balance de cantidad de movimiento.
6. Usar la definición de la primera derivada para obtener la ecuación diferencial correspondiente para la densidad de flujo de cantidad de movimiento.
7. Se resuelve la ecuación diferencial que surge de la deriva, para proceder a evaluarla con los valores en la frontera y así determinar la constante obtenida.
8. Se sustituye la densidad de flujo de cantidad de movimiento por la ley de viscosidad de Newton, obteniendo una ecuación diferencial para la velocidad.
9. Se resuelve la ecuación diferencial que surja para obtener la distribución de velocidad, aplicando los valores en la frontera.
10. Se usa la distribución de velocidad para obtener otras cantidades, como pueden ser la velocidad promedio, velocidad máxima y flujo másico.

En las integraciones antes mencionadas aparecerán varias constates de integración, mismas que se evalúan usando **condiciones de frontera**, ya antes mencionadas. Cabe mencionar que no todas las condiciones de frontera permiten hallar la solución de nuestro sistema.

5.1. Coordenadas rectangulares

Una vez explicado el balance de cantidad de movimiento, el procedimiento para plantar y resolver los problemas de flujo viscoso, se procederá a resolver el primer ejemplo de forma analítica en coordenadas rectangulares, para comenzar con los *fenómenos de transporte*.

Ejemplo No. 1 Actualmente es común encontrar ya se en plazas comerciales o en centros de eventos cascadas de agua, las cuales consisten en paredes rectangulares amplias por la cual fluye una película de agua finamente, como se muestra en la figura 5.1.1. El profesor les encargo a sus alumnos determinar, por medio de ecuaciones, la velocidad que tiene el fluido, el caudal y el flujo másico. Para esto el profesor les indico que tomaran el flujo como si fuera laminar, como es agua fluyendo se puede considerar como un fluido Newtoniano, la temperatura es constante, se considera que se halla en un estado

estacionario y que se desprecie la fricción que pueda ejercer la pared.



Figura 5.1.1: Placa con corriente de agua [55]

Para resolver este problema lo primero por hacer es poder modelar la pared de una forma esquemática y sencilla que permita comprender las variables que están interviniendo y establecer un volumen de control, el cual va a ser una pequeña porción fijada en el espacio para estudiar. Por ello, se dibuja el caso de estudio donde la longitud de la pared se establece con la literal L , para la anchura será W y el grosor de la película será de un tamaño T . Observase la figura 5.1.2.

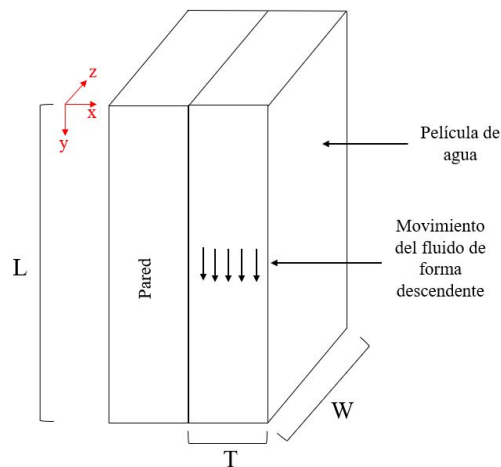


Figura 5.1.2: Representación esquemática de la cascada de agua con sus dimensiones.

Observar que la figura 5.1.2 existen unas flechas negras que indican el movimiento del fluido hacia abajo en dirección al eje y . Además, se aprecia un eje coordenado siendo el paso número dos para la solución de problemas, el cual está en coordenadas rectangulares, esto se debe a que el sistema a resolver puede ocupar

alguno de los tres tipos de ejes: rectangulares, cilíndricas o esféricas, siendo el más ideal en coordenadas rectangulares ya que el caso de estudio así lo merita. Para el paso número tres es poder establecer el punto de coordenadas según la interfase, para esto se debe recordar que existen tres interfases solido-liquido, líquido-líquido y liquido-gas. En primera instancia la interfase líquido-líquido se descarta, ya que el fluido es el mismo y dicha interfase se evalúa cuando son diferentes. Quedando únicamente las interfases solido-liquido y liquido-gas, el punto coordinado se puede establecer en alguno de las dos opciones, pero para opinión del autor será conveniente ponerlo en la interfase líquido-gas, por el criterio de que en dicha interfase es donde se lleva a cabo la *velocidad máxima*. Quedando el esquema como la figura 5.1.3.

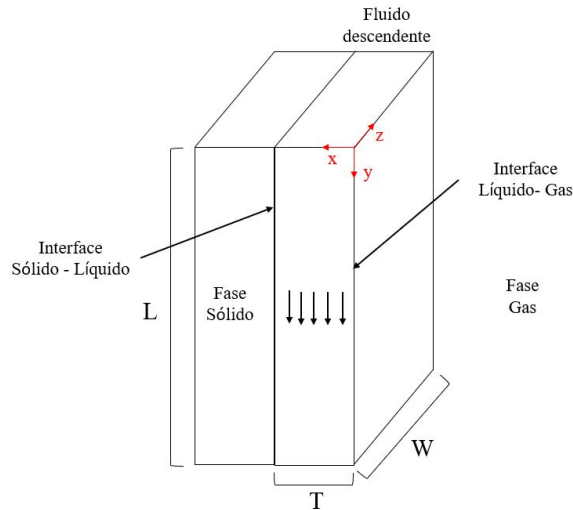
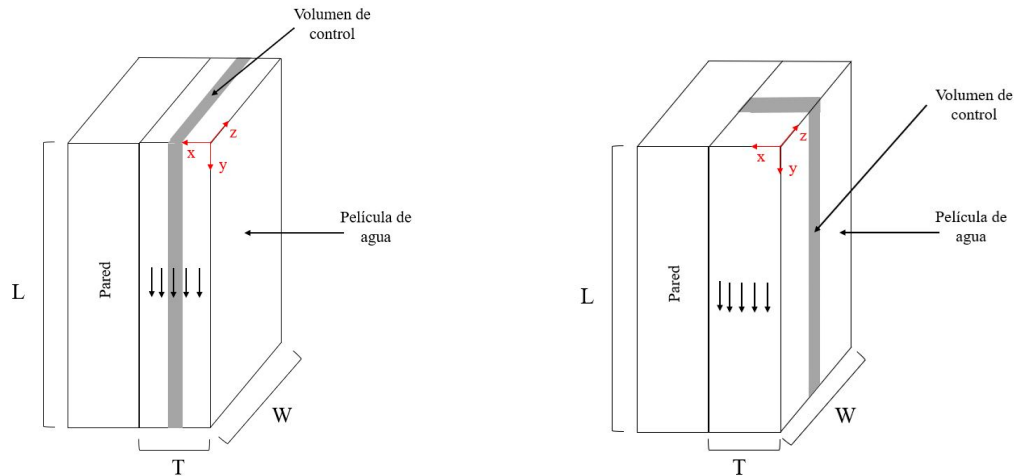


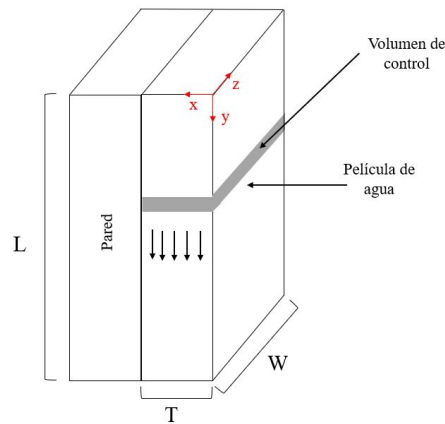
Figura 5.1.3: Establecimiento del eje de coordenadas dependiendo de la interfase que se encuentre.

Para la cuarta parte para la solución del problema es establecer el volumen de control, para este caso de estudio se dibujará de un color gris, y se colocará en alguna parte del problema, siendo dentro de los límites de la película de agua, pero ahora ¿cómo uno sabrá como colocarlos? Ya que existen tres posibilidades de posicionarlo, dos en verticales y un horizontal

- Cambio respecto al eje x , figura 5.1.4(a).
- Cambio respecto al eje z , figura 5.1.4(b).
- Cambio respecto al eje y , figura 5.1.4(c).



(a) Volumen de control en vertical donde es constante a lo largo de los ejes yz .
 (b) Volumen de control en vertical donde es constante a lo largo de los ejes xy .



(c) Volumen de control en horizontal donde es constante a lo largo de los ejes xz .

Figura 5.1.4: Volúmenes de control

Retomando lo que dice en paréntesis en el apartado 4 citando: "El volumen sera perpendicular al eje del **esfuerzo cortante**". Se debe ver el problema en un plano bidimensional, teniendo tres casos posibles: plano con viste en el eje xy , plano con viste en el eje xz y plano con viste en el eje yz , donde cada uno esta representado en las figuras 5.1.5(a), 5.1.5(b) y 5.1.5(b), respectivamente.

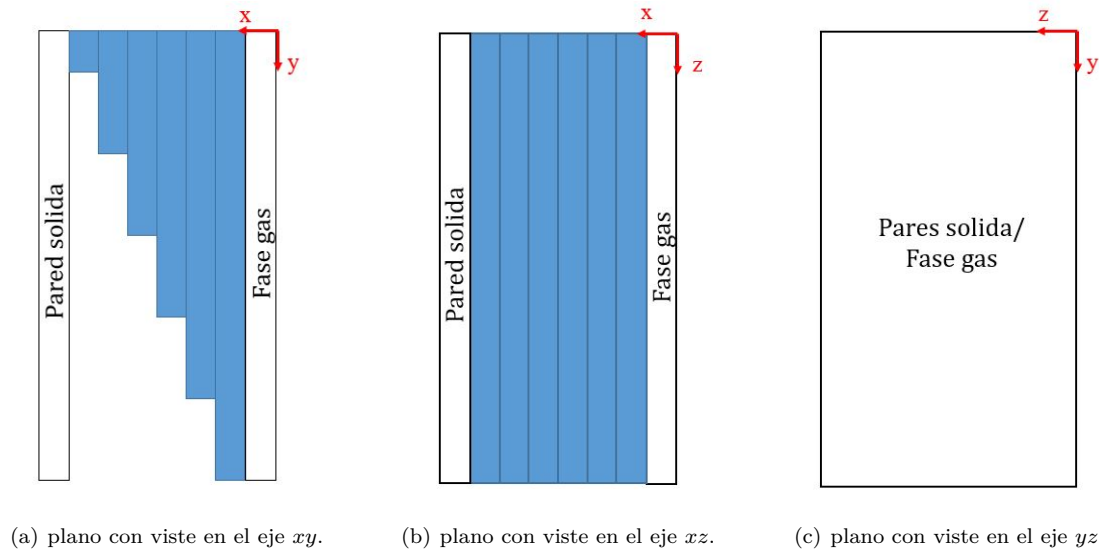


Figura 5.1.5: Problema visto desde vista bidimensionales.

¿Cómo se afirma que estas son las verdaderas vistas que se tienen en el problema? Para que exista un esfuerzo cortante debe haber una fuerza ejercida entre dos áreas de placa, entonces el fluido se moverá como si fueran placas rectangulares. Dicho esfuerzo se representa como τ_{ab} , el primer subíndice a indica la dirección que tiene el esfuerzo y estará dado por la separación entre interfase e interfase y el subíndice b la dirección que tiene la velocidad el fluido. Analizando ahora cada figura:

1. La prima imagen es 5.1.5(c). Primer punto de vista, se ve una placa rectangular. Segunda observación se ve únicamente ya sea la pared sólida o la fase gases, pero no ambas a la vez y por último, no se ve el comportamiento del fluido entre las interfases. En conclusión esta representación el *esfuerzo cortante* queda descartada.
2. La segunda imagen a analizar es 5.1.5(b). Primer punto de vista, se ve una placa rectangular. El segundo punto de vista es que si se logra apreciar las interfases sólido-líquido (pared solida con el líquido) y líquido-gas (líquido con la fase gas) así como su distancia, acertando el subíndice a . Tercer punto de viste y el problema es que se esta viendo una vista superior y no la dirección que tiene el flujo, el cual se da en el eje y . En conclusión esta representación del *esfuerzo cortante* queda descartada.
3. Tercera imagen 5.1.5(a). Primer punto de vista, se ve una placa rectangular. El segundo punto de vista es que si se logra apreciar las interfases sólido-líquido (pared solida con el líquido) y líquido-gas (líquido con la fase gas) así como su distancia, acertando el subíndice a . Y por último, es que si se aprecia la dirección que tiene el flujo y su comportamiento entre interfase e interfase (explicado con anterioridad en los límites de frontera). Siendo el perfil más adecuado para nuestro problema.

Por lo tanto, el esfuerzo cortante se da a lo largo del eje x y el volumen de control será perpendicular a esta, siendo los ejes perpendiculares a x los ejes y y z . Siendo la imagen 5.1.4(a) la más adecuada, ya que el volumen es constante a todo lo largo de dichos ejes. Y se representa como una pequeña placa, a comparación de todo el sistema, debido a que será una pequeña representación de como el fluido se va comportando a lo largo de las interfases, tal como se vio en la figura 5.1.5(a). El volumen de control se

puede colocar donde sea, pero por comodidad del autor será en medio del fluido descendente, como una forma ilustrativa.

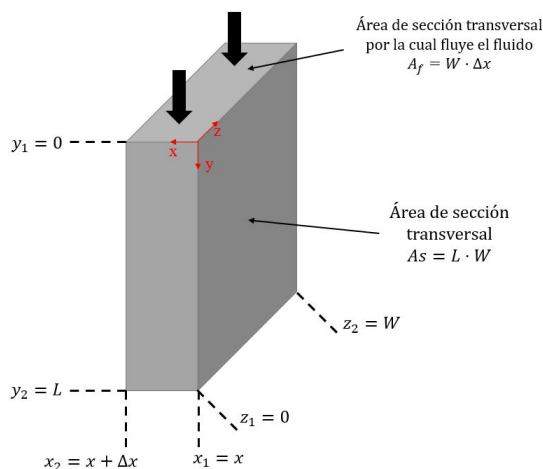


Figura 5.1.6: Dimensiones del volumen de control.

Hay que enfocarse en el volumen de control, tal como la figura 5.1.6. Posiblemente exista la duda de ¿por qué su dimensión en el eje x es más corta? Hay que recordar que se parte de un punto inicial, siendo en este caso $x_1 = x$ hasta un punto final x_2 , pero x_2 no se puede quedar así, debido a que en esta dirección ocurre cambios de velocidad, es decir, que sí se toma un punto cualquier en el eje x tendrá una velocidad específica, pero si uno se desplaza a lo largo de dicho eje, esta velocidad cambiara ya sea a una mayor o menor (dependiendo a la interfase que esta colocado más cerca) al punto de partida inicial, a este cambio se le llama **diferencial** y será perpendicular al eje de flujo, si el eje de flujo tiene dirección y entonces el diferencial tendrá dirección x y se representa como $x_2 = x + \Delta x$, ver ecuación (5.23). Por lo tanto, el volumen de control tendrá dimensiones de longitud L , para la anchura será W y el grosor será $x + \Delta x$. Antes de proceder al punto cinco, que establece el escribir el balance de cantidad de movimiento, se debe hallar las ecuaciones que permiten determinar ésta a partir del volumen de control. Antes de deducir la ecuación que rige el sistema, hay que aclarar que se puede partir de la ecuación de balance de cantidad de movimiento, ecuación (5.34), e ir eliminando variables. Pero por única ocasión se demostrará como se pueden obtener las mismas variables, los problemas siguientes se partirán de dicha ecuación anteriormente mencionada. Primero se parte de la tercera ley de Newton, donde habrá una suma de fuerza en equilibrio, es por ello, que se realiza un diagrama de cuerpo libre, partiendo primero del eje coordenado, como se muestra la figura 5.1.7

El diagrama permite representar las fuerzas que intervienen en el problema y saber en que direcciones tienen dichas fuerzas. A partir de esto se empezará deducir las fuerzas

1. La primera fuerza que interviene para un *fluido* es la **fuerza por transporte convectivo**, F_{conv} , la cual tiene dirección hacia abajo, es decir en el eje $-y$.
2. La segunda fuerza que interviene es la **fuerza tangencial**, la cual parte del esfuerzo cortante, ecuación (4.14), despejado el término de F , se debe remitir a la figura 4.0.9, donde aplicando una fuerza habrá otra en sentido opuesto y misma magnitud, recordar que es la definición de la tercera ley de Newton, por este caso se esta aplicando la fuerza sobre el *fluido* hacia la dirección del eje $-y$, la cual se denominará F_{tang} , mientras que la fuerza opuesta será las paredes, ya que no tienen

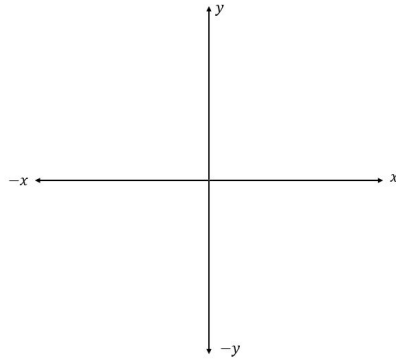


Figura 5.1.7: Eje coordenado para un diagrama de cuerpo libre.

movimiento, pero si ejerce una fuerza de resistencia hacia la dirección y y se denominará F_{opu} .

3. La ultima fuerza conocida es el **peso del fluido**, ya que actúa la gravedad, con dirección a $-y$, esto es porque la gravedad siempre va hacia abajo y se denotara como w .

En este caso no existe la **fuerza de empuje**, debido a que no hay una fuerza que este impulsado al fluido hacia abajo, si no que únicamente desciende por acción de su propio peso. Por lo que el diagrama de fuerzas quedaría como la figura 5.1.8. Sí el sistema opera en estado estacionario, se puede suponer que esta en equilibrio, haciendo que el sistema de fuerza se tenga

$$\sum F_y = -F_{conv} - F_{tang} + F_{opu} - w = 0$$

La ecuación anterior puede también quedar como

$$\sum F_y = 0 = F_{conv} + F_{tang} - F_{opu} + w \quad (5.39)$$

Ya que únicamente se pasa los términos de la izquierda a la derecha de la igualación.

Para la demostración de la primera fuerza se debe observar la figura 5.1.9, donde el movimiento del fluido es como si fuera una placa rectangular, el cual parte arriba y desciende por acción de una fuerza que hará que caiga,, este desplazamiento de masa de un punto inicial a un final con una aceleración se le conoce como fuerza por transporte convectivo. En el caso anterior de la demostración de la ecuación de balance de movimiento se ocupó el termino de desacelerar, ahora ocurre lo mismo, recordar la figura 5.0.10, donde está el niño lanzado la pelota de béisbol, se logra apreciar que la aceleración es negativa cuando la pelota se mueve hacia arriba y también cuando se mueve hacia abajo. En esencia, la velocidad se vuelve en todo momento más negativa. Incluso cuando la velocidad pasa por cero en la parte más alta, la aceleración permanece constante en dirección hacia abajo. Para determinar si la aceleración de un objeto es positiva o negativa, no se considera su ubicación ni la dirección de su movimiento, más bien, se debe tener en cuenta la dirección de la fuerza que causa el cambio de velocidad. En este ejemplo, esa fuerza es el peso del objeto. La definición antes mencionada de fuerza por transporte convectivo corresponde bastante con la segunda ley de Newton

$$F_{conv} = -m \cdot a \quad (5.40)$$

La aceleración es una magnitud vectorial, por lo cual se indica cuál es su dirección, viendo el eje coordenado el movimiento de la placa tiene lugar en y , entonces, la aceleración será a_y donde el subíndice y indica el

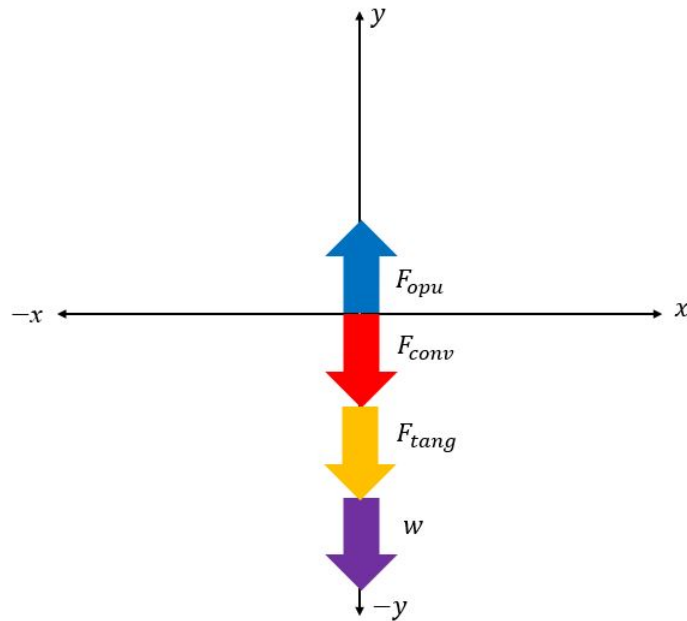


Figura 5.1.8: Diagrama de cuerpo libre con las fuerzas que intervienen para el fluido que desciende de una pared.

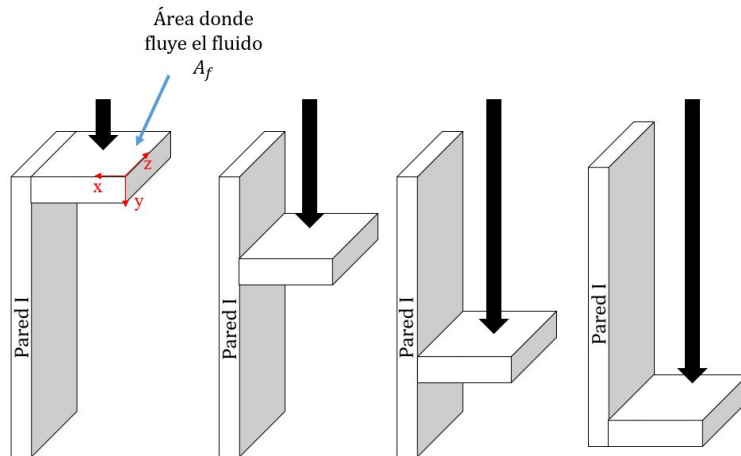


Figura 5.1.9: Desplazamiento del fluido por capas rectangulares, el cual fluye a través de una pared vertical.

eje en el cual se está desplazando.

$$F_{conv} = -m \cdot a_y \quad (5.41)$$

Aplicando la definición de aceleración, ecuación (1.16), la cual dice que es un cambio de velocidad por unidad de tiempo, la ecuación (5.41) queda

$$F_{conv} = -m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{m}{dt} dv_y \quad (5.42)$$

El término m/dt se interpreta como el flujo másico, \dot{m} , es decir, la cantidad de masa que fluye en una cantidad de tiempo dada y se puede transcribir la ecuación (5.42) como

$$F_{conv} = -\dot{m}dv_y \quad (5.43)$$

Aplicando la definición de flujo másico donde corresponde a la ecuación (1.34) con el objetivo de convertir el flujo másico a flujo volumétrico, para la ecuación (5.43)

$$F_{conv} = -\rho \cdot \dot{V} \cdot dv_y \quad (5.44)$$

Aplicando la definición de flujo volumétrico, ecuación (1.31), en la ecuación (5.44) se obtiene

$$F_{conv} = -\rho \cdot A_f \cdot v_y \cdot dv_y \quad (5.45)$$

Donde d corresponde a un cambio y se expresa como

$$d = final - inicial$$

Entonces habrá una velocidad inicial y una velocidad final. Viendo las figura 5.1.6, la cual corresponde a las dimensiones del problema, se puede decir que la velocidad inicial parte del punto y_1 y finaliza en el punto y_2 , por lo tanto la ecuación (5.12) será

$$F_{conv} = -\rho \cdot A_f \cdot v_y \cdot (v_{y_2} - v_{y_1}) \quad (5.46)$$

$$= \rho \cdot A_f \cdot v_y \cdot (v_{y_1} - v_{y_2}) \quad (5.47)$$

Quitando los paréntesis

$$F_{conv} = \rho \cdot A_f \cdot v_y \cdot v_{y_1} - \rho \cdot A_f \cdot v_y \cdot v_{y_2} \quad (5.48)$$

En vez de poner v_{y_1} y v_{y_2} , se sustituyen los puntos y_1 y y_2 por 0 y L , ya que es su valor aritmético, quedando como v_0 y v_L . Además, se colocan las barras verticales tal que $v_y|_0$ y $v_y|_L$, las barras verticales con subíndices en matemáticas representan un rango, siendo el rango inicial en el eje y que vale 0 y el rango final en el eje y que vale L

$$F_{conv} = \rho \cdot A_f \cdot v_y \cdot v_y|_0 - \rho \cdot A_f \cdot v_y \cdot v_y|_L \quad (5.49)$$

Haciendo el producto de velocidades

$$F_{conv} = \rho \cdot A_f \cdot v_y^2|_0 - \rho \cdot A_f \cdot v_y^2|_L \quad (5.50)$$

Algunos autores como el Bird [1] ponen a v_y^2 como v_{yy}

$$F_{conv} = \rho \cdot A_f \cdot v_{yy}|_0 - \rho \cdot A_f \cdot v_{yy}|_L \quad (5.51)$$

A la primera parte de la igualdad de la derecha se le conoce como *velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte convectivo* y a la segunda parte de la igualdad de la derecha como *velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte convectivo*. Para la demostración de la segunda fuerza, es suponer que el fluido descendente se mueve por capas adyacentes, como si fueran bloques rectangulares (cada placa representa un volumen de control diferente), cada capa representa a nivel molecular una fila de moléculas de agua que se mueven en conjuntos, las cuales cada capa tendrán una velocidad diferente, pero la velocidad individual de cada placa será constante, es decir la velocidad en la placa I no será la misma que la placa II, pero la velocidad en el punto inicial de la placa I será la misma que en el punto

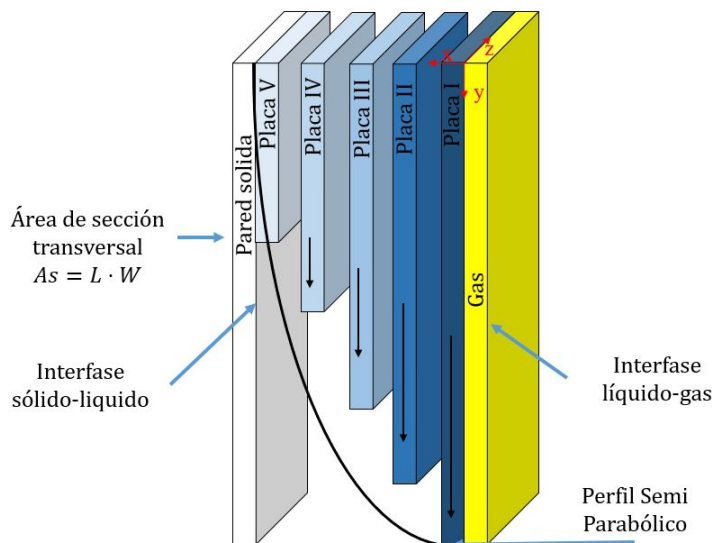


Figura 5.1.10: Movimiento por placas del fluido contenido entre dos placas paralelas, una placa es sólida y la otra placa es un gas, donde el color azul más intenso es el movimiento molecular con mayor velocidad, mientras que el color azul menos intenso es el que tiene menor velocidad molecular.

final I. El movimiento de cada placa se observa en 5.1.10, dicha imagen es un plano tridimensional de la figura bidimensional 5.1.5(a).

Se planteo que el fluido se mueve en un flujo laminar, correspondiendo a un perfil semi-parabólico. Dicho perfil se debe a las fuerzas de resistencia que existen, gracias a las interfases que se encuentran presentes, siendo dos: sólido-líquido y líquido-gas. Viendo la imagen 5.1.10, se aprecia que en la placa I es donde se encuentra la mayor velocidad (interfase sólido-líquido), esto debido a que es donde se encuentra la menor resistencia molecular, ya que al ser tan pequeña la fuerza de oposición el fluido puede obtener mayor velocidad, en caso contrario de la placa II, que si tendrá una velocidad considerada pero menos a la placa I. Desplazándose a lo largo del eje x hasta llegar a la unión entre la placa V y la pared sólida (interfase sólido-líquido), es donde se obtiene la menor velocidad, siendo prácticamente nula. En conclusión, el fluido debe poner una cierta fuerza para moverse y oponerse a la fuerza que ejercen las paredes, esta fuerza que ejerce el fluido se le conoce como **fuerza tangencial** o **fuerza viscosa**, la cual esta dado por la ecuación (4.14)

$$F_{tang} = A_s \cdot \tau_{ab} \quad (5.52)$$

Se deberá establecer los subíndices del esfuerzo cortante τ_{ab} . El primer subíndice a define la dirección donde se esta llevando a cabo el esfuerzo cortante, remitiéndose a la deducción que se hizo para determinar el *volumen de control* (figura 5.1.5), se menciona que dicho esfuerzo se da a lo largo del eje x , por lo tanto $a = x$. Para el segundo subíndice, b , es la dirección con la que fluye el fluido, donde el fluido desciende a todo lo largo del eje y , entonces $b = y$. Entonces el esfuerzo cortante será τ_{xy}

$$F_{tang} = A_s \cdot \tau_{xy}$$

Así mismo, existirá una fuerza opuesta F_{opu} (ya antes explicada). Retomando la ecuación (4.7)

$$F_{opu} = F_{tang}$$

O también

$$F_{opu} = A_s \cdot \tau_{xy} \quad (5.53)$$

El esfuerzo cortante τ_{xy} sera perpendicular al flujo y tendrá un punto inicial y un punto final. Esto se refiere a que para evaluar la F_{tang} se debe ocupar algunas de las dos interfases, primera condición de frontera, para la F_{opu} se deberá evaluar con la interfase que no se ocupo, haciendo que el esfuerzo cortante tenga un rango. Este rango tendrá la dirección separación entre interfases, de acuerdo al punto eje coordenado establecido. Es decir, que para el rango del esfuerzo cortante de la primera fuerza, siendo la tangencial, viendo las dimensiones del volumen de control y establecido el eje coordenado (figura 5.1.6), el punto inicial es en $x_1 = x$ y siendo el punto más cercano a la interfase líquido-gas, quedando la ecuación (5.53) como

$$F_{tang} = A_s \cdot \tau_{xy}|_x \quad (5.54)$$

Donde $\tau_{xy}|_x$ representa el rango inicial del volumen de control en el eje x para el esfuerzo cortante. Para la fuerza opuesta, se desplaza a todo lo largo del volumen de control sobre el eje x , hasta llegar al extremo, el cual esta marcado como el punto $x_2 = x + \Delta x$, siendo el punto más cercano a la interfase sólido-líquido

$$F_{opu} = A_s \cdot \tau_{xy}|_{(x_2)} \quad (5.55)$$

Pero hay un detalle con la ecuación anterior, y que no se puede quedar con el subíndice x_2 , debido a que es la dirección en el eje donde ocurre el **diferencial**, siendo perpendicular en el flujo, por lo tanto quedaría como

$$F_{opu} = A_s \cdot \tau_{xy}|_{(x+\Delta x)} \quad (5.56)$$

A la ecuación (5.54) se le conoce en la literatura como *velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte molecular*. Mientras que a la ecuación (5.56) es la *velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte molecular*. La ultima fuerza que actúa es el peso del fluido, debido a que actúa algo llamado la gravedad. El peso se define como el producto de su masa por la gravedad

$$w = m \cdot g \quad (5.57)$$

Aplicando la definición de densidad dada por la ecuación (1.28), de la cual se despeja m

$$w = \rho \cdot V_{cont} \cdot g \quad (5.58)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.50), (5.58), (5.56) y (5.58) en (5.39)

$$\rho \cdot A_f \cdot v_y^2|_0 - \rho \cdot A_f \cdot v_y^2|_L + A_s \cdot \tau_{xy}|_x - A_s \cdot \tau_{xy}|_{(x+\Delta x)} + \rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.59)$$

Tabulando las variables obtenidas con su respectiva definición de la ecuación (5.59)

Definición	Variable
Velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte convectivo . Velocidad de entrada por su área transversal.	$\rho \cdot A_f \cdot v_y^2 _0$
Velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte convectivo . Velocidad de salida por su área transversal.	$\rho \cdot A_f \cdot v_y^2 _L$

Velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la entrada.	$A_s \cdot \tau_{xy} _x$
Velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la salida.	$A_s \cdot \tau_{xy} _{(x+\Delta x)}$
Fuerza externa que actúa: gravedad la cual actúa sobre el volumen de control en coordenadas rectangulares.	$\rho \cdot V_{cont} \cdot g$

Sustituyendo la variables A_f , A_s y V_{cont} . Para encontrar dichas variables se parte de la figura 5.1.6. La variable A_f y A_s se definen como $A_f = W \cdot \Delta x$ y $A_s = L \cdot W$. El V_{cont} , siendo el volumen de control, para ello se debe recordar como obtener el volumen de un prisma rectangular, siendo el producto del largo por el ancho por el grosor, es decir, $V_{cont} = L \cdot W \cdot \Delta x$. Existirá la duda posiblemente por qué se pone únicamente Δx y no $x + \Delta x$, y la razón es debido, es que la longitud se puede considerar como un cambio Δ , y dicho cambio es el punto final menos el punto inicial

$$\begin{aligned}
 \text{grosor} &= \text{punto final} - \text{punto inicial} \\
 &= x_2 - x_1 \\
 &= x + \Delta x - x \\
 &= \Delta x
 \end{aligned}$$

Actualizando la tabla anterior de variables y la ecuación de balance de movimiento (5.59)

Definición	Variable
Velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte convectivo . Velocidad de entrada por su área transversal.	$\rho \cdot W \cdot \Delta x \cdot v_y^2 _0$
Velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte convectivo . Velocidad de salida por su área transversal.	$\rho \cdot W \cdot \Delta x \cdot v_y^2 _L$
Velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la entrada.	$L \cdot W \cdot \tau_{xy} _x$
Velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la salida.	$L \cdot W \cdot \tau_{xy} _{(x+\Delta x)}$
Fuerza externa que actúa: gravedad la cual actúa sobre el volumen de control en coordenadas rectangulares.	$\rho \cdot L \cdot W \cdot \Delta x \cdot g$

$$\rho \cdot W \cdot \Delta x \cdot v_y^2|_0 - \rho \cdot W \cdot \Delta x \cdot v_y^2|_L + L \cdot W \cdot \tau_{xy}|_x - L \cdot W \cdot \tau_{xy}|_{x+\Delta x} + \rho \cdot L \cdot W \cdot \Delta x \cdot g = 0 \quad (5.60)$$

La ecuación (5.60) puede parecer algo complicada para resolver, pero se puede simplificar ciertos términos. Uno de ellos es la velocidad por transporte convectivo a la entrada y a la salida. Para ello, hay que remitirse a la figura 5.1.10, como se menciono anteriormente las placas tienen diferente velocidad pero se está evaluando únicamente un volumen de control, es decir, se está evaluando una placa molecular de las tantas que pueden haber. Por poner un ejemplo, que el volumen de control represente la placa III la velocidad con que se mueve cada partícula será la misma a todo lo largo de dicha placa. Otro caso, es suponer que el volumen de control representa ahora la placa I, es evidente que la placa I tiene mayor velocidad que la placa III, pero cada partícula a lo largo del eje y se mueve con la misma velocidad, similar que la velocidad molecular de la placa III, haciendo que la velocidad de la partícula inicial en el punto y_1 sea la misma que la partícula en el punto y_2 , viendo el volumen de control 5.1.6. Dicho esto, se puede considerar que la velocidad por transporte convectivo es constante a todo lo largo del volumen de control $\rho \cdot W \cdot \Delta x \cdot v_y^2|_0 = \rho \cdot W \cdot \Delta x \cdot v_y^2|_L$, quedando la ecuación (5.60) como

$$L \cdot W \cdot \tau_{xy}|_x - L \cdot W \cdot \tau_{xy}|_{x+\Delta x} + \rho \cdot L \cdot W \cdot \Delta x \cdot g = 0 \quad (5.61)$$

Pasamos del lado derecho, la fuerza de gravedad, de la ecuación anterior y multiplicando toda la expresión por $-1/(WL\Delta x)$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{L \cdot W \cdot \Delta x} (L \cdot W \tau_{xy}|_x - LW \tau_{xy}|_{x+\Delta x}) &= -L \cdot W \Delta x \cdot \rho \cdot g \\ \frac{L \cdot W \tau_{xy}|_{x+\Delta x} - L \cdot W \tau_{xy}|_x}{L \cdot W \cdot \Delta x} &= \frac{L \cdot W \Delta x \cdot \rho \cdot g}{L \cdot W \cdot \Delta x} \\ \frac{\tau_{xy}|_{x+\Delta x} - \tau_{xy}|_x}{\Delta x} &= \rho \cdot g \end{aligned}$$

Ocupando la definición de la primera derivada, la cual se obtiene cuando el $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tau_{xy}|_{x+\Delta x} - \tau_{xy}|_x}{\Delta x} &= \rho g \\ \frac{d\tau_{xy}}{dx} &= \rho g \end{aligned}$$

Resolviendo la primera ecuación diferencial, por el método de variables separables

$$\begin{aligned} \int d\tau_{xy} &= \rho g \int dx \\ \tau_{xy} &= \rho g x + C_1 \end{aligned}$$

Para hallar la constante C_1 , se aplica la condición de frontera en la **interfase líquido-gas**. Donde τ_{xy} es igual a cero y debido a que no se encuentra en desplazando del punto de coordenadas que se estableció en un inicio, su longitud es cero

$$C_1 : \tau_{xy} = 0 \quad x = 0$$

Evaluando

$$\begin{aligned} (0) &= (0) + C_1 \\ C_1 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\tau_{xy} = \rho g x \quad (5.62)$$

Se procede a introducir la ecuación de viscosidad de newton (4.16), sustituyendo a τ_{xy} , en la ecuación obtenida anterior. Donde la velocidad como esta respecto al eje y , el subíndice cambia, al igual que la distancia, que ahora se encuentra con respecto al eje x .

$$-\mu \frac{dv_y}{dx} = \rho g x \quad (5.63)$$

Resolviendo la segunda ecuación diferencial, por el método de variables separables

$$\begin{aligned} -\mu \int dv_y &= \rho g \int x dx \\ -\mu v_y &= \frac{1}{2} \rho g x^2 + C_2 \\ v_y &= -\frac{1}{2\mu} \rho g x^2 + C_2 \end{aligned}$$

Debido a que μ es una constante, la C_2 lo absorbe, así como el signo negativo. Para obtener C_2 , se ocupa la segunda condición de frontera, siendo en la interfase **sólido-líquido** la velocidad es igual a cero, debido a que la parte sólida no se encuentra en movimiento y del punto de referencia se esta desplazando una cierta distancia T a lo largo del eje x

$$C_2 : v_y = 0 \quad x = T$$

Aplicando estos valores de frontera para hallar C_2

$$\begin{aligned} (0) &= -\frac{1}{2\mu} \rho g (T)^2 + C_2 \\ C_2 &= \frac{1}{2\mu} \rho g T^2 \end{aligned}$$

Obteniendo la solución particular, la cual se simplificara

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{1}{2\mu} \rho g T^2 - \frac{1}{2\mu} \rho g x^2 \\ v_y &= \frac{\rho g}{2\mu} (T^2 - x^2) \\ v_y &= \frac{\rho g T^2}{2\mu} \left(1 - \frac{x^2}{T^2}\right) \\ v_y &= \frac{\rho g T^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{T}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Por lo cual, la ecuación queda establecida en función de (x)

$$v_y(x) = \frac{\rho g T^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{T}\right)^2\right] \quad (5.64)$$

Al graficar la ecuación (5.64) se obtiene el perfil de velocidad, que se le nombra como **perfil parabólico**, el cual uno como ingeniero debe tener la capacidad de interpretar resultados no solo numéricos, si no, también gráficos. La gráfica 5.1.11 se interpreta como el movimiento de cada partícula del líquido a lo largo de la pared hasta el aire, donde la velocidad máxima se logra en la interfase líquido-gas y conforme se desplaza a lo largo del espesor de la película esta tiende a disminuir su velocidad hasta llegar cero, el cual se obtiene en la interfase sólido-líquido, este comportamiento gráfico es mejor conocido como **flujo laminar**

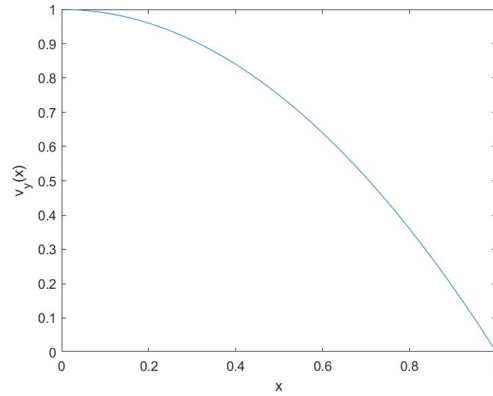


Figura 5.1.11: Función graficada de (5.64).

y se aprecia por la parábola que se genera. Explicado esto, a partir del perfil de velocidad se obtienen varias variables, como será el primer caso, el cual se determinará la **velocidad máxima**, como se mencionó antes, se logra en la interfase *líquido-gas*, debido a que el esfuerzo cortante es pequeño, permitiendo que el fluido se desplace libremente sin que algo oponga resistencia y viendo el eje coordenado colocado, esto se logra en el punto $x = 0$. Sustituyendo esta igualdad en la ecuación (5.64)

$$v_{y, \max} = \frac{\rho g T^2}{2\mu} \quad (5.65)$$

Siendo idéntico a la gráfica obtenida, donde la velocidad máxima ocurre en el punto $x = 0$ y velocidad mínima en el punto que está pegado a la interfase sólido-líquido, es decir, cuando $x = T$. El siguiente parámetro a determinar es el **caudal** $[\dot{V}]$, para ello se remite a la ecuación (1.31)

$$\dot{V} = v_y \cdot A_f \quad (5.66)$$

Donde v_y es la velocidad y A_f es el área por donde fluye el fluido. A_f se establece como el producto de $W \cdot T$, ver figura 5.1.2, pero hay un inconveniente, y es que la ecuación de velocidad depende del eje x . Para evaluar entonces el caudal, hay que recordar las clases de cálculo, donde para determinar áreas se ocupaban integrales y para el área de un rectángulo se ocupan integrales dobles

$$A_f = \int_0^W \int_0^T dx dz \quad (5.67)$$

Sustituyendo A_f en la ecuación (5.66)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_0^W \int_0^T v_y dx dz \\ &= \int_0^W \int_0^T \frac{\rho g T^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{T} \right)^2 \right] dx dz \end{aligned}$$

Al evaluar la doble integral

$$\dot{V} = \frac{W \rho g T^3}{3\mu} \quad (5.68)$$

Para la ingeniería y la física es poco práctico tener la velocidad como una función de x , ya que esta es variable, por ello se recomienda usar una **velocidad promedio** $[\langle v_y \rangle]$ de todas las partículas que se mueven en la película del fluido, debido a que el perfil de velocidad solo evalúa la velocidad por cada

partícula individual. Para determinar la velocidad promedio se parte de la ecuación (5.66), despejando la variable v_y y obteniendo

$$\langle v_y \rangle = \frac{\dot{V}}{A_f}$$

O también se puede expresar como

$$\langle v_y \rangle = \frac{\int_0^W \int_0^T v_y dx dy}{\int_0^W \int_0^T dx dy}$$

Resolviendo ambas integrales

$$\begin{aligned} \langle v_y \rangle &= \frac{\int_0^W \int_0^T \frac{\rho g T^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{T} \right)^2 \right] dx dy}{\int_0^W \int_0^T dx dy} \\ &= \frac{W \rho g T^3}{3\mu} \\ &= \frac{W \cdot T}{3\mu} \end{aligned}$$

Simplificando

$$\langle v_y \rangle = \frac{W \rho g T^3}{3\mu} (W \cdot T)^{-1} = \frac{\rho g T^2}{3\mu} \quad (5.69)$$

El último parámetro a evaluar es el **flujo másico** $[\dot{m}]$, el cual se obtiene a partir de la ecuación (1.34)

$$\dot{m} = \int_0^W \int_0^T v_y \rho dx dz = \dot{V} \cdot \rho = \frac{W \rho^2 g T^3}{3\mu} \quad (5.70)$$

Esta última expresión es relativamente sencilla, una vez obtenido el caudal.

Tabla 5.1.3: Formulas ocupadas durante el desarrollo del Ejemplo 1, en coordenadas rectangulares.

Balance general	$L \cdot W \cdot \tau_{xy} _x - L \cdot W \cdot \tau_{xy} _{x+\Delta x} + \rho \cdot L \cdot W \cdot \Delta x \cdot g = 0$
Ley de viscosidad de Newton	$\tau_{xy} = -\mu \frac{dv_y}{dx}$
Velocidad media	$\langle v_y \rangle = \frac{\int_0^W \int_0^T v_y dx dy}{\int_0^W \int_0^T dx dy}$
Caudal	$\dot{V} = \int_0^W \int_0^T v_y dx dz$
Flujo másico	$\dot{m} = \int_0^W \int_0^T v_y \rho dx dz = \dot{V} \cdot \rho$

5.1.1. Valores reales

Para este problema se introduciré valores de un caso real. Para esto, se plantea que el día hace bastante frío, haciendo que halla una temperatura ambiental de $5^\circ C$. Conociendo esto se sabe por tablas que el agua tendrá una viscosidad dinámica de 1.5182 cP y una densidad de 1000 kg/m^3 . Las dimensiones de la pared que recorre la película de agua son de 3 metros de alto por 2 metros de ancho. Se estima aproximadamente que el grosor de la película de agua, obtenida por un vernier digital, es de 0.08 mm . Si la presión y la

temperatura del sistema opera de manera constante se requiere determinar su velocidad media, caudal y flujo másico.

1. Para determinar la **velocidad media** se ocupa la ecuación 5.69

$$\langle v_y \rangle = \frac{\rho g T^2}{3\mu}$$

2. Sustituyendo valores y haciendo el análisis dimensional.

$$\begin{aligned} \langle v_y \rangle &= \frac{(1000 \text{ kg/m}^3) (9.81 \text{ m/s}^2) (8 \cdot 10^{-5} \text{ m})^2}{3[0.0015182 \text{ kg/(s} \cdot \text{m)}]} \\ &= 0.0138 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

3. Para determinar el **caudal** se ocupa la ecuación 5.68

$$\dot{V} = \frac{W \rho g T^3}{3\mu}$$

4. Sustituyendo valores y haciendo el análisis dimensional.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{(2 \text{ m}) (1000 \text{ kg/m}^3) (9.81 \text{ m/s}^2) (8 \cdot 10^{-5} \text{ m})^3}{3 [0.0015182 \text{ kg/(s} \cdot \text{m)}]} \\ &= 2.2056 \cdot 10^{-06} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \end{aligned}$$

5. Para determinar el **flujo másico** se ocupa la ecuación 5.70

$$\dot{m} = \frac{W \rho^2 g T^3}{3\mu}$$

6. Sustituyendo valores y haciendo el análisis dimensional.

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \frac{(2 \text{ m}) (1000 \text{ kg/m}^3)^2 (9.81 \text{ m/s}^2) (8 \cdot 10^{-5} \text{ m})^3}{3 [0.0015182 \text{ kg/(s} \cdot \text{m)}]} \\ &= 0.0022 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \end{aligned}$$

7. Comprobando el número de Reynolds a partir de la ecuación (4.18)

$$Re = \frac{D \cdot \rho \cdot v}{\mu}$$

8. Donde D será el grosor de la película de agua. Evaluando

$$\begin{aligned} Re &= \frac{(8 \cdot 10^{-5} \text{ m}) (1000 \text{ kg/m}^3) (5.3846 \cdot 10^{-7} \text{ m/s})}{0.0015182 \text{ kg/(s} \cdot \text{m)}]} \\ &= 0.7264 \end{aligned}$$

Como se aprecia el número de Re , esta en el intervalo correspondiente tabla 4.2.1, pero es muy pequeño, esto se debe a que la mayoría de los libros ocupa el Re antes mencionado en flujo para *tuberías*. Pero el Re cambiara de acuerdo a la geometría en que este fluyendo y Re será mucho menor si este no esta contenido en un recipiente como una tubería. Para una placa vertical la literatura [56] y [57] mencionan que para una placa vertical $Re < 1$.

5.1.2. Solución numérica

Aplicar los valores y hacer el análisis dimensional no es lo laborioso, si no, es la parte de deducir las ecuaciones y el saber que significan. Para facilitar el desarrollo se puede apoyar en los métodos numéricos. Cabe recalcar que lo bonito de la programación es que cada quien puede programar a su gusto, conveniencia y acomodo, pero para hacer esto se debe tener conocimiento de que se estará programando y de que manera se hará. Se repetirá el mismo problema, bajo las mismas condiciones y mismos valores, pero usando MATLAB.

1. Lo primero por hacer es hacer **balance de movimiento**, para llegar hasta la primera ecuación diferencial.

$$\frac{\tau_{xy}}{dx} = \rho g$$

Posteriormente, se introduce la ecuación en MATLAB, ocupando la función `dsolve` y se agrega los valores de frontera, para así obtener la solución del esfuerzo cortante τ_{xy} .

```
tau_xy = dsolve('Dtao = p*g', 'tau(0)=0', 'x');
tau_xy = simplify(tau_xy)
- - -
tau_xy =
      g*p*x
```

2. El resultado generado es el mismo que (5.62). Obtenido la solución de la primera ecuación diferencial, se copia y se pega el resultado en un nuevo `dsolve`, pero ahora τ cambiara por la ecuación de viscosidad de newton (5.63) y se resuelve con la misma función `dsolve` aplicando los límites correspondientes.

```
v_y = dsolve('-m*Dvy = g*p*x', 'vy(T)=0', 'x');
v_y = simplify(v_y);
- - -
v_y =
      (g*p*(T^2 - x^2))/(2*m)
```

3. Obtenido así el perfil de velocidad, dando la misma ecuación que (5.64). Automáticamente, se procede a obtener las variables como: el caudal, la velocidad media, el flujo másico y el número de *Re*. Se introducen los datos constantes.

```
%Datos constantes proporcionados
L = 3;%Largo [m]
T = 0.00008;%Grosor [m]
W = 2;% Ancho [m]
p = 1000;%Densidad [kg/m3]
m = 1.5182/1000;%Viscosidad [kg/m-s]
g = 9.81;%gravedad [m/s2]
```

4. Se determina el **caudal**, (5.68), mediante una doble integral, ocupando la función generada anteriormente, la cual se nombro como `Integral_Dobley` se introducen las variables. Donde la respuesta *F* será el perfil de velocidad.

```
%Caudal
syms x
F = (g*p*(T^2 - x^2))/(2*m);
Caudal = Integral_Doble (F, 0, T, 0, W) % [m3/s]
- - -
Caudal =
    2.2056e-06
```

5. Para el **flujo másico**, (5.70), solo es multiplicar la densidad del fluido por el caudal obtenido.

```
%Caudal
Flujo_masico = Caudal*p% [kg/s]
- - -
Flujo_masico =
    0.0022
```

6. Para la obtención de la **velocidad media**, (5.69), se debe integrar el área transversal, para esto tendrá el mismo procedimiento como se obtuvo el caudal, solo que la función será 1. Y posteriormente se divide el caudal entre el área transversal.

```
%Velocidad
F1 = 1;
R2 = Integral_Doble (F1, 0, T, 0, W);
Vel_med = Caudal/R2% [m/s]
- - -
Vel_med =
    0.0138
```

7. Se diseñara un programa para ver si corresponde el *Re* descrito en [56] y [57]

```
%Determinación del Re
Re = L*Vel_med*p/m
if Re<1
    S = 'Flujo Laminar'
else
    S = 'Flujo No Laminar'
end
- - -
Re =
    0.7264
S =
    'Flujo Laminar'
```

Como se puede apreciar se obtuvieron los mismos resultados de forma analítica que con los programados en MATLAB. La diferencia radica entre la forma analítica y numérica que el primero es más tardado y de una forma manual a comparación del otro que es sumamente rápido y no tiene tanto error de redondeo. Pero al final, los dos siempre convergerán en el mismo resultado.

5.2. Coordenadas cilíndricas

Ejemplo No. 2 En la industria petroquímica una de las maneras más sencillas y rápidas de transportar el crudo por tierra y por mar es mediante el uso de *oleoductos*. Si se comparan con los ferrocarriles o buques de carga, tienen un costo menor por unidad y también por capacidad. Un oleoducto no es más que las tuberías y conexiones utilizadas para el transporte de crudo, sus derivados y biobutanol a grandes distancias. El gas natural, aunque sea derivado del petróleo se ocupa lo que son gasoductos debido a que las tuberías transportan gas a una temperatura ambiente.



Figura 5.2.1: Oleoduto de crudo [59].

En este caso, se tratara de predecir el comportamiento del crudo en un oleoducto que tiene un cierto ángulo de inclinación δ , tal como se muestra en la figura 5.2.1. Dicha tubería tiene una longitud L y un radio interior de r_1 . Hay que mencionar que cualquier tubería, por más delgada que sea tiene un espesor (grosor), pero para el estudio de flujo de fluidos, lo que importa siempre es el radio interno, por ello no se tomara en consideración el radio exterior. Se considera el radio exterior cuando el fluido tiene grandes presiones, esto debido a que la tubería debe resistir dicha presión ejercida, pero debido a que el fluido se considera que tiene un *régimen laminar*, su velocidad es baja y que únicamente desciende por acción de la gravedad. Como el crudo es sumamente viscoso, se puede considerar con fluido Newtoniano. Se sabe además que el sistema opera en estado estacionario. Despreciando las perdidas por fricción de la tubería, determinar en primera instancia el perfil de velocidad. Para esto se debe diseñar un boceto para el caso de estudio, tal como se muestra en la figura 5.2.2.

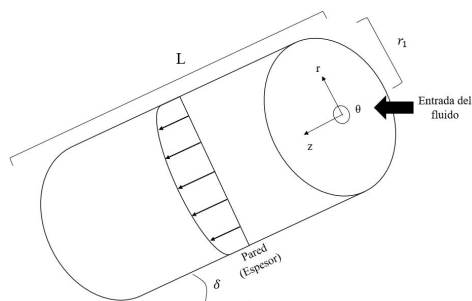
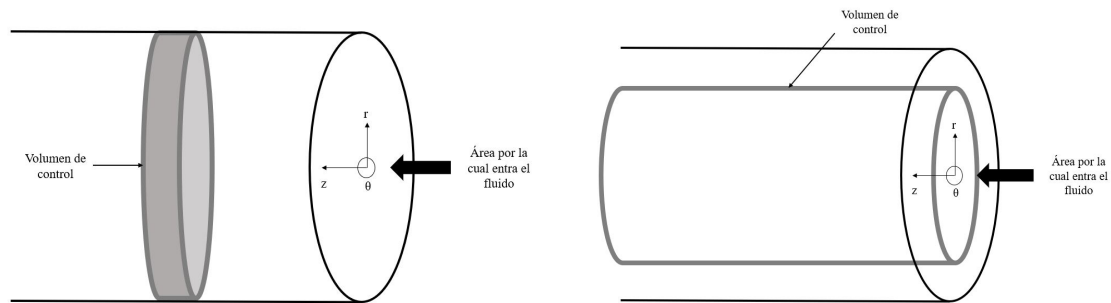


Figura 5.2.2: Representación esquemática de la tubería inclinada a cierto ángulo.

En la figura 5.2.2, se muestra la tubería del caso de estudio, donde el fluido newtoniano esta bajando de manera descendente por acción únicamente de la gravedad. El siguiente paso, consiste en ubicar el **volumen de control**. Como se aprecia en la figura anterior el eje coordenado se colocó en el centro de la tubería, esto con la finalidad de poder hallar el perfil de velocidad de manera más fácil. No se colocó en algún límite de la pared como fue el caso de las coordenadas rectangulares, ya que su geometría no lo permitiría debido a que ahora se estará trabajando coordenadas cilíndricas y polares, las cuales llevan un ángulo y si se recuerda a las clases de geometría de la preparatoria, se obtenían ecuaciones más sencillas cuando el círculo se ubica en el origen que si se desplazará hacia algún cuadrante. Para determinar el volumen de control se debe hallar el área por la cual fluye el fluido, siendo la cara circular marcada en la figura 5.2.2 como *entrada del fluido* la cual tiene dimensiones

$$A_f = \pi r_1^2 \quad (5.71)$$

Establecido el área por la cual fluye el fluido, se debe recordar que el volumen de control será perpendicular a dicha área. Posiblemente exista una confusión en como definir dicho volumen. Por ello hay que visualizar las siguientes figuras: 5.2.3(a) y 5.2.3(b).



(a) Volumen de control a lo largo del eje r , como si fuera un disco de Hockey. (b) Volumen de control a lo largo del eje z , como si fuera un cilindro dentro de otro cilindro.

Figura 5.2.3: Volúmenes de control.

Para la primera figura 5.2.3(a), se ve que el volumen de control se extiende a lo largo del eje r , tal como si fuera un disco de Hockey. Este volumen de control no es válido para este problema, ya que es paralelo al área por la cual fluye el fluido y debe ser perpendicular a ésta, ya que el eje de control se extiende por r y el área del fluido también se extiende a lo largo de dicho eje. La figura 5.2.3(a) es como si se vieran dos platos de cocinas acomodados en un escurridor, ver figura 5.2.4, su posición siempre será en paralelo uno del otro.

Para el segundo caso, siendo figura 5.2.3(b), se aprecia que el volumen de control se extiende a lo largo del eje z , tal como si hubiera un cilindro dentro de otro cilindro. Este es el volumen de control más adecuado, ya que el eje z es perpendicular al eje r . Para hacerlo algo más representativo, se debe ver la figura 5.2.5(a), la cual es un soporte para servitoallas, al ser la base circular, tal como la entrada de nuestra tubería, se extiende a lo largo un bastón de madera de forma cilíndrica, ese bastón sería el volumen de control, esto se puede ver mejor en la figura 5.2.5(b). Además, un criterio de perpendicular dice que debe formarse un ángulo de 90° .



Figura 5.2.4: Escurreidor de platos [60].



(a) Soporte para servitoallas.

(b) Demostración de como es el volumen de control para coordenadas cilíndricas, mediante el mismo soporte de servitoallas.

Figura 5.2.5: Servitoallas.

Ya establecido el volumen de control, se procede a especificar los límites del sistema, como la figura 5.2.6, donde el grosor del volumen de control será Δr

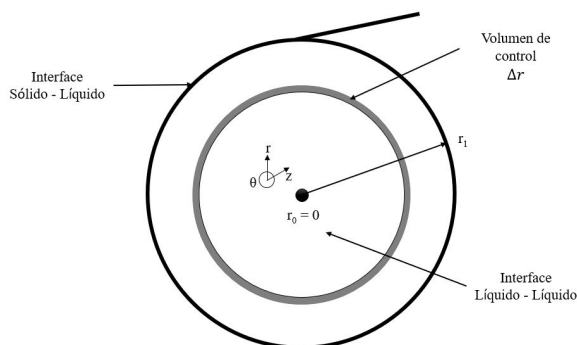


Figura 5.2.6: Vista central de la tubería para especificar los límites y además establecer el volumen de control para el cilindro.

Posiblemente surja la duda de ¿por qué se puso interfase líquido-líquido en la figura 5.2.6 cuando el

fluido circundante es el mismo y se ocupa dicha interfase cuando son diferentes fluidos miscibles? Hay que recordar que en los criterios de interfases puede existir una excepción, siendo aplicable en coordenadas cilíndricas y/o esféricas. El siguiente paso es determinar la ecuación de balance de movimiento. Para esto se ocupa la ecuación (5.38) la cual corresponde a dicho balance, pero con ángulo de inclinación

$$\rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(j_0)} - \rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(i_1)} + A_s \cdot \tau_{ij}|_i - A_s \cdot \tau_{ij}|_{(i+\Delta i)} + P_0 \cdot A_f - P_1 \cdot A_f \pm \cos(\delta)\rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.72)$$

Para esta ecuación se pueden reducir ciertos términos. Siendo los primeros dos términos los relacionados con la **fuerza de empuje**, definidos por la ecuación (5.30), ya que en el tramo de tubería el fluido desciende por acción de su propio peso

$$\rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(j_0)} - \rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(i_1)} + A_s \cdot \tau_{ij}|_i - A_s \cdot \tau_{ij}|_{(i+\Delta i)} \pm \cos(\delta)\rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.73)$$

El termino de \pm , que es debido al peso, en este caso es positivo, +, ya que el fluido tiende a descender, sin oposición de la gravedad.

$$\rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(j_0)} - \rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(i_1)} + A_s \cdot \tau_{ij}|_i - A_s \cdot \tau_{ij}|_{(i+\Delta i)} + \cos(\delta)\rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.74)$$

Para los términos de velocidad inicial y final, se pueden eliminar también. En primera instancia el área por la cual fluye el fluido, A_f , es constante y en segunda sucede lo mismo que en el ejemplo 1, es que la velocidad si ira cambiando de acuerdo al eje coordenado y a la interfase a la que se este desplazando, ver la figura 5.2.7, pero al evaluar el volumen de control, la velocidad en esta será la misma tanto a la entrada como a la salida, por lo tanto, tendrán los mismos valores $\rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{j_0} = \rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{j_1}$.

$$A_s \cdot \tau_{ij}|_i - A_s \cdot \tau_{ij}|_{(i+\Delta i)} + \cos(\delta)\rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.75)$$

Hasta el momento se tiene

Definición	Variable
Velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la entrada.	$A_s \cdot \tau_{ij} _i$
Velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la salida.	$A_s \cdot \tau_{ij} _{(i+\Delta i)}$
Fuerza de gravedad que actúa sobre el volumen de control en coordenadas cilíndricas.	$\cos(\delta)\rho \cdot V_{cont} \cdot g$

Antes de proceder a deducir la ecuación se debe deducir los subíndices del esfuerzo cortante, τ_{ij} . Para hallar los subíndices a veces es complicado en un inicio, pero con la práctica se llegan a encontrar fácilmente. El primer subíndice por encontrar y el más sencillo es j ya que viene representado como la *dirección en que ocurre el movimiento del fluido*, y viendo la figura 5.2.7 ocurre a lo largo del eje z . Para el subíndice i indica el *esfuerzo cortante*, para esto se debe regresar a ver la figura 5.2.7, donde el fluido se mueve por capas, como corresponde a un flujo laminar, en el cual en el centro esta la interfase líquido-líquido y al desplazarse a lo largo del eje r , las laminas se van volviendo más grandes y tienden a disminuir su velocidad, debido a que las paredes de la tubería no se mueven, mencionado esto, el movimiento molecular de las capas tendrá dirección a lo largo del eje r . Por lo tanto τ_{ij} quedaría como τ_{rz} , tener en consideración

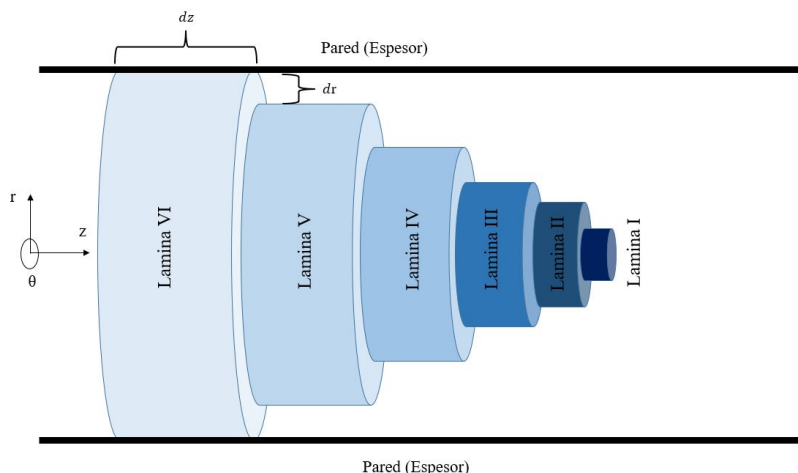


Figura 5.2.7: Flujo laminar dentro de la tubería, entra más oscuro sea el color mayor velocidad tendrá el fluido.

el apéndice B, porque de acuerdo a los subíndices podrá cambiar el valor de τ_{ij} al querer aplicar la ley de viscosidad de Newton. Al rango del esfuerzo cortante la literal i también cambiaría por la literal r . Quedando la tabla de condiciones como

Condición	Ecuación
Velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la entrada.	$A_s \cdot \tau_{rz} _r$
Velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la salida.	$A_s \cdot \tau_{rz} _{(r+\Delta r)}$
Fuerza de gravedad que actúa sobre el volumen de control en coordenadas cilíndricas.	$\cos(\delta)\rho \cdot V_{cont} \cdot g$

$$A_s \cdot \tau_{rz}|_r - A_s \cdot \tau_{rz}|_{(r+\Delta r)} + \cos(\theta)\rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \tag{5.76}$$

Por último, quedaría sustituir el área de sección transversal A_s , la cual existirá dos áreas, pero ¿Cómo es posible que exista dos áreas? Sí para el caso anterior en coordenadas rectangulares el A_s era el mismo tanto a la entrada como a la salida. Para demostrar esto, hay ir al volumen de control (figura 5.2.8), como se observa el volumen de control tiene un radio interior y uno exterior, esto se debe a que tiene un pequeño grosor que se denomina Δr . Entonces se obtendrán dos A_s , una interna y una externa. No confundir con las dimensiones de la tubería, donde el radio son r_0 y r_1 , siendo el primero el radio central de tubería y el segundo el radio interior de la tubería, mientras que acá se está evaluando el *volumen de control*.

Para obtener la primera área, que es para la velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte molecular, hay que recordar cómo obtener el área de un cilindro interno, para eso se debe imaginar como si se desarmara dicho cilindro, tal como se muestra en la figura 5.2.9(a). Donde es obtener únicamente el área del rectángulo generado, ya que es donde se está llevando a cabo el esfuerzo cortante y el área del

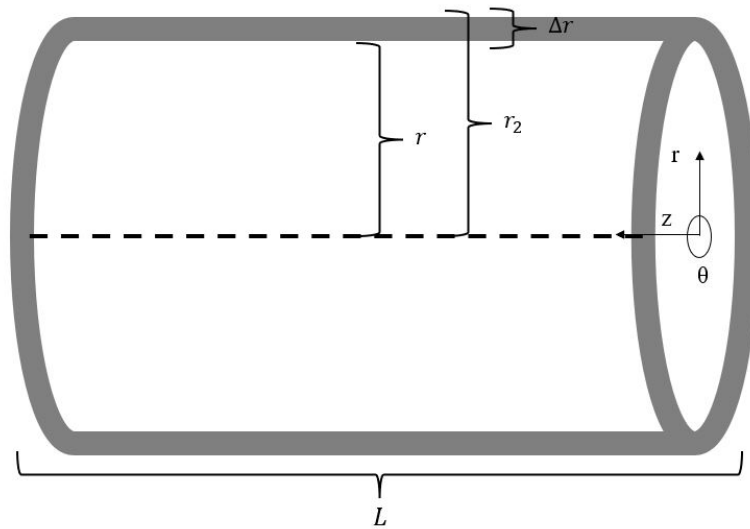
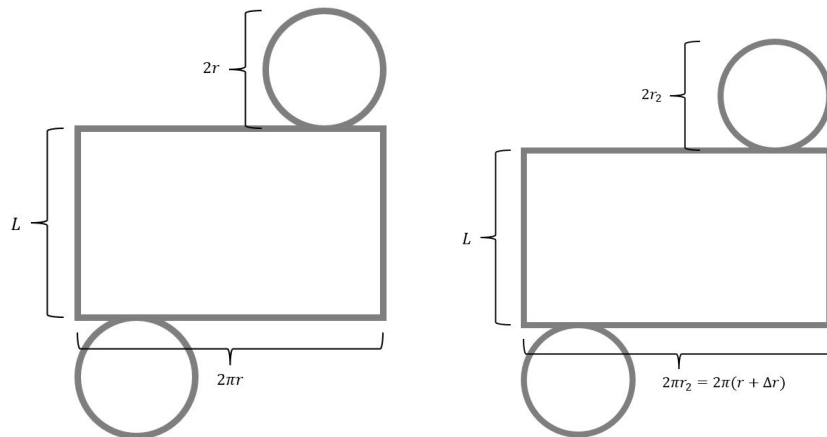


Figura 5.2.8: Dimensiones del volumen de control.

rectángulo se obtiene multiplicando la altura por el lado inferior o lo que es también

$$A_s \cdot \tau_{rz}|_r = L \cdot \pi \cdot 2r \cdot \tau_{rz}|_r \quad (5.77)$$



(a) Dimensiones del cilindro interno de nuestro volumen de control. (b) Dimensiones del cilindro externo de nuestro volumen de control.

Figura 5.2.9: Desdoblamiento del volumen de control.

Para el área exterior del volumen de control ocurre lo mismo que el caso anterior, es imaginar que se desarma el cilindro de la capa exterior, como se muestra en la figura 5.2.9(b). Aunque aquí ya cambia el asunto un poco, el área se obtiene igual que el caso anterior altura por el lado inferior del rectángulo $A_s = L \cdot \pi \cdot 2r_2$, pero se ha hecho mención anterior los fenómenos de transporte siempre miden lo que son los *cambios*, es por ello que en la literatura y por conveniencia es común que a r_2 se vea como un cambio,

por ello se aplica un Δr

$$\begin{aligned}\Delta r &= r_2 - r \\ r_2 &= r + \Delta r\end{aligned}$$

Por lo tanto, para el A_s de la velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte molecular será

$$A_s \cdot \tau_{rz}|_{(r+\Delta r)} = L \cdot 2(r + \Delta r) \cdot \tau_{rz}|_{(r+\Delta r)} \quad (5.78)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.77) y (5.78) en la tabla de condiciones y la ecuación (5.76).

Condición	Ecuación
Velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la entrada.	$2\pi \cdot L \cdot r \cdot \tau_{rz} _r$
Velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la salida.	$2\pi \cdot L \cdot (r + \Delta r) \cdot \tau_{rz} _{(r+\Delta r)}$
Fuerza de gravedad que actúa sobre el volumen de control en coordenadas cilíndricas.	$\cos(\delta)\rho \cdot V_{cont} \cdot g$

$$2\pi \cdot L \cdot r \cdot \tau_{rz}|_r - 2\pi \cdot L \cdot (r + \Delta r) \cdot \tau_{rz}|_{(r+\Delta r)} + \cos(\delta)\rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.79)$$

Para obtener el volumen de control, será a partir de la ecuación del volumen de un cilindro

$$V_{cil} = \pi \cdot r^2 \cdot L \quad (5.80)$$

Viendo la figura 5.2.8, el cilindro tiene una apertura en el centro, generando un radio interior, r y uno exterior, r_2 . Por lo tanto, el volumen va a ser una diferencia entre el radio exterior menos el interior, es decir

$$V_{cont} = \pi (r_2^2 - r^2) L$$

Sustituyendo r_2 por el cambio

$$\begin{aligned}V_{cont} &= \pi [(r + \Delta r)^2 - r^2] L \\ &= \pi [r^2 + 2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2 - r^2] L \\ &= \pi [2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2] L\end{aligned}$$

La tabla de condiciones y ecuación (5.79) quedaría como

Condición	Ecuación
Velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la entrada.	$2\pi \cdot L \cdot r \cdot \tau_{rz} _r$
Velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la salida.	$2\pi \cdot L \cdot (r + \Delta r) \cdot \tau_{rz} _{(r+\Delta r)}$
Fuerza de gravedad que actúa sobre el volumen de control en coordenadas cilíndricas.	$\cos(\delta)\rho \cdot \pi [2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2] L \cdot g$

$$2\pi \cdot L \cdot r \cdot \tau_{rz}|_r - 2\pi \cdot L \cdot (r + \Delta r) \cdot \tau_{rz}|_{r+\Delta r} + \cos(\delta)\rho \cdot \pi [2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2] L \cdot g = 0 \quad (5.81)$$

Se procede a determinar la ecuación de velocidad que rige el sistema, empezando por pasar del lado izquierdo de la igualdad la fuerza externa debida al peso del fluido y multiplicando toda la expresión por $-1/(2\pi L\Delta r)$

$$\begin{aligned} 2\pi L \tau_{rz}|_r - 2\pi L (r + \Delta r) \tau_{rz}|_{r+\Delta r} &= -\cos(\delta)\rho\pi [2r\Delta r + (\Delta r)^2] Lg \\ -\frac{1}{2\pi L\Delta r} \{2\pi Lr \tau_{rz}|_r - 2\pi L(r + \Delta r) \tau_{rz}|_{r+\Delta r} &= -\cos(\delta)\rho\pi [2r\Delta r + (\Delta r)^2] Lg\} \\ \frac{2\pi L(r + \Delta r) \tau_{rz}|_{r+\Delta r} - 2\pi Lr \tau_{rz}|_r}{2\pi L\Delta r} &= \frac{\cos(\delta)\rho\pi [2r\Delta r + (\Delta r)^2] Lg}{2\pi L\Delta r} \\ \frac{(r + \Delta r) \tau_{rz}|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz}|_r}{\Delta r} &= \frac{\rho g r \Delta r \cos(\delta)}{\Delta r} + \frac{\rho g (\Delta r)^2 \cos(\delta)}{2\Delta r} \\ \frac{(r + \Delta r) \tau_{rz}|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz}|_r}{\Delta r} &= \rho g r \cos(\delta) + \frac{1}{2}\rho g \Delta r \cos(\delta) \end{aligned}$$

Ocupando la definición de la primera derivada $\lim_{\Delta r \rightarrow 0}$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{(r + \Delta r) \tau_{rz}|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz}|_r}{\Delta r} &= \rho g r \cos(\delta) + \frac{1}{2}\rho g \Delta r \cos(\delta) \\ \frac{dr\tau_{rz}}{dr} &= \rho g r \cos(\delta) \end{aligned}$$

Resolviendo la primera ecuación diferencial, aplicando el método de variables separables

$$\begin{aligned} \int dr\tau_{rz} &= \rho g \cos(\delta) \int r dr \\ r\tau_{rz} &= \frac{\rho g \cos(\delta)}{2} r^2 + C_1 \end{aligned}$$

Conociendo que en la interfase esta **líquido-líquido**, el valor de τ_{rz} es constante, es decir que tendrá un valor finito, pero no conocido, y viendo el eje coordenado que esta en el origen, la longitud tendera a cero. Los valores de frontera quedan establecidos como

$$C_1 : \tau_{rz} = \text{finito} \quad r = 0$$

Evaluando

$$\begin{aligned} (0)(\text{finito}) &= 0 + C_1 \\ C_1 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$r\tau_{rz} = \frac{\rho g \cos(\delta)}{2} r^2 \quad (5.82)$$

Simplificado

$$\tau_{rz} = \frac{\rho g \cos(\delta)}{2} r \quad (5.83)$$

Se procede a introducir la ecuación de viscosidad de Newton (ecuación 4.16), sustituyendo a τ_{rz} , en la ecuación obtenida. La velocidad esta con respecto al eje z , haciendo que el subíndice cambia y la distancia sea con respecto al eje r , verificar si igualdad en el apéndice B.

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} = \frac{\rho g \cos(\delta)}{2} r \quad (5.84)$$

Se resuelve la segunda ecuación diferencial, por el mismo método de variables separables

$$\begin{aligned} -\mu \int dv_z &= \frac{\rho g \cos(\delta)}{2} \int r dr \\ v_z &= -\frac{\rho g \cos(\delta)}{4\mu} r^2 + C_2 \end{aligned}$$

Para evaluar la C_2 , se plantea los valores de frontera, sabiendo que en la interfase **sólido-líquido** la velocidad es igual a cero, debido a que la parte sólida esta estática y del punto de referencia, que es el centro, nos esta desplazando cierta distancia r_1 , obteniendo

$$C_2 : v_z = 0 \quad r = r_1$$

Evaluando

$$\begin{aligned} (0) &= -\frac{\rho g \cos(\delta)}{4\mu} (r_1)^2 + C_2 \\ C_2 &= \frac{\rho g \cos(\delta)}{4\mu} (r_1)^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo la C_2 en la ecuación y simplificando

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{\rho g \cos(\delta)}{4\mu} r_1^2 - \frac{\rho g \cos(\delta)}{4\mu} r^2 \\ v_z &= \frac{\rho g \cos(\delta)}{4\mu} (r_1^2 - r^2) \\ v_z &= \frac{\rho g r_1^2 \cos(\delta)}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right) \\ v_z &= \frac{\rho g \cos(\delta)}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

La ecuación queda establecida como

$$v_z(r) = \frac{\rho g \cos(\delta)}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right] \quad (5.85)$$

Como en el ejemplo 1, al graficar el comportamiento del fluido dada por la ecuación (5.85) se obtiene una parábola, que indica que la velocidad máxima se alcanza en el centro, cuando el radio vale cero, y conforme se va desplazando a lo largo del radio este tiende a disminuir hasta alcanzar la velocidad del sólido, que vale cero. Se procede a determinar el **caudal** $[\dot{V}]$ a partir de la ecuación (1.31)

$$\dot{V} = v_z \cdot A_f \quad (5.86)$$

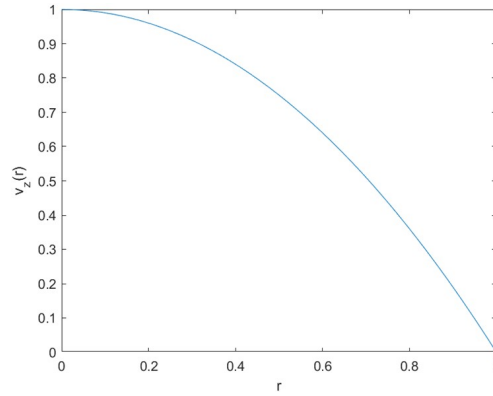


Figura 5.2.10: Función graficada de (5.85).

Donde v_z es la velocidad y A_f es el área por donde fluye el fluido. A_f se puede transcribir fácilmente como el producto de πr_1^2 , viendo la figura 5.2.2, pero hay un inconveniente, y es que la ecuación de velocidad depende del eje r . Entonces, para evaluar el área se ocupaba integrales, siendo el área de un círculo se emplea integrales dobles en coordenadas polares, es decir

$$A_f = \int_0^{2\theta} \int_0^{r_1} r dr d\theta \quad (5.87)$$

Sustituyendo A_f en la ecuación (5.86)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_0^{2\theta} \int_0^{r_1} v_z r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\theta} \int_0^{r_1} \frac{\rho g \cos(\delta)}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right] r dr d\theta \end{aligned}$$

Al evaluar la doble integral

$$\dot{V} = \frac{\theta \rho g r_1^4 \cos(\delta)}{8\mu} \quad (5.88)$$

Como se mencionó antes la velocidad como una función es de poca practicidad, ya que esta va cambiando de acuerdo a la distancia en que se quiera evaluar, por ello se recomienda usar una **velocidad promedio** [$\langle v_y \rangle$] de todas las partículas que se mueven en la película del fluido. Para determinar la velocidad promedio se parte de igual manera de la ecuación (5.86), despejando la variable v_y se obtiene

$$\langle v_z \rangle = \frac{\dot{V}}{A_f}$$

O también se puede expresar como

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\theta} \int_0^{r_1} v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\theta} \int_0^{r_1} r dr d\theta}$$

Resolviendo la integral

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle &= \frac{\int_0^{2\theta} \int_0^{r_1} \frac{\rho g \cos(\delta)}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right] r dr d\theta}{\int_0^{2\theta} \int_0^{r_1} r dr d\theta} \\ &= \frac{\theta \rho g r_1^4 \cos(\delta)}{8\mu} \\ &= \frac{\theta \rho g r_1^4 \cos(\delta)}{8\mu} (\theta \cdot r_1^2)^{-1} \end{aligned}$$

Simplificando

$$\langle v_r \rangle = \frac{\rho g r_1^2 \cos(\delta)}{8\mu} \quad (5.89)$$

El último parámetro a evaluar es el **flujo másico** $[\dot{m}]$, el cual se obtiene a partir de la ecuación (1.34)

$$\dot{m} = \int_0^{2\theta} \int_0^{r_1} v_z \rho r dr d\theta = \frac{\theta \rho^2 g r_1^4 \cos(\delta)}{8\mu} \quad (5.90)$$

Tabla 5.2.1: Formulas ocupadas durante el desarrollo del Ejemplo 2, en coordenadas cilíndricas para una velocidad en z .

Balance general	$2\pi L \tau_{rz} _r - 2\pi L (r + \Delta r) \tau_{rz} _{r+\Delta r} + \cos(\theta) \rho \pi [2r\Delta r + (\Delta r)^2] Lg = 0$
Ley de viscosidad de Newton	$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$
Velocidad media	$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\theta} \int_0^{r_1} v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\theta} \int_0^{r_1} r dr d\theta}$
Caudal	$\dot{V} = \int_0^{2\theta} \int_0^{r_1} v_z r dr d\theta$
Flujo másico	$\dot{m} = \int_0^{2\theta} \int_0^{r_1} v_r r dr d\theta$

5.2.1. Valores reales

Se introducirán valores reales al problema del oleoducto. Para eso se considerara que el oleoducto es un transporte de petroleo en la refinería Dos Bocas, el crudo que se esta transportando es el llamado **Maya**, el cual es un crudo *pesado*, su procesamiento requiere de refinerías con unidades de alta conversión, las cuales transforman la fracción pesada (residuo) del crudo en productos con mayor valor para el refinador. Este crudo tiene una densidad de $1-0.92 \text{ g/cm}^3$, 22° API [61]. La presión en la que opera el medio ambiente es de 1 atm y la presión manométrica del sistema es 0. La temperatura a la que se encuentra el crudo es de 100° F y según reportes de laboratorio indican que su viscosidad a dicha temperatura es de 500 ssu . La tubería que se escogió para su diseño es de acero al carbón la cual tiene un diámetro dominal de $1 \text{ 1/2}''$ (Diámetro externo $1.900''$, espesor $0.4''$, diámetro interno 0.0279 m y radio interno 0.014 m) tiendo

un trayecto de 2 m. Determinar la velocidad media, caudal y flujo másico, si el ángulo de diseño de dicha tubería tiene una inclinación es de 20° respecto al piso.

1. Lo primero que hay que preguntarse ¿qué son los *ssu*? Es importante saber que los viscosímetros se pueden clasificar de acuerdo al sistema que emplean para medir la viscosidad en tres grupos: *sistema capilar*, *sistema rotacional* y *sistema de arrastre*. Los del primer grupo, que son los de mayor presencia y aplicación en los laboratorios, está integrado por:

- Viscosímetro Saybolt Universal (*ssu*). Temperaturas de 100, 130, y 210 °F
- Viscosímetro Saybolt Furol (*ssf*). Temperaturas de 70, 122 °F
- Viscosímetro Redwood. Temperaturas de 70, 140, 212 °F
- Viscosímetro Engler. Temperaturas de 20 °C (68 °F), 50 °C (122 °F), 100 °C (212 °F)

El *viscosímetro Saybolt* es el que goza de mayor popularidad en América. La viscosidad se determina indirectamente midiendo el tiempo requerido para descargar en el frasco calibrado una cantidad determinada de líquido que fluye por un tubo capilar de diámetro determinado, a una temperatura específica. El tiempo se mide en segundos y consecuentemente la viscosidad se expresa en unidades Saybolt. La relación entre las unidades del viscosímetro Saybolt (*ssu*) y el *stokes*, para combustibles y lubricantes de **viscosidades cinemáticas** no menores de 30 *centistokes*, viene dada con suficiente aproximación por la igualdad de la fila 1 en la tabla 5.2.2. En el caso de líquidos muy fluidos, con viscosidades inferiores a 30 *centistokes*, debe aplicarse la fórmula corregida de la fila 2 para la conversión a stokes:

Fila I	$\nu[\textit{stokes}] = 0.0022 \cdot (\textit{ssu})$
Fila II	$\nu[\textit{stokes}] = 0.0022 \cdot (\textit{ssu}) - \frac{9}{5(\textit{ssu})}$

Tabla 5.2.2: Tabla de conversión de *ssu* a *stokes*.

Si el crudo es considerado pesado y con una alta viscosidad, se ocupa la ecuación de la tabla 5.2.2, fila I, para convertir los *ssu* a stokes

$$\begin{aligned}
 \nu &= 0.0022 \cdot (\textit{ssu}) \\
 &= 0.0022(500) \\
 &= 1.1 \textit{ stokes} [=] \textit{cm}^2/\textit{s} \\
 &= 0.0011 \textit{ m}^2/\textit{s}
 \end{aligned}$$

Como se aprecia, la solución da superior a 30 *centistokes*, demostrando que la ecuación que se ocupó es la indicada. Se puede ocupar mejor la definición de **viscosidad cinemática**, en vez de ocupar la **viscosidad dinámica**, debido a que se debe obtener el valor de ésta última, siendo un paso más a desarrollar y se puede ocupar la equivalencia entre viscosidad cinemática y la viscosidad dinámica a partir de la ecuación (4.19).

$$\nu = \frac{\rho}{\mu}$$

2. Para determinar la **velocidad media** se ocupa la ecuación (5.89)

$$\begin{aligned}\langle v_r \rangle &= \frac{\rho g r_1^2 \cos(\delta)}{8\mu} \\ &= \frac{g r_1^2 \cos(\delta)}{8\nu}\end{aligned}$$

3. Antes de proceder a sustituir los valores, hay que remitirse al enunciado antes menciona *el ángulo de diseño de dicha tubería tiene una inclinación de 20° respecto al piso*. Para eso hay ver la figura 5.2.11, donde se muestra que hay un triángulo rectángulo generado, ahora se debe saber que ángulo ocupar para la ecuación (5.89) si el de 20° o 70°, por ello hay que aclarar que la ecuación la cual se partió todo, siendo (5.38), el ángulo de inclinación que se considera es comprendido entre la vertical y la pendiente o en este caso el cateto adyacente y la hipotenusa, correspondiendo al ángulo de 70°.

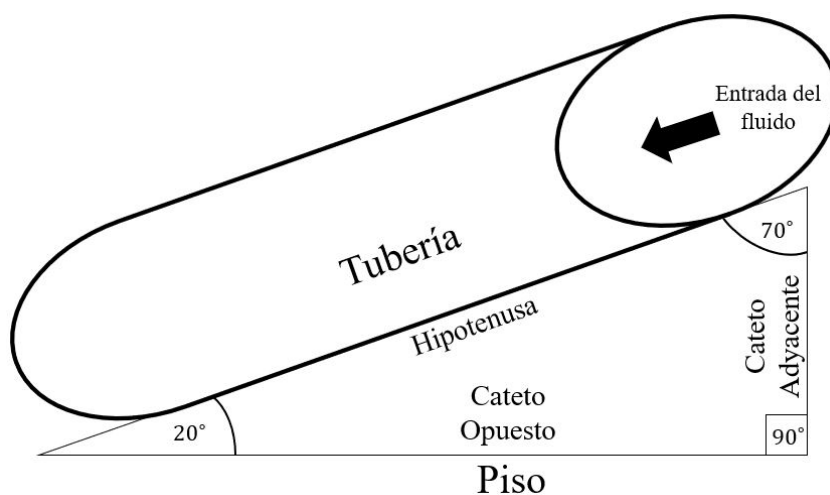


Figura 5.2.11: Ángulo de inclinación de la tubería.

4. Se sustituyen los valores

$$\begin{aligned}\langle v_z \rangle &= \frac{(9.81 \text{ m/s}^2) (0.014 \text{ m})^2 \cos(70)}{8 (0.0011 \text{ m}^2/\text{s})} \\ &= 0.0747 \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

5. Para determinar el **caudal** se ocupa la ecuación (5.88)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\theta \rho g r_1^4 \cos(\delta)}{8\mu} \\ &= \frac{\theta g r_1^4 \cos(\delta)}{8\nu}\end{aligned}$$

6. Sustituyendo valores y haciendo el análisis dimensional

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\pi (9.81 \text{ m/s}^2) (0.014 \text{ m})^4 \cos(70)}{8 (0.0011 \text{ m}^2/\text{s})} \\ &= 4.6015 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}\end{aligned}$$

7. Para determinar el **flujo másico** se ocupa la ecuación (5.90)

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \frac{\theta \rho^2 g r_1^4 \cos(\delta)}{8\mu} \\ &= \rho \frac{\theta g r_1^4 \cos(\delta)}{8\nu} \\ &= \rho \cdot \dot{V}\end{aligned}$$

8. Sustituyendo valores y haciendo el análisis dimensional.

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \left(960 \frac{kg}{m^3}\right) \left(4.6015 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{s}\right) \\ &= 0.0441\end{aligned}$$

9. ¿Qué sucedería si el flujo que se está evaluando no es un flujo laminar? ¿Qué tal si todo lo que realizó y las condiciones de operación no son las idóneas para un flujo laminar? Para corroborar si el flujo es laminar, es ocupar el número de Re (4.18)

$$Re = \frac{D \cdot v}{\nu}$$

10. Recordando que significa cada termino: D es la **dimensión lineal características**, en otras palabras, será el diámetro interno por el cual el fluido se hace pasar, siendo de diámetro interno 0.0279 m; v que es la **velocidad media**, siendo de 0.0747 m/s; ν siendo la **viscosidad cinemática** de 0.0011 m²/s

$$\begin{aligned}Re &= \frac{(0.0279 m)(0.9839 m/s)}{0.0011 m^2/s} \\ &= 1.8946\end{aligned}$$

Usando de referencia la tabla 4.2.1 indica que el flujo si se encuentra en laminar, ya que $Re < 2100$, para tuberías.

5.2.2. Solución numérica

Se hará el mismo problema, pero mediante el uso de métodos numéricos, le cual se verá otra forma de programar.

1. Para esto siempre se parte del balance de movimiento, (5.35), hasta simplificar la ecuación de manera analítica y poder hallar la ecuación diferencial que representa el caso de estudio, siendo

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = rg\rho \cos(\delta)$$

La ecuación diferencial es un producto, es decir $d(r \cdot \tau_{rz})$, y el comando `dsolve` no permite poner producto de derivadas. Por ello se supondrá que $\tau = r \cdot \text{tau}$, sin aplicar condición de frontera

```
rtao = dsolve('Dtao = r*p*g*cosd(del)', 'r');
rtao = simplify(rtao)
- - -
```

```
rtao =
      (g*p*cosd(del)*r^2)/2 + C1
```

2. Se debe ocupar el comando `cosd`, ya en MATLAB existe también el comando `cos`, donde el primero se ocupa el argumento en grados, mientras que el segundo esta en radianes. La ecuación obtenida se expresar como

$$r\tau_{rz} = \frac{g\rho \cos(\delta)}{2} r^2 + C_1$$

Se despeja C_1 , y aplicando el valor de frontera $\tau(0) = a$, donde $finito = a$. Para introducirlo en MATLAB, lo que se debe hacer es meter la condicione de frontera como $r = 0$ y $\tau = 0$, y nombrando como variables simbólicas a `g p t a`

```
syms g p del a
r = 0
tau = a
C1 = r*tau-(g*p*cosd(del)*r^2)/2
- - -
C1 =
      0
```

La ecuación queda como (5.82) o si se despeja τ_{rz} , como (5.83).

3. Sustituyendo la ecuación de viscosidad de Newton, se obtiene (5.84). Aplicando la segunda condición de frontera, mediante el comando `dsolve(f,var)`

```
v_z = dsolve('Dv_z = -p*g*cosd(del)*r/(2*m)', 'v_z(r1)=0', 'r');
v_z = simplify(v_z)
- - -
v_z =
      -(g*p*cosd(del)*(r^2 - r1^2))/(4*m)
```

La solución, se escribe algebraicamente como

$$v_z = -\frac{g\rho \cos(\delta) (r^2 - r_1^2)}{4\mu}$$

El cual, haciendo álgebra, da exactamente la ecuación (5.85).

4. Antes de proceder a aplicar los condiciones de operación del problema, se realiza el cambio de variable, que fue el de ocupar la *viscosidad cinemática* en vez de la viscosidad dinámica, ecuación (4.19). El comando `subs`, permite cambiar variables tanto numéricas como algebraicas y operaciones, cambiando la operación ρ/μ por ν

```
syms p g del r r1 m nu
v_z = -(g*p*cosd(del)*(r^2 - r1^2))/(4*m)
v_z = subs(v_z,p/m,1/nu)
- - -
v_z =
      -(g*cosd(del)*(r^2 - r1^2))/(4*nu)
```

O también podría ser de la siguiente forma

```
v_z = dsolve('Dv_z = -p*g*cosd(del)*r/(2*m)', 'v_z(r1)=0', 'r');
v_z = simplify(v_z);
syms p g del r r1 m nu
v_z = subs(v_z,p/m,1/nu)
- - -
v_z =
    -(g*cosd(del)*(r^2 - r1^2))/(4*nu)
```

Dando exactamente lo misma solución. La diferencia es que en el segundo programa se aplica de una vez los cambios en el comando, para no tener que copiar y pegar el resultado de v_z en una nueva ventana, si no, que todo es en un mismo *scrip* y la ecuación se representa como

$$v_z = -\frac{g \cos(\delta) (r^2 - r_1^2)}{4\nu}$$

5. Para poder demostrar, que la solución generada a partir de los resultados numéricos darán los mismos resultados que los hechos de forma analítica, se ocupara las mismas condiciones y valores propuestos en el problema. Teniendo cuidado con el análisis dimensional.

```
%Datos constantes proporcionados
p = (1000+920)/2;%Densidad[kg/m3]
g = 9.81;%Gravedad[m/s2]
del = 70;%Ángulo[Grado]
D_ex = 1.900*2.54/100;%Diametro externo[m]
es = 0.400*2.54/100;%Espesor
D_in = D_ex-2*es;%Diametro interno [m]
r1 = D_in/2;%radio interno [m]
nu = (500*0.0022)/1000;%Viscosidad cinemática[m^2/s]
L = 2;%Longitud de tubería [m]
```

6. Determinación del caudal

```
%Caudal
syms r t
v_z = -(g*cosd(del)*(r^2 - r1^2))/(4*nu);

%Determinar el caudal
V = int(v_z*r,t,0,2*pi);
Caudal = double(int(V,r,0,r1))%[m3/s]
---
Caudal =
    4.5622e-05
```

7. Determinación del flujo másico

```
%Determinación del flujo másico
Masico = Caudal*p%[kg/s]
---
Masico =
```

0.0438

8. Determinación de la velocidad promedio

```
%Determinación de la velocidad promedio
d = 1;
d = int(d*r,t,0,2*pi);
d = double(int(d,r,0,r1));
Velocidad = Caudal/d[m/s]
---
Velocidad =
    0.0744
```

9. Determinación del Número de Reynolds Re es correcto para tuberías

```
%Determinación del numero de Re
Re = D_in*Velocidad/nu
if Re<2100
    S = 'Flujo Laminar'
else
    S = 'Flujo No Laminar'
end
---
Re =
    1.8900
S =
    'Flujo Laminar'
```

5.3. Placa en movimiento

Ejemplo No. 3 Uno de las catástrofes ambientales más grandes que existen, desde que se descubrió el crudo, son los **derrames de petróleo**, los cuales son vertidos de hidrocarburos que se produce debido a un accidente que contamina el medio ambiente, específicamente el mar, figura 5.3.1. Estos derrames afectan todo el ecosistema donde se produce el evento a lo cual perjudica gravemente la vida marina y la pesca, así como a las costas con efectos que pueden llegar a ser muy persistentes en el tiempo.

En el momento exacto en que este fenómeno ocurre, aparece una especie de película aceitosa sobre la superficie del agua marina que se esparce, la cual es de color negro o marrón la cual impide el paso de la luz, afectando la fotosíntesis y destruyendo el plancton. Esta fina capa que se forma también evita el intercambio de gases entre el agua y el aire. La limpieza y recuperación de un derrame de petróleo es difícil y depende de muchos factores, incluido el tipo de petróleo derramado, la temperatura del agua (que afecta la evaporación y la biodegradación) y los tipos de costas y playas involucradas. Los derrames pueden tardar semanas, meses o incluso años en limpiarse. Cuando sucede un derrame de petróleo se tiene que actuar rápidamente, ya que, aunque el daño ya es irreversible se puede contrarrestar su propagación y recuperar parte del hidrocarburo perdido. El método óptimo es retirar la *contaminación del agua*, pero casi nunca es posible pues las condiciones no siempre lo permiten. Se usan diferentes mecanismos

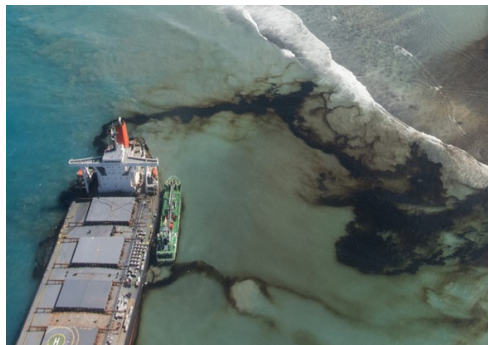


Figura 5.3.1: El derrame de petróleo en los océanos se considera una **catástrofe ambiental** [63].

para intentar sacar lo más posible del hidrocarburo. Se usan desde medios mecánicos hasta prácticas con otros químicos que permiten degradar el agente más rápido de lo normal. Por eso la empresa *SENTEC* [62] se especializa en la comercialización de equipos para la contención y recuperación de vertidos de hidrocarburos, productos químicos y sólidos flotantes, así como de barreras para el control de riadas e inundaciones. Un equipo que diseñaron para la limpieza de los numerosos derrames de petróleo es el **Skimmer de cinta transportadora**. Este dispositivo es un módulo de cinta transportadora permite la recuperación de hidrocarburos de viscosidad extrema, ver 5.3.2.

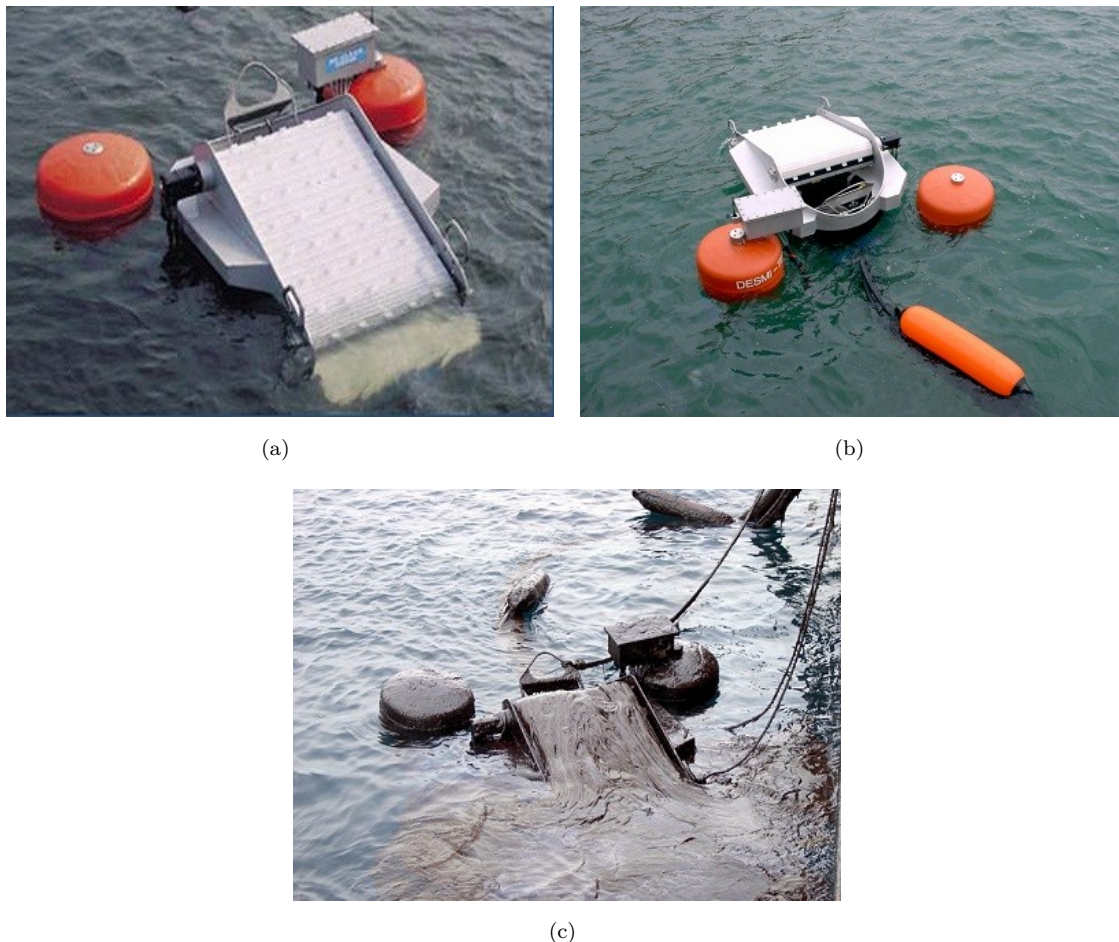


Figura 5.3.2: Skimmer de cinta transportadora fue utilizado con gran éxito durante el derrame del Prestige para la recuperación de hidrocarburo semisólido, tal como se muestra en las fotografías [62].

Las dimensiones de la cinta son de 1.2 m de largo por 0.8 metros de anchos, con un ángulo de inclinación de 30° respecto a la horizontal [62]. Suponer que a un Ingenieros Químicos se le convoca para acudir a un derrame de petróleo y se pretende ocupar el *skimmer de cinta transportadora*, el cual se quiere estimar cuántos dispositivos se requieren, sí el derrame causado es de 66000 toneladas de petróleo [64] y se quiere mitigar el daño ambiental en una semana. Para eso el crudo se manejará como un fluido Newtoniano (por ser de alta viscosidad), que operará en un régimen flujo laminar. Las condiciones de operación de temperatura serán constante en todo momento, así como la presión ambiental que será de un 1 atm, ya que se encuentra a nivel del mar. La velocidad de la cinta transportadora es de v_B , su ángulo de inclinación se denotara como δ , por el momento para la longitud y ancho de la cinta transportadora la corresponderán las literales L y W , respectivamente. Como se transportara crudo sumamente viscosos, este generará una película, de grosor γ . Ver figura 5.3.3.

Como se viene trabajando, se establece primero el volumen de control. Repitiendo el mismo procedimiento, sabiendo que existen tres formas, como se ve en las figuras 5.3.4(a), 5.3.4(b) y 5.3.4(c).

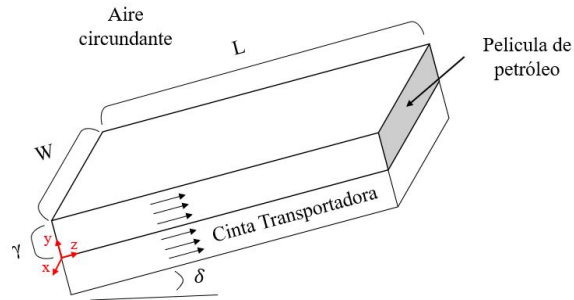
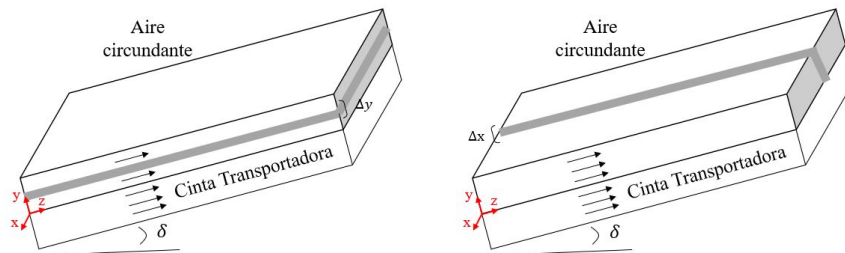
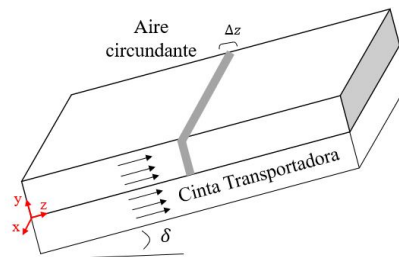


Figura 5.3.3: Diseño de cinta transportadora llevando el crudo, con eje coordenado.



(a) Volumen de control donde el diferencial ocurre a lo largo del eje y .
 (b) Volumen de control donde el diferencial ocurre a lo largo del eje x .



(c) Volumen de control donde el diferencial ocurre a lo largo del eje z .

Figura 5.3.4: Volúmenes de control.

Las dimensiones del volumen de control serán aquellas que sean perpendiculares al esfuerzo cortante, τ_{ab} . Para eso hay que ver las tres caras del problema, tal como las figuras 5.3.5(a), 5.3.5(b) y 5.3.5(c), las cuales dan una representación esquemática de como se comporta el fluido respecto a los límites de frontera que existen.

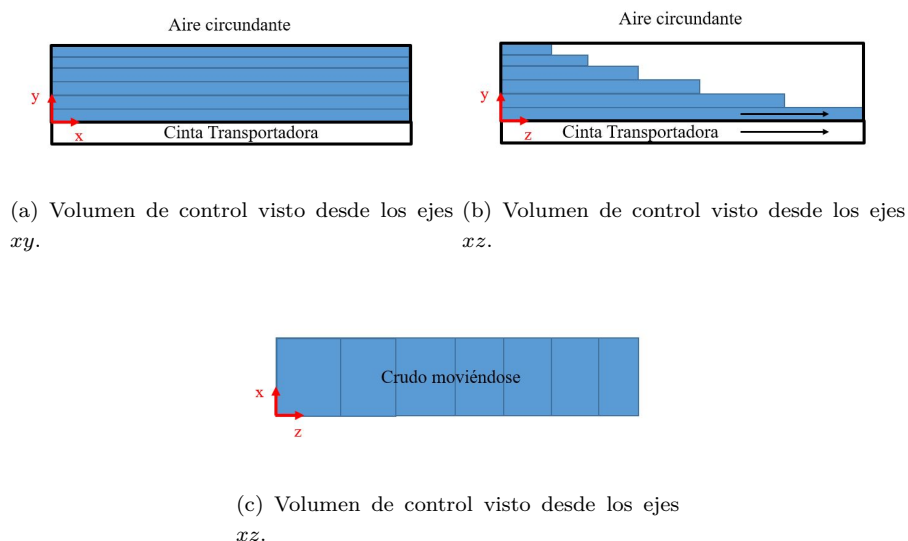


Figura 5.3.5: Volúmenes de control en vistas laterales.

El esfuerzo cortante, τ_{ab} será la pauta para determinar el volumen de control más adecuado. Dicho esfuerzo que tiene dos subíndices, partiendo del segundo b , el cual indica la dirección del movimiento del fluido, siendo a lo largo del eje z , por lo tanto la figura 5.3.5(a) queda descartada, ya que no tiene dicho eje. El siguiente subíndice, a , es la dirección donde se lleva a cabo el esfuerzo cortante, y donde además aparecen las interfases existente, siendo las interfase líquido-gas (que se da entre el fluido y el aire circundante) y sólido-líquido (que se da entre en cinta transportadora y el fluido), la cual se da en el eje y , siendo la figura 5.3.5(b), debido a que en la figura 5.3.5(b) no se presentan las interfases, ni esa separación que existen entre el fluido y dichas interfases, entonces el esfuerzo cortante tendrá coordenadas τ_{yz} . Por lo tanto, el volumen de control más adecuado es como la figura 5.3.6, donde el diferencial ocurre a lo largo del eje y .

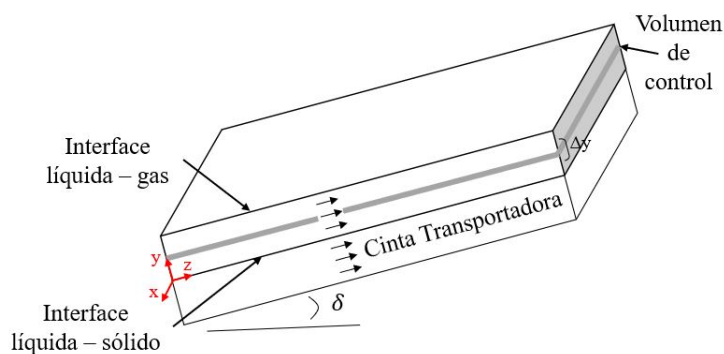


Figura 5.3.6: Diseño de cinta transportadora llevando el crudo, con eje coordenado.

El siguiente paso es determinar la ecuación de balance de movimiento. Para esto se ocupa de base la ecuación (5.38) la cual corresponde a dicho balance, pero con ángulo de inclinación

$$\rho \cdot A_f \cdot v_j^2 \Big|_{(j_0)} - \rho \cdot A_f \cdot v_j^2 \Big|_{(i_1)} + A_s \cdot \tau_{ij} \Big|_i - A_s \cdot \tau_{ij} \Big|_{(i+\Delta i)} + P_0 \cdot A_f - P_1 \cdot A_f \pm \cos(\delta) \rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.91)$$

Para esta ecuación se reducirán ciertos términos. Los primeros dos términos que se pueden eliminar son los de **fuerza de empuje**, ya que no existe dicha fuerza que este empujando el fluido, sino únicamente lo está movimiento la cinta transportadora, definidos por la ecuación (5.30). Además, el termino de \pm , que es debido al peso, siendo en este caso negativo, $-$, debido a que el fluido tiende a ascender, oponiéndose a la fuerza de gravedad, haciendo que la ecuación (5.91) sea

$$\rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(j_0)} - \rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(j_1)} + A_s \cdot \tau_{ij}|_i - A_s \cdot \tau_{ij}|_{(i+\Delta i)} - \cos(\delta)\rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.92)$$

Para los términos de velocidad inicial y final, se pueden eliminar también. En primera instancia el área por la cual fluye el fluido, A_f , es constante y en segunda como se menciono, la velocidad evaluada en un volumen de control será constante, ya que a nivel molecular las partículas se mueven con una misma velocidad, además de que opera en estado estacionario, por lo tanto, tendrán los mismos valores $\rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(j_0)} = \rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(j_1)}$.

$$A_s \cdot \tau_{ij}|_i - A_s \cdot \tau_{ij}|_{(i+\Delta i)} - \cos(\delta)\rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.93)$$

Se dedujo con anterioridad la dirección del esfuerzo cortante y del flujo del fluido, quedando τ_{yz} . La ecuación anterior y la tabla de variables quedaría como:

Definición	Variables
Velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la entrada.	$A_s \cdot \tau_{yz} _y$
Velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la salida.	$A_s \cdot \tau_{yz} _{(y+\Delta y)}$
Fuerza de gravedad que actúa sobre el volumen de control en coordenadas cilíndricas.	$\cos(\delta)\rho \cdot V_{cont} \cdot g$

$$A_s \cdot \tau_{yz}|_y - A_s \cdot \tau_{yz}|_{(y+\Delta y)} - \cos(\delta)\rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.94)$$

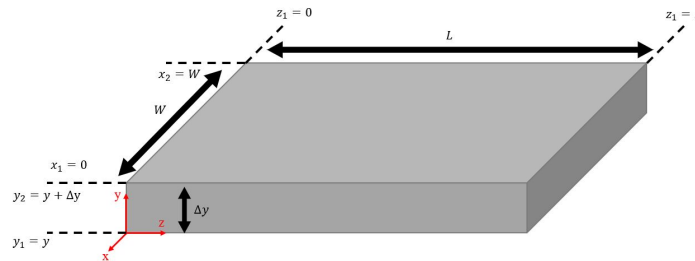


Figura 5.3.7: Dimensiones del volumen de control.

Queda deducir dos variables A_s y V_{cont} , para eso se debe ver la figura 5.3.7, la cual representa las dimensiones del volumen de control. Para A_s , será el área perpendicular al esfuerzo cortante, si el esfuerzo cortante se da en el eje y , la perpendicular sería los ejes x y z , y si la longitud de estos esta dado por W y L , respectivamente, entonces las dimensiones de $A_s = L \cdot W$. Para el V_{cont} , será el volumen de un prisma rectangular, el cual se define por el productos de sus lados, siendo $V_{cont} = L \cdot W \cdot \Delta y$. Por lo tanto, la tabla anterior y la ecuación (5.94) quedaría

Definición	Variable
Velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la entrada.	$L \cdot W \cdot \tau_{yz} _y$
Velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la salida.	$L \cdot W \cdot \tau_{yz} _{(y+\Delta y)}$
Fuerza de gravedad que actúa sobre el volumen de control en coordenadas cilíndricas.	$L \cdot W \cdot \Delta y \cdot g \cdot \rho \cdot \cos(\delta)$

$$L \cdot W \cdot \tau_{yz}|_y - L \cdot W \cdot \tau_{yz}|_{y+\Delta y} - L \cdot W \cdot \Delta y \cdot g \cdot \rho \cdot \cos(\delta) = 0 \quad (5.95)$$

De la ecuación 5.95 se pasará del lado derecho la expresión de fuerzas de gravedad y multiplicando por $-1/(LW\Delta y)$ a toda la ecuación

$$\begin{aligned} -\frac{1}{LW\Delta y} [LW \tau_{yz}|_y - LW \tau_{yz}|_{y+\Delta y} &= LW\rho g\Delta y \cos(\delta)] \\ \frac{LW \tau_{yz}|_{y+\Delta y} - LW \tau_{yz}|_y}{LW\Delta y} &= -\frac{LW\rho g\Delta y \cos(\delta)}{LW\Delta y} \\ \frac{\tau_{yz}|_{y+\Delta y} - \tau_{yz}|_y}{\Delta y} &= -\rho g \cos(\delta) \end{aligned}$$

Ocupando la definición de la primera derivada $\lim_{\Delta y \rightarrow 0}$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\tau_{yz}|_{y+\Delta y} - \tau_{yz}|_y}{\Delta y} &= -\rho g \cos(\delta) \\ \frac{d\tau_{yz}}{dy} &= -\rho g \cos(\delta) \end{aligned}$$

Se ocupara otro técnica para resolver este tipo de problemas, el cual consiste en introducir la ecuación de viscosidad de Newton (ecuación 4.16), sustituyendo directamente en la ecuación obtenida el valor de τ_{yz} . La velocidad como esta respecto al eje z , el subíndice cambia, al igual que la distancia, que ahora se encuentra con respecto al eje y . Obteniendo

$$\frac{d}{dy} \left(-\mu \frac{dv_z}{dy} \right) = -\rho g \cos(\delta)$$

Considerando la viscosidad μ como constante, sale de la expresión anterior y se simplifica.

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \rho g \cos(\delta) \quad (5.96)$$

Para posteriormente resolver una ecuación diferencial de segundo orden

$$v_z = \frac{\rho g \cos(\delta)}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (5.97)$$

Aplicando el primer valor en la frontera, siendo en la **interfase líquido-sólido**

$$v_z = v_B \quad y = 0 \quad v_z(0) = v_B$$

Resolviendo

$$(v_B) = \frac{\rho g \cos(\delta)}{2\mu}(0)^2 + C_1(0) + C_2$$

$$v_B = C_2$$

$$v_z = \frac{\rho g \cos(\delta)}{2\mu}y^2 + C_1y + v_B$$

Para encontrar la segunda constante de integración, C_1 , hay que remitirse al recuadro de **interfase líquido-gas**, explicada al inicio de este capítulo, se verá que la velocidad no se maneja, pero se explicara algo. Es cierto que en la interfase líquido-gas es donde se encuentra la mayor velocidad, ya que el esfuerzo cortante es tan pequeño que se considera cero, pero este criterio tiene una excepción y es cuando el fluido tiende a subir, y para que ascienda el fluido debe ejercer una fuerza, la cual dicha fuerza es la cinta transportadora con una velocidad mayor a la velocidad máxima de caída (ver figura 5.3.8), es decir

$$v_B > v_{max}$$

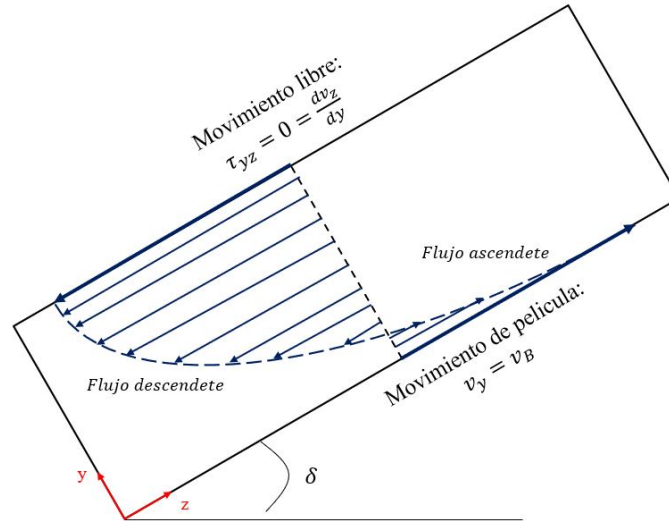


Figura 5.3.8: Perfil de velocidad de una placa de liquido en movimiento [65]

Entonces se puede establecer que la velocidad v_B debe ser positiva, ya que es el que hace que el fluido se transporte de formas ascendente en la interfase sólido-líquido, mientras que en la interfase líquido-gas, la cual tiene movimiento libre, su velocidad será negativa con respecto al problema, y para hacer que todo el fluido se mueva se debe superar esta velocidad negativa hasta llegar al valor de cero, por lo tanto, cuando la velocidad de la cinta, v_B , sea mucho mayor que la del movimiento libre, v_{max} , el fluido empezara a moverse completamente y la velocidad del movimiento libre sera tan pequeña que será 0. Haciendo que para este caso la condición de frontera en la **interfase líquido-gas** sea [65] [66]

$$v_z = 0 \quad y = \gamma \quad v'_z(\gamma) = 0$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} v'_z &= \frac{2\rho g \cos(\delta)}{2\mu} y + C_1 \\ 0 &= \frac{\rho g \cos(\delta)}{\mu} (\gamma) + C_1 \\ C_1 &= -\frac{\rho g \cos(\delta)}{\mu} \gamma \\ v_z &= \frac{\rho g \cos(\delta)}{2\mu} y^2 - \left(\frac{\rho g \cos(\delta)}{\mu} \gamma \right) y + v_B \end{aligned}$$

Por lo cual, la ecuación particular queda establecida como

$$v_z(y) = \frac{\rho g \cos(\delta)}{2\mu} (y^2 - 2\gamma y) + v_B \quad (5.98)$$

Una de las variables a determinar es el **caudal** $[\dot{V}]$, a partir de la ecuación (1.31)

$$\dot{V} = v_z \cdot A_f \quad (5.99)$$

Donde v_z es la velocidad y A_f es el área por donde fluye el fluido. A_f se podría transcribir fácilmente como el producto de $W \cdot \gamma$, viendo la figura 5.3.3, pero hay un inconveniente, y es que la ecuación de velocidad depende del eje y . Para evaluar el área se ocupan integrales dobles, para coordenadas rectangulares son

$$A_f = \int_0^W \int_0^\gamma dx dy \quad (5.100)$$

Sustituyendo A_f en la ecuación (5.100)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_0^W \int_0^\gamma v_z dx dy \\ &= \int_0^W \int_0^\gamma \left[\frac{\rho g \cos(\delta)}{2\mu} (y^2 - 2\gamma y) + v_B \right] dx dy \end{aligned}$$

Donde al evaluar la doble integral

$$\dot{V} = \gamma \cdot W \cdot v_B - \frac{\rho g \cos(\delta)}{3\mu} \gamma^3 W \quad (5.101)$$

La velocidad como una función es de poca practicidad, ya que esta va cambiando de acuerdo a la distancia en que se quiere evaluar, por ello se recomienda usar una **velocidad promedio** $[\langle v_y \rangle]$. Para determinar se parte de la ecuación (5.99), despejando la variable v_z y quedando

$$\langle v_z \rangle = \frac{\dot{Q}}{A_f}$$

O también se puede expresar como

$$\langle v_y \rangle = \frac{\int_0^W \int_0^\gamma v_z dx dy}{\int_0^W \int_0^\gamma dx dy}$$

Resolviendo las múltiples integrales

$$\begin{aligned} \langle v_y \rangle &= \frac{\int_0^W \int_0^\gamma \left[\frac{\rho g \cos(\delta)}{2\mu} (y^2 - 2\gamma y) + v_B \right] dx dy}{\int_0^W \int_0^\gamma dx dy} \\ &= \left(\gamma \cdot W \cdot v_B - \frac{\rho g \cos(\delta)}{3\mu} \gamma^3 W \right) (\gamma \cdot W)^{-1} \end{aligned}$$

Simplificando

$$\langle v_z \rangle = v_B - \frac{\rho g \cos(\delta)}{3\mu} \gamma^2 \quad (5.102)$$

El último parámetro a evaluar es el **flujo másico** $[\dot{m}]$, el cual se obtiene a partir de la ecuación (1.34)

$$\dot{m} = \dot{V} \cdot \rho = \left[v_B - \frac{\rho g \cos(\delta)}{3\mu} \gamma^2 \right] \gamma \cdot W \cdot \rho \quad (5.103)$$

Tabla 5.3.1: Formulas ocupadas durante el desarrollo del Ejemplo 1, en coordenadas rectangulares para una velocidad en z .

Balance general	$LW\tau_{yz} _y - LW\tau_{yz} _{y+\Delta y} - LW\Delta y\rho g \cos(\delta) = 0$
Ley de viscosidad de Newton	$\tau_{yz} = -\mu \frac{dv_z}{dy}$
Velocidad media	$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^W \int_0^\gamma v_z dy dx}{\int_0^W \int_0^\gamma dy dx}$
Caudal	$\dot{V} = \int_0^W \int_0^\gamma v_z dy dx$
Flujo másico	$\dot{m} = \int_0^W \int_0^\gamma v_z \rho dy dx$

5.3.1. Valores reales

Una vez obtenido las ecuaciones que permiten calcular el flujo másico y laminar, se procede a determinar cuantos *skimmer* se requieren para mitigar el daño del crudo. Recordando que el ángulo de inclinación es de 30° respecto a la horizontal, la longitud de la cinta es de 1.2 m , el ancho es de 0.8 m . El crudo pesado a recuperar tiene una densidad de 12 grados API [67] y una viscosidad de 900 cP [67] [68]. Antes de operar el *skimmer*, se hace una prueba rápido para saber la velocidad que ejerce y además cual es el espesor de película del crudo. El operador menciona que la velocidad de la banda es 1.8 m/s , siendo una velocidad baja para que el petroleo no se derrame por los exteriores, y viendo la marca del crudo en las paredes, se mide con un vernier y se estima que aproximadamente es de $1''$ la película de crudo. Determinar además el número de Reynolds del fluido. Suponer que la temperatura a la que se encuentra el problema es de 4°C y es constante.

1. Se debe determinar la densidad del crudo, por lo que es necesario transformar los grados *API* a densidad de kg/m^3 . Aplicando la definición de los **grados API**, que son una medida de densidad que, en comparación con el agua a temperaturas iguales. Los grados *API* siguen la siguiente formula

$$S_f = \frac{141.5}{^\circ\text{API} + 131.5} \quad (5.104)$$

Donde S_f es la gravedad específica, siendo adimensional. Sustituyendo los $^\circ\text{API}$ del problema en la (5.104) da $S_f = 0.9861$. Implementado la definición de **gravedad específica** que se refiere directamente a la relación que existe entre una densidad de una sustancia y la densidad de una

sustancia de referencia, siendo esta última, por lo general, suele ser el agua a 4 °C. Esta definición permite generar la siguiente ecuación

$$S_f = \frac{\rho_f}{\rho_{\text{agua}, 4^\circ\text{C}}} \quad (5.105)$$

Donde ρ_f sera la densidad del fluido, en kg/m^3 ; $\rho_{\text{agua}, 4^\circ\text{C}}$ siendo la densidad del agua a 4 °C de 1000 kg/m^3 ; Evaluando a (5.105) se obtiene que $\rho_f = 986.1 kg/m^3$.

2. Para determinar el número de Re , se debe obtener la velocidad promedio del sistema, por ello que se ocupa la ecuación (5.102). Donde se evalúa haciendo el análisis dimensional correspondiente. Hay que tener cuidado con el ángulo de inclinación, ya que los 30°C es respecto a la horizontal y debe ser el ángulo respecto a la vertical, por lo tanto será un ángulo de 60°C.

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle &= 1.8 \frac{m}{s} - \frac{(986.1 kg/m^3)(9.81 m/s^2) \cos(60)}{3[0.9 kg/(s \cdot m)]} (0.0254 m)^2 \\ &= 0.6442 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

3. Para a obtener el flujo másico parte de la ecuación (5.103)

$$\dot{m} = \left(\gamma \cdot v_B - \frac{\rho g \cos \theta}{3\mu} \gamma^3 \right) \rho W$$

4. sustituyendo los valores y haciendo el análisis dimensional

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \left[\left(1.8 \frac{m}{s} \right) - \frac{(986.1 kg/m^3) (9.81 m/s^2) \cos(60)}{3[0.9 kg/(s \cdot m)]} (0.0254 m)^2 \right] (0.0254 m) (986.1 kg/m^3) (0.8 m) \\ &= 12.9092 \frac{kg}{s} \end{aligned}$$

5. Para determinar cuantos *skimmer* es necesario determinar cuanto tiempo recogería las 66000 toneladas un solo *skimmer*, para eso se debe recordar la definición del flujo másico, donde se dice que es la transferencia de cantidad de materia (m) por unidad de tiempo (t) o

$$\dot{m} = \frac{m}{t}$$

Despejando la variable tiempo

$$t = \frac{m}{\dot{m}}$$

6. Sustituyendo el flujo másico y la cantidad de materia por el problema planteado

$$\begin{aligned} t &= \frac{66000 \cdot 10^3 kg}{12.9092 kg/s} \\ &= 5.1126 \cdot 10^6 s \\ &= 8.45 \text{ semanas} \\ &\approx 8 \text{ semanas} \end{aligned}$$

Encontrando que un sólo *skimmer* puede recoger las 66000 toneladas en un lapso de aproximadamente 8 semanas y media, si trabaja sin parar. Necesitando de 8 a 9 *skimmer* para recuperar todo el crudo en un lapso de una semana, teniendo claro que opera en régimen laminar y sobre todo que el crudo es sumamente viscoso.

7. Para obtener Re , mediante (4.18). Para ello hay que hacer una mención, es que el Re descrito en la tabla 4.2.1 para flujo laminar es aplicable solo para tuberías, por ello cuando el fluido esta de forma descendente por una placa $Re < 20$ [65]. Para flujo turbulento será $Re \leq 1500$ y transitorio $20 \leq Re < 1500$ [1]

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\gamma \cdot v_z \cdot \rho}{\mu} \\ &= \frac{(0.0254 \text{ m})(0.6442 \text{ m/s})(986.1 \text{ kg/m}^3)}{0.9 \text{ kg/(s} \cdot \text{m)}} \\ &= 17.928 \end{aligned}$$

El flujo corresponde a un flujo laminar para una placa inclinada.

5.3.2. Solución numérica

Parte numérica para el desarrollo del problema.

1. Ocupando la ecuación (5.96), para encontrar la solución particular de la ecuación.

```
vz = dsolve('mu*D2vz = p*g*cosd(del)', 'vz(0)=vB', 'Dvz(gamma)=0', 'y')
```

```
vz =
```

$$vB + (g \cdot p \cdot y^2 \cdot \cos(\text{del})) / (2 \cdot \mu) - (g \cdot p \cdot y \cdot \cos(\text{del}) \cdot \gamma) / \mu$$

Siendo la misma solución que se obtiene de forma analítica, (5.98).

2. Se introduce ahora los datos del problema y aparte, se debe encontrar la densidad de la sustancia, mediante (5.104) y (5.105).

```
%Datos
API = 12;%Grados API [°API]
p_agua = 1000;%Densidad del agua [kg/m^3]
g = 9.81;%Gravedad [m/s2]
mu = 900/1000;%Viscosidad [kg/m-s]
vB = 1.8;%Velocidad de la banda [m/s]
gamma = 2.54/100;%Espesor de la película [m]
del = 60;%Inclinación de banda [°]
co = 1.2;%Largo de la banda [m]
W = 0.8;%Anchura de la banda [m]
ma = 66000e3;%Crudo perdido [kg]

%Determinación de la densidad del crudo.
S_f = 141.5/(API+131.5);
p = S_f*p_agua;
```

3. Se procede a determinar el caudal de la ecuación, mediante integrales dobles.

```
%Determinación del caudal
syms y x
V = vB + (g*p*y^2*cosd(del))/(2*mu) - (g*p*y*cosd(del)*gamma)/mu;
V = int(V,x,0,W);
V = double(int(V,y,0,gamma))
---
V =
    0.0131
```

4. Luego, se determina del flujo másico.

```
%Determinación del flujo másico
m = V*p
---
m =
    12.9096
```

5. Seguido, la halla la velocidad media.

```
%Determinación del velocidad
d = 1;
d = int(d,x,0,W);
d = double(int(d,y,0,gamma));
v_z = V/d
---
v_z =
    0.6443
```

6. Encontrar cuantos *skimmer* se necesitan para recuperar el crudo en una semana. Se ocupa el comando round, para redondear a números enteros.

```
%Cuántos skimmer se necesitan
t = ma/m
t = t/(60*60*24*7);
n = round(t*1/1)
---
n =
    8
```

7. Encontrando el número de *Re*. Recordando que $Re < 20$ [1] [65] para fluido laminar descendente por una placa.

```
%Número de Re
Re = (gamma*p*v_z)/mu

%Qué flujo corresponde
if Re<20
    S = 'Flujo Laminar'
```

```

else
    S = 'Flujo No Laminar'
end
---
Re =
    17.9300
S =
    'Flujo Laminar'

```

8. Por ultimo, se grafica el problema. Donde la velocidad de la banda ira variando de 0 hasta 2 m/s comparado con el número de Re . En vez de ocupar un valor fijo a $v_B = 1.8$, lo modificara como un vector fila de 0 a 2

```

vB = [0:0.01:2];%Velocidades de la banda [m/s]

plot(vB,Re)
xlim([0 2])

```

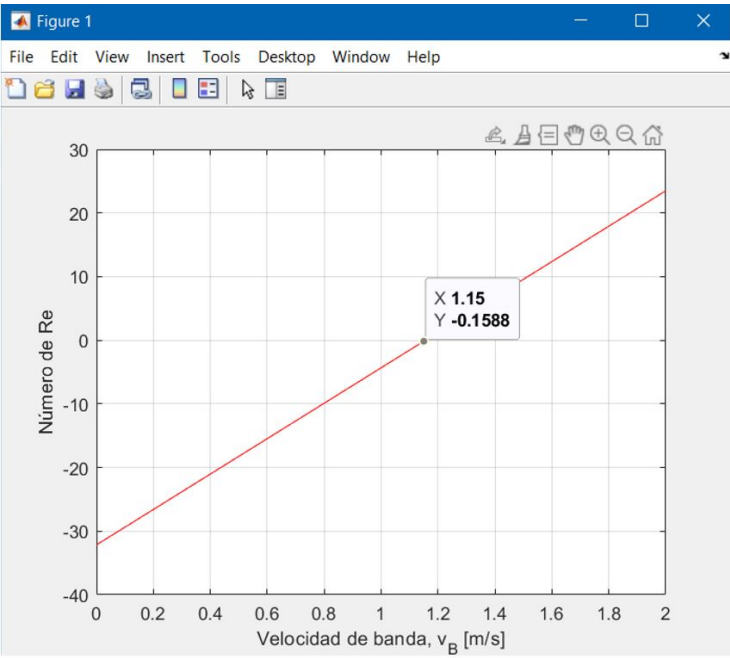


Figura 5.3.9: Variación de velocidad de la banda respecto al número de Re .

Como se aprecia en la gráfica 5.3.9, cuando la velocidad de la banda es cercana a 1.15 m/s el número de Re da 0, si la velocidad aumenta hasta 1.8 m/s el número de Re da valores positivos. Pero que ocurre cuando la velocidad es menor a 1.15 m/s , el número de Re da valores negativos. La cual su explicación es debido a que la velocidad de la banda debe superar la velocidad de caída del fluido por acción de su propio peso. Por ello cuando la velocidad de la banda supera a la del caído del fluido (movimiento libre) en la interfase líquido-gas se considera la velocidad 0. Esto se ve más ejemplificado en la figura 5.3.8.

5.4. Diferencia de presiones

Ejemplo No. 4 En la industria petroquímica el corazón es la operación unitaria llamada **destilación**. Al hablar de destilación pueden existir diferentes tipos, pero se hablara específicamente de la **destilación fraccionaria**, ya que permite separar diferentes mezclas de líquidos, en función de las diferencias en las volatilidades. Para llevar este acabo este tipo de proceso en la industria petroquímica se ocupan **columnas de fraccionamiento industrial**, las cuales permiten separar el crudo, debido a que es una mezcla compleja de varios componentes dentro de un rango relativamente pequeño de puntos de ebullición. Las columnas de destilación industrial pueden alcanzar 80 metros de altura y más de 6 metros de diámetro. Todo esto se puede ver representado en la figura 5.4.1.



Figura 5.4.1: Columnas de fraccionamiento industriales típicas [69].

La destilación es uno de los procesos de separación más comunes e intensivos en energía. Las torres de destilación industrial usualmente se operan en un estado **estacionario continuo**. Estas columnas de fraccionamiento el producto *más ligero* se obtiene por la parte superior, mientras que el *más pesado* por la parte inferior. Las columnas de fraccionamiento industrial utilizan reflujo externo para lograr una mejor separación de los productos, tal como se aprecia en la imagen 5.4.2.

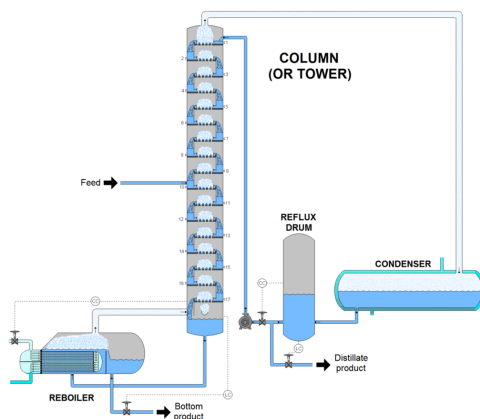


Figura 5.4.2: Vista completa de una columna de destilación [70].

Para este ejemplo se centrara en la parte de recirculado, sí se observa bien la figura 5.4.2, en medio del *reflux drum* y la *column* se encuentra una bomba de desplazamiento positivo conectada con una tubería vertical que lleva el reflujo del condensado. En ninguna destilación se obtiene el 100 % de producto, siempre habrá impurezas, es por ello que en los cálculos para el diseño de la columna fraccionaria arroja que en

una de los productos se obtiene un elevado porcentaje de un crudo sumamente pesado, por ello se debe *recircular*, para no afectar el rendimiento del producto. Para el recirculado al ingeniero a cargo se le pide determinar cuantos kg/s transportaría el recirculado. Para ello se considerara una flujo laminar y el crudo como un fluido Newtoniano. Para la altura de la tubería vertical por el momento le corresponderá la literal L . Considerando además que las condiciones de estudio son constantes, exceptuando la presión, ya que para hacer mover el fluido hacia arriba debe aplicarse una **fuerza de empuje**, existiendo una presión de entrada P_0 y una de salida P_1 , donde $P_0 > P_1$ para hacer mover al fluido. Representando el caso de estudio en el esquema 5.4.3.

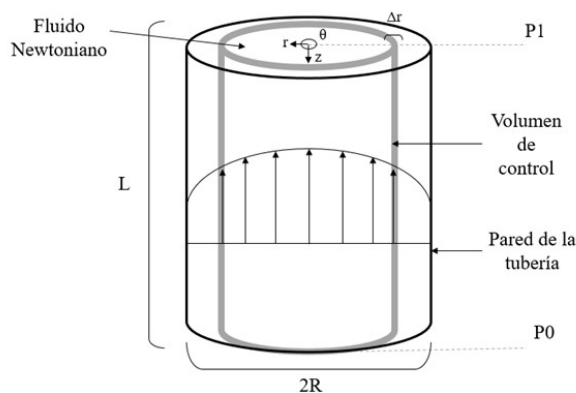


Figura 5.4.3: Tubería por donde se transporta el fluido, debido a una diferencias de presiones.

Para este caso ya no se demostrara como se obtiene el volumen de control, ya que es similar al *ejemplo 2* de esta sección. Para resolver el problema primero se deben mencionar las condiciones de estudio, las cuales serán en un estado estacionario, isotérmico, con variables constante como la temperatura, viscosidad y concentración. Posteriormente se establecerá el eje de coordenadas que serán cilíndricas y se ubicara en la interfase líquido-líquido, como en la figura 5.4.4.

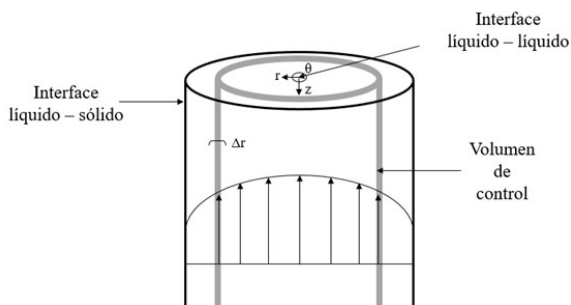


Figura 5.4.4: Dimensiones y establecido el volumen de control del tubo a estudiar.

El siguiente paso, es determinar la ecuación de balance de movimiento. Para esto se ocupa de base la ecuación (5.34) la cual corresponde a dicho balance

$$\rho \cdot A_f \cdot v_j^2 \Big|_{(j_0)} - \rho \cdot A_f \cdot v_j^2 \Big|_{(i_1)} + A_s \cdot \tau_{ij} \Big|_i - A_s \cdot \tau_{ij} \Big|_{(i+\Delta i)} + P_0 \cdot A_f - P_1 \cdot A_f \pm \rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.106)$$

Se debe simplificar la ecuación (5.106), donde los dos términos que se pueden eliminar serían con respecto a la velocidad inicial y final a nivel molecular, ya que como se ha venido mencionado las capas de moléculas se mueven a una misma velocidad al evaluar un pequeño volumen de control, además de que el área por

la cual fluye el fluido, A_f , es constante, por lo tanto $\rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(j_0)} = \rho \cdot A_f \cdot v_j^2|_{(j_1)}$.

$$A_s \cdot \tau_{ij}|_i - A_s \cdot \tau_{ij}|_{(i+\Delta i)} + P_0 \cdot A_f - P_1 \cdot A_f \pm \rho \cdot V_{cont} \cdot g = 0 \quad (5.107)$$

Hasta el momento los parámetros obtenidos son

Definición	Variable
Velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la entrada.	$A_s \cdot \tau_{ij} _i$
Velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la salida.	$A_s \cdot \tau_{ij} _{(i+\Delta i)}$
Fuerza de gravedad que actúa sobre el volumen de control en coordenadas cilíndricas.	$\rho \cdot V_{cont} \cdot g$
Fuerza de entrada al sistema que actúa por área de sección	$P_0 \cdot A_f$
Fuerza de salida al sistema que actúa por área de sección	$P_1 \cdot A_f$

Retomando el ejemplo 2, ya que las deducciones antes vistas son idénticas a estas mismas, lo único que cambia sería que en el anterior caso tenía un ángulo de inclinación prolongado. La primera deducción es el **esfuerzo cortante**, ya que el fluido tiene la misma dirección hacia el eje z y la dirección en que ocurre el movimiento de las capas moleculares ocurre a lo largo del eje r , por lo tanto $j = z$ y $i = r$. La segunda deducción sería el área de sección transversal, A_s , que se tomaran las ecuaciones (5.77) y (5.78), que son para el A_s para la velocidad de entrada y salida respectivamente. Por último, será el volumen de control de la **fuerza de gravedad**, V_{cont} , la cual se deduce partir de la ecuación (5.80) y el signo \pm que trata del esfuerzo cortante, será negativo, ya que el fluido va en contra de la gravedad. Quedando la ecuación (5.107) y la tabla de condiciones como

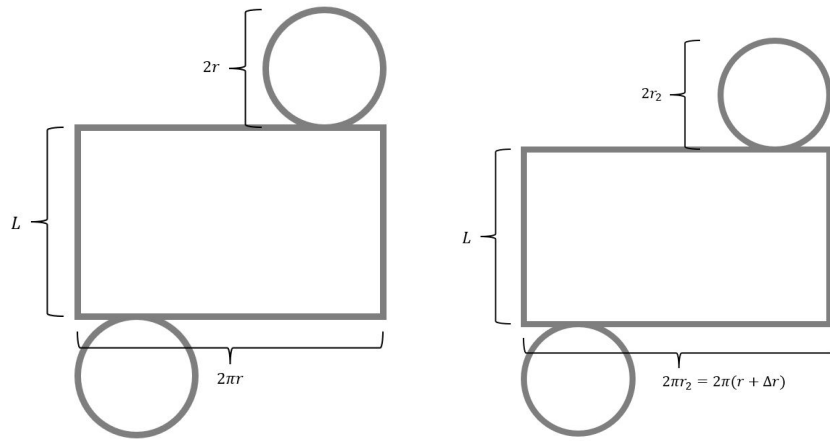
Definición	Variable
Velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la entrada.	$2\pi \cdot L \cdot r \cdot \tau_{rz} _r$
Velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la salida.	$2\pi \cdot L \cdot (r + \Delta r) \cdot \tau_{rz} _{(r+\Delta r)}$
Fuerza de gravedad que actúa sobre el volumen de control en coordenadas cilíndricas.	$\rho \cdot \pi [2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2] L \cdot g$

Fuerza de entrada al sistema que actúa por área de sección	$P_0 \cdot A_f$
Fuerza de salida al sistema que actúa por área de sección	$P_1 \cdot A_f$

$$2\pi \cdot L \cdot r \cdot \tau_{rz}|_r - 2\pi \cdot L \cdot (r + \Delta r) \cdot \tau_{rz}|_{(r+\Delta r)} + P_0 \cdot A_f - P_1 \cdot A_f - \rho \cdot \pi [2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2] L \cdot g = 0 \quad (5.108)$$

Para el área por la que el fluye el fluido, A_f , se parte de la ecuación del área de un círculo, ya que el fluido entra y/o sale por ahí, ya que al área es la misma para ambos casos.

$$A_{circ} = \pi r^2 \quad (5.109)$$



(a) Dimensiones del cilindro interno de nuestro volumen de control. (b) Dimensiones del cilindro externo de nuestro volumen de control.

Figura 5.4.5: Desdoblamiento del volumen de control.

Se debe ver la figura 5.4.5, que son las dimensiones del volumen de control, donde tendrá un diámetro interno y uno externo, entonces para encontrar el área de dicha área será una diferencia entre el radio exterior menos el inferior, por lo tanto la ecuación (5.109) quedaría como

$$A_{circ} = \pi (r_2 - r)^2$$

O también como

$$A_f = \pi [(r + \Delta r) - r]^2 \quad (5.110)$$

Simplificando

$$\begin{aligned} A_f &= \pi [(r + \Delta r) - r]^2 \\ &= \pi [r^2 + 2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2 - r^2] \\ &= \pi [2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2] \end{aligned}$$

La tabla de condiciones y la ecuación (5.108) quedaría finalmente como

Definición	Variable
Velocidad de entrada de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la entrada.	$2\pi \cdot L \cdot r \cdot \tau_{rz} _r$
Velocidad de salida de cantidad de movimiento por transporte molecular . La fuerza cortante por área unitaria a la salida.	$2\pi \cdot L \cdot (r + \Delta r) \cdot \tau_{rz} _{(r+\Delta r)}$
Fuerza de gravedad que actúa sobre el volumen de control en coordenadas cilíndricas.	$\rho \cdot \pi [2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2] L \cdot g$
Fuerza de entrada al sistema que actúa por área de sección	$\pi [2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2] P_0$
Fuerza de salida al sistema que actúa por área de sección	$\pi [2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2] P_1$

$$2\pi \cdot L \cdot r \cdot \tau_{rz}|_r - 2\pi \cdot L \cdot (r + \Delta r) \cdot \tau_{rz}|_{(r+\Delta r)} + \pi [2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2] P_0 - \pi [2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2] P_1 - \rho \cdot \pi [2r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2] L \cdot g = 0 \quad (5.111)$$

Pasando del lado derecho las fuerzas externas que actúan sobre el sistema, siendo la presión y la gravedad, y multiplicando por $-1/(2\pi L\Delta r)$

$$-\frac{1}{2\pi L\Delta r} \{2\pi L r \tau_{rz}|_{r+\Delta r} - 2\pi L (r + \Delta r) \tau_{rz}|_r = -\pi [2r\Delta r + (\Delta r)^2] P_0 + \pi [2r\Delta r + (\Delta r)^2] P_1 + \rho\pi [2r\Delta r + (\Delta r)^2] Lg\}$$

$$\frac{2\pi L (r + \Delta r) \tau_{rz}|_{r+\Delta r} - 2\pi L r \tau_{rz}|_r}{2\pi L\Delta r} = \frac{\pi [2r\Delta r + (\Delta r)^2] P_0 - \pi [2r\Delta r + (\Delta r)^2] P_1}{2\pi L\Delta r} + \frac{\rho\pi [2r\Delta r + (\Delta r)^2] Lg}{2\pi L\Delta r}$$

$$\frac{(r + \Delta r) \tau_{rz}|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz}|_r}{\Delta r} = \frac{P_0}{L} r + \frac{P_0}{L} \Delta r - \frac{P_1}{L} r - \frac{P_1}{L} \Delta r - \rho g r - \rho g \Delta r$$

O también como

$$\frac{(r + \Delta r) \tau_{rz}|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz}|_r}{\Delta r} = \frac{P_0}{L} r + \frac{P_0}{L} \Delta r - \frac{P_1}{L} r - \frac{P_1}{L} \Delta r - \rho g r - \rho g \Delta r \quad (5.112)$$

Ocupamos la definición de la primera derivada, por lo cual se obtiene cuando $\lim_{\Delta r \rightarrow 0}$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{(r + \Delta r) \tau_{rz}|_{r+\Delta r} - r \tau_{rz}|_r}{\Delta r} = \frac{P_0}{L}r + \frac{P_0}{L}\Delta r - \frac{P_1}{L}r - \frac{P_1}{L}\Delta r - \rho g r - \rho g \Delta r$$

$$\frac{dr\tau_{rz}}{dr} = \frac{P_0}{L}r - \frac{P_1}{L}r - r\rho g$$

Simplificamos la expresión anterior haciendo un cambio de nomenclatura. Para este cambio, se tomara la expresión de la derecha de la igualad, donde primero se factoriza el valor de r .

$$\left(-\rho g + \frac{P_0}{L} - \frac{P_1}{L}\right)r$$

Posteriormente se realiza una suma de fracciones

$$\left(\frac{-\rho g L + P_0 - P_1}{L}\right)r$$

Para el numerador donde está el producto $\rho g L$ se puede ver de esta manera, en donde la longitud L es una diferencia entre la longitud final (L_1) menos la longitud inicial (L_0), ya que el el fluido se transporta de un punto A a un punto B . Para el caso de la densidad (ρ) y la gravedad (g) se mantiene constante. Por lo cual, la ecuación anterior se expresa como

$$\left[\frac{-\rho g(L_1 - L_0) + P_0 - P_1}{L}\right]r = \left(\frac{-\rho g L_1 + \rho g L_0 + P_0 - P_1}{L}\right)r \quad (5.113)$$

A la suma de la Presión (P) más el producto de la densidad, la longitud y la gravedad ($\rho g L$) se le conoce como **Presión hidrostática** (\mathcal{P}) [1]

$$\mathcal{P} = P + \rho g L \quad (5.114)$$

Aplicando en la expresión (5.113) el cambio de variable de la expresión (5.114)

$$\left(\frac{-\rho g L_1 - P_1 + \rho g L_0 + P_0}{L}\right)r \equiv \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{L}r$$

Sustituyendo la expresión obtenida en la ecuación (5.112)

$$\frac{dr\tau_{rz}}{dr} = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{L}r$$

Sustituyendo a τ_{rz} por la ley de viscosidad de Newton (4.16). Para desarrollar la ecuación diferencial de segundo orden y resolverla

$$\frac{d}{dr} \left(-\mu r \frac{dv_z}{dr}\right) = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{L}r$$

$$-\mu \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr}\right) = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{L}r$$

$$r \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{dv_z}{dr} = -\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{\mu L}r$$

$$v_z = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{4\mu L}r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Aplicando la primera condición de frontera para la **interfase sólido-fluido**

$$v_z = 0 \quad r = R \quad v_z(R) = 0$$

Resolviendo

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{4\mu L} R^2 + C_1 \ln R + C_2 \\
 C_2 &= \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{4\mu L} R^2 - C_1 \ln R \\
 v_z &= -\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{4\mu L} r^2 + C_1 \ln r + \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{4\mu L} R^2 - C_1 \ln R \\
 v_z &= \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] + C_1 \ln \frac{r}{R}
 \end{aligned}$$

Aplicando la segunda condición de frontera para la **interfase líquido-líquido**, conocida también como **condición de simetría**

$$v_z = v_0 \quad r = 0 \quad v'_z(0) = 0$$

Evaluando

$$\begin{aligned}
 v'_z &= \frac{C_1}{r} - \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{2\mu L} r \\
 C_1 &= v'_z \cdot r + \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{2\mu L} r^2 \\
 C_1 &= (v_0)(0) + \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{2\mu L} (0)^2 \\
 C_1 &= 0 \\
 v_z &= \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación que define el sistema es

$$v_z(r) = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (5.115)$$

La **velocidad máxima** se da en el centro de la tubería, por lo tanto $r = 0$ y la ecuación (5.115) será

$$v_{z,max} = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1)R^2}{4\mu L} \quad (5.116)$$

Para determinar a **velocidad media**, se ocupa la siguiente ecuación

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\theta} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\theta} \int_0^R r dr d\theta} \quad (5.117)$$

Donde la doble integral en el denominador de la primera línea es el área de la sección transversal de la película. La doble integral en el numerador es el caudal volumétrico que pasa a través de un elemento diferencial de la sección transversal $v_z r dr d\theta$, integrado sobre toda la sección transversal, en otras palabras, es análoga de la ecuación (1.31), donde se despeja la velocidad (v_z) que será igual al caudal (\dot{V}) dividido entre el área de sección. Donde al evaluarse se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \langle v_z \rangle &= \frac{\int_0^{2\theta} \int_0^R \left\{ \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta}{\int_0^{2\theta} \int_0^R r dr d\theta} \\
 \text{Numerador} &\Rightarrow \int_0^{2\theta} \int_0^R \left\{ \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta = 2 \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{16\mu L} \theta R^4 \\
 \text{Denominador} &\Rightarrow \int_0^{2\theta} \int_0^R r dr d\theta = \theta \cdot R^2
 \end{aligned}$$

$$\langle v_z \rangle = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{8\mu L} \theta R^4 \right) (\theta \cdot R^2)^{-1} = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{8\mu L} R^2 \quad (5.118)$$

El siguiente parámetro a determinar será el **caudal** $[\dot{V}]$, que se obtiene evaluado el perfil de velocidad por el área de sección transversal, que sera una doble integral por donde esta fluyendo el fluido. En este caso como el fluido viaja a través de la coordenada z , la doble integral sera con respecto a r y θ

$$\dot{V} = \int_0^{2\theta} \int_0^R v_z r dr d\theta = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{8\mu L} \theta R^4 \quad (5.119)$$

El último parámetro a evaluar es el **flujo másico** $[\dot{m}]$, el cual se obtiene integrando la sección transversa de la velocidad media multiplicado por la densidad o de una manera más sencilla, es que cuando ya se obtiene el flujo volumétrico se multiplica únicamente por la densidad

$$\dot{m} = \int_0^{2\theta} \int_0^R v_z \rho r dr d\theta = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{8\mu L} \theta \rho R^4 \quad (5.120)$$

Tabla 5.4.3: Formulas ocupadas durante el desarrollo del Ejemplo 2, en coordenadas cilíndricas para una velocidad en z .

Balance general	$\begin{aligned} 2\pi L r \tau_{rz} _r - 2\pi L (r + \Delta r) \tau_{rz} _{r+\Delta r} - \\ 2\pi L r \Delta r \rho g + 2\pi r \Delta r P_0 - 2\pi r \Delta r P_1 = 0 \end{aligned}$
Ley de viscosidad de Newton	$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$
Velocidad media	$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\theta} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\theta} \int_0^R r dr d\theta}$
Caudal	$\dot{V} = \int_0^{2\theta} \int_0^R v_z r dr d\theta$
Flujo másico	$\dot{m} = \int_0^{2\theta} \int_0^R v_z \rho r dr d\theta$

5.4.1. Valores reales

Se pide determinar cuántos kg/s transportaría la tubería de tipo *NU T&C*, ya que este tipo de tubería es usada para el transporte de petróleo y gas, así como en perforación [71]. Determinado las ecuaciones que rigen el problema, solo queda sustituir los valores reales. La tubería que se esta ocupando tiene un diámetro externo de $4 \frac{1}{2}''$, con un *NU T&C* de 15.2, la tubería cuenta con un espesor de $0.337''$ y una longitud de 6 m . Las propiedades del crudo son 21° API , la temperatura que se encuentra el crudo condensado es de 100° F y según reportes de laboratorio indican que tiene una viscosidad a dicha temperatura de 320 ssu [61]. Las propiedades del crudo son las de llamado Maya [61]. La bomba de desplazamiento positivo que se esta ocupando para transporta el fluido hacia la parte superior se programa a 3.5 atm y se estima que la presión de salida es de 1 atm .

1. Lo primero es encontrar la densidad de la sustancia, partiendo de la ecuación (5.104)

$$\begin{aligned} S_f &= \frac{141.5}{API + 131.5} \\ &= 0.9278 \end{aligned}$$

2. Siguiendo el paso es ocupar la ecuación (5.105)

$$\begin{aligned} S_f &= \frac{\rho_f}{\rho_{agua, 4^\circ C}} \\ \rho_f &= S_f \cdot \rho_{agua, 4^\circ C} \\ \rho_f &= (0.9278) \left(1000 \frac{kg}{m^3} \right) \\ \rho_f &= 927.8 \frac{kg}{m^3} \end{aligned}$$

3. Obtenido la densidad del crudo, se procede a determinar la viscosidad dinámica, partiendo de la viscosidad cinemática. Para ello hay que remitirse a la tabla 5.2.2, donde de las dos ecuaciones presentadas, se tomara la que se encuentra en la fila I, ya que el crudo se considera pesado

$$\begin{aligned} \nu &= 0.0022 \cdot (ssu) \\ &= 0.0022 \cdot (320) \\ &= 0.704 \text{ stokes} [=] cm^2/s \\ &= 7.04 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s} \end{aligned}$$

4. Para determinar la viscosidad dinámica se ocupa la ecuación (4.19), donde se despejara la variable ρ

$$\begin{aligned} \mu &= \nu \cdot \rho \\ &= \left(7.04 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s} \right) \left(927.8 \frac{kg}{m^3} \right) \\ &= 0.6531 \frac{kg}{m \cdot s} \end{aligned}$$

5. Para encontrar el radio interno del problema va a ser el cociente de la diferencia de diámetro exterior menos el doble producto del espesor dividido entre todo entre dos

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} [4.5'' - 2(0.337'')] \\ &= 1.913'' \\ &= 0.0485 m \end{aligned}$$

6. Para determinar la presión hidrostática, es mediante la ecuación (5.114)

$$\mathcal{P}_0 = P_0 + \rho g L_0$$

$$\mathcal{P}_0 = 3.5464 \cdot 10^5 Pa + \left(962.4 \frac{kg}{m^3} \right) \left(9.81 \frac{m}{s^2} \right) (0)$$

$$\mathcal{P}_0 = 3.5464 \cdot 10^5 Pa$$

$$\mathcal{P}_1 = P_1 + \rho g L_1$$

$$\mathcal{P}_1 = (\Delta P + P_0) + \rho g L_1$$

$$\mathcal{P}_1 = (1.0132 \cdot 10^5 Pa) + \left(962.4 \frac{kg}{m^3} \right) \left(9.81 \frac{m}{s^2} \right) (6 m)$$

$$\mathcal{P}_1 = 1.5796 \cdot 10^5 Pa$$

7. La velocidad del fluido, se ocupa la ecuación (5.118)

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle &= \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1)}{8\mu L} R^2 \\ &= \frac{(3.5464 \cdot 10^5 Pa - 1.5796 \cdot 10^5 Pa)}{8 [0.6531 kg/(m \cdot s)] (6 m)} (0.0485 m)^2 \\ &= 14.7578 m/s \end{aligned}$$

8. Se procede a ocupar (5.120) para determinar el flujo másico

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{8\mu L} \theta \rho R^4 \\ &= \frac{(3.5464 \cdot 10^5 Pa - 1.5796 \cdot 10^5 Pa)}{8 [0.6531 kg/(m \cdot s)] (6 m)} \pi \left(965.8703 \frac{kg}{m^3} \right) (0.0485 m)^4 \\ &= 105.3355 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

5.4.2. Solución numérica

1. Cuando se ocupa el comando `dsolve`, hay ciertas ecuaciones que al resolverlas sale [empty sym]. Siendo el caso para la ecuación (??), que al programar da

```

vz = dsolve(' -r*D2vz-Dvz=(PP0-PP1)/(mu*L)*r',
            ' vz(R)=0', ' Dvz(0)=v0', ' r')
----
vz0 =
[ empty sym ]
```

Dicho resultado indica que hay variables simbólicas vacías o que en ocasiones no llegan a converger, por ello se debe tomar otro camino para hallar la solución particular del problema.

2. Para hallar la solución, se ocupa de nuevo el comando `dsolve`, en una ventana de editor, pero sin introducir las condiciones de frontera, para obtener la solución general de la EDO. Posteriormente se nombra todas las variables simbólicas que se ocuparan. Pasando a resolver la ecuación diferencial, aplicando el primer valor de frontera, donde se pondrá `Ec1 = vz == vz0`, el cual indica que `vz`

sera idéntico a vz_0 , con la finalidad de poder ocupar el comando `solve(Ec1,C2)`, que permite despejar la constante C_2 . Luego se pondrá `C21 = subs(C21,r,R)`, el cual sub permite hacer un cambio de variable, en este caso sustituyendo a r (variable viaje) por R (nueva variable), así mismo para `C21 = subs(C21,vz,0)`. Se termina con `C21 = subs(C21,vz,0)`, cumpliendo la primera condición de frontera. Con esto se obtiene el valor de la constante C_2 , la cual se nombro como `C21`. Se escribe el código `vz1 = subs(vz0,C2,C21)`, el cuál esta indicando que se esta cambiando la variable `C2` por la variable `C21`, siendo la solución de la constante C_2 , en la ecuación obtenida por `vz0` y se nombra nuevamente como `vz1`. Para cumplir la segunda condición, se tiene que *derivar* la función obtenida de la primera condición de frontera `dvz1 = diff(vz1,'r')` y repetir el mismo procedimiento antes mencionado para obtener la ecuación particular.

```

clc
clear all
vz0 = dsolve('-r*D2vz-Dvz=(PP0-PP1)/(mu*L)*r','r');

syms C2 C1 r PP0 PP1 L mu R vz dvz v0

Ec1 = vz == vz0;
C21 = solve(Ec1,C2);
%Valores en la frontera
C21 = subs(C21,r,R);
C21 = subs(C21,vz,0);

%Ecuación nueva generada
vz1 = subs(vz0,C2,C21);

%Segunda derivada
dvz1 = diff(vz1,'r');
Ec2 = dvz == dvz1;
C11 = solve(Ec2,C1);
%Valores en la frontera
C11 = subs(C11,r,0);
C11 = subs(C11,dvz,v0);

%Ecuación nueva generada
vz2 = subs(vz1,C1,C11)
---
vz2 =
    ((PP0 - PP1)*R^2)/(4*L*mu) - (r^2*(PP0 - PP1))/(4*L*mu)

```

Como se llega a apreciar, es el mismo resultado que el obtenida por (5.115).

3. Por ultimo, es hallar la velocidad media, flujo másico y determinar si es flujo laminar o turbulento, todo en una misma ventana de editor.

```

clc
clear all
%Datos
API = 21;%Grados API [°API]
p_agua = 1000;%Densidad del agua [kg/m^3]
g = 9.81;%Gravedad [m/s2]
De = 4.5;%Diametro externo ["]
e = 0.337;%Espesor de la tubería ["]
L = 6;%Altura de la tubería [m]
P0 = 3.5*101325;%Presión inicial [Pa]
P1 = 1*101325;%Presión final [Pa]
nu = 320;

%Determinación de la densidad del crudo.
S_f = 141.5/(API+131.5);
p = S_f*p_agua;

%Determinación de viscosiad dinamica
nu = 0.0022*nu/1000;
mu = nu*p;

%Determinación del radio [m]
Di = (De-2*(e))*2.54/100;%Diametro interno [m]
R = Di/2;

%Presión hidrostática
PP0 = P0+p*g*0;%Inicial
PP1 = P1+p*g*L;%Final

%Velocidad
syms r t
vz2 = ((PP0 - PP1)*R^2)/(4*L*mu) - (r^2*(PP0 - PP1))/(4*L*mu);
vz2 = int(vz2*r,t,0,2*pi);
vz2 = int(vz2,r,0,R);
d = 1;
d = int(d*r,t,0,2*pi);
d = int(d,r,0,R);
Velocidad = double(vz2/d)

%Flujo másico
Masico = double(vz2*p)

%Número de Re
Re = (Di*Velocidad*p)/mu

```

```
if Re<2100
    disp(['Es flujo laminar, Reynolds...',num2str(Re)])
else
    disp('No es flujo laminar')
end
---
Velocidad =
    14.9620
Masico =
    102.9733
Re =
    2.0654e+03
Es flujo laminar, Reynolds...2065.3645
```

Capítulo 6

Las ecuaciones de variación para sistemas isotérmicos

Antes de empezar con el desarrollo del capítulo, el lector debe tener un adecuado conocimiento y dominio sobre ciertas consideraciones, tal es el caso como la derivada parcial y aspectos como es el álgebra vectorial.

En los capítulos anteriores de ésta parte III, se determino la distribución de velocidad para ciertos sistemas relativamente sencillos de flujo, mediante un balance de cantidad de movimiento sobre un volumen de control para después ver el comportamiento gráfico que se genera y darle una interpretación ingenieril de lo que pasa dentro del sistema. Para posteriormente evaluarlo todo el sistema, además de ir añadiendo ciertas variables que intervienen en éste y poder hallar la ecuación que define todo el sistema, para obtener ya sea la velocidad media, la velocidad máxima, entre otros aspectos más. Este método de un balance aplicado de cantidad de movimiento es utilizado para dar una introducción del manejo y aplicación del principio de la conservación de la cantidad de movimiento en los problemas de flujo viscoso. No obstante, no es necesario formular un balance de cantidad de movimiento siempre que se comienza a trabajar con un nuevo problema de flujo. Es más rápido y más fácil partir de las ecuaciones de conservación de la materia y la cantidad de movimiento, expresadas en la forma general, y simplificarlas con el fin de adaptarlas al problema que se este tratando. Las ecuaciones que a continuación se describirán se utilizan en todos los problemas de flujo viscoso isotérmico de un fluido puro. Para fluidos no isotérmicos y para mezclas fluidas de varios componentes, se necesitan ecuaciones adicionales para describir la conservación de la energía y la conservación de las especies químicas individuales.

6.1. Ecuación de continuidad

Para empezar sed determinara la **ecuación de continuidad**, para esto se procede a hacer un balance de materia en coordenadas rectángulas a un cubo (por ser el más sencillo en explicar) estático de un volumen de control finito con dimensiones $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ a través del cual se haya circulando un fluido en régimen no estacionario, como en la figura 6.1.1.

Las aristas del cubo (figura 6.1.2) se sitúan paralelas al sistema de ejes de coordenadas, la cual se aplicara la **ley de conservación de la materia**, la cual menciona que *en un sistema aislado, durante cualquier*

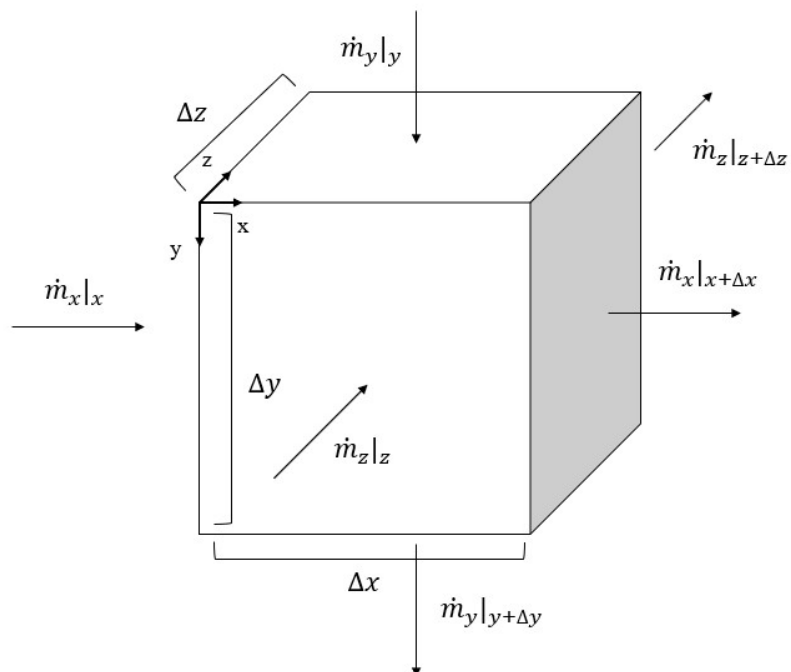


Figura 6.1.1: Volumen de control (fijo en el espacio) a través del cual está circulando un fluido.

proceso físico o químico, la masa se mantiene constante, es decir, la masa que entra en un sistema debe salir del sistema o acumularse dentro de él:

$$\begin{aligned}
 &\text{masa que entra al sistema} && - \\
 &\text{masa que sale del sistema} && = \\
 &\text{Masa que se acumula dentro del sistema} &&
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

Entonces a la ecuación anterior se podría darle una interpretación física tal que

$$\dot{m}_{\text{entrada}} - \dot{m}_{\text{salida}} = \dot{m}_{\text{acumulación}}
 \tag{6.2}$$

Viendo la figura 6.1.1 se notará que el fluido tiene tres direcciones de entrada de materia, siendo:

$$\begin{aligned}
 &\dot{m}_x|_x \\
 &\dot{m}_y|_y \\
 &\dot{m}_z|_z
 \end{aligned}$$

Así como tiene tres direcciones de salida de materia:

$$\begin{aligned}
 &\dot{m}_x|_{x+\Delta x} \\
 &\dot{m}_y|_{y+\Delta y} \\
 &\dot{m}_z|_{z+\Delta z}
 \end{aligned}$$

Definidas las funciones de entrada y salida ¿cómo se trasladarán a la ecuación (6.2)? El fluido puede tener tres direcciones siendo en los ejes x , y , y z , entonces $\dot{m}(\dot{m}_x, \dot{m}_y, \dot{m}_z)$. Para trasladar los ejes se debe poner

una suma vectorial empleando los vectores unitarios [9], representado por \hat{i} para lo largo del eje x , \hat{j} para el eje y y \hat{k} para el eje z , siendo algo tal que

$$\dot{m} = \dot{m}_x \hat{i} + \dot{m}_y \hat{j} + \dot{m}_z \hat{k} \quad (6.3)$$

Siguiendo esta sumatoria vectorial a la ecuación (6.2), respetando la detonación para las entradas y salidas del flujo quedaría

$$\dot{m}_x|_x \hat{i} + \dot{m}_y|_y \hat{j} + \dot{m}_z|_z \hat{k} - \dot{m}_x|_{x+\Delta x} \hat{i} - \dot{m}_y|_{y+\Delta y} \hat{j} - \dot{m}_z|_{z+\Delta z} \hat{k} = \dot{m}_{\text{acumulación}} \quad (6.4)$$

Sustituyendo el término de flujo másico, \dot{m} , por su definición dada por la ecuación (1.34)

$$(\rho \dot{V}_x)|_x \hat{i} + (\rho \dot{V}_y)|_y \hat{j} + (\rho \dot{V}_z)|_z \hat{k} - (\rho \dot{V}_x)|_{x+\Delta x} \hat{i} - (\rho \dot{V}_y)|_{y+\Delta y} \hat{j} - (\rho \dot{V}_z)|_{z+\Delta z} \hat{k} = \rho \dot{V} \quad (6.5)$$

Sustituyendo por la expresión de flujo volumétrico, \dot{V} , por su definición dada por la ecuación (1.30). A la variable del tiempo, t , se le puede sustituir como un cambio en el tiempo, es decir, Δt [13]

$$\left(\rho \frac{V}{\Delta t}\right)|_x \hat{i} + \left(\rho \frac{V}{\Delta t}\right)|_y \hat{j} + \left(\rho \frac{V}{\Delta t}\right)|_z \hat{k} - \left(\rho \frac{V}{\Delta t}\right)|_{x+\Delta x} \hat{i} - \left(\rho \frac{V}{\Delta t}\right)|_{y+\Delta y} \hat{j} - \left(\rho \frac{V}{\Delta t}\right)|_{z+\Delta z} \hat{k} = \rho \frac{V}{\Delta t} \quad (6.6)$$

Se sustituye el volumen, V , por las dimensiones del volumen de control

$$\left(\rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}\right)|_x \hat{i} + \left(\rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}\right)|_y \hat{j} + \left(\rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}\right)|_z \hat{k} - \left(\rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}\right)|_{x+\Delta x} \hat{i} - \left(\rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}\right)|_{y+\Delta y} \hat{j} - \left(\rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}\right)|_{z+\Delta z} \hat{k} = \rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} \quad (6.7)$$

Recordando que el rango, dado por las barras verticales, establece el punto inicial y/o final del fluido. Tomando de ejemplo la primer variable a la izquierda del ecuación (6.7)

$$\left(\rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}\right)|_x \hat{i}$$

La barra vertical $|_x$, indica que el fluido esta entrando en la dirección del eje x , en donde esta ocurriendo un desplazamiento de distancia respecto a un cambio de tiempo, $\Delta x/\Delta t$, y a esta definición se le conoce como *velocidad* (ver ecuación (1.16)), entonces $\Delta x/\Delta t = v_x$

$$\left(\rho \Delta y \Delta z \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)|_x \hat{i} = (\rho \Delta y \Delta z v_x)|_x \hat{i}$$

El producto de $\Delta y \Delta z$, se traduce como el *área por la que fluye el fluido*, y si esta se mantiene constante, se puede sacar de la expresión anterior

$$\Delta y \Delta z (\rho v_x)|_x \hat{i} \quad (6.8)$$

¿Por qué no se saca el término de densidad, ρ , también? Esto se debe a que se puede suponer que el fluido es compresible, ya que todos los fluidos son compresibles, incluyendo los líquidos. Y esto es debido a que puede existir una de variación significativas de la densidad como resultado de fluir. Haciendo que en la ecuación (6.7), el termino de ρ , quedará como un cambio, ya que puede existir una densidad final y una inicial. Siguiendo la misma metodología vista en la ecuación (6.8) para los otros términos, ya que son análogas las otras deducciones

$$\Delta y \Delta z (\rho v_x)|_x \hat{i} + \Delta x \Delta z (\rho v_y)|_y \hat{j} + \Delta x \Delta y (\rho v_z)|_z \hat{k} - \Delta y \Delta z (\rho v_x)|_{x+\Delta x} \hat{i} - \Delta x \Delta z (\rho v_y)|_{y+\Delta y} \hat{j} - \Delta x \Delta y (\rho v_z)|_{z+\Delta z} \hat{k} = \frac{\Delta \rho}{\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (6.9)$$

Agrupando términos que tengan la misma dirección y simplificando toda la ecuación, dividiéndola entre $\Delta x \Delta y \Delta z$, que representa el volumen de control

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y \Delta z (\rho v_x)|_x - \Delta y \Delta z (\rho v_x)|_{x+\Delta x} \hat{i}}{\Delta x \Delta y \Delta z} + \frac{\Delta x \Delta z (\rho v_y)|_y - \Delta x \Delta z (\rho v_y)|_{y+\Delta y} \hat{j}}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ + \frac{\Delta x \Delta y (\rho v_z)|_z - \Delta x \Delta y (\rho v_z)|_{z+\Delta z} \hat{k}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\Delta \rho \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t \Delta x \Delta y \Delta z} \quad (6.10) \\ \frac{(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+\Delta x} \hat{i}}{\Delta x} + \frac{(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+\Delta y} \hat{j}}{\Delta y} + \frac{(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+\Delta z} \hat{k}}{\Delta z} = \frac{\Delta \rho}{\Delta t} \end{aligned}$$

Aplicando del lado izquierdo de la igualdad el $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$, $\lim_{\Delta y \rightarrow 0}$ y $\lim_{\Delta z \rightarrow 0}$, mientras que del lado derecho se expresa el cambio diferencial de los Δ 's mediante el cambio infinitesimal, el cual se viene representando mediante *derivadas*, pero en este caso sera *derivadas parciales*, ya que se están ocupando más de una variable

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+\Delta x} \hat{i}}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+\Delta y} \hat{j}}{\Delta y} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+\Delta z} \hat{k}}{\Delta z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ - \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \hat{k} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

La expresión anterior se puede expresar como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (6.11)$$

Donde el operador ∇ viene dado por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

Para eliminar los vectores unitarios se debe ocupar la **divergencia**. La divergencia mide la diferencia entre el flujo saliente y el flujo entrante de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho \cdot \mathbf{v}) &= \nabla(\rho \cdot \mathbf{v}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left[\hat{i}(\rho \cdot v_x) + \hat{j}(\rho \cdot v_y) + \hat{k}(\rho \cdot v_z) \right] \\ (\rho \cdot \mathbf{v}) &= \left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

El producto punto entre vectores unitarios da 1, $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$, $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$ y $\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$. Quedando la ecuación reducida a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) \quad (6.12)$$

A esta ecuación se le conoce con el nombre de **ecuación de continuidad** y la cuál describe la velocidad de variación respecto al tiempo de la densidad del fluido en un punto fijo en el espacio, en coordenadas rectangulares, la cual se ve representada en la figura 6.1.2 [1] [81] [82] [83]. Ocupando notación vectorial para la ecuación (6.12)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (6.13)$$

Donde el operador ∇ viene dado por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}$$

En donde $\partial\rho/\partial t$ es la velocidad de incremento de materia por unidad de volumen. Mientras que $-(\nabla \cdot \rho\mathbf{v})$ es la velocidad neta de adición de materia por convección, por unidad de volumen, la cual es denominada como *divergente de $\rho\mathbf{v}$* . El operador ∇ puede cambiar, de acuerdo al sistema coordenado que se este ocupando. Una caso especial muy importante de la ecuación de continuidad es aquella para un **fluido de densidad constante** o en el suceso de que se halle en un **estado estacionario**, por lo cual la ecuación 6.13 asume una forma particularmente simple

$$\rho(\nabla\mathbf{v}) = 0 \tag{6.14}$$

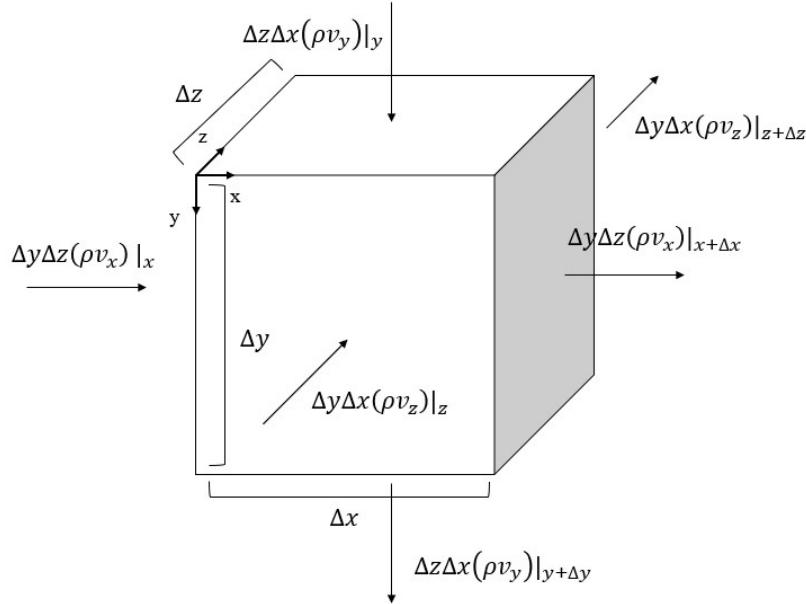


Figura 6.1.2: Pequeño elemento de volumen fijo $\Delta x\Delta y\Delta z$ a través del cual pasa un fluido. Las flechas indican el transporte masivo dentro y fuera del volumen a través de las dos caras ubicadas, por ejemplo en x y la distancia recorrida $x + \Delta x$.

Por supuesto, ningún fluido es verdaderamente incompresible, aunque a menudo en aplicaciones de ingeniería y biología, suponer una densidad constante da por resultado una simplificación considerable y un error muy pequeño [45] [81].

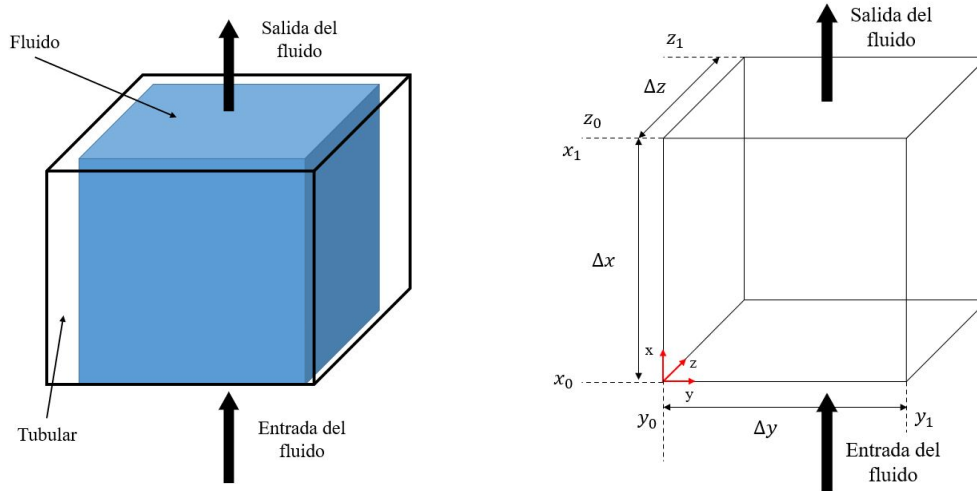
$$(\nabla\mathbf{v}) = 0 \tag{6.15}$$

Esta ecuación como se menciona en un inicio es para coordenadas rectangulares, por lo cual en el apéndice B.1 se darán las ecuaciones de continuidad para coordenadas rectangulares, cilíndrica y esférica, debido a que sus deducciones son bastantes largas, pero se puede deducir dichas ecuaciones a partir de las coordenadas rectangulares [72] [73]. En los posteriores ecuaciones se eliminara los vectores unitarios, solo mencionando que se ocupo la **divergencia** para no tener que ser repetitivo.

6.2. Ecuación de movimiento

Para demostrar la ecuación de movimiento, es algo similar a la deducción de la ecuación (5.36), pero con la consideración de que el sistema **no esta en estado estacionario**, además que el fluido Newtoniano es

compresible y viajara de forma ascendente por dentro de un tubular, el cual tiene nuestro fluido tendrá dimensiones de alto Δx , grosor Δy y de ancho Δz , tal como se ve en la figura 6.2.1



(a) Representación del fluido Newtoniano viajando por un (b) Dimensiones del fluido Newtoniano con eje coordena-
tubular. do.

Figura 6.2.1: Representación esquemática de nuestro problema.

Como se vio anteriormente en la ecuación (5.36) se deduce a partir de la segunda ley de Newton, que esta específica por la ecuación (1.14)

$$\sum F = m \cdot a_x \quad (6.16)$$

Especificado el eje coordenado del problema (ver figura 6.2.1(b)), se aprecia que la dirección en que se mueve el fluido es con respecto al eje x , por ello en la ecuación (6.16), al termino de aceleración se le pone el subíndice x , indicando la dirección que tiene el fluido. Además, que existen cinco fuerzas que intervienen en el fluido, siendo

1. Fuerza por transporte convectivo, F_{conv} .
2. Fuerza tangencial, F_{tang} .
3. Fuerza opuesta a la tangencial, que se debe al esfuerzo que oponen las paredes, F_{opu} .
4. Fuerza por empuje, F_{empu} .
5. Peso, w .

Sustituyendo estas fuerzas en la ecuación (6.16)

$$F_{conv} + F_{tang} - F_{opu} + F_{empu} - w = m \cdot a_x \quad (6.17)$$

La **fuerza por transporte convectivo**, se define por la segunda ley de Newton

$$F_{conv} = -m \cdot a_x \quad (6.18)$$

El signo negativo corresponde a la desaceleración que sufre el fluido debido a la gravedad. Aplicando la definición de la aceleración, dada por la ecuación (1.16), correspondería a

$$F_{conv} = -m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\frac{m}{\Delta t} \Delta v_x \quad (6.19)$$

El término m/dt se interpreta como el flujo másico y se puede transcribir como \dot{m} en la ecuación (6.19)

$$F_{conv} = -\dot{m} \cdot \Delta v_x \quad (6.20)$$

Siguiendo el mismo procedimiento de la ecuación (5.9) hasta (5.18). Pero recordando que el flujo puede llegar a tener 3 direcciones, tal como se demostró en la ecuación (6.3), entonces para poner el flujo másico como vector se debe ocupar los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k}

$$F_{conv} = -\left(\dot{m}_x \hat{i} + \dot{m}_y \hat{j} + \dot{m}_z \hat{k}\right) \Delta v_x \quad (6.21)$$

Esto se debe a que el fluido puede tener dirección en el eje x , pero puede existir la posibilidad de que alguna partícula pueda desviarse y agarrar otra dirección en el espacio, pero al final del recorrido todas las partículas tendrán dirección final en el punto x_1 . Se procede a sustituir la el flujo másico por la ecuación (1.34)

$$F_{conv} = -\left(\rho \dot{V}_x \hat{i} + \rho \dot{V}_y \hat{j} + \rho \dot{V}_z \hat{k}\right) \Delta v_x \quad (6.22)$$

Aplicando la definición de flujo volumétrico, ecuación (1.31), se obtiene

$$F_{conv} = -\left(\rho A_f v_x \hat{i} + \rho A_f v_y \hat{j} + \rho A_f v_z \hat{k}\right) \Delta v_x \quad (6.23)$$

El área por la que fluye el fluido para la velocidad en el eje v_x , tendrá dimensiones $\Delta y \cdot \Delta z$, A_f para la velocidad en v_y tendrá dimensiones $\Delta x \cdot \Delta z$ y A_f para la velocidad en v_z tendrá dimensiones $\Delta x \cdot \Delta y$. Así mismo, el fluido es compresible, existirá la variación de densidad a lo largo de del eje x , quedando la ecuación (6.23) como

$$F_{conv} = -\left(\Delta y \Delta z v_x \hat{i} + \rho \Delta x \Delta z v_y \hat{j} + \Delta x \Delta y v_z \hat{k}\right) \Delta(\rho v_x) \quad (6.24)$$

Quitando paréntesis

$$F_{conv} = -\Delta y \Delta z v_x \hat{i} \Delta(\rho v_x) - \rho \Delta x \Delta z v_y \hat{j} \Delta(\rho v_x) - \Delta x \Delta y v_z \hat{k} \Delta(\rho v_x) \quad (6.25)$$

Por el momento quedaría hasta acá la deducción de la fuerza convectiva. Se deducirá la ecuación para la **fuerza tangencial**, la cual como se menciono con anterioridad, surge a partir de la ecuación (4.14), donde el esfuerzo cortante, τ_{ab} , cuenta con dos subíndices, retomando la nomenclatura anterior: a será la dirección del esfuerzo cortante y b la dirección del desplazamiento del fluido

$$F_{tang} = A_s \cdot \tau_{ab} \quad (6.26)$$

Para el subíndice b tiene dirección en el eje x , pero ahora el subíndice a puede tener ahora tres direcciones, tanto en el eje x , y y z . Los más sencillos de demostrar son los ejes y y z , siendo las fuerzas que ejercen las paredes al fluido, ver las figuras 6.2.2(a) y 6.2.2(b), donde podemos ver que se forman placas de menor tamaño las cuales incrementan conforme se avanza a lo largo del eje y y z , donde la velocidad máxima será en medio de ambas placas, pero al llegar a este punto decrecerá, hasta llegar a una velocidad nula, debido a la interfase de las paredes con el fluido. Similar a lo que se vio a lo largo del capítulo anterior.

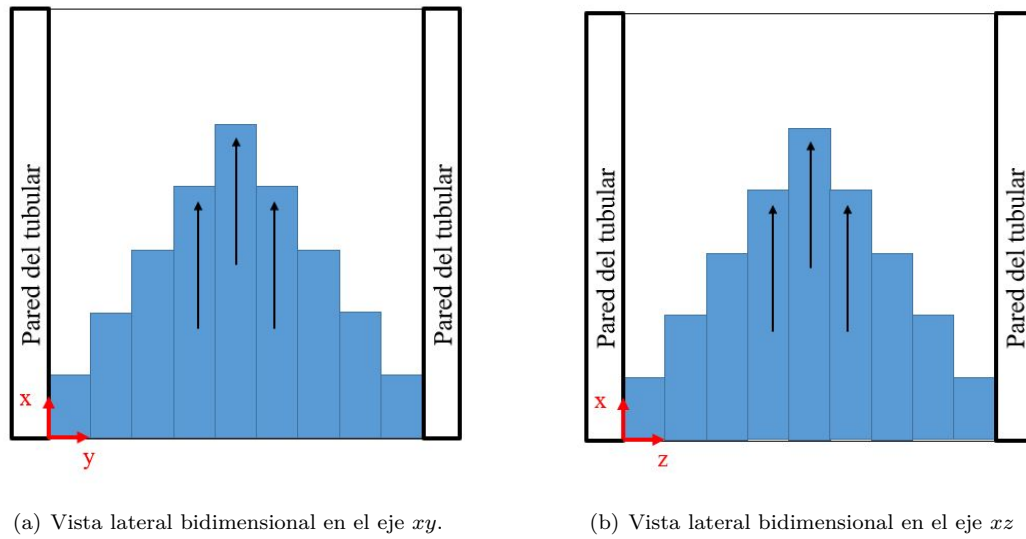


Figura 6.2.2: Vista bidimensional de nuestro fluido.

¿Qué sucede en el esfuerzo a lo largo del eje x ? Para eso se debe tener una vista 3D del fluido, tal como se ve en la figura 6.2.3, el cual forma el perfil parabólico que siempre se ha venido mencionando, pero ya de una representación tridimensional. Para que asciende el fluido se le ejerce una fuerza que es la de empuje, bueno el fluido mismo ejerce una respuesta interna a esta carga externa, la cual se le llama **esfuerzo normal**. El esfuerzo normal puede ser de **compresión** y de **tensión**, siendo el primero definido como la fuerza de entrada, mientras que el segundo siendo la fuerza opuesta a esta y será la de salida [74] [75] [76] [77] [78]. El esfuerzo normal se define como

$$\tau = \frac{F}{A_s} \Leftrightarrow F = A_s \cdot \tau \quad (6.27)$$

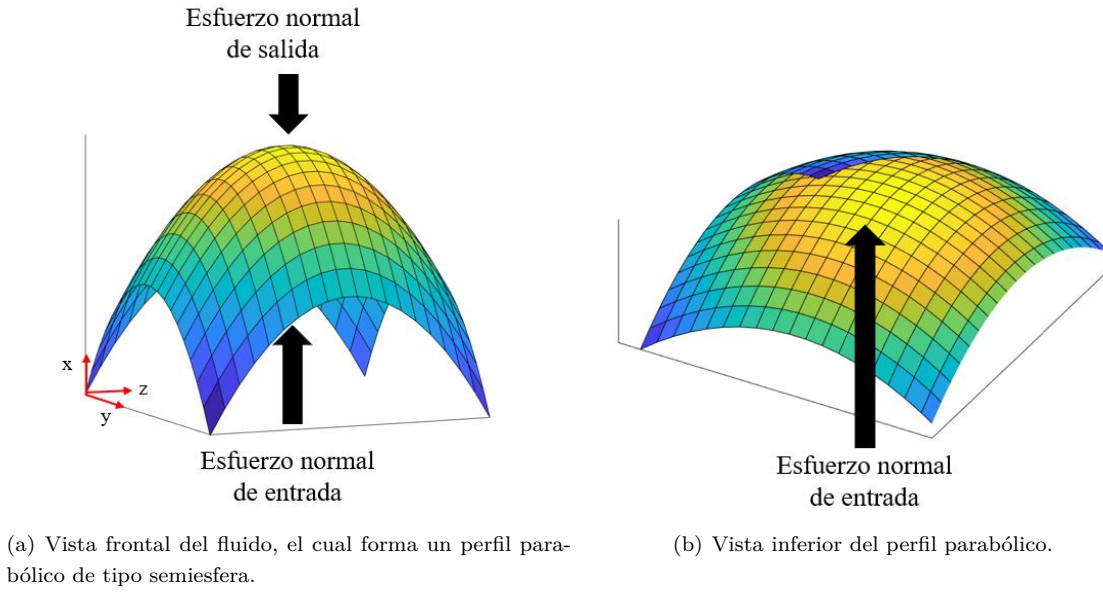


Figura 6.2.3: Vista 3D del fluido.

Viendo la analogía, una de las propiedades de un fluido es que se puede *comprimir*, por lo tanto el esfuerzo normal tendrá dirección en el eje x y la velocidad con que se mueve el fluido también en dirección x . Por lo tanto el esfuerzo cortante del fluido tendrá coordenadas en el espacio $A_s \cdot \tau(x, y, z)$ o visto también como suma vectorial ocupando los vectores unitarios

$$F_{tang} = A_s \tau_{xx}|_{x_0} \hat{i} + A_s \tau_{yx}|_{y_0} \hat{j} + A_s \tau_{zx}|_{z_0} \hat{k} \quad (6.28)$$

El esfuerzo normal, τ_{xx} , su demostración para un fluido es demasiado larga, pero el lector puede consultar en [75] y [79]. Para el área de sección transversal A_s para τ_{xx} sus dimensiones serán $\Delta y \Delta z$, para τ_{yx} sus dimensiones serán $\Delta x \Delta z$ y para τ_{zx} sus dimensiones serán $\Delta x \Delta y$. Haciendo que la ecuación (6.28) quede como

$$F_{tang} = \Delta y \Delta z \tau_{xx}|_{x_0} \hat{i} + \Delta x \Delta z \tau_{yx}|_{y_0} \hat{j} + \Delta x \Delta y \tau_{zx}|_{z_0} \hat{k} \quad (6.29)$$

La siguiente fuerza a determinar será la **fuerza opuesta a la tangencial**, la cual se define por (4.7)

$$F_{opu} = F_{tang}$$

O también como

$$F_{opu} = \Delta y \Delta z \tau_{xx}|_{x_0 + \Delta x} \hat{i} + \Delta x \Delta z \tau_{yx}|_{y_0 + \Delta y} \hat{j} + \Delta x \Delta y \tau_{zx}|_{z_0 + \Delta z} \hat{k} \quad (6.30)$$

Haciendo el cambio de nomenclatura, donde en vez de poner los puntos iniciales (x_0 , y_0 y z_0), se pondrá el eje coordenado que corresponde, ya que se parte de éste. Por lo tanto la ecuación (6.29) y (6.30), quedarían tal que

$$F_{tang} = \Delta y \Delta z \tau_{xx}|_x \hat{i} + \Delta x \Delta z \tau_{yx}|_y \hat{j} + \Delta x \Delta y \tau_{zx}|_z \hat{k} \quad (6.31)$$

Y

$$F_{opu} = \Delta y \Delta z \tau_{xx}|_{x + \Delta x} \hat{i} + \Delta x \Delta z \tau_{yx}|_{y + \Delta y} \hat{j} + \Delta x \Delta y \tau_{zx}|_{z + \Delta z} \hat{k} \quad (6.32)$$

La cuarta fuerza es la **fuerza de empuje**, la cual se define por la ecuación (5.28) y si se sigue los mismos pasos de la ecuación (5.29) hasta (5.30)

$$F_{empu} = P_0 \cdot A_f - P_1 \cdot A_f \quad (6.33)$$

El área por la que fluye el fluid, A_f , tendrá dimensiones $\Delta y \Delta z$ y al aplicar el diferencial de presiones, es decir $\Delta P = P_1 - P_0$ o $-\Delta P = P_0 - P_1$, ya que A_f es igual tanto a la salida como a la entrada, quedando la ecuación (6.33)

$$F_{empu} = -\Delta y \Delta z \Delta P \quad (6.34)$$

La ultima fuerza que interviene es el peso del fluido, dada por la ecuación (5.32)

$$w = \rho V_{cont} g_x$$

Donde las dimensiones del volumen de control serán $\Delta x \Delta y \Delta z$

$$w = \Delta x \Delta y \Delta z \rho g_x \quad (6.35)$$

Para definir el término de acumulación o variación en el tiempo, siendo la expresión de la derecha de la igualación de (6.17). Donde el término de aceleración se define por (1.16)

$$ma_x = m \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

Si a la ecuación anterior la masa se define como el producto de densidad por el volumen

$$m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \Delta x \Delta y \Delta z \rho \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

Para un fluido compresible habrá un cambio de densidad tanto a la salida como a la entrada, haciendo que

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\Delta(\rho v_x)}{\Delta t} \quad (6.36)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.25), (6.31), (6.32), (6.34), (6.35) y el término (6.36) en la ecuación (6.17)

$$\begin{aligned} & -\Delta y \Delta z v_x \hat{i} \Delta(\rho v_x) - \rho \Delta x \Delta z v_y \hat{j} \Delta(\rho v_x) - \Delta x \Delta y v_z \hat{k} \Delta(\rho v_x) + \Delta y \Delta z \tau_{xx}|_x \hat{i} + \Delta x \Delta z \tau_{yx}|_y \hat{j} + \Delta x \Delta y \tau_{zx}|_z \hat{k} \\ & - \Delta y \Delta z \tau_{xx}|_{x+\Delta x} \hat{i} - \Delta x \Delta z \tau_{yx}|_{y+\Delta y} \hat{j} - \Delta x \Delta y \tau_{zx}|_{z+\Delta z} \hat{k} - \Delta y \Delta z \Delta P - \Delta x \Delta y \Delta z \rho g_x = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\Delta(\rho v_x)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Dividiendo toda la ecuación entre el volumen de control, $\Delta x \Delta y \Delta z$, y agrupado términos semejantes

$$\begin{aligned} & \frac{-\Delta y \Delta z v_x \hat{i} \Delta(\rho v_x) - \rho \Delta x \Delta z v_y \hat{j} \Delta(\rho v_x) - \Delta x \Delta y v_z \hat{k} \Delta(\rho v_x) + \Delta y \Delta z \tau_{xx}|_x \hat{i} + \Delta x \Delta z \tau_{yx}|_y \hat{j} + \Delta x \Delta y \tau_{zx}|_z \hat{k}}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ & - \frac{\Delta y \Delta z \tau_{xx}|_{x+\Delta x} \hat{i} - \Delta x \Delta z \tau_{yx}|_{y+\Delta y} \hat{j} - \Delta x \Delta y \tau_{zx}|_{z+\Delta z} \hat{k} - \Delta y \Delta z \Delta P - \Delta x \Delta y \Delta z \rho g_x}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta(\rho v_x)}{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -v_x \hat{i} \frac{\Delta(\rho v_x)}{\Delta x} - v_y \hat{j} \frac{\Delta(\rho v_x)}{\Delta y} - v_z \hat{k} \frac{\Delta(\rho v_x)}{\Delta z} + \frac{\tau_{xx}|_x}{\Delta x} \hat{i} + \frac{\tau_{yx}|_y}{\Delta y} \hat{j} + \frac{\tau_{zx}|_z}{\Delta z} \hat{k} - \frac{\tau_{xx}|_{x+\Delta x}}{\Delta x} \hat{i} - \frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} \hat{j} - \frac{\tau_{zx}|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \hat{k} \\ & - \frac{\Delta P}{\Delta x} - \rho g_x = \frac{\Delta(\rho v_x)}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\rho v_x)}{\Delta t} + v_x \hat{i} \frac{\Delta(\rho v_x)}{\Delta x} + v_y \hat{j} \frac{\Delta(\rho v_x)}{\Delta y} + v_z \hat{k} \frac{\Delta(\rho v_x)}{\Delta z} = & -\frac{\Delta P}{\Delta x} - \rho g_x + \frac{\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x}}{\Delta x} \hat{i} + \frac{\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} \hat{j} \\ & + \frac{\tau_{zx}|_z - \tau_{zx}|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \hat{k} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Aplicando al lado derecho de la ecuación los $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$, $\lim_{\Delta y \rightarrow 0}$ y $\lim_{\Delta z \rightarrow 0}$ y en vez de expresar los cambios de un punto final y un punto inicial mediante los Δ , se medirá el cambio infinitesimal, el cual se viene representando mediante *derivadas*, pero en este caso sera *derivadas parciales*, ya que se están ocupando más de una variable

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + v_x \hat{i} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + v_y \hat{j} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial y} + v_z \hat{k} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial z} = & -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g_x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x}}{\Delta x} \right) \hat{i} \\ & + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} \right) \hat{j} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\tau_{zx}|_z - \tau_{zx}|_{z+\Delta z}}{\Delta z} \right) \hat{k} \\ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + v_x \hat{i} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + v_y \hat{j} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial y} + v_z \hat{k} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial z} = & -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g_x - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \hat{k} \end{aligned}$$

Aplicando la **divergencia** a la ecuación anterior (6.2), donde $\hat{i} = \hat{j} = \hat{k} = 1$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + v_x \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + v_y \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial y} + v_z \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \pm \rho g_x \quad (6.39)$$

La expresión (6.39) representa la **ecuación de movimiento en coordenadas rectángulas para la componente x expresada en términos de esfuerzos para fluidos compresibles en términos de τ** [81] [82] [83] [84], la cual corresponde análogamente a la ecuación (5.35). Las expresiones para los componentes y y z se obtienen por analogía. El balance de cantidad de movimiento es totalmente equivalente a la **segunda ley de movimiento de Newton**. Existirá la duda de por que el signo $-$ de la ecuación (6.2) se cambio por \pm en (6.39) y esto se debe a que la gravedad puede ser negativa o positiva dependiendo de la dirección que tenga el fluido o no puede existir. Para los fluidos que son incompresibles, como en la mayoría de los líquidos, término de ρ se vuelve constante, por lo tanto la ecuación (6.39) se vuelve

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \pm \rho g_x \quad (6.40)$$

La ecuación (6.40) se define como la **ecuación de movimiento en coordenadas rectángulas para la componente x expresada en términos de esfuerzos para fluidos incompresibles en términos de τ** . Con el fin de utilizar estas ecuaciones para determinar la distribución de velocidad hay que expresar los distintos esfuerzos en función de los gradientes de velocidad y las propiedades del fluido. La velocidad misma es un vector y el gradiente de $\nabla \mathbf{v}$ es un tensor de segundo orden [83] [84]. El flujo de cantidad de movimiento o esfuerzo cortante es también un tensor de segundo orden. En lugar de una simple ecuación vectorial, la ecuación de cantidad de movimiento en tres dimensiones es una relación tensorial, la cual para un fluido incompresible es

$$\tau = -\mu[\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T] \quad (6.41)$$

Esta ecuación muestra que el tensor esfuerzo es una función del tensor deformación por sencillez $[\nabla v]$ y su transpuesta $[\nabla v^T]$. La velocidad, cantidad vectorial, tiene tres componentes y cualquiera de estas componentes puede varias en tres direcciones. Consecuentemente, hay tres componentes tomando tres

camino o nueve posibles términos [75]. En forma de arreglo estos términos son

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$[\nabla \mathbf{v}]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Como la ecuación para tensor esfuerzo debe ser homogénea, el lado izquierdo será también un tensor de segundo orden

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Cada fila del tensor tiene tres términos. En la primera fila hay un esfuerzo normal τ_{xx} y dos esfuerzos tangenciales, τ_{yx} y τ_{zx} . Los tres esfuerzos normales (los elementos de la diagonal) actúan en las direcciones x , y y z , y cada uno es la fuerza por unidad de área en un plano perpendicular a la dirección en la cual actúan. La ecuación del tensor esfuerzo es realmente una representación abreviada o taquigráfica para nueve ecuaciones, su demostración puede verse en [85] [86] [87] [88]. Ellas son

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (6.42)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (6.43)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (6.44)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \quad (6.45)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \quad (6.46)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \quad (6.47)$$

Para flujos compresibles los esfuerzos normales deberían tener un término adicional

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left[\frac{2}{3}\mu - k \right] (\nabla \mathbf{v}) \quad (6.48)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \left[\frac{2}{3}\mu - k \right] (\nabla \mathbf{v}) \quad (6.49)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \left[\frac{2}{3}\mu - k \right] (\nabla \mathbf{v}) \quad (6.50)$$

Donde

$$(\nabla \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Para el valor de k en estas ecuaciones es la viscosidad de dilatación y va a ser cero para los gases monoatómicos a baja densidad y tiende a cero para gases densos y líquidos [89]. Para fluidos de densidad constantes $(\nabla \mathbf{v})$ es cero y solamente cuando existen gradientes de velocidad muy grandes en la dirección

de los esfuerzos normales van a diferir apreciablemente de cero. Las ecuaciones anteriores del tensor fuerza son en coordenadas rectángulas, así mismo tendrá su parte en coordenadas cilíndricas y esféricas, las cuales se pueden hallar en [1] [3] [90]. Los diferentes tensores fuerzas se pueden ver en el apéndice B

Ejemplo 6.2.1: Problema unidimensional

Un fluido circula sobre la dirección x entre dos láminas perpendiculares con una separación en la dirección z . Determinar la ecuación de viscosidad de representa dicho movimiento

Resolución:

1. Para el problema se sabe que su velocidad es en la dirección v_x en función exclusiva de z . Entonces tomamos aquella ecuación donde τ venga en función de x y z .

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right]$$

2. Posteriormente sabemos que v_z sera cero, debido a que no hay velocidad en dicha dirección. Por lo cual nuestra expresión se resume en.

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} \right]$$

3. Por ultimo, solo queda expresar el término de τ_{ij} . Para el primer termino que es i sera la distancia entre las dos placas con dirección z y para j sera la dirección a la que se desplaza el fluido que tiene coordenadas x .

$$\tau_{zx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} \right]$$

La interpretación física de τ_{ij} es complicada por el hecho de que es usado comúnmente tanto como flujo difusivo o molecular de cantidad de movimiento, que como un esfuerzo cortante, además que es difícil determinarlo si no se tienen datos experimentales. Por esto último se le llama el **tensor de esfuerzos**. Si se considera que el fluido es un fluido Newtoniano, se puede introducir la ecuación (6.40) en (6.40), para expresarla en término de la viscosidad y gradiente de velocidad

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_x + v_x \frac{\partial}{\partial x} v_x + v_y \frac{\partial}{\partial y} v_x + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_x \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_x \right) \pm \rho g_x \quad (6.51)$$

Esta ecuación se le conoce en la literatura también como **ecuación de Navier-Stokes en coordenadas rectangulares** [1] [3]. (6.51) solo es aplicable a los fluidos Newtonianos donde ρ y μ son constantes. En los problemas de flujo no Newtonianos se aplica la ecuación de movimiento (6.40) expresada en términos de τ_{ij} , auxiliando del modelo reológico requerido. En el apéndice B.3 se muestran las diferentes expresiones de la ecuación de movimiento para componente en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas respectivamente. Las coordenadas cilíndricas y esféricas, se pueden deducir a partir de las coordenadas rectangulares aplicando la **regla de la cadena** [20] [23].

6.3. Ecuación de energía mecánica

La energía mecánica no se conserva en un sistema de flujo, aunque esto no es un impedimento para desarrollar una ecuación de variación para esta cantidad. Dicha ecuación viene dada representada a nivel microscópico por

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) + \nabla \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) \mathbf{v} \right] + \nabla \mathbf{q} + \nabla(P\mathbf{v}) + \nabla(\tau\mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) - \dot{G} = 0 \quad (6.52)$$

Su demostración puede encontrarse en [101]. Dicha expresión representa la **forma general de la ecuación de conservación de la energía**. A continuación se especificara lo que representa cada término empezando por el primer término a la izquierda de la ecuación, se moverá en orden hacia la derecha planteando el significado físico de cada uno de los siete términos de la ecuación. El primer término representa *la velocidad de acumulación de energía cinética más energía potencial por unidad de volumen*; el segundo término *la velocidad de entrada neta de energía cinética más potencial debido al flujo global*; el tercer término *la velocidad de conversión reversible de energía interna a calórica* que puede ser positiva o negativa, dependiendo de que el fluido experimente expansión o compresión, algunos autores lo escriben como $P(-\nabla\mathbf{v})$; el cuarto término, representa *la velocidad de trabajo producido por la presión de los alrededores sobre el elemento de volumen*; el quinto término, representa *la velocidad de trabajo producido por la presión de los alrededores sobre el elemento de volumen*; el sexto término ; el sexto término es la representación *la velocidad a las que las superficies móviles realizan el trabajo sobre el fluido*; y por último, el séptimo término es *a velocidad de conversión irreversible de energía interna a calórica*, este calentamiento puede producir aumentos considerables de temperatura en sistemas con grandes gradientes de viscosidad y de velocidad, y se puede escribir como $-\tau : \nabla\mathbf{v}$. El tercer y último término, indican que el fluido puede enfriarse o calentarse internamente, por lo cual si es un sistema isotérmico tenderán a eliminarse.

La ecuación (6.52) se puede separar en dos ecuaciones, una para energía mecánica (cinética y potencial) y otra para energía interna (energía térmica). La primera se obtiene al hacer el producto punto de la ecuación de conservación de *momentum* con el vector de velocidad. Contiene los términos **macroscópicos** de la energía

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \nabla \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) \mathbf{v} \right] + \mathbf{v} \nabla P + \nabla(\tau\mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) - (\tau : \nabla\mathbf{v}) = 0 \quad (6.53)$$

Mientras que la segunda se obtiene al restar la ecuación de conservación de la energía mecánica de la ecuación de conservación de la energía. Contiene los términos **microscópicos** de la energía

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \hat{U}) + \nabla \left[(\rho \hat{U}) \mathbf{v} \right] + \nabla \mathbf{q} + \mathbf{v} \nabla P + \tau : \nabla\mathbf{v} - \dot{G} = 0 \quad (6.54)$$

Esta última ecuación rara vez es usada como tal, sino que es simplificada para usarse en situaciones particulares. El término $\rho \nabla\mathbf{v}$ puede ser positivo o negativo, esto dependerá de que el fluido experimente una **expansión** o **compresión**. Los cambios de temperatura pueden ser bastantes grandes para gases en compresores, turbinas y tubos que choque. El término $(-\tau : \nabla\mathbf{v})$ siempre es positivo para fluidos Newtonianos, porque puede escribirse como una de términos elevados al cuadrado. Además, nos permite describir la degradación de energía mecánica en energía térmica que ocurre en todos los sistemas de flujo. Este calentamiento puede producir aumento considerable de temperatura en sistemas con grandes gradientes de viscosidad y de velocidad, como por ejemplo en lubricación. Al hablar de **sistemas isotérmicos**, entendemos sistemas en los que no hay gradientes de temperatura impuestos externamente y no hay un cambio apreciable de temperatura debido a la expansión, la contracción o la disipación viscosa. Las ecuaciones (6.53) y (6.54), debido a que ambas contienen sólo términos mecánicos, se les llama **ecuación de variación para energía mecánica**.

Capítulo 7

Aplicación de las ecuaciones de Navier-Stokes

En este apartado se empezara a deducir ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, dependiendo el caso, sin la necesidad de tener que ocupar un volumen de control, si no, únicamente partiendo de las ecuaciones de **Navier-Stokes**, apéndice B.

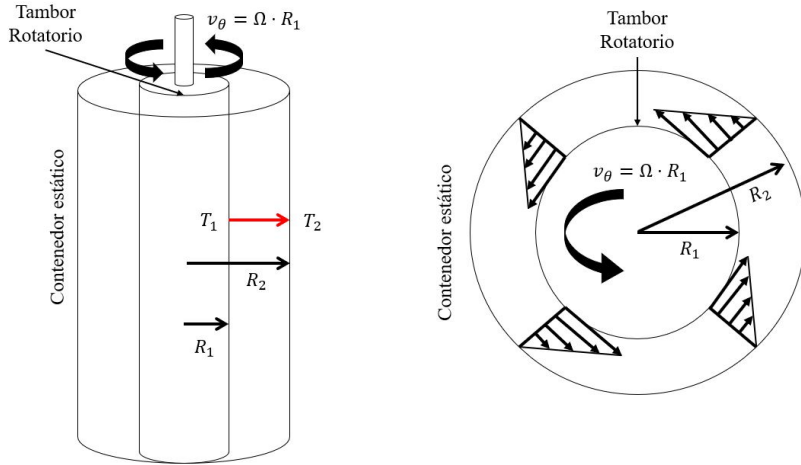
7.1. Viscosímetro de tambor rotatorio.

Ejemplo No. 1 Como se menciono con anterioridad, una forma de determinar la viscosidad de los fluidos es usando viscosímetros, en los que pueden dividir en tres tipos: capilares, rotacionales y de cuerpo móvil. En este problema se deducira la ecuación que rige a un tipo rotacional, el cual se llama **viscosímetro de tambor rotatorio**, siendo un dispositivo ideal para determinar la viscosidad de líquidos, tal como se muestra en la figura 7.1.1.



Figura 7.1.1: Viscosímetro de tambor rotatorio.

Este dispositivo mide la viscosidad utilizando la definición de la viscosidad dinámica y el procedimiento de uso consiste en hacer girar el tambor interior (con un diámetro $D_1 = 2R_1$) a una velocidad angular [13] constante $\Omega \cdot R_1$, mientras que el tambor exterior (con un diámetro $D_2 = 2R_2$) se mantiene fijo. El viscosímetro tiene una longitud L , observar la figura 7.1.2.



(a) Viscosímetro de tambor rotatorio vista lateral. (b) Viscosímetro de tambor rotatorio vista superior.

Figura 7.1.2: Representación gráfica del viscosímetro de tambor rotatorio.

Para determinar la ecuación diferencial se ocupará la ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas, la cual se encuentra en el apéndice B.4, donde las ecuaciones que corresponden a las cilíndricas serán (B.43), (B.44) y (B.45). Si el cilindro gira de manera angular, ver figura 7.1.2(a), la velocidad se dará a lo largo del eje θ , siendo la ecuación más adecuada la (B.44)

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_\theta \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta$$

Se eliminarán ciertos términos para simplificar la ecuación. Si el viscosímetro opera de manera estacionaria el término de variación respecto al tiempo se eliminará $\partial v_\theta / \partial t = 0$.

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_\theta \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta$$

El siguiente término a eliminar es la presión, ya que el sistema no tiene presión alguna que haga que mueva al fluido, si no lo hace la inercia del tambor rotatorio interno, por lo tanto $\partial P / \partial \theta = 0$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_\theta \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta$$

Otro término a eliminar sera la gravedad, ya que el fluido no esta cayendo o subiendo, si no únicamente esta girando sobre su propio eje, haciendo que el término $\rho g_\theta = 0$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_\theta \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (7.1)$$

Quedando los términos de velocidad. Para saber cuanto vale cada término se debe ocupar la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas, dadas por la ecuación (B.29), que se encuentra en el apéndice B.2

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

Así mismo, se debe simplificar la ecuación. El primer termino en irse es de de variación, ya que el sistema opera de manera estacionaria $\partial \rho / \partial t = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

La velocidad únicamente se da en θ , por lo tanto no hay velocidad a lo largo del eje r y z , haciendo que $v_r = v_z = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) = 0$$

Considerado que el fluido es incompresibles, el término de ρ será constante y saldrá fuera de la expresión anterior

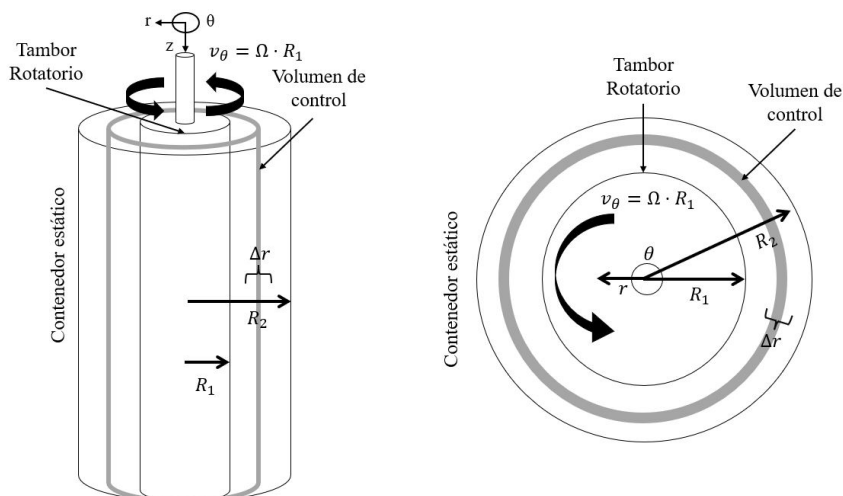
$$\begin{aligned} \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) &= 0 \end{aligned}$$

La expresión anterior indica que la velocidad a nivel molecular de las capas que se van generando, ver figura 7.1.2(b), se mueven a la misma velocidad. Similar a como se deducía la velocidad por transporte convectivo cuando se aplicaba a un volumen de control. Aplicando la igualdad de $\partial v_\theta / \partial \theta = 0$ y $v_r = v_z = 0$ en la ecuación (7.1)

$$0 = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_\theta \right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right]$$

Queda por definir si el perfil de velocidad depende del radio, r , o de la longitud del cilindro, z . Para ello hay que remitirse a la figura 7.1.2(b), donde se observa que el cilindro interno va rotando y las flechas más cercanas a esta parte son las que tienen mayor velocidad, mientras que si uno se desplaza a lo largo del eje r hasta topar con el cilindro estático se observa que las flechas van adquiriendo una menor velocidad hasta ser tan pequeño que la velocidad del fluido sea nula (condición de frontera solido-líquido). Al ver el cilindro como un *volumen de control*, figura 7.1.3, se aprecia que habría un cambio a lo largo del eje r , mientras que a lo largo del eje z se mantiene constante. Por lo tanto, $\partial v_\theta / \partial z = 0$ y la ecuación anterior queda

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right] = 0 \quad (7.2)$$



(a) Viscosímetro de tambor rotatorio vista lateral con un volumen de control. (b) Viscosímetro de tambor rotatorio vista superior con un volumen de control.

Figura 7.1.3: Representación gráfica del viscosímetro de tambor rotatorio con un volumen de control.

Aplicando los métodos numéricos para resolver la EDO con valores de frontera, donde las condiciones de frontera son: $v_\theta(R_1) = \Omega \cdot R_1$ y $v_\theta(R_2) = 0$. La primera condición se debe a que el cilindro interno está girando a una velocidad angular [13] $\Omega \cdot R_1$ en el radio R_1 , mientras que en el segundo se está evaluando el cilindro externo que está a un desplazamiento R_2 y el cual su velocidad es nula, ya que está fijo. A veces es difícil y algo laborioso resolver una ecuación como la (7.2), ya que regularmente se da como ejemplo ecuaciones de la forma lineal (1.55), por ser más sencillas de resolver. Pero gracias a los métodos numéricos se puede resolverlo rápidamente. Para programar en MATLAB es necesario definir las variables simbólicas como: $v_\theta(r)$, R_1 , R_2 y Ω , las cuales aparecerán como `syms v(r) R1 R2 Omg`, respectivamente, donde la variable simbólica `v(r)` indica que v está en función de r . Posteriormente es definir la ecuación (7.2), como se aprecia la derivada es un producto $\partial(rv_\theta)$, el método que se verá ahora es ver la ecuación (7.2) como derivadas, por ello se usa el comando `diff(X, var)`, el cual sirve para representar derivadas simbólicas de expresiones y simbólicas, donde `X` representa la función o expresión y `var` representa la variable con que se está derivando, entonces el comando quedaría

```
syms v(r) R1 R2 Omg
ode = diff(1/r*diff(v(r)*r,r),r) == 0;
```

La forma anterior indica que se está nombrando la ecuación (7.2) como `ode`, por ello se pone doble signo igual después de la derivada. Después, se debe especificar las condiciones de frontera y se agrupan en un vector fila. Cada condición de frontera de igual manera deben nombrarse como el programa anterior. Al tipo de condición de frontera que se viene ocupando se le conoce como **Dirichlet** [166], ya que también existe el tipo **Newman**.

```
cond1 = v(R1) == Omg*R1;
cond2 = v(R2) == 0;
conds = [cond1 cond2];
```

Para resolver la EDO se aplica el comando `dsolve(ode, conds)` y se simplifica el resultado con el comando `simplify`

```
v = dsolve(ode, conds);
v = simplify(v);
---
v =
    -(Omg*R1^2*(R2^2 - r^2))/(r*(R1^2 - R2^2))
```

Esta expresión se puede representar como

$$v_{\theta}(r) = -\frac{\Omega R_1^2 (R_2^2 - r^2)}{r (R_1^2 - R_2^2)} \tag{7.3}$$

La ecuación anterior no contiene el término de viscosidad, μ . Para ello se debe recurrir al esfuerzo tangencial para coordenadas polares aplicando la ley de viscosidad de Newton, ver apéndice B.1, donde el esfuerzo se da en dirección r y la velocidad en θ

$$\tau_{r\theta} = -\mu r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_{\theta}}{r} \right) \tag{7.4}$$

Donde sustituyendo a v_{θ} de la ecuación (7.4) por (7.3)

$$\tau_{r\theta} = -\mu r \frac{d}{dr} \left[-\frac{1}{r} \left(\frac{\Omega R_1^2 (R_2^2 - r^2)}{r (R_1^2 - R_2^2)} \right) \right] \tag{7.5}$$

Para resolver la ecuación (7.5) se debe aplicar la derivada, pudiéndose hacerse tanto de manera analítica como programando. Al irse por el camino de la programación se ocupa el comando `diff(v, r)` y agregando al comando `syms` las variables simbólicas `syms mu r tau`

```
v1 = 1/r*v;
tau = -mu*r*diff(v1, r);
tau = simplify(tau)
---
tau =
    -(2*Omg*R1^2*R2^2*mu)/(r^2*(R1^2 - R2^2))
```

Esta expresión se puede representar como

$$\tau_{r\theta} = -\frac{2\Omega R_1^2 R_2^2 \mu}{r^2 (R_1^2 - R_2^2)} \tag{7.6}$$

En los dispositivos eléctricos es fácil más fácil medir la potencia de consumo de energía que el esfuerzo cortantes por ello haciendo un poco de álgebra se llega a

$$\begin{aligned} N &= \frac{W}{\Delta t} \\ &= \frac{F \cdot \Delta d}{\Delta t} \\ &= F \frac{\Delta d}{\Delta t} \\ &= F \cdot \langle v \rangle \end{aligned}$$

Donde N es la potencia; W es el trabajo; d es la distancia recorrida. Recordando que la fuerza es una cantidad vectoriales, teniendo dirección y magnitud, donde su dirección será a lo largo del eje θ , mientras que su magnitud será donde se aplique el movimiento de torcían es decir, hasta R_1 , ya que en R_2 no esta aplicando ninguna fuerza. Lo mismo ocurre para la velocidad que es una cantidad vectorial, donde se aplica en R_1

$$N = F_{r\theta}|_{r=R_1} \cdot \langle v \rangle|_{r=R_1} \quad (7.7)$$

Al aplicar la ecuación (4.14)

$$N = \tau_{r\theta}|_{r=R_1} \cdot As|_{r=R_1} \cdot \langle v \rangle|_{r=R_1} \quad (7.8)$$

Para $As|_{r=R_1}$ será $2\pi \cdot R_1 \cdot L$; para $\langle v \rangle|_{r=R_1}$ estará dada por la velocidad angular $\Omega \cdot R_1$; Y para $\tau_{r\theta}|_{r=R_1}$ será la ecuación (7.6). Quedando la expresión (7.8) como

$$N = \left[-\frac{2\Omega R_1^2 R^2 \mu}{r^2 (R_1^2 - R_2^2)} \right] \Big|_{r=R_1} (2\pi \cdot R_1 \cdot L) (\Omega \cdot R_1) \quad (7.9)$$

Evaluando en MATLAB, agregando ahora la variable simbólica L

```
As = 2*pi*R1*L;%Area de sección
v_ang = Omg*R1;%velocidad angular
N = tau*As*v_ang;
N = subs(N,r,R1)%Cambio de variable de r por R1
---
N =
    -(4*pi*L*Omg^2*R1^2*R2^2*mu)/(R1^2 - R2^2)
```

Expresada como

$$N = -\frac{4\pi \cdot L \cdot \Omega^2 \cdot R_1^2 \cdot R_2^2 \cdot \mu}{R_1^2 - R_2^2} \quad (7.10)$$

Por ultimo, se despeja la variable μ , siendo la variable a determinar. Para ello se ocupa el comando `solve` y se agrega una variable simbólica más que será $N1$ que es igual a N

```
Ec1 = N1 == N;
mu = solve(Ec1,mu)
---
mu =
    -(N1*(R1^2 - R2^2))/(4*L*Omg^2*R1^2*R2^2*pi)
```

Expresada como

$$\mu = -\frac{N (R_1^2 - R_2^2)}{4\pi \cdot L \cdot \Omega^2 \cdot R_1^2 \cdot R_2^2} \quad (7.11)$$

7.1.1. Valores reales

Se pretende evaluar la viscosidad de un fluido, ocupando el viscosímetro de tambor rotatorio. El cual tiene dimensiones de 75 cm de largo. El diámetro exterior es de 15.12 cm y la brecha de separación es de 0.12 cm. Se hace girar el cilindro interior a 200 rpm y se mide consume 3 Watts de potencia. Programandolo

```

%Datos
L1 = 75/100;%Largo del cilindro [m]
D_e = 15.12/100;%Diametro externo [m]
D_i = (15.12-0.12)/100;%Diametro externo [m]
r_e = D_e/2;%radio externo [m]
r_i = D_i/2;%radio interno [m]
N2 = 3;%Potencis [Watts]
Omg1 = 200/60;%Revoluciones [rps]

%Evaluación
mu_p = subs(mu,R1,r_i);%Sustitución de radio interno [m]
mu_p = subs(mu_p,R2,r_e);%Sustitución de radio externo [m]
mu_p = subs(mu_p,L,L1);%Sustitución de la longitud [m]
mu_p = subs(mu_p,Omg,Omg1);%Sustitución de la velocidad angular [rps]
mu_p = double(subs(mu_p,N1,N2))%Sustitución de la potencia [Watts]
---
mu_p =

    0.0805

```

Por lo tanto el fluido tiene una viscosidad de $0.0805 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ o también lo que es igual $\text{Pa} \cdot \text{s}$. El código completo es

```

clc
clear all
syms v(r) R1 R2 Omg N1 mu L
%EDO
ode = diff(1/r*diff(v(r)*r,r),r) == 0;

%Condiciones de frontera Dirichlet
cond1 = v(R1) == Omg*R1;
cond2 = v(R2) == 0;
conds = [cond1 cond2];

%Solución de EDO
v = dsolve(ode,conds);
v = simplify(v)

%Valor de tau
v1 = 1/r*v;
tau = -mu*r*diff(v1,r);
tau = simplify(tau)

%Valor de mu
As = 2*pi*R1*L;%Area de sección

```

```

v_ang = Omg*R1;%velocidad angular
N = tau*As*v_ang;
N = subs(N,r,R1)%Cambio de variable de r por R1
Ec1 = N1 == N;
mu = solve(Ec1,mu)

%Datos
L1 = 75/100;%Largo del cilindro [m]
D_e = 15.12/100;%Diametro externo [m]
D_i = (15.12-0.12)/100;%Diametro externo [m]
r_e = D_e/2;%radio externo [m]
r_i = D_i/2;%radio interno [m]
N2 = 3;%Potencis [Watts]
Omg1 = 200/60;%Revoluciones [rps]

%Evaluación
mu_p = subs(mu,R1,r_i);%Sustitución de radio interno [m]
mu_p = subs(mu_p,R2,r_e);%Sustitución de radio externo [m]
mu_p = subs(mu_p,L,L1);%Sustitución de la longitud [m]
mu_p = subs(mu_p,Omg,Omg1);%Sustitución de la velocidad angular [rps]
mu_p = double(subs(mu_p,N1,N2))%Sustitución de la potencia [Watts]

```

7.2. Fuente de cascada de piscina

Siendo un dispositivo de decoración para piscinas siendo muy llamativo. Su funcionamiento de la cascada es muy sencillo: el mecanismo toma el agua de la misma piscina, y esto lo hace por medio de una bomba la cual luego es expulsada por una abertura de la cascada. El agua pasa por cortas tuberías de PVC para ser expulsada hacia la misma piscina, tal como se ve en la figura 7.2.1

El objetivo de este problema es ver cual es el comportamiento gráfico de la solución de la ecuación diferencial en coordenadas rectangulares. Así como deducir la ecuación para la velocidad media y el caudal. Para este problema no se esta manejando un solo esfuerzo cortante, si no que hay dos, las cuales son las que ejercen las paredes a lo largo de los ejes y y z . Se supondrá que el agua se comporta como un fluido Newtoniano y que la ρ se mantiene constante a todo lo largo del tubo rectangular, ver figura 7.2.2(a). No hay reacción química, el sistema opera en un régimen, se considera un fluido incompresible y que el sistema opera de manera isotérmica. Las dimensiones del fluido circundante son las vistas en la figura 7.2.2(b)



Figura 7.2.1: Fuente de cascada de piscinas.

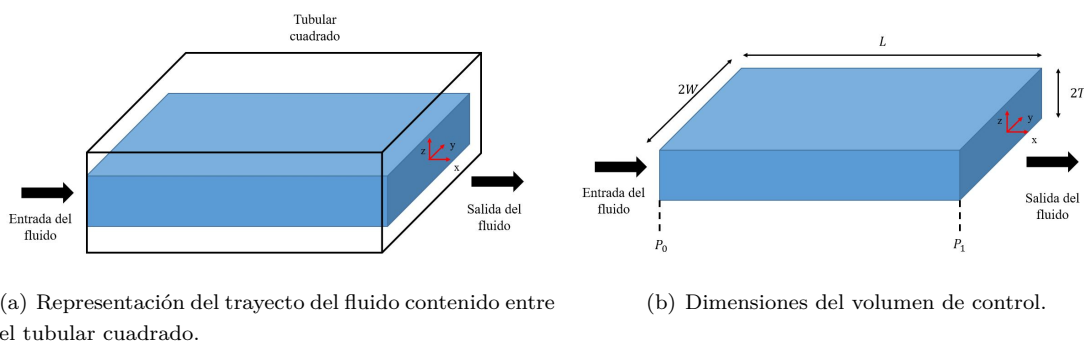


Figura 7.2.2: Representación esquemática de la cascada de agua.

7.2.1. Demostración de la ecuación

Para determinar la ecuación de Navier-Stokes adecuada, se procede ocupar en primera instancia la ecuación de movimiento para fluidos Newtonianos con ρ y μ constante, apéndice B.4, teniendo entre las opciones tres ecuaciones: (B.40), (B.41) y (B.42), siendo la más óptima la ecuación (B.40), debiéndose a que el único componente del vector velocidad que es relevantes es v_x , mientras que las otras dos ecuaciones restantes para las componentes y y z son cero, debido a que no son relevantes, pudiéndose decir que $v_y = v_z = 0$.

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_x + v_x \frac{\partial}{\partial x} v_x + v_y \frac{\partial}{\partial y} v_x + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_x \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

De esta ecuación se debe simplificar varios términos. Siendo el primero los términos de velocidad en v_y y v_z , por ya la explicación antes mencionada.

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} v_x + v_x \frac{\partial}{\partial x} v_x + (0) \frac{\partial}{\partial y} v_x + (0) \frac{\partial}{\partial z} v_x \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_x + v_x \frac{\partial}{\partial x} v_x \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

El segundo término a eliminar es aquel que tiene incluido la gravedad, ya que en sistemas donde esta horizontalmente este término se desprecia

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_x + v_x \frac{\partial}{\partial x} v_x \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right]$$

Como el sistema opera de manera estacionaria el término de variación respecto al tiempo $\partial v_x / \partial t$ se eliminaría. El término de variación de presión, $\partial P / \partial x$, no se puede eliminar, ya que para que el sistema funcione, el fluido debe ser bombeado de la piscina hasta la fuente cascada

$$\rho \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} v_x \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] \quad (7.12)$$

Para seguir eliminando términos, hay que remitirse a la ecuación de continuidad para coordenadas rectangulares (B.28), la cual hace referencia a la ley de conservación de masas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

De esta ecuación se elimina la velocidad en el eje y y z , ya que no existe velocidad en dicha dirección

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) = 0$$

Como el sistema opera de manera continua el término de variación respecto al tiempo se elimina, $\partial \rho / \partial t$. Además, el fluido es incompresible entonces ρ será constante, pudiendo sacarla como una constante

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} (v_x) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (v_x) = 0 \quad (7.13)$$

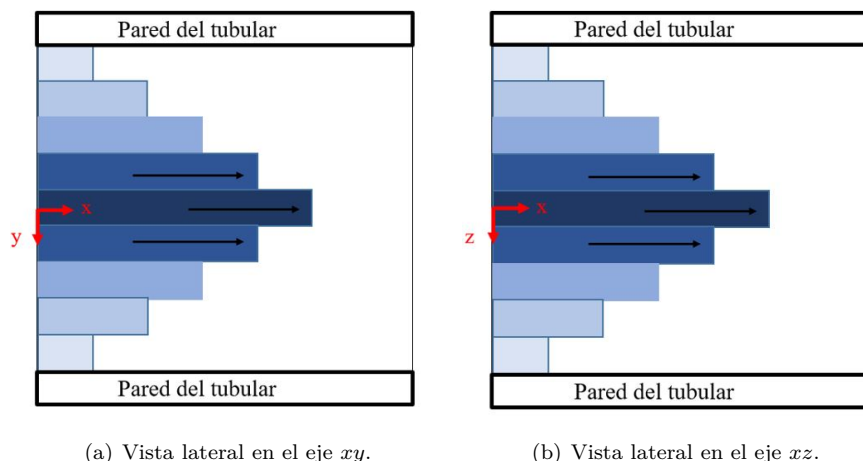


Figura 7.2.3: Vista lateral del fluido problema. Donde el color más intenso es la capa molecular donde el fluido adquiere más velocidad, mientras que el menos intenso es la capa molecular que adquiere menos velocidad.

Donde la ecuación (7.13) representa que la velocidad en el eje x será constante a todo lo largo L de la placa. Haciendo que la velocidad inicial y final sea la misma. Aplicando esta igualdad en la ecuación (7.12)

$$\mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (7.14)$$

Se debe ver el comportamiento del fluido dentro del tubular, viéndose la figura 7.2.3 se observa que hay un esfuerzo cortante tanto a lo largo del eje y como en el eje z . El fluido entre más se acerque más a las paredes este tendera a disminuir su velocidad a nivel molecular. Pudiendo decir que

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= -\mu \frac{dv_x}{dy} \\ \tau_{zx} &= -\mu \frac{dv_x}{dz} \end{aligned}$$

Por lo tanto la velocidad v_x variara a lo largo del eje y y z . Pudiendo concluir que la ecuación (7.14) queda tal que

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (7.15)$$

La ecuación deducida se le conoce como **ecuación de Poisson** para coordenadas rectangulares.

7.2.2. Resolución de la ecuación

Como se puede apreciar a partir de una ecuación general, como es (B.40), se puede reducir hasta llegar a una forma más reducida como es (7.15), al tener en cuenta ciertas consideraciones, se permite ir eliminando términos innecesarios. Además es sumamente raro usar en su forma completa las ecuaciones de movimiento para resolver problemas de dinámica de fluidos [1]. Lo que procede es resolver la EDP (7.15), estableciendo las condiciones de frontera, pero hay que tener cuidado, ya que el eje coordenado se estableció en el centro del tubo rectangular, ya que en la literatura [102] [103] [104] [105] [106] se hacen mención que es más fácil

poner el centro coordinado el centro de la tubería rectangular que en una esquina, ya que permite ocupar la condición de frontera de simetría respecto al plano $y = 0$ y $z = 0$, cuando se quiere resolver de manera analítica, permitiendo estudiar sólo un cuadrante, siendo el caso del cuadrante I, ya que es positivo, tal como se aprecia en la imagen 7.2.4. Ya que al resolver un cuadrante, se aplica la condición de frontera de simetría.

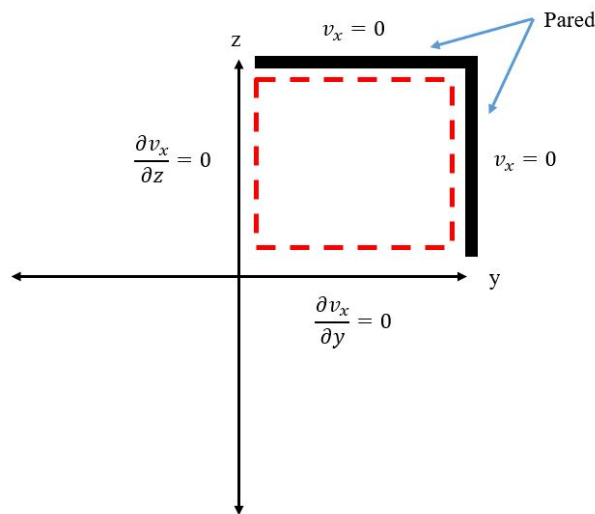


Figura 7.2.4: Condiciones de frontera para el flujo a través de la sección rectangular de tubería.

Por lo tanto las condiciones de frontera quedarían como

$$\begin{array}{llll}
 y = -W & v_x = 0 & t > 0 & C.F.1 \\
 y = W & v_x = 0 & t > 0 & C.F.2 \\
 z = -T & v_x = 0 & t > 0 & C.F.3 \\
 z = T & v_x = 0 & t > 0 & C.F.4 \\
 0 < x < L & P_0 < P < P_1 & t > 0 & C.F.5
 \end{array}$$

Para resolver la ecuación (7.15), se debe identificar de que depende cada variable: para v_x depende de y y z , mientras que para P , depende únicamente de x . Pudiendo resolver esta ultima mediante una integración simple

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{1}{\mu} \frac{\int_{P_0}^{P_1} \partial P}{\int_0^L \partial x} \\
 &= \frac{P_1 - P_0}{\mu \cdot L}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la solución anterior en la ecuación 7.15

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\frac{P_1 - P_0}{\mu \cdot L}$$

Aplicando un pequeño cambio de variable, donde $(P_1 - P_0)/(\mu \cdot L) = \alpha$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\alpha \tag{7.16}$$

La ecuación anterior es una EDP no homogénea, la cual para facilitar su solución se debe convertir en una EDP homogénea, para ello se debe cumplir lo siguiente $v_z = u(y, z) + \varepsilon(z)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \varepsilon'' &= -\alpha \\ \varepsilon'' &= -\alpha\end{aligned}$$

Resolviendo la expresión anterior

$$\varepsilon = C_2 + C_1 z - \frac{\alpha z^2}{2}$$

Para encontrar las constante C_1 y C_2 , se debe recordar que se esta ocupando **condiciones de simetría**, por ello si se desplaza a lo largo del eje z hasta llegar a T la velocidad será cero, igual al desplazarse a lo largo del eje $-z$ hasta llegar a $-T$ la velocidad será de igual manera cero, por ello $u(y, -T) = 0$ y $u(y, T) = 0$. Resolviendo

$$\varepsilon(z) = \frac{\alpha}{2} (T^2 - z^2) \quad (7.17)$$

Quedado la ecuación (7.16) como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (7.18)$$

$$v_x(-W, z) = 0 \quad ; \quad u(W, z) = f(z) - \varepsilon(z) \quad ; \quad t > 0$$

$$v_x(y, -T) = 0 \quad ; \quad u(y, T) = 0 \quad ; \quad t > 0$$

Donde la ecuación (7.18) es la ecuación de Laplace. Para resolver se ocupa el método de separación de variables, donde $u(y, z) = Y(y)Z(z)$

$$\begin{aligned}Y''Z + YZ'' &= 0 \\ \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} &= \lambda^2\end{aligned}$$

Generando dos ecuaciones

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0 \quad (7.19)$$

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0 \quad (7.20)$$

Resolviendo primero para la ecuación (7.20), ya que tiene condiciones de frontera donde no interviene la función $\varepsilon(z)$, para ello se debe recordar que existen tres casos, cuando $\lambda^2 < 0$, $\lambda^2 = 0$ y $\lambda^2 > 0$. Se debe llegar a una solución no trivial, remitiéndose al libro del Zill [23] capitulo 12.5 que menciona ecuaciones de Laplace menciona que $\lambda^2 > 0$, para las condiciones de frontera donde $Z(-T) = 0$ y $Z(T) = 0$, obteniendo

$$Z(z) = C_3 \cos(\lambda z)$$

Donde $\lambda = n\pi/2T$, por ende

$$Z(z) = C_3 \cos\left(\frac{n\pi}{2T}z\right) \quad (7.21)$$

Para resolver la ecuación (7.19)

$$Y = C_5 \cosh(\lambda y) + C_6 \sinh(\lambda y)$$

Para hallar la solución no trivial se sigue el mismo procedimiento que la ecuación (7.20), donde esta sujeta a una única condición de frontera $Y(W) = 0$, cuando $\lambda^2 > 0$. Dando la solución no trivial [23]

$$Y(y) = C_5 \cosh(\lambda y)$$

O

$$Y(y) = C_5 \cosh\left(\frac{n\pi}{2T}y\right) \quad (7.22)$$

Aplicando el principio de superposición donde

$$u(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{2T}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2T}z\right) \quad (7.23)$$

Donde $A_n = C_3 \cdot C_5$. Para obtener el valor de A_n debe evaluarse integrando en el intervalo $[-T, T]$, ya que es el criterio de simetría y debido a que solo es valida para funciones trigonométricas, por eso no se puede ocupar el intervalo $[-W, W]$, ya que la función que le corresponde es una hiperbólica. La función $f(z) = 0$ ya que es una condición de frontera. Entonces

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{n\pi}{2T}W\right)A_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T [f(z) - \varepsilon(z)] \cos\left(\frac{n\pi}{2T}z\right) dz \\ A_n &= \frac{1}{T \cosh\left(\frac{n\pi}{2T}W\right)} \int_{-T}^T [f(z) - \varepsilon(z)] \cos\left(\frac{n\pi}{2T}z\right) dz \\ &= \frac{1}{T \cosh\left(\frac{n\pi}{2T}W\right)} \int_{-T}^T \left[-\frac{\alpha}{2} (T^2 - z^2)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{2T}z\right) dz \end{aligned}$$

Antes de proceder a resolver la integral, hay que observa si n es par o impar. Aplicando el criterio de paridad

$$(-x) \neq x$$

Indicando que la variable n es impar y se puede aplicar una definición el cual dice que para un número impar se puede escribir como

$$n = 2k + 1 \quad (7.24)$$

Sustituyendo la expresión (7.24) en la integral y resolviendo

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{T \cosh\left(\frac{n\pi}{2T}W\right)} \int_{-T}^T \left[-\frac{\alpha}{2} (T^2 - z^2)\right] \cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{2T}z\right] dz \\ &= -\frac{16T^2\alpha}{\pi^3 (2k+1)^3 \cosh\left[\frac{(2k+1)\pi}{2T}W\right]} [\pi (2k+1) \sin(\pi k) + 2 \cos(\pi k)] \end{aligned}$$

Se simplificará la expresión anterior, donde $\sin(\pi k) = 0$ y para $\cos(\pi k) = (-1)^k$

$$A_n = -\frac{16T^2\alpha}{\pi^3 (2k+1)^3 \cosh\left[\frac{(2k+1)\pi}{2T}W\right]} [2(-1)^k] \quad (7.25)$$

Sustituyendo la ecuación (7.25) en (7.23)

$$u(y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{16T^2\alpha}{\pi^3 (2k+1)^3 \cosh\left[\frac{(2k+1)\pi}{2T}W\right]} [2(-1)^k] \cosh\left[\frac{(2k+1)\pi}{2T}y\right] \cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{2T}z\right] \quad (7.26)$$

Sumando $\varepsilon(z)$ y $v_x(y, z)$ obtenemos una solución del problema original

$$\begin{aligned}
 v_x(y, z) &= f(z) - \varepsilon(z) + u(y, z) \\
 &= -\frac{\alpha}{2} (T^2 - z^2) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16T^2\alpha}{\pi^3 (2k+1)^3} [2(-1)^k] \frac{\cosh\left[\frac{(2k+1)\pi y}{2T}\right]}{\cosh\left[\frac{(2k+1)\pi W}{2T}\right]} \cos\left[\frac{(2k+1)\pi z}{2T}\right] \\
 &= -\frac{\alpha}{2} (T^2 - z^2) - 8T^2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{\pi^3 (2k+1)^3} \frac{\cosh\left[\frac{(2k+1)\pi y}{2T}\right]}{\cosh\left[\frac{(2k+1)\pi W}{2T}\right]} \cos\left[\frac{(2k+1)\pi z}{2T}\right] \\
 &= -\frac{\alpha}{2} T^2 \left\{ 1 - \left(\frac{z}{T}\right)^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{\pi^3 (2k+1)^3} \frac{\cosh\left[\frac{(2k+1)\pi y}{2T}\right]}{\cosh\left[\frac{(2k+1)\pi W}{2T}\right]} \cos\left[\frac{(2k+1)\pi z}{2T}\right] \right\}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo a $\frac{\pi}{2}(2k+1) = a_k$

$$v_x(y, z) = -\frac{(P_1 - P_0) T^2}{2\mu \cdot L} \left[1 - \left(\frac{z}{T}\right)^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a_k^3} \frac{\cosh\left(\frac{a_k \cdot y}{T}\right)}{\cosh\left(\frac{a_k \cdot W}{T}\right)} \cos\left(\frac{a_k \cdot z}{T}\right) \right] \quad (7.27)$$

La ecuación obtenida permite demostrar como se comporta la velocidad contenida entre ambas placas donde las dimensiones del tubo rectangular pueden ser de igual longitud o variable. Para obtener el caudal hay que acordarse de la ecuación (5.99), donde v_x será la velocidad obtenida en función de (y, z) y A_f será el área por la que fluye el fluido, dada por (5.100).

$$\dot{V} = \int_{-T}^T \int_{-W}^W v_x dy dz$$

Primero integrando respecto a z

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -\int_{-T}^T \frac{(P_1 - P_0) T^2}{2\mu \cdot L} \left[1 - \left(\frac{z}{T}\right)^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a_k^3} \frac{\cosh\left(\frac{a_k \cdot y}{T}\right)}{\cosh\left(\frac{a_k \cdot W}{T}\right)} \cos\left(\frac{a_k \cdot z}{T}\right) \right] dz \\
 &= -\frac{(P_1 - P_0) T^2}{2\mu \cdot L} \left[\int_{-T}^T 1 dz - \int_{-T}^T \left(\frac{z}{T}\right)^2 dz + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a_k^3} \frac{\cosh\left(\frac{a_k \cdot y}{T}\right)}{\cosh\left(\frac{a_k \cdot W}{T}\right)} \int_{-T}^T \cos\left(\frac{a_k \cdot z}{T}\right) dz \right] \\
 &= -\frac{(P_1 - P_0) T^2}{2\mu \cdot L} \left[\frac{4T}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a_k^3} \frac{\cosh\left(\frac{a_k \cdot y}{T}\right)}{\cosh\left(\frac{a_k \cdot W}{T}\right)} \cdot \frac{2T \sin(a_k)}{a_k} \right] \\
 &= -\frac{(P_1 - P_0) T^2}{2\mu \cdot L} \left[\frac{4T}{3} + 8T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a_k^4} \frac{\cosh\left(\frac{a_k \cdot y}{T}\right)}{\cosh\left(\frac{a_k \cdot W}{T}\right)} \sin(a_k) \right]
 \end{aligned}$$

Luego, se integra respecto a y

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= - \int_{-W}^W \frac{(P_1 - P_0) T^2}{2\mu \cdot L} \left[\frac{4T}{3} + 8T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a_k^4} \frac{\cosh\left(\frac{a_k \cdot y}{T}\right)}{\cosh\left(\frac{a_k \cdot W}{T}\right)} \sin(a_k) \right] dy \\
 &= - \frac{(P_1 - P_0) T^2}{2\mu \cdot L} \left[\int_{-W}^W \frac{4T}{3} dy + 8T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a_k^4} \sin(a_k) \int_{-W}^W \frac{\cosh\left(\frac{a_k \cdot y}{T}\right)}{\cosh\left(\frac{a_k \cdot W}{T}\right)} dy \right] \\
 &= - \frac{(P_1 - P_0) T^2}{2\mu \cdot L} \left[\frac{8TW}{3} + 8T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a_k^4} \sin(a_k) \frac{2T \sinh\left(\frac{a_k \cdot W}{T}\right)}{a_k \cosh\left(\frac{a_k \cdot W}{T}\right)} \right] \\
 &= - \frac{(P_1 - P_0) T^2}{2\mu \cdot L} \left[\frac{8TW}{3} + 16T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a_k^5} \sin(a_k) \tanh\left(\frac{a_k \cdot W}{T}\right) \right] \\
 &= - \frac{4(P_1 - P_0) WT^3}{3\mu \cdot L} \left[1 + 6 \frac{T}{W} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a_k^5} \sin(a_k) \tanh\left(\frac{a_k \cdot W}{T}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Simplificando la expresión, para ello recordar que $\cos(\pi \cdot k) = (-1)^k$ y se debe enfocar uno en el producto trigonométrico

$$\sin(a_k)(-1)^k = \sin(a_k) \cos(\pi \cdot k)$$

Aplicando la identidad trigonométrica de suma a producto

$$\begin{aligned}
 \sin(a_k) \cos(\pi \cdot k) &= \frac{1}{2} [\sin(a_k + \pi \cdot k) + \sin(a_k - \pi \cdot k)] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1) + \pi \cdot k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1) - \pi \cdot k\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k + \pi k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k - \pi k\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}(k+1)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Para todo $\sin(\pi \cdot \mathbb{N}/2) = 1$, donde \mathbb{N} representa todos los números naturales.

$$\begin{aligned}
 \sin(a_k) \cos(\pi \cdot k) &= \frac{1}{2} [1 + 1] \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\dot{V} = - \frac{4(P_1 - P_0) WT^3}{3\mu \cdot L} \left[1 + 6 \frac{T}{W} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^5} \tanh\left(\frac{a_k \cdot W}{T}\right) \right] \quad (7.28)$$

Para la velocidad promedio $\langle v \rangle$ parte de la ecuación (5.66)

$$\begin{aligned}
 \langle v \rangle &= \frac{\dot{V}}{A_f} \\
 &= \frac{\int_{-W}^W \int_{-T}^T v_y dx dy}{\int_{-W}^W \int_{-T}^T dx dy} \\
 &= - \frac{4(P_1 - P_0) WT^3}{3\mu \cdot L} \left[1 + 6 \frac{T}{W} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^5} \tanh\left(\frac{a_k \cdot W}{T}\right) \right] (4WT)^{-1}
 \end{aligned}$$

Simplificando

$$\langle v \rangle = -\frac{(P_1 - P_0) T^2}{3\mu \cdot L} \left[1 + 6 \frac{T}{W} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^5} \tanh \left(\frac{a_k \cdot W}{T} \right) \right] \quad (7.29)$$

7.2.3. Solución numérica

Para graficar la función (7.29), se debe ocupar el comando `[X, Y] = meshgrid(x, y)` y para graficar el comando `surf`, ya que como se menciona en [31] MATLAB define una superficie a partir de las coordenadas z de puntos en una cuadrícula del plano $x - y$, y usa líneas rectas para conectar puntos adyacentes. Las funciones `mesh` y `surf` muestran superficies en tres dimensiones:

- `mesh` produce superficies de malla que colorean solo las líneas que conectan los puntos de definición.
- `surf` muestra las líneas de conexión y las caras de la superficie en color.

Dicho de otra forma, es que el comando `[X, Y] = meshgrid(x, y)` permitir hacer vectores filas para posteriormente graficar con el comando `surf` los vectores generados en un plano 3D, es algo similar cuando en la secundaria se graficaban funciones a partir del método de **tabulación**, pero con la gran diferencia que estará en un plano 3D. Pero ello es sencillo seguir el procedimiento, únicamente es hacer la serie de Fourier, como se menciono con anterioridad, pero con la condición de que ahora se pondrán puntos, `.`, donde corresponda, ya que se esta haciendo sumas y producto de vectores filas.

```

clc
clear all
b = 0.2;%Ancho [variable]
c = 0.2;%Espesor [variable]
P0 = 5;%Presión inicial
P1 = 0;%Presión final
mu = 1/100;% Viscosidad
L = 8;%Longitud
alpha = (P1-P0)/(2*mu*L);%Correlación

Y = -b:0.01:b;
Z = -c:0.01:c;
[y, z]=meshgrid(Y, Z);
s = 0;
i = 10;
A0 = 1-(z/c).^2;
for k=1:i
    ak = (2*k-1)*pi/2;
    A1 = ak.*y/c;
    A2 = ak*b/c;
    A3 = ((-1).^k)./(ak.^3);
    A4 = cosh(A1);
    A5 = cosh(A2);
    A6 = cos(ak*z/c);

```

```

B = A3.*(A4./A5).*A6;
s = s+B;
end
vx =-alpha.*c^2.*(A0+4*s);
surf(y,z,vx)
xlabel('Distancia [m], y');ylabel('Distancia [m], z')
zlabel('Velocidad [m/s], v_x')

```

Para el programa generado los valores del espesor z y la anchura y se irán cambiando ya que al gráficar dan una curiosidad. Primero analizando la figura 7.2.5, donde tanto el largo como ancho son de la misma dimensión, se aprecia que tiene forma típica de **bala**, la cual se muestra claramente los esfuerzos cortantes, la cual para tubos cuadrados su número de $Re = 1540$ para flujo laminar [107]. Pero que pasa si se empieza a estirar el cuadrado a tal forma de que vaya agarrando forma de rectángulo, tal como el problema original, esto se muestra en las figuras 7.2.6 y 7.2.7. En la primera se aprecia que el grosor z (figura 7.2.6(b)) ve perfectamente el perfil parabólico pero al variar el ancho y y hacerlo más grande, ese perfil se extiende bastante (figura 7.2.6(a)) haciendo que no se aprecie bastante bien. Pero ahora si se extiende más la anchura, manteniendo igual el grosor, se ve que el grosor no cambia (figura 7.2.7(b)) pero al verlo del lado de la anchura (figura 7.2.7(a)) el perfil parabólico no se llega a apreciar lo suficiente mente bien, casi perdiéndose y para $Re = 1191$ en placas rectangulares en flujo laminar [108]. Llegando a la conclusión de que entre más juntas estén las placas más se apreciara y existirá el esfuerzo cortante, pero entre más alejado estén las placas, los esfuerzos serán muy pequeño de notar, por ello cuando la separación es muy grande entre paredes se puede despreciar el esfuerzo cortante en dicha distancia. Es algo similar a cuando se va a un laboratorio y se pipetea un reactivo, se obtiene el famoso **menisco de aforo**, donde entre más delgado sea el tubo más se apreciara dicho menisco, pero en cambio, si se quiere apreciar el menisco en un vaso de precipitado de $1L$ será sumamente difícil verlo, tal como se ve en la figura 7.2.8.

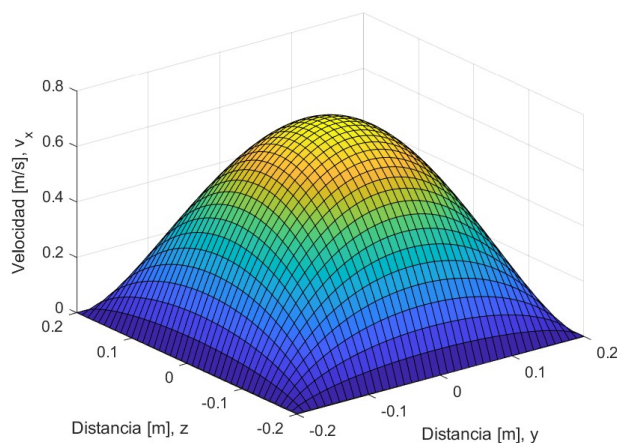
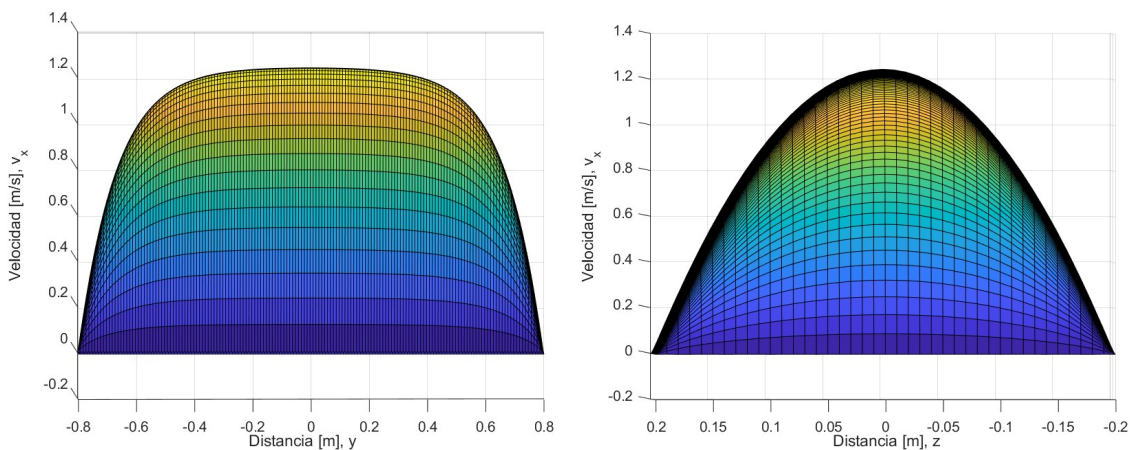
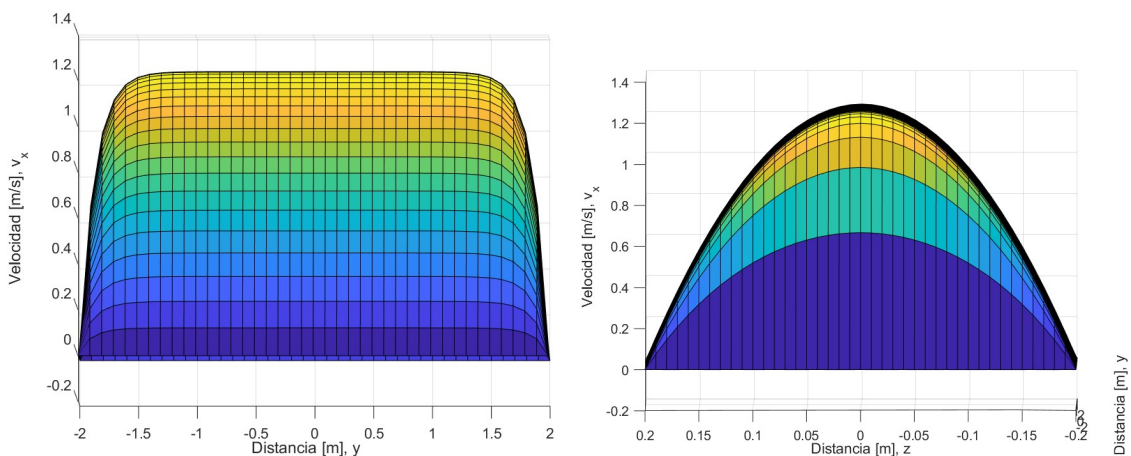


Figura 7.2.5: Fuente de cascada donde tiene dimensiones cuadradas.



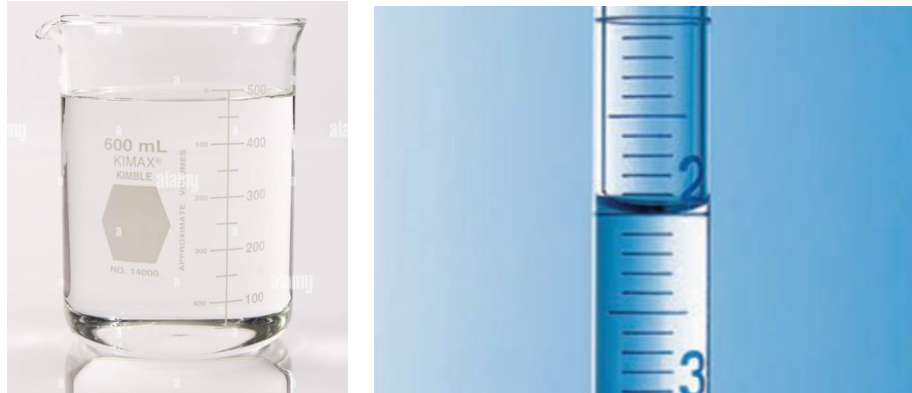
(a) Gráfico del comportamiento del fluido en el plano *velocidad vs tiempo*. (b) Gráfico del comportamiento del fluido en el plano *velocidad vs distancia*.

Figura 7.2.6: Gráfico cuando el tiempo es igual a 1 s.



(a) Gráfico del comportamiento del fluido en el plano *velocidad vs tiempo*. (b) Gráfico del comportamiento del fluido en el plano *velocidad vs distancia*.

Figura 7.2.7: Gráfico cuando el tiempo es igual a 1 s.



(a) Vaso de precipitado.

(b) Probeta graduada.

Figura 7.2.8: Menisco de aforo en dos recipientes de diferente tamaño.

7.3. Tubería con variación en el tiempo

Ejemplo No. 3 Partiremos de una tubería vertical de una red de un sistema de oleoductos que transportan un hidrocarburo, tal como se ve en la figura 7.3.1.



Figura 7.3.1: Red de oleoductos [91].

En la tubería fluye un hidrocarburo sumamente viscoso que se puede considerar como un fluido Newtoniano. La tubería tiene dimensiones de largo L , radio R , con una presión inicial P_0 y una presión final P_1 , tal como se ve representada esquemáticamente en la figura 7.3.2. Se pretende ver como es el comportamiento de la velocidad del fluido dentro de la tubería desde el arranque, considerando que la viscosidad del fluido no depende de la temperatura y está además, opera de manera isotérmica.

7.3.1. Demostración de la ecuación

Se ocupara las ecuación del apéndice B, para ser más específico la de la sección B.4. Ahora queda terminar que ecuación ocupar. Primero se debe especificar que coordenadas se están ocupando, en este caso son cilíndricas, tienen únicamente tres ecuaciones (B.43), (B.44), (B.45). Viendo la dirección con la que fluye el fluido, la velocidad tiene dirección z , por lo cual v_θ y v_r serán igual a cero, quedando únicamente la ecuación B.45.

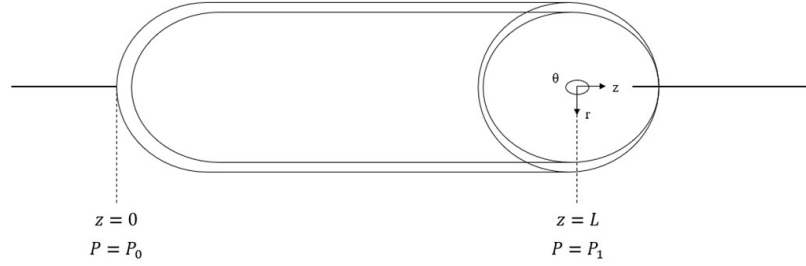


Figura 7.3.2: Tubería en la cual fluye un fluido newtoniano en estado no estacionario.

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v_z \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Una vez escogida la ecuación a ocupar, se ocupa la misma condición propuesta que, $v_r = v_\theta = 0$. Así como que la $g_z = 0$ y que v_z no depende de θ haciendo que se elimine y por lo tanto se puede simplificar la expresión anterior

$$\rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + (0) \frac{\partial(0)}{\partial r} + \frac{(0)}{r} \frac{\partial(0)}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v_z \right) + \frac{1}{r^2} (0) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho(0)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v_z \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]$$

Ocuparemos ahora la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas (B.29)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

Dicha ecuación se simplifica, como se hizo anteriormente, cuando $v_r = v_\theta = 0$, además de que la densidad (ρ) se considera constante, al ser un fluido incompresible

$$\frac{\partial}{\partial t} (0) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\rho r (0)] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho (0)] + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} v_z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} v_z = 0$$

Obteniendo la segunda derivada de la expresión generada

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} v_z = 0$$

Con esta dos expresiones de continuidad generadas, se simplifica la ecuación de movimiento

$$\rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z(0) \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v_z \right) + (0) \right]$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v_z \right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v_z \right)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v_z \right)$$

Por lo tanto, la ecuación queda definida como

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (7.30)$$

Donde $v_z = v$, esto con la finalidad de no introducir nuevos subíndices a la hora de resolver dicha ecuación.

7.3.2. Resolución de la ecuación

La ecuación anterior es bastante tediosa y compleja de resolver por métodos analíticos, debido a que se empieza a introducir los **parámetros de Bessel**, pero gracias al avance de la tecnología se puede resolver dicha ecuación ocupando el método de diferencias finitas [96] [97] [98], aplicando el **método de líneas** [98], donde se tiene como condiciones

$$P = P_0 \quad z = 0 \quad t > 0 \quad C.F.1$$

$$P = P_1 \quad z = L \quad t > 0 \quad C.F.2$$

$$r = 0 \quad v_z = 0 \quad t > 0 \quad C.F.3$$

$$r = R \quad v_z = 0 \quad t > 0 \quad C.F.4$$

$$t = 0 \quad v_z(t) = 0 \quad 0 < r < R \quad C.F.5$$

Cuando $r = 0$, se aplica el teorema de l'Hôpital [98]

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right) = \frac{d^2v}{dr^2}$$

Aplicando dicho teorema en la expresión (7.30)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{d^2v}{dr^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + 2\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) \end{aligned}$$

Lo que se procede hacer el segundo término de la igualdad, $\partial^2 v_z / \partial r^2$, se deberá discretizar [35] [99] [100]

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + 2\nu \left[\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{(\Delta r)^2} \right] \quad (7.31)$$

Aplicando la condición de frontera C.F.3

$$\begin{aligned} \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta r} &= 0 \\ v_{i+1} - v_{i-1} &= 0 \\ v_{i+1} &= v_{i-1} \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión (7.31)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + 2\nu \left[\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i+1}}{(\Delta r)^2} \right] \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + 2\nu \left[\frac{2v_{i+1} - 2v_i}{(\Delta r)^2} \right] \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + 4\nu \left[\frac{v_{i+1} - v_i}{(\Delta r)^2} \right] \end{aligned}$$

Considerando que $r = 0$ es el punto de partida o la primer ecuación que parte del origen, se puede establecer que $i = 0$, por lo tanto

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + 4\nu \left[\frac{v_{0+1} - v_0}{(\Delta r)^2} \right]$$

O también como

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + 4\nu \left[\frac{v_1 - v_0}{(\Delta r)^2} \right] \quad (7.32)$$

Desarrollando la ecuación (7.31) cuando $i \geq 1$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{n\Delta r} \frac{v_{i+1} - v_i}{(\Delta r)} \right] \quad (7.33)$$

Puesto que $r = n\Delta r$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\nu}{(\Delta r)^2} \left[v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} + \frac{v_{i+1} - v_i}{n} \right] \quad (7.34)$$

Expandiendo la ecuación (7.32)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\nu}{(\Delta r)^2} \left[v_2 - 2v_1 + v_0 + \frac{v_2 - v_1}{n} \right], \quad n = 1 \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\nu}{(\Delta r)^2} \left[v_3 - 2v_2 + v_1 + \frac{v_3 - v_2}{n} \right], \quad n = 2 \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\nu}{(\Delta r)^2} \left[v_4 - 2v_3 + v_2 + \frac{v_4 - v_3}{n} \right], \quad n = 3 \\ &\dots = \dots \\ \frac{\partial v_9}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\nu}{(\Delta r)^2} \left[v_{10} - 2v_9 + v_8 + \frac{v_{10} - v_9}{n} \right], \quad n = 9 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores junto con la ecuación (7.32) se resuelve simultáneamente usando la condición C.F.4

7.3.3. Solución numérica

Para el problema se plante que el oleoducto recorre una distancia totalmente vertical de una estación de bombeo de un pozo hasta una central de abastecimiento para camiones, la cual tiene una distancia de 12 km. El crudo que se esta extrayendo se considera *Olmecca* el cual tiene una densidad de 850 kg/m³ y una densidad de 60 ssu a los 100°F. La tubería que transporta dicho crudo tiene dimensiones de 10 cm de diámetro interno y la bomba que genera la presión necesaria para transportar el crudo tiene un diferencial de presión de -10 atm. Se pide encontrar la velocidad máxima dentro del crudo dentro de la tubería en los tiempos de 5, 10, 20, 50, 100, 150, 200, 300 y 500 s, una vez que se empieza a bombear. Gráficar el perfil de velocidad a los 5, 20 y 50 s y compararlos. Para resolver el problema se escriben primero los datos proporcionados por el problema:

- Densidad: $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$
- Diferencial de presión: $dP = -10 \text{ atm}$
- Distancia: $L = 12 \text{ km}$

- Viscosidad cinemática: $\nu = 60 \text{ ssu}$
- Diámetro: $D = 10 \text{ cm}$

Lo primero a determinar es el tamaño de paso, el cual se relativamente sencillo. Debiendo ocupar el radio $r = D/2$ o lo que es igual a $r = 0.1/2 = 0.05 \text{ m}$. El sistema de ecuaciones tiene 10 incógnitas, el tamaño de paso deberá dividirse entre el número de incógnitas

$$\begin{aligned} \Delta r &= \frac{r}{10} \\ &= \frac{0.05}{10} \\ &= 0.005 \end{aligned}$$

Siento el tamaño de paso de $\Delta r = 0.005 \text{ m}$.

1. Para programar en MATLAB se inicia poniend las condiciones iniciales, donde la velocidad en cualquier punto del $t < 0$ será 0, por ser el reposo. Al tener 10 incógnitas que van de v_0 a v_9 , v_{10} no se contempla por ser una condición de frontera, todas en el tiempo 0 serán igual a 0 y al final de colocar todas se pondrán en un vector fila.

```

clc
clear
%Condiciones iniciales
v00 = 0;
v01 = 0;
v02 = 0;
v03 = 0;
v04 = 0;
v05 = 0;
v06 = 0;
v07 = 0;
v08 = 0;
v09 = 0;
v = [v00 v01 v02 v03 v04 v05 v06 v07 v08 v09];
    
```

2. Abajo de v , se pondrá el rango de tiempo el cual ira de 0 hasta 500, siendo este variable

```

% Rango del tiempo
tspan = [0 500]; %El ultimo valor cambiara
    
```

3. Para resolver las múltiples ecuaciones que se obtienen se ocupara el comando `ode45`, dicho comando resuelve ecuaciones diferenciales no rígidas; por el método de orden intermedio. El comando en el programa será `[t, vt] = ode45(@fn, tspan, v)`, donde la variable `@fn` indica que esta llamando a un comando `function`, siendo donde se generan las ecuaciones; `tspan` siendo el intervalo de tiempo; `v` son las condiciones iniciales, siento estos tres los valores de entrada; `t` y `vt` son las variables de salida, donde la primera le corresponde al intervalo de tiempo y la segunda es la solución de las múltiples ecuaciones de velocidad. Dicho programa empezara cuando la velocidad vale 0, es decir, es la condición inicial y el mismo programa hará el bucle para encontrar las múltiples ecuaciones.

```
% Solución par EDO
[t, vt] = ode45(@fn, tspan, v);
```

4. Para programar las 10 ecuaciones que se plantearon, se debe introducir el comando `function`, pero todo lo que se programe dentro de dicho comando ira al final del programa, con la finalidad de evitar guardarlo en una nueva carpeta y llamarlo cada rato que se quiera correr el programa, se hace para programar todo en un *scrip*, para ello se llamara `function dvdt = fn(,vt)`, donde el programa se llama `fn`. Se programara abajo del comando `function` los datos proporcionados por el problema, la extracción de datos de las condiciones de frontera y luego las 10 ecuaciones, donde estas ultimas se colocaran en un vector fila.

```
% Función para EDO
function dvdt = fn(~,vt)
% Datos
p = 850;%Densidad [kg/m^3]
dP = -101325*10;%Presión [Ps]
L = 20*1000;%Longitud [m]
nu = 60;
nu = 0.0022*nu/1000;%Viscosidad cinemática [kg/m-s]
dr = 10/2/100/10;%Tamaño de paso
v10 = 0;

% Extracción de datos
v0 = vt(1);
v1 = vt(2);
v2 = vt(3);
v3 = vt(4);
v4 = vt(5);
v5 = vt(6);
v6 = vt(7);
v7 = vt(8);
v8 = vt(9);
v9 = vt(10);

% Ecuaciones
a = -1/(p) * (dP/L) + (4*nu/dr^2) * (v1-v0);
b = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v2-2*v1+v0 + (v2-v1)/1);
c = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v3-2*v2+v1 + (v3-v2)/2);
d = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v4-2*v3+v2 + (v4-v3)/3);
e = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v5-2*v4+v3 + (v5-v4)/4);
f = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v6-2*v5+v4 + (v6-v5)/5);
g = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v7-2*v6+v5 + (v7-v6)/6);
h = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v8-2*v7+v6 + (v8-v7)/7);
i = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v9-2*v8+v7 + (v9-v8)/8);
j = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v10-2*v9+v8 + (v10-v9)/9);
```

```
% Conjunto de EDO
dvdt = [a b c d e f g h i j]';
end
```

5. Se extraerá los resultados obtenidos de la variable vt, para poder gráficas y obtener la velocidad máxima en el tiempo deseado

```
% Extracción de parámetros
v0 = vt(:,1);
v1 = vt(:,2);
v2 = vt(:,3);
v3 = vt(:,4);
v4 = vt(:,5);
v5 = vt(:,6);
v6 = vt(:,7);
v7 = vt(:,8);
v8 = vt(:,9);
v9 = vt(:,10);
```

6. La velocidad máxima será en la ultima solución de la variable v0, debido a que si se toma la primera solución, será en la condición de frontera donde esta la tubería, mientras que la ultima será la condición de frontera *líquido-líquido*, a veces conocida como **condición de simetría**.

```
% Obtención de la velocidad máxima
a = numel(v0);
v_max = v0(a);

% Obtención de número de Re
nu1 = 60;
nu1 = 0.0022*nu1/1000;
D1 = 10/100;
Re = (v_max*D1)/nu1;

if Re<2100
    disp(['Es flujo laminar, la velocidad máxima es...',num2str(v_max)])
else
    disp('No es flujo laminar')
end
```

7. La programación para graficar es mediante el comando plot

```
% Gráfica de r vs velocidad
figure
plot(t,v0,t,v1,t,v2,t,v3,t,v4,t,v5,t,v6,t,v7,t,v8,t,v9),grid
xlabel('Distancia de la pared al radio');
```

```
ylabel('Velocidad, [m/s]');
```

El programa todo junto será

```
clc
clear
%Condiciones iniciales
v00 = 0;
v01 = 0;
v02 = 0;
v03 = 0;
v04 = 0;
v05 = 0;
v06 = 0;
v07 = 0;
v08 = 0;
v09 = 0;
v = [v00 v01 v02 v03 v04 v05 v06 v07 v08 v09];

% Rango del tiempo
tspan = [0 500];%El ultimo valor cambiara

% Solución par EDO
[t, vt] = ode45(@fn, tspan, v);

% Extracción de parámetros
v0 = vt(:,1);
v1 = vt(:,2);
v2 = vt(:,3);
v3 = vt(:,4);
v4 = vt(:,5);
v5 = vt(:,6);
v6 = vt(:,7);
v7 = vt(:,8);
v8 = vt(:,9);
v9 = vt(:,10);

% Obtención de la velocidad máxima
a = numel(v0);
v_max = v0(a);

% Obtención de número de Re
nu1 = 60;
nu1 = 0.0022*nu1/1000;
D1 = 10/100;
```

```

Re = (v_max*D1)/nu1;

if Re<2100
    disp(['Es flujo laminar, la velocidad máxima es...',num2str(v_max)])
else
    disp('No es flujo laminar')
end

% Gráfica de r vs velocidad
figure
plot(t,v0,t,v1,t,v2,t,v3,t,v4,t,v5,t,v6,t,v7,t,v8,t,v9),grid
xlabel('Distancia de la pared al radio');
ylabel('Velocidad, [m/s]');

% Función para EDO
function dvdt = fn(~,vt)
% Datos
p = 850;%Densidad [kg/m^3]
dP = -101325*10;%Presión [Ps]
L = 20*1000;%Longitud [m]
nu = 60;
nu = 0.0022*nu/1000;%Viscosidad cinemática [kg/m-s]
dr = 10/2/100/10;%Tamaño de paso
v10 = 0;

% Extracción de datos
v0 = vt(1);
v1 = vt(2);
v2 = vt(3);
v3 = vt(4);
v4 = vt(5);
v5 = vt(6);
v6 = vt(7);
v7 = vt(8);
v8 = vt(9);
v9 = vt(10);

% Ecuaciones
a = -1/(p) * (dP/L) + (4*nu/dr^2) * (v1-v0) ;
b = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v2-2*v1+v0 + (v2-v1) / 1) ;
c = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v3-2*v2+v1 + (v3-v2) / 2) ;
d = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v4-2*v3+v2 + (v4-v3) / 3) ;
e = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v5-2*v4+v3 + (v5-v4) / 4) ;
f = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v6-2*v5+v4 + (v6-v5) / 5) ;

```

```

g = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v7-2*v6+v5 + (v7-v6) / 6) ;
h = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v8-2*v7+v6 + (v8-v7) / 7) ;
i = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v9-2*v8+v7 + (v9-v8) / 8) ;
j = -1/(p) * (dP/L) + (nu/dr^2) * (v10-2*v9+v8 + (v10-v9) / 9) ;

% Conujtno de EDO
dvdt = [a b c d e f g h i j]';
end

```

En la tabla siguiente se muestra la velocidad máxima con respecto al tiempo. Al ir aumentando el tiempo la velocidad ira aumentado hasta llegar a un punto en aunque el tiempo sea sumamente enorme donde la velocidad máxima se mantendrá constante, conocido a este punto como **estado estacionario**.

Tabla 7.3.1: Resultados de la velocidad máxima a cierto tiempo y con su margen de error.

Tiempo [s]	Velocidad máxima [m/s]	Error [%]
5	0.20504	18.2879688
10	0.25093	4.1739861
20	0.26186	0.15632745
50	0.26227	0.03049362
100	0.26235	0.02668903
150	0.26228	0.04954079
200	0.26241	0.04956535
300	0.26228	0
500	0.26228	-

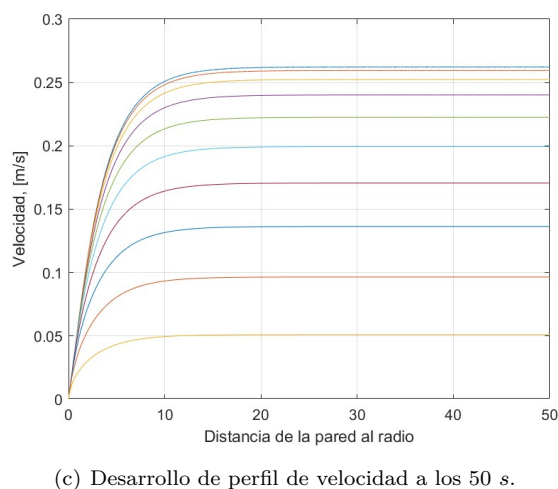
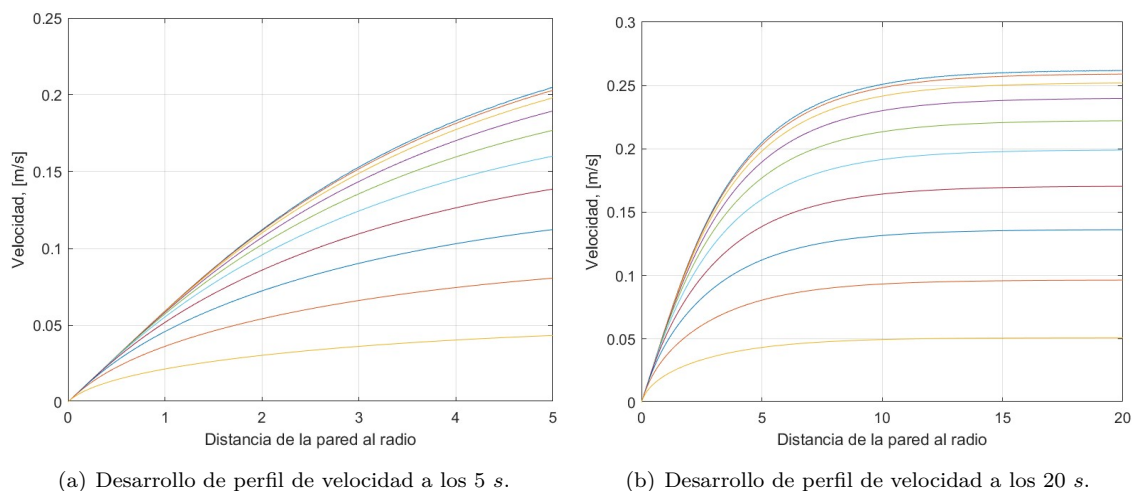


Figura 7.3.3: Entre mayor sea el tiempo, el perfil de velocidad empezará a desarrollar, llegando incluso a tiempos muy grandes a sobreponerse las gráficas, significando que se encuentra en un estado estacionario.

7.4. Teoría de la capa límite

Ejemplo No. 4 Antes de 1860, aproximadamente, el interés de la ingeniería por la mecánica de fluidos se limitaba casi exclusivamente al flujo del agua. El desarrollo de la industria química durante la última parte del siglo XIX dirigió la atención a otros líquidos aparte del agua y a los gases.

La complejidad de los flujos viscosos, y en particular de los flujos turbulentos, restringió en gran medida los avances en la dinámica de fluidos hasta que el ingeniero alemán Ludwig Prandtl observó en 1904 que muchos flujos pueden separarse en dos regiones principales. La región próxima a la superficie está formada por una delgada capa límite donde se concentran los efectos viscosos y en la que puede simplificarse mucho el modelo matemático. Fuera de esta capa límite, se pueden despreciar los efectos de la viscosidad, y pueden emplearse las ecuaciones matemáticas más sencillas para flujos no viscosos.

En realidad, la capa límite es un invento humano, una forma de facilitar las cosas para que sus limitadas

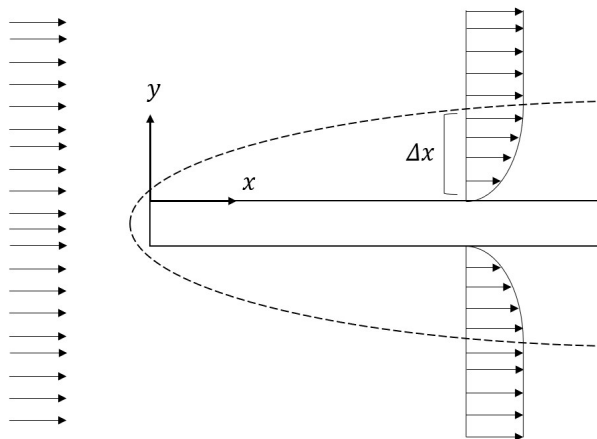


Figura 7.4.1: Sistema de coordenadas para el flujo bidimensional en el cual fluye uniformemente un flujo paralelo a lo largo de una placa plana que esta alineada con el *eje x*

capacidades matemáticas no se vean sobrepasadas por las complicadas ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones de Navier-Stokes, y son tan difíciles de resolver que los humanos sólo saben hacerlo en determinados casos muy simplificados.

La teoría de capa límite fue introducida por Prandtl, esta teoría establece que, para un fluido en movimiento, todas las pérdidas por fricción tiene lugar en una delgada capa adyacente al contorno del sólido (llamada capa límite) y que el flujo exterior a dicha capa puede considerarse como carente de viscosidad. En términos generales se puede decir que, puesto que la viscosidad es bastante pequeña en casi todos los fluidos, los esfuerzos cortantes deben ser apreciables únicamente en las regiones en donde existan grandes gradientes de velocidad; el flujo en otras regiones se podría describir con gran exactitud por medio de las ecuaciones para flujo no viscoso. Las características más sobresalientes de la capa límite pueden describirse a través del caso del flujo sobre una superficie plana y fija, sobre la que se hace incidir una corriente uniforme de velocidad, tal como se aprecia en la figura 7.4.1. La capa límite se entiende como aquella en la que la velocidad del fluido respecto al sólido en movimiento varía desde cero hasta el 99 % de la velocidad de la corriente. Prandtl estableció las ecuaciones para el flujo en la capa límite laminar, a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, con las siguientes hipótesis: el espesor de la capa límite es pequeño en comparación con otras dimensiones geométricas, el flujo es estacionario y bidimensional, y la presión es constante a través de cualquier sección transversal.

7.4.1. Demostración de la ecuación

La capa límite es un termino acuñado por Prandtl [1] [81] [95] al intentar separar el flujo en dos regiones. Una externa donde los efectos viscosos son despreciables y son válidos la hipótesis de flujo potencial con velocidad de aproximación v_∞ y una interna cercana a la pared sólida donde los efectos de la viscosidad se vuelven predominantes debido a la condición de no deslizamiento y existe una perfil de velocidad \mathbf{v} , lo que ocasiona una gradiente predominante de velocidad en la dirección perpendicular a dicha pared. Prandtl fue el primero en darse cuenta que los efectos de entrada del flujo hacia arriba se ven minimizados para números de Reynolds altos y la región donde los efectos viscosos son importantes se convierte en una capa

delgada a la que denominó **capa límite**. Su demostración se puede ver en el siguiente enlace [122], ya que es sumamente larga de demostrar y no se ha llegado a una solución analítica. Pero si se ha llegado a una solución numérica por el método de Runge-Kutta. Si se ve el vídeo completo se llega a la ecuación de Blasius

$$f'' + \frac{1}{2}f \cdot f'' = 0 \begin{cases} \eta = 0, & f = 0, & f'(0) = 0 \\ \eta = \infty, & f' = 1 \end{cases} \quad (7.35)$$

El programa será casi idéntico al caso anterior de tubería en estado estacionario, ejemplo 3 de esta sección, solo cambiando ciertas variables.

```

clc
clear
% Condiciones de frontera [variables]
cond1 = 0;
cond2 = 0;
cond3 = 0.3321;
conds = [cond1 cond2 cond3];

% Distancia
x = [0 10];

% Solución par EDO
[X, FX] = ode45(@fn, x, conds);

% Extracción de parametros
F1 = FX(:,1);
F2 = FX(:,2);
F3 = FX(:,3);

% Gráfica de r vs t
figure
plot(X,F1,X,F2,X,F3),grid
xlabel('Distancia'),ylabel('f')

% Función para EDO
function odes = fn(~,FX)

% Extracción de datos
f1 = FX(1);
f2 = FX(2);
f3 = FX(3);

% Funciones
ode1 = f2;
ode2 = f3;
ode3 = -0.5*f1*f3;

```

```
% Conjunto de EDO
odes = [ode1 ode2 ode3]';
end
```

Capítulo 8

Distribución de velocidad en flujo turbulento

El flujo laminar se caracteriza por trayectorias suaves y regulares de partículas del fluido, en contraste con el flujo turbulento, que se caracteriza por el movimiento irregular de las partículas (se puede decir caótico) del fluido. En el flujo turbulento, la velocidad del fluido en un punto está experimentando cambios continuos tanto en magnitud como en dirección. El conocimiento detallado del comportamiento del régimen de flujo turbulento es importante en ingeniería, porque la mayoría de los flujos industriales son turbulentos. Desafortunadamente, el carácter altamente intermitente e irregular de la turbulencia complica todos los análisis. De hecho, a menudo se dice que la turbulencia es el *último problema no resuelto en la física matemática clásica*.

La herramienta principal disponible para su análisis es el análisis CFD, (por sus siglas en inglés *Computational Fluid Dynamics*). CFD es una rama de la mecánica de fluidos que utiliza análisis numéricos y algoritmos para resolver y analizar problemas que involucran flujos de fluidos turbulentos. Es ampliamente aceptado que las ecuaciones de Navier-Stokes (o las ecuaciones simplificadas de Navier-Stokes promediadas por Reynolds) son capaces de exhibir soluciones turbulentas, y estas ecuaciones son la base de esencialmente todos los códigos CFD.

No hay definición exacta sobre la turbulencia, pero existen características que lo definen [109]:

- **Aleatorio.** La velocidad en un punto es *impredecible*, es decir, en cada punto que se mire en el flujo la velocidad va a estar variando en el tiempo aumentando y disminuyendo, causando que no se pueda predecir por más que se conozca el valor actual no se sabe como va a evolucionar la velocidad en un pequeños instante en el tiempo después. Haciendo que el sistema sea *caótico*, en otras palabras, un sistema es caótico cuando por más se conozcan las condiciones iniciales, la evolución del sistema es tan sensible a pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales que resulta imposible predecir como va a evolucionar en el futuro. Las predicciones que se pueden hacer en el flujo turbulento son *estadísticas*, por poner un ejemplo, se puede conocer el caudal en una distancia en un tiempo y distancia dado con una pequeña incertidumbre, más sin embargo no se puede saber cual sera la velocidad en un instante dado, debido a lo antes mencioano.
- **Difusividad.** El flujo turbulento tiene una gran capacidad de mezclado, sea de masa, cantidad de

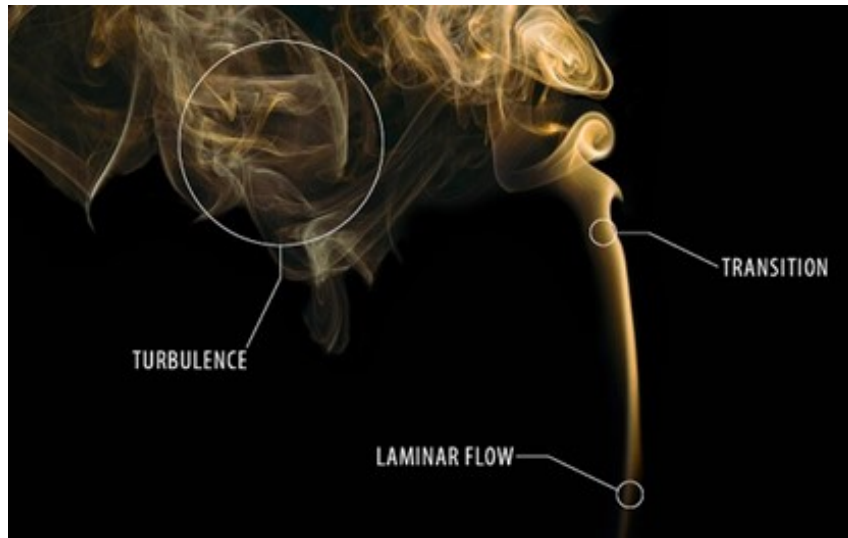


Figura 8.0.1: Diferencia entre el flujo laminar y flujo turbulento [94].

movimiento, temperatura, entre otras. La turbulencia tiende a reducir los gradientes de concentración de todas estas variables, para mezclarlos de la forma más homogénea posible.

- **Rotacionalidad y Tridimensionalidad.** En el flujo turbulento se forma vórtices que interactúan entre sí, deformándose e intercambiando energía, debido a las fluctuaciones hacia todas las direcciones. Los vórtices toman distintas orientaciones y la velocidad tiene componentes y variaciones en todas las direcciones espaciales.
- **Multiplicidad de escalas.** Los vórtices y ondulaciones generadas aleatoriamente de líneas de corrientes se producen en tamaños muy diferentes dentro del mismo flujo. Se superponen movimientos de escalas grandes, medianas y pequeñas, en varios ordenes de magnitud. Pero si bien se tienen muchos tamaños, incluso los más pequeños son suficientemente grandes para poder aplicar la hipótesis de **continuo**, es decir, los remolinos más pequeños que aparecen en un flujo turbulento van a ser mucho mayores que las escalas moleculares, pudiendo ocupar la hipótesis de continuo y los flujos turbulentos responden a las ecuaciones de Navier-Stokes, para flujos tridimensionales no estacionarios.
- **Altos números de Reynolds.** Para cada tipo de flujo hay un Re distinto, por debajo del cual la turbulencia se disipa por efectos de la viscosidad y el flujo se torna laminar.
- **Disipación.** Debido a las tensiones de corte existentes entre los remolinos, la energía cinética de estos tiende a disminuir, convirtiéndose en calor. Si la turbulencia no tiene una fuente de energía (fricción contra una superficie, gradientes térmicos, etc), se termina disipando.
- La turbulencia es una característica del **movimiento** del fluido y no una propiedad del fluido, como puede ser la viscosidad.

Se puede hacer un ajuste a las ecuaciones de Navier-Stokes en flujo laminar para adaptarlas a ecuaciones de flujo turbulento la cual se puede profundizar en los vídeos siguientes [123], [124] y [125] donde se

demuestra a detalle el como a partir de las ecuaciones (B.40), (B.41) y (B.42) se llega a

$$\rho \frac{D\bar{v}_x}{Dt} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}^L - \tau_{xx}^T) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}^L - \tau_{xy}^T) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz}^L - \tau_{xz}^T) + \rho g_x \quad (8.1)$$

$$\rho \frac{D\bar{v}_y}{Dt} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{yx}^L - \tau_{yx}^T) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}^L - \tau_{yy}^T) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{yz}^L - \tau_{yz}^T) + \rho g_y \quad (8.2)$$

$$\rho \frac{D\bar{v}_z}{Dt} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{zx}^L - \tau_{zx}^T) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{zy}^L - \tau_{zy}^T) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz}^L - \tau_{zz}^T) + \rho g_z \quad (8.3)$$

A las tres ecuaciones obtenidas se les conoce como **ecuación RANS para flujo turbulento**. Donde los subíndices L y T representan flujo laminar y turbulento respectivamente. Antes para flujos laminares incompresibles, se tenía un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales con cuatro incógnitas (las tres componentes de velocidad y la presión). Pero ahora se tienen cuatro ecuaciones con diez incógnitas (las tres componentes de la velocidad media, la presión y las seis componentes del tensor de Reynolds). Haciendo que estas cuatro ecuaciones no alcancen para resolver todo el sistema, constituyendo el **problema de clausura**, que actualmente, matemáticamente no está resuelto por lo menos no con una solución general. Existen modelos matemáticos que aproximan los tensores turbulentos pero ninguna es tan universal para aplicar el cualquier tipo de problemas.

Capítulo 9

Transporte de interfase en sistemas isotérmicos

Muchos de los problemas en ingeniería pueden clasificarse en dos grandes categorías:

- Flujo de canales. Siendo por ejemplo el bombeo del crudo a lo largo de tuberías o el flujo de agua en canales abiertos.
- Flujo alrededor de objetos sumergidos. Por ejemplo el movimiento de aire alrededor de las alas de un avión, el movimiento de fluido alrededor de un pellet que experimenta sedimentación o el flujo de un banco de tubos de intercambiadores de calor.

El flujo en canales su objetivo principal suele ser la obtención de una relación entre la velocidad volumétrica de flujo, la caída de presión y/o el cambio de elevación. En cambio, los flujos que son alrededor de objetos sumergidos, la información que se desea es por regla general de la relación que hay entre la velocidad del fluido que se aproxima y la fuerza de resistencia sobre el objeto. Para muchos sistemas luego no es posible calcular tan fácil los perfiles de velocidad y de presión, en especial cuando el flujo es turbulento o la geometría es irregular. Para dichos sistemas se llegan a contemplar los datos experimentales que ayuden a determinar ciertos parámetros y así poder establecer correlaciones de variables dimensionales que permitan estimar el comportamiento del flujo dentro del sistema estudiado.

9.1. Factor de fricción

Considerando el flujo impulsado de manera estacionaria de un fluido de densidad constante, ya sea el caso de que el fluido circule por dentro de una tubería o alrededor de un objeto sumergido que tiene un eje simétrico. Existirá una fuerza $F_{f \rightarrow s}$ ejercida por el fluido sobre la superficie sólida, es conveniente separar dicha fuerza en dos partes: F_s , siendo la fuerza adicional asociada con el movimiento del fluido y F_k que apunta hacia la misma dirección que la velocidad media $\langle v \rangle$ en el conducto, para el caso en tuberías, mientras que en el caso del objeto sumergido F_k apuntará en la misma dirección que la velocidad de aproximación v_∞ . Para ambos tipos de sistemas se afirma que la magnitud de la fuerza F_k es proporcional a un área característica A y una energía cinética característica K por unidad de volumen, así

$$F_k = A \cdot K \cdot f \tag{9.1}$$

Donde la constante de proporcionalidad f se denomina **factor de fricción** [81]. Note que la ecuación generada no es una ley de dinámica de fluidos, sino, solo una definición de f . Dicha definición es útil, ya que la cantidad adimensional f puede proporcionarse con una función relativamente sencilla del número de Reynolds y de la forma del sistema. Resultado que para cualquier sistema de flujo dado, f no está definido hasta que se especifiquen A y K .

9.2. Factor de fricción en tuberías

Determinar el factor de fricción es crucial para el cálculo de flujo de fluidos ya que las pérdidas por fricción constituyen una fracción significativa de las caídas de presión del flujo, por lo tanto su precisión la determinación es de suma importancia. Para calcular el gradiente de fricción o la caída de presión por fricción, la ecuación de **Darcy-Weisbach** [81] [95] se utiliza universalmente

$$\hat{E}_v = f \left(\frac{L}{d} \right) \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (9.2)$$

Donde \hat{E}_v es la pérdida de carga debido a la fricción en m ; g es la aceleración debida a la gravedad, m/s^2 ; L es la longitud de tubería, m ; v es la velocidad media del fluido m/s ; d es el diámetro interno de tubería, m ; f es el factor de fricción de Darcy.

9.2.1. Diagrama de Moody

El factor de fricción f es una función del número de Reynolds y de la **rugosidad relativa** [110] de la tubería. La rugosidad relativa se define como la relación entre la rugosidad absoluta, ε de la pared interior de la tubería y el diámetro interior de la tubería

$$k = \frac{\varepsilon}{d} \quad (9.3)$$

Donde k es la rugosidad relativa de la tubería; ε es la rugosidad absoluta de la tubería en in ; d el diámetro de tubería in . La rugosidad surge debido a que el interior de las tuberías nunca es completamente liso y suave a nivel microscópico. Las paredes tienden a tener irregularidades en la superficie que dependen de gran medida del material con que están hechas, ver figura 9.2.1.

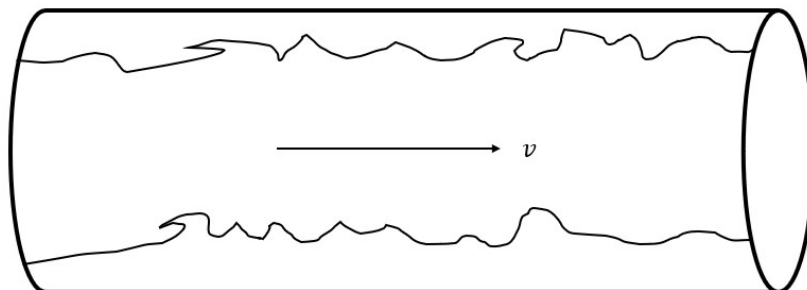


Figura 9.2.1: Rugosidades en el interior de una tubería.

La rugosidad en las tuberías tienden a aumentar después de estar en servicios, esto debido a las incrustaciones y a la corrosión causada por las reacciones químicas entre el material de la tubería y el fluido,

teniendo a oscilar entre 5 y 10 veces el valor de la rugosidad de fábrica. Las tuberías comerciales indican el valor de la rugosidad absoluta en *mm* o en *in*, algunas literaturas manejan el uso de tablas para hallar dicha rugosidad [110], aunque solo son validas para tuberías nuevas y limpias, porque en cuanto pase un tiempo, la rugosidad va a cambiar su valor de fábrica. Existe varias fórmulas que describen los factores de fricción para diferentes condiciones de flujo. La mayoría de ellos están incluidos en el diagrama de Moody, que es una presentación gráfica de los valores de *f* tipo Darcy-Weisbach. El uso de este gráfico, que se muestra en la figura 9.2.2, está generalmente aceptado en la industria del petróleo.

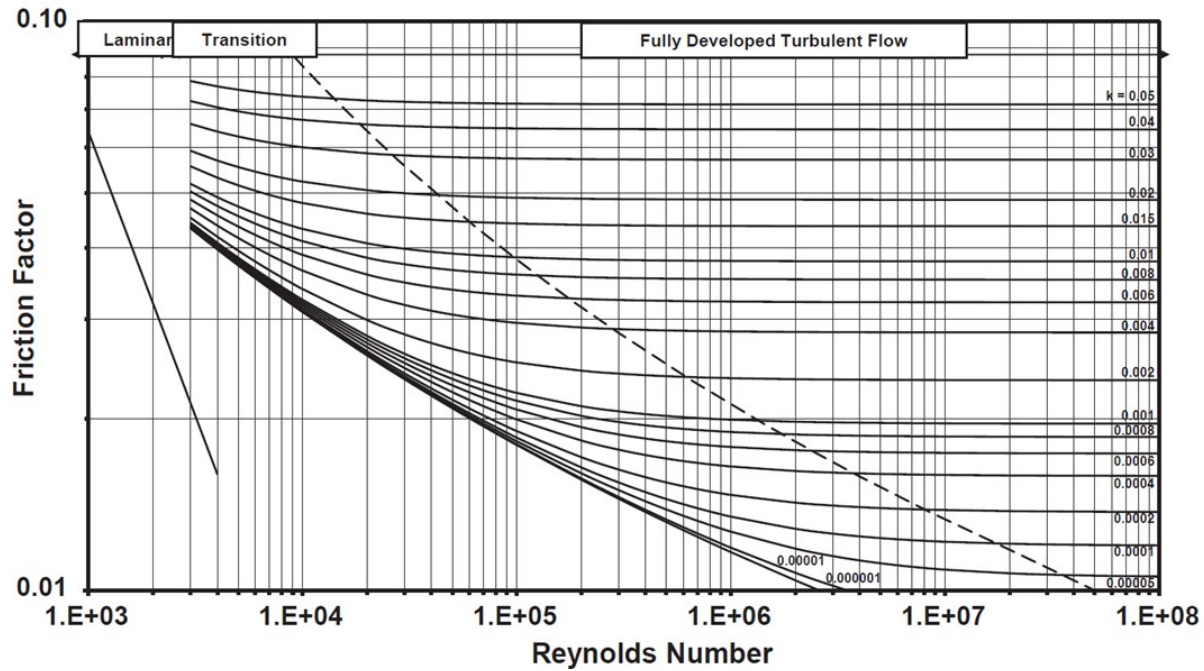


Figura 9.2.2: Diagrama de Moody: factor de fricción por flujo en tubería [95].

A partir del diagrama de Moody se puede obtener una aproximación del factor de fricción. Pero, también se puede obtener por medio de ecuaciones. Asumiendo que el flujo se encuentra en un **régimen laminar**, *f* varía únicamente con respecto al número de Reynolds

$$f = \frac{64}{Re} \quad (9.4)$$

La ecuación de Churchill es una ecuación empírica desarrollada que permite el cálculo del factor de fricción en condiciones de **flujo de transición**, dicha ecuación viene dada por

$$f = 8 \left[\left(\frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(A+B)^{1.5}} \right]^{1/2} \quad (9.5)$$

Donde

$$A = \left\{ 2.457 \ln \left[\frac{1}{(7/Re)^{0.9} + (0.27k/d)} \right] \right\}^{16} \quad (9.6)$$

$$B = \left(\frac{37530}{Re} \right)^{16} \quad (9.7)$$

Para los flujos en **régimen transitorio** y en regiones **turbulentas completamente desarrolladas**, se puede usar la ecuación de Colebrook-White para calcular el factor de fricción. Esta ecuación no se puede resolver directamente, si no, debe resolverse por medios iterativos, como por ejemplo el de **Newton-Raphson**.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (9.8)$$

El inconveniente de un esquema de iteración se puede eliminar si se utiliza una fórmula explícita para calcular los factores de fricción. Gregory y Fogarasi [111] investigaron varios de estos modelos y encontraron que la fórmula desarrollada por Chen [112] da muy buenos resultados. Esta fórmula reproduce con precisión el diagrama de Moody en toda la gama de condiciones. **No necesita un esquema iterativo** y, por lo tanto, puede acelerar cálculos largos (por ejemplo, cálculos multifásicos de caída de presión) que implica la determinación de un gran número de factores de fricción

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7065} - \frac{5.0452}{Re} \log C \right) \quad (9.9)$$

Donde

$$C = \frac{k^{1.1098}}{2.8257} + \left(\frac{7.149}{Re} \right)^{0.8981} \quad (9.10)$$

Ejemplo 9.2.1: Factor de fricción en tuberías

Determinar el factor de fricción de Darcy de una tubería y hacer una comparativa, entre los diferentes métodos de obtención, sea por el diagrama de Moody, la ecuación (9.8) y (9.9), además de determinar el error de cada una tomando como base a ecuación (9.8). Para esto se propone que una tubería de acero al carbón nueva de 6", cédula 80 ($D_i = 5.7610''$) y una rugosidad relativa de 0.045 mm. Por la cual viaja un fluido a una velocidad de 30 m/s. Las propiedades del fluido a 30 °C y 1 atm son $\mu = 0.018 \text{ cps}$, $\rho_l = 1.167 \text{ kg/m}^3$.

Resolución:

1. Ocupando el número de Reynolds, (4.18)

$$\begin{aligned} Re &= \frac{D \cdot \rho \cdot v}{\mu} \\ &= \frac{(0.1463 \text{ m})(1.167 \text{ kg/m}^3)(30 \text{ m/s})}{0.018 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}} \\ &= 2.8461 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

2. Ocupando la ecuación (9.3), para la rugosidad absoluta

$$\begin{aligned} k &= \frac{\varepsilon}{d} \\ &= \frac{4.5 \cdot 10^{-5}}{0.1463 \text{ m}} \\ &= 3.0753 \cdot 10^{-04} \end{aligned}$$

3. Determinar f por el método gráfico, viendo la figura 9.2.2, el cual a "ojo de buen cuvero" se puede decir que

$$f \cong 0.018 \quad (9.11)$$

4. Mediante la ecuación (9.8), se aproximo por métodos numérico, al igual que la ecuación (9.9), igual se programo en la misma ventana

```

D_i = 6.625 - 2*(0.432 );
D_i = D_i*2.54/100;
mu = 0.018/1000;
p = 1.167;
v = 30;
e = 4.5e-5;

Re = (D_i*p*v)/mu;
k = e/D_i;
%Diagrama de Moody
f0 = 0.018

%Ecuación 1
syms f
f1 = -2*log10(k/3.7+2.51/(Re*sqrt(f)))-1/sqrt(f);
tol = 10^-8;
x0 = 64/Re;
[R,I]=NewtonRaphson(f1,x0,tol);
f2 = R;

%Ecuación 2
C = k^(1.1098)/2.8257+(7.149/Re)^(0.8981);
A = -2*log10(k/3.7065-5.0452/Re*log10(C));
f3 = (1/A)^2;
---
f2 =
    0.0171

f3 =
    0.0172
    
```

Por lo tanto, el factor de fricción para la ecuación (9.8) sera $f = 0.0171$, mientras que para (9.9) es de $f = 0.0172$

5. Por ultimo, queda determinar el error, el cual estará dado por

```

E1 = abs ((f2-f0) / f2) *100;
E2 = abs ((f2-f3) / f2) *100;
---
E1 =
    5.1954

E2 =
    0.3039

```

Se nota que el método gráfico es el menos inexacto, con un margen de error de 5.2%, bajo la vista de este autor. Mientras que las otras dos ecuación, el margen es más pequeño, siendo de 0.30%, el cual en caso de no tener algún programa iterativo, podría ser de bastante ayuda la ecuación (9.9).

9.3. Factor de fricción de pruebas experimentales

Esta será una corta sección donde se pretende informarle al lector que no todos los factores de fricción se obtienen de forma analítica, si no, que deben tomarse a partir de datos experimentales y comprobar si el modelo se adapta correctamente. Para eso se expondrán tres artículos:

1. El primer artículo escrito por Sire, Galeasso y Najle [113], trata de predecir mediante un modelo analítico y posteriormente una evaluación empírica las pérdidas de carga del flujo de aire y agua en los rellenos que se llevan en las torres de enfriamiento.
2. El siguiente artículo hecho por M. Bandala, R. Macedo y F. Velez [114] teniendo como objetivo medir las caídas de presión para obtener los coeficientes de fricción de fluidos no-newtonianos. Empleando un sistema de transporte con varios accesorios en los que se hicieron pasar los fluidos de prueba, midiendo el flujo volumétrico y las pérdidas de presión. Los coeficientes de fricción que se obtuvieron para el agua como fluido de referencia fueron entre 0.42 y 25.7, y para las soluciones de sal de sodio de carboximetil celulosa (NaCMC) entre 0.43 y 38.1
3. El último artículo hecho por P. Rogelio, S. Florencio, C. Ignacio, T. Miguel y C. Juan [115], se realizó una investigación experimental de una solución agua-surfactante, con el objetivo de analizar la influencia del uso de estos aditivos en la reducción de fricción durante la conducción de líquidos en tuberías.

Capítulo 10

Balances macroscópicos para sistemas con flujo isotérmico

En los capítulos anteriores se vio como resolver de un sistema a nivel molecular, planteando un volumen de control y se generalizaba a todo el sistema llevando a un nivel **macro**. Lo mismo ocurrió cuando se dedujeron las ecuaciones de variación de velocidad para sistemas isotérmicos, las cuales se obtuvieron al escribir las leyes de conservación de movimiento sobre un sistema microscópico, al saber, un pequeño elemento de volumen a través del cual circula un fluido, obteniendo las ecuaciones diferenciales parciales para la variación de materia, cantidad de movimiento y energía mecánica en el sistema. El sistema microscópico no tiene superficies sólidas que lo limiten, y las interacciones del fluido con superficies sólidas en sistemas de flujo específicos se explican mediante las condiciones límite que se establecen sobre las ecuaciones diferenciales.

Sin duda el conocimiento de la materia así como sus propiedades físico-químicas, son observables en el campo macroscópico, pero las mismas provienen de la configuración microscópica, que les acaba confiriendo unas determinadas diferencias unas respecto a otras. EL **nivel microscópico** describe que fenómenos ocurren a escalas no visibles a simple vista y que son relevantes. Debido a su tamaño tan reducido es necesario instrumentación especial con gran presión, y luego sumamente costosos que pueda detectarlo o simplemente verlo, siendo más apto para investigación o trabajo de laboratorio. En cambio, un **nivel macroscópico** describe la posición o estado físico concreto de las partículas que integran un cuerpo pudiendo resumirse en una ecuación de estado que sólo incluye magnitudes extensivas (volumen, longitud, masa) y magnitudes intensivas promedio (presión, temperatura). Es por ello que que en la industria es más factible ocupar los sistemas macroscópicos por generalizar ya sea todo un equipo, un sistema o una gran pieza del equipo.

10.1. Balance macroscópico de materia

Los balances de materia son el fundamento en el cual se sustentan los análisis de operaciones unitarias en todos los procesos químicos, en los que la materia prima se transforma o se separa generando productos útiles. Las operaciones para la separación de componentes de mezclas esta basado en la transferencia de materia desde una fase homogénea a otra. Para esta primera deducción de ecuación, se considera la ley

de la conservación de la materia, antes vista como

$$\text{Entrada} - \text{Salida} + \text{Generación} - \text{Consumo} = 0$$

En este caso, no hay generación por ningún medio de materia. Si existirá reacción se tendría que poner, pero no es el caso. Al consumo se le denomina como velocidad de incremento de materia por lo cual quedaría como

$$\frac{d}{dt}m_t = \dot{m}_{ent} - \dot{m}_{sal} \quad (10.1)$$

Donde m_t es la masa total del fluido contenida en el sistema; \dot{m}_{ent} y \dot{m}_{sal} es el flujo másico de entrada y salida correspondientemente. El flujo másico es igual (1.34) y el flujo volumétrico, \dot{V} , igual a (1.31). La ecuación (10.1) se puede transcribir como

$$\frac{d}{dt}m_t = A_1 \cdot \langle v_1 \rangle \cdot \rho_1 - A_2 \cdot \langle v_2 \rangle \cdot \rho_2 \quad (10.2)$$

Si el sistema a estudiar se encuentra en un estado estacionario se modifica a

$$A_1 \cdot \langle v_1 \rangle \cdot \rho_1 = A_2 \cdot \langle v_2 \rangle \cdot \rho_2 \quad (10.3)$$

Las ecuaciones anteriores son valida solo para **fluidos incompresibles**, ya que cuando se trabaja con un fluido compresible habrá un cambio de densidad respecto al tiempo. Por lo tanto la ecuación (10.1) se modificar a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot V) = \dot{m}_{entrada} - \dot{m}_{salida} \quad (10.4)$$

10.2. Ecuación de energía mecánica

Existen numerosas aplicaciones de interés práctico, donde es más importante evaluar las magnitudes vinculadas con la energía del sistema (por ejemplo la potencia W de una bomba necesaria para bombear un determinado caudal de fluido) que magnitudes dinámicas (como caudales, pérdidas de carga, etc). Por esta razón es necesario realizar un estudio de las diferentes formas de energía y de interconversión de las mismas que pueden existir en un sistema. Para eso, se debe establecer el balance macroscópico de energía mecánica, que corresponde a la ecuación (6.53)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) \mathbf{v} \right] + \mathbf{v} \cdot \nabla P + \nabla \cdot (\tau \mathbf{v}) - \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) - (\tau : \nabla \mathbf{v}) = 0$$

La demostración para llegar a la ecuación (10.5), se puede ver en [116]

$$\frac{d(E_K + E_P)}{dt} = -\Delta \left(\frac{1}{2\alpha} \rho A \langle v_1 \rangle^3 + gh\rho \langle v \rangle A + P \langle v \rangle A \right) + W - E_v \quad (10.5)$$

Para llegar a dicha expresión es tener en mente basta conocimiento sobre álgebra vectorial. Pero eso es un análisis físico-matemático. Para un ingeniero químico, se basa más en leyes físicas y químicas, para darle un entendimiento a la realidad, para eso, para llegar a la ecuación (10.5) se parte de la ley de de la conservación de la energía, la cual viene dada por (1.25), con una ligera variación, que del lado derecho de la ecuación se agregara el término de **energía de acumulación** E_{acu} , esto se debe a que el sistema opera de forma no estacionaria, debido a que la ecuación (1.25) es para flujos estacionarios y los términos de trabajo y calor pasaran del lado izquierdo de la igualdad

$$\Delta \dot{U} + \Delta \dot{E}_K + \Delta \dot{E}_P - \dot{Q} + \dot{W} = \dot{E}_{acu} \quad (10.6)$$

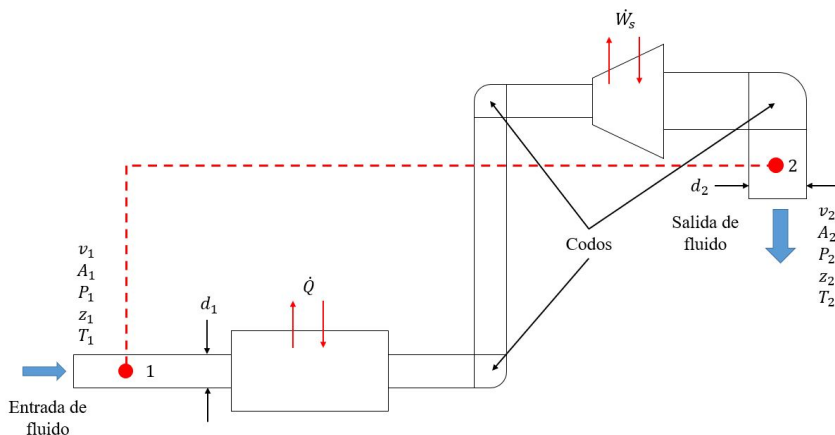


Figura 10.2.1: Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica a un sistema.

Para realizar la demostración se debe ver primero el diagrama, 10.2.1, el cual se pueden obtener varios puntos de interés. Se considera un fluido el cual se desplaza a lo largo de una tubería, que pasa por un intercambiador de calor (representado por un rectángulo) y una parte móvil (representado por un trapecoide), que puede ser una turbina, una bomba o un compresor incluso, donde el trabajo principal se denomina trabajo de eje, \dot{W}_s . También se toma en cuenta las condiciones a la entrada, donde hay una velocidad inicial: v_1 , una presión inicial, P_1 , una temperatura inicial, T_1 , una posición inicial respecto a la salida del fluido, z_1 , un diámetro de tubería inicial, d_1 y, al hablar de diámetro debe haber un área de entrada, A_1 . Así mismo, habrá condiciones de salida: una velocidad final, v_2 , una presión final, P_2 , una temperatura final T_2 , diámetro, d_2 , y área de salida de fluido, A_2 , y una altura de elevación con respecto a la de la entrada, z_2 , siendo este el caso general. Antes de enfocarse en la ecuación (10.6), se debe realizar un balance de materia, partiendo de la ecuación (6.2)

$$\dot{m}_{entrada} - \dot{m}_{salida} = \dot{m}_{acumulación} \quad (10.7)$$

Siendo un transporte de masa unidireccional, ya que únicamente son de relevancia las condiciones de entrada y salida del fluido. Se definen las variables de energía cinética, energía potencial, energía interna, trabajo y energía de acumulación:

- La energía cinética esta dada por la expresión

$$\begin{aligned} \Delta \dot{E}_K &= \dot{E}_{K, salida} - \dot{E}_{K, entrada} \\ &= \frac{1}{2} \dot{m}_{salida} v_2^2 - \frac{1}{2} \dot{m}_{entrada} v_1^2 \end{aligned}$$

- La energía potencial esta dada por la expresión

$$\begin{aligned} \Delta \dot{P}_K &= \dot{P}_{P, salida} - \dot{P}_{P, entrada} \\ &= \dot{m}_{salida} g z_2 - \dot{m}_{entrada} g z_1 \end{aligned}$$

- La energía interna esta dada por la expresión

$$\begin{aligned} \Delta \dot{U} &= \dot{U}_{K, salida} - \dot{U}_{K, entrada} \\ &= \dot{m}_{salida} U_2 - \dot{m}_{entrada} U_1 \end{aligned}$$

- Existe muchas formas de trabajo, pero solo se centrada en dos principalmente, el trabajo de eje, \dot{W}_s y el trabajo de flujo \dot{W}_f . Este ultimo trabajo es el que realiza el fluido a la entrada del sistema y también el que realiza a la salida sistema, esto se debe a que cuando entra el fluido tiene ciertas condiciones, pero a la hora que sale tendrá variaciones en sus condiciones. Para trabajar con estas variables es que la primera \dot{W}_s por lo regular ya se conoce o puede ser una variable a determinar, pero ahora viene la pregunta ¿cómo se calcula el trabajo de flujo? Para ello se debe recordar la definición de trabajo que es el producto de fuerza por distancia

$$\dot{W}_f = F \cdot d$$

Sustituyendo por la definición de fuerza (el producto de la presión por área) y la definición de distancia (el cociente del flujo volumétrico entre área)

$$\begin{aligned}\dot{W}_f &= (P \cdot A) \left(\frac{\dot{V}}{A} \right) \\ &= P \cdot \dot{V}\end{aligned}$$

Aplicando la definición de flujo volumétrico para convertir a flujo másico quedaría

$$\dot{W}_f = \dot{m} \frac{P}{\rho}$$

Recordando que habrá tanto un trabajo de flujo tanto a la entrada como a la salida, haciendo que exista un diferencial

$$\dot{W}_f = \dot{m}_{salida} \frac{P_2}{\rho_2} - \dot{m}_{entrada} \frac{P_1}{\rho_1}$$

Quedando expresado el trabajo como

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{m}_{salida} \frac{P_2}{\rho_2} - \dot{m}_{entrada} \frac{P_1}{\rho_1}$$

- Por ultimo, quedaría expresar el término de energía de acumulación, el cual se define como

$$\dot{E}_{acu} = \dot{m} E_{acu}$$

Donde se aplica el mismo procedimiento para obtener la ecuación (10.4)

$$\begin{aligned}\dot{E}_{acu} &= \dot{m} E_{acu} \\ &= \frac{\partial(m E_{acu})}{\partial t} \\ &= \frac{\partial(\rho V E_{acu})}{\partial t}\end{aligned}$$

Solo queda saber cuando vale E_{acu} , el cual viene dado por la suma de las energías internas que tiene el sistema, siendo los tres tipos de energía antes vista: potencia, cinética e interna [117]

$$\begin{aligned}E_{acu} &= U + E_K + E_P \\ &= U + \frac{1}{2} v^2 + gz\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión anterior

$$\dot{E}_{acu} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho V \left(U + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) \right]$$

Sustituyendo las defunciones anteriores en la ecuación (10.6)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho V \left(U + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) \right] = -\dot{Q} + \dot{W}_s + \dot{m}_{salida} \frac{P_2}{\rho_2} - \dot{m}_{entrada} \frac{P_1}{\rho_1} + \dot{m}_{salida} U_2 - \dot{m}_{entrada} U_1 + \frac{1}{2} \dot{m}_{salida} v_2^2 - \frac{1}{2} \dot{m}_{entrada} v_1^2 + \dot{m}_{salida} gz_2 - \dot{m}_{entrada} gz_1$$

Agrupando términos semejantes

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho V \left(U + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) \right] = -\dot{Q} + \dot{W}_s + \dot{m}_{salida} \left(\frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 + gz_2 + U_2 \right) - \dot{m}_{entrada} \left(\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 + gz_1 + U_1 \right) \quad (10.8)$$

Donde la expresión anterior representa **la ecuación general de energía mecánica para flujos no estacionarios**. La ecuación (10.8) a la deducida en (10.5), es similar pero con ligeras variaciones:

1. La primera es una expresión muy general de la energía, mientras que la segunda esta muy limitada a los volúmenes de controles fijo.
2. La segunda siendo una expresión, que como ingeniero se puede entender a simple vista a un problema, llámese de libros o en un problema industrial, mientras que la segunda es más aplicable para físicos y matemáticos, con términos vectoriales.
3. La ecuación (10.8) considera el calor de pueda producir el equipo, como puede ser un intercambiador de calor, mientras que (10.5) considera sistemas isotérmicos.
4. Por ultimo, es el término E_v en la expresión (10.5), mientras que en (10.8), no lo tiene o mejor dicho, aun no se encuentra su correlación.

Por lo regular, se tiende a ocupar sistemas estacionarios, esto debido a que son más fáciles de operar, controlar y sus ecuaciones no implican la variación respecto al tiempo. Para la ecuación (10.8), el término de variación se eliminara, quedando

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m}_{salida} \left(\frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 + gz_2 + U_2 \right) - \dot{m}_{entrada} \left(\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 + gz_1 + U_1 \right) \quad (10.9)$$

La ecuación anterior se define como *la razón neta de transferencia de energía a un volumen de control por transferencias de calor o trabajo, en el curso del flujo estacionario es igual a la diferencia entre las razones de los flujos entrantes y salientes de energía con la masa [117]*, el cual tiene unidades de J/s . Una enorme cantidad de problemas prácticos incluyen únicamente la entrada y salida. Aplicando un balance de materia en estado estacionario, sería tal que $\dot{m}_{entrada} = \dot{m}_{salida}$, haciendo que la ecuación (10.9) quede como

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_s &= \dot{m} \left[\left(\frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 + gz_2 + U_2 \right) - \left(\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 + gz_1 + U_1 \right) \right] \\ \dot{m} \hat{Q} - \dot{m} \hat{W}_s &= \dot{m} \left[\left(\frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 + gz_2 + U_2 \right) - \left(\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 + gz_1 + U_1 \right) \right] \\ Q - W_s &= \left(\frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 + gz_2 + U_2 \right) - \left(\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 + gz_1 + U_1 \right) \end{aligned}$$

Aplicando Δ 's se obtiene

$$\hat{Q} - \hat{W}_s = \frac{\Delta P}{\Delta \rho} + \frac{1}{2} \Delta v^2 + g \Delta z + \Delta U \quad (10.10)$$

Ocupando la definición de entalpía $H = U + P/\rho$ [117]

$$\hat{Q} - \hat{W}_s = \frac{1}{2} \Delta v^2 + g \Delta z + \Delta \hat{H} \quad (10.11)$$

Ambas ecuaciones tienen unidades de J/kg . La diferencia entre ambas ecuaciones es más debido a que fluido se quiera hacer el balance y en que estado se encuentre. Para fluidos incompresibles es más fácil utilizar (10.10) mientras que para fluidos compresibles se recomienda (10.11), ya que estos tienen a cambiar drásticamente sus condiciones, más que un fluido. Por poner un ejemplo, si a un líquido se le hace pasar por una bomba, este a la salida tenderá a elevar su presión, pero su temperatura no cambiará o será muy mínima, haciendo que sus condiciones cambian relativamente poco, mientras que si a un gas se le hace pasar por un compresor, su presión se elevará y con ello su temperatura también, haciendo que sus condiciones de salida cambien bastante. Se tiende a despreciar el término de **energía potencial** para los gases, $g\Delta z$, ya que la gravedad no afecta en nada el desplazamiento de un gas. Aunque cabe recalcar que la ecuación (10.10) se puede ocupar también para fluidos compresibles y con variación de temperatura, haciendo el cambio de variable $H = U + P/\rho$. Las ecuaciones (10.10) y (10.11) son conocidas como **ecuación general de energía mecánica para flujos estacionario para sistemas no isotérmicos**. Pasando del lado derecho de la ecuación el término de Q

$$-\hat{W}_s = \frac{\Delta P}{\Delta \rho} + \frac{1}{2}\Delta v^2 + g\Delta z + \Delta U - \hat{Q} \quad (10.12)$$

Cuando el término de $Q = \Delta U$ representa que el flujo es ideal, es decir que no cuenta con factores irreversibles como puede ser la fricción. Pero la realidad es que no hay flujos ideales, es por ello que cuando $\Delta U > Q$ se debe a conversión irreversible de energía mecánica en energía térmica y viene representada por la **pérdida de energía mecánica**:

$$\hat{E}_v = \Delta U - Q \quad (10.13)$$

Sustituyendo (10.13) en (10.12)

$$-\hat{W}_s = \frac{\Delta P}{\Delta \rho} + \frac{1}{2}\Delta v^2 + g\Delta z + \hat{E}_v \quad (10.14)$$

Esta ecuación es bastante usada en el estudio de flujos de fluido y es aplicable cuando el sistema opera de **manera isotérmica**.

10.2.1. Factor de corrección para la velocidad cinética

En el capítulo de flujo turbulento, se tiende a promediar la velocidad, $\langle v \rangle$, ya que el fluido es tan caótico que es imposible medir la velocidad en un punto específico. Algo similar ocurre cuando el flujo es laminar, debido a que se empieza a interactuar las fuerzas viscosas. Es por ello que en la literatura [118] [119] [120] se hace mención de dicha correlación, la cual se plantea como α

$$E_p = \frac{1}{2\alpha} \langle v \rangle^2$$

Donde los valores de α tiende a 0.5 para régimen laminar (perfil de velocidad parabólico) y 1 para régimen turbulento (perfil de velocidad casi plano). Añadiendo el factor de corrección a la ecuación (10.14)

$$-\hat{W}_s = \frac{\Delta P}{\Delta \rho} + \frac{1}{2\alpha} \langle v \rangle^2 + g\Delta z + \hat{E}_v \quad (10.15)$$

A menudo se ignoran los factores de corrección de la energía cinética en un análisis elemental, debido a que la mayoría de los flujos que se encuentran en la práctica son turbulentos. Cuando el flujo es incompresible puede usarse la presión absoluta o la manométrica para P ya que P_{atm}/ρ aparecería en ambos miembros y se cancelaría. A la expresión obtenida (10.15) se le conoce como **ecuación de Bernoulli** [1] [81] es

una expresión algebraica que te permite analizar un fluido que fluye a través de una sección de tuberías el cual establece lo siguiente: *dentro de un flujo horizontal de fluido, los puntos de mayor velocidad del fluido tendrán menor presión que los de menor velocidad.* Por último, en el caso de que no solo se halle el sistema en estado estacionario, sino, que no existe algún trabajo, se puede simplificar la ecuación (10.15)

$$\frac{\Delta P}{\Delta \rho} + \frac{1}{2\alpha} \langle v \rangle^2 + g\Delta z + \hat{E}_v = 0 \quad (10.16)$$

\hat{E}_v únicamente puede ser igual a cero, solo cuando no exista conversión irreversible de energía mecánica en interna, o dicho de otra manera, que el fluido donde se halle circulando, por ejemplo dentro de una tubería, *no tenga fricción*, que es imposible, como ya se ha visto en el capítulo anterior.

10.3. Longitud equivalente en equipos

En las conducciones para fluidos no sólo existen partes rectas sino que además hay diferentes tipos de accesorios: codos, válvulas, contracciones, expansiones, bifurcaciones, entre otros accesorios, que contribuyen de manera significativa a las **pérdidas irreversibles de energía mecánica**, E_v . Para este tipo de accesorios no es posible utilizar de forma directa la ecuación (9.2) ya que ésta sólo es válida para conductos rectos. Por esta razón se han realizado evaluaciones experimentales para cada tipo de accesorio [110]. Por lo tanto, las pérdidas totales de energía mecánica por fricción pueden evaluarse sumando las pérdidas producidas en los tramos rectos y en cada uno de los accesorios existentes en la conducción, es por ello que se ocupa el término **longitud equivalente**, el cual se define como *la longitud de tubería recta y lisa de igual diámetro que el accesorio que produce igual pérdida de energía que éste.* Para determinar la longitud equivalente existen tablas y nomogramas en los cuales están evaluados para los diferentes tipos de accesorios que existen e incluso cálculos para determinar otro tipo de accesorios, los cuales se pueden encontrar en [110]. Llamando L_e a la longitud equivalente las pérdidas totales de energía mecánica por fricción pueden evaluarse de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\hat{E}_v = \sum_{tuberia} \left[\frac{1}{2} f \left(\frac{L}{d} \right) \langle v \rangle^2 \right] + \sum_{accesorios} \left[\frac{1}{2} f L_e \langle v \rangle^2 \right]$$

Si la velocidad $\langle v \rangle$ es constante y la fricción, f es la misma, se puede simplificar a

$$\hat{E}_v = \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 f \left[\sum_{tuberia} \left(\frac{L}{d} \right) + \sum_{accesorios} (L_e) \right] \quad (10.17)$$

Capítulo 11

Uso de ecuaciones de balance macroscópico

11.1. Llenado de un tanque de agua

Un tanque de almacenamiento de agua está parcialmente vacío, ya que cuenta en su interior 1 m^3 de agua a 20°C , tal como se muestra en la figura 11.1.1, el cual se requiere saber en que tiempo se llenará el tanque si tiene un flujo másico de entrada de 5 kg/s pero a su vez está proporcionando agua a otro región con un caudal de salida de 2 kg/s . El tanque consta de una capacidad máxima de 4 m^3 de agua.

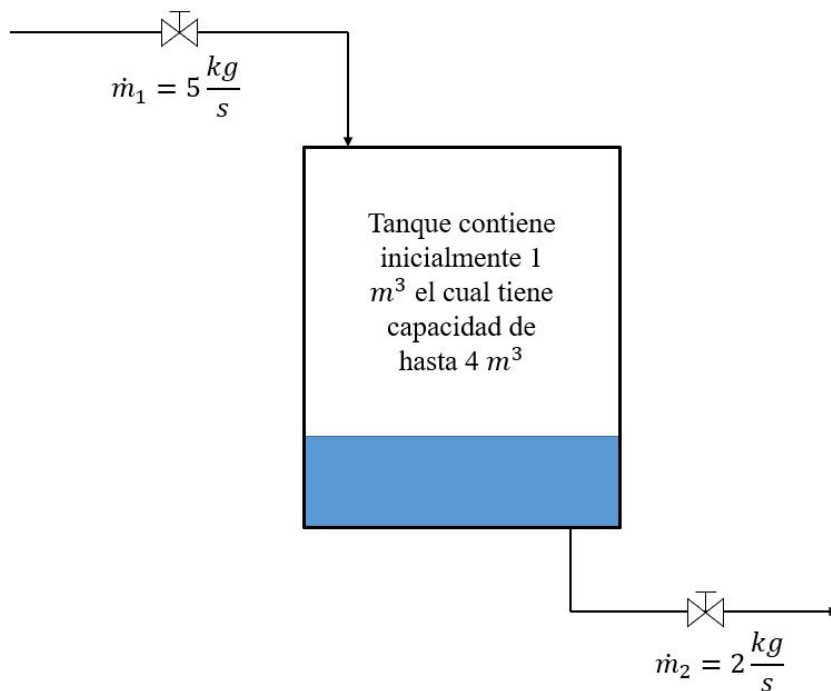


Figura 11.1.1: Tanque parcialmente vacío.

Cómo se pide encontrar el tiempo de llenado, se puede partir de un balance de materia, dado por la ecuación (10.1), donde se debe resolver la EDO

$$\begin{aligned}\frac{dm_t}{dt} &= \dot{m}_{ent} - \dot{m}_{sal} \\ dm_t &= (\dot{m}_{ent} - \dot{m}_{sal}) dt \\ \int dm_t &= \int \left(5 \frac{kg}{s} - 2 \frac{kg}{s} \right) dt \\ m_t &= \left(3 \frac{kg}{s} \right) t + C_1\end{aligned}$$

Para evaluar la constante C_1 se deberá emplear la condición inicial de $m(0) = M$, donde M será la masa inicial que tiene el tanque. Para encontrar la masa del tanque se ocupa la ecuación (1.28), donde la densidad del agua a $20^\circ C$ es de $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$

$$\begin{aligned}M &= \rho \cdot V \\ &= (998.2 \text{ kg/m}^3) (1 \text{ m}^3) \\ &= 998.2 \text{ kg}\end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial

$$\begin{aligned}998.2 \text{ kg} &= \left(3 \frac{kg}{s} \right) (0) + C_1 \\ 998.2 \text{ kg} &= C_1 \\ m_t &= \left(3 \frac{kg}{s} \right) t + 998.2 \text{ kg}\end{aligned}$$

Despejando la variable de tiempo de la ecuación anterior y resolviendo. Para ello el volumen del tanque es de 4 m^3 y siendo la masa de agua de 3992.8 kg .

$$\begin{aligned}t &= \frac{m_t - 998.2 \text{ kg}}{3} \\ &= \frac{3992.8 \text{ kg} - 998.2 \text{ kg}}{3} \\ &= 998.2 \text{ s} \\ &= 16.6367 \text{ min}\end{aligned}$$

Siendo que el tanque se llena completamente a los 16.6367 min o 16 min con 38 s aproximadamente.

11.2. Balance de energía para una bomba

Una bomba esta transportando aceite que tiene una densidad de 900 kg/m^3 a razón de 55 GPM . La línea de succión de la bomba tiene un diámetro de $3''$, mientras que a la descarga es de $5''$. La presión manométrica en la succión es de $2 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$ (196133 Pa) y $8 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$ (784532 Pa) a la descarga. Suponiendo que la bomba opera de manera adiabática y que tanto la tubería de succión como de descarga se encuentran al mismo nivel. Encontrar el trabajo mecánico suministrado al aceite en kJ/kg si el fluido circundante es incompresible y la temperatura tanto de salida como de entrada se mantienen constante.

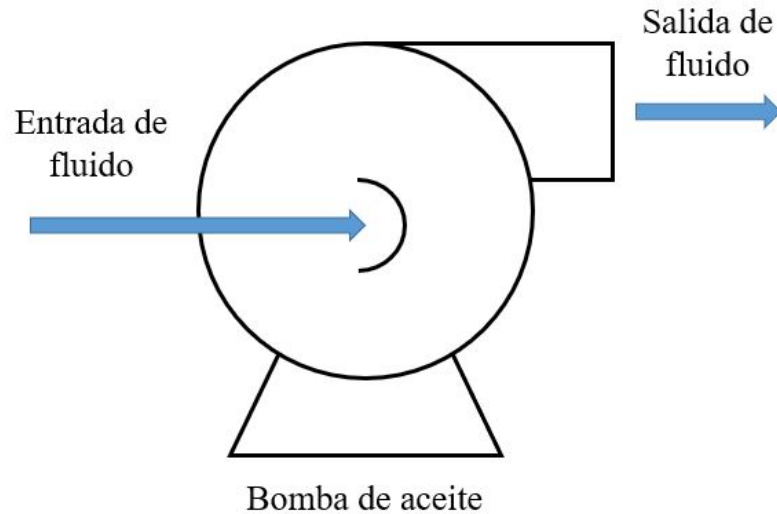


Figura 11.2.1: Esquema compresor.

1. Lo primero que se debe hacer es un balance de energía para fluidos incompresibles, ecuación (10.10). Se ocupa la ecuación (10.10), ya que se considerara que a las condiciones que opera la bomba, el fluido viaja en el régimen *turbulento*, para no ocupar la correlación de energía cinética dada en la sección 10.2.1.

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{\Delta P}{\Delta \rho} + \frac{1}{2} \Delta v^2 + g \Delta z + \Delta U$$

2. Se simplificaran ciertos términos. El primer término en despreciarse es el calor, ya que el proceso se lleva de manera adiabática. El segundo término es la energía potencial, debido a que el enunciado hace mención que tanto la tubería de succión como de descarga se encuentran en el mismo nivel, por lo tanto no habrá diferencial de alturas. Por último, queda eliminar la energía interna, debido a que esta depende de la variación de temperatura de salida y entrada, pero el fluido se mantiene a la misma temperatura. Quedando reducida la ecuación a

$$-\dot{W}_s = \frac{\Delta P}{\Delta \rho} + \frac{1}{2} \Delta v^2$$

3. Se debe encontrar el diferencial de velocidad. Para ello se procede a ocupar la definición de velocidad a partir del cociente de flujo volumétrico entre el área (1.31)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta v^2 &= \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{V}_2}{A_2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{V}_1}{A_1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{0.0035 \frac{m^3}{s}}{0.0127 m^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{0.0035 \frac{m^3}{s}}{0.0045 m^2} \right)^2 \\ &= -0.2645 \frac{m^2}{s^2} \end{aligned}$$

4. Calculando el diferencial del trabajo de flujo. Considerando que la densidad se mantiene constante en todo el fluido

$$\begin{aligned}\frac{\Delta P}{\Delta \rho} &= \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \\ &= \frac{1}{\rho} (P_2 - P_1) \\ &= \frac{1}{900 \frac{kg}{m^3}} (784532 Pa - 196133 Pa) \\ &= 653.7766 \frac{m^2}{s^2}\end{aligned}$$

5. Sustituyendo los valores obtenidos en el balance de energía

$$\begin{aligned}-\hat{W}_s &= 653.7766 \frac{m^2}{s^2} - 0.2645 \frac{m^2}{s^2} \\ \hat{W}_s &= - \left(653.7766 \frac{m^2}{s^2} - 0.2645 \frac{m^2}{s^2} \right) \\ &= -653.5121 \frac{m^2}{s^2}\end{aligned}$$

Como se aprecia el signo negativo corresponde a que se esta suministrando trabajo al sistema, correspondiendo adecuadamente con la figura 1.4.2. Pero ahora ¿por qué da unidades de m^2/s^2 en vez de kJ/kg ? Para responder a dicha pregunta basta con hacer un análisis dimensional

$$\begin{aligned}\frac{kJ}{kg} & [=] \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \cdot \frac{1}{kg} \\ \frac{kJ}{kg} & [=] \frac{m^2}{s^2}\end{aligned}$$

Nomenclatura

μ	Viscosidad dinámica	A_s	Área de sección transversal
τ_{ij}	Esfuerzo tangencial	Re	Número de Reynolds
ρ	Densidad	ν	Viscosidad cinemática
P	Presión	V	Volumen
\dot{V}	Flujo volumétrico	w	Peso
a_i	Aceleración	m	Masa
\dot{m}	Flujo másico	v_i	Velocidad
A_f	Área por la que fluye el fluido	Δ	Diferencial
g	Gravedad	δ	Ángulo de inclinación
F_i	Término de fuerza	t	Tiempo
C_i	Constante de integración	S_f	Gravedad específica
\mathcal{P}	Presión hidrostática	$^\circ API$	Grados API
N	Potencia	f	Factor de fricción
L	Longitud	\dot{E}_k	Energía cinética
\dot{E}_p	Energía potencial	\dot{U}	Energía interna
\dot{Q}	Calor	\dot{W}_f	Trabajo de fluido
\dot{W}_s	Trabajo de flecha	\hat{H}	Entalpía
\hat{E}_v	Perdidas irreversibles de energía mecánica	L_e	Longitud equivalente
\hat{i}	Vector unitarios en el eje x	\hat{j}	Vector unitarios en el eje y
\hat{k}	Vector unitarios en el eje z	Δx	Diferencial en el eje x
Δy	Diferencial en el eje y	Δz	Diferencial en el eje z
Δr	Diferencial en el eje r	$\Delta \theta$	Diferencial en el eje θ
$\langle v_i \rangle$	Velocidad media	d	Diámetro
D	Dimensión lineal característica	dx	Derivada respecto a x
dy	Derivada respecto a y	dz	Derivada respecto a z
dr	Derivada respecto a r	$d\theta$	Derivada respecto a θ

Parte IV

Fenómeno de transporte II: Transporte de Calor

Capítulo 12

Mecanismos de transferencia de calor

La termodinámica trata de la transferencia de calor a medida que un sistema pasa por un proceso de un estado de equilibrio a otro y no hace referencia a cuánto durara ese proceso. Pero en ingeniería a menudo es de sumo interés conocer la rapidez o razón de transferencia, la cual constituye el tema de la ciencia de la transferencia de calor. Se debe tener presente ciertos conceptos de termodinámica, que anteriormente se lograron ver, como es la ley cero, uno y dos, se debe recordar que la energía se puede presentar en varias formas, siendo una de estas la de **calor**, que es la forma de la energía que se puede transferir de un sistema a otro como resultado de la diferencia de temperatura. La ciencia encargada de estudiar estas razones de transferencia es la **transferencia de calor**. El requisito básico para la transferencia de calor es la presencia de una **diferencia de temperatura**. Ya que, no se puede dar la transferencia neta de calor si dos cuerpos mantienen la misma temperatura, debido al equilibrio térmico (ley cero de la termodinámica). Esta diferencia de temperatura es la fuerza impulsora para que se de la transferencia de calor, así como la diferencia de presión es la fuerza impulsora para el flujo de fluidos. La velocidad de transferencia de calor en cierta dirección depende de la magnitud del gradiente de temperatura, a mayor gradiente de temperatura, mayor sera la razón de la transferencia de calor.

La energía se puede presentar en diferentes formas como es térmica, mecánica, cinética, potencial, eléctrica, magnética, química y nuclear, y su suma constituyendo la energía total. La forma que tiene la energía esta relacionada con la estructura molecular de un sistema y con el grado de la actividad molecular, conocido como **energía microscópica**. La suma de todas las formas microscópicas de energía se llama **energía interna** de un sistema y se denota como U . La unidad internacional de energía es el *Joule* (J), en cambio en el sistema ingles es la *unidad térmica británica* (BTU). Otra unidad conocida de energía es la *caloría*. La parte de la energía interna de un sistema que esta asociada con la energía cinética de las moléculas se conoce como **calor sensible**. En cambio el **calor latente** esta asociada a la energía interna con un cambio de fase.

Hay que recordar que el **calor específico** se define como la energía requerida para elevar en un grado la temperatura de una unidad de masa de una sustancia. Este tipo de energía depende de la manera que se ejecuta el proceso. Existen dos tipos de calor específico para casos de estudio. El primero es el **calor específico a volumen constante** (C_v), el cual indica la energía requerida para elevar en un grado la temperatura de unidad de masa de una sustancia mientras el volumen permanece constantes. La segunda es el **calor específico a presión constante** (C_p), que es idéntico al C_v pero ahora a presión constantes. El C_p es mayor que C_v , porque en estas condiciones se permite que el sistema se expanda y la energía

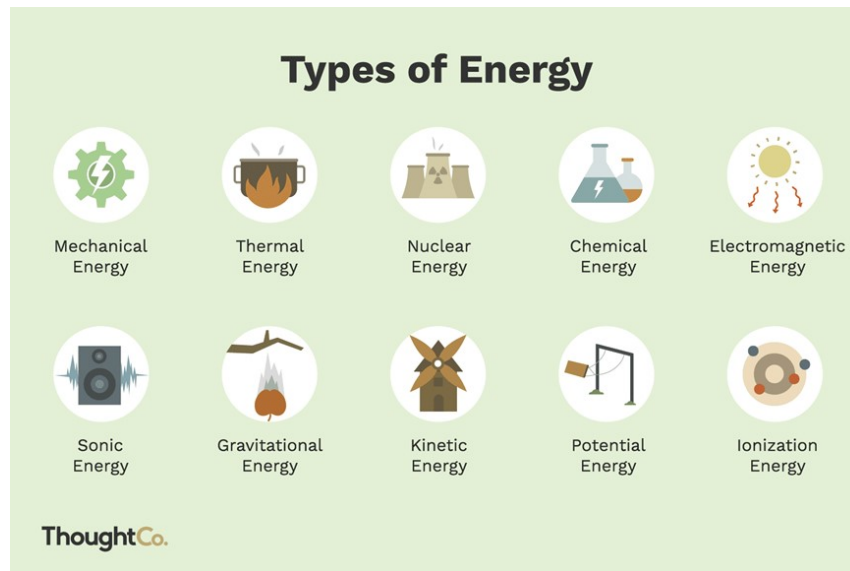


Figura 12.0.1: Tipos de energía [126].

para este trabajo de expansión también deba suministrarse al sistema. Para los gases ideales, estos calores específicos están relacionados entre sí por $C_p = C_v + R$. Para líquidos el $C_p = C_v$ y para sólidos solo existe C_p .

La energía se puede transferir hacia una masa dada por dos tipos de mecanismos: *calor* (Q) y *trabajo* (W). Una interacción energética es transferencia de calor si su fuerza impulsora es una diferencia de temperatura, en caso contrario, sería trabajo. El trabajo realizado por unidad de tiempo se llama **potencia** y se denota como \dot{W} , sus unidades son para el sistema internacional los watts W y para el sistema inglés hp . El calor se puede transferir por tres mecanismos diferentes: **conducción**, **convección** y **radiación**. Todos estos modelos de transferencia de calor exigen que haya una diferencia de temperatura y todos ocurren del medio que posee la temperatura más alta a la de menor. Se explicará cada uno de los **mecanismos de transferencia de calor**.



Figura 12.0.2: Mecanismos de transferencia de calor [127].

12.1. Conducción

La **conducción** es la transferencia de energía de las partículas más energéticas de una sustancia hacia las adyacentes menos energéticas, como resultado de interacciones entre esas partículas. La conducción puede tener lugar en los sólidos, líquidos o gases. En los gases y líquidos la conducción se debe a las colisiones y a la difusión de las moléculas durante su movimiento aleatorio, mientras que en las sólidas se debe a la combinación de las vibraciones de las moléculas en una retícula y al transporte de energía por parte de los electrones libres. La rapidez de la conducción de calor a través de un medio depende de la configuración geométrica de éste, su espesor y el material de que este hecho, así como la diferencia de temperatura a través de él.

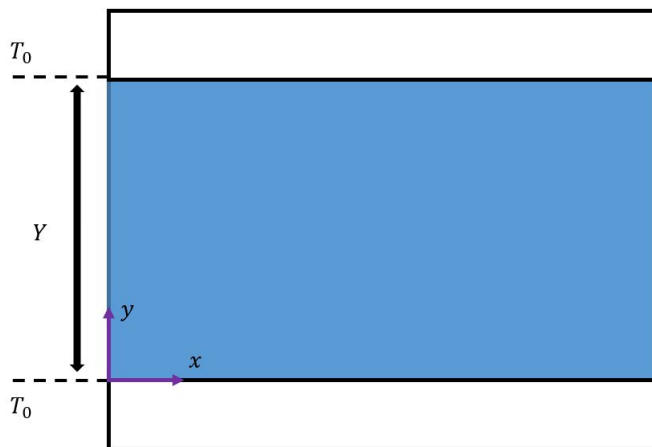


Figura 12.1.1: Fluido comprendido entre dos placas rectangulares con la misma temperatura T_0 , $t < 0$.

Para este caso se considerara dos placas rectangulares que comprenden a un fluido estático, la temperatura en la interfase solido-liquido entre ambas placas es de T_0 cuando el tiempo es $t < 0$, ver figura 12.1.1. La distancia entre placa y placa es Y y se escoge un eje coordenado xy .

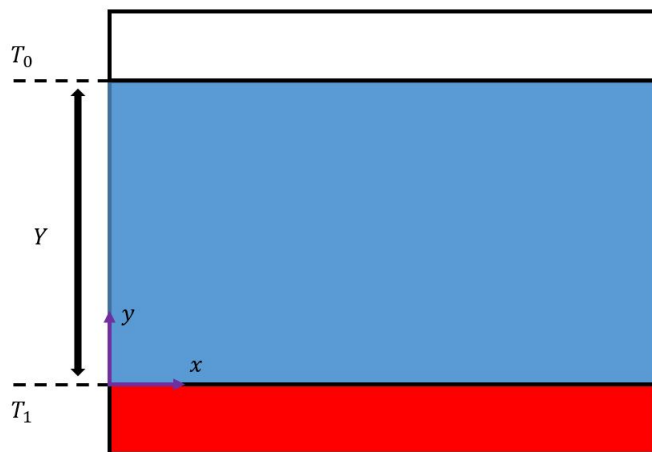


Figura 12.1.2: Fluido comprendido entre dos placas rectangulares con una temperatura mayor T_1 y una temperatura menor T_0 , $t = 0$.

A la placa inferior se le hace pasar una pequeña cantidad de corriente eléctrica, generando que dicha placa empiece a generar calor, \dot{Q} . Por lo tanto, en la interfase sólido-líquido de la parte inferior del fluido, tendera aumentar su temperatura, pasando de T_0 hasta una T_1 . Se hace pasar una corriente pequeña de electricidad, con la finalidad de que la conductividad térmica del agua k , no varíe considerablemente con la temperatura, ver figura 12.1.2. Este caso ocurre cuando el $t = 0$. En la otra interfase sólido-líquido (parte superior del fluido), la temperatura se mantiene constante a T_0 .

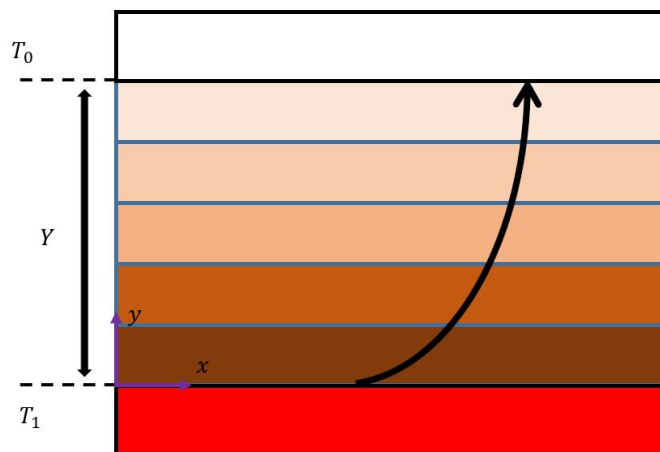


Figura 12.1.3: Transferencia de calor entre dos placas que comprenden un fluido, cuando el $t > 0$ y se mantiene constante.

Manteniendo constante la temperatura T_1 , si viera el fluido por capas, tal como la ley de viscosidad de Newton, se vera que el calor se empezará a transmitir de la temperatura T_1 hasta la T_0 a todo lo largo Y del fluido, esto ocurre cuando el tiempo empieza a incrementar $t > 0$ y la transferencia de calor se mantiene constante, ver figura 12.1.3. Se ha demostrado por experimentación que el calor \dot{Q} en coordenadas rectangulares es directamente proporcional a producto de su área de sección A_s por su diferencial de temperaturas ΔT e inversamente proporcional a la longitud

$$\dot{Q}_{cond} \propto A_s \frac{\Delta T}{\Delta Y} \quad (12.1)$$

Matemáticamente la ecuación está correcta, pero físicamente no, esto debido al ΔT . Para ello, se debe desarrollar el diferencial de temperatura

$$\Delta T = T_0 - T_1$$

Donde T_1 es la temperatura inicial y T_0 la temperatura final. Pero el flujo de calor siempre va de la superficie con mayor temperatura a la de menor, segunda ley de la termodinámica, por ello para no romper dicha ley, se le debe aplicar un signo $-$ menos a la ecuación (12.1). Para eliminar la constante de proporcionalidad se le agrega una constante k , es que la conductividad térmica del material.

$$\dot{Q}_{cond} = -k \cdot A_s \frac{\Delta T}{\Delta Y} \quad (12.2)$$

Con la finalidad de trabajar con la velocidad de **flujo de calor** o **flux de calor** por área que se denota, se debe pasar del lado izquierdo de la igualdad la variable A_s , donde se define como $q_y = \dot{Q}/A_s$; el subíndice x , indica la dirección en que ocurre la transferencia de calor, siendo en el eje y . Además, aplicando el cambio infinitesimal a ΔT y ΔY

$$q_y = -k \frac{dT}{dy} \quad (12.3)$$

La ecuación deducida se define como **ley de Fourier de la conducción de calor** en honor a J. Fourier, quien expreso por primera vez en su texto *Théorie analytique de la chaleur* sobre la transferencia de calor en 1822 [128]. Donde dT/dy es el **gradiente de temperatura** en coordenadas rectangulares, ya que existen también para coordenadas cilíndricas y esféricas, ver apéndice C. La ecuación (12.3) es aplicable para sólidos, líquidos y gases, siendo estos dos últimos en casos muy controlados, ya que su k variara de acuerdo a la temperatura, mientras que a un solido variara muy poco, debiéndose a la unión molecular. La conductividad térmica se puede definir como la razón de transferencia de calor a través de un espesor unitario del material por unidad de área por unidad de diferencia de temperatura, es decir, que es una medida de la capacidad de un material para conducir el calor. Siendo que un valor elevado indica que el material es un buen conductor de calor, pero si es un valor bajo es que es un mal conductor o es un **aislante**. La conductividad térmica puede variar, siendo en el caso de los gases un valor de $0.01 W/m \cdot K$, mientras que para metales puros de $1000 W/m \cdot K$. A partir de la teoría cinética de gases se determina la k mediante la ecuación siguiente [33]

$$k = \alpha \rho C_p \quad (12.4)$$

Donde C_p es el calor específico [$J/kg - K$], α es la difusión térmica [m^2/s] y ρ sera la densidad del fluido [kg/m^3]. La **difusividad térmica** es otra propiedad de los materiales que aparecen en el análisis de la conducción del calor en régimen transitorio, la cual representa cuan rápido se difunde el calor por un material. Un material que tiene una alta conductividad térmica o una baja capacidad calorífica tiene una gran difusividad térmica. Entre mayor sea la difusividad térmica, más rápido es la propagación de calor hacia el medio. La difusividad térmica tiene las mismas dimensiones que la viscosidad cinemática ν , por lo cual se asume que están hechas de las mismas propiedades físicas. La proporción ν/α representa la relación que existe entre la difusividad molecular de la cantidad de movimiento y la difusividad molecular del calor en el sistema. Esta proporción resulta en

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k} \quad (12.5)$$

Esta ecuación adimensional es llamada **Número de Prandtl**. Los valores del número de Prandtl para los gases son de alrededor de 1 indican que tanto la cantidad de movimiento como de calor se difunden por el fluido a una velocidad similar. El calor se difunde con mucha rapidez en los metales líquidos ($Pr \ll 1$) y con mucha lentitud en los aceites ($Pr \gg 1$) en relación con la cantidad de movimiento. Esto indica que la capa límite térmica [149] es mucho más gruesa para los metales líquidos y mucho más delgada para los aceites, en relación con la capa límite de velocidad. Cuanto más gruesa sea la capa límite térmica con mayor rapidez se difundirá el calor en el fluido.

12.2. Convección

La **convección** es el método de transferencia de energía que se da entre una superficie sólida y un fluido que están en movimiento. Cuando más rápido sea el movimiento del fluido ejercerá una mayor transferencia de calor sobre el sólido. A la ausencia de cualquier movimiento del fluido, la transferencia de calor entre la superficie del solido y el fluido adyacente es plenamente conducción pura. La conducción puede ser de dos tipos: por **convección natural** y **convección forzada**, y dependerá de la velocidad que tenga el fluido circundante, ver figura 12.2.1. Se observa que la rapidez de la transferencia de calor por convección (\dot{Q}_{conv}), con unidades de W , es proporcional a la diferencia de temperatura y se expresa en forma conveniente por la **Ley de enfriamiento de Newton** como

$$\dot{Q}_{conv} = hA_s(T_s - T_\infty) \quad (12.6)$$

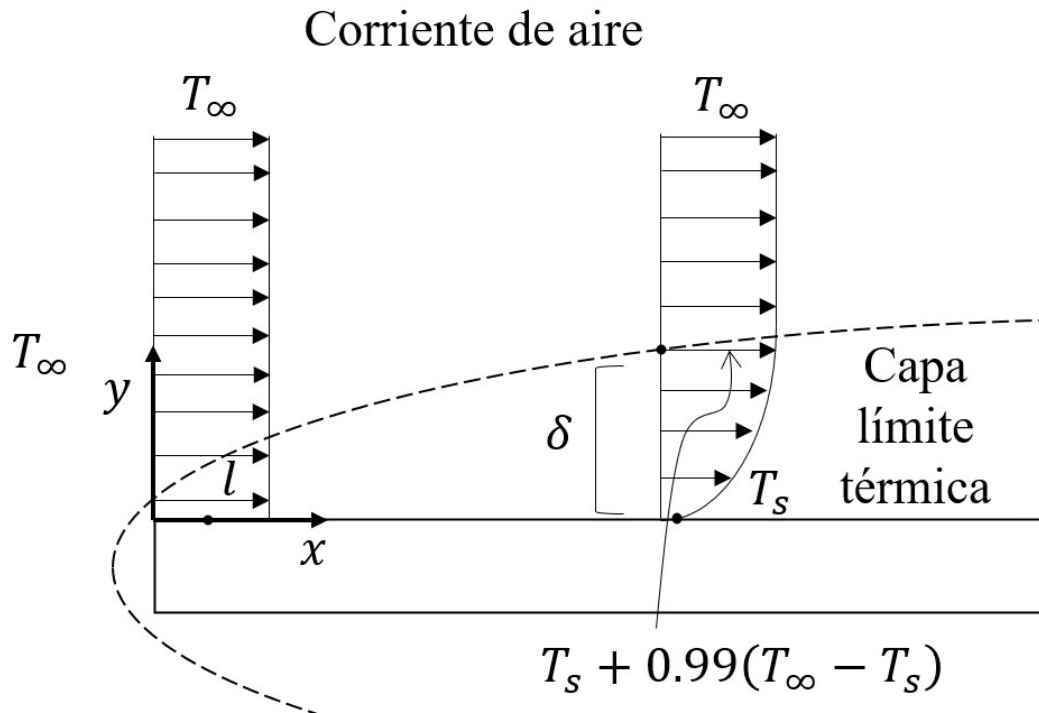


Figura 12.1.4: Capa límite térmica. Cuando un fluido a una temperatura específica fluye sobre una superficie que está a una temperatura diferente, el espesor de la capa límite térmica aumenta en la dirección del flujo, ya que se sienten los efectos de la transferencia de calor a distancias más grandes de la superficie.

En donde h es el coeficiente de transferencia de calor por convección en $W/m^2 \cdot ^\circ C$; A_s es el área de superficie a través de la cual tiene lugar la transferencia de calor por convección en m^2 ; T_s será la temperatura de superficie, la T_∞ es la temperatura del fluido o a temperatura el medio ambiente, se suele utilizar el subíndice ∞ para los fluidos suficientemente alejados de la superficie caliente o fría debido a que sirve como recordatorio de que es el valor a una distancia en donde no se siente la presencia de una superficie. El coeficiente de transferencia de calor por convección (h) no es una propiedad del fluido, si no, es un parámetro que se define de forma experimental y dependerá de todas las variables que influyen sobre la convección, como la configuración geométrica de la superficie, la naturaleza del movimiento del fluido, las propiedades de dicho fluido así como su velocidad misma.

12.2.1. Convección natural en superficies

La **convección natural** es un mecanismo de transporte de calor el cual surge a partir del movimiento del fluido circundante el cual no es generado por alguna fuente externa (como una bomba, un ventilador, entre otros), si no que únicamente se mueve debido a la diferencia de densidad que ocurren gracias a los gradientes de temperatura, es decir, que las corrientes naturales de convección hacen que el fluido caliente suba debido a que sufren una expansión térmica haciéndolos menos denso y el fluido frío baje. Este fluido más fresco es entonces calentado y el proceso continúa, formando una corriente de convección. La transferencia de calor por convección natural sobre las superficies dependerá de los siguientes factores:

- La geometría que tenga.

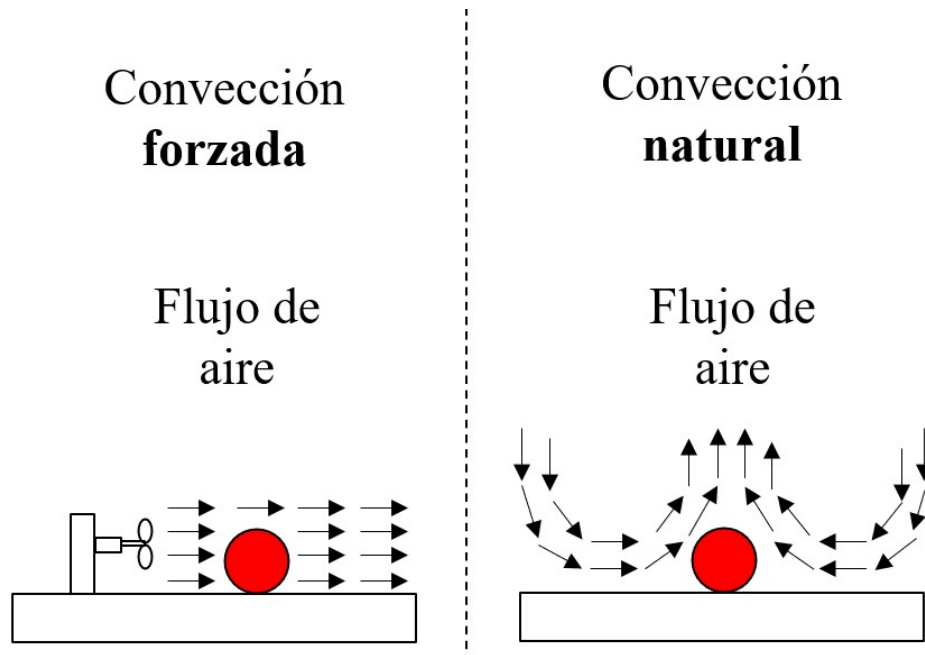


Figura 12.2.1: Enfriamiento de una pellet esférico de hierro a *fuego vivo* por medio de convección forzada y natural.

- La orientación de dicha geometría.
- La variación de temperatura sobre la superficie.
- Las propiedades termo-físicas del fluido circundante.

La transferencia de calor por convección natural se rige principalmente de estudios experimentales, ya que es sumamente complicado hallar el valor de h en la gran mayoría de los casos. Existe algunas soluciones analíticas para geometrías sencillas, siendo una de ellas el **número de Nusselt**

$$Nu = \frac{h \cdot L_c}{k} = C \cdot Ra_L^n \quad (12.7)$$

Donde aparece un número adimensional, que es **número de Rayleigh**, Ra_L , que es una medida del balance entre las fuerzas que promueven la convección (diferencia de densidad entre el líquido caliente y frío) y las que se le oponen (fricción debido a la viscosidad y la difusión térmica que opera en el sentido de anular el gradiente de temperatura). Dicho número es el producto de los número de Grashof y de Prandtl

$$Ra_L = Gr \cdot Pr \quad (12.8)$$

Como se ve en la ecuación (12.7) tiene dos constantes, siendo C y n , la cual dependerá de la configuración geométrica de la superficie y del régimen de flujo, el cual se caracteriza por el rango del número de Rayleigh. Las propiedades del fluido que deba evaluarse debe estar a la temperatura media, es decir

$$T_m = \frac{1}{2}(T_s + T_\infty) \quad (12.9)$$

Una vez obtenido el coeficiente promedio de convección, la velocidad de transferencia de calor por convección natural de una superficie sólida esta dada por la ley de enfriamiento de Newton, ecuación (12.6).

12.2.2. Convección forzada

En la **convección forzada** se obliga al fluido a fluir por medios externos (como una bomba o un ventilador) para acelerar el paso del flujo del fluido sobre la cara del sólido. El movimiento rápido de las partículas de fluido sobre la cara del sólido maximiza el gradiente de temperatura y aumenta la tasa de intercambio de calor. La diferencia se observará en que, con el sistema de convección forzada, el calor se distribuye de mejor manera teniendo como resultado que el calor en una superficie se tienda a disipar en menos tiempo a comparación a una convección natural. De acuerdo a la forma en que el fluido puede fluir se puede clasificar en

- **Convección forzada en flujo externo.** Se da cuando el fluido no está restringido por el sistema, esto es, el fluido puede moverse o expandirse con libertad. El ejemplo más común es aire pasando alrededor de un avión.
- **Convección forzada en flujo interno.** Se da cuando el fluido está restringido por el sistema, o sea que su movimiento está limitado por las fronteras de este. El ejemplo más común es una corriente de agua haciéndose pasar por dentro de una tubería.

La convección forzada es un tipo de transporte en el que el movimiento del fluido es generado por una fuente externa, llámese una bomba, ventilador, dispositivo de succión, entre otros. Este puede darse de manera externa e interna. No existe como tal una ecuación general que rijan la convección forzada tanto interna como externa, debido a que el flujo es turbulento y como se vio en el capítulo 8 el flujo turbulento no tiene solución. Por ello que para abarcar el desarrollo de este tipo de problemas es usualmente ocupar **correlaciones** basado en datos experimentales, que permitan una aproximación de la transferencia de calor. Los fenómenos que afectan la fuerza de resistencia al movimiento también afectan la transferencia de calor y este efecto aparece en el **número de Nusselt**, donde se ha demostrado por datos experimentales que la dicha transferencia se en forma funcional como

$$Nu_x = f(x^*, Re_x, Pr) \quad (12.10)$$

Esta función explica adecuadamente el como la velocidad del fluido influye en la transferencia de calor dada por Re ; Pr relaciona la velocidad de difusión de cantidad de movimiento y la difusión térmica; x representa la geometría que tendrá el cuerpo y la superficie de contacto.

12.3. Radiación

El último mecanismo de transferencia de calor es el de **radiación**, cual es la energía emitida por la materia en forma de ondas electromagnéticas como resultado de los cambios en la configuraciones electrónicas de los átomos. La diferencia entre la conducción y la convección, es que la radiación no requiere la presencia de un medio interventor, siendo el modo de transferencia de calor más rápido (a la velocidad de la luz) y no sufre atenuación en el vacío, siendo la manera en que la energía del Sol llega a la Tierra. Todos los cuerpos a una temperatura arriba del cero absoluto emiten radiación térmica. La radiación es un fenómeno volumétrico, es decir, que todo cuerpo sea solido, liquido o gas emiten, absorben o transmiten radiación en diversos grados. La razón máxima de la radiación ($\dot{Q}_{rad\ max}$) que se puede emitir desde una superficie a una temperatura termodinámica T_s (en K o R) es expresada por la **Ley de Stefan-Boltzman**

$$\dot{Q}_{rad\ max} = \sigma A_s T_s^4 \quad (12.11)$$

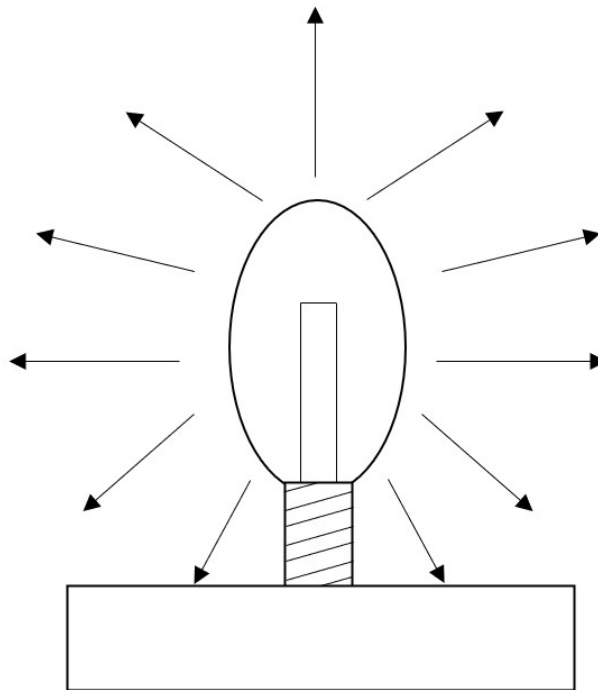


Figura 12.3.1: Energía en forma de radiación emitida por un foco hacia los alrededores.

Donde $\sigma = 5.76 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ que es la constante de Stefan-Boltzman. La superficie idealizada que emite radiación a esta razón máxima se llama **cuerpo negro** y la radiación emitida por éste es la radiación del cuerpo negro. La radiación emitida por todas las superficies reales es menor que la emitida por un cuerpo negro a la misma temperatura y se expresa como

$$\dot{Q}_{rad\ emit} = \epsilon \sigma A_s T_s^4 \quad (12.12)$$

Donde ϵ es la emisividad de la superficie, cuyo valor esta en un intervalo $0 \leq \epsilon \leq 1$. Cuando una superficie de emisividad ϵ y un área superficial A_s , a una temperatura térmica T_s esta completamente encerrada por una superficie mucho más grande (o negra), a una temperatura termodinámica T_{alred} y separada por un gas (como el aire) que no interfiere con la radiación, la razón neta de la transferencia por radiación entre esta dos superficies se da por (figura 12.3.2)

$$\dot{Q}_{rad} = \epsilon \sigma A_s (T_s^4 - T_{alred}^4) \quad (12.13)$$

En este caso especial la emisividad y el área superficial de la superficie circundante no tiene efecto sobre la transferencia neta de calor por radiación.

Como dato adicional, el mecanismo donde ocurre mayor transferencia de calor es por conducción, posteriormente sería el de convección y por ultimo será el de radiación

$$\dot{Q}_{cond} > \dot{Q}_{conv} > \dot{Q}_{rad}$$

Por ello, los termos tiene un espacio al vacío entre el cilindro que contiene el liquido caliente/frío y el cilindro externo (carcasa), el cual al ser la radiación un mecanismo que viaja por ondas y no depender de un medio interventor (como la convección y conducción), este se da dentro del vacío del termo, pero al

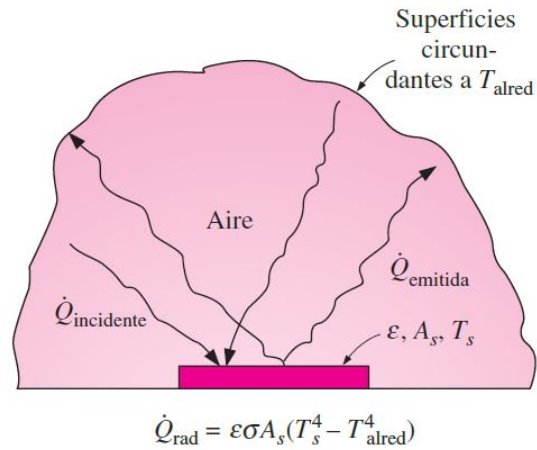


Figura 12.3.2: Transferencia de calor por radiación entre una superficie y las superficies que la circundan. Obtenido de Y. Cengel [149].

ser muy pequeña su energía es que el líquido contenido puede perduras por horas su temperatura, aunque entre más pase el tiempo tendera a disminuir su temperatura hasta igualar la del ambiente, primera ley de la termodinámica.

Capítulo 13

Ecuaciones de Variación para sistemas no isotérmicos

Como se vio en la parte anterior, es mucho más cómodo, eficiente, confiable y más rápido partir de una ecuación general e ir eliminando variables, pero para ello primero se debe deducir. Para eso se debe partir de un sistema algo complejo, siendo en ingeniería química los reactores, ocupando de ejemplo un reactor de lecho fijo, tal como se muestra en la figura 13.0.1, donde se pretende deducir la ecuación de variación para sistemas no isotérmicos



Figura 13.0.1: Reactor de refinería petrolera [129].

Para deducir la ecuación se debe ver primero como se comporta dicho reactor por dentro para ello en la figura 13.0.2, donde se muestra que el reactor se divide en tres partes, la primera es el reactivo precalentado, el cual entra a la parte dos del reactor, siendo donde se encuentra el catalizador donde empieza a reaccionar el reactivo generando calor, siendo la parte más larga de tubería y al final de trayecto pasa a la parte tres que es donde el reactivo pasa a producto y tiende a enfriarse, tendiendo a salir del reactor y pasando a otra parte de la refinería.

Se enfocara en la zona de reacción, ya que es donde se genere energía y de se partirá de un volumen de control, tal como se muestra en la figura 13.0.3.

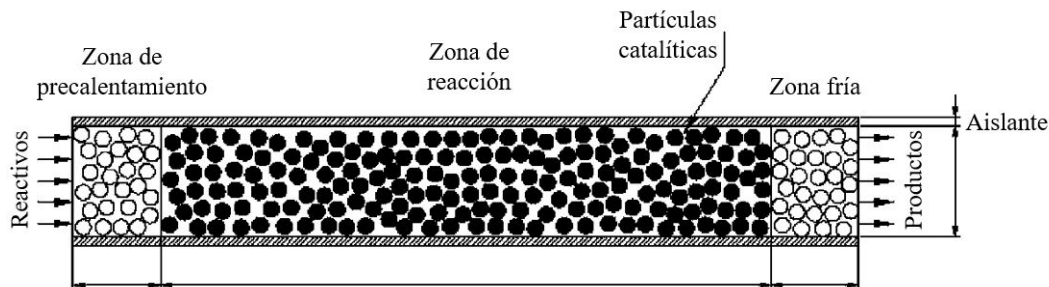
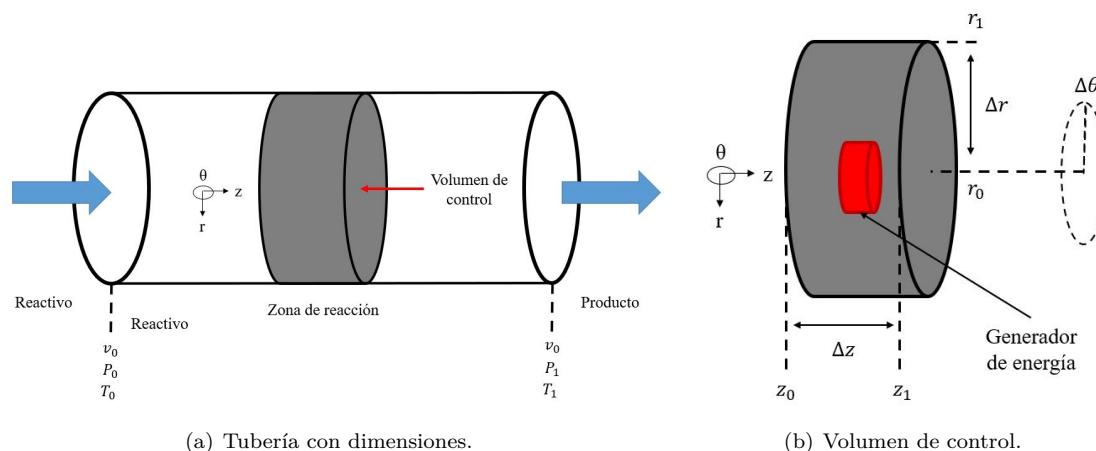


Figura 13.0.2: Vista esquemática del reactor de lecho fijo monotubo [130].



(a) Tubería con dimensiones.

(b) Volumen de control.

Figura 13.0.3: Volumen de control.

Se debe partir de la ecuación general de energía mecánica de flujos estacionarios para sistemas no isotérmicos, pero para ello se tienen dos ecuaciones, siendo (10.10) y (10.11). Enfocándose en la definición de la **entalpía**, la cual se refiere a la energía almacenada en los enlaces, y el cambio en la entalpía es la diferencia en la energía de los enlaces entre reactivos y productos. Como el sistema genera calor a partir de una **reacción química**, se puede decir que la ecuación más adecuada es (10.11), la cual se dedujo con anterioridad

$$\hat{Q} - \hat{W}_s = +\frac{1}{2}\Delta v^2 + g\Delta z + \Delta\hat{H}$$

Se debe simplificar la ecuación anterior, es por ello que el primero término a eliminar es la energía potencial, $g\Delta z$, ya que la tubería se encuentra totalmente horizontal. El siguiente término a eliminar es la energía potencial, $\frac{1}{2}\Delta v^2$, como se vio con anterior las capas a nivel molecular se mueven con la misma velocidad, cuando el área de flujo se mantiene constante, y el área por la que fluye el fluido no cambia. El último término a eliminar es el trabajo de flecha, \hat{W}_s , ya que no existe. En la industria química estos tres términos de energía se tienden a desprejarse ya que son insignificantes cuando se habla de cambios de temperatura muy grandes. Reduciendo la ecuación (10.11)

$$\hat{Q} = \Delta\hat{H} \tag{13.1}$$

La expresión anterior se le conoce como **balance de entalpía**, ocupada bastante en análisis macroscópicos y solo es valida cuando el **sistema se encuentra cerrado**, es decir, que en el sistema no hay intercambio

de masa con los alrededores. Para gases la ecuación anterior quedaría tal que

$$\hat{Q} = C_v \Delta T \quad (13.2)$$

Para líquidos el C_v es aproximadamente igual al C_p , por ende

$$\hat{Q} = C_p \Delta T \quad (13.3)$$

Esto se debe a que un gas es compresible mientras que un líquido no. Para el inicialmente planteado, la ecuación (13.1) es válida para sistemas cerrados, pero el sistema opera de manera abierta, ya que hay un intercambio de masa, debido a la reacción que se genera. Por eso la ecuación (13.1) debería agregarse el el término de flujo másico

$$\begin{aligned} \dot{m}\hat{Q} &= \dot{m}\Delta\hat{H} \\ \dot{Q} &= \dot{m}\Delta\hat{H} \\ \dot{Q} &= \dot{m} \cdot C_p \cdot \Delta T \end{aligned} \quad (13.4)$$

La correlación de $\hat{H} = C_p \cdot \Delta T$ se puede encontrar en la literatura [121]. En el análisis de transferencia de calor es de usual interés las formas en que se propaga la energía como resultado de una diferencia de temperaturas, siendo principalmente dos formas:

1. Generación de energía.
2. Mecanismos de transferencia de calor.

$$\dot{Q}_{meca} + \dot{Q}_{gen} = \dot{m} \cdot \Delta\hat{H} \quad (13.5)$$

El calor generado, viendo la imagen 13.0.3(b), es una representación pequeña pero el calor se expande a todo lo largo de nuestro volumen de control [149], por lo tanto calor se puede representar como el producto de generación de calor por unidad de volumen

$$\dot{Q}_{gen} = q_{gen} \cdot V_{cont} \quad (13.6)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (13.5)

$$\dot{Q}_{meca} + q_{gen} \cdot V_{cont} = \dot{m} \cdot \Delta\hat{H} \quad (13.7)$$

Sabemos que el término de calor tendrá una entrada y una salida (balance de energía en sistema abierto), por lo se puede representar como

$$\dot{Q}_{meca,entrada} - \dot{Q}_{meca,salida} + q_{gen} \cdot V_{cont} = \dot{m} \cdot \Delta\hat{H} \quad (13.8)$$

El término así de calor \dot{Q} , basado en las leyes fisicoquímicas no representa la dirección con la que fluye el calor. Por ello, se recomienda usar la definición de flujo de calor por área de sección

$$\dot{Q}_{meca} = A_s \cdot q_{Gi} \quad (13.9)$$

Donde el subíndice G representara el mecanismo de transferencia de calor; i indicara la dirección del flujo de calor. Gracias a que el flujo de calor es una cantidad vectorial, permitiendo que ocurra en tres direcciones en coordenadas cilíndricas $q(r, \theta, z)$, entonces para poner el flujo de calor como suma vectorial se debe recurrir a la notación de vector unidad, la cual se representa como

$$q = q_{Gr}\hat{r} + q_{G\theta}\hat{\theta} + q_{Gz}\hat{k}$$

Teniendo seis variables de flujo de calor, tres de entrada y tres de salida. Así mismo, se contara con seis variables de área de sección por la que fluye el calor, la cual se pueden reducir simplemente a tres, ya que el área no cambia a lo largo de la tubería

$$\begin{aligned} & \left(A_{s(r)} q_{Gr,entrada} \cdot \hat{r} + A_{s(\theta)} q_{G\theta,entrada} \cdot \hat{\theta} + A_{s(z)} q_{Gz,entrada} \cdot \hat{k} \right) \\ & - \left(A_{s(r)} q_{Gr,salida} \cdot \hat{r} + A_{s(\theta)} q_{G\theta,salida} \cdot \hat{\theta} + A_{s(z)} q_{Gz,salida} \cdot \hat{k} \right) + q_{gen} \cdot V_{cont} = \dot{m} \cdot \Delta \hat{H} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{s(r)} q_{Gr,entrada} \cdot \hat{r} + A_{s(\theta)} q_{G\theta,entrada} \cdot \hat{\theta} + A_{s(z)} q_{Gz,entrada} \cdot \hat{k} - A_{s(r)} q_{Gr,salida} \cdot \hat{r} - A_{s(\theta)} q_{G\theta,salida} \cdot \hat{\theta} - A_{s(z)} q_{Gz,salida} \cdot \hat{k} \\ + q_{gen} \cdot V_{cont} = \dot{m} \cdot \Delta \hat{H} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{s(r)} (q_{Gr,entrada} - q_{Gr,salida}) \cdot \hat{r} + A_{s(\theta)} (q_{G\theta,entrada} - q_{G\theta,salida}) \cdot \hat{\theta} + A_{s(z)} (q_{Gz,entrada} - q_{Gz,salida}) \cdot \hat{k} \\ + q_{gen} \cdot V_{cont} = \dot{m} \cdot \Delta \hat{H} \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de *entrada* y *salida*, por barras verticales que indiquen el rango. Recordando como se hizo en *cantidad de movimiento*, se debe medir la variación, para el eje r su entrada esta representado por $|_{r_0}$ y la salida por $|_{r_1}$, pero como se parte del eje coordenado $|_{r_0} = |_r$ y $|_{r_1} = |_{r+\Delta r}$, así mismo para el eje θ su entrada será $|_{\theta}$ y su salida $|_{\theta+\Delta\theta}$. Mismo caso para el eje z su entrada será $|_z$ y su salida $|_{z+\Delta z}$.

$$A_{s(r)} (q_{Gr}|_r - q_{Gr}|_{r+\Delta r}) \cdot \hat{r} + A_{s(\theta)} (q_{G\theta}|_{\theta} - q_{G\theta}|_{\theta+\Delta\theta}) \cdot \hat{\theta} + A_{s(z)} (q_{Gz}|_z - q_{Gz}|_{z+\Delta z}) \cdot \hat{k} + q_{gen} \cdot V_{cont} = \dot{m} \cdot \Delta \hat{H}$$

Para $\dot{m} = \rho \dot{V}$, que a su vez es igual a $\rho \dot{V} = \rho \frac{V_{cont}}{\Delta t}$, considerando que la ρ se mantiene constante o tomando una densidad promedio. Para el volumen de control esta dado por las dimensiones $r\Delta r\Delta\theta\Delta z$, el volumen se describe

$$\begin{aligned} A_{s(r)} (q_{Gr}|_r - q_{Gr}|_{r+\Delta r}) \cdot \hat{r} + A_{s(\theta)} (q_{G\theta}|_{\theta} - q_{G\theta}|_{\theta+\Delta\theta}) \cdot \hat{\theta} + A_{s(z)} (q_{Gz}|_z - q_{Gz}|_{z+\Delta z}) \cdot \hat{k} \\ + r\Delta r\Delta\theta\Delta z q_{gen} = \rho \cdot \frac{r\Delta r\Delta\theta\Delta z}{\Delta t} \cdot C_p \cdot \Delta T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{s(r)} (q_{Gr}|_r - q_{Gr}|_{r+\Delta r}) \cdot \hat{r} + A_{s(\theta)} (q_{G\theta}|_{\theta} - q_{G\theta}|_{\theta+\Delta\theta}) \cdot \hat{\theta} + A_{s(z)} (q_{Gz}|_z - q_{Gz}|_{z+\Delta z}) \cdot \hat{k} \\ + r\Delta r\Delta\theta\Delta z q_{gen} = r\Delta r\Delta\theta\Delta z \rho C_p \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad (13.10) \end{aligned}$$

Los valores para:

- $A_{s(r)} = r\Delta\theta\Delta z$, siendo el área lateral del cilindro.
- $A_{s(\theta)} = \Delta r\Delta z$, es como si se dividiera un pastel en una rebana sumamente fina, parece una parte rectangular.
- $A_{s(z)} = r\Delta r\Delta\theta$, siendo el área del círculo.

Reemplazando dichas expresiones en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} r\Delta\theta\Delta z (q_{Gr}|_r - q_{Gr}|_{r+\Delta r}) \cdot \hat{r} + \Delta r\Delta z (q_{G\theta}|_{\theta} - q_{G\theta}|_{\theta+\Delta\theta}) \cdot \hat{\theta} + r\Delta r\Delta\theta (q_{Gz}|_z - q_{Gz}|_{z+\Delta z}) \cdot \hat{k} \\ + r\Delta r\Delta\theta\Delta z q_{gen} = r\Delta r\Delta\theta\Delta z \rho C_p \frac{\Delta T}{\Delta t} \end{aligned}$$

Se debe mencionar algo antes, es que el flujo de calor para q_r esta en función de r , y su $A_{s(r)}$ tiene la variable r fuera de esta, por ello dicha variable deberá entrar dentro del paréntesis y tendrá una pequeña

modificación: el flujo de calor de entrada será $r_0 = r$ permanecerá igual $r q_r|_r$, pero para el flujo de calor de salida la variable r se modificara, ya que ira hasta r_1 o dicho de otra manera $r_1 = r_0 + \Delta r = r + \Delta r$

$$\Delta\theta\Delta z [r q_{Gr}|_r - (r + \Delta r) q_{Gr}|_{r+\Delta r}] \cdot \hat{r} + \Delta r\Delta z (q_{G\theta}|_\theta - q_{G\theta}|_{\theta+\Delta\theta}) \cdot \hat{\theta} + r\Delta r\Delta\theta (q_{Gz}|_z - q_{Gz}|_{z+\Delta z}) \cdot \hat{k} + r\Delta r\Delta\theta\Delta z q_{gen} = r\Delta r\Delta\theta\Delta z \rho C_p \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

Se procede a dividir toda la expresión entre el volumen de control

$$\frac{\Delta\theta\Delta z [r q_{Gr}|_r - (r + \Delta r) q_{Gr}|_{r+\Delta r}]}{r\Delta r\Delta\theta\Delta z} \hat{r} + \frac{\Delta r\Delta z (q_{G\theta}|_\theta - q_{G\theta}|_{\theta+\Delta\theta})}{r\Delta r\Delta\theta\Delta z} \hat{\theta} + \frac{r\Delta r\Delta\theta (q_{Gz}|_z - q_{Gz}|_{z+\Delta z})}{r\Delta r\Delta\theta\Delta z} \hat{k} + q_{gen} = \rho C_p \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

$$\frac{[r q_{Gr}|_r - (r + \Delta r) q_{Gr}|_{r+\Delta r}]}{r\Delta r} \hat{r} + \frac{(q_{G\theta}|_\theta - q_{G\theta}|_{\theta+\Delta\theta})}{r\Delta r\Delta\theta} \hat{\theta} + \frac{(q_{Gz}|_z - q_{Gz}|_{z+\Delta z})}{\Delta z} \hat{k} + q_{gen} = \rho C_p \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

Aplicando el $\lim_{r \rightarrow 0}$, $\lim_{\theta \rightarrow 0}$ y $\lim_{z \rightarrow 0}$, así mismo midiendo el cambio infinitesimal de $\Delta T/\Delta t$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{[r q_{Gr}|_r - (r + \Delta r) q_{Gr}|_{r+\Delta r}]}{r\Delta r} \hat{r} + \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(q_{G\theta}|_\theta - q_{G\theta}|_{\theta+\Delta\theta})}{r\Delta r\Delta\theta} \hat{\theta} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(q_{Gz}|_z - q_{Gz}|_{z+\Delta z})}{\Delta z} \hat{k} + q_{gen} = \rho C_p \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

$$- \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r q_{Gr}}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial q_{G\theta}}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial q_{Gz}}{\partial z} \hat{k} \right) + q_{gen} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (13.11)$$

Como se menciona el calor se puede transferir en tres mecanismos diferentes: conducción, convección y radiación. Para el problema que se esta planteando, el mecanismo de radiación no se tomará en cuenta, ya que no se podría medir la energía por radiación que emite la sustancia que esta reaccionando dentro de la tubería, posiblemente se pueda medir la que salga a través de la tubería, pero no es el caso de estudio, ya que la tubería esta aislada, por lo cual dicha energía es muy pequeña para considerarla. Si el fluido fluyera sumamente rápido, a un **régimen turbulento**, únicamente se consideraría la transferencia de calor por **convección**, estos casos se ocupa más cuando el sistema trata de remover la energía (disminuir la temperatura), se usa mucho en intercambiadores de calor, pudiendo ocupar la ecuación (13.4). Para sistemas abiertos que operan en un **régimen laminar**, se debe considerar que hay esfuerzos tanto por **conducción** como por **convección**, debido a que el fluido tiene una velocidad relativamente baja, a las partículas le da tiempo de transferir ese movimiento cinético que se llamamos calor ya sea del centro a los alrededores o viceversa. Considerando que el fluido viaja a un régimen laminar, para q_{Gr} estará dado por

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r q_{Gr}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial r q_{r,conv}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r q_{r,cond}}{\partial r} \quad (13.12)$$

Se desarrollara primero para el calor por convección, pero hay un inconveniente y se debe a que el calor por convección esta ocurriendo dentro de la tubería, ya que el fluido se esta desplazando generando su propia energía, sin ninguna interacción de trabajo (como pudiera ser el calentamiento por medio de resistencias), además de que las **paredes están aisladas** de la tubería no hay interacción de energía con éstas [149].

Por lo tanto, la razón de transferencia de calor se puede expresar como

$$\begin{aligned} q_{conv} \cdot A_s &= \dot{Q} \\ &= \dot{m}C_p (T_e - T_i) \\ &= \dot{m}C_p \Delta T \\ q_{conv} &= \frac{\dot{m}C_p \Delta T}{A_s} \\ &= \frac{\dot{V}}{A_s} \rho C_p \Delta T \end{aligned}$$

Sabiendo que $v_i = \dot{V}/A_s$, ver ecuación (1.31)

$$q_{conv} = v_i \rho C_p \Delta T \quad (13.13)$$

Donde v_i es la velocidad del flujo en dirección i ; ρ es la densidad del fluido; C_p es la capacidad calorífica; T_i y T_e son las temperaturas medias del fluido en la entrada y la salida del tubo, respectivamente. Una pregunta que surge y es ¿por qué no se ocupa la ley de enfriamiento de Newton? Y la respuesta es que dicha ley se ocupa cuando cuando la temperatura de superficie se mantiene constante ($T_s = cte$) o el flujo de calor en la superficie es igual constante ($q_s = cte$). Por ejemplo, se presenta la condición de temperatura superficial constante cuando ocurre un proceso de cambio de fase, como ebullición o condensación, en la superficie exterior de un tubo. Se tiene la condición de flujo de calor constante en la superficie cuando el tubo se somete a calentamiento por radiación o resistencia eléctrica de manera uniforme desde todas las direcciones [149]. Expresándose como

$$q_s = h_x(T - T_\infty)$$

Como se aprecia la temperatura a lo largo de la tubería, la temperatura inicial no será la misma que la final y despreciando la transferencia de calor que ocurra a los alrededores de la tubería. Si la velocidad ocurre en el eje r , la velocidad de flujo de calor por convección será

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r q_{r,conv}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot v_r \cdot C_p \cdot T)$$

Considerando que ρ y C_p son constantes

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r q_{r,conv}}{\partial r} = \frac{\rho \cdot C_p}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r \cdot T)$$

Como se vio anteriormente, la velocidad es una magnitud vectorial, al igual que la temperatura, haciendo que no se puedan sacar de la parcial tan fácilmente, por ello se recomienda usar la regla de la cadena. Pero hay sucede algo ¿qué pasa con la variable r ? Y es que a dicha variable se deberá dejar como producto de la velocidad v_r , ya que dicha velocidad si se ve afectada por la variable r , ver la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas (B.29).

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial r q_{r,conv}}{\partial r} &= \frac{\rho \cdot C_p \cdot r \cdot v_r}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\rho \cdot C_p \cdot T}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r q_{r,conv}}{\partial r} &= \rho \cdot C_p \cdot v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\rho \cdot C_p \cdot T}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) \end{aligned} \quad (13.14)$$

Para el flujo de calor por conducción esta dado por la ley de Fourier en coordenadas cilíndricas (C.4), considerando que k es constante

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r q_{r,cond}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (13.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones (13.14) y (13.15) en (13.12)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot q_{Qr}) = \rho C_p v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\rho C_p T}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) - \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (13.16)$$

Se repite el mismo procedimiento para $\partial q_{G\theta}/\partial\theta$ y $\partial q_{Gz}/\partial z$.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial q_{G\theta}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial q_{\theta,conv}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial q_{\theta,cond}}{\partial \theta}$$

- Para convección

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial q_{\theta,conv}}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot C_p \cdot v_{\theta} \cdot T) \\ &= \frac{\rho C_p T}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\rho C_p v_{\theta}}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \end{aligned}$$

- Para conducción, ocupando la ecuación (C.5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial q_{\theta,cond}}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \\ &= -\frac{k}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

- Sustituyendo el flujo de calor por conducción y convección

$$\frac{1}{r} \frac{\partial q_{G\theta}}{\partial \theta} = \frac{\rho C_p T}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\rho C_p v_{\theta}}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{k}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (13.17)$$

$$\frac{\partial q_{Gz}}{\partial z} = \frac{\partial q_{z,conv}}{\partial z} + \frac{\partial q_{z,cond}}{\partial z}$$

- Para convección

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{z,conv}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot C_p \cdot v_z \cdot T) \\ &= \rho C_p T \frac{\partial v_z}{\partial z} + \rho C_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

- Para conducción, ocupando la ecuación (C.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{z,cond}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &= -k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned}$$

- Sustituyendo el flujo de calor por conducción y convección

$$\frac{\partial q_{Gz}}{\partial z} = \rho C_p T \frac{\partial v_z}{\partial z} + \rho C_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} - k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (13.18)$$

Sustituyendo las ecuaciones (13.16), (13.17) y (13.18) en 13.11

$$\begin{aligned} - \left\{ \left[\rho C_p v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\rho C_p T}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) - \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \hat{r} + \left(\frac{\rho C_p T}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\rho C_p v_{\theta}}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{k}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \hat{\theta} \right. \\ \left. + \left(\rho C_p T \frac{\partial v_z}{\partial z} + \rho C_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} - k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \hat{k} \right\} + q_{gen} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes y quitando los vectores unitarios $\hat{r} = \hat{\theta} = \hat{z} = 1$ mediante la **divergencia**

$$k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] - \rho C_p T \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] - \rho C_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_{gen} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (13.19)$$

La ecuación anterior describe la distribución de temperatura en el interior de un fluido compresible en flujo laminar con una fuente de generación de energía en coordenadas cilíndricas. Para fluidos incompresibles se ocupa la ecuación (6.15), por lo tanto, la ecuación (13.19) será

$$k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + q_{gen} = \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (13.20)$$

Se paso del lado derecho de la igualdad los términos de velocidad. Dicha ecuación describe la distribución de temperatura en el interior de fluidos incompresibles en flujo laminar, en la cual existe reacción química. También se puede transcribir como

$$k \nabla^2 T + q_{gen} = \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) \quad (13.21)$$

Esta deducción se puede ver en [133], la cual parte de coordenadas cartesianas.



(a) Diseño real de un reactor batch [131].



(b) Reactor batch por dentro [132].

Figura 13.0.4: Reactor batch en forma cilíndrica.

Se puede simplificar la ecuación (13.20), siendo que ahora que el fluido está estático (considerando que el reactor tiene aleta de agitación, si no se deberá considerar la ecuación (13.20) con movimiento angular), tal como si fuera un reactor batch 13.0.4, el cual hay variación en el tiempo pero ahora el sistema se encuentra cerrado, entonces no habrá **velocidad** en dirección en los ejes r , θ y z . Solo habrá transferencia de calor por conducción

$$k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + q_{gen} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (13.22)$$

Dicha ecuación se le conoce como **ecuación general de conducción de calor en coordenadas cilíndricas para ρ , C_p y k constante** o también llamada **ecuación de Fourier-Biot**. Esta ecuación es aplicable tanto para **líquidos** estáticos en sistemas cerrados como para **sólidos**, siendo más utilizada en

estos últimos, ya que su ρ , C_p y k se mantiene constante en mayor margen de temperatura. La ecuación anterior también se puede encontrar como

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 \mathbf{T} + q_{gen} \quad (13.23)$$

Donde el operador ∇^2 podrá estar en coordenadas rectangulares, cilíndricas o esféricas. Dicha ecuación a condiciones específicas se reduce a tres grandes ecuaciones

1. Cuando el sistema opera de manera estacionaria pero cuenta con una fuente generadora de energía se le llama **ecuación de Poisson**

$$0 = k \nabla^2 \mathbf{T} + q_{gen} \quad (13.24)$$

2. Cuando el sistema opera de manera no estacionaria y no cuenta con una fuente generadora de energía se le llama **ecuación de difusión**

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 \mathbf{T} \quad (13.25)$$

3. Cuando el sistema opera de manera estacionaria y no cuenta con una fuente generadora de energía se le llama **ecuación de Laplace**

$$0 = k \nabla^2 \mathbf{T} \quad (13.26)$$

Las ecuaciones tridimensionales anteriormente deducidas se pueden reducir a unidimensionales cuando la temperatura varía solo en una dimensión. Una vez aplicado el balance correspondiente de energía la ecuación puede ocuparse en coordenadas cartesianas y esféricas, ya sea para **conducción** o donde la **energía esta en función de las propiedades de transporte de fluido**, donde las ecuaciones se pueden ver en el apéndice C. La deducción de las ecuaciones por conducción en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas se pueden ver en los siguientes vídeos [134] [135] [136]. Retomando el problema inicial del reactor tubular en horizontal, se sabe que que la velocidad es en flujo laminar, por lo tanto habrá transferencia de calor por conducción y convección, ocupando la ecuación (13.20), la velocidad ocurre a lo largo del eje z , haciendo que la velocidad en v_r y v_θ sea despreciable. La transferencia de calor por conducción del fluido se puede dar en las direcciones r y z , para θ no se considera debido a que es homogénea, es decir, que no hay cambio de temperatura en dicha dirección. Pero debido a la paredes de la tubería esta bien aislada, se puede considerar como si fuere esencialmente independiente de r , por lo tanto tendrá relevancia la temperatura de entrada y de salida, siendo a lo largo del eje z [1]. Además, que la tubería opera de manera de manera estacionaria y si tiene generación de energía, quedando como

$$k_{eff,zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q_{gen} = \rho C_p v_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

Donde $k_{eff,zz}$ es la **conductividad térmica efectiva en dirección z** [1], ya que puede existir conductividad térmica efectiva en dirección r , debido a que son diferentes y estos se presentan cuando los ductos cilíndricos están llenos de materiales granulares a través de los cuales circula un fluido. Lo que queda por hacer sería resolver la EDP, pero para ello se necesitan condiciones de frontera, las cuales para sistemas no isotérmicos con un fluido en movimiento se utilizan los siguientes parámetros, los cuales se pueden ocupar las mismas condiciones para sistemas no isotérmicos por conducción [149]:

- La velocidad del fluido, debido a que son flujos laminares se debe resolver primero la ecuación de velocidad a partir de la ecuación de movimiento.
- La temperatura en una superficie puede ser conocida, por ejemplo $T = T_0$.
- La densidad de flujo de calor en una superficie puede especificarse, por ejemplo $q = q_s$.
- En una interfase sólido-fluido, la densidad de flujo de calor puede relacionarse con la diferencia entre la temperatura de la interfase y la del fluido mediante la ecuación de enfriamiento de Newton (12.6).
- En la interfase sólido-sólido y fluido-fluido, existe continuidad en la distribución de temperaturas y la densidad de flujo de calor
- Cuando una frontera este aislada, con el fin de minimizar las pérdidas (o ganancias) de calor a través de ellas, el aislamiento reduce dicha transferencia. Si una superficie esta bien aislada se puede considerar un flujo específico de calor cero $q = 0$.

El procedimiento para resolver cualquier problema de transferencia de calor, ya no es necesario el tener que utilizar volúmenes de control, ya que se obtuvo una ecuación general de transferencia de calor, la cual permite deducir ecuaciones más rápido únicamente teniendo que eliminar variables, mediante *restricciones* que uno ponga para el caso de cada estudio.

13.1. Coordenadas rectangulares

Una vez explicado el balance de energía, el procedimiento para plantar y resolver los problemas de flujo de calor de manera analítica es similar al de cantidad de movimiento, pero con la diferencia que ya no se tendrá que plantear volumen de control, sino, solo ocupar ecuaciones generales de transferencia de calor, partiendo de un problema "sencillo" y posteriormente ir subiendo de dificultad los problemas, cambiando la geometría e ir aumentando variables.



Figura 13.1.1: Panel de cristal.

Ejemplo No. 1

Para el primer caso hipotético se debe suponer que hay un puerta de cristal cuadrado, ver figura 13.1.1, el cual se ocupa como entrada principal para una sala de espera de un consultorio. Dentro de dicha sala de espera se instala un *minisplit* para tener un clima agradable para las personas. Se le piden al ingeniero saber cuanto sería el cargo por energía consumida en un mes en la época de verano si el *minisplit* opera 10 h continuas para enfriar el cuarto a la temperatura de $15^{\circ}C$. En verano la temperatura exterior llega hasta los $35^{\circ}C$. Solo se considerara que donde ocurre una mayor transferencia

de calor es por la puerta de cristal, despreciando accesorios y las otras paredes del consultorio, debido a que el espesor de la puerta de cristal es más delgada que el de una pared, existiendo así un mayor gradiente de temperatura. Además, de que la conductividad térmica del vidrio arquitectónico es de $k = 1 \text{ W}/(m \cdot K)$, mientras que el de las paredes se considerara de ladrillo común $k = 0.72 \text{ W}/(m \cdot K)$, siendo de mayor conductor de calor el vidrio [149].

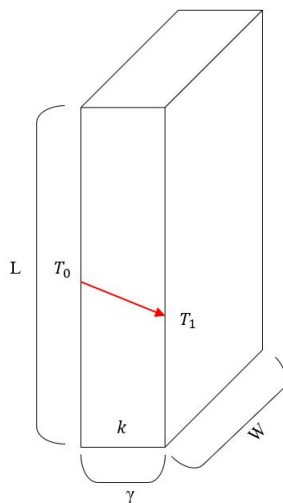


Figura 13.1.2: Representación esquemática del panel de cristal.

Lo primero que se debe hacer es desarrollar un bosquejo del problema, para ello se considerara un paralelepípedo de dimensiones de alto L , largo W y un grosor γ , el cual tiene un conductividad térmica k constante. Se considerara que la temperatura del exterior resulta igual a la superficie exterior de la pared de cristal, definiendo la como la variable T_0 , mientras que en la superficie interior de la pared es igual a los $15^\circ C$ y se representará como T_1 , por lo tanto $T_0 > T_1$, tal y como se muestra en 13.1.2

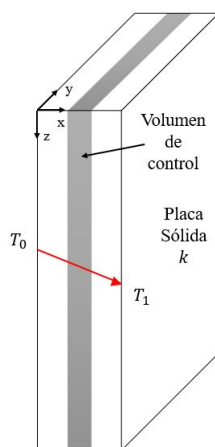


Figura 13.1.3: Volumen de control de una pared rectangular.

Se debe determinar la razón de pérdida de calor a través del cristal, para ello se realizara el desglose del ejercicio, estableciendo un eje coordenado adecuado para trabajar, siendo el ideal en coordenadas rectangulares y estableciendo el volumen de control, como se muestra en la figura 13.1.3. Para el volumen de control recordar que será perpendicular al eje de transferencia de calor. Si la transferencia de calor

es unidireccional y se da en el eje x , los ejes perpendiculares serán a lo largo de y y z mientras que el diferencial se llevara a cabo en Δx . Realizando una tabla con nuestras variables que intervienen, despreciando el cambio respecto al tiempo, ya que el sistema opera de manera estacionaria.

Definición	Variable
Flujo de calor que entra al volumen de control. Tendrá dirección x , ya que el flujo fluye en dicha dirección.	$\dot{Q}_{x,entrada} = A_s q_x _x$
Flujo de calor que sale del volumen de control. Tendrá dirección x , ya que el flujo fluye en dicha dirección.	$\dot{Q}_{x,salida} = A_s q_x _{x+\Delta x}$
Flujo de calor producido en el volumen de control.	0

Se puede deducir la ecuación específica para este problema, siguiendo la misma metodología que se vio al inicio de este capítulo, partiendo de la primera ley de la termodinámica. Aunque es algo repetitivo y es más rápido usar las ecuaciones de transferencia de calor que se ven en el apéndice C. Para saber que ecuación ocupar se debe ir eliminando variables. La ecuación que se ocupara para medir la transferencia de calor son las que se encuentran en el apéndice C.2, de las tres que se tienen, de acuerdo a la geometría establecida en coordenadas rectangulares es (C.10)

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + q_{gen} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

De esta se eliminan ciertos términos de flujo de calor, en la dirección y y z , esto se debe a que el área donde se transfiere calor en dichos ejes es muy pequeña comparada comparada con la que se da en el eje x , tendiendo a despreciar a despreciar la transferencia de calor que se pueda dar en el eje y y z , y considerando que el flujo de calor sea unidireccional hacia el eje x . También, se despreciaría el término de generación de energía y el flujo de acumulación de energía, quedando la expresión (C.10) reducida a

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} = 0$$

Resolviendo la ecuación diferencial

$$q_x = C_1 \tag{13.27}$$

Posteriormente se aplica la ley de Fourier (12.3), en la expresión anterior, donde tendrá dirección a lo largo del eje x

$$-k \frac{dT}{dx} = C_1 \tag{13.28}$$

Se resuelve la ecuación ecuación diferencial

$$kT = -C_1 x + C_2$$

$$T = -\frac{C_1}{k} x + C_2$$

Aplicando los valores de frontera donde para

- 1) $x = 0 \quad T = T_0$
- 2) $x = \gamma \quad T = T_1$

Aplicando la primera condición 1)

$$(T_0) = -\frac{C_1}{k}(0) + C_2$$

$$T_0 = C_2$$

Aplicando la segunda condición 2)

$$(T_1) = -\frac{C_1}{k}(\gamma) + T_0$$

$$-\frac{k}{\gamma}(T_1 - T_0) = C_1$$

$$\frac{k}{\gamma}(T_0 - T_1) = C_1$$

Sustituyendo en la ecuación general para obtener la solución particular

$$T = -\frac{\frac{k}{\gamma}(T_0 - T_1)}{k}x + T_0$$

$$T = T_0 - (T_0 - T_1)\frac{x}{\gamma}$$

Simplificando

$$T(x) = T_0 - (T_0 - T_1)\frac{x}{\gamma} \tag{13.29}$$

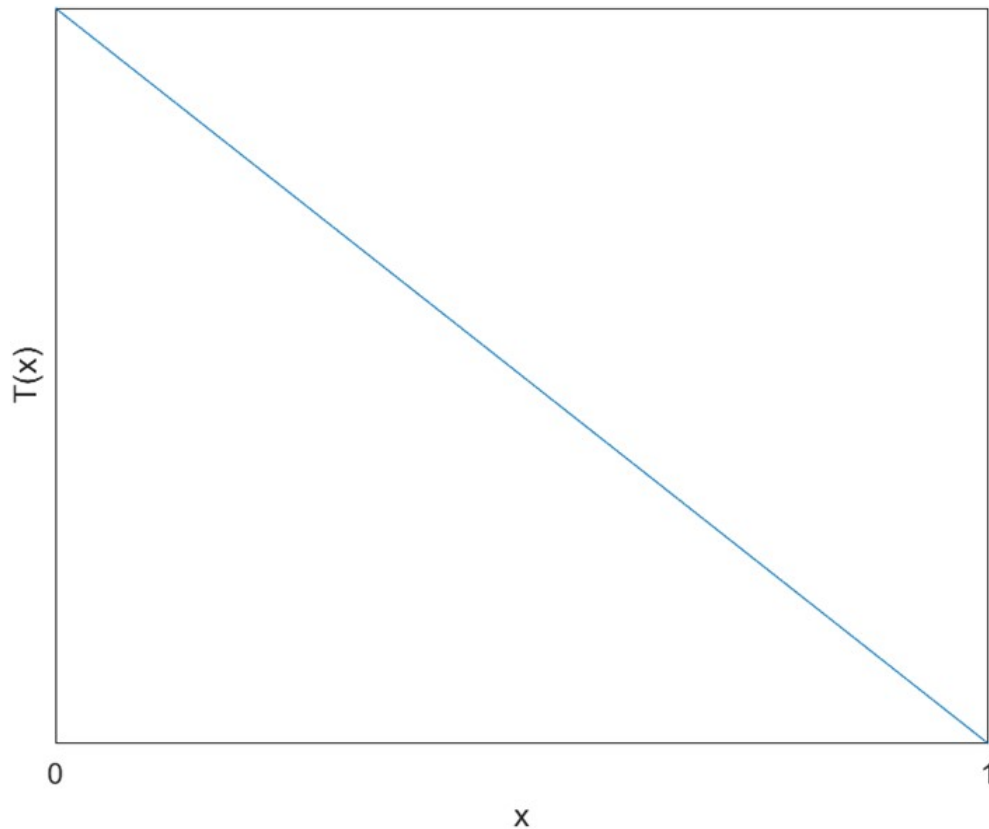


Figura 13.1.4: Perfil de temperatura.

La ecuación obtenida describe el perfil de temperatura que se establece en el sistema, a todo lo ancho de la pared cuando la conductividad térmica k permanece constante, como se logra apreciar en la figura 13.1.4, la función es una recta indicando que en coordenadas rectangulares el perfil de temperatura tendera a función lineal, cuando no hay generación de energía, además, de que la temperatura máxima que se logra es cuando la distancia es igual a $x = 0$ y conforme esta avanza se puede decir que va *disminuyendo*. Pero, el objetivo principal del problema es encontrar el flujo el calor transferido entre el panel de cristal, por ello se retoma la ecuación (13.27) y se aplica la constante C_1

$$q_x = \frac{k}{\gamma}(T_0 - T_1) \quad (13.30)$$

Recordando que q_x representa únicamente el flujo de calor por unidad de área, por ello es mejor ocupar el término de \dot{Q} , cual viene representado como $\dot{Q} = q_x/A_s$. Donde A_s es el área por la cual fluye el calor

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}}{A_s} &= \frac{k}{\gamma}(T_0 - T_1) \\ \dot{Q} &= A_s \frac{k}{\gamma}(T_0 - T_1) \end{aligned}$$

Donde $A_s = L \cdot W$

$$\dot{Q} = k \cdot L \cdot W \frac{T_0 - T_1}{\gamma} \quad (13.31)$$

Esta ecuación nos permite determinar cuanto calor se transfiere por área.

13.1.1. Valores reales

Para determinar cuanto sería el consumo de energía por 10h, se debe saber las dimensiones y propiedades del material. Por ello el panel de cristal que se esta ocupando mide 3 m de largo, por 3 m de ancho y un espesor de 5 mm. La conductividad térmica del vidrio ordinario es de 1 W/(m · K).

1. Lo primero es ocupar la ecuación 13.31

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= k \cdot L \cdot W \frac{T_0 - T_1}{\gamma} \\ &= \left(1 \frac{W}{m \cdot K}\right) (3 m)(3 m) \frac{(308.15 K - 288.15 K)}{0.005 m} \\ &= 36000 W \end{aligned}$$

2. Siguiente paso, es encontrar el trabajo que genera el *minisplit*. Por ello únicamente por sencillez nos enfocaremos en el balance de energía del compresor, el cual operara de manera isotérmica. Ocupando la ecuación (10.11) donde se elimina el término de entalpía, por trabajar de manera isotérmica, la energía cinética y nos quedaría tal que

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{ms} - \dot{W}_{ms} &= 0 \\ \dot{Q}_{ms} &= \dot{W}_{ms} \end{aligned}$$

3. El calor del *minisplit*, Q_{ms} , va a ser igual al calor que se cede entre la puerta, entonces

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{ms} &= \dot{Q} \\ \dot{W}_{ms} &= 36000 W \end{aligned}$$

4. Un mes tiene aproximadamente 30 días y el *minisplit* opera 10 h. En un mes estaría trabajando 300 h. La ecuación que rige el cargo por energía es

$$\begin{aligned} C_{ec} &= \dot{W} \cdot t \\ &(35 \text{ kW}) (300 \text{ h}) \\ &= 10800 \text{ kWh} \end{aligned}$$

5. Si un consultorio con el equipo que ocupa se posiciona en consumo excedente según la CFE [137] la tarifa es de \$3.147 *mxn* por cada kWh para negocios, entonces

$$\begin{aligned} \text{Cargo} &= C_{ec} \cdot t \\ &= (10800 \text{ kWh}) (\$3.147 \text{ mxn}) \\ &= \$33987.6 \text{ mxn} \end{aligned}$$

Siendo así que tan solo el *minisplit* en verano generaría un gasto al mes de \$33987.6 *mxn*, siendo sumamente excesivo a menos que el consultorio para reducir el gasto económico solo lo prenda cuando sea sumamente necesario, exista un convenio entre la comisión de electricidad y el local particular o no se baje la temperatura hasta 15°C si no elevarla un poco más dicha temperatura, también otra forma de reducir el consumo energético sería el aumentar el grosor de la puerta. Quedándonos a reflexionar además de los lugares que todo el día ocupan un *minisplit* ¿cuánto no consumirán de luz?

13.1.2. Solución numérica

La solución parte de la ecuación (13.28)

```

clc
clear all
Tx = dsolve('-k*DT=C1','x');

syms C2 C1 x T T0 T1 b dT As k
Ec1 = T == Tx;
C21 = solve(Ec1,C2);
%Valores en la frontera
C21 = subs (C21,x,0);
C21 = subs (C21,T,T0);

%Ecuación nueva generada
Tx1 = subs(Tx,C2,C21);

%Segunda condición de frontera
Ec2 = dT == Tx1;
C11 = solve(Ec2,C1);
%Valores en la frontera
C11 = subs (C11,x,b);
C11 = subs (C11,dT,T1);
    
```

```

%Perfil de temperatura
Tx2 = subs(Tx1,C1,C11)

%Flujo de calor
Q = C11*As

%Condiciones de estudio
L = 3;%Longitud [m]
W = 3;%Ancho [m]
k1 = 1;%Conductividad térmica [W/m-K]
b1 = 5/1000;%Espesor [m]
T00 = 35+273.15;%Temperatura [K]
T01 = 15+273.15;%Temperatura [K]
t = 30*10;%tiempo de uso [h]
Ta = 3.147;%Tarifa [mxn]

As1 = L*W;

%Tranferencia de calor de la pared [W]
Qx = subs(Q,As,As1);
Qx = subs(Qx,T0,T00);
Qx = subs(Qx,T1,T01);
Qx = subs(Qx,b,b1);
Qx = double(subs(Qx,k,k1));
Qx = Qx/1000

%Cargos por energía consumida
Cargo = Qx*t*Ta
---
Tx2 =
    T0 - (x*(T0 - T1))/b
Q =
    (As*k*(T0 - T1))/b
Qx =
    36
Cargo =
    3.3988e+04

```

13.2. Coordenadas cilíndricas

Ejemplo No. 2 Una forma en transportar un líquido, como podría ser el agua, es mediante un recipiente, siendo específicamente una botella de acero inoxidable, la cual es un contenedor cilindro, tal como se aprecia en la figura 13.2.1.



Figura 13.2.1: Botella de acero inoxidable de pared simple sin aislamiento [138].

El caso de estudio de este problema será el de ver en que tiempo tarda en enfriarse un té (que puede considerarse en su mayoría como agua), la cual se encuentra a $65^{\circ}C$, mientras que en el exterior hay una temperatura de $20^{\circ}C$, con la finalidad de hacer té frío. Para ello el té se vierte en la botella de acero inoxidable y esta misma se cierra de forma hermética. El té se prepara a las 7 de la mañana, se quiere saber si el té tendrá una temperatura adecuada de $30^{\circ}C$ antes de las 7:30 a.m., para ver si se puede tomar el termo con la seguridad de no quemarse a la hora de sujetar la botella. Las dimensiones de la botella tiene son de longitud L , diámetro interior $D_1 = 2R_1$ y diámetro exterior $D_2 = 2R_2$, tal como se muestra en el esquema 13.2.2

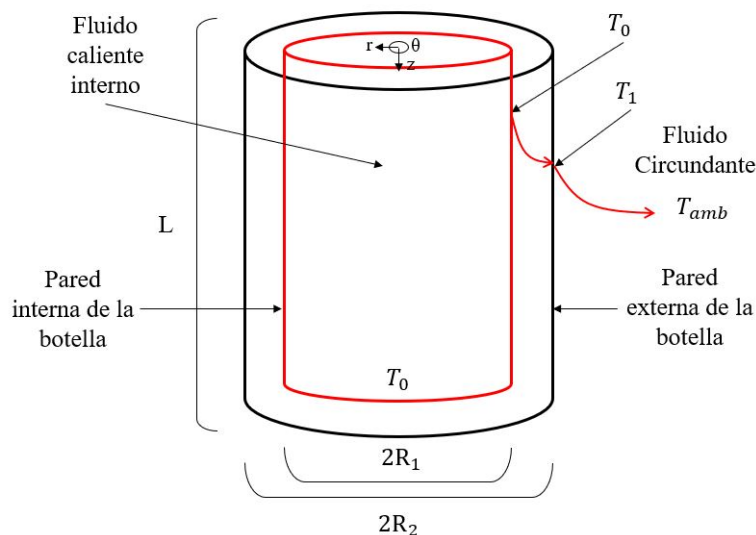


Figura 13.2.2: Esquema del recipiente con sus dimensiones respectivamente.

Para resolver el problema se debe escoger la ecuación adecuada, a partir del apéndice C, la cual se tiene la ecuación de energía en función del transporte de fluido o la de conducción, como el fluido esta estático, la más conveniente es la de conducción dada en la parte C.2 en términos de densidad de flujo. De las tres ecuaciones que se tienen en la parte parte C.2 y de acuerdo al eje de coordenadas cilíndricas, la ecuación

más adecuada es (C.11)

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] + q_{gen} \quad (13.32)$$

Se reducirán ciertos términos a la ecuación anterior de acuerdo a las condiciones de estudio. El término de generación de energía se eliminará, ya que no existe, así mismo el término de energía en θ y z se desprecia: la energía en θ debido a que no hay diferencial de temperatura eje θ , mientras que para el caso del flujo de calor en z si habrá, siendo en la base y tapa de la botella, pero se considerara que la botella se pone encima de una mesa, actuando esta como un aislante, impidiendo que la transferencia de calor se lleve, mientras que en la tapa de la botella, al ser de plástico tiene una menor conductividad térmica que el acero inoxidable y la tapa es más gruesa que la pared de la botella, haciendo que se de mayor transferencia de calor en los alrededores del cilindro, que en a tapa y el fondo, ver figura 13.2.3. Ya que se quiere analizar el comportamiento de la temperatura a lo largo del tiempo, operara de manera no estacionaria.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) \quad (13.33)$$

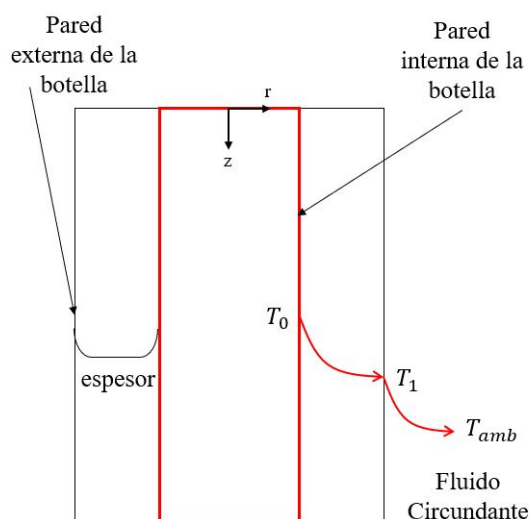


Figura 13.2.3: Representación lateral del cilindro.

Apreciando la ecuación (13.33) se tiene una parcial, la cual se conoce como el **problema clásico de Stefan** [139] [140] [141] [142], el cual para resolverlo se plantea de dos modos:

1. Aplicando el método de variables separables para una EDP, o
2. Aplicando el método de Stefan, el cual considera ocupar un **estado pseudo-estacionario** (*pseudo-steady-state*), conocido por sus sigla en ingles como *PSS*.

El método del **estado pseudo-estacionario** consiste en una solución analítica, donde la variable del tiempo se aproxime al 0, $\partial T/\partial t \approx 0$, [139] [140], para si obtener una EDO. Una vez obtenido el resultado de la EDO se sustituye la solución en la ecuación (13.33), donde únicamente existirá la variación de la temperatura respecto al tiempo, $\partial T/\partial t$. Dicho esto, se evalúa **estado pseudo-estacionario**, cuando $\partial T/\partial t \approx 0$

$$- \frac{1}{\partial r} (r q_r) \approx 0 \quad (13.34)$$

Resolviendo

$$q_r = \frac{C_1}{r} \quad (13.35)$$

Aplicando la ley de Fourier

$$-k \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r} \quad (13.36)$$

Resolviendo la segunda ecuación diferencial

$$\begin{aligned} -kT &= C_1 \ln(r) + C_2 \\ T &= -\frac{C_1}{k} \ln(r) - C_2 \end{aligned}$$

Aplicando los valores de frontera $T(R_1) = T_0$ y $T(R_2) = T_1$. Ocupando la condición 1)

$$(T_0) = \frac{C_1}{k} \ln(R_1) + C_2 \quad (13.37)$$

$$T_0 - \frac{C_1}{k} \ln(R_1) = C_2 \quad (13.38)$$

$$(13.39)$$

Aplicando la segunda condición 2)

$$\begin{aligned} (T_1) &= \frac{C_1}{k} \ln(R_2) + C_2 \\ T_1 &= \frac{C_1}{k} \ln(R_2) + T_0 - \frac{C_1}{k} \ln(R_1) \end{aligned}$$

$$T_1 - T_0 = \frac{C_1}{k} \ln(R_2) - \frac{C_1}{k} \ln(R_1)$$

$$T_1 - T_0 = \frac{C_1}{k} [\ln(R_2) - \ln(R_1)]$$

$$T_1 - T_0 = \frac{C_1}{k} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$k(T_1 - T_0) \frac{1}{\ln(R_2/R_1)} = C_1$$

Sustituyendo en C_2

$$C_2 = T_0 - \frac{C_1}{k} \ln(R_1)$$

$$C_2 = T_0 - k(T_1 - T_0) \frac{1}{\ln(R_2/R_1)} \frac{1}{k} \ln(R_1)$$

$$C_2 = T_0 - (T_1 - T_0) \frac{\ln(R_1)}{\ln(R_2/R_1)}$$

Sustituyendo en la ecuación general

$$T = \frac{1}{k} k(T_1 - T_0) \frac{1}{\ln(R_2/R_1)} \ln(r) + T_0 - (T_1 - T_0) \frac{\ln(R_1)}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$T = (T_1 - T_0) \frac{1}{\ln(R_2/R_1)} \ln(r) + T_0 - (T_1 - T_0) \frac{\ln(R_1)}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$T = \frac{T_1 - T_0}{\ln(R_2/R_1)} [\ln(r) - \ln(R_1)] + T_1$$

$$T = \frac{T_1 - T_0}{\ln(R_2/R_1)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + T_1$$

$$T = (T_1 - T_0) \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)} + T_1$$

Siendo la solución particular

$$T(r) = (T_1 - T_0) \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)} + T_0 \quad (13.40)$$

Donde r solo es valido para el intervalo $[R_1, R_2]$. Sustituyendo C_1 en la ecuación (13.35)

$$q_r = \frac{1}{r} k (T_1 - T_0) \frac{1}{\ln(R_2/R_1)}$$

Acomodando términos y haciendo una observación de que $T_1 - T_0$ matemáticamente esta correcto, pero físicamente no, esto debido a que rompería la segunda ley de la termodinámica, debido a que $T_1 < T_0$ y a la hora de resolver el flux calor daría un valor negativo. Para ello se debe acomodar la ecuación tal que quede $T_0 - T_1$. Pare lograr esto debe quedarse el signo negativo de la ecuación (13.34), debido a que a la hora de resolver la ecuación (13.34) la constante C_1 tiende a *absorber* dicho signo [23]. Quedando la ecuación (13.35) como $q_r = -C_1/r$ y el flujo de calor quedaría tal que

$$q_r = \frac{k}{r} \frac{T_0 - T_1}{\ln(R_2/R_1)} \quad (13.41)$$

La expresión anterior representa la conducción de calor a los alrededores de un cilindro, pero se desconoce la T_1 , ya que la temperatura de superficie no será la misma que la del interior, por ello se utiliza el flujo de calor por convección (12.6), gracias a que la temperatura del ambiente es más fácil medir

$$\dot{Q} = h \cdot A_s (T_1 - T_{amb})$$

Aplicando la definición de flujo de calor $\dot{Q} = q \cdot A_s$

$$q_r = h(T_1 - T_{amb})$$

Despejando la variable T_1

$$T_1 = \frac{q_r}{h} + T_{amb} \quad (13.42)$$

Despejando la variable T_1 de (13.41)

$$T_1 = T_0 - \frac{q_r \cdot r \cdot \ln(R_2/R_1)}{k} \quad (13.43)$$

Igualando las expresiones (13.42) y (13.43)

$$\begin{aligned} T_0 - \frac{q_r \cdot r \cdot \ln(R_2/R_1)}{k} &= \frac{q_r}{h} + T_{amb} \\ T_0 - T_{amb} &= \frac{q_r \cdot r \cdot \ln(R_2/R_1)}{k} + \frac{q_r}{h} \\ T_0 - T_{amb} &= q_r \left[\frac{r \cdot \ln(R_2/R_1)}{k} + \frac{1}{h} \right] \\ q_r &= \frac{T_0 - T_{amb}}{\frac{r \cdot \ln(R_2/R_1)}{k} + \frac{1}{h}} \\ q_r &= \frac{T_0 - T_{amb}}{\frac{r}{k} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{h}} \end{aligned}$$

Haciendo que la solución de la parcial $\partial(rq_r)/\partial r$ seá

$$\frac{\partial}{\partial r}(rq_r) = \frac{T_0 - T_{amb}}{\frac{r}{k} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{h}}$$

Sustituyendo en la expresión (13.33)

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \left[\frac{T_0 - T_{amb}}{\frac{r}{k} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{h}} \right]$$

$$\rho C_p r \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_0 - T_{amb}}{\frac{r}{k} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{h}}$$

Se debe multiplicar toda la ecuación por el área en la que esta fluyendo el calor, ya que se debe estimar cuanto es la perdida total de calor a través de las paredes. Donde el área de las paredes de un cilindro esta dado por $A_s = rd\theta dz$

$$A_s \left(\rho C_p r \frac{\partial T}{\partial t} \right) = A_s \left[\frac{T_0 - T_{amb}}{\frac{r}{k} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{h}} \right]$$

$$rd\theta dz \left(\rho C_p r \frac{\partial T}{\partial t} \right) = rd\theta dz \left[\frac{T_0 - T_{amb}}{\frac{r}{k} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{h}} \right]$$

$$(r^2 d\theta dz) \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = (rd\theta dz) \frac{T_0 - T_{amb}}{\frac{r}{k} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{h}}$$

$$(r^2 d\theta dz) \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_0 - T_{amb}}{\frac{1}{rd\theta dz r} \left[\frac{r}{k} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{h} \right]}$$

$$(r^2 d\theta dz) \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_0 - T_{amb}}{\frac{r}{rd\theta dz k} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{rd\theta dz h}}$$

$$(r^2 d\theta dz) \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_0 - T_{amb}}{\frac{1}{d\theta dz k} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{rd\theta dz h}}$$

Como se aprecia el término de $r^2 d\theta dz$ es el volumen de un cilindro.

$$V \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_0 - T_{amb}}{\frac{1}{d\theta dz k} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{rd\theta dz h}}$$

Sustituyendo los valores de $d\theta$ y dz , que al integrarse se obtiene

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

$$\int_0^L dz = L$$

Sustituyendo

$$V \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_0 - T_{amb}}{\frac{1}{2\pi L k} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{2\pi L r h}}$$

Ahora ¿qué valor tiene r ? Bueno hay que tener mucho cuidado con esta variable en transferencia de calor cuando se manejen coordenadas cilíndricas y esféricas. Debido a que r dependerá de donde se este evaluando la transferencia de calor por convección, en este caso hay un fluido circundante que interactúa con el diámetro exterior de la botella, por lo tanto $r = R_2$. Puede existir otros casos donde, por poner un ejemplo, sea una tubería hueca, donde interactúen dos fluidos uno interno y otro externo, entonces habrá dos h una interna la cual interactuara con el diámetro interno de tubería y una h externa donde interactuara con el diámetro externo. Aclarado, la ecuación final quedaría

$$V\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_0 - T_{amb}}{\frac{1}{2\pi Lk} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{2\pi LR_2h}}$$

El término T_0 deberá cambiarse en función del tiempo, debido a que la temperatura del líquido dentro del termo tendera a disminuir conforme pase el tiempo, es decir $T(t)$ y T_0 para a ser condición inicial en el tiempo $t = 0$.

$$V\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{T - T_{amb}}{\frac{1}{2\pi Lk} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{2\pi LR_2h}} \quad (13.44)$$

Donde la ecuación (13.44) representa el *calor que sale por conducción, el cual se disipa por medio de la convección en la pared del cilindro en estado no estacionario*. Si se aprecia bien, la ecuación parcial ya se volvió a una ordinaria, donde la variable de temperatura depende únicamente del tiempo. El acero inoxidable tiene una conductividad térmica promedio de $15 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ y al tener un espesor sumamente pequeño (entre 1-5 mm, dependiendo la calidad de la botella) la transferencia de calor será grande, considerado que la temperatura tanto dentro como fuera de la botella pudiera ser la misma, con muy pequeñas variaciones de temperatura. Pudiendo considerar que la transferencia de calor se da mayormente por *convección*. Entonces la ecuación (13.44) quedaría

$$V\rho C_p \frac{dT}{dt} = 2\pi LR_2h(T - T_{amb}) \quad (13.45)$$

La ecuación (13.44) se puede considerar más cuando el valor de la conductividad térmica es baja, con valores de $k < 3$, o el espesor es sumamente grueso. Un ejemplo es una taza de café, donde la espuma puede actuar como aislante, entonces la transferencia de calor actuara más en los alrededores de la taza, donde la conductividad térmica de tazas de arcilla de $0.1 < k < 0.7 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ y tienen por lo regular un espesor grueso, comparado con los 5 mm de la botella. Pasando las variables constantes del lado derecho de la ecuación (13.45)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2\pi LR_2h}{V\rho C_p}(T - T_{amb})$$

$$\frac{A_s h}{V\rho C_p}(T - T_{amb})$$

Al cociente $(A_s h)/(V\rho C_p)$ se nombrara como b , el cual tiene unidades de $1/\text{s}$ y se le llama **constante de tiempo**

$$\frac{dT}{dt} = b(T - T_{amb}) \quad (13.46)$$

A la ecuación (13.46) se le conoce como **ley de enfriamiento de Newton** [20]. Al resolver la ecuación anterior por el método de separación de variable, integrando desde $t = 0$ en el cual $T = T_0$, hasta cualquier instante t , el cual $T = T(t)$, da

$$\frac{T(t) - T_{amb}}{T_0 - T_{amb}} = e^{-bt} \quad (13.47)$$

La ecuación (13.47) permite determinar la temperatura $T(t)$ de un cuerpo en el instante t . Restricciones de la ecuación anterior

- Valida cuando se conoce la temperatura de superficie de un cuerpo, para temperaturas internas como la de una taza de café se ocupa la ecuación (13.44).
- Cuando k , C_p y ρ del material son constantes.

13.2.1. Valores reales

Las dimensiones de la botella son de radio interno 3 cm , con una altura de 26.5 cm , el espesor del acero inoxidable es de 0.3 cm y con conductividad térmica de $15.6\text{ W/(m}\cdot^{\circ}\text{C)}$. El té que se sirvió son de 750 mL , con una densidad promedio de 988.08 kg/m^3 y un calor específico promedio de $3120.5\text{ J/(kg}\cdot^{\circ}\text{C)}$. El único dato que se proporcionara será el coeficiente de convección natural para el aire que será de $15\text{ W/(m}^2\cdot^{\circ}\text{C)}$, un promedio de los obtenidos de [143], para la interacción entre el aire circundante y el diámetro exterior del cilindro. La condición inicial es

$$t(0) = 65^{\circ}\text{C}$$

Para posteriormente evaluar en que tiempo se logra la temperatura de 30°

13.2.2. Solución numérica

Se comparara las tres ecuaciones obtenidas para hacer una comparativa, siendo: (13.44), (13.46) y (13.47). Para su solución se ocupara el método de variables separables, por ello se tendrá que integrar las ecuaciones (13.44) y (13.46). La ecuación (13.47) se verificara únicamente que si sea la solución analítica de (13.46).

1. Se programa primero las datos constantes. Donde el C_p , ρ y V le corresponderá para los datos del fluido [139] [140]. Para k , L , R_1 y R_2 corresponderán a los datos de la botella, por ser el mecanismo de conducción. Par h y A_s serán los datos del fluido circundante, siendo el aire.

```

clc
clear all
syms T t t_f
%Datos
Cp = 3120.5;% Capacidad calorifica [J/kg-°C]
p = 988.08;% Densidad [kg/m^3]
h = 15;% Coeficiente de convección natural [W/m^2-°C];
k = 15.6;% Conductividad térmica de [W/(m-°C)]
R1 = 3/100;% Radio interno [m]
es = 0.3/100;% Espesor [m]
R2 = R1+es;% Radio externo [m]
L = 26.5/100;% Longitud de la botella [m]
T_amb = 20;% Temperatura ambiente [°C]
T_0 = 65;% Temperatura inicial [°C]
T_f = 30;% Temperatura a encontrar [°C]

```

```
t_0 = 0;% Condición inicial de t [s]
t_f = t;% Tiempo problema [s]
V = 0.00075;% Volumen [m^3]
As = 2*pi*R2*L;% Área de sección transversal
```

2. Mediante el comando `int(f,t,a,b)` se solucionara las ecuaciones (13.44) y (13.46). Donde f corresponde a la función a integrar; t es la variable a integrar; a, b serán el valor mínimo y máximo. Se obtendrán dos integrales resolver:

$$\int_{65}^{30} \frac{dT}{T - T_{amb}} = \frac{1}{V\rho C_p} \int_0^{t(f)} \frac{dt}{\frac{1}{2\pi Lk} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{2\pi L R_2 h}}$$

$$\int_{65}^{30} \frac{dT}{T - T_{amb}} = b \int_0^{t(f)} dt$$

La expresión de la izquierda de la igualdad de ambas ecuaciones deberá ser valor absoluto, para evitar dar valores negativos.

3. Una vez que se programa las integrales en MATLAB, usando el comando `sub` se despejara la variable `t_f`, que es el tiempo en función $t(f)$ y luego se pone el comando `double`, para simplificar la solución.

```
% Transferencia de calor por conducción + convección
F1 = 1/(T-T_amb);
F2 = 1/(log(R2/R1)/(2*pi*L*k)+1/(2*pi*L*R2*h))*1/(V*p*Cp);
a = abs(int(F1,T,T_0,T_f));
b = int(F2,t,t_0,t_f);
Ec = a == b;
t_f1 = double(solve(Ec,t_f));
t_f1 = t_f1/60% Solución en min

% Transferencia de calor por convección
F3 = (As*h)/(V*p*Cp);
c = int(F3,t,t_0,t_f);
Ec1 = a == c;
t_f2 = double(solve(Ec1,t_f));
t_f2 = t_f2/60% Solución en min
```

4. Por ultimo, es ocupar la ecuación (13.47), la cual se despeja la variable t y se añadirá un error, considerando el valor de la ecuación (13.44) como el real, ya que considera los dos mecanismos que intervienen entre si.

```
% Probavación de la ecuación de transferencia de calor por convección
ta = -1/F3*log((30-T_amb)/(T_0-T_amb));
ta = ta/60% Solución en min

error = abs(t_f1-t_f2)/t_f1*100
```

El programa completo queda

```

clc
clear all
syms T t t_f
%Datos
Cp = 3120.5;% Capacidad calorifica [J/kg-°C]
p = 988.08;% Densidad [kg/m^3]
h = 15;% Coeficiente de convección natural [W/m^2-°C];
k = 15.6;% Conductividad térmica de [W/(m-°C)]
R1 = 3/100;% Radio interno [m]
es = 0.3/100;% Espesor [m]
R2 = R1+es;% Radio externo [m]
L = 26.5/100;% Longitud de la botella [m]
T_amb = 20;% Temperatura ambiente [°C]
T_0 = 65;% Temperatura inicial [°C]
T_f = 30;% Temperatura a encontrar [°C]
t_0 = 0;% Condición inicial de t [s]
t_f = t;% Tiempo problema [s]
V = 0.00075;% Volumen [m^3]
As = 2*pi*R2*L;% Área de sección transversal

% Transferencia de calor por conducción + convección
F1 = 1/(T-T_amb);
F2 = 1/(log(R2/R1)/(2*pi*L*k)+1/(2*pi*L*R2*h))*1/(V*p*Cp);
a = abs(int(F1,T,T_0,T_f));
b = int(F2,t,t_0,t_f);
Ec = a == b;
t_f1 = double(solve(Ec,t_f));
t_f1 = t_f1/60% Solución en min

% Transferencia de calor por convección
F3 = (As*h)/(V*p*Cp);
c = int(F3,t,t_0,t_f);
Ec1 = a == c;
t_f2 = double(solve(Ec1,t_f));
t_f2 = t_f2/60% Solución en min

% Probovación de la ecuación de transferencia de calor por convección
ta = -1/F3*log((30-T_amb)/(T_0-T_amb));
ta = ta/60% Solución en min

error = abs(t_f1-t_f2)/t_f1*100
---
```

t_f1 =
70.5467

```
t_f2 =
    70.3340

ta =
    70.3340

error =
    0.3015
```

El té tarda en enfriarse 70 *min* a la temperatura deseada de 30°C. Para saber en que temperatura tendrá en el minuto 30 se pone el siguiente comando $T_{30} = T_{amb} + (T_0 - T_{amb}) * \exp(-F3 * 30 * 60)$ obteniendo una temperatura de 43.6916°C. Se aprecia que la ecuación (13.47) si es solución de (13.46). Además, la solución de la ecuación (13.44) es casi la misma que (13.46), con un error de 0.3015 %, donde en estadística el error debe ser menor al 5 %. Siendo aceptable el modelo.

13.3. Coordenadas esféricas

Ejemplo No. 3 Para este ejemplo se tratara de resolver todo el ejercicio programándolo en MATLAB. Para ello se ocupara de ejemplo un tanque esférico, ver figura 13.3.1, que son muy ocupamos en la industria, química, aeroespacial y petroquímica, ya que se utilizan bastante para el almacenamiento de gases y líquidos, gracias a su diseño ofrece una distribución uniforme de la tensión bajo carga interna, lo que resulta en un almacenamiento presurizado altamente eficiente, traduciéndose en un menor espacio de la tierra utilizada para el almacenamiento presurizado y ofrece costos más bajos para fundición, revestimientos, accesorios y tuberías que para otras opciones [144].



Figura 13.3.1: Tanque esférico [144].

Dicho tanque esférico se diseñó para almacenar 4000 m^3 de butano líquido con una densidad de 625.5 kg/m^3 . El material con que se construyó el recipiente es acero al carbón duro el cual consta de una composición química de 0.55 % de Carbón y el resto es hierro. Por cuestiones del mal mantenimiento y cuidado del tanque se desarrolla una grieta en la parte superior del mismo, haciendo que la presión que tenía en el interior caiga hasta la presión atmosférica, este caso a nivel del mar. Además que la temperatura desciende hasta 272.7 K , siendo la temperatura de ebullición del butano a 1 atm . La temperatura del aire circundante es de $17.5 \text{ }^\circ\text{C}$ con un coeficiente de convección de $10 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$. Determinar cuanto tiempo tardara en vaciarse el tanque esférico, así como la temperatura en que se encuentra la superficie de la esfera, ya que si se quiere sellar la fuga, se deberá tener cuidado al tocar la superficie de la esfera. En este caso se tendrá ciertas suposiciones,

- Un tanque esférico no está lleno al 100 %, debe tener una capacidad del 80 % de almacenamiento, pero debido a que el líquido se evapora, el gas abarca todo el contenido del recipiente, por ello se puede decir que la transferencia de calor será homogénea a lo largo del eje r de la esfera.
- Como hay variación en el tiempo la ecuación de transferencia de calor será una parcial respecto al tiempo, el cual se puede ver su programa en [145], pero para este caso se considerará que la temperatura dentro de la esfera y fuera de ella se mantiene constante, ya que se dejó pasar un lapso de tiempo razonable donde se encuentra en estado estacionario la transferencia de calor.
- Se considerará únicamente la transferencia de calor por convección afuera de la esfera debido al movimiento circundante del aire, dentro de la esfera también existirá transferencia de calor por convección ya que se encuentra un fluido que mantiene la temperatura constante dentro de ésta, pero se despreciará, debido a que obtener los valores de h_{butano} son sumamente complicados de obtener, por ende se considerará que la temperatura interior del tanque es la misma que la temperatura de ebullición de butano.

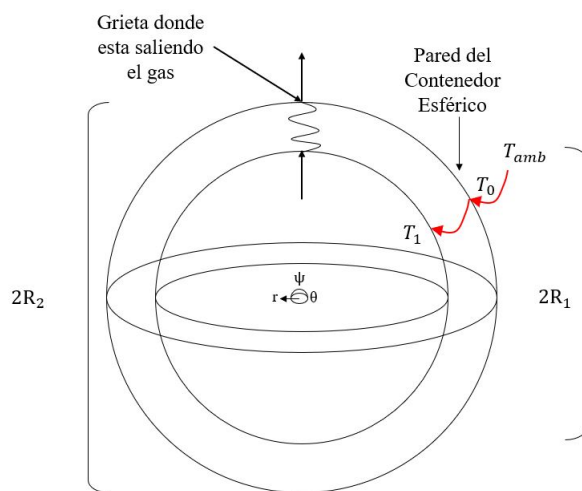


Figura 13.3.2: Esquema del tanque esférico.

Partiendo de un diagrama donde se vean todas las variables que intervienen en el problema, como se ilustra en 13.3.2, donde el radio interno de la esfera viene dado por $D_1 = 2R_1$, el radio externo $D_2 = 2R_2$, la temperatura interna T_1 , la temperatura externa T_0 y la temperatura ambiental T_{amb} y un dato extra será que la entalpía de vaporización del butano a 1 atm siendo de 320 kJ/kg . Para desarrollar la ecuación que rige la transferencia de calor, se partirá de la ecuación (C.14), de la cual se reducirán los términos

de transferencia de energía en dirección angular q_θ y q_ϕ , así como los términos de generación de energía, ya que no existe y el de temperatura de acumulación, ya que el sistema opera de manera estacionaria, quedando reducida a

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) = 0$$

Existen muchos métodos de programación en MATLAB, siendo uno de ellos el que se vera ahora para resolver a ecuación diferencial donde la derivada tiene un producto. Para ocupar el comando `dsolve` no se puede introducir en MATLAB una derivada ordinaria por productos, es decir $d(r^2 \cdot q_z)/dr$. Para ello se pondrá dicho producto como $q = r^2 \cdot q_z$, reduciendo la ecuación anterior a

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial q}{\partial r} = 0$$

Aplicando comando `dsolve`, y sustituyendo a q por $r^2 \cdot q_z$, donde se debe despejar q_z . Pare ello primero se le debe indicar a MATLAB cuando vale q y después se sigue la metodología para despejar ecuaciones, mediante el comando `solve`

```
reEDO1 = dsolve(' -1/(r^2)*Dq =0', ' r' );
q = q_r*r^2;
Ec0 = reEDO1 == q;
q_r = solve(Ec0,q_r)
---
q_r =
    C1/r^2
```

$$q_r = \frac{C_1}{r^2} \tag{13.48}$$

Aplicamos la ley de Fourier a la solución obtenida, la cual uno mismo la puede hacer y así proceder a resolver la segunda EDO mediante el comando `dsolve`, usando las condiciones de frontera, donde $T(R_1) = T_1$ y $T(R_2) = T_0$

$$-k \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \tag{13.49}$$

```
Tr = dsolve(' -k*DT =C1/r^2', ' r' );
Ec2 = T == Tr;
C21 = solve(Ec2,C2);
%Primera condición de frontera
C21 = subs(C21,r,R1);
C21 = subs(C21,T,T1);

%Ecuación nueva generada
Tr1 = subs(Tr,C2,C21);

%Segunda condición de frontera
Ec21 = dT == Tr1;
C11 = solve(Ec21,C1);
%Valores en la frontera
C11 = subs (C11,r,R2);
C11 = subs (C11,dT,T0);
```

```
%Perfil de temperatura
Tr2 = simplify(subs(Tr1,C1,C11));
---
Tr =
    C2 + C1/(k*r)
Tr2 =
    (R1*R2*T0 - R1*R2*T1 + R1*T1*r - R2*T0*r)/(r*(R1 - R2))
```

$$T = C_2 + \frac{C_1}{k \cdot r} \quad (13.50)$$

$$T(r) = \frac{R_1 R_2 T_0 - R_1 R_2 T_1 + r R_1 T_1 - r R_2 T_0}{r (R_1 - R_2)} \quad (13.51)$$

Haciendo un poco álgebra a la ecuación (13.51)

$$T(r) = (T_0 - T_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) + T_1 \quad (13.52)$$

Donde la ecuación expresa el perfil de temperatura del interior de la esfera hacia el exterior en un intervalo $[R_1, R_2]$. Lo que queda, es evaluar C_1 en la ecuación 13.48

```
%Perfil de calor
q_r = simplify(subs(q_r,C1,C11))
---
q_r =
    (R1*R2*T0*k - R1*R2*T1*k)/(r^2*(R1 - R2))
```

$$q_r = \frac{R_1 R_2 k (T_0 - T_1)}{r^2 (R_1 - R_2)}$$

O también como

$$q_r = \frac{1}{r^2} k (T_0 - T_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \quad (13.53)$$

Ya que se quiere evaluar el calor transferido del sistema a los alrededores, se deberá sustituir el flujo de calor por su definición $q = \dot{Q}/A_s$. Mismo caso que el problema de la sección anterior, no se cuenta con la variable T_0 , siendo la temperatura de superficie. Por ende se debe despejar T_0 de la ecuación de convección y de (13.53), igualar ambas ecuaciones y despejar la variable \dot{Q} .

1. Primer paso, encontrar el calor cedido para la ecuación de convección y conducción. La ecuación de convección cambiara, ya que la temperatura del ambiente será mayor a la de superficie T_0 , para no romper la segunda ley de la termodinámica.

```
%Calor por conducción
As = 4*pi*r^2;
Q_cd = q_r*As;
%Calor por convección
Q_cv = As*h*(T_amb-T0);
```

2. Segundo paso, despejar la variable T_0

```
%Despeje de T0
Ec3 = Q == Q_cd ;
T01 = solve(Ec3,T0);%Para conducción
Ec4 = Q == Q_cv ;
T02 = solve(Ec4,T0);%Para convección
```

3. Igualar ambas ecuaciones y despejar la variable Q

```
%Igualación de ambas ecuaciones y despeje de Q
Ec5 = T02 == T01;
Q = solve(Ec5,Q);
---
Q =
-(T1 - T_amb)/(1/(4*h*r^2*pi) + (R1 - R2)/(4*R1*R2*k*pi))
```

$$\dot{Q} = \frac{-(T_1 - T_{amb})}{\frac{R_1 - R_2}{4\pi k R_1 R_2} - \frac{1}{4\pi h r^2}} \quad (13.54)$$

Recordar que la variable r se evalúa en donde se este llevando a cabo la transferencia de calor por convección, si esta se lleva a cabo en la superficie de la esfera $r = R_2$

Se procede a evaluar la ecuación (13.54) con los datos proporcionados. Para el valor de la conductividad térmica del compuesto se debe establecer. Por ello, se ocupa la siguiente ecuación valida para la conductividad térmica de mezcla de sólidos [156]

$$k_{mez} = \sum_{n=1}^{\infty} x \cdot k_i \quad (13.55)$$

Donde k_{mez} es la conductividad térmica de la mezcla; x es la fracción molar del compuesto; k_i es la conductividad térmica de cada compuesto individual. Por lo tanto si k_{Fe} es de $80.2 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ y del carbón es de $120 \text{ W/m} \cdot \text{K}$. Para la obtención del diámetro interior se ocupa la ecuación del volumen de la esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

De la cual se debe despejar la variable R_1

$$R_1 = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$$

Para el diámetro exterior, es únicamente añadirle a R_1 el espesor

$$R_2 = R_1 + \text{espesor}$$

```
%Condiciones de estudio
V = 4000;%Volumen [m^3]
T_amb1 = 17.5+273.15;%Temperatura [K]
T_11 = 272.7;%Temperatura [K]
x_C = 0.55/100;%Fracción molar de Carbono
x_Fe = 1-x_C;%Fracción molar de Hierro
k_C = 120;%Conductividad térmica del C [W/m-K]
```

```

k_Fe = 80.2;%Conductividad térmica del C [W/m-K]
e = 38/1000;%Espesor de pared [m]
h1 = 10;%Coeficiente por convección [W/m^2-K]
H = 320;%Calor de vaporización [kJ/kh]
p_l = 625.5;%Densidad del liquido [kg/m3]
DH = 320;%Calor de vaporización [kJ/kg]

%Determinar los radios
R11 = ((3*V)/(4*pi))^(1/3);%Radio interior [in]
R22 = R11+e;%Radio exterior [in]

%Conductividad térmica
k1 = x_C*k_C+x_Fe*k_Fe;%Conductividad térmica [W/m-K]

%Tranferencia de calor a los alrededores
Q_t = subs (Q,h,h1);
Q_t = subs (Q_t,k,k1);
Q_t = subs (Q_t,T1,T_11);
Q_t = subs (Q_t,T_amb,T_amb1);
Q_t = subs (Q_t,R1,R11);
Q_t = subs (Q_t,R2,R11);
Q_t = double(subs (Q_t,r,R22))%Donde r = Radio exterior [W]
Q_tkW = Q_t/1000;% [kW]
---
Q_t =
    2.2043e+05
Q_tkW =
    220.4282
    
```

Donde la transferencia de calor es de

$$\dot{Q} = 2.2043 \cdot 10^5 \text{ W} = 220.4282 \text{ kW}$$

Para la temperatura T_0 , se evalúa mediante el resultado obtenido por T02

```

%Temperatura de superficie
T_00 = -(- 4*T_amb1*h1*pi*R22^2 + Q_t)/(4*h1*R22^2*pi)
format long
---
T_0 =
    272.7000371
    
```

Donde la temperatura de superficie de la esfera se encuentra a

$$T_0 = 272.7000371 \text{ K} = -0.45^\circ\text{C}$$

Siendo uno ingeniero, se debe actuar rápido en situaciones así, donde hay una fuga y más siendo un gas sumamente explosivo, pudiéndose decir que la temperatura interior de la esfera es la misma que la

temperatura exterior y así solo ocupar la ecuación de *convección*, ya que la temperatura en el exterior es casi idéntica, por milésimas, a la del interior, y esto se debe a que el material con que se diseñó la esfera es un buen conductor de calor. La temperatura exterior cambiaría si el tanque tuviera un espesor mayor o que el material con que se construyó la esfera estuviera revestida de un aislante o un superaislante. Por último, es encontrar en que tiempo se tardaría en vaciar el tanque esférico. Por ello al hablar de flujo, uno se debe remitir a las ecuaciones de cantidad de movimiento macroscópico para gases (10.11)

$$\hat{Q} - \hat{W}_s = \frac{1}{2}\Delta v^2 + \Delta \hat{H}$$

Donde se eliminarán los términos de trabajo y energía cinética, ya que no existen: el primero por no contener trabajo el sistema y el segundo porque no existe ya que el fluido sale de manera ascendente y siendo más aplicable cuando el fluido viaja por tuberías

$$\hat{Q} = \Delta \hat{H}$$

Sabiendo que $\dot{Q} = \dot{m}\hat{Q}$ o $\hat{Q} = \dot{Q}/\dot{m}$

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = \Delta \hat{H}$$

Despejando \dot{m}

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}}{\Delta \hat{H}}$$

Sustituyendo el flujo másico por su definición $\dot{m} = \rho \dot{V} = \rho V/t$

$$\frac{\rho V}{t} = \frac{\dot{Q}}{\Delta \hat{H}}$$

Despejando ahora la variable t

$$t = \frac{\rho_l \cdot V \cdot \Delta \hat{H}}{\dot{Q}}$$

Donde t será el tiempo transcurrido; $\Delta \hat{H}$ será el calor de vaporización; ρ_l la densidad del líquido; V el volumen del recipiente. Evaluando en MATLAB

```
%Tiempo transcurrido
t_s = p_l*V*DH/Q_tkW %[s]
t_h = t_s/3600 %[h]
---
t_s =
    3.6322e+06
t_h =
    1.0089e+03
```

El cual tardaría 1008.9 h, para que se vacié el tanque totalmente. **Nota** Agregar justamente al inicio del programa las variables simbólicas, las cuales se fueron obteniendo mediante se va programando. Siempre verificar el análisis dimensional.

```
clc
clear
syms q_r r T C2 C1 R1 R2 T1 dT T0 h T_amb Q k
```

13.4. Lámpara de lava

Ejemplo No. 4 Las lámparas de lava son un diseño decorativo hechas por Edward Craven-Walker, tal como se muestra en la figura 13.4.1



Figura 13.4.1: Lámpara de lava [145].

El funcionamiento de dicha lámpara consiste en una lámpara eléctrica la cual es una fuente de energía, instalada en la base del contenedor, pero no la parte superior donde la cera caliente se enfría, se contrae, y como su densidad aumenta vuelve a caer hacia el fondo del contenedor, donde se vuelve a calentar y ascender, cerrando el ciclo. La diferencia de calor entre la parte superior e inferior es de solo unos grados. Las temperaturas de funcionamiento de las lámparas de lava son diversas, pero normalmente oscilan alrededor de los $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ ($140\text{ }^{\circ}\text{F}$) [150], la temperatura en la cual la cera sigue un ciclo de fusión-solidificación. Para que la lámpara funcione, la cera tiene que ser ligeramente más densa que el agua a temperatura ambiente, y ligeramente menos densa a mayor temperatura, pues la cera se expande más que el agua cuando es calentada. Siendo la cera fundida y el agua dos líquidos inmiscibles, ambos se mantienen separados. Si viéramos nuestro esquema de la lámpara de lava se vería tal que

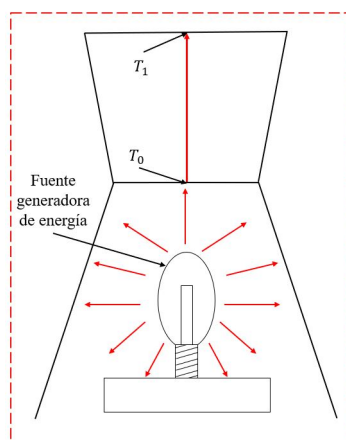


Figura 13.4.2: Esquema de la lámpara de lava.

Se quiere saber cuál será la ecuación que representa la distribución de temperatura de la base cónica de la lámpara del cilindro, si se considera que tiene una fuente de generación de calor de la base interior la

cual transfiere calor hasta la base superior, si la transferencia de calor se produce solo en dirección x , tal como se muestra en la figura 13.4.3

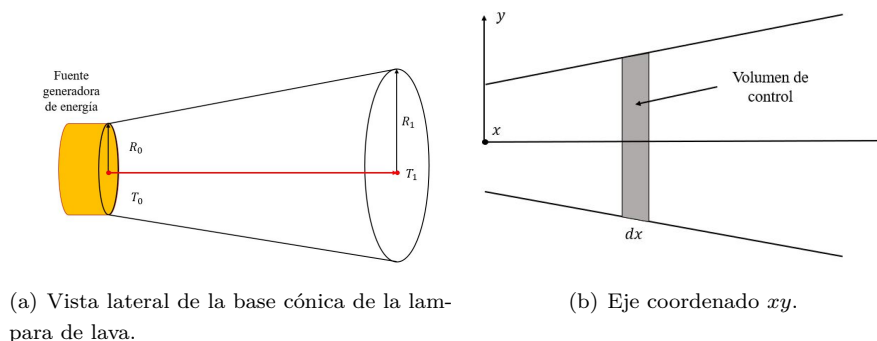


Figura 13.4.3: Transferencia de calor del cilindro cónico.

Si se quisiera resolver el problema a partir de alguna de las ecuaciones que se encuentran en el apéndice C, no se puede, esto debido a que dichas ecuaciones son únicamente válidas cuando el A_s es constante a la entrada y salida y en este caso el área varía. Por ello se debe realizar un nuevo balance de energía para un volumen de control, el cual dice que

$$\begin{aligned}
 & \text{Calor de } \mathbf{entrada} \text{ por conducción} && - \\
 & \text{Calor de } \mathbf{salida} \text{ por conducción} && + \\
 & \text{Calor } \mathbf{generado} && = \\
 & \text{Razón de } \mathbf{acumulación} \text{ de energía del elemento} &&
 \end{aligned}$$

Por consiguiente se eliminan el término de acumulación, ya que se supone que la transferencia de calor opera de manera continua y el siguiente término a eliminar es la fuente de generación de energía, ya que la base cónica de la lámpara no está generando su energía, sino que está actuando como un medio por el cual se está transfiriendo la energía, por eso la ecuación puede reducirse a

$$\begin{aligned}
 & \text{Calor de } \mathbf{entrada} \text{ por conducción} && - \\
 & \text{Calor de } \mathbf{salida} \text{ por conducción} && = 0
 \end{aligned}$$

O también puede ser

$$\dot{Q}_{cond,entrada} - \dot{Q}_{cond,salida} = 0$$

Es más conveniente el calor como flujo de calor por área, ya que el flujo de calor es una unidad vectorial

$$A_s(entrada) \cdot q_{entrada} - A_s(Salida) \cdot q_{salida} = 0$$

Poniendo la dirección del eje donde ocurre la transferencia de calor y el cambio de flujo de calor que *entrada* y *salida*. Considerando únicamente que la transferencia de calor se da unidireccional a lo largo del x

$$A_s(x)|_x q_x|_x - A_s(x)|_{x+\Delta x} q_x|_{x+\Delta x} = 0 \tag{13.56}$$

Se deberá dividir la ecuación anterior por el volumen de control, siendo el volumen para un cono truncado que se expresa como

$$V_{cont} = \frac{1}{3} \pi \cdot L (R_1^2 + R_2^2 + R_1 \cdot R_2) \tag{13.57}$$

Siguiendo la lógica sería dividir la ecuación (13.56) entre volumen de control (13.57), sin embargo se está trabajando con un volumen de control y debe medirse los cambios que ocurren en el cono para obtener su

volumen, algo similar a lo que se hizo para obtener el volumen de control (13.10), y la ecuación (13.57) esta ocupando tanto el radio pequeño como el radio más grande. Por eso, se debe ver el cono como si hiciera un corte transversal, con una vista en un plano coordenado xy , tal como se ve en la imagen 13.4.3(b), y una de las rectas que se forma esta dada por la ecuación (1.1)

$$y = mx + b$$

Recordando un poco las clases de cálculo, donde se ve un tema llamado **sólidos de revolución**, el cual consiste en que es un cuerpo que puede obtenerse mediante una operación geométrica de rotación de una superficie plana alrededor de una recta que esté contenida en su mismo plano. El volumen de los sólidos generados por revolución alrededor de los ejes cartesianos se puede obtener mediante las siguientes ecuaciones que contienen las integrales definidas.

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Sustituyendo la expresión anterior $f(x) = y$ y los puntos serán las dimensiones del volumen de control $a = x$ y $b = x + \Delta x$

$$\begin{aligned} V_{cont} &= \pi \int_x^{x+\Delta x} y^2 dx \\ &= \pi y^2 (x + \Delta x - x) \\ &= \pi y^2 \Delta x \end{aligned}$$

Donde πy^2 representa el área del cono truncado en función del x , $A_s(x)$, y Δx será lo largo del cono, $V_{cont} = A_s(x)\Delta x$. Debido a que $A_s(x)$ es variable a lo largo del y que esta depende de la longitud, se puede decir que la ecuación (13.56) solo tendrá cambio en dirección Δx

$$\frac{A_s(x)|_x q_x|_x - A_s(x)|_{x+\Delta x} q_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = 0 \tag{13.58}$$

Multiplicando la ecuación anterior por -1

$$\frac{A_s(x)|_{x+\Delta x} q_x|_{x+\Delta x} - A_s(x)|_x q_x|_x}{\Delta x} = 0$$

Aplicando el $\lim_{x \rightarrow 0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{A_s(x)|_{x+\Delta x} q_x|_{x+\Delta x} - A_s(x)|_x q_x|_x}{\Delta x} \right) &= 0 y^2 \\ \frac{d}{dx} [q(x) \cdot A_s(x)] &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando la derivada de productos

$$q_x \frac{dA_s(x)}{dx} + A_s(x) \frac{dq_x}{dx} = 0$$

El área variara de acuerdo a la distancia, por ello es factible ocupar la expresión de la recta (1.1) donde

$$\begin{aligned} A_s(x) &= \pi y^2 \\ &= \pi (mx + b)^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 q_x \frac{d}{dx} [\pi(mx + b)^2] + [\pi(mx + b)^2] \frac{dq_x}{dx} &= 0 \\
 2\pi m(mx + b)q_x + \pi(mx + b)^2 \frac{dq_x}{dx} &= 0 \\
 \pi \left[2m(mx + b)q_x + (mx + b)^2 \frac{dq_x}{dx} \right] &= 0 \\
 2m(mx + b)q_x + (mx + b)^2 \frac{dq_x}{dx} &= 0 \\
 \frac{2m}{mx + b} q_x + \frac{dq_x}{dx} &= 0
 \end{aligned}$$

Usando la ley de Fourier

$$\begin{aligned}
 -\frac{2mk}{mx + b} \cdot \frac{dT}{dx} - k \frac{d^2T}{dx^2} &= 0 \\
 \frac{2mk}{mx + b} \cdot \frac{dT}{dx} + k \frac{d^2T}{dx^2} &= 0 \\
 \frac{2m}{mx + b} \cdot \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} &= 0
 \end{aligned}$$

Resolviendo la EDO en MATLAB con las condiciones de frontera $T(0) = T_0$ y $T(L) = T_1$

```

clc
clear all
syms T(x) m k b T0 T1 L
ode = (2*m)/(m*x+b)*diff(T(x),x)+diff(diff(T(x),x),x) == 0;
cond1 = T(0) == T0;
cond2 = T(L) == T1;
conds = [cond1 cond2];
T_x = dsolve(ode,conds);
T_x = simplify(T_x)
---
T_x =
(L*T0*b - T0*b*x + T1*b*x + L*T1*m*x) / (L*(b + m*x))
    
```

$$T(x) = \frac{(LT_0b - T_0bx + T_1bx + LT_1mx)}{L(b + mx)} \tag{13.59}$$

Los valores de m y L se obtienen del gráfico, siendo m la pendiente y L la longitud. Tener cuidado con los signos de la pendiente, ya que la pendiente será negativa cuando la temperatura mayor se encuentre en la base más grande y la temperatura menor en la base más pequeña. Y la pendiente será positiva cuando se invierta la figura, es decir que ahora la temperatura mayor se encuentre en la base más pequeña y la temperatura menor en la base mayor. Para encontrar el calor transferido en el sistema en vez de obtener la constante C_1 se puede obtener a partir de la ley de Fourier, gracias a que se la transferencia de calor únicamente se da por conducción, dada por la ecuación (12.3)

$$\dot{q}_x = -k \frac{dT}{dx}$$

O también se puede de la forma

$$\dot{Q} = -k \cdot A_s \frac{dT}{dx}$$

Sustituyendo el valor de As

$$\dot{Q} = -k\pi (mx + b)^2 \frac{dT}{dx}$$

Evaluando la ecuación diferencial, por el método de variables separables aplicando los límites correspondientes

$$\begin{aligned} \frac{dx}{(mx + b)^2} &= -\frac{\pi k}{\dot{Q}} dT \\ \int_0^L \frac{dx}{(mx + b)^2} &= -\int_{T_0}^{T_1} \frac{\pi k}{\dot{Q}} dT \\ -\frac{1}{m} \left(\frac{1}{mx + b} \right) \Big|_0^L &= -\frac{\pi k}{\dot{Q}} T \Big|_{T_0}^{T_1} \\ -\frac{1}{m} \left(\frac{1}{mL + b} - \frac{1}{b} \right) &= \frac{\pi k}{\dot{Q}} (T_0 - T_1) \end{aligned}$$

Despejando \dot{Q}

$$\dot{Q} = \frac{\pi k (T_0 - T_1)}{\frac{1}{m} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{mL + b} \right)} \quad (13.60)$$

Se debe mencionar algo, y es que la conductividad de un material tiende a deformarse según su variación en la temperatura Sin embargo, esta variación es moderada para muchos materiales en un rango de interés práctico y se puede descartar, pudiendo usar un valor promedio para la conductividad térmica y considerarla constante. Esto es común hacerlo para propiedades que dependen de la temperatura, como es la densidad y el calor específico. Con frecuencia se puede aproximar la variación en la conductividad térmica de un material con la temperatura, en el rango de interés, como una función lineal y expresada como

$$k(t) = k_0(1 + \zeta T) \quad (13.61)$$

Donde ζ se denomina coeficiente de temperatura de la conductividad térmica. ¿Qué le sucederá a la ecuación de calor (13.60) si su conductividad térmica es variable? Evaluando la ecuación diferencial, por el método de variables separables aplicando los límites correspondientes

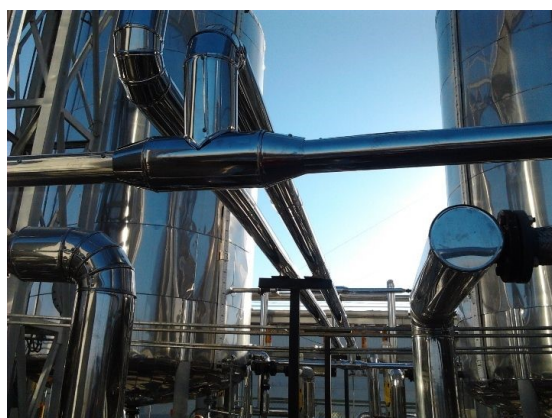
$$\begin{aligned} \frac{dx}{(mx + b)^2} &= -\frac{\pi k_0(1 + \zeta T)}{\dot{Q}} dT \\ \int_0^L \frac{dx}{(mx + b)^2} &= -\int_{T_0}^{T_1} \frac{\pi k_0(1 + \zeta T)}{\dot{Q}} dT \\ -\frac{1}{m} \left(\frac{1}{mx + b} \right) \Big|_0^L &= -\frac{\pi k_0}{2\dot{Q}} T (\zeta T + 2) \Big|_{T_0}^{T_1} \\ -\frac{1}{m} \left(\frac{1}{mL + b} - \frac{1}{b} \right) &= \frac{\pi k_0}{2\dot{Q}} (T_0 - T_1) [\zeta (T_0 - T_1) + 2] \end{aligned}$$

Despejando \dot{Q}

$$\dot{Q} = \frac{\pi k_0 (T_0 - T_1) [\zeta (T_0 - T_1) + 2]}{\frac{1}{m} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{mL + b} \right)} \quad (13.62)$$

13.5. Resistencia térmica

Ejemplo No. 5 Recordando las clases de termodinámica se habla bastante de vapor saturado e incluso hay tablas que vienen ya valores definidos [121] [16]. Todo estudio que se hace es por un propósito y el principal uso que se da al vapor sobrecalentado es el movimiento de turbinas y normalmente no es usado para las aplicaciones de transferencia de calor. Si se quiere aplicar a la transferencia de calor, como puede ser a un intercambiador de calor, es más es común usar aceites, gracias a que su punto de ebullición son altos, comparados con el agua y no requieren añadir sustancia químicas para acelerar el proceso. Si se fuera a una planta industrial, las tuberías que conecta a los equipos serían como 13.5.1(a), los cuales los equipos no están pegados uno con el otro, si no que tienen una cierta distancia de separación de metros o a veces de kilómetros, esto dependerá de la planta y su diseño.



(a) Aislamiento térmico para tuberías [151].



(b) Vista transversal de tuberías con aislamiento [152].

Figura 13.5.1: Arreglo de tuberías en una planta industrial.

Los equipos que generan fluidos con altas temperaturas, como vapor sobrecalentado o aceite caliente, por lo regular deben llevar dicho fluido a otro equipo o a otra parte de la planta, pero como se ha demostrado hay una transferencia de calor entre la temperatura exterior y la temperatura que lleve el fluido, haciendo que entre mayor sea la distancia que recorra el fluido tendera a disminuir su temperatura hasta que iguale con la temperatura exterior, ley cero de la termodinámica. Para evitar esta pérdida energética se procura usar recubrimientos en las tuberías, tal como se aprecia en la figura 13.5.1(b). Entra menor valor sea su constante de conductividad térmica $k < 1$, mejor aislante será, pero así mismo será mas caro. Por ello, a veces es más factible ocupar un espesor más grueso, para economizar. Si dentro de la tubería 13.5.1(b) se encontrara un fluido fluyendo y alrededor de la tubería circula un fluido, como es el aire, se podría representar como la figura 13.5.2.

Se ha venido trabajando algo similar, pero únicamente con una transferencia de calor por conducción en una pared y una transferencia de calor por convección, ver los problemas anteriores. Pero ahora se cuenta con dos transferencia de calor por convección y múltiples capas que se transfieren por conducción. Para no tener que hacer múltiples sustituciones e igualaciones, varios autores como [1] [149] [157], proponen hacer una analogía, la cual es ver la transferencia de calor de cada mecanismos como una resistencia térmica, tal como la figura 13.5.3

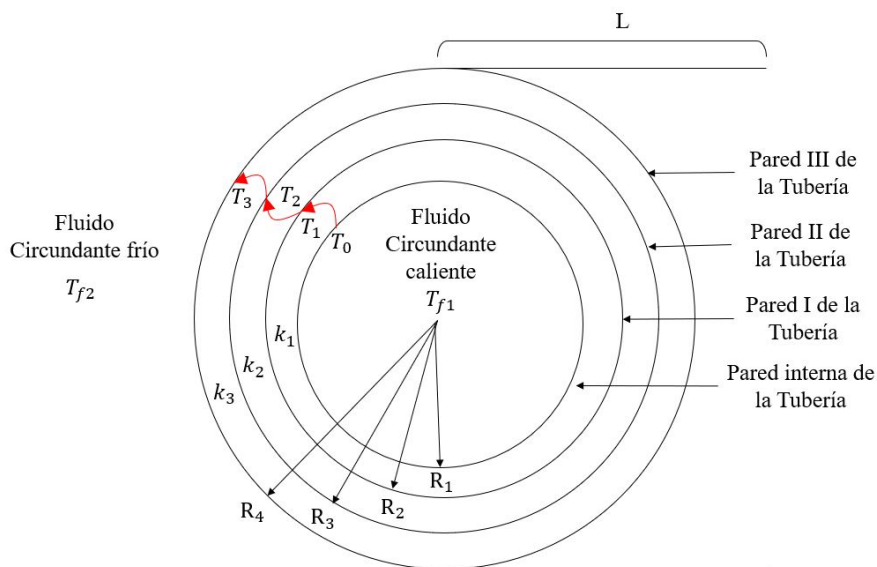


Figura 13.5.2: Tubería aislada, donde las temperaturas son $T_{f1} > T_0$, $T_0 > T_1$, $T_1 > T_2$, $T_2 > T_3$ y $T_3 > T_{f2}$.

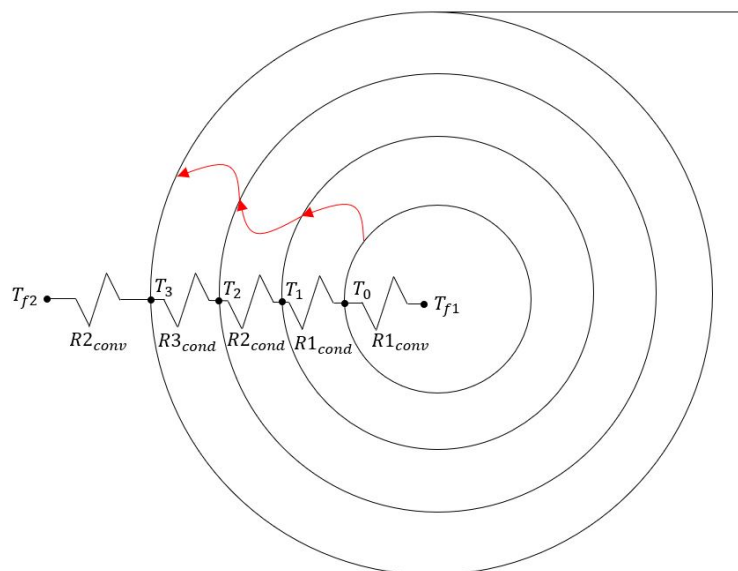


Figura 13.5.3: Representación esquemática de las resistencias térmicas de nuestra tubería.

La ecuación para conducción de calor a través de una tubería, esta dada por la ecuación (13.41) la cual se le hará un pequeño arreglo

$$\dot{Q}_{c,cond} = \frac{T_a - T_b}{R_{cilindro}} \quad (13.63)$$

Donde

$$R_{cilindro} = \frac{r \ln \left(\frac{R_b}{R_a} \right)}{A_s \cdot k} \quad (13.64)$$

Siendo la resistencia térmica por conducción de una pared circular. Véase que la resistencia térmica de

un medio depende de la configuración geométrica y las propiedades térmicas del material. La ecuación (13.64) es análoga a la ecuación de flujo de corriente eléctrica I [13]

$$I = \frac{V_a - V_b}{R_e}$$

Donde $R_e = L/(\sigma_e \cdot A)$, siendo R_e la resistencia eléctrica, $V_a - V_b$ es la caída de voltaje a lo largo de a resistencia y σ_e es la conductividad eléctrica, ver la figura 13.5.4.

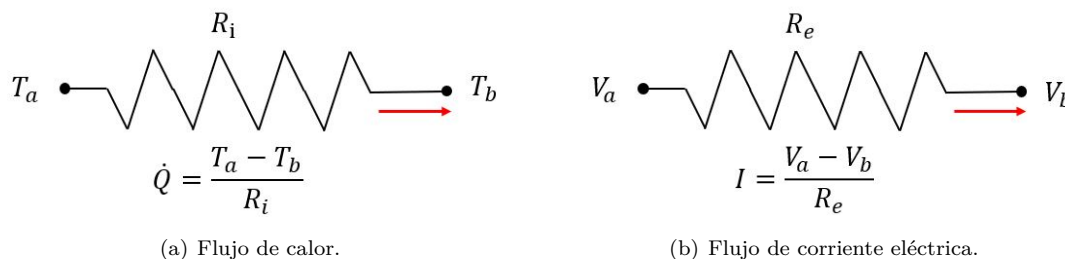


Figura 13.5.4: Analogía entre los conceptos de resistencia térmica y eléctrica.

La resistencia térmica por conducción para paredes planas (p), cilíndricas (c) y esféricas (e) será

$$R_{p,cond} = \frac{T_a - T_b}{\dot{Q}} = \frac{x_a - x_b}{k_i \cdot L \cdot W} \quad (13.65)$$

$$R_{c,cond} = \frac{T_a - T_b}{\dot{Q}} = \frac{\ln R_b/R_a}{2\pi \cdot k_i \cdot L} \quad (13.66)$$

$$R_{e,cond} = \frac{T_a - T_b}{\dot{Q}} = \frac{1}{4\pi \cdot k_i} \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) \quad (13.67)$$

Donde x_b y x_a sera la longitud superior e inferior de una placa, respectivamente; R_b y R_a sera el radio superior e inferior de una capa del cilindro o esfera, respectivamente; Donde T_a y T_b sera la temperatura superior e inferior respectivamente, donde $T_a > T_b$; k_i será la conductividad térmica del material. La expresión de resisten térmica no solo es valido para la transferencia de calor por conducción, sino, también para convección, ecuación (12.6), y radiación, ecuación (12.13). La **resistencia térmica para convección** será

$$R_{conv} = \frac{T_s - T_{amb}}{\dot{Q}_{conv}} = \frac{1}{h_i \cdot A_s} \quad (13.68)$$

Hay que aclarar algo, antes de seguir y es que no se puede ocupar la ecuación (13.13) o alguna del apéndice C.4, esto se debe a que como hay un aislante a lo largo de toda la tubería, se puede suponer que la transferencia de calor en el interior de la tubería se mantiene constante y se desprecia el cambio de temperatura en los extremos de tubería, ya que son insignificantes. Para el exterior de la tubería es la ecuación (12.6), ya que la temperatura del ambiente se mantiene constante y se supondrá que en la superficie de la tubería de igual manera se mantiene constante. Si hubiera un cambio de temperatura a lo largo de la tubería se tendría que ocupar otro modelo matemático. Existe la resistencia térmica por radiación pero para este caso, únicamente se tomara en cuenta la transferencia de calor por conducción y convección, despreciando el término de radiación. Regresando al problema original y basándose en la ecuación (13.63), se puede definir la transferencia de calor del sistema como

$$\dot{Q} = \frac{T_a - T_b}{R_i} \quad (13.69)$$

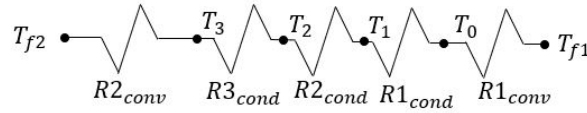


Figura 13.5.5: Red de resistencia térmicas para la transferencia de calor a través de una tubería sujeta a convección interna del cilindro y externa.

Para definir cada variable de la ecuación se debe ver la red de resistencia térmicas del problema, figura 13.5.5.

El valor de R_i será la sumatoria de las resistencias, esto debido a que están en serie, por lo tanto

$$R_i = R1_{conv} + R1_{cond} + R2_{cond} + R3_{cond} + R2_{conv}$$

Se sustituye dicha ecuación en (13.69). Además que para T_a será T_{f1} , mientras que para T_b será T_{f2} .

$$\dot{Q} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R1_{conv} + R1_{cond} + R2_{cond} + R3_{cond} + R2_{conv}}$$

Sustituyendo el valor de cada resistencia. Para $R1_{conv}$ y $R2_{conv}$ será la ecuación (13.68) y $R1_{cond}$, $R2_{cond}$, $R3_{cond}$ será (13.66)

$$\dot{Q} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 \cdot A_s} + \frac{\ln R_2/R_1}{2\pi \cdot k_1 \cdot L} + \frac{\ln R_3/R_2}{2\pi \cdot k_2 \cdot L} + \frac{\ln R_4/R_3}{2\pi \cdot k_3 \cdot L} + \frac{1}{h_2 \cdot A_s}}$$

Sabiendo que el área de sección transversal, A_s de un cilindro es $2\pi L \cdot R_i$. Para el mecanismo de transferencia de convección si h_i se encuentra dentro de la tubería R_i será el radio interior de la tubería, mientras que si h_i se encuentra afuera de la tubería R_i será el radio exterior de toda la tubería, lo mismo se aplica para una esfera, para placas no, ya que su geometría cambia por ocupar otro tipo de eje coordenado. Sustituyendo en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 \cdot 2\pi \cdot L \cdot R_1} + \frac{\ln R_2/R_1}{2\pi \cdot k_1 \cdot L} + \frac{\ln R_3/R_2}{2\pi \cdot k_2 \cdot L} + \frac{\ln R_4/R_3}{2\pi \cdot k_3 \cdot L} + \frac{1}{h_2 \cdot 2\pi \cdot L \cdot R_1}} \\ \dot{Q} &= \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{2\pi \cdot L} \left(\frac{1}{h_1 \cdot R_1} + \frac{\ln R_2/R_1}{k_1} + \frac{\ln R_3/R_2}{k_2} + \frac{\ln R_4/R_3}{k_3} + \frac{1}{h_2 \cdot R_1} \right)} \\ \dot{Q} &= \frac{2\pi \cdot L (T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{h_1 \cdot R_1} + \frac{\ln R_2/R_1}{k_1} + \frac{\ln R_3/R_2}{k_2} + \frac{\ln R_4/R_3}{k_3} + \frac{1}{h_2 \cdot R_1}} \end{aligned}$$

Con los sistemas compuestos, a menudo es conveniente trabajar con un **coeficiente de transferencia de calor general** U , el cual se define mediante una expresión análoga a la ley de enfriamiento de Newton [157]

$$\dot{Q} = U \cdot A_s \cdot \Delta T \quad (13.70)$$

El coeficiente total de transferencia de calor U está influenciado por el espesor y la conductividad térmica de los materiales a través de los cuales se transfiere el calor. Cuanto más grande es el coeficiente, más fácil será la transferencia de calor desde su fuente hacia el producto que está siendo calentado. Siendo aplicado bastante en los **intercambiadores de calor**. ΔT será la diferencia de temperatura. El producto

del coeficiente de transferencia de calor general por el área de sección es inversamente proporcional a la suma de resistencias térmicas totales

$$U \cdot A_s = \frac{1}{R_{total}} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} R_i} \quad (13.71)$$

En este ejemplo y en muchos otros es de mayor aplicación las resistencias térmicas en **serie**, pero puede haber el caso donde se aplique resistencias en **paralelo**, por lo cual se puede consultar [149] [153] [154] [155] [157].

13.5.1. Programación

Se programara una función que permita encontrar la transferencia de calor total sin reacción por conducción y convección de los tres tipos de coordenadas que existen. Basándose en la ecuación (13.70), donde dicho programa sera únicamente válido para múltiples capas sólidas que estén comprendidas entre dos partes fluidas y deberá existir un gradiente de temperatura.

$$\dot{Q} = U \cdot A_s \cdot \Delta T = \frac{T_s - T_i}{R_{conv1} + \sum R_{cond} + R_{conv2}}$$

```
function [R_t,Q,U]=TransCalor(c,L,W,h,d,k,Tf,Ti)
% Condiciones
% Resistencia debe ser lineal
% Programa sólo valido para Convección - Conducción - Convección

% "c" es el tipo de coordenadas que se ocupara para c=1 sera
% coordenadas rectangulares,; c=2 coordenadas cilíndricas; c=3
% coordenadas esféricas.

% "L" sera largo de la pared, si son coordenadas rectangulares o
% L el largo de tubería para cilindros. Para esferas L=0
% W es el ancho de pared en coordenadas rectangulares. Para cilindros
% y esferas se pondrá 0.

% "h" será el coeficiente de convección dado como vector fila.

% "d" será la distancia que recorra el flujo de calor, partiendo del 0
% y estará dado como un vector fila.

% "k" será el coeficiente de transferencia de calor por conducción, el
% cual estará dado como un vector fila.

% "Tf" y "Ti" serán la temperatura final e inicial, respectivamente
% donde Ti>Tf.

if c == 1
    %Transferencia de calor en paredes múltiples para coordenadas
```

```

%rectangulares de misma área de transferencia.

%Sumatoria para convección
s = 0;
As = L*W;
n = length(h);
for i=1:n
    s = s+1/(h(i)*As);
end
R_cv = s;%Resistencia por convección

%Sumatoria para conducción
s1 = 0;
n1 = length(d)-1;

for i1=1:n1
    s1 = s1+(d(i1+1)-d(i1))/(As*k(i1));
end
R_cd = s1;%Rsistencia por conducción

%Resistencia térmica
R_t = R_cd + R_cv;%Sumatoria de resistencias totales
Q = (Ti - Tf)/R_t;%Transferencia de calor
U = Q/(As*(Ti - Tf));%coeficiente total de transferencia de calor

elseif c == 2
    %Transferencia de calor en paredes múltiples para coordenadas
    %cilíndricas.
    %Sumatoria para convección
    n2 = length(d);
    As1 = 2*pi*L;
    R_cv = 1/(h(1)*As1*d(2))+1/(h(2)*As1*d(n2));

    %Sumatoria para conducción
    s2 = 0;
    n3 = n2-1;

    for i2=2:n3
        s2 = s2+1/(As1*k(i2-1))*log(d(i2+1)/d(i2));
    end
    R_cd = s2;
    R_t = R_cd + R_cv;
    Q = (Ti - Tf)/R_t;
    R_cv1 = 1/h(1) +1/h(2);

```

```

R_cd1 = 1/(R_cd*As1);
R_t1 = R_cd1 + R_cv1;
U = 1/R_t1;

elseif c == 3
    %Transferencia de calor en paredes múltiples para coordenadas
    %esféricas.
    %Sumatoria para convección
    n4 = length(d);
    As2 = 4*pi;
    R_cv = 1/(h(1)*As2*d(2))+1/(h(2)*As2*d(n4));

    %Sumatoria para conducción
    s3 = 0;
    n5 = n4-1;

    for i3=2:n5
        s3 = s3+1/(As2*k(i3-1))*(1/d(i3)-1/d(i3+1));
    end
    R_cd = s3;
    R_t = R_cd + R_cv;
    Q = (Ti - Tf)/R_t;
    R_cv2 = 1/h(1) +1/h(2);
    R_cd2 = 1/(R_cd*As2);
    R_t2 = R_cd2 + R_cv2;
    U = 1/R_t2;
end

```

13.6. Aletas de enfriamiento



Figura 13.6.1: Aletas de enfriamiento de aluminio [147].

Ejemplo No. 6 Una aleta, en transferencia de calor, es una extensión de superficie, cuyo objetivo

es transferir más calor. Su fundamento es a partir de la ley de enfriamiento de Newton, (12.6), ya que cuando se fija la temperatura T_s y T_∞ solo existen dos maneras de incrementar la razón de transferencia:

1. Aumentando el coeficiente convectivo de calor, h , o
2. Aumentando el área de superficie, A_s .

Para el primer caso es necesario el uso de equipos como bombas o ventiladores para tener un mayor flujo, pero suele ser costoso. La segunda alternativa es aumentar el área superficial agregando extensiones, siendo así que surgen las **aletas**, ver figura 13.6.1. Estas tienden a ser de material con una alta conductividad térmica, para transferir mejor el calor. Siendo capaces de mejorar la transferencia de calor e incrementar la razón de transferencia desde una superficie varias veces. Para poder analizar las aletas, es importante considerar que la conductividad térmica, k se mantiene constante a todo lo largo de la superficie y es común considerar que el proceso se lleva a cabo en estado estacionario sin generación de calor. Se debe aclarar que si se puede estudiar las aletas en régimen transitorio pero no es muy común hacerlo. Viendo la figura 13.6.2, se sabe que actúan dos mecanismos de transferencia de calor, siendo el de *conducción* y el de *convección*, por ello se debe establecer que h es constante y uniforme sobre toda la superficie de la aleta. El valor de h suele ser más bajo en la base de la aleta que en la punta de la misma, esto se debe a que el fluido en la punta de la aleta puede moverse libremente, mientras que en la base no.

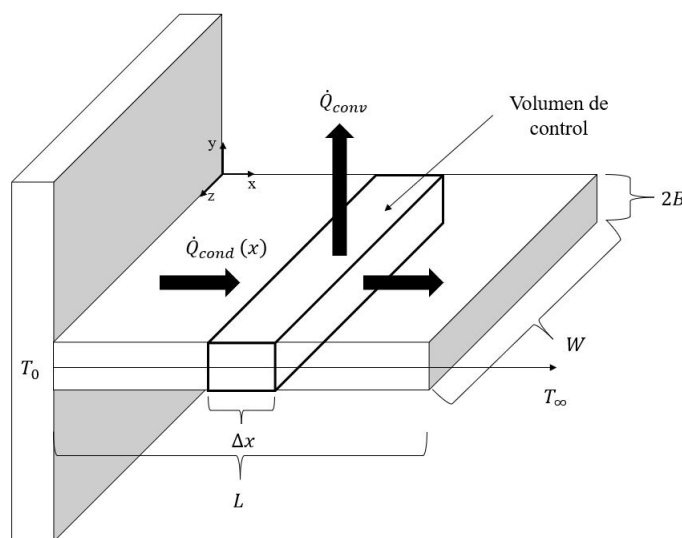


Figura 13.6.2: Representación esquemática de una aleta de enfriamiento rectangular.

Considerando una aleta como la figura 13.6.1, para este caso de estudio. Para ello se debe tomar un volumen de control de una aleta rectangular, a lo largo del eje x . El volumen de control tiene dimensiones Δx de largo, W de ancho y $2B$ de grosor, como se muestra en la figura 13.6.2. El balance de energía para una aleta de enfriamiento esta dada por

$$\dot{Q}_{cond,entrada} - \dot{Q}_{cond,salida} - \dot{Q}_{rad,salida} - \dot{Q}_{conv,salida} + q_{gen} \cdot V_{cont} = \dot{m} \cdot \Delta \hat{H}$$

Se reducirá la expresión, quitando el término de variación de energía, ya que las aletas de enfriamiento operan de manera estacionaria. El termino de generación de energía se eliminara, ya que no existe. Y el calor por radiación si hay, pero es tan pequeño a comparación al de convección, y ni se diga con el de

conducción, que se puede despreciar de la ecuación.

$$\dot{Q}_{cond,entrada} - \dot{Q}_{cond,salida} - \dot{Q}_{conv,salida} = 0 \quad (13.72)$$

En vez de trabajar con la definición de calor, se ocupara mejor un flux de calor

$$A_s \cdot q_{cond,entrada} - A_s \cdot q_{cond,salida} - A_s \cdot q_{conv,salida} = 0 \quad (13.73)$$

De la ecuación anterior se puede modificar la variable $q_{conv,salida}$. Recordando que la ecuación de transferencia de calor por convección esta dada por

$$\dot{Q} = h \cdot A_s(T - T_\infty)$$

Se pone T , ya que la temperatura a lo largo de toda la aleta es variable, manteniendose constante solo en la base de esta misma. Se pasara del otro lado la variable A_s y se sustituirá por el flujo de calor

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}_{conv}}{A_s} &= h(T_0 - T_\infty) \\ q_{conv} &= h(T - T_\infty) \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor obtenido en (13.73)

$$A_s \cdot q_{cond,entrada} - A_s \cdot q_{cond,salida} - A_s \cdot h(T - T_\infty) = 0 \quad (13.74)$$

Se debe tener cuidado en este punto, ya que A_s no será la misma para conducción que para convección. A_s para *conducción* del volumen de control esta dado por el área en la que fluye el calor, viendo la figura 13.6.2, el flujo de calor tiene dirección x y será el producto del ancho por el grosor $W \cdot 2B$. A_s de *convección* puede tener disipación tanto en el eje x , y y z :

- Disipación en el eje x : Esta disipación por convección es más utilizada como **condición de frontera**, como se ha venido trabajando. La cual se tratara más adelante.
- Disipación en el eje y : Esta se considera de mayor aplicación ya que su área de contado es mayor que la del eje z .
- Disipación en el eje z : Esta disipación no se considera, debido a que el área de superficie es muy pequeña comparada con el eje y , pudiéndose ver mejor en la figura 13.6.1.

Mencionado esto, el área donde ocurre mayor transferencia de calor por convección es en el eje y y su A_s estará dado por lo largo del volumen de control por su ancho $\Delta x \cdot W$. Pero debido a que son dos caras donde se esta transmitiendo el calor por convección, se multiplicara por dos el área

$$W \cdot 2B \cdot q_{cond,entrada} - W \cdot 2B \cdot q_{cond,salida} - 2\Delta x \cdot W \cdot h(T - T_\infty) = 0 \quad (13.75)$$

El flujo de calor por conducción a la entrada se da en x y flujo de calor por conducción a la salida se da en $x + \Delta x$, se puede poner $q_{cond,entrada} = q_x|_x$ y $q_{cond,salida} = q_x|_{x+\Delta x}$. Dividiendo la ecuación (13.75) entre el volumen de control

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta xWB} [2WB q_x|_x - 2WB q_x|_{x+\Delta x} - 2\Delta xWh(T - T_\infty)] &= 0 \\ \frac{q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} - \frac{h}{B}(T - T_\infty) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando el $\lim_{x \rightarrow 0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} - \frac{h}{B} (T - T_\infty) &= 0 \\ -\frac{dq_x}{dx} - \frac{h}{B} (T - T_\infty) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando la ley de Fourier

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{h}{B} (T - T_\infty)$$

O bien

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{h}{k \cdot B} (T - T_\infty) \quad (13.76)$$

Haciendo un cambio de variable

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{h}{k \cdot B} \\ \theta &= \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (13.76)

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} = N^2 \theta \quad (13.77)$$

La ecuación (13.77) representa la **transferencia de calor a través de las aletas**. Las ecuaciones que responden a dicha ecuación diferencial tienen a ser complicadas con respecto a θ . Existen tres casos para resolver la ecuación y corresponden a las condiciones de frontera. La primera condición establece que

En la pared $x = 0$, la temperatura será $T_0 - T_\infty = \theta_0 = \theta_{max}$, ya que si se observa bien entre más se va alejando uno de la pared la temperatura va disminuyendo hasta llegar a la temperatura del medio ambiente

Para la segunda condición de frontera hay tres posibilidades típicas que se maneja en aletas, y todas ellas ocurren al final de la aleta, donde $x = L$

1. El primer caso es pensar que L es *suficientemente largo*, es por ello que en la literatura se piensa que tiende a ∞ , por lo que se puede llegar a pensar de que la temperatura sea igual a la temperatura del ambiente $T = T_\infty$, por lo tanto $\theta = 0$. Siendo la más sencilla condición de frontera.
2. El segundo caso es pensar que la aleta es *adiabática*. Es decir que el cambio de la temperatura con respecto a L es igual a cero, $d\theta/dx = 0$, ya que no hay transferencia de calor. Esto se debe a que la temperatura de la pared T_0 y la parte que este aislada de la aleta tendrán la misma temperatura T_0 , por lo tanto no existirá flujo de calor. Ver figura 13.6.3.
3. La última condición es la *convección*, la cual se refiere que en la parte final de la aleta esta dada por la ley de enfriamiento de Newton, $\dot{Q} = hA_s(T - T_\infty)|_{x=L}$.

La solución de la ecuación (13.77) es

$$\theta = C_1 e^{Nx} + C_2 e^{-Nx} \quad (13.78)$$

Condición de frontera I:

Aplicando la primera condición de frontera donde $\theta(0) = \theta_0$ a (13.77)

$$\theta_0 = C_1 e^{N(0)} + C_2 e^{-N(0)}$$

$$\theta_0 = C_1 + C_2$$

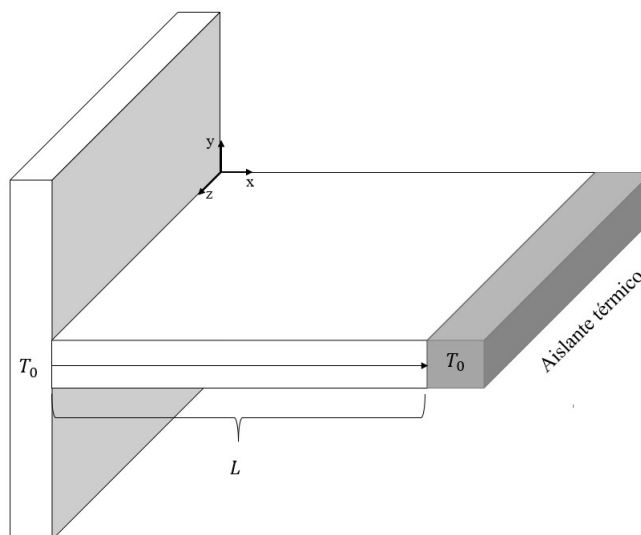


Figura 13.6.3: Aleta con aislante térmico al final.

Aplicando la segunda condición de frontera donde $\theta(\infty) = 0$ en (13.77)

$$0 = C_1 e^{N(\infty)} + C_2 e^{-N(\infty)}$$

Cuando e tiende a *menos infinito* el valor es tan pequeño que se podría decir que es cero. Mientras que e tiende a *mas infinito* su valor es sumamente grande, tanto que se puede hacer un cambio de variable como a , que denota un valor cual sea mayor a cero

$$0 = C_1 a + 0$$

$$C_1 = \frac{0}{a}$$

$$C_1 = 0$$

Sustituyendo la constante C_1

$$\theta_0 = (0) + C_2$$

$$\theta_0 = C_2$$

Sustituyendo en la ecuación (13.77)

$$\theta = \theta_0 e^{-Nx}$$

Despejando e^{-Nx} y sustituyendo las variable θ se obtiene

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-Nx} \quad (13.79)$$

Condición de frontera II:

La ecuación (13.78) también puede escribirse como

$$\theta = C_1 \cosh(Nx) + C_2 \sinh(Nx) \quad (13.80)$$

Aplicando la primera condición de frontera $\theta(0) = \theta_0$ en (13.80)

$$\theta_0 = C_1 \cosh [N(0)] + C_2 \sinh [N(0)]$$

$$\theta_0 = C_1(1) + C_2(0)$$

$$\theta_0 = C_1$$

Utilizando ahora la segunda condición de frontera donde $d\theta/dx|_L = 0$ en (13.77)

$$\frac{d\theta}{dx} = \theta_0 N \sinh (Nx) + C_2 N \cosh (Nx)$$

$$0 = \theta_0 N \sinh (NL) + C_2 N \cosh (NL)$$

$$C_2 N \cosh (NL) = -\theta_0 N \sinh (NL)$$

$$C_2 = -\frac{\theta_0 N \sinh (NL)}{N \cosh (NL)}$$

$$C_2 = -\frac{\theta_0 \sinh (NL)}{\cosh (NL)}$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en (13.80) y simplificando

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 \cosh (Nx) - \frac{\theta_0 N \sinh (NL)}{\cosh (NL)} \sinh (Nx) \\ &= \theta_0 \left[\cosh (Nx) - \frac{\sinh (NL)}{\cosh (NL)} \sinh (Nx) \right] \\ &= \theta_0 \left[\frac{\cosh (NL) \cosh (Nx) - \sinh (NL) \sinh (Nx)}{\cosh (NL)} \right] \\ &= \theta_0 \left[\frac{\cosh (NL) \cosh (Nx) - \sinh (NL) \sinh (Nx)}{\cosh (NL)} \right] \end{aligned}$$

Aplicando la identidad hiperbólica de $\cosh (A - B)$

$$\theta = \theta_0 \left[\frac{\cosh (NL - Nx)}{\cosh (NL)} \right]$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\cosh (NL - Nx)}{\cosh (NL)}$$

Obteniendo el factor común a la ecuación anterior y sustituyendo a θ y θ_0

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh [N(L - x)]}{\cosh (NL)} \quad (13.81)$$

Condición de frontera III:

Para el ultimo caso de estudio presente, se ocupará la ecuación (13.80), donde el primer valor de frontera es el mismo que en los dos casos anteriores, donde su solución directa es

$$C_1 = \theta_0$$

Para la segunda condición de frontera se debe establecer que el mecanismo que actúa es el *convectivo* $\dot{Q}_{conv} = hA_s(T_s - T_\infty) = hA_s\theta_0$, pero a su vez también actúa el mecanismos de *conducción*, dada por la ley de Fourier $\dot{Q}_{cond} = -kA_s(dT/dx) = -kA_s(d\theta/dx)$, debido a que al final de la altea interactúan ambos mecanismos. Por lo tanto, al final de la altea, la transferencia por calor por conducción y convección sera la misma, es decir, $\dot{Q}_{conv} = \dot{Q}_{cond} = \dot{Q}$

$$\dot{Q} = -kA_s \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \Big|_L = hA_s\theta_0$$

Simplificando la condición de frontera se obtiene que

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_L = -\frac{h}{k}\theta_0 \quad (13.82)$$

Debido a que esta condición de frontera es sumamente larga se puede ver en el siguiente enlace su demostración en [148], donde se obtiene

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\cosh [N(L-x)] + (h/N \cdot k) \sinh [N(L-x)]}{\cosh (N \cdot L) + (h/N \cdot k) \sinh (N \cdot L)} \quad (13.83)$$

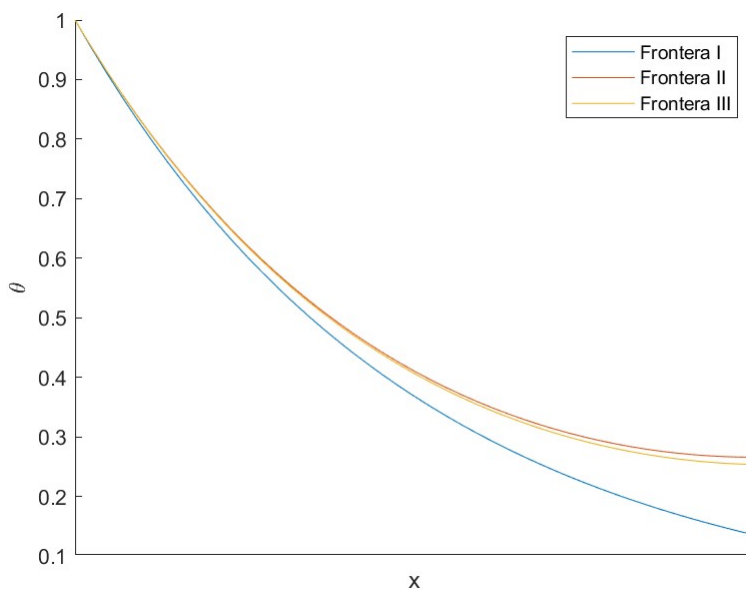


Figura 13.6.4: Comparación gráfica de las tres ecuaciones deducidas para los tres posibles casos.

Para ver el comportamiento y decidir cual es el mejor tipo de aleta se debe comparar mediante un gráfico los tres posibles casos, como se llega a apreciar en la figura 13.6.4. Donde la línea azul es la aleta infinita, la cual entre más grande sea la aleta esta tendera a igualarse con la temperatura del ambiente que es una ventaja, pero la desventaja es el costo de manufactura ya que habrá un punto donde la temperatura de la aleta sera constante y por más larga que sea no habrá ya transferencia de calor, existiendo la **longitud apropiada de aleta** y esta dependerá del diseño y los análisis que se le hagan [149]. La linea roja representa el caso de extremo adiabático y la amarilla el caso por convección, donde ambas son muy similares entre si y esto se debe a que el calor que esta fluyendo es una región de área pequeña ($A_s = B \cdot W$) y si la aleta es muy delgada, el área será también muy delgada, haciendo que se desprecie la transferencia de calor en dicha dirección. Por lo tanto, la transferencia de calor con un extremo adiabático será la misma transferencia que si no tuviera y estuviera en contacto por el mecanismo de convección.

13.6.1. Eficiencia de las aletas

Una aleta sirve para mejorar el mecanismo de transferencia de calor por *convección* de una pared, pero ¿cómo se puede contabilizar esa mejora? Para ello se debe obtener la relación que existe entre la pared con aletas y sin aletas, conocida como **eficiencia de la aleta** y se expresa como

$$\eta = \frac{\dot{Q}_{aleta}}{\dot{Q}_{sin aleta}} \quad (13.84)$$

Sí el valor de $\eta < 1$ significa que la transferencia de calor con aletas es muy deficiente y eso puede deber ya sea por su longitud sea muy corta, h sea tan baja que puede ser nula o que no tenga un buen material conductor. Sí $\eta = 1$ es que con o sin aletas el mecanismo de transferencia de calor es el mismo y se debe rediseñar la aleta. Sí $\eta > 1$ es que la aleta si cumple su función, que es transferir mejor el calor. Ahora, sabiendo que $\dot{Q}_{sin\ aleta}$ esta dada por el mecanismo de convección totalmente, se puede sustituirse en la ecuación (13.84)

$$\eta = \frac{\dot{Q}_{aleta}}{h \cdot A_s(T_s - T_\infty)}$$

El área de sección transversal, A_s , puede representarte como un productos de integrales, donde el cambio ocurre en el eje x y en el eje z , por lo cual la ecuación anterior puede sustituirse como

$$\eta = \frac{\dot{Q}_{aleta}}{\int_0^W \int_0^L h(T_s - T_\infty) dx dz}$$

La expresión \dot{Q}_{aleta} también ocurre por el mecanismo de *convección*, y sería el mismo procedimiento que el caso de $\dot{Q}_{sin\ aleta}$, solo que la variable T_s será $T(x)$, debido a que en esta la temperatura va cambiando de acuerdo a lo largo de la aleta

$$\eta = \frac{\int_0^W \int_0^L h[T(x) - T_\infty] dx dz}{\int_0^W \int_0^L h(T_s - T_\infty) dx dz} \quad (13.85)$$

Sacando las constante h tanto del numerador como denominador se eliminan. Como se logra apreciar el cociente $[T(x) - T_\infty]/(T_s - T_\infty)$ puede representarse de forma adimensional como θ

$$\eta = \frac{\int_0^W \int_0^L \theta dx dz}{\int_0^W \int_0^L dx dz} \quad (13.86)$$

Evaluando la integral respecto a z y simplificando

$$\eta = \frac{\int_0^W \int_0^L \theta z dx}{\int_0^W \int_0^L z dx} = \frac{\int_0^L \theta dx}{\int_0^L dx} \quad (13.87)$$

En la ecuación (13.87) puede sustituirse θ por las ecuaciones obtenidas de los tres casos posibles de condiciones:

■ **Condición de frontera I:**

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\int_0^\infty e^{-Nx} dx}{\int_0^\infty dx} \\ &= -\left(\frac{1}{N}\right) e^{-Nx} \Big|_0^\infty \\ &= -\frac{1}{N} \frac{1}{e^{Nx}} \Big|_0^\infty \\ &= -\frac{1}{N} \left[\frac{1}{e^{N(\infty)}} - \frac{1}{e^{N(0)}} \right] \\ &= -\frac{1}{N} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1} \right) \\ &= \frac{1}{N} \end{aligned}$$

■ Condición de frontera II:

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{\int_0^L \frac{\cosh [N(L-x)]}{\cosh (NL)} dx}{\int_0^L dx} \\
 &= \frac{1}{\cosh (NL)} \left\{ -\frac{1}{N} \sinh [N(L-x)] \right\} \Big|_0^L \\
 &= \frac{1}{\cosh (NL)} \left\{ -\frac{1}{N} \sinh [N(L-L)] + \frac{1}{N} \sinh [N(L-0)] \right\} \\
 &= \frac{\sinh (NL)}{N \cosh (NL)} \\
 &= \frac{1}{N} \tanh (NL)
 \end{aligned}$$

■ Condición de frontera III:

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{\int_0^L \frac{\cosh [N(L-x)] + (h/N \cdot k) \sinh [N(L-x)]}{\cosh (N \cdot L) + (h/N \cdot k) \sinh (N \cdot L)} dx}{\int_0^L dx} \\
 &= \frac{1}{\cosh (NL) + \frac{h}{Nk} \sinh (NL)} \left\{ -\frac{1}{N} \sinh [N(L-x)] - \frac{1}{N} \left(\frac{h}{Nk} \right) \cosh [N(L-x)] \right\} \Big|_0^L \\
 &= \frac{1}{N} \left[\frac{\sinh (NL) + \left(\frac{h}{Nk} \right) \cosh (NL)}{\cosh (NL) + \left(\frac{h}{Nk} \right) \sinh (NL)} \right]
 \end{aligned}$$

La eficiencia que se acaban de demostrar son validas solo para este modelo de aleta rectangular y con sus criterios correspondiente. De acuerdo a la geometría de la aleta su ecuación, su área superficial y eficiencia se verá modificada [149].

Capítulo 14

Distribución de temperatura con más de una variable independiente

14.1. Placa delgada aislada térmicamente

Para este problema se plantea que se tiene una placa rectangular, la cual en cada pared tiene diferente temperatura, como se muestra en la figura 14.1.1. Dicha placa se desea saber la distribución de temperaturas, si únicamente se considera el mecanismo de transferencia de calor por conducción, esta en estado estacionario, con una k constante y además, las aristas de la placa rectangular están aisladas. Las dimensiones del rectángulo son las que se ven en la figura 14.1.1.

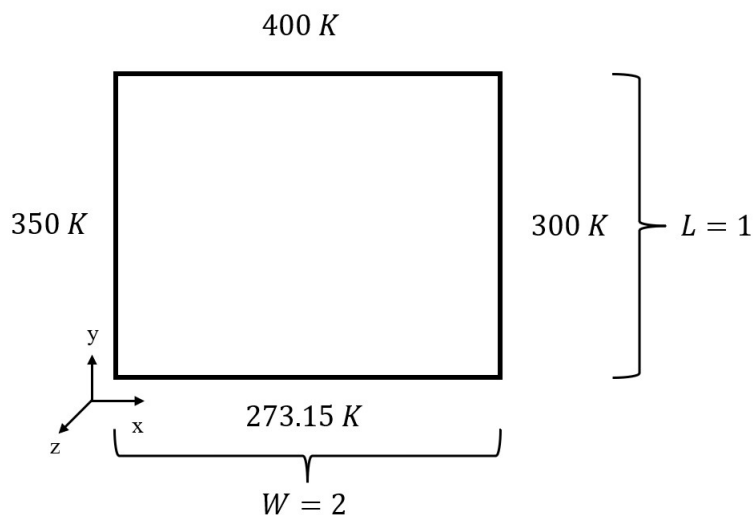


Figura 14.1.1: Distribución de temperaturas para la placa.

Para resolver el problema, se debe partir por definir la ecuación que rige el sistema, para eso se puede ocupar (C.13)

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_{gen} \quad (14.1)$$

La ecuación se puede llegar a simplificar, eliminando ciertos términos, como es q_{gen} , ya que no hay generación interna de energía por parte del sistema. $\partial T/\partial t$, también se elimina, ya que el sistema opera de forma estacionaria. El otro término que se desprecia es $\partial^2 T/\partial z^2$, ya que el grosor de la placa es muy pequeño a comparación con los ejes x y y , que hay mayor transferencia de calor. Quedando la ecuación como

$$0 = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

o

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{14.2}$$

14.1.1. Solución numérica

La ecuación (14.2) también es conocida como la **ecuación de Laplace en transferencia de calor en dos dimensiones**, cuyo región de la ecuación esta dado por $\mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2 \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}$. Para empezar a resolver la EDP se puede resolver de dos distintas, ya sea aplicando *variable separable* o en este caso nuevo sera mediante **diferencias finitas** donde los valores de frontera se establecerán como

$$T(0, y) = 350 \quad T(2, y) = 300 \quad T(x, 0) = 273.15 \quad T(x, 1) = 400$$

Una vez conocido las variables, lo que se debe hacer es **discretizar la variable**, que es T o también conocido como **mallado**. El mallado consiste en hacer una *malla* a la figura 14.1.1, mediante un espaciamiento entre cada línea, para el eje x sera de $\Delta x = W/4$ y para el eje y de $\Delta y = L/4$, como se muestra en la imagen 14.1.2.

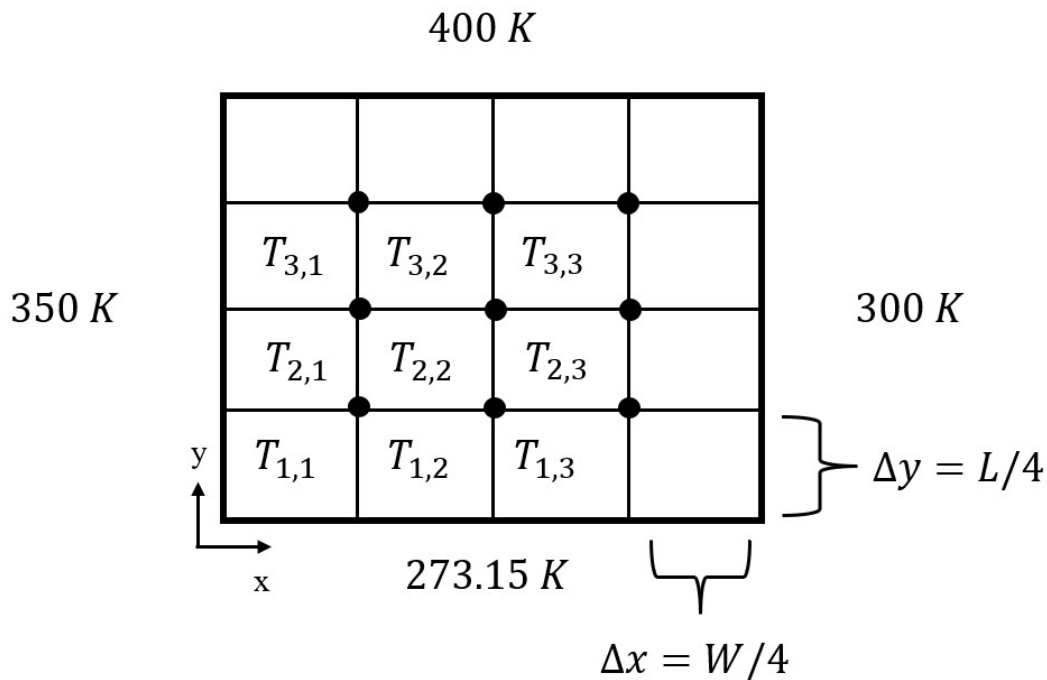


Figura 14.1.2: Mallado de la placa rectangular con sus respectivos nodos.

Ahora, habrá puntos los cuales no se conocen, siendo $T_{1,1}$ hasta $T_{1,3}$, $T_{2,1}$ hasta $T_{2,3}$ y $T_{3,1}$ hasta $T_{3,3}$, los cuales se quiere conocer cuales son sus valores y son llamados **nodos**, entre más fino sea el mallado el resultado sera más precioso, pero el tiempo de cálculo es mayor, ya que por cada nodo que se genera se obtendrá una nueva ecuación lineal, en este caso como son nueve nodos, existirán nueve ecuaciones lineales que se tendrán que determinar, si se quiera hacer un mallado de 100 nodos serán 100 ecuaciones a determinar.

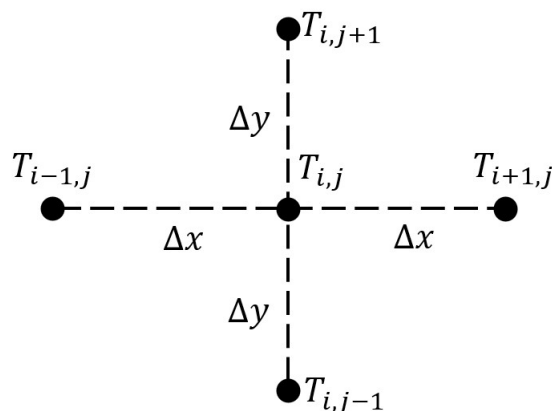


Figura 14.1.3: Nodo para discretizar.

El siguiente paso es *discretizar la ecuación*, para eso uno se debe imaginar que se hace un aumento en algún nodo, como se ve en la figura 14.1.3, en la cual hay un incremento tanto en el eje de las x , como el de las y dichos incrementos deben ser idénticos, es decir, si Δx a la izquierda vale $W/4$, a la izquierda valdrá lo mismo, lo mismo ocurre para el caso de Δy . Observando hay un punto medio de la cruz, la cual se le nombro al nodo como $T_{i,j}$, hay un punto en el eje x , al nodo posterior se le llamo $T_{i+1,j}$ y al anterior $T_{i-1,j}$, con el mismo incremento. Así mismo, dicho nodo de en medio esta rodeado por un nodo superior $T_{i,j+1}$ y un ubicado en la parte inferior como $T_{i,j-1}$. Para calcular el el valor del nodo central se deben conocer los cuatro nodos exteriores y sacarles su promedio, dicho de una forma algebraica

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} \quad (14.3)$$

O visto de otra manera

$$4T_{i,j} = T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} \quad (14.4)$$

Para empezar a resolver la EDP se debe partir por el primer nodo que sera $T_{1,1}$ ocupando la ecuación (14.4)

$$\begin{aligned} 4T_{1,1} &= T_{1+1,1} + T_{1-1,1} + T_{1,1+1} + T_{1,1-1} \\ &= T_{2,1} + T_{0,1} + T_{1,2} + T_{1,0} \\ &= T_{2,1} + 350 + T_{1,2} + 273.15 \\ &= T_{2,1} + T_{1,2} + 623.15 \end{aligned}$$

Encontrando la primera ecuación, se repartirá el mismo procedimiento para las ocho ecuaciones restantes,

obteniendo

$$\begin{aligned}
 4T_{1,2} &= T_{1+1,2} + T_{1-1,2} + T_{1,2+1} + T_{1,2-1} = T_{2,2} + T_{0,2} + T_{1,3} + T_{1,1} = T_{2,2} + 273.15 + T_{1,3} + T_{1,1} \\
 4T_{1,3} &= T_{1+1,3} + T_{1-1,3} + T_{1,3+1} + T_{1,3-1} = T_{2,3} + T_{0,3} + T_{1,4} + T_{1,2} = T_{2,3} + 573.15 + T_{1,2} \\
 4T_{2,1} &= T_{2+1,1} + T_{2-1,1} + T_{2,1+1} + T_{2,1-1} = T_{3,1} + T_{1,1} + T_{1,2} + T_{1,0} = T_{3,1} + T_{1,1} + T_{1,2} + 350 \\
 4T_{2,2} &= T_{2+1,2} + T_{2-1,2} + T_{2,2+1} + T_{2,2-1} = T_{3,2} + T_{1,2} + T_{2,3} + T_{2,1} \\
 4T_{2,3} &= T_{2+1,3} + T_{2-1,3} + T_{2,3+1} + T_{2,3-1} = T_{3,3} + T_{1,3} + T_{2,4} + T_{2,2} = T_{3,3} + T_{1,3} + 300 + T_{2,2} \\
 4T_{3,1} &= T_{3+1,1} + T_{3-1,1} + T_{3,1+1} + T_{3,1-1} = T_{4,1} + T_{2,1} + T_{3,2} + T_{3,0} = T_{2,1} + T_{3,2} + 750 \\
 4T_{3,2} &= T_{3+1,2} + T_{3-1,2} + T_{3,2+1} + T_{3,2-1} = T_{4,2} + T_{2,2} + T_{3,3} + T_{3,1} = 400 + T_{2,2} + T_{3,3} + T_{3,1} \\
 4T_{3,3} &= T_{3+1,3} + T_{3-1,3} + T_{3,3+1} + T_{3,3-1} = T_{4,3} + T_{2,3} + T_{3,4} + T_{3,2} = T_{2,3} + T_{3,2} + 700
 \end{aligned}$$

Se procede a pasar del lado izquierdo de la igualdad todas las variables desconocidas y del lado derecho las variables independientes

$$\begin{aligned}
 4T_{1,1} - T_{2,1} - T_{1,2} &= 623.15 \\
 4T_{1,2} - T_{2,2} - T_{1,3} - T_{1,1} &= 273.15 \\
 4T_{1,3} - T_{2,3} - T_{1,2} &= 573.15 \\
 4T_{2,1} - T_{3,1} - T_{1,1} - T_{1,2} &= 350 \\
 4T_{2,2} - T_{3,2} - T_{1,2} - T_{2,3} - T_{2,1} &= 0 \\
 4T_{2,3} - T_{3,3} - T_{1,3} - T_{2,2} &= 300 \\
 4T_{3,1} - T_{2,1} - T_{3,2} &= 750 \\
 4T_{3,2} - T_{2,2} - T_{3,3} - T_{3,1} &= 400 \\
 4T_{3,3} - T_{2,3} - T_{3,2} &= 700
 \end{aligned}$$

Como se logra apreciar se genera un sistema de nueve incógnitas con nueve ecuaciones, el cual para resolver se ocupara el método de determinantes (1.7), realizando primero la matrix, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (14.5)$$

Estableciendo las incógnitas

$$X = [T_{1,1} \quad T_{1,2} \quad T_{1,3} \quad T_{2,1} \quad T_{2,2} \quad T_{2,3} \quad T_{3,1} \quad T_{3,2} \quad T_{3,3}] \quad (14.6)$$

Y finalmente las variables independientes

$$b = [623.15 \quad 273.15 \quad 573.15 \quad 350 \quad 0 \quad 300 \quad 750 \quad 400 \quad 700] \quad (14.7)$$

El código para resolver la matriz es el siguiente, mediante el uso de software de MATLAB

```

A = [4 -1 0 -1 0 0 0 0 0;
     -1 4 -1 0 -1 0 0 0 0;
     0 -1 4 0 0 -1 0 0 0;
     -1 -1 0 4 0 0 -1 0 0;
     0 -1 0 -1 4 -1 0 -1 0;
     0 0 -1 0 -1 4 0 0 -1;
     0 0 0 -1 0 0 4 -1 0;
     0 0 0 0 -1 0 -1 4 -1 ;
     0 0 0 0 0 -1 0 -1 4];
B = [623.15 273.15 573.15 350 0 300 750 400 700]';
C = A\B
---
C =
314.6854
303.5384
298.5584
332.0532
327.7598
317.5450
359.9890
357.9027
343.8619

```

Los resultados obtenidos son los mostrados a continuación

$$R = \begin{bmatrix} T_{3,1} = 359.9890 K & T_{3,2} = 357.9027 K & T_{3,3} = 343.8619 K \\ T_{2,1} = 332.0532 K & T_{2,2} = 327.7598 K & T_{2,3} = 317.5450 K \\ T_{1,1} = 314.6854 K & T_{1,2} = 303.5384 K & T_{1,3} = 298.5584 K \end{bmatrix} \tag{14.8}$$

14.1.2. Solución numérica - Método de diferencias finitas

Como se mencionó antes, entre más nodos se tenga más exacto será la representación de nuestro problema, pero trae consigo mismo bastantes ecuaciones, que resolver a mano sería muy tedioso, es por ello que se empezara a programar en MATLAB un código que permita hacer los cálculos con una mayor rapidez, exactitud y sobre todo, que se pueda ver el comportamiento gráfico de nuestro problema. Es por ello que la primera parte es saber la ecuación a diseñar, siendo ya antes deducirá y establecida como (14.2). Así mismo es necesario que las condiciones de frontera para la temperatura que se encuentra del lado izquierdo se establezca como: T_A , para el lado derecho: T_B , para la superior: T_C y para la temperatura inferior de la placa: T_D . Para el método de diferencias finitas se debe hacer una discretización tanto en el eje vertical como el eje horizontal, formando el mallado cuadrículado como se muestra en la figura 14.1.4.

Es importante saber, cuantos puntos interiores se quieren calcular, ya que las temperaturas en los bordes se deberán conocer. Es por eso que viendo la figura 14.1.4, se puede decir que hay un número j de puntos interiores a lo largo del eje x . Así mismo para el eje vertical, se tiene un número i de puntos interiores. Se debe contemplar los puntos exteriores tanto para el eje x y y . Para el eje x será el mismo número de puntos interiores j más dos puntos, $j + 2$, siendo $T_{0,0}$ y $T_{0,j+1}$. Para el caso del eje y será la misma

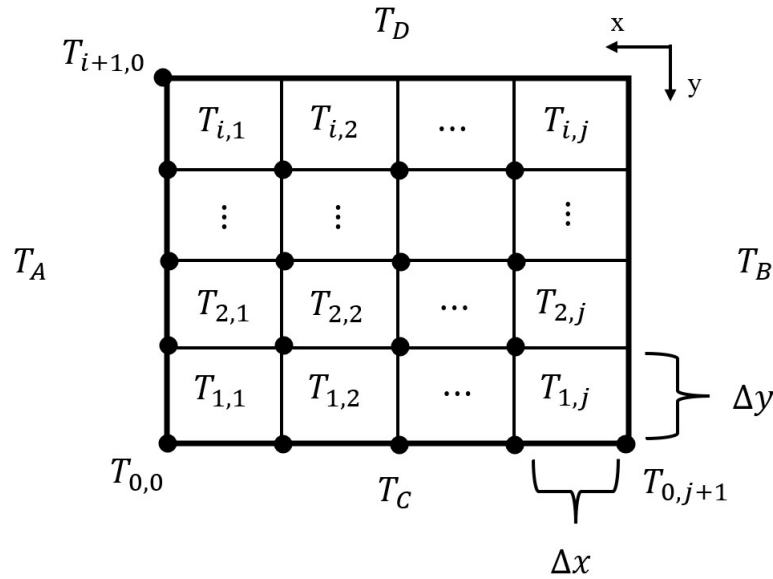


Figura 14.1.4: Discretización de la placa delgada aislada térmicamente.

cantidad de puntos interiores i más dos puntos, $i + 2$, siendo $T_{0,0}$ y $T_{i+1,0}$. Para recorrer horizontalmente la placa por el borde exterior se puede establecer como:

$$n = 1 : j + 2$$

La temperatura de la horizontal superior esta dada por T_D , que se puede establecer que

$$T(1, n) = TD;$$

Lo mismo ocurre para el eje horizontal inferior, dado por la temperatura T_C , pero recordando la suman de los dos puntos ya antes mencionado

$$T(i + 2, n) = TC;$$

Para el caso de la vertical sera lo mismo, donde se debe recorrer la distancia a todo lo alto

$$m = 1 : i + 2$$

La temperatura de la izquierda esta dada por T_A

$$T(m, 1) = T_A$$

La temperatura de la derecha se define como T_B

$$T(m, j + 2) = T_B$$

1. Empezando a programar en MATLAB ocupando un nuevo scrip y con function el cual llevara como término `[T, s]=EDPLAPLACE(TA, TB, TC, TD, i, j, ite, err)`, donde T representara la solución de temperatura de la placa y s el número de iteraciones necesarias para hallar la solución; TA, TB, TC, TD son las temperaturas ya antes establecidas, ver figura 14.1.4; i y j serán los puntos interiores verticalmente y horizontalmente, respectivamente; ite el número máximo de iteraciones; err el error, el cual sirve para controlar que tan exacto son nuestros resultados

```
function [T, s]=EDPLAPLACE(TA, TB, TC, TD, i, j, ite, err)
```

2. Para programar los bordes, siendo primero los ejes horizontales para posteriormente seguir el mismo esquema para los bordes verticales

```
clear T %Limpiar algun término con "T"
%Puntos exteriores
    %Borde vertical
for m = 1:i+2
    T(m,1) = TA;
    T(m, j+2) = TB;
end
    %Borde horizontal
for n = 1:j+2
    T(1,n) = TD;
    T(i+2, n) = TC;
end
```

3. La programación de los puntos interiores dentro de la placa, ocupando la ecuación (14.3), que sirve para discretizar, se debe sacar la media de las temperaturas exteriores, por lo tanto

```
%Discretización
P = (TA+TB+TC+TD)/4;
```

4. Se debe asignar cada valor interior de P, por lo que los valores tanto de n como de m van a ir desde

$$n = 2 : i + 1$$

$$m = 2 : j + 1$$

Por lo que

```
%Puntos internos
for n = 2:j+1
    for m = 2:i+1
        T(n,m) = P;
    end
end
```

5. Hasta este momento se han asignado tanto los puntos exteriores como interiores de la región rectangular. Lo siguiente que se debe programar sera un algoritmo que permita calcular por medio de iteraciones los puntos interiores. Para eso, se agrega una variable s, la cual permite conocer cuantas iteraciones se están llevando a cabo, dicha variable estará igualada a cero. Otra variable que se ocupara sera con==0, que significa *convergencia* y permite hallar la solución con la exactitud de uno quiera la cual estará considerado con respecto al error que se ingrese. con es idéntico a cero y significa que aun no se ha hallado la solución, mientras que si con=1, significa que ya se hallado la solución deseada.

```
s = 0;
con = 0;
```

6. Para desarrollar las iteraciones se implementa el comando `while s<ite & con==0`. Se presiona enter y luego la suma a la variable `s` se le suma uno `s=s+1`. Se busca una variable que permita almacenar todas las iteraciones que se están generando con respecto a la variable T , entonces se pone `c=T`. Para ir iterando todos los valores de los puntos interiores se utiliza el comando `for` y se repite como el paso 4, pero con la modificación de que la variable `P` ya no sería de los puntos externos, si no de los puntos internos (14.3), por lo que quedaría como $T(n, m) = (T(n-1, m) + T(n+1, m) + T(n, m+1) + T(n, m-1)) / 4$ y se cierran ambos `for`. Antes de cerrar el `while` se debe programar un algoritmo que permita el saber si ya se obtuvo la solución que se quiere a partir del error que se establezca, aplicando el comando `if norm((T-c), inf) / norm(T, inf) < err` y cuando la convergencia sea igual a uno `con=1` es que ya se obtuvo la solución. Se cierra el `if` y `while` con `end`.

```
while s<ite & con==0
    s=s+1;
    c=T;
    for n = 2:j+1
        for m = 2:i+1
            T(n,m)=(T(n-1,m)+T(n+1,m)+T(n,m+1)+T(n,m-1))/4;
        end
    end
    if norm((T-c), inf) / norm(T, inf) < err
        con = 1;
    end
end
```

7. Por lo tanto, el programa para la EDP de Laplace se vería en una sola pantalla como

```
function [T,s]=EDPLAPLACE(TA,TB,TC,TD,i,j,ite,err)
clear T %Limpiar algun término con "T"
%Temperatura TA es la temperatura del borde derecho de la placa
%Temperatura TB es la temperatura del borde izquierdo de la placa
%Temperatura TC es la temperatura inferior de la placa
%Temperatura TD es la temperatura superior de la placa
% i es el número de nodos horizontales
% j es el número de nodos verticales
% ite es el número de iteraciones
% err es el error
%Puntos exteriores
    %Borde vertical
%Puntos exteriores
    %Borde vertical
for m = 1:i+2
    T(m,1) = TA;
```

```

        T(m, j+2) = TB;
    end
    %Borde horizontal
    for n = 1:j+2
        T(1, n) = TD;
        T(i+2, n) = TC;
    end
    %Discretización
    P = (TA+TB+TC+TD)/4;
    %Puntos internos
    for n = 2:j+1
        for m = 2:i+1
            T(n, m) = P;
        end
    end
    s = 0;
    con = 0;
    while s<ite & con==0
        s=s+1;
        c=T;
        for n = 2:j+1
            for m = 2:i+1
                T(n, m) = (T(n-1, m) + T(n+1, m) + T(n, m+1) + T(n, m-1)) / 4;
            end
        end
        if norm((T-c), inf) / norm(T, inf) < err
            con = 1;
        end
    end
    if con==1
        [x, R] = meshgrid(1:j+2, 1:i+2);
        surf(x, R, T)
        xlabel('x'); ylabel('y');
        shading flat
    else
        disp('no converge');
    end
end

```

Para comprobar la validez del programa, se ocupa el mismo problema del inicio pero estableciendo las temperaturas de los bordes de la placa, marcando un error de $10 \cdot 10^{-8}$ y un número de iteraciones de 100

```

TA = 350;
TB = 300;
TC = 273.15;
TD = 400;

```

```

i = 3;
j = 3;
ite = 100;
err = 10e-8;
[R]=EDPLAPLACE(TA,TB,TC,TD,i,j,ite,err)
---
```

400.0000	400.0000	400.0000	400.0000	400.0000
350.0000	362.3679	359.4166	344.5107	300.0000
350.0000	340.0550	330.7876	318.6264	300.0000
350.0000	317.0643	305.0523	299.2072	300.0000
273.1500	273.1500	273.1500	273.1500	273.1500

Comparando los resultados obtenidos de forma analítica contra los de forma numérica, se aprecia que son muy parecidos, con la diferencia (tomando los datos numéricos como los exactos) de que hay un intervalo de 1 a 3 grados de diferencia. Pero hay que considerar que la forma analítica es válida solo para una placa rectangular con 3 nodos de manera vertical y 3 nodos de manera horizontal, mientras que si se quiere ver más temperaturas, por ejemplo, 10x10 nodos, se obtendrán 100 ecuaciones que de manera analítica será tedioso, mientras que de manera numérica solo es escribir de cuanto en la pantalla de comandos cuantos nodos se quieren.

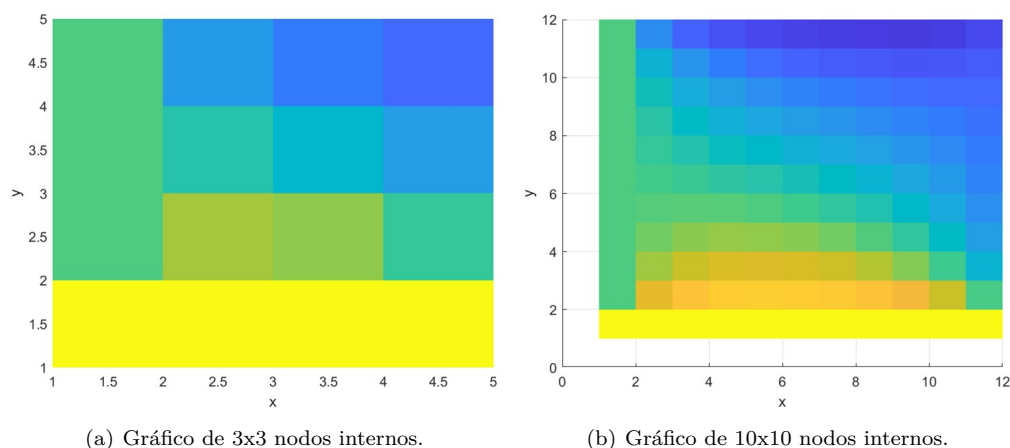


Figura 14.1.5: Gráficas de comportamiento término de la placa a distintas temperaturas con diferente cantidad de nodos.

14.2. Horno

Un horno de proceso es un equipo constituido por un cerramiento metálico revestido interiormente por una pared refractaria aislante, dentro del cual se dispone de un serpentín tubular por el que circula un producto que se desea calentar y/o evaporar a través del calor liberado por un combustible sólido, líquido o gaseoso que reacciona en el quemador liberando gases de combustión calientes que transfieren el calor por radiación hacia el serpentín. La utilización de estos equipos puede tener distintos propósitos como precalentamiento de una corriente previo a su fraccionamiento o reacción, evaporar la corriente de fondo de una columna de destilación o disminuir la viscosidad de un fluido para facilitar su manipulación.

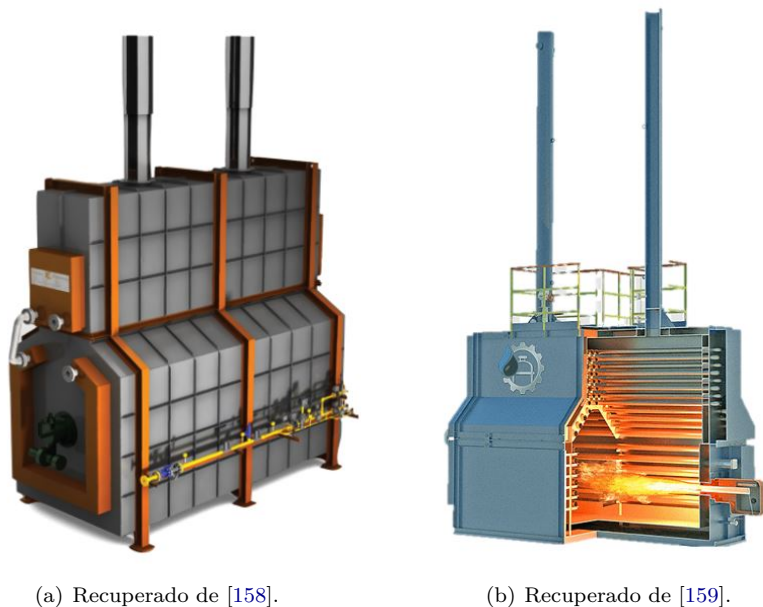


Figura 14.2.1: Horno de refinería de petróleo.

En la industria petroquímica se le conoce a los hornos como *Fired Heaters* y son de suma importancia porque calientan y vaporizan los fluidos de hidrocarburos hasta una temperatura deseada para crear necesidades como gasolina, diésel y combustible para aviones. Por lo tanto, el propósito principal de los *Fired Heaters* es elevar la temperatura del fluido de proceso que fluye a través de los tubos. Para ello trataremos de ver como un fluido en movimiento (siendo crudo) va adquiriendo calor a lo largo de la tubería. Para ello se considerara que es un fluido Newtoniano con viscosidad μ , densidad ρ , conductividad térmica k y capacidad calorífica C_p constante el cual entra con una temperatura de $T_0 = 20^\circ$. Para ello se considerara que la tubería que pasa por dentro del horno que tiene una cierta longitud L y un diámetro D . La temperatura interna de la tubería alcanza los $T_a = 60^\circ C$ la cual se mantiene constante a todo lo largo de la tubería. Considere que el sistema opera de manera estacionaria. Ver la figura 14.2.2.

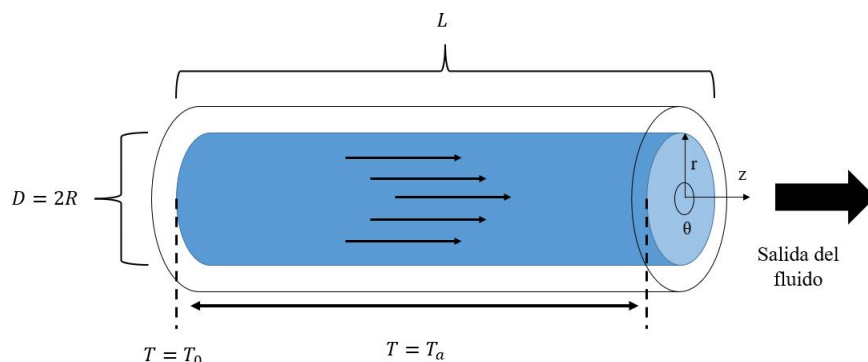


Figura 14.2.2: Esquema de tubería a estudiar.

Para ellos se partirá de la ecuación (13.75)

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_{gen} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

Simplificando ciertos términos. En primera es saber que la temperatura se transmite tanto a lo largo del eje r como en z .

- Temperatura eje r . Se debe a que la pared interna del tubo se mantiene constante haciendo que se transmite calor de las paredes hacia el centro del fluido.
- Temperatura eje z . El fluido a lo largo del tubo se empezara a calentar.

Por lo tanto no existirá la temperatura a lo largo del eje θ y no hay fuente de generación de calor, ya que el tubo no esta en contacto con la flama directa, tal como se menciona en [160]. Además, de que opera de manera estacionaria, reduciendo la ecuación a

$$\rho C_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

Como la velocidad se da a lo largo del eje z , se despreciara la velocidad en r

$$\rho C_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (14.9)$$

El término $k(\partial^2 T / \partial z^2)$ tiene significado físico, siendo que la diferencial la diferencial de temperatura a la entrada y salida de la tubería por el medio del mecanismo de **conducción**. Sin embargo, el mecanismo de transferencia de calor por **convección**, en la discreción en que se mueve la corriente de fluido es mayor que el flujo por conducción. Por eso se desprecia el término de conducción de calor axial y la disipación viscosa $k(\partial^2 T / \partial z^2)$ [161] [162]

$$\rho C_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

O también como

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\alpha}{v_z} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (14.10)$$

Donde $\alpha = k / (\rho \cdot C_p)$. La ecuación (14.10) se le conoce como **problema de Graetz**. Para resolver la ecuación anterior se debe plantear las condiciones de frontera donde se supondrá que el radio interno de tubería mide 1", la longitud de tubería es de 20 m. El petroleo a 20° tiene propiedades de $\rho = 640 \text{ kg/m}^3$, $C_p = 2 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$ y $k = 2.0219 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ [149]. Como se vio anteriormente, un fluido en flujo laminar su velocidad viene dado por las fuerzas viscosas que interactúan con los alrededores, por lo cual se puede representar como

$$v_z = v_{max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (14.11)$$

Ver las ecuaciones (5.115) y (5.116). Donde la velocidad máxima será de 2 m/s. Para las condiciones de frontera será

$$\begin{aligned} T(z, 0) &= 20 & T(z, 1'') &= 60 \\ T(0, r) &= 20 & 0 < z < L & \end{aligned}$$

El problema se puede resolver de manera analítica, pero se ocupara el método de diferencias finitas para resolverlo.

14.2.1. Solución numérica - Diferencias finitas

Por lo general las EDP no tienen solución numérica, pero si tienen a obtener una solución gráfica, por ello se ocupara el **método de line**, ya que la ecuación (14.10) es muy semejante a la ecuación (7.30) con el cambio de que el sistema opera de manera estacionaria pero si hay un cambio a lo largo del eje z . Pero

en vez de obtener ecuación por ecuación, se programara para obtener un número n de ecuaciones y así poder graficar.

1. Se introducen los valores de constantes, como son el radio de tubería, la conductividad térmica, la densidad, la capacidad calorífica, la velocidad máxima, la temperatura de entrada del fluido, longitud de tubería y el valor de α

```

clc ;clear;close all
%Datos
R = 1*2.54/100;%Radio [m]
k = 2.0219;%Conductividad térmica [W/m/C]
p = 640;%Densidad [kg/m^3]
Cp = 2*1000;%Capacidad calorífica [J/kg/C]
Vmax = 2;% Velocidad máxima [m/s]
T0 = 20;%°C
L = 20;%Longitud [m]
alfa = k/(Cp*p);
    
```

2. El método de diferencias finita de line consiste en generar un número n de ecuaciones y n incógnitas. Para ello se debe generar un vector fila tanto para r como para z con el mismo número de puntos. Para ello se establece un **tamaño de paso** para el radio y para la longitud (siendo de las mismas dimensiones) de 150, es decir que se dividirá la longitud en 150 partes iguales. Ocupando el comando `linspace(x1,x2,n)` el cual crea vector fila de n puntos equidistantes entre $x1$ y $x2$, entonces para el eje r será $r = \text{linspace}(0, R, Nr)$, mientras que para el eje z $z = \text{linspace}(0, L, Nz)$. Para coordenadas cilíndricas hay un diferencial Δr (ecuación (7.31)), para ello será el radio de tubería dividido entre el tamaño de paso de r . Además, se añade la ecuación de velocidad en z (14.11), debido a que esta depende de la función r , y r es una vector fila de 150 partes que va de cero hasta el radio R .

```

%Tamaño de paso
Nr = 150;%Tamaño de paso para radio
Nz = 150;% tamaño de paso para longitud
r = linspace(0,R,Nr);
z = linspace(0,L,Nz);
dr = R./Nr;
vz = Vmax.*(1-(r./R).^2);
    
```

3. Se establece la condición inicial $T(z, 0) = 20$. Para ello se debe crear un vector fila multiplicado por la temperatura. Para eso se ocupa el comando `X = ones(sz1,...,szN)`, devuelve un arreglo de unos de $sz1$ por ... por szN en el que $sz1, \dots, szN$ indica el tamaño de cada dimensión. Por ejemplo, `ones(2,3)` devuelve un arreglo de unos de 2 por 3. Entonces será un vector fila de 1 por el tamaño de paso y a ese vector se le hará el producto punto de la temperatura inicial de $T0$

```

%Condiciones iniciales
Ti=ones(1,Nr)*T0;
    
```

4. Se programara la función que permita generar el sistema de ecuaciones, a partir del tamaño de paso, mediante el comando `function dTdz=f(z,T,Nr,T0,dr,alfa,r,vz)` donde $z, T, Nr, T0, dr, alfa, r, vz$ son las entradas y $dTdz$ será la salida; f será como se nombre la función.

```
function dTdZ=f(z, T, Nr, T0, dr, alfa, r, vz)
```

5. El comando `function` ira al final del programa, para no tener que correr el programa en una nuevo scrip y tener que guardarse en una carpeta nueva. Abajo del comando `function` se desarrollara el sistema de ecuaciones. Empezando por crear un vector columna de ceros mediante el comando `zeros(length(T), 1)`, donde `length(T)` indica la longitud de la dimensión más grande de un arreglo mientras que el 1 será el número de columnas. Después, se debe agregar las ecuaciones límites, es decir, aquellas que corresponden a las condiciones de frontera para la tubería, siendo $\partial T/\partial r = 0$ y $T(R) = 60$ [163]. Para la primera condición de frontera se aplica el método de diferencia finita adelante para derivada de orden 1 con orden de ocurrencia 3 [164]

$$\frac{df}{dx} = \frac{-f(x + 2\Delta x) + 4f(x + \Delta x) - 3f(x)}{2\Delta x}$$

Para $f(x) = T(1)$, $4f(x + \Delta x) = T(2)$ y $f(x + 2\Delta x) = T(3)$. El paréntesis después de T indica la temperatura en el nodo n , por ejemplo, $T(1)$ indica la temperatura en el nodo 1, siendo el primer nodo donde se aplica la condición de frontera $\partial T/\partial r = 0$ y para $2\Delta x = 3$ [165]. Para la segunda condición de frontera es constante.

$$T(1) = \frac{-T(3) + 4T(2)}{2\Delta x}$$

$$T(\text{final}) = 60$$

Programando

```
%Primera función
function dTdZ=f(z, T, Nr, T0, dr, alfa, r, vz)
dTdz = zeros(length(T), 1);
T(1) = (4*T(2) - T(3)) ./ 3; %Cf-1 ;
T(end) = 60; %Cf-2;
```

6. Establecido las condiciones de frontera, se debe establecer las ecuaciones que irán dentro de las de las condiciones de frontera, para ello se debe establecer primero las derivadas centrales de primer y segundo orden [164], así como la ecuación general.

- Derivada de primer orden central:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T_{(i+1)} - T_{(i-1)}}{2\Delta r}$$

- Derivada de segundo orden central

$$\frac{d^2T}{dr^2} = \frac{T_{(i+1)} - 2T_i + T_{(i-1)}}{\Delta r^2}$$

- Ecuación general

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\alpha}{v_z(i)} \left(\frac{d^2T(i)}{dr^2} + \frac{1}{r(i)} \frac{dT(i)}{dr} \right)$$

Para no tener que ir poniendo ecuación por ecuación, se ocupa el comando `for i=2:Nr-1`, el cual indica que hará un bucle de ecuaciones, es decir, que generará un número i de ecuaciones, donde i ira desde 2 (ya que la ecuación (1) esta expresada por la derivada delantera y (0) es la condición inicial) hasta $Nr - 1$, que Nr es el tamaño de paso, pero solo llegara a la penultima ecuación, debido a que la ultima esta expresada como $T(\text{final}) = 60$ y se cierra el bucle como el `function`.

```

%Interior
for i=2:Nr-1
    d2Tdr2(i)=(T(i+1)-2*T(i)+T(i-1))./dr.^2;
    dTdr(i)=(T(i+1)-T(i-1))./(2.*dr);
    dTdz(i)=(alfa./vz(i)).*(d2Tdr2(i)+(1./r(i)).*dTdr(i));
end
end

```

7. Terminado la generación de ecuaciones se debe resolver todas las que se genera simultáneamente. Para ello se deberá agregar el comando `ode15s` entre los comando `Ti=ones(1,Nr)*T0` y `function`, de la siguiente manera

```

%Solución
[z T]=ode15s(@f,z,Ti,[],Nr,T0,dr,alfa,r,vz);

```

8. Posteriormente se hará un recalcu donde se añadirá las condiciones de frontera en el vector `T` y se finaliza colocando un gráfico, usando `contourf(r,z,T,25)`, donde `r` es el vector generado para radio de tubería, `z` es el vector generado para lo largo de tubería, `T` es la matriz que se genera al resolverse por el comando `ode15s`, y `25` es la definición de puntos de la malla.

```

%Recalculando
T(:,1)=(4*T(:,2)-T(:,3))./3;%BC-1;
T(:,end)=60;

contourf(r,z,T,25)
colormap jet
colorbar
title('Perfil de temperatura en °C')
xlabel('radio')
ylabel('Longitud')
grid on

```

9. Por lo tanto, el programa para la EDP se vería en una sola pantalla como

```

clc ;clear;close all
%Datos
R = 1*2.54/100;%Radio [m]
k = 2.0219;%Conductividad térmica [W/m/C]
p = 640;%Densidad [kg/m^3]
Cp = 2*1000;%Capacidad calorífica [J/kg/C]
Vmax = 2;% Velocidad máxima [m/s]
T0 = 20;%°C
L = 20;%Longitud [m]
alfa = k/(Cp*p);

%Tamaño de paso
Nr = 150;%Tamaño de paso para radio

```

```

Nz = 150;% tamaño de paso para longitud
r = linspace(0,R,Nr);
z = linspace(0,L,Nz);
dr = R./Nr;
vz = Vmax.*(1-(r./R).^2);

%Condiciones iniciales
Ti=ones(1,Nr)*T0;

%Solución
[z T]=ode15s(@f,z,Ti,[],Nr,T0,dr,alfa,r,vz);

%Recalculando
T(:,1)=(4*T(:,2)-T(:,3))./3;%BC-1;
T(:,end)=60;

contourf(r,z,T,25)
colormap jet
colorbar
title('Perfil de temperatura en °C')
xlabel('radio')
ylabel('Longitud')
grid on

%Primera función
function dTdz=f(z,T,Nr,T0,dr,alfa,r,vz)
dTdz = zeros(length(T),1);
T(1)=(4*T(2)-T(3))./3;%Cf-1
T(end)=60;%Cf-2;

%Interior
for i=2:Nr-1
    d2Tdr2(i)=(T(i+1)-2*T(i)+T(i-1))./dr.^2;
    dTdr(i)=(T(i+1)-T(i-1))./(2.*dr);
    dTdz(i)=(alfa./vz(i)).*(d2Tdr2(i)+(1./r(i)).*dTdr(i));
end
end

```

Al correr el programa se variaría dos cosas siendo el radio de tubería y la longitud de tubería, ya que normalmente son los que se pueden modificar al diseñar un horno [161], ver la figura 14.2.3. Explicando la primera de cuatro figuras 14.2.3(a), se aprecia que debido a que el radio es sumamente grande no permite que el calor de las paredes llegue al centro del fluido, lo que se podría hacer es aumentar el largo de tubería interna que se halla dentro del horno al doble, es decir a 40 m, tal como se aprecia en 14.2.3(b), pero no es suficiente para que la temperatura alcance a cubrir todo el fluido. Por ello otra forma sería reducir el radio de tubería a 1/4” pero manteniendo la longitud inicial de tubería, como se aprecia en 14.2.3(c) el cual se aprecia que hay mayor transferencia de calor y el calor se distribuye mejor en el fluido,

pero que sucedería se se duplica el largo de tubería 14.2.3(d), el petroleo sale con la temperatura deseada, inclusive se aprecia que no es necesario utilizar 40 m de tubería, si no que con solo unos 26 o 27 m de tubería interna ya se obtiene una temperatura uniforme en todo el petroleo.

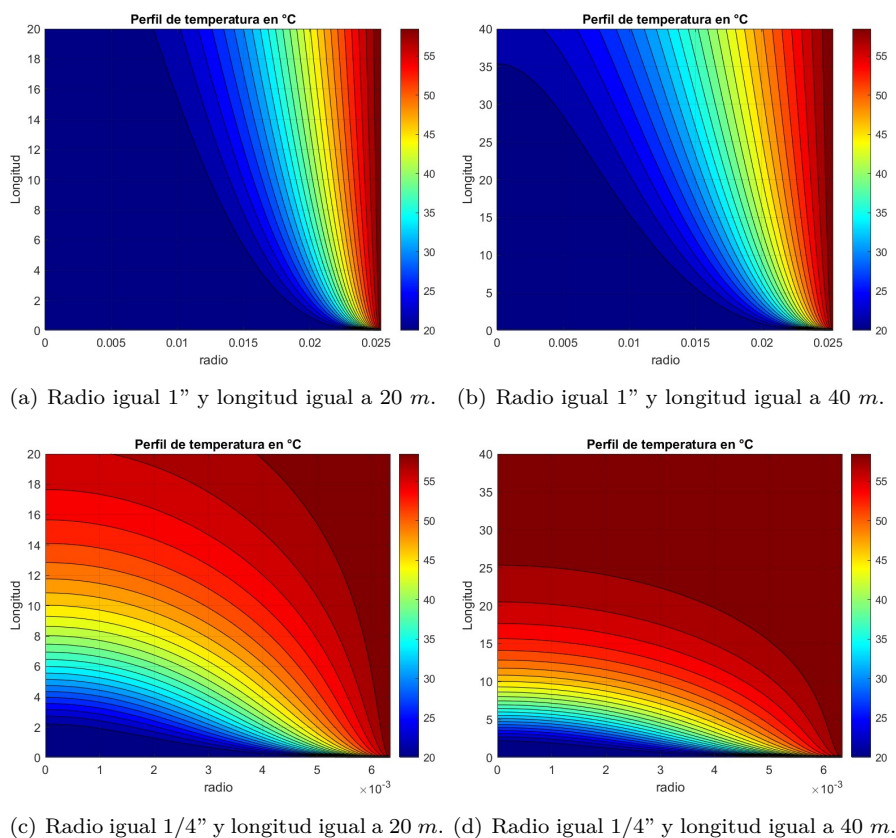


Figura 14.2.3: Función de la temperatura respecto al radio y longitud de tubería.

14.3. Elementos finitos

La simulación computacional se utiliza ampliamente en las empresas para hacer análisis y mejorar la calidad de los productos y proyectos. La mayoría de estos análisis se llevan a cabo mediante uso de softwares que utilizan el **Método de Elementos Finitos**, lo cual permite obtener respuestas para numerosos problemas de ingeniería. El método de elemento finito es un método que trabaja mediante aproximaciones de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales, el problema o el valor es que modela en la física del mundo real para realizar el análisis divide geometrías muy complejas del mundo real en mallas más pequeñas para ser analizadas. El mallado generado en MATLAB para EDO en 2D es en triángulos, donde entre más fino es el mallado más preciso es la solución, ver figura 14.3.1, pero a su vez consume más memoria de procesamiento y puede ser que ciertas computadoras no aguanten resolver tantas ecuaciones múltiples. Para mallados en 3D se ocupan tetraedro.

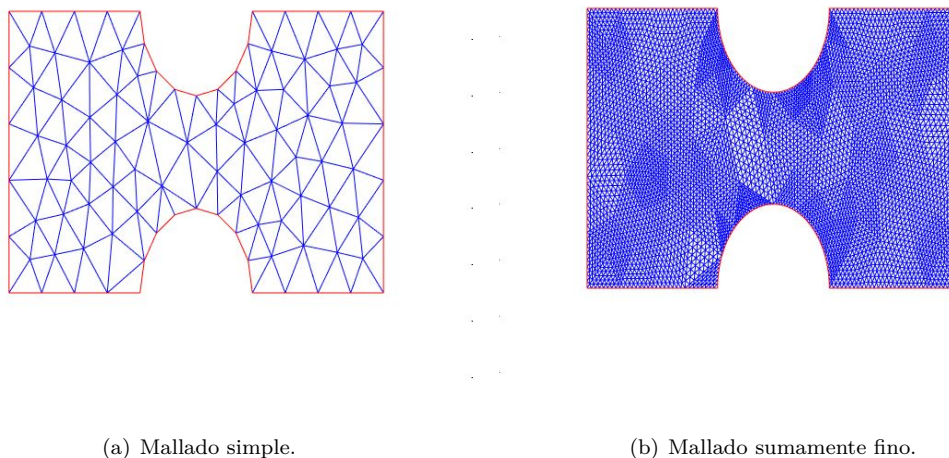


Figura 14.3.1: Tipos de mallado.

En si el método de elemento finito es un método numérico general para la aproximaciones de las soluciones de EDP muy complejas utilizando diversos problemas tanto de física como de ingeniería. Pudiéndose implementarse para realizar el análisis de estructuras, transferencia de calor, mecánica de fluidos, transporte de masa, campo magnético, entre otras. *MATLAB* cuenta con una toolbox, la cual se llama *partial differential equation*, la cual nos permite realizar un análisis estático lineal para calcular la deformación de esfuerzo y la tensión, también se puede modelar la dinámica estructura, la vibración, además que esta herramienta permite realizar análisis modal para encontrar frecuencias naturales, formas de nodo y proveer problemas de transferencia de calor, además de que permite trabajar en dos y tres dimensiones. Para empezar a trabajar esta toolbox se deben seguir los siguientes pasos:

1. **Definición de geometría.** Se debe especificar que geometría será la que se va a ocupar, pudiéndose definir como un archivo *STL*, se puede dibujar desde nuestra misma toolbox o colocar una maña y hacer un análisis de dicha maña.
2. **Desarrollo de modelo.** Es definir las ecuaciones que se van a ocupar de acuerdo al tipo de estudio que se vaya a realizar, existiendo cuatro EDP para el maderamiento:
 - **Elíptica:** Aplicación en electrostática, magnetismo, conducción de calor y piezoeléctrico.
 - **Parabólica:** Aplicación en transferencia de calor, transferencia por difusión y mecánica de fluido.
 - **Hiperbólica:** Aplicación en dinámica estructural y onda.
 - **Eigenvalor:** Aplicación en formas de modelo estructural.

En este apartado además se establecen además las condiciones de frontera, para ello hay que mencionar las que se ocupa en *MATLAB*, siendo tres y una condición inicial [166]:

- **Dirichlet.** Se conocen ambas temperaturas de frontera o al menos 1 en la frontera.

- Newman.
 - a) Flujo de calor. Es conocer el flujo de calor en algunas de las fronteras.
 - b) Adiabático o aislado. Puede ser que todo el sistema este aislado o solo una parte de la frontera.
 - c) Simetría. Se ocupa cuando el fluido rodea el sistema en su superficie.
 - Robin. Se ocupa cuando se conoce una temperatura en medio de cualquiera de las dos fronteras. Existe dos casos:
 - a) Cuando el flujo de calor entra de convección a conducción.
 - b) Cuando el flujo de calor entra de conducción a convección
 - Inicial. Se aplica cuando la EDP interviene la variable tiempo.
3. **Análisis.** El cual consiste en generar un mallado para generar un resultado, el cual dependerá del análisis que nosotros estemos trabajando.

14.3.1. Modelado en 2D

Se definirán los pasos a seguir para resolver un problema 2D con una geometría distinta a las coordenadas rectangulares y polares que usualmente nos acostumbramos a usar, ya que en la vida cotidiana, muchas piezas no corresponden a dichas geometrías, si no son más complejas.

1. **Definición de geometría.** Para el moldeamiento se ocupa un toolbox que se llama *PDE Modeler*, el cual permite diseñar geometrías muy sencillas y un análisis muy rápido. Para el diseño de esta toolbox se puede usar mediante gráficas o mediante comandos. Para ello debemos ir a la pantalla de comandos de MATLAB y escribir `pdetool`



Figura 14.3.2: Pantalla de comando.

2. Posteriormente de darle `enter` a la pantalla se desplegara una nueva pantalla como se muestra en la figura 14.3.3, si movemos el curso por algún elemento contenido en el recuadro rojo, en la parte inferior donde señala la flecha aparecerá la información en ingles.

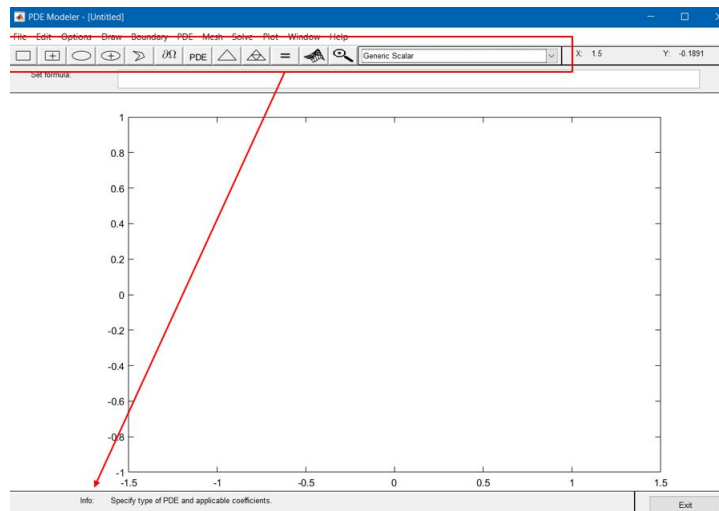


Figura 14.3.3: Pantalla EDP en 2D.

- Si nos vamos al recuadro que dice *Generic Scalar*, se desplegará una serie de opciones de EDP ya específicas, ver figura 14.3.4, si queremos establecer una nosotros desde cero, tendríamos que seleccionar *Generic Scalar* y **especificar la ecuación** y condiciones de frontera. Pero como estamos en transferencia de calor seleccionamos *Heat Transfer*.

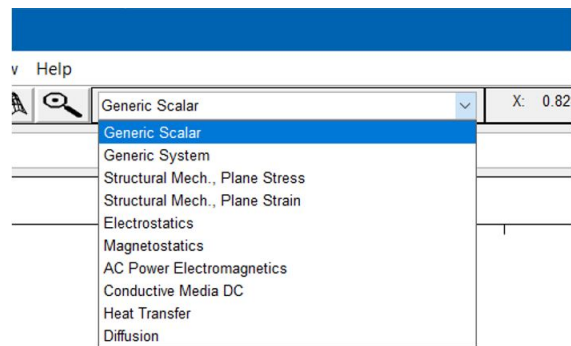


Figura 14.3.4: Pestaña de selección de modelo matemático.

- Seleccionado el modelo, se **diseña** ahora si la pieza, para ello ocuparemos el recuadro que tiene un rectángulo y un círculo, para generar una pieza como la imagen 14.3.5

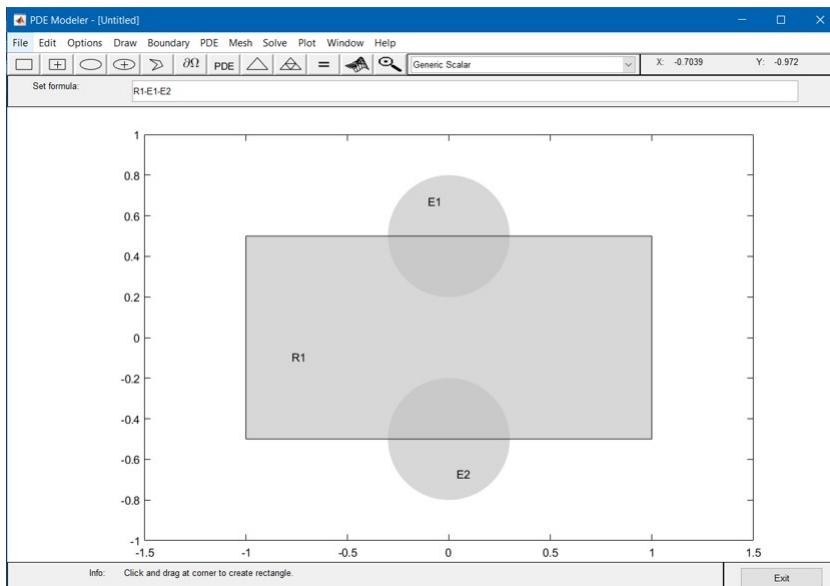


Figura 14.3.5: Diseño de pieza 2D.

- Si le damos doble clic a una figura, se desplegará una ventana como 14.3.6, donde se debe establecer las **dimensiones** del recuadro. Para las dimensiones de un círculo serán $[0, -0.5]$ con un radio de 0.3 y para el otro círculo será $[0, 0.5]$ con un radio de 0.3.

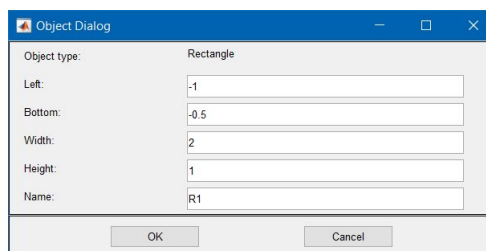
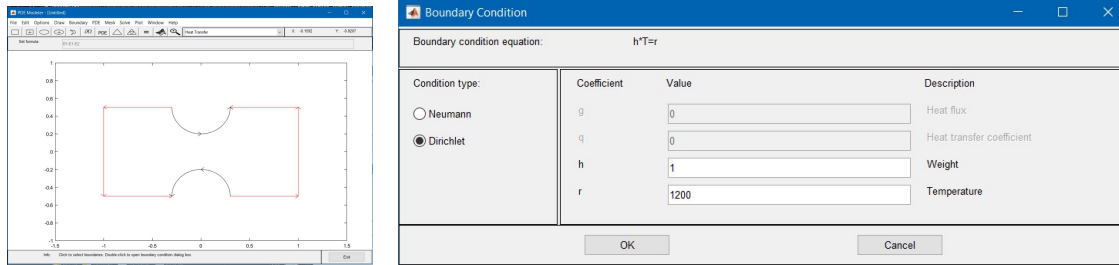


Figura 14.3.6: Dimensiones de la placa.

- Si vemos de igual forma la figura 14.3.5, notaremos que en el recuadro de Set formula, aparece $R1-E1-E2$, el cual como es un plano 2D, el signo $-$ corresponde a que se está sustrayendo una geometría a una pieza, mientras que el signo $+$ es que se está agregando una geometría a un diseño. El siguiente paso es establecer las **condiciones de frontera**. Para ello supondremos que nuestro diseño hecho es una tabla rectangular de hierro puro al que se le perforo dos pequeños orificios a los lados con un taladro. El cual en los orificios donde se perforo la tabla se logró medir una temperatura de hasta $1200^{\circ}C$, como la figura 14.3.7

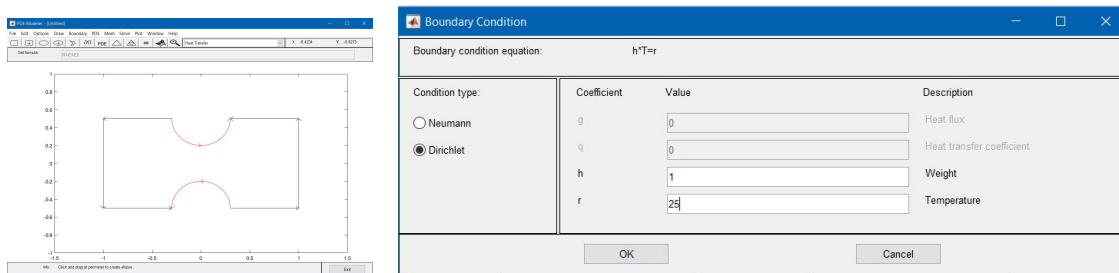


(a) Elección de condición de frontera es con SHIFT + Click Izquierdo, aparecen rayas en negro.

(b) Condiciones de frontera.

Figura 14.3.7: Condiciones de frontera Dirichlet para las semicirculos.

7. Mientras que en las paredes de la placa se mantiene constante a los 25°C , como la figura 14.3.8



(a) Elección de condición de frontera es con SHIFT + Clic Izquierdo, aparecen rayas en negro.

(b) Condiciones de frontera de la placa rectangular.

Figura 14.3.8: Condiciones de frontera Dirichlet para las paredes rectangulares.

8. Se procede a especificar las **constantes en la EDP**, ocupando una ecuación parabólica, la elíptica podría ocuparse, pero como hemos trabajado el modelo que más se ocupa para conducción es la parabólica. Los parámetros para la ecuación diferencial están dado en la tabla de la figura 14.3.9.

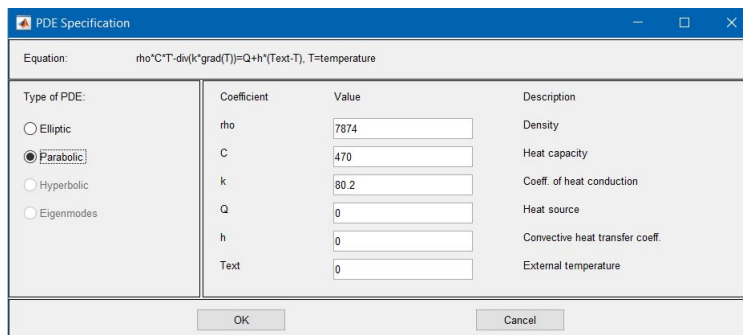


Figura 14.3.9: Parámetros para la EDP.

9. Pasaremos a hacer el **mallado**. MATLAB hace un mallado automático de triángulos, para eso

veremos ver la figura 14.3.10, donde vemos que hay un recuadro rojo que contiene dos opciones: un cuadro con un rectángulo y otro donde el rectángulo tiene más rectángulos dentro. El primero sirve para hacer un mallado simple, mientras que el segundo sirve para definir más el mallado. 14.3.9.

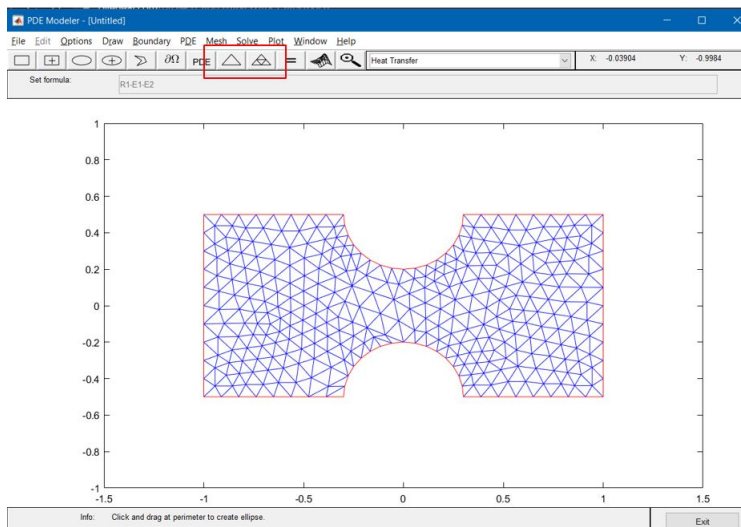


Figura 14.3.10: Mallado.

10. Procedemos a darle el igual, =, para **resolver** nuestra EDP como la figura 14.3.11.

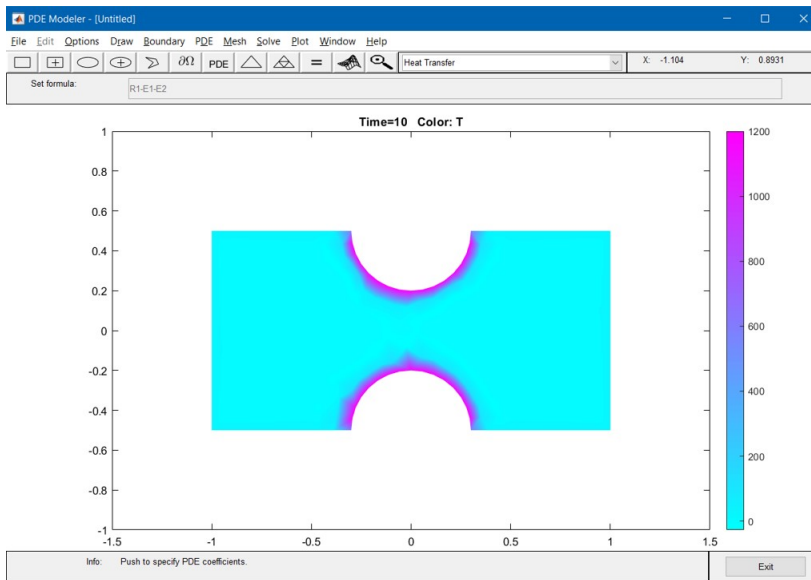
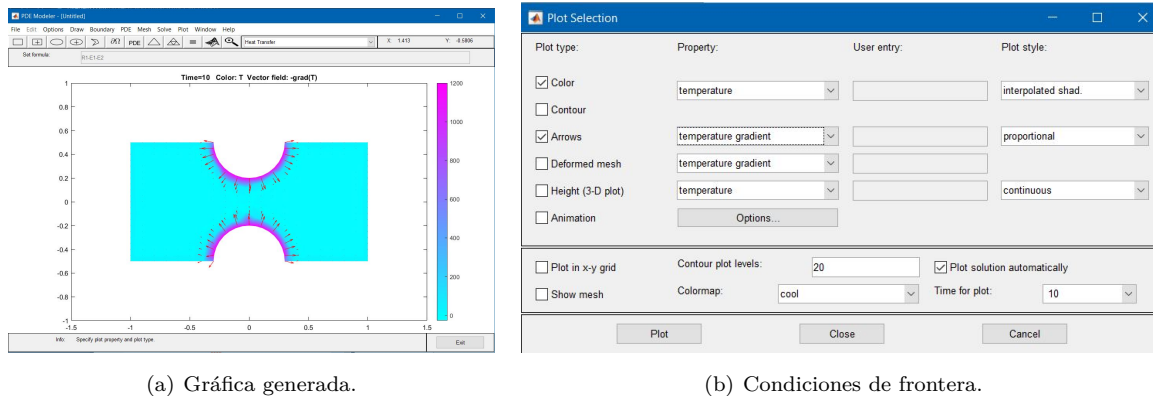


Figura 14.3.11: Solución de la EDP de forma gráfica.

11. Dependiendo de cual sea nuestra finalidad de caso de estudio, MATLAB cuenta con una **selección de gráficas** para nuestro problema. Para transferencia de calor podemos elegir entre ver la flux de calor, el gradiente de temperatura a lo largo de la placa o ver en que dirección se dispersa el calor. Para ello debemos desplazarnos al recuadro que esta entre el signo de = y la lupa, tal como se muestra en la figura 14.3.12



(a) Gráfica generada.

(b) Condiciones de frontera.

Figura 14.3.12: Solución gráfica de la EDP.

14.3.2. Modelado en 3D

El modelado 3D no es muy distintos del 2D, se sigue casi el mismo procedimiento pero ahora se tiene que exportar figuras en 3D ya hechas y ocupar una serie de comandos. Por ello para hacerlo más interactivo y visual, se le dejara al lector ver una serie de vídeos donde se explica a detalle y la solución de EDP en 3D como son [167] [168] [169] [170] [171] [172] y [173]. También hay literatura específica que abarca toda la **toolbox** de EDP como son [174] y [175]. O basta con poner en algún buscador de artículos o en el mismo google la frase *pdetool matlab 3D* y aparecerán muchas referencias sobre el gran potencial que tiene MATLAB tanto en la investigación como en la ingeniería. Incluso cuenta con un programa el mismo MATLAB llamado **Simulink** el cual permite interactuar MATLAB con otros softwares como AutoCAD, Solidworks o Comsol Mutiphysics, por mencionar algunos, como herramienta para simular la respuesta temporal de sistemas dinámicos [176].

Capítulo 15

Balances macroscópicos para sistemas no isotérmicos

15.1. Balance de energía para un compresor

Se hace pasar una corriente de vapor de agua sobrecalentado a 300 kPa con una temperatura de 180°C por un compresor el cual comprime el gas hasta una presión de salida de 800 kPa y una temperatura de 360°C , ver la figura 15.1.1. El flujo másico de vapor es de 5 kg/min . El compresor realiza un trabajo de flecha de 34.1 kW durante el proceso. Determinar la pérdida de calor en kL/kg .

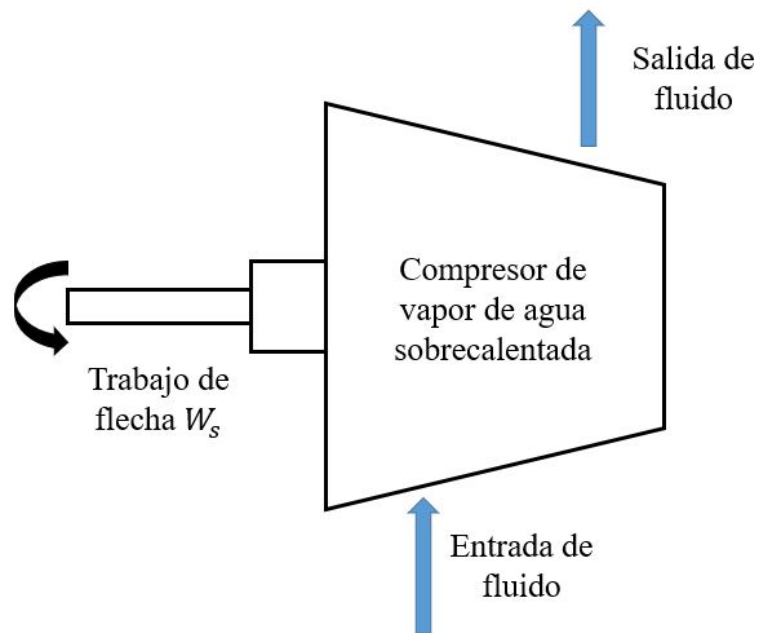


Figura 15.1.1: Esquema compresor.

1. Lo primero que se debe hacer es un balance de energía para fluidos compresibles, siendo la ecuación (10.11)

$$\hat{Q} - \hat{W}_s = \frac{1}{2}\Delta v^2 + g\Delta z + \Delta\hat{H}$$

2. De dicha expresión se puede eliminar el término de energía cinética y potencial, ya que el diámetro de tubería de salida y entrada del compresor no cambia y la energía potencial ya que la gravedad no afecta al desplazamiento del gas quedando como

$$\hat{Q} - \hat{W}_s = \Delta\hat{H}$$

3. Lo siguiente que se realizara es despejar la variable \hat{Q}

$$\hat{Q} = \hat{W}_s + \Delta\hat{H}$$

4. Se determinara el valor de $\Delta\hat{H}$, se debe remitir a las tablas de *Vapor de agua sobrecalentado* del [121]. Donde

$$\begin{aligned}\hat{H}_1(300 \text{ kPA}, 180^\circ\text{C}) &= 2746.68 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \\ \hat{H}_2(800 \text{ kPA}, 360^\circ\text{C}) &= 3183.3 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\end{aligned}$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned}\Delta\hat{H} &= \hat{H}_2 - \hat{H}_1 \\ &= 3183.3 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 2824.02 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \\ &= 359.28 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\end{aligned}$$

5. Convirtiendo el trabajo de flecha de kW a kJ/kg

$$\begin{aligned}\dot{W}_s &= \frac{\hat{W}_s}{\dot{m}} \\ &= \frac{34.1 \frac{\text{kJ}}{\text{s}}}{\left(5 \frac{\text{kg}}{\text{min}}\right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ min}}\right)} \\ &= 409 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\end{aligned}$$

6. Por ultimo, se sustituyen valores en la ecuación de balance de energía. Donde se hará la conversión de signos correspondientes, ya que como se menciono antes "solo se podrá aplicar la ley de signos una vez que se vayan a sustituir los valores en cada letra", para eso uno se debe remitir a la figura 1.4.2, donde se sabe que nuestro sistema se le esta suministrando trabajo, el cual su signo sera negativo. Mientras que al calor no se pondrá signo aun, debido a que no se esta sustituyendo valores aún

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= \left(\hat{W}_s + \Delta\hat{H}\right) \\ &= \left[\left(-409 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\right) + 359.28 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\right] \\ &= -49.72 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\end{aligned}$$

Donde el signo menos corresponde al calor generado por el compresor, estando en lo correcto, ya que si se ve la figura 1.4.2, el signo menos es cuando el calor sale del sistema, lo mismo que esta ocurriendo de este problema.

15.2. Determinación de temperatura

Un intercambiador de calor de tubos concéntricos con pared delgada de contra flujo se usa agua para enfriar un aceite caliente. El agua ($C_p = 4.18 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$) entra a razón de $3 \text{ kg}/\text{s}$ por el intercambiador a una temperatura de 20°C y sale a 40°C , mientras que el aceite ($C_p = 2.35 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$) entra a una razón de $2 \text{ kg}/\text{s}$ con temperatura de 85°C , pero se desconoce su temperatura de salida, tal como se muestra en el esquema 15.2.1. Encontrar la temperatura de salida del aceite.

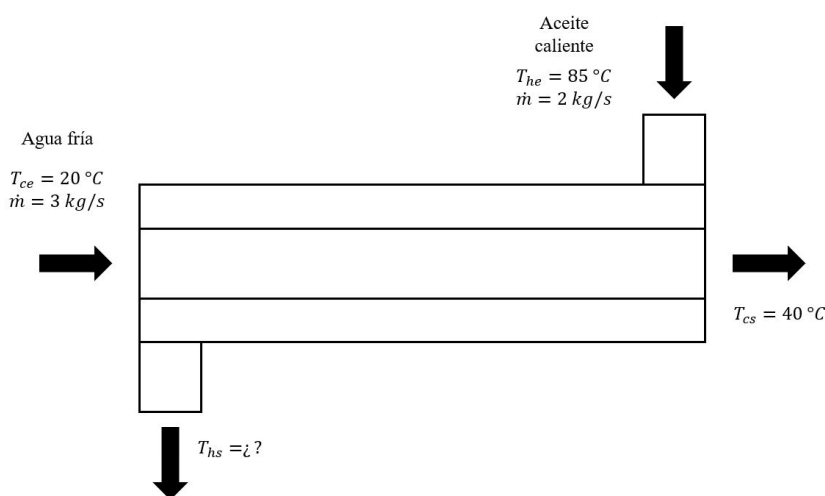


Figura 15.2.1: Intercambiador de calor.

1. Lo primero que hay que hacer es encontrar la transferencia de energía del intercambiador, si se desprecia la energía cinética y potencial. Además, no hay trabajo, se puede ocupar la ecuación (13.1)

$$\dot{Q} = \Delta \hat{H}$$

2. Ya que nuestro sistema es abierto se considera

$$\dot{Q} = \dot{m} \Delta \hat{H}$$

3. Aplicando la definición de entalpía $\Delta \hat{H} = C_p \Delta T$

$$\dot{Q} = \dot{m} C_p \Delta T$$

4. Sustituyendo los datos para la transferencia de calor para el agua

$$\begin{aligned} \dot{Q}_c &= \left(3 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right) \left(4.18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right) (20 \text{ K}) \\ &= 250.8 \frac{\text{kJ}}{\text{s}} \end{aligned}$$

5. Como el calor transferido será el mismo tanto del fluido caliente como del frío, podemos decir que

$$\begin{aligned}\dot{Q}_h &= \dot{Q}_c \\ &= 250.8 \frac{\text{kJ}}{\text{s}}\end{aligned}$$

6. Despejando T_{hs} , sabiendo que $T_{hs} < T_{he}$

$$\begin{aligned}T_{hs} &= T_{he} - \frac{\dot{Q}_h}{\dot{m}C_p} \\ &= 358.15 \text{ K} - \frac{250.8 \text{ kJ/s}}{(2 \text{ kg/s}) [2.35 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})]} \\ &= 304.7882 \text{ K} \\ &= 31.6383^\circ \text{C}\end{aligned}$$

Nomenclatura

\dot{Q}	Calor	k	Constante de conductividad térmica
T	Temperatura	q_i	Flux de calor
Pr	Numero de Prandtl	C_p	Capacidad calorífica
ν	Viscosidad cinemática	μ	Viscosidad dinámica
Nu	Número de Nusselt	Ra	Número de Rayleigh
Gr	Número de Grashof	Re	Número de Reynolds
h	Coficiente de transferencia de calor por convección	V	Volumen
\hat{r}	Vector unitarios en el eje r	$\hat{\theta}$	Vector unitarios en el eje θ
\hat{k}	Vector unitarios en el eje z	A_s	Área de sección transversal
\dot{m}	Flujo másico	m	Masa
v_i	Velocidad	C_v	Capacidad calorífica a volumen constante
\dot{E}_p	Energía potencial	\dot{E}_k	Energía cinética
\dot{U}	Energía interna	\hat{W}	Trabajo
\hat{H}	Entalpía	ρ	Densidad
t	Tiempo	C_i	Constante de integración
C_{ec}	Cargo de energía	R_{conv}	Resistencia térmica por convección
R_{cond}	Resistencia térmica por conducción	U	Coficiente de transferencia de calor global
η	Eficiencia de aleta	Δx	Diferencial en el eje x
Δy	Diferencial en el eje y	Δz	Diferencial en el eje z
Δr	Diferencial en el eje r	$\Delta \theta$	Diferencial en el eje θ
dx	Derivada respecto a x	dy	Derivada respecto a y
dz	Derivada respecto a z	dr	Derivada respecto a r
$d\theta$	Derivada respecto a θ		

Capítulo 16

Conclusión

Los fenómenos de transporte constituyen una parte fundamental para la formación de un Ingeniero Químico, ya que permite conocer los principios de los balances microscópicos de cantidad de movimientos, transferencia de calor y masa (este último no se considero en el trabajo), que se generan en un sistema cuando este se encuentra en un estado estacionario o no estacionario. Siendo los fenómenos de transporte una de las ramas científicas más avanzadas y teóricas, ya que se pretende predecir por medio de ecuaciones lo que está sucediendo en el sistema, con la finalidad de ahorrar tiempo y costos en laboratorios experimentales, aunque también debe corroborarse que los modelos matemáticos sean casi exactos con los datos obtenidos de forma experimental.

Posiblemente entender los fenómenos de transporte a la primera instancia no es sencillo, debido a que se deben tener conocimientos sólidos sobre materias básicas, por mencionar algunas como: termodinámica, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales ordinarias, física e incluso de filosofía, ya que como ingenieros en formación, cuando se requiere trabajo de laboratorio es importante tener buena redacción y entendimiento del fenómeno físico o químico que se está llevando a cabo; desde el punto de vista de los fenómenos de transporte es importante entender lo que significa la ecuación que se está deduciendo o el gráfico que se quiera interpretar.

Es cierto que en nuestra carrera de formación como ingenieros se nos plantea el estado estacionario, donde se pueden considerar las variables (como la temperatura, viscosidad, densidad, etc.) como constantes, ya que no dependerán del tiempo si no, únicamente de su ubicación en el espacio, pudiendo considerar esta operación como "ideal" debido a que nosotros deseamos que nuestros procesos de producción sean estables, manteniendo siempre las mismas condiciones de temperatura, presión y flujo, lo que nos dará como consecuencia una calidad constante de nuestros productos, pero en la vida real eso no es lo que sucede, ya que hay que recordar que para llegar a un estado estacionario se parte de un estado transitorio y de allí surgen las ecuaciones diferenciales parciales, siendo un tema de gran interés, gracias a que son ecuaciones que pretenden acercarse más a la realidad mediante modelos matemáticos. Las ecuaciones diferenciales parciales pretenden comprender y explicar los fenómenos físicos para entender mejor el universo que nos rodea.

En este trabajo se introdujo al lector en el uso de los diferentes métodos numéricos que existen para la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, siendo estas últimas las que en su mayoría se resuelven mediante el uso de métodos numéricos, debido a su alta complejidad. Sin embargo, gracias

a los avances de la tecnología y la nueva generación de computadoras, el resolver ecuaciones se ha hecho más rápido, eficiente, ordenado y con menor margen de error y redondeo. La implementación del software de MATLAB permitió resolver las ecuaciones de manera más rápida y con mayor exactitud. Haciendo una comparativa de como, la solución numérica converge a la misma que una analítica, pero con mayor rapidez, una complicación que podría presentarse al alumno es cómo empezar a programar. Para empezar a programar, un consejo que doy particularmente es tener paciencia, ya que al inicio es mucho ensayo y error en el desarrollo de los códigos, por más sencilla que sea la ecuación, al inicio se escribirán muchas líneas de código, pero conforme a la práctica esas líneas de código se pueden optimizar haciéndose más pequeños y que se consuma menor memoria ram. Obviamente para optimizar algoritmos se necesita saber qué se está programando, cuál será el método por el que se resolverá y qué resultado se deberá obtener, sea numérico o gráfico. Lo que ayuda bastante cuando uno está atorado en un algoritmo es ver videos en YouTube, ya que hay que recordar que no todos aprendemos de la misma manera, algunos son visuales, otros auditivos o kinestésico. Gracias al software de MATLAB que permite resolver ecuaciones de 1, 2 y 3 dimensiones fue el motivo por el que se escogió, además que ayuda al alumno ser más ordenado con sus variables, tiene una amplia gama de librerías y sobre todo, que si el alumno tiene conocimientos de otros software como SolidWorks o AutoCAD, MATLAB permite emparejar el diseño que se halla hecho y hacer una simulación de Dinámica y Control.

No se pudo abarcar la transferencia de masa en este trabajo, debido a que sería sumamente extenso y al ser un trabajo realizado por una persona es sumamente pesado, entonces se optó solo trabajar solamente con dos de los tres fenómenos, explicándose de manera detallada su solución analítica y numérica. Recordar que los fenómenos de transporte al ser análogos, al deducir un problema o una ecuación el otro tendrá casi la misma metodología de deducción y resolución.

Para finalizar, esta tesis surge con la finalidad de ser una guía para el alumno y que le permita mediante los ejercicios planteados motivarlo a reflexionar y aplicar sus conocimientos en termodinámica e ingeniería y plasmar el fenómeno físico en un modelo matemático (ecuación diferencial parcial u ordinaria), el cual pueda resolver mediante métodos analíticos o numéricos. Por otro lado, también considero importante mencionar que uno de mis objetivos al desarrollar el presente documento, es contribuir a la formación de los alumnos en esta rama de la ingeniería, el verdadero valor del presente documento se verá cumplido cuando en manos de quien lo consulte tenga una verdadera utilidad.

Bibliografía

- [1] R. Bird, W. Stewart y E. Lightfoot. *Fenómenos de transporte*. 2a. ed. México: Limusa, 2006. 3, 4, 5, 8, 140, 152, 190, 191, 198, 209, 218, 230, 250, 267, 293, 322, 383
- [2] W. McCabe, J. Smith y P. Harriott. *Operaciones unitarias en ingeniería química*. 7a. ed. México: McGraw-Hill, 2007. 4, 7
- [3] L. Gacelll, A. Díaz y G. Surís. *Transferencia de cantidad de movimiento, calor y masa*. 1a. ed. Cuba: Pueblo y Educación, 1988. 4, 218
- [4] R. Betancourt. *Fenómenos de transporte. Un curso introductorio*. 1a. ed. Colombia: Universidad Nacional de Colombia, 1991. 5
- [5] R. Monsalvo, Ma. Romero, G. Mirando y G. Muñoz. *Balance de materia y energía. Procesos industriales*. 1a. ed. México: Editorial Patria, 2014. 6, 33
- [6] C. J. Geankoplis. *Proceso de transporte y operaciones unitarias*. 3a. ed. México: CECSA, 1998. 7
- [7] L. Gary. *Advanced Transport Phenomena. Fluid mechanics and Convective Transport Processes*. 1st. ed. U.K.: Cambridge University Press, 2007. 7, 8
- [8] H. Anton. *Introducción al álgebra lineal*. 3a. ed. México: Limusa, 1994. 10, 15
- [9] S. Grossman y J. Flores. *Álgebra lineal*. 7a. ed. México: McGraw-Hill, 2012. 11, 15, 18, 87, 208
- [10] V. Alain, Saucez & Schiesser. "Simulation of Distributed Parameter Systems Using a Matlab-Based Method of Lines Toolbox: Chemical Engineering Applications". *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 43, no. 14, pp. 3469-3477, 2004. 11
- [11] R. Chang. *Química*. 10a. ed. México: McGraw-Hill, 2010. 18
- [12] T. Brown y Jr. LeMay. *Química. La ciencia central*. 9a. ed. México: Pearson Educación, 2004. 18
- [13] P. Tippens. (2011). *Física. Conceptos y aplicaciones*. 7a. ed. México: McGraw-Hill, 2011. IX, IX, IX, x, 21, 22, 25, 27, 138, 208, 221, 223, 324
- [14] R. Serway & J. Faughn. *Physic*. 1a. ed. México: McGraw-Hill, 2006. 21, 22, 24
- [15] G. Castellan. *Fisicoquímica*. 2a. ed. México: Pearson Educación, 1987. 30, 31, 85
- [16] J. Smith, H. Van Ness y M. Abbott. *Introducción a la termodinámica en ingeniería química*. 5a. ed. México: McGraw-Hill, 1997. 30, 31, 85, 322
- [17] H. Callen. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. 2nd. ed. U.S.A.: Jhon Wiley and Sons, 1987. 31, 32

-
- [18] A. Rojas. *Fundamentos de procesos químicos*. 1a. ed. Colombia: Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, 2012. 32, 34
- [19] R. Felder. *Principios elementales de los procesos*. 3a. ed. México: Limusa, 2004. 34
- [20] D. Zill y W. Wright. *Matemáticas 1. Cálculo diferencial*. 4a. ed. México: McGraw-Hill, 2001. 36, 42, 218, 306
- [21] E. Purcell, y D. Vardberg. *Cálculo diferencial e integral*. 9a. ed. México: Pearson Educación, 2007. 38, 39, 42, 45
- [22] J. Pérez. *Cálculo diferencial e integral*. 1a. ed. España: Ciudad de Granada, 2008. 41, 42
- [23] D. Zill y M. Cullen. *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera*. 7a. ed. México: Cengage Learning, 2009. 42, 47, 51, 53, 56, 58, 59, 62, 64, 66, 72, 76, 77, 79, 95, 218, 232, 304
- [24] Y. Cengel y W. Palm III. *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias*. 1a. ed. México: McGraw-Hill, 2014. 42, 47, 49, 51, 53
- [25] R. López. *Series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales. Una introducción con MAPPLE y ejercicios resueltos*. . 1a ed. España: Editora Manuis, 2019. 47, 58, 63, 64, 66, 69
- [26] P. Olver. *Introduction to Partial Differential Equations*. 1st. ed. U.S.A.: Springer, 2014. 58, 59, 60, 76
- [27] M. Coleman. *An Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB*. 2nd. ed. U.S.A.: CRC Prees, 2013. 58, 59, 60, 61, 62, 63, 66, 72, 76, 79
- [28] T. Hillen, T. Leonard & H. Van Roessel. *Partial Differential Equations. Theory and Completely Solved Problems*. 1st. ed. U.S.A.: Wiley, 2012. 60, 75
- [29] I. Sneddon. *Elements of Partial Differential Equations*. 1st. ed. U.S.A.: McGraw-Hill, 1957. 75, 76
- [30] A. Gilat. *MATLAB. An Introduction with Applications*. 4th. ed. U.S.A.: Jhon Wiley and Sons, 2011. VIII, 81, 82, 83, 88, 98
- [31] MathWorks. Recuperado de <https://la.mathworks.com/> 80, 236
- [32] T. Siau & A. Bayen. *MATLAB. An Introduction to MATLAB Programming and Numerical Methods for Engineers*. 5th. ed. Great Britain: ELSEVIER, 2005. 82, 83
- [33] P. Quintela. *Matemáticas en ingeniería con MATLAB*. 1a. ed. España: Universidad de Compostela, 2000. 88, 91, 97, 279
- [34] E. Mikhailov. *Programming with MATLAB for Scientis*. 1st. ed. U.S.A.: CRC Press, 2017. 91, 98
- [35] J. Izar. *Métodos numéricos. Con simulación y aplicaciones*. 1a. ed. México: Alfaomega, 2018. 97, 98, 241
- [36] S. Attaway. *MATLAB. A Practical Approach*. 1st. ed. U.S.A.: ELSEVIER, 2018. 97
- [37] E. Mora. *Introducción a los métodos numéricos. Implementación en Basic (LibreOffice, Excel) y wxMaxima*. 1a. ed. Costa Rica: Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2018. IX, 102
- [38] F. White. *Mecánica de fluidos*. 5a. ed. México: McGraw-Hill, 2004. x, 114, 125, 381

- [39] La mente es maravillosa (2022, Marzo 11). *La teoría de las ondas sobre el agua y la piedra*. Recuperado de: <https://lamenteesmaravillosa.com/la-teoria-de-las-ondas-sobre-el-agua-y-la-piedra/> 115
- [40] Peakpx (2023, Marzo 04). *Anillos de humo, entretenimiento gráfico, gente, Fondo de pantalla HD*. Recuperado de: <https://www.peakpx.com/es/hd-wallpaper-desktop-aqmq1> 115
- [41] E. Wily. *Tranvase del chocolate en fase fluida viscosa no Newtoniana cálculo del equipo de bombeo de una planta de chocolate* (Monografía técnica para título de licenciatura). Perú: Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2005.
- [42] Ing. Juan Carlos Miranda R. (2016, Agosto 04). *VISCOSIDAD - GENERAL*. Recuperado de: <https://apuntes-ing-mecanica.blogspot.com/2016/08/viscosidad-general.html> x, x, 122, 123
- [43] F. Del Valle y A. Cuevas. *Manual de prácticas de laboratorio pesado I*. México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2018. 124
- [44] R. Reid & T. Sherwood. *The properties of gases and liquids*. 1a. ed. U.S.A.: McGraw-Hill, 1966.
- [45] L. Garcell y R. Matos. "Modelos matemáticos empíricos para predecir la función integral de colisión con vista al cálculo de propiedades de transporte de gases," *Tecnología química* vol. 4, pp. 11-20, 1984. 210
- [46] Bus Vacuum Solutions. (11 de Julio de 2020). Destilación de crudo. Recuperado de <https://www.buschvacuum.com/mx/es/applications/distillation/crude-oil-distillation>
- [47] A. Efraín, J. Andaverde, et ad. "Determinación de la viscosidad y su incertidumbre en fluidos de perforación usados en la construcción de pozos geotérmicos: aplicación en el campo de Los Humeros," *Revista Mexicana de Ciencias Geológicas*, vol. 26, no. 2, pp. 516-529, 2009.
- [48] J-ROHI Ingenieria S.A.A. (5 de abril de 2022). Tipos de viscometros de vidrio capilar. Recuperado de: <https://j-rohi.com/project/viscometros-de-vidrio-capilar/> x, 128
- [49] Thermo Fisher SCIENTIFIC (5 de abril de 2022). Viscosímetro de caída de bola tipo C Thermo Scientific HAAKE. Recuperado de: <https://www.thermofisher.com/order/catalog/product/3560001> x, 128
- [50] VIRESA (5 de abril de 2022). La viscosidad y tipo de viscosímetros. Recuperado de: https://viresa.com.mx/blog_viscosidad_tipo_viscosimetros x, 129
- [51] MEQUIM (5 de abril de 2022). Viscosímetro Automático Saybolt. Recuperado de: <https://www.mequim.com.pe/producto/mw000021-sv4000-viscosimetro-automatico-saybolt> x, 129
- [52] MARIMEX (5 de abril de 2022). Viscosímetros en línea - Nuestra pasión. Bienvenido a MARIMEX. Reccuperado de: <https://www.marimex.de/es> x, 129, 130
- [53] NEURTEK (5 de abril de 2022). Viscosímetros Industriales. Recuperado de: <https://www.neurtek.com/es/pintura-recubrimientos/viscosimetro-pintura/viscosimetros-industriales> x, 130
- [54] mundocompresor.com (14 de septiembre de 2022). Presión diferencial. Recuperado de: <https://www.mundocompresor.com/diccionario-tecnico/presion-diferencial> XI, 142
- [55] Pinterest (14 de septiembre de 2022). Bañador de pared o cascada. Recuperado de: <https://www.pinterest.com.mx/pin/352617845796960693/> XI, 145

- [56] F. Atena, G. Belfort, J. Otis, F. Fiessinger, J. Rovel & J. Nicoletti. "Particle Motion in a Laminar Slit Flow: A Fundamental Fouling Study," *Desalination*, vol. 47, pp. 221-232, 1983. [https://doi.org/10.1016/0011-9164\(83\)87076-3](https://doi.org/10.1016/0011-9164(83)87076-3) 160, 162
- [57] J. Otis, F. Alena, J. Mahar & G. Belfort. Measurements of single spherical particle trajectories with lateral migration in a slit with one porous wall under laminar flow conditions. *Experiments in Fluids*, vol. 4, pp. 1-10, 1986. <https://doi.org/10.1007/BF00316779> 160, 162
- [58] M. Hoyaux. *Arc Physics*. Springer-verlag, 1968. 135
- [59] Internacional. Europa press (29 de enero del 2022). Un oleoducto privado de Ecuador sufre una rotura en la Amazonía. Recuperado de: <https://www.europapress.es/internacional/noticia-oleoducto-privado-ecuador-sufre-rotura-amazonia-20220129033218.html>. XI, 163
- [60] Internacional. Promart. Homcenter (13 de octubre del 2022). Escurridor-organizador de platos 2 niveles. Recuperado de: <https://www.promart.pe/Sistema/404?ProductLinkNotFound=escurridor-organizador-de-platos-2-niveles-99999069> XI, 165
- [61] Puerto dos bocas (16 de febrero del 2021). Tipos de Petróleo Crudo en México. Recuperado de: <https://www.puertodosbocas.com.mx/ultimas-noticias/288-tipos-de-petroleo-crudo-en-mexico-2019#:~:text=El%20petr%C3%B3leo%20crudo%20se%20clasifica,son%20Olmeca%2C%20Istmo%20y%20Maya.> 173, 200
- [62] SENTEC (20 de octubre del 2022). Skimmer de cinta transportadora. Recuperado de: <https://sentec.es/index.php/skimmer-oleofilico-desmi-belt/> XI, 180, 181
- [63] Gonçalves Paula (16 de mayo del 2021). Marea negra: consecuencias para el medio ambiente. Recuperado de: <https://www.meteored.mx/noticias/ciencia/marea-negra-consecuencias-para-el-medio-ambiente-petroleo-contaminacion-marina.html> XI, 180
- [64] G. Ricardo. *Lecturas sobre el desastre del Prestige*. 1ed. España: Instituto de Estudios e Investigación Psicosocial "Xoán Vicente Viqueira", 2013. 181
- [65] G. María y S. Fernando. "Estudio del desplazamiento de una interfase líquido-gas usando el método de elementos finitos casos plano y asimétrico," *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 13, no. 4, pp. 559-571, 1997. XII, 186, 190, 191
- [66] T. Mustafa. "Nanoliquid film flow due to a moving substrate and heat transfer," *The european physical journal plus*, vol. 135, pp. 780, 2020. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00812-y> 186
- [67] M. Nava. (2014, marzo 05). Tipos de petróleo crudo según grado API (liviano a extrapesado). *Venelogía*. 188
- [68] M. Essefeld y E. Barberi. (2009, Enero 12). Viscosidad del petróleo. *La comunidad petrolera*. 188
- [69] L. Darko. (2015, september 21). Distillation column: minimizing energy requirements with APC. Recoverd of: <https://simulatelive.com/optimize/advanced-process-control/distillation-column-minimizing-energy-requirements-with-apc> XII, 193
- [70] G. Marcoo. (2015, mayo 7). Diagram of a Distillation Column. Recoverd of:

- [https://es.wikipedia.org/wiki/Columna_de_fraccionamiento#/media/Archivo:Distillation_Column_\(Tower\).png](https://es.wikipedia.org/wiki/Columna_de_fraccionamiento#/media/Archivo:Distillation_Column_(Tower).png) XII, 193
- [71] OCTAL (2022, noviembre 1). DTubería de Producción Petrolera. Recuperado de: <https://www.octalacero.com/tuberia-de-produccion> 200
- [72] Math D. LG, "El Gradiente, Divergente, Laplaciano y Rotacional en Coordenadas Cilíndricas.", 19-oct-2020. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=DfyVR3pRgxU&t=1453s> 210
- [73] DalMaths, "Operador gradiente y divergencia de un campo vectorial en coordenadas esféricas", 16-ago-2019. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=86XdK1MNO1U> 210
- [74] Ing Julio Arreaga, "CLASE 3 - ESFUERZO NORMAL Y ESFUERZO CORTANTE.", 20-jul-2020. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=VI0Wc1Kc5k4&t=395s> 213
- [75] R. David & F. Mary. *Biofluid mechanics. A introduction to fluid mechanics, macrocirculation, and microcirculation*. U.S.A.: ELSEVIER, 2012. 213, 214, 217
- [76] A. S. Saha & M. Alam. "Normal stress differences, their origin and constitutive relations for a sheared granular fluid," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 795, pp. 549-580, 2016. doi:10.1017/jfm.2016.237 213
- [77] Néstor & B. Moisés. "Influence of the normal stresses to direction of shear flow in the rheology of concentrated kaolin suspensions," *Dyna rev.fac.nac.minas*, vol. 81, no. 184, pp. 85-92, 2023. <https://doi.org/10.15446/dyna.v81n184.39069> 213
- [78] R. Steller. "Determination of the first normal stress difference from viscometric data for shear flows of polymer liquids," *Rheologica Acta*, vol. 55, no. 8, pp. 649-656, 2016. <https://doi.org/10.1007/s00397-016-0938-3> 213
- [79] C. Bennet & J. Myers. *Momentum, heat, and mass transfer*. 1st. ed. U.S.A.: McGraw-Hill, 1962. 214
- [80] BROOKFIELD. *Viscometer: BROOKFIELD KU-2*. Manual No. M04-242-E1213. Recuperado de <https://www.brookfieldengineering.com/-/media/ametekbrookfield/manuals/obsolete%20manuals/ku-2%20instructions.pdf?la=en>
- [81] R. Bird, W. Stewarts, E. Lightfoot & D. Klingenberg. *Introductory transport phenomena*. 1st. ed. U.S.A.: Wiley, 2015. 209, 210, 216, 250, 257, 267
- [82] G. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. 1st. ed. The University of Cambridge, 2000. 209, 216
- [83] D. Acheson. *Elementary fluid dynamics*. Clarendon Press, 1990. 209, 216
- [84] S. Fielding. (2007-2008). *Index of /suzanne.fielding/teaching*. Recuperado de <https://community.dur.ac.uk/suzanne.fielding/teaching/> 216
- [85] Engineering Theory, "The Stress Tensor", 6-abr-2020. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=Bv2SgwwdXkQ> 217
- [86] Djordje Romanic, "Stress Tensor in Newtonian Fluids", 15-abr-2020. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=eszBBLm4cBk> 217

- [87] BYU FLOW Lab, "Stress Tensor for a Newtonian Fluid", 13-ene-2022. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=YPDaFQUqVE4> 217
- [88] Science of Fluids, "Navier-Stokes equation: a derivation with the detailed understandings on viscous stress tensor", 28-may-2021. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=sGfXj3Tpjj4> 217
- [89] K. Herzfeld, J. Hirschfelder, C. Curtis, R. Bird & E. Spatz. *Fundamental physics of gases*. Princeton legacy library, 1955. 217
- [90] M. Williams & R. Bird. "Oscillatory Behavior of Normal Stresses in Viscoelastic Fluids," *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, vol. 3, no. 1, pp. 42-49, 1964. <https://doi.org/10.1021/i160009a008> 218
- [91] Morken Group. (2017-2021). *Sistema de tuberías flexibles para transporte de hidrocarburos y aguas*. Recuperado de <https://www.morkengroup.com/sistema-de-tuberias-flexibles-para-transporte-de-hidrocarburos-y-aguas/> XII, 239
- [92] The University of Auckland (2007-2008). *Mechanics Lecture Notes Part III: Foundations of Continuum Mechanics*. Recuperado de http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_III/
- [93] S. Fielding. (2017-2021). *Index of /cursos/fenomenos*. Recuperado de <http://tecno.cruzferro.com/cursos/fenomenos/>
- [94] Bronkhorst. (2021, December 14). *What is the difference between laminar flow and turbulent flow?*. Recuperado de <https://www.bronkhorst.com/int/blog-1/what-is-the-difference-between-laminar-flow-and-turbulent-flow/> XII, 254
- [95] Y. Cengel & J. Cimbala. *Fluid Mechanics. Fundamentals and applications*. 1st. ed. U.S.A.: McGraw-Hill, 2006. XII, 250, 257, 258
- [96] M, Suño. "Solution of partial differential equations by the Montecarlo Method," *Revista Boliviana de Física*, vol. 19, pp. 24-33, 2011. 241
- [97] S. Cecilia. "Numerical methods in finite differences for the estimation of FPGA hardware resources in LFSR (n,k) fractal architectures," *Ingeniería Investigación y Tecnología*, vol. XX, no. 3, pp. 1-10, 2011. <https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2019.20n3.032> 241
- [98] P. Carlos y C. Antonio. "El método de las líneas aplicado al desarrollo termohidráulico en tubos isotérmicos," *Revista internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 3, no. 4, pp. 411-428, 1987. 241
- [99] C. Juan y G. José. (2016, agosto 4). *Método de discretización*. Recuperado de https://webs.um.es/jmz/IntroFisiCompu/Alumnos/06_Pozo_de_Potencial/archivos/discretizacion.pdf 241
- [100] C. B. Marcelo. (2019, diciembre 18). *Discretización de ecuaciones*. Recuperado de http://www.meteorologia.edu.uy/wp-content/uploads/2019/Modelacion_numerica_atms/Tema2_17.pdf 241
- [101] InverseTachyonPulse, "Deducción de la ecuación de conservación de la energía", 5-nov-2020. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=i9aNB1MBqS0&t=189s> 219

- [102] R. Cornish. "Flow in a Pipe of Rectangular Cross-Section," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 120, no. 786, pp. 691-700, 1928. <https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0175> 230
- [103] Q. Ji & D. Robert. "Parallel 3D Poisson solver for a charged beam in a conducting pipe," *Computer Physics Communications*, vol. 138, no. 1, pp. 18-28, 1928. [https://doi.org/10.1016/S0010-4655\(01\)00185-0](https://doi.org/10.1016/S0010-4655(01)00185-0) 230
- [104] Q. Ji & D. Robert. "Parallel 3D Poisson solver for a charged beam in a conducting pipe," *Computer Physics Communications*, vol. 138, no. 1, pp. 18-28, 1928. [https://doi.org/10.1016/S0010-4655\(01\)00185-0](https://doi.org/10.1016/S0010-4655(01)00185-0) 230
- [105] V. Rykov, V. Titarev & E. Shakhov. "Poiseuille flow in elliptical and rectangular tubes," *Fluid Dynamics*, vol. 46, pp. 456-466, 2011. <https://doi.org/10.1134/S0015462811030124> 230
- [106] J. Nye. "The Flow of a Glacier in a Channel of Rectangular, Elliptic or Parabolic Cross-Section," *Journal of Glaciology*, vol. 5, no. 41, pp. 661-690, 1965. doi:10.3189/S0022143000018670 230
- [107] H. Hassan, S. Fahad, N. Hasan & S. Sanghi. "Laminar to turbulent transition in a finite length square duct subjected to inlet disturbance," *Physics of Fluids*, vol. 33, no. 6, 2021. <https://doi.org/10.1063/5.0048876> 124, 237
- [108] T. Tatsumi & T. Yoshimura. "Stability of the laminar flow in a rectangular duct," *P Journal of Fluid Mechanics*, vol. 212, no. 1, pp. 437-449, 1990. <https://doi.org/10.1017/S002211209000204X> 124, 237
- [109] H. Tennekes & J. Lumley. *A first course in turbulence*. 5th. ed. UK: The MIT Press, 1972. 253
- [110] Crane. *Introductory transport phenomena*. 5th. ed. U.S.A.: Wiley, 2015. 257, 258, 268
- [111] G. Gregory & M. Fogarasi. "Alternate to standard friction factor equation," *Oil & Gas Journal*, vol. 83, no. 13, 1985. Corpus ID: 92282146 259
- [112] N. Chen. "An Explicit Equation for Friction Factor in Pipe," *Industrial & Engineering Chemistry Fundamental*, vol. 18, no. 3, pp. 296-297, 1979. <https://doi.org/10.1021/i160071a019> 259
Chen, Ning Hsing (1979). An Explicit Equation for Friction Factor in Pipe. , 18(3), 296-297. doi:10.1021/i160071a019
- [113] J. Sirena, A. Galeasso y P. Majle. "Predicción y evaluación empírica del coeficiente de pérdida de carga en rellenos de torres de enfriamiento de agua," *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, vol. 14, no. 2, pp. 25-40, 2010. 261
- [114] M. Bandala, R. Macedo y F. Velez. "Evaluación de Coeficientes de Fricción en el Transporte de Fluidos No-Newtonianos," *Información tecnológica*, vol. 16, no. 2, pp. 73-80, 2005. <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642005000200012> 261
- [115] P. Rogelio, S. Florencio, C. Ignacio, T. Miguel y C. Juan. "Estudio Experimental de la Reducción de Fricción en la Conducción de Fluidos usando Surfactantes," *Ingeniería mecánica tecnología y desarrollo*, vol. 4, no. 6, pp. 205-217, 2014. 261
- [116] Profe Felipe Salcedo, "Balances macroscópicos", 21-nov-2020. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=NrpRFmrl9hw&t=620s> 263

- [117] C. Yunes y C. John. *Mecánica de fluidos. Fundamentos y aplicaciones*. 1a. ed. México: McGraw-Hill, 2006. 265, 266
- [118] V. Viola. *Correlation of fission fragment kinetic energy data. Nuclear Data Sheets*. Section A, 1, pp. 391–410, 1965. doi:10.1016/s0550-306x(65)80007-6 267
- [119] P. Singh, B. Naik, X. Tang, K. Khatua, A. Kumar, & S. "Banerjee. Models for kinetic energy and momentum correction coefficients for non-prismatic compound channels using regression and gene expression programming," *SN Applied Sciences*, vol. 10, no.1, 2019. doi:10.1007/s42452-019-1222-9 267
- [120] F. Della, E. Fabiano, L. "Constantin. Kinetic-energy-density dependent semilocal exchange-correlation functionals," *Int. J. Quantum Chem.* vol. 116, pp. 1641–1694. 2016. DOI: 10.1002/qua.25224 267
- [121] C. Yunes y M. Boles. *Termodinámica*. 7a. ed. México: McGraw-Hill, 2011. 287, 322, 362
- [122] Área Fluidodinámica FI - UNLP, "Capa Límite laminar de placa plana: Ecuación de Blasius", 2-abr-2020. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=itVzv9tC4DI> 251
- [123] Área Fluidodinámica FI - UNLP, "Ecuaciones RANS para flujos turbulentos.", 12-mar-2021. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=q08gCHRjeeE&t=2265s> 254
- [124] Área Fluidodinámica FI - UNLP, "Flujo turbulento en conductos", 29-mar-2021. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=MNz-RxHPCx4&t=2379s> 254
- [125] IVAN DARIO ORDOÑEZ SEPULVEDA, "Clase Flujo Turbulento", 4-oct-2017. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=PfEQBJ6vgvw&t=3621s> 254
- [126] Helmenstine, A. (2020, Enero 23). 10 Types of energy and examples. *ThoughtCo.* Recuperado de <https://www.thoughtco.com/main-energy-forms-and-examples-609254> XIII, 276
- [127] Concepto. (2023, Marzo 04). Transferencia de calor. *Física.* Recuperado de <https://concepto.de/transferencia-de-calor/> XIII, 276
- [128] J. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Paris: D. Didot, 1882. Recuperado de <https://archive.org/details/thorieanalytiqu00fourgoog/page/n7/mode/2up> 279
- [129] SMART (2022). *Carga Proyecto: Reactor de Refinería Petrolera*. Recuperado de <https://www.smartlg.com/es/project-cargo-es/oil-refinery-reactor/> XIII, 285
- [130] J. Bin, H. Li, Z. Luhong, S. Y & X. Xiaoming. "Numerical investigation of flow and heat transfer in a novel configuration multi-tubular fixed bed reactor for propylene to acrolein process," *Heat and Mass Transfer*, vol. 51, no.1, pp. 67–84, 2015. doi:10.1007/s00231-014-1384-3 XIII, 286
- [131] Thermotech Engineering And Services Private Limited (2022). *GMP Reactor*. Recuperado de <https://www.thermotechengg.co.in/gmp-reactor.html> 292
- [132] Lifeder (2022). *Reactor batch: características, partes, aplicaciones*. Recuperado de <https://www.lifeder.com/reactor-batch/> 292
- [133] Oscar Martin Hernandez Calderon, "Ecuación de Transporte de Energía de Fluido", 4-abr-2020. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=MF7TbTFH7d4> 292

- [134] Universitat Politècnica de València - UVP, "Ecuación de transmisión de calor por coordenadas cartesianas | | UPV", 27-feb-2021. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=jqLz57kOk24> 293
- [135] Universitat Politècnica de València - UVP, "Ecuación de transmisión de calor por coordenadas cilíndricas | | UPV", 27-feb-2021. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=x-F1AQqQtho&t=256s> 293
- [136] Universitat Politècnica de València - UVP, "Transmisión de calor por conducción en coordenadas esféricas | | UPV", 30-mar-2022. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=01i-1XBQS3I> 293
- [137] CFE (2017). *Tarifas Negocios*. Recuperado de https://app.cfe.mx/Aplicaciones/CCFE/Tarifas/Tarifas/tarifas_negocio.asp?Tarifa=2&Anio=2017&mes=5 299
- [138] Amazon (2022). *TRIPLE TREE Botella de Agua Deportiva de Acero Inoxidable de Pared Simple Sin Aislamiento 18/8 para Ciclistas, Corredores, Excursionistas, Amantes de la Playa, Picnics, Camping, Sin BPA (26 Onzas)*. Recuperado de https://www.amazon.com.mx/TRIPLE-TREE-Inoxidable-Aislamiento-Excursionistas/dp/B0762L8VZX/ref=asc_df_B0762L8VZX/?tag=gledskshopmx-20&linkCode=df0&hvadid=394158314379&hvpos=&hvnetw=g&hvrnd=17834739520138938363&hvpone=&hvptwo=&hvmqt=&hvdev=c&hvdvcmdl=&hvlocint=&hvlocphy=9073959&hvtargid=pla-377294853587&pssc=1 XIII, 301
- [139] T. Myers, M. Hennessy & M/ Calvo-Schwarzwälder. "The Stefan problem with variable thermophysical properties and phase change temperature," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 149, pp. 1-15. 2020. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.118975> 302, 307
- [140] H, Gottlieb. "Exact solution of a Stefan problem in a nonhomogeneous cylinder," *Applied Mathematics Letters*, vol. 15, no. 2, pp. 167-172. 2002. [https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(01\)00113-6](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(01)00113-6) 302, 307
- [141] S. Gupta. *The Classical Stefan Problem: Basic Concepts, Modelling and Analysis*. 1st. ed. India: Elsevier, 2003. 302
- [142] D. Growth. *TEncyclopedia of Materials: Science and Technology*. 2nd. ed. U.S.A.: Elsevier, 2001, pp. 2052-2058. <https://doi.org/10.1016/B0-08-043152-6/00373-9> 302
- [143] SOLIDWORKS (2011). *Coficiente de transferencia de calor por convección*. Recuperado de https://help.solidworks.com/2011/spanish/SolidWorks/cworks/LegacyHelp/Simulation/Analysis/Background/ThermalAnalysis/Convection_Topics/Convection_Heat_Coefficient.htm 307
- [144] Warren Group (2022). *Esferas (ASME) | Tanques Esféricos*. Recuperado de <https://www.tfwarren.com/tarsco-mexico-2/productos/esferas-almacenamiento-asme> XIII, 310
- [145] Inventor de la Lámpara de Lava (2023, Enero 15). *Bases, tapones y partes pequeñas*. Recuperado de <https://www.mathmos.es/recambios-para-lampara-de-lava-mathmos.html> XIII, 311, 317
- [146] Curso Interactivo de Física en Internet. *Conducción del calor en una esfera homogénea (I)*. Recuperado de http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/transporte/conduccion_3/conduccion_3.html
- [147] Empresa del grupo LAAR (2022). *4 piezas 1.575 in disipador de calor 1.575 x 1.575 x 0.787 in /1.57 x 1.57 x 0.79 pulgadas aluminio Peltier Cooler disipadores de calor pequeña aleta de*

- refrigeración para impresoras 3D, TEC1-12706 termoeléctrico Peltier Cooler, chipset CPU LED Power A. Recuperado de <https://www.yaesta.com/b091pyfqmy-4-piezas-1575in-disipador-de-calor-1575-x-1575-x-0787in-157-x-157-x-079-pulgadas-aluminio-peltier-cooler-disipadores-de-calor-pequea-aleta-de-refrigeracin-para-impresoras-3d-tec1-12706-term/p?variacion=B07SMX1DB7> XIII, 328
- [148] Cool Techniques, "THMT Lecture 52 part-4 | heat transfer from a fin losing heat at the tip || Heat lost by convection", 20-jul-2020. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=aa-Rry9vpyU> 334
- [149] Y. Cengel y A. Chajar. *Transferencia de calor y masa*. 4a. ed. México: McGraw-Hill, 2011. XIII, 279, 284, 287, 289, 290, 293, 295, 322, 326, 334, 336, 348
- [150] R. Rengarajan. "Viscous Experimental study of solidification of paraffin wax in solar based triple concentric tube thermal energy storage system," *Thermal Science*, vol. 22, 2017. 10.2298/TS-CI160311021R 317
- [151] Aislamientos Marchetti (2022). *Aislamiento Térmico para tubería de agua caliente acabado en acero inoxidable cal. 28 tipo espejo..* Recuperado de <https://www.pinterest.com.mx/pin/154600199688358329/> 322
- [152] Tangshang Xingbang Pipeline Engineering Equipment Co. Ltd. (2022). *Tubería de aislamiento de vapor con cubierta de acero para subterráneos*. Recuperado de <https://www.xingbanginsulationpipeline.com/es/2-1-steel-jacket-steam-insulation-pipe-underground.html> 322
- [153] R. Serth. *Process Heat Transfer. Principles and applications*. 1st. ed. U.S.A.: Elsevier, 2007. 326
- [154] Básicos de Ingeniería, "Ejercicio Redes de Transferencia de Calor", 17-abr-2021. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=AZVctyehymA> 326
- [155] Física 2 UNCo, "Conducción y Convección: Serie y Paralelo", 11-jun-2020. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=AZVctyehymA> 326
- [156] M. Valipour. "Mathematical modeling of non-catalytic gas-solid reaction: Hematite pellet reduction with syngas," *Transactions C: Chemistry and Chemical Engineering*, vol. 16, no. 2, pp. 108-124, 2009. 314
- [157] T. Bergman, F. Incropera, D. Dewitt, D. & S. Lavine. *Fundamentals of heat and mass transfer*. 7th. ed. U.S.A.: John Wiley & Sons, 2011. 322, 325, 326
- [158] SIGMA THERMAL (2022). *Calentadores a Fuego Directo*. Recuperado de <https://www.sigmathermal.com/es/productos/calentadores-fuego-directo/> 347
- [159] PNGEGG (2022). *Furnace Oil refinery Heat Petroleum Oven, Unit Construction, combustion, industry png*. Recuperado de <https://www.pngegg.com/en/png-tzhig> 347
- [160] M. Seán. *Process Plant Layout*. 2nd. ed. U.S.A.: ELSVIER, 2017. 348
- [161] R. Shak & A. London. *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. 1st. ed. U.S.A.: ELSVIER, 1978. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-06152-X> 348, 352
- [162] A. Morais & J. Gut. "Determination of the effective radial thermal diffusivity for evaluating enhanced heat transfer in tubes under non-newtonian laminar flows," *Brazilian Journal of Chemical En-*

- gineering*, vol. 32, no. 2, pp 445-454, 2015. <http://dx.doi.org/10.1590/0104-6632.20150322s00003318>
348
- [163] B. Ali & W. Omar. "Exact Graetz problem solution by using hypergeometric function," *International Journal of heat and technology*, vol. 35, no. 2, pp. 347-353, 2017. <https://doi.org/10.18280/ijht.350216> 350
- [164] B. Fornberg. "Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids," *Mathematics of Computation*, vol. 51, no. 184, pp. 699-706, 1988. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1988-0935077-0>
350
- [165] S. Khan, M. Waris, A. Nasir & Asghar, Zeeshan. "Mathematical modelling of classical Graetz–Nusselt problem for axisymmetric tube and flat channel using the Carreau fluid model: a numerical benchmark study," *Zeitschrift für Naturforschung*, vol. 76, no. 7, pp. 589-603, 2021. <https://doi.org/10.1515/zna-2021-0042> 350
- [166] M I Q, "Condiciones de frontera", 06-dic-2020. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=sUZiAh8IiJI&list=PLWQQQM4q7Z86oOXYPAKGC51py99kbJ3Z7&index=2&t=485s> 223, 354
- [167] MultiON Consulting, "Webinar MATLAB - Análisis De Elementos Finitos Con PDE Toolbox", 03-feb-2022. [Video]. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=0FB1_laUk-Y 360
- [168] Álvaro Delgado Mejía, "[TRANSFERENCIA DE CALOR] en 2D con el [PDE TOOL] de Matlab", 25-jun-2019. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=OulrQj53Q8E> 360
- [169] MEF, "Aplicación de Métodos de elementos finitos utilizando el software Matlab", 25-feb-2021. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=jgXLB3uPgOc> 360
- [170] MATLAB, "Análisis de elementos finitos en 3D con MATLAB", 28-abr-2017. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=4c-sPXolD0w> 360
- [171] MATLAB, "¿Qué es Toolbox de ecuaciones diferenciales parciales? - Descripción general de la caja de herramientas de ecuaciones diferenciales parciales", 1-may-2019. [Video]. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=e1VEK_osdtg 360
- [172] Tatiana Avila, "Uso de la Herramienta PDEtool en Sistemas de Flujo Laminar y Difusión de Contaminantes", 1-jun-2015. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=ZJ0X0qah4FM> 360
- [173] Nazilya Guliyeva, "PDE Toolbox Modeling Tutorial", 13-dic-2020. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=Nvoub6AWyPQ> 360
- [174] The MathWorks, Inc. *Partial Differential Equation Toolbox For Use with MATLAB*. 1st. ed. US.A.: MATLAB, 1996. 360
- [175] The MathWorks, Inc. *Partial Differential Equation Toolbox For Use with MATLAB*. Revised for Version 2.2 (Release 2016a). US.A.: MATLAB, 2016. 360
- [176] Oscar Cigarroa-Mayorga, "¿Como usar simulink de matlab? TUTORIAL", 14-oct-2020. [Video]. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=Z5dgcVPNV28> 360

Parte V

Apéndices

Apéndice A

Datos generales

A.1. Tabla de constantes universales y conversiones

Gases ideales	
Velocidad de la Luz	$3 \times 10^8 \text{ m/s}$
Constante de Boltzman	$1.3806 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Aceleración de la gravedad	$9.81 \text{ m/s}^2 = 32.2 \text{ ft/s}^2$
Constante de Plank	$6.626196 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

<p>Longitud</p> <p>1 <i>ft</i> = 12 <i>in</i> = 0.3048 <i>m</i> 1 <i>mi</i> = 5280 <i>ft</i> = 1609.344 <i>m</i> 1 milla náutica (<i>mn</i>) = 6076 <i>ft</i> = 1852 <i>m</i> 1 <i>yd</i> = 3 <i>ft</i> = 0.9144 <i>m</i> 1 angstrom (Å) = $1.0 \times 10^{-10} \text{ m}$</p>	<p>Volumen</p> <p>1 <i>ft</i>³ = 0.028317 <i>m</i>³ 1 galón (<i>gal</i>) (EE.UU.) = 231 <i>in</i>³ = 0.00378 <i>m</i>³ 1 <i>L</i> = 0.001 <i>m</i>³ = 0.035315 <i>ft</i>³ 1 <i>onza líquida</i> (EE.UU.) = $2.9574 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ 1 cuarto (<i>qt</i>) (EE.UU.) = $9.4635 \times 10^{-4} \text{ m}^3$</p>
<p>Masa</p> <p>1 <i>slug</i> = 32.174 <i>lb_m</i> = 14.594 <i>kg</i> 1 <i>lb_m</i> = 0.4536 <i>kg</i> 1 <i>tonelada</i> (EE.UU.) = 2000 <i>lb_m</i> = 907.185 <i>kg</i> 1 <i>tonelada</i> = 1000 <i>kg</i></p>	<p>Área</p> <p>1 <i>ft</i>² = 0.092903 <i>m</i>² 1 <i>in</i>² = 1/144 <i>ft</i>² 1 hectárea (<i>ha</i>) = 1000 <i>m</i>²</p>
<p>Velocidad</p> <p>1 <i>ft/s</i> = 0.3048 <i>m/s</i> 1 <i>mi/h</i> = 1.4666 <i>ft/s</i> = 0.44704 <i>m/s</i> 1 nudo(<i>kn</i>) = 1 <i>mn/h</i> = 1.6878 <i>ft/s</i> = 0.5144 <i>m/s</i></p>	<p>Áceleración</p> <p>1 <i>ft/s</i>² = 0.3048 <i>m/s</i>²</p>
<p>Presión</p> <p>1 <i>lb_f/ft</i>² = 47.88 <i>Pa</i> 1 <i>lb_f/in</i>² = 144 <i>lb_f/ft</i>² = 6895 <i>Pa</i> 1 <i>atm</i> = 2116.2 <i>lb_f/ft</i>² = 14.696 <i>lb_f/in</i>² = 101.325 <i>kPa</i> 1 <i>inHg</i> (20°C) = 3375 <i>Pa</i></p>	<p>Fuerza</p> <p>1 <i>lb_f</i> = 4.4482 <i>N</i> = 16 <i>oz</i> 1 <i>kg_f</i> = 2.2046 <i>lb_f</i> = 9.81 <i>N</i> 1 <i>ton_f</i> (EE.UU.) = 2000 <i>lb_f</i> 1 <i>dyna</i> = $1 \times 10^{-5} \text{ N}$</p>

$1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$	$1 \text{ onza(oz)} = 0.2780 \text{ N}$
Energía $1 \text{ lb}_f \cdot \text{ft} = 1.3558 \text{ J}$ $1 \text{ BTU} = 252 \text{ cal} = 1055.056 \text{ J} = 778.17 \text{ lb}_f \cdot \text{ft}$ $1 \text{ kilowatio hora(kWh)} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$	Potencia $1 \text{ CV} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f/\text{s} = 745.7 \text{ W}$ $1 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f/\text{s} = 1.3558 \text{ W} = 0.001818 \text{ hp}$
Peso específico $1 \text{ lb}_f/\text{ft}^3 = 157.09 \text{ N/m}^3$	Densidad $1 \text{ slug}/\text{ft}^3 = 515.38 \text{ kg/m}^3$ $1 \text{ lb}_m/\text{ft}^3 = 16.0185 \text{ kg/m}^3$ $1 \text{ g}/\text{cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$
Viscosidad dinámica $1 \text{ slug}/(\text{ft} \cdot \text{s}) = 47.88 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ $1 \text{ poise (P)} = 1 \text{ g}/(\text{cm} \cdot \text{s}) = 0.1 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$	Viscosidad cinemática $1 \text{ ft}^2/\text{h} = 0.000025806 \text{ m}^2/\text{s}$ $1 \text{ stokes (St)} = 1 \text{ cm}^2/\text{s} = 0.0001 \text{ m}^2/\text{s}$
Calor específico $1 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f/(\text{slug} \cdot ^\circ \text{R}) = 0.16723 \text{ N} \cdot \text{m}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ $1 \text{ Btu}/(\text{lbm} \cdot ^\circ \text{R}) = 4186.8 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	Conductividad térmica $1 \text{ Btu}/(\text{H} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ \text{R}) = 1.7307 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$
Temperatura $T_F = 1.8T_C + 31$ $T_C = (T_F - 32)/1.8$ $T_R = T_F + 459.69$ $T_K = T_C + 273.16$	Donde los subíndices F , C , R , y K se refieren a lecturas en las escalas Fahrenheit, Celsius, Kelvin y Rankine, respectivamente.

* Los datos han sido tomados de [38]

Apéndice B

Cantidad de Movimiento

B.1. Ley de viscosidad de Newton

Coordenadas rectangulares (x, y, z)

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (\text{B.1})$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (\text{B.2})$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.3})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \quad (\text{B.4})$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \quad (\text{B.5})$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \quad (\text{B.6})$$

Para flujos compresibles los esfuerzos normales deberían tener un término adicional:

$$\tau_{xx} = -2\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \left[\frac{2}{3}\mu - \kappa \right] (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.7})$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \left[\frac{2}{3}\mu - \kappa \right] (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.8})$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \left[\frac{2}{3}\mu - \kappa \right] (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.9})$$

Donde

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\tau_{rr} = -2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (\text{B.10})$$

$$\tau_{\theta\theta} = -2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \quad (\text{B.11})$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.12})$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{B.13})$$

$$\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = -\mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \quad (\text{B.14})$$

$$\tau_{zr} = \tau_{\theta rz} = -\mu \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \quad (\text{B.15})$$

Para flujos compresibles los esfuerzos normales deberían tener un término adicional:

$$\tau_{rr} = -2\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \left[\frac{2}{3}\mu - \kappa \right] (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.16})$$

$$\tau_{\theta\theta} - 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \left[\frac{2}{3}\mu - \kappa \right] (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.17})$$

$$\tau_{zz} - 2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \left[\frac{2}{3}\mu - \kappa \right] (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.18})$$

Donde

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\tau_{rr} = -2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (\text{B.19})$$

$$\tau_{\theta\theta} = -2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \quad (\text{B.20})$$

$$\tau_{\phi\phi} = -2\mu \left(\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot(\theta)}{r} \right) \quad (\text{B.21})$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{B.22})$$

$$\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} = -\mu \left[\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right] \quad (\text{B.23})$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu \left[\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin(\theta)} \right) \right] \quad (\text{B.24})$$

Para flujos compresibles los esfuerzos normales deberían tener un término adicional:

$$\tau_{rr} = -2\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \left[\frac{2}{3}\mu - \kappa \right] (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.25})$$

$$\tau_{\theta\theta} - 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \left[\frac{2}{3}\mu - \kappa \right] (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.26})$$

$$\tau_{\phi\phi} = -2\mu \left(\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot(\theta)}{r} \right) + \left[\frac{2}{3}\mu - \kappa \right] (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.27})$$

Donde

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin(\theta)) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Para gases monoatómicos de baja densidad, la viscosidad de dilatación κ es cero [1].

B.2. Ecuaciones de continuidad

Coordenadas rectangulares (x, y, z)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (\text{B.28})$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (\text{B.29})$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0 \quad (\text{B.30})$$

B.3. Ecuación de movimiento en términos de τ

$$[\rho D\mathbf{v}/Dt = -\nabla P - (\nabla \cdot \tau) + \rho g]$$

Coordenadas rectangulares (x, y, z)

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_x + v_x \frac{\partial}{\partial x} v_x + v_y \frac{\partial}{\partial y} v_x + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_x \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) + \rho g_x \quad (\text{B.31})$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_y + v_x \frac{\partial}{\partial x} v_y + v_y \frac{\partial}{\partial y} v_y + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_y \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right) + \rho g_y \quad (\text{B.32})$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_z + v_x \frac{\partial}{\partial x} v_z + v_y \frac{\partial}{\partial y} v_z + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_z \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right) + \rho g_z \quad (\text{B.33})$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zr} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] + \rho g_r \quad (\text{B.34})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} - \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] + \rho g_\theta \quad (\text{B.35})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + \rho g_z \quad (\text{B.36})$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \tau_{\phi r} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right] + \rho g_r \quad (\text{B.37})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta + v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \left[\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \tau_{\phi\theta} - \frac{(\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}) + \tau_{\phi\phi} \cot \theta}{r} \right] + \rho g_\theta \quad (\text{B.38})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta + v_\phi v_\theta \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} - \left[\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\phi} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \tau_{\phi\phi} - \frac{(\tau_{\phi r} - \tau_{r\phi}) + \tau_{\phi\theta} \cot \theta}{r} \right] + \rho g_\phi \quad (\text{B.39})$$

B.4. Ecuación de movimiento para fluidos newtonianos con ρ y μ constantes

$$[\rho D\mathbf{v}/Dt = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho g]$$

Coordenadas rectangulares (x, y, z)

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_x + v_x \frac{\partial}{\partial x} v_x + v_y \frac{\partial}{\partial y} v_x + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_x \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x \quad (\text{B.40})$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_y + v_x \frac{\partial}{\partial x} v_y + v_y \frac{\partial}{\partial y} v_y + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_y \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho g_y \quad (\text{B.41})$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} v_z + v_x \frac{\partial}{\partial x} v_z + v_y \frac{\partial}{\partial y} v_z + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_z \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (\text{B.42})$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r \quad (\text{B.43})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_\theta \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta \quad (\text{B.44})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v_z \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (\text{B.45})$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} \\ &+ \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 v_r) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} \right] + \rho g_r \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta + v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ + \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 v_\theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin(\theta)) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot(\theta)}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] &+ \rho g_\theta \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta + v_\phi v_\theta \cot \theta}{r} \right) &= -\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial P}{\partial \phi} \\ + \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 v_\phi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin(\theta)) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{2 \cot(\theta)}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] &+ \rho g_\phi \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Apéndice C

Transferencia de calor

C.1. Ley de conducción de calor de Fourier

Coordenadas rectangulares (x, y, z)

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{C.1})$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{C.2})$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{C.3})$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad (\text{C.4})$$

$$q_\theta = -k \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (\text{C.5})$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{C.6})$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad (\text{C.7})$$

$$q_\theta = -k \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (\text{C.8})$$

$$q_\phi = -k \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad (\text{C.9})$$

C.2. Ecuación de conducción en función del flux de calor q

$$[\rho C_p dT/Dt = -\nabla \cdot \mathbf{q} + q_{gen}]$$

Coordenadas rectangulares (x, y, z)

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial z} \right) + q_{gen} \quad (\text{C.10})$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] + q_{gen} \quad (\text{C.11})$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) q_\theta) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \right) \right] + q_{gen} \quad (\text{C.12})$$

C.3. Ecuación de conducción en función de las propiedades de transporte, para k constante y uniforme

$$[\rho C_p dT/Dt = k \nabla^2 \cdot \mathbf{T} + q_{gen}]$$

Coordenadas rectangulares (x, y, z)

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_{gen} \quad (\text{C.13})$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + q_{gen} \quad (\text{C.14})$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right) \right] + q_{gen} \quad (\text{C.15})$$

C.4. Ecuación de energía en función de las propiedades de transporte de fluidos con ρ , C_p y k constantes

$$[\rho C_p D\mathbf{T}/Dt = k \nabla^2 \cdot \mathbf{T} + q_{gen}]$$

Coordenadas rectangulares (x, y, z)

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_{gen} \quad (\text{C.16})$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + q_{gen} \quad (\text{C.17})$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin(\theta)} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = k \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] + q_{gen} \quad (\text{C.18})$$

C.5. Ecuación de energía en función del flux de calor q

$$[\rho C_p D\mathbf{T}/Dt = -\nabla \cdot \mathbf{q} - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) + q_{gen}]$$

Coordenadas rectangulares (x, y, z)

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + q_{gen} \quad (\text{C.19})$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + q_{gen} \quad (\text{C.20})$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin(\theta)} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin(\theta)) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \right] - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin(\theta)) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + q_{gen} \quad (\text{C.21})$$