

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas



DOS DEMOSTRACIONES DE UNA PROPIEDAD DEL CONJUNTO DE JULIA DE FUNCIONES ENTERAS TRASCENDENTES

Tesis que para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas

Presenta

Lizzeth Trujillo Santamaría

Directora de Tesis

Dra. Patricia Domínguez Soto

Puebla, Pue.

Diciembre 2014

Agradecimientos

A mis padres, Luisa y Juan, por todo su amor, comprensión, ayuda y apoyo; por sus palabras de aliento en el transcurso de la licenciatura y a lo largo de mi vida. Gracias por estar incondicionalmente.

A mis hermanos, Iveth, Lizbeth y Juan, porque en el exterior crecemos pero nos conocemos como siempre y siempre permaneceremos.

A mi familia, por brindarme su apoyo y hacerme saber que todo es posible. Por aquellos que ya no están sin embargo nunca se han alejado de mí.

A Juan Ángel, porque nos encontramos en el mismo tiempo y espacio. Llegaste no antes ni después: llegaste a tiempo. Gracias por tu amor y paciencia.

A mi directora de tesis, Dra. Patricia Domínguez Soto, por el tiempo y espacio dedicado a la realización de esta tesis. Gracias por todo el apoyo brindado, por sus enseñanzas, sus conocimientos, su paciencia, sus consejos y su ánimo.

A M. C. Iván Hernández Orzuna, por el tiempo dedicado a mis dudas, por su paciencia; por sus asesorías y sus consejos.

A mis sinodales, Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna y M. C. Julio Erasto Poisot Macías, por aceptar serlo y por su tiempo dedicado a la revisión de esta tesis.

A mis amigos y compañeros, por los momentos y experiencias compartidas más allá de la carrera.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haber financiado esta tesis.

Índice general

1. Agradecimientos	III
Introducción	3
Preliminares	5
2. Números Complejos	5
2.1. Forma polar de un número complejo	8
2.2. Raíz de un número complejo	10
3. Proyección Estereográfica	10
4. Topología del plano Complejo	18
5. Funciones de variable compleja	21
5.1. Continuidad y límite de una función	21
5.2. Continuidad Uniforme	22
5.3. Sucesión de funciones complejas	22
6. Funciones holomorfas	23
6.1. Singularidades y su clasificación	26
6.2. Fórmula de la Integral de Cauchy	26
Familias Normales	29
7. Equicontinuidad	31
Funciones de clase \mathcal{E}	39
8. Funciones Enteras	39
9. Iteración y Puntos Fijos	40
Conjunto de Fatou y Conjunto de Julia	45
10. Componentes del conjunto de Fatou	46
10.1. Clasificación de componentes periódicas	47

El conjunto de puntos periódicos repulsores es denso en $J(f)$ 49

Introducción

Si f es una función racional, de grado al menos 2, o una función trascendente entera llamaremos *conjunto de Fatou* denotado por $F(f)$, al conjunto de puntos cercanos donde la sucesión de iteradas f^n forma una familia normal y a su complemento, denotado por $J(f)$, *conjunto de Julia*, rigurosamente hablando, la dinámica es *estable* en el *conjunto de Fatou* y es *caótica* en el *conjunto de Julia*. Las propiedades de los conjuntos $F(f)$ y $J(f)$ fueron establecidas para funciones racionales por Gaston Julia (1893-1978) en *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles* [10] y Pierre Fatou (1878-1929) en *Sur les équations fonctionnelles* [22] en los años 1918 y 1920 respectivamente, y para las funciones enteras trascendentes por Fatou en *Sur l'itération des fonctions transcendentes entières* [23], en 1926. Fatou estudió la iteración de funciones enteras trascendentes dando ejemplos donde surgían significativas diferencias a la teoría que había sido desarrollada hasta ese entonces para funciones racionales. Él realizó la siguiente pregunta fundamental para f una función entera trascendente:

¿Los puntos periódicos repulsores de f son densos en $J(f)$?

La pregunta es de gran importancia teórica, y fue respondida afirmativamente para funciones racionales por los matemáticos Fatou y Julia. Esta pregunta también fue respondida de forma afirmativa por Baker, en su trabajo *Repulsive fixpoints of entire functions* [11] en 1968, el cual es de importancia fundamental en la dinámica compleja. Aquí, Baker usa un teorema profundo de Ahlfors de la teoría de superficies cubrientes para demostrar que cerca de cada punto de $J(f)$ hay un punto periódico repulsor de f . Más adelante, en 1997, Detlef Bargmann en [8] también demuestra que el conjunto $J(f)$ es la clausura de todos los puntos periódicos repulsores para f entera usando el Lema de Zalcman y el teorema de Montel Caratheodory. En esta tesis se presentan dos demostraciones de la preguntas que Fatou

formuló. Ambas demostraciones utilizan métodos distintos, la primera esta basada en la demostración de Baker pero sin utilizar teoria de Nevalinna y la segunda esta basada en la de Bargamann, es decir, utilizaremos el Lema de Zalcman.

Preliminares

En este primer capítulo recordaremos algunos conceptos básicos de la Variable Compleja que serán de gran utilidad para el entendimiento y la comprensión de los capítulos consecuentes de esta tesis. Estos temas así como sus resultados pueden ser consultados en [5], [3], [17], [6], [2], [16] y [12].

1. Números Complejos

Empezaremos recordando algunos conceptos de Variable Compleja.

Sea $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, con $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$, como un vector.

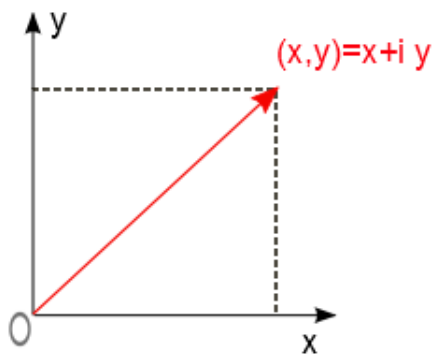


Figura 1: Plano \mathbb{R}^2 .

Como parejas ordenadas (x, y) , (y, x) son diferentes, es decir, si $x \neq y$ entonces $(x, y) \neq (y, x)$.

Ahora, sea \mathbb{C} el conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales, definiremos las operaciones de adición $+$ y multiplicación \cdot de la siguiente manera:

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w) \quad (1)$$

$$(x, y) \cdot (z, w) = (xz - yw, xw + yz). \quad (2)$$

Se pueden verificar las siguientes propiedades de la adición y la multiplicación en \mathbb{C} :

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (\text{conmutatividad suma}) \quad (3)$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad (\text{asociatividad suma}) \quad (4)$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad (\text{conmutatividad producto}) \quad (5)$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \quad (\text{asociatividad producto}) \quad (6)$$

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \quad (\text{distributiva}) \quad (7)$$

Además, existe un elemento único $0 \in \mathbb{C}$, a saber $0 = (0, 0)$, tal que

$$z_1 + 0 = z_1, \quad \forall z_1 \in \mathbb{C},$$

y existe un único $\omega = (1, 0)$, tal que

$$z_1 \cdot \omega = z_1, \quad \forall z_1 \in \mathbb{C}.$$

Definición 1. El conjunto \mathbb{C} será el *conjunto de los números complejos*, y a los elementos de \mathbb{C} los llamaremos *números complejos*.

Si $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, entonces el número real x se llama la *parte real*, y el número real y la *parte imaginaria* del número complejo z , con notación: $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$.

Si denotamos por i al número $(0, 1)$ de (2) se deduce que $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, es decir, $i^2 = -1$. El número i , llamado la *unidad imaginaria*, resulta ser una raíz cuadrada de -1 .

Ahora, consideremos un número complejo cualquiera $z = (x, y)$, este se puede representar de la forma:

$$z = x + iy,$$

particularmente $0 = 0 + i0$.

Las diferentes operaciones algebraicas definidas en el conjunto de los números complejos se pueden ver como siguen:

$$(x + iy) + (z + iw) = (x + z) + (y + w)i \quad (\text{suma}) \quad (8)$$

$$(x + iy)(z + iw) = (xz - yw) + (xz + yz)i \quad (\text{producto}) \quad (9)$$

$$(x + iy) - (z + iw) = (x - z) + (y - w)i \quad (\text{resta}) \quad (10)$$

$$\frac{x + iy}{z + iw} = \frac{xz + yw}{z^2 + w^2} + \frac{yz - xw}{z^2 + w^2}i \quad (\text{si } z^2 + w^2 > 0) \quad (11)$$

Con las operaciones de suma y producto definidas anteriormente, \mathbb{C} tiene estructura de campo.

Definición 2. El *conjugado* \bar{z} de un número complejo $z = (x, y) = x + iy$ es el número $\bar{z} = (x, -y) = x - yi$.

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad (12)$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad (13)$$

$$\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w} \quad (14)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad (w \neq 0) \quad (15)$$

$$\overline{\bar{z}} = z \quad (16)$$

$$z \text{ es número real} \iff z = \bar{z} \quad (17)$$

Definición 3. El *módulo o valor absoluto* $|z|$ de un número complejo $z = (x, y) = x + iy$ es el número real $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces se cumplen las propiedades siguientes:

$$|z| \geq 0, |z| = 0 \iff z = 0 \quad (18)$$

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \quad (19)$$

$$|\bar{z}| = |-z| = |z| \quad (20)$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} \quad (21)$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (22)$$

La desigualdad (22) se conoce como la *desigualdad del triángulo*.

Para $z, w \in \mathbb{C}$, pongamos $d(z, w) = |z - w|$, la *distancia* entre z y w , y satisfice:

$$d(z, w) = 0 \iff z = w \quad (23)$$

$$d(z, w) = d(w, z) \quad (24)$$

$$d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \geq d(z_1, z_3). \quad (25)$$

Poniendo al plano complejo \mathbb{C} y a la métrica $d(z, w)$ con $z, w \in \mathbb{C}$ tenemos que $(\mathbb{C}, d(z, w))$ forma un espacio métrico.

1.1. Forma polar de un número complejo

Para cualquier número complejo $z = x + iy$ distinto de cero, es decir, $r = |z| \neq 0$, y θ el ángulo (en radianes), formado por la dirección positiva del eje real y por el vector $\vec{0z}$.

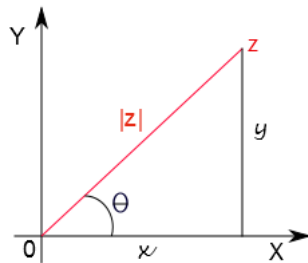


Figura 2: Forma Polar de z .

Este ángulo θ está determinado por z salvo múltiplos enteros de 2π y se llama *argumento* $\arg(z)$ de z . Tomemos $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, ahora todo número $z = x + iy \neq 0$ se puede escribir en la forma $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Hay infinitos valores de θ ; a cualquiera de ellos lo llamaremos *argumento* de z . Al conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo, z , se representa por $\text{Arg}(z)$. Los números r , $\theta = \arg(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ se llaman las *coordenadas polares* de z y $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ se llama la *representación polar* de z . Véase el ejemplo 1.

Ejemplo 1. Sea $z = -1 + i$, entonces $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y $\text{Arg}(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$, y todos los argumentos θ de $-1 + i$ están dados por la fórmula $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, en donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ así, la representación polar de $-1 + i$ es $-1 + i = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$.

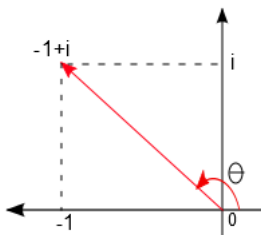


Figura 3: Forma Polar de z .

Definición 4. Para un número complejo $z = x + iy$ el valor de e^z está dado por la fórmula

$$e^z = e^x (\cos y + i\sin y)$$

Para $z = iy$ nos da $e^{iy} = \cos y + i\sin y$, ya que $e^0 = 1$. Por lo tanto, se puede escribir en la forma

$$z = re^{i\theta} \quad (r = |z|, \quad \theta = \arg(z)).$$

A continuación algunas propiedades que cumple e^z :

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad (26)$$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z} \quad (27)$$

$$e^z \neq 0 \text{ para todo } z \quad (28)$$

$$|e^z| = e^x, \quad y = \arg(e^z) \quad (29)$$

$$e^z = 1 \iff z = 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (30)$$

1.2. Raíz de un número complejo

Si z es un número complejo no nulo, θ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $n\theta \in \text{Arg}(z^n)$, es decir:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

Esta última conocida como la *fórmula de Moivre*. Esta ecuación se puede utilizar para encontrar las raíces de un número complejo como sigue:

$$z_k = |z|^{1/n} \left(\cos \left(\frac{\arg(z) + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\arg(z) + 2k\pi}{n} \right) \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$$z_k = r^{1/n} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

2. Proyección Estereográfica

Sea \mathcal{P} el plano complejo y consideremos una esfera unidad \mathbb{S}^2 de radio uno centrada en el origen. Y sea \mathcal{N} el punto $(0, 0, 1)$ de dicha esfera; a este punto lo llamaremos *polo norte*. Identifiquemos al plano complejo \mathbb{C} con el hiperplano

$$\{U = 0\} : z \in \mathbb{C}, \quad z = (x + iy) \mapsto (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$$

Tomemos una recta que proyecte al punto *polo norte* a cualquier otro punto, digamos (x, y, u) de la esfera \mathbb{S}^2 , esta recta corta a \mathbb{C} en solo un punto ω de dicha esfera y podemos representar cualquier número complejo por un punto sobre la esfera. Decimos que el punto \mathbf{N} corresponde al punto *infinito*

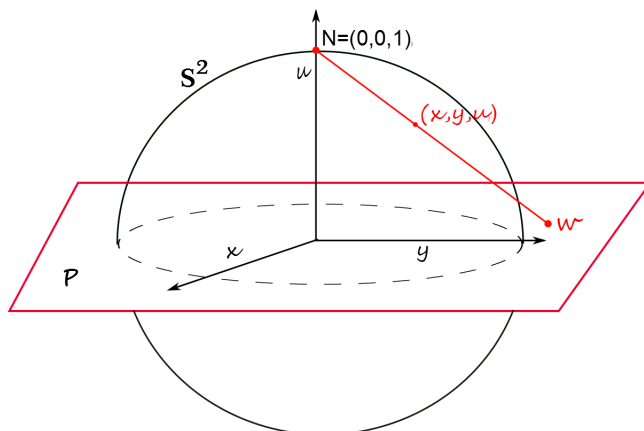


Figura 4: Proyección estereográfica.

del plano. El conjunto de todos los puntos del plano, incluyendo el punto en el infinito, reciben el nombre de *plano complejo* o el *plano complejo extendido* \mathbb{C}_∞ . Para encontrarlo hagamos lo siguiente:

Consideremos la línea que va de un punto $(x, y, u) \in \mathbb{S}^2$ al polo norte $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$, como hemos mencionado esta línea cruza a \mathbb{C} en un único punto. Parametrizando se tiene:

Si $t \in \mathbb{R}$ es tal que $[N + t((x, y, u) - N)] \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= [N + t((x, y, u) - N)] \\ &= (0, 0, 1) + t[(x, y, u - 1)] \\ &= (0, 0, 1) + (tx, ty, t(u - 1)) \\ &= (tx, ty, 1 + t(u - 1)), \end{aligned}$$

donde $1 + t(u - 1) = 0$, debido a la identificación que hicimos del plano \mathbb{C} con el hiperplano $U = 0$, por tanto

$$t = \frac{1}{1 - u}.$$

Así, para $\omega \in \mathbb{C}$ obtenemos que

$$\omega = \left(\frac{x}{1-u}, \frac{y}{1-u}, 0 \right) = \frac{x}{1-u} + i \frac{y}{1-u} = \frac{x+iy}{1-u}$$

Si $z = \frac{x+iy}{1-u}$, entonces

$$|z|^2 = \left| \frac{x+iy}{1-u} \right|^2 = \frac{|x+iy|^2}{|1-u|^2} = \frac{x^2+y^2}{(1-u)^2},$$

como $(x, y, u) \in \mathbb{S}^2 \setminus N$ se cumple que $x^2+y^2+u^2=1$, es decir $x^2+y^2=1-u^2$

$$\frac{x^2+y^2}{(1-u)^2} = \frac{1-u^2}{(1-u)^2} = \frac{(1-u)(1+u)}{(1-u)(1+u)} = \frac{1+u}{1-u},$$

tenemos que

$$|z|^2 = \frac{1+u}{1-u}.$$

Ahora despejaremos u :

$$\begin{aligned} |z|^2(1-u) &= 1+u \\ |z|^2 - |z|^2 u &= 1+u \\ |z|^2 - 1 &= u + u|z|^2 = u(1+|z|^2) \\ u &= \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \end{aligned}$$

También,

$$z + \bar{z} = \frac{x+iy}{1-u} + \frac{x-iy}{1-u} = \frac{2x}{1-u}$$

entonces,

$$\begin{aligned} (z + \bar{z})(1-u) &= 2x \\ x &= \frac{(z + \bar{z})(1-u)}{2} = \frac{(z + \bar{z})}{2} \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2} + 1 \right) \\ &= \frac{(z + \bar{z})}{2} \left(\frac{|z|^2 + 1 - |z|^2 + 1}{|z|^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

se sigue que

$$x = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}$$

y para y ,

$$z - \bar{z} = \frac{x + iy}{1 - u} - \frac{x - iy}{1 - u} = \frac{2iy}{1 - u}.$$

Así,

$$\begin{aligned} (z - \bar{z})(1 - u) &= 2iy \\ y &= \frac{(z - \bar{z})(1 - u)}{2i} = \frac{(z - \bar{z})}{2i} \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \\ &= \frac{(z - \bar{z})}{2i} \left(\frac{|z|^2 + 1 - |z|^2 + 1}{|z|^2 + 1} \right) = \frac{(z - \bar{z})}{2i} \left(\frac{2}{|z|^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

esto es,

$$y = \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}.$$

Finalmente,

$$(x, y, u) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

A continuación obtendremos en términos de z y ω , puntos del plano complejo, una fórmula de la distancia entre sus proyecciones en la esfera.

Si denotamos éstas por (x_1, x_2, x_3) y (y_1, y_2, y_3) , se tiene

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

dado que (x_1, x_2, x_3) y (y_1, y_2, y_3) se encuentran en la esfera se cumple que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$$

entonces nuestra última igualdad resulta $2 - 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$, de donde $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 =$

$$\begin{aligned} &\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \cdot \frac{\omega + \bar{\omega}}{|\omega|^2 + 1} + \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)} \cdot \frac{\omega - \bar{\omega}}{i(|\omega|^2 + 1)} + \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \cdot \frac{|\omega|^2 - 1}{|\omega|^2 + 1} \\ &= \frac{(z + \bar{z})(\omega + \bar{\omega}) - (z - \bar{z})(\omega - \bar{\omega}) + (|z|^2 - 1)(|\omega|^2 - 1)}{(|z|^2 + 1)(|\omega|^2 + 1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2z\bar{\omega} + 2\bar{z}\omega + |z\omega|^2 - |\omega|^2 - |z|^2 + 1}{(|z|^2 + 1)(|\omega| + 1)}$$

agregamos un “cero ”

$$= \frac{2z\bar{\omega} + 2\bar{z}\omega + |z\omega|^2 - |\omega|^2 - |z|^2 + |z|^2 + |\omega|^2 - |z|^2 - |\omega|^2 + 1}{(|z|^2 + 1)(|\omega| + 1)}$$

realizando operaciones y recordando algunas propiedades del valor absoluto de un número complejo obtenemos,

$$= 1 - 2 \frac{(z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega})}{(1 + |z|^2)(1 + |\omega|^2)}.$$

Por tanto

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 1 - 2 \frac{(z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega})}{(1 + |z|^2)(1 + |\omega|^2)}.$$

Así,

$$\begin{aligned} 2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) &= 2 - 2 \left(1 - 2 \frac{(z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega})}{(1 + |z|^2)(1 + |\omega|^2)} \right) \\ &= 2 - 2 + 4 \frac{(z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega})}{(1 + |z|^2)(1 + |\omega|^2)} = 4 \frac{(z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega})}{(1 + |z|^2)(1 + |\omega|^2)} \\ &= 4 \frac{|z - \omega|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |\omega|^2)}. \end{aligned}$$

Concluyendo así:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} &= \sqrt{4 \frac{|z - \omega|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |\omega|^2)}} \\ &= \frac{2|z - \omega|^2}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |\omega|^2}}. \end{aligned}$$

En éste caso, si $\omega = \infty$,

$$\begin{aligned} x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 &= x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1 = x_3 \\ &= \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} &= \sqrt{2 - 2 \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{4}{|z|^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Todos estos calculos inducen una métrica en $\hat{\mathbb{C}}$.

Definición 5. Dados $z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$, definimos la métrica en $\hat{\mathbb{C}}$, a la que llamaremos a la que llamaremos *métrica cordal* o *métrica esférica* de la siguiente manera

$$d_\chi(z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)}\sqrt{(1+|z_2|^2)}} & \text{si } z_1 \neq \infty, z_2 \neq \infty; \\ \frac{2}{\sqrt{(|z_1|^2+1)}} & \text{si } z_2 = \infty; \\ 0 & \text{si } z_1 = z_2 = \infty. \end{cases}$$

De esta manera a la esfera S^2 se le considera un subespacio métrico de \mathbb{R}^3 con la métrica heredada η . El término *cordal* proviene de que se miden cuerdas en la esfera

$$d_\chi(z_1, z_2) = |\pi(z_1), \pi(z_2)|.$$

Proposición 1. La métrica esférica y la métrica euclideana inducen la misma topología en \mathbb{C} , es decir definen los mismos abiertos en \mathbb{C} .

Demostración. Para esta demostración tomemos lo siguiente

1. Sea

$$\begin{aligned} \Psi : S^2 (0, 0, 1) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}. \end{aligned}$$

Demostraremos que Ψ es una biyección, esto es,

(a) Ψ es *inyectiva* y

(b) Ψ es *sobreyectiva*.

(a) Por demostrar primero que Ψ es *inyectiva*.

Para probarlo construyamos su inversa. Tomemos $z = \Psi(x_1, x_2, x_3)$, haciendo calculos similares a los anteriores tenemos lo siguiente:

$$|z|^2 = \left| \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \right|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

despejando x_3 obtenemos

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

despejando x_1 ,

$$x_1 = \frac{(z + \bar{z})(1 - x_3)}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2} \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \frac{z + \bar{z}}{2} \left(\frac{2}{|z|^2 + 1} \right)$$

obtenemos,

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}.$$

Haciendo cálculos análogos para x_2 , obtenemos:

$$x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}.$$

Por lo tanto, Ψ es inyectiva, porque z determina al punto (x_1, x_2, x_3) .

(b) Ahora demostraremos que Ψ es *sobreyectiva*.

Esto es, demostraremos que dado $z \in \mathbb{C}$, $\pi(z) \in \mathbb{S}^2$.

Pongamos $\pi(z) = \rho = (y_1, y_2, y_3)$ y $\Psi(\rho) = z'$.

De $y_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$ tenemos que

$$(|z|^2 + 1) \cdot y_3 = |z|^2 - 1$$

$$|z|^2 \cdot y_3 + y_3 - |z|^2 = -1$$

$$|z|^2 = \frac{1 + y_3}{1 - y_3} = |z'|^2.$$

De

$$\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} = \frac{2}{|z|^2 + 1} \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1} = \frac{2\operatorname{Re}(z')}{|z|^2 + 1} = y_1.$$

y de

$$\frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)} = \frac{2}{|z|^2 + 1} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1} = \frac{2\operatorname{Im}(z')}{|z|^2 + 1} = y_2$$

Así,

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$$

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z'), \operatorname{Im}(z') = \operatorname{Im}(z), \text{ i.e. } z' = z.$$

Así, Ψ es sobreyectiva y π es su inversa.

2. Ahora definamos las funciones identidad:

$$I_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z,$$

y la siguiente función

$$I_{\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}} : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}.$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$$

Demostraremos que

(a) $\Psi \circ \pi = I_{\mathbb{C}}$ y

(b) $\pi \circ \Psi = I_{\mathbb{S}^2}$

(a) $\Psi \circ \pi = I_{\mathbb{C}}$.

Sea $z \in \mathbb{C}$, tomemos $\Psi \circ \pi$

$$\begin{aligned} \Psi \circ \pi(z) &= \Psi(\pi(z)) = \Psi \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \\ &= \frac{\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} + i \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}}{1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}} \\ &= z. \end{aligned}$$

De lo que se concluye que $\Psi \circ \pi = I_{\mathbb{C}}$.

(b) $\pi \circ \Psi = I_{\mathbb{S}^2}$.

Sea $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ y tomemos $\pi \circ \Psi$

$$\begin{aligned} \pi \circ \Psi(x_1, x_2, x_3) &= \pi(\Psi(x_1, x_2, x_3)) \\ \pi\left(\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}\right) &= \left(\frac{\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} + \overline{\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}}}{\left|\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}\right|^2 + 1}, \frac{\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} - \overline{\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}}}{\left|\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}\right|^2 + 1}, \frac{\left|\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}\right|^2 - 1}{\left|\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}\right|^2 + 1} \right) \\ &= (x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\pi \circ \Psi = I_{\mathbb{S}^2 \setminus (0,0,1)}$.

3. La función identidad

$$Id : \mathbb{C}_E \rightarrow \mathbb{C}_\chi,$$

donde \mathbb{C}_E es el plano complejo provisto con la métrica euclidiana, y \mathbb{C}_χ el plano complejo con la métrica cordal es bicontinua.

Si $|z_n - z| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces dado que la función π es continua $|\pi(z_n) - \pi(z)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, lo cual prueba que la función Id es también continua. Ahora, porque Ψ es continua tenemos que si $d_\chi(z_n, z) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$|\pi(z_n) - \pi(z)| \rightarrow 0$$

y

$$|\Psi\pi(z_n) - \Psi\pi(z)| = |z_n - z| \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto la función Id es bicontinua.

De 1, 2 y 3 tenemos que la métrica esférica y la métrica euclideana inducen la misma topología en \mathbb{C} . ■

3. Topología del plano Complejo

Definición 6. Para un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y un número real $r > 0$, definimos el *disco o bola* de radio r con centro z_0 por

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

En particular, cuando $z_0 = 0$, ponemos

$$B(r) = B(0, r),$$

y a $B(1)$ la llamaremos el *disco unitario*.

Definición 7. Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ se dice *acotado* si existe $r > 0$ con $A \subset B(r)$.

El conjunto A se dice *abierto* si para cualquier $a \in A$ existe un $r > 0$ con $B(a, r) \subset A$.

Definición 8. Un punto z_0 de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ se llama *punto interior* de A si existe una vecindad $B(z_0, r)$ de z_0 tal que $B(z_0, r) \subset A$. El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama el *interior* de A y se denota por $\text{int}(A)$. A será un conjunto abierto si $A = \text{int}(A)$.

Teorema 1. 1. La unión de una *familia cualquiera* de conjuntos abiertos es también un conjunto abierto.

2. La intersección de un *número finito* de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Ejemplo 2. El anillo $S = \{z : 1 < |z| < 2\}$ es un conjunto abierto.

Ejemplo 3. Toda vecindad $B(z_0, r)$ de un punto z_0 es un conjunto abierto.

Definición 9. Un conjunto S se llama *cerrado* si el complemento de S : $S^c = \{z : z \in S\}$ es abierto.

Observemos que es posible que un conjunto sea abierto y cerrado al mismo tiempo, como lo es en el caso del conjunto \emptyset y de todo plano complejo \mathbb{C} .

Ejemplo 4. El conjunto $S = \{z : |z - z_0| \leq r\}$, donde $r > 0$ es cerrado, porque su complemento es el conjunto abierto $\text{int}(S) = \{z : |z - z_0| > r\}$.

Teorema 2. 1. La intersección de una *familia cualquiera* de conjuntos cerrados es también un conjunto cerrado.

2. La unión de un *número finito* de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Definición 10. Un punto z_0 se llama *punto de acumulación* de un conjunto A si cada vecindad $B(z_0, r)$ contiene un punto de A diferente de z_0 .

Ejemplo 5. $z = 1$ es un punto de acumulación del círculo $S = \{z : |z| < 1\}$, sin embargo $1 \notin S$.

En caso de ser S cerrado, todo punto de acumulación de S pertenece a S . Si denotamos con \bar{S} la unión de S con el conjunto de sus puntos de acumulación, entonces

Teorema 3. S es cerrado si, y sólo si, $S = \bar{S}$.

El conjunto \bar{S} se llama la *cerradura* o la *adherencia* de S .

Definición 11. Sea A un subconjunto de un conjunto $S \subset \mathbb{C}$. A se llama *abierto* en S , si existe un conjunto abierto B tal que $A = B \cap S$.

Definición 12. Un conjunto S se llama *conexo* si no existen conjuntos no vacíos H_1, H_2 y abiertos en S , tales que:

1. $H_1 \cap H_2 = \emptyset$
2. $H_1 \cup H_2 = S$

El conjunto \mathbb{C} de todos los números complejos es conexo. Así mismo, es inmediato que esto es equivalente a decir que en \mathbb{C} los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados al mismo tiempo son \emptyset y \mathbb{C} .

Ejemplo 6. El círculo abierto $S = \{z : |z| < 1\}$ es conexo.

Definición 13. Se llama *dominio* a todo conjunto abierto y conexo del plano complejo.

Ejemplo 7. El círculo $S = \{z : |z - z_0| < r\}$, $r > 0$ es un dominio.

Ejemplo 8. Los semiplanos $A = \{z = x + iy : x > 0\}$ y $B = \{z = x + iy : x < 0\}$ son ambos dominios.

Definición 14. Un conjunto se llama *compacto* si es a la vez cerrado y acotado.

Teorema 4 (Baire). [8] Sea (X, d) un espacio métrico completo. Sea \mathcal{Q} un conjunto numerable de subconjuntos abiertos y densos de X . Entonces $\bigcap \{Q : Q \in \mathcal{Q}\}$ es también denso.

4. Funciones de variable compleja

Definición 15. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, a toda función compleja $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ se le asocian dos funciones reales: la función $u = \operatorname{Re}(f)$ parte real de f y la función $v = \operatorname{Im}(f)$ parte imaginaria de f definida para todo $(x, y) = x + iy \in A$ por:

$$u = (x, y) = \operatorname{Re} \{f(x + iy)\}, \quad v(x, y) = \operatorname{Im} \{f(x + iy)\}.$$

Naturalmente $f(z) = \operatorname{Re} \{f(z)\} + i \operatorname{Im} \{f(z)\}$.

Si $D \subset A$, entonces $f(D) = \{w : w = f(z), z \in D\}$, es el conjunto de las imágenes de los elementos $z \in D$, se llama la *imagen de D bajo f* .

Definición 16. La *función conjugada de f* es la función \bar{f} dada por $\bar{f}(z) = \operatorname{Re} \{f(z)\} - i \operatorname{Im} \{f(z)\}$. La *función módulo de f* es la función $|f|$ dada por $|f|(z) = |f(z)|$.

Ejemplo 9. Sea $f(z) = |z|$, $f(z)$ es una función de dominio \mathbb{C} y su conjunto imagen los números reales mayores o iguales a cero.

Definición 17. Diremos que una función $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es acotada sobre D si satisface que

$$\sup \{|f(s)| : s \in D\} < \infty.$$

4.1. Continuidad y límite de una función

Definición 18. Se dice que la función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es *continua* en un punto $a \in A$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$z \in A, |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \epsilon.$$

Una función compleja es continua en a sí, y sólo si, las funciones $\operatorname{Re}(f)$ y $\operatorname{Im}(f)$ son continuas en a .

Definición 19. Decimos que el número l es el límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 y escribimos $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ si dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que depende de ϵ) tal que $|f(z) - l| < \epsilon$ cuando $|z - z_0| < \delta$.

Teorema 5. Cuando el límite existe, es único.

Teorema 6. Sean $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$

$$(a) \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = A + B.$$

$$(b) \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = A \cdot B.$$

$$(c) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}.$$

4.2. Continuidad Uniforme

Definición 20. Una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es *uniformemente continua* en A , si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(w)| < \epsilon$ siempre que z, w estén en A y $|z - w| < \delta$.

Proposición 2. Una función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua.

4.3. Sucesión de funciones complejas

Sea D un subconjunto de \mathbb{C} . Sea \mathcal{F} el espacio de funciones complejas de $D \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{C} . Una *sucesión de funciones complejas* es una aplicación

$$f : n \in \mathbb{N} \rightarrow f(n) = f_n \in \mathcal{F},$$

que suele representarse como $\{f_n\}$.

Definición 21. Sea $\{f_n\}$ una sucesión, llamaremos *subsucesión de $\{f_n\}$* a una sucesión $\{f_{n_i}\}$ donde $n_i < n_{i+1}$.

Definición 22. Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones complejas definidas en D . Decimos que $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge* a $z \in D$ si la sucesión $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ de números es convergente. Si $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ converge para toda $z \in D$, entonces $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ se dice que converge a D , y la función $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ en $z \in D$ es llamado la *función límite* de $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Definición 23. Diremos que $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge uniformemente* a f si para un arbitrario $\epsilon > 0$ existe un número n_0 tal que para toda $n \geq n_0$ y $z \in D$

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Definición 24. Una sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge uniformemente a ∞* si dado $\epsilon > 0$, $|f_{n_k}(z)| \geq \epsilon$ para $k \geq k_0$ y para toda $z \in D$.

Definición 25. Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones en un dominio D converge de forma *localmente uniformemente* a una función límite f si ésta converge uniformemente en cada subconjunto compacto $K \subset D$.

Definición 26. Un conjunto \mathcal{F} de funciones es acotada *local y uniformemente* en un dominio D si para cada subconjunto compacto $K \subset D$ hay una constante $M(K) < \infty$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ y para toda $z \in K$,

$$|f(z)| < M(K).$$

Definición 27. Una sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ de funciones complejas en D se dice *uniformemente acotada* si existe un $M > 0$ tal que para todo n y $z \in A$

$$|f_n(z)| \leq M.$$

Definición 28. Una región es *simplemente conexa* si su complemento con respecto al plano extendido es conexo. Más generalmente una región es simplemente conexa si y sólo si $\eta(\gamma, \alpha) = 0$ para todos los ciclos γ en Ω y todos los puntos α que no pertenecen a Ω .

Definición 29. Un conjunto F de funciones es *localmente uniformemente acotada* en un dominio D si para cada subconjunto compacto $K \subset D$ hay una constante $M(K) < \infty$ tal que para toda $f \in F$ y para toda $z \in K$, $|f(z)| \leq M(K)$.

5. Funciones holomorfas

Definición 30. Sea D un conjunto abierto de \mathbb{C} , y sea f una función en D . Diremos que f es *complejo-diferenciable* en un punto $a \in D$ si existe un número $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ con

$$\left| \frac{f(a+z) - f(a)}{h} - \alpha \right| < \epsilon.$$

para todo $h \in \Delta(\delta) \setminus \{0\}$. Llamaremos a α la *derivada compleja* de f en a , y la denotaremos por $f'(a) = \frac{df}{dz}(a)$.

Si f es complejo-diferenciable en a , entonces f es continua en a .

Definición 31. Una función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es *holomorfa* en D si es diferenciable para todo $z \in D$. En este caso la función $f' : z \in D \rightarrow f'(z) \in \mathbb{C}$ se llama la *función derivada* o la *derivada de f* , y se denota por df/dz .

Sean f, f_1, f_2 holomorfas y a_1, a_2 constantes, entonces se cumplen:

1. Si f es holomorfa, entonces $1/f$ también lo es fuera del conjunto $\{f = 0\}$,
y

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

2. $(a_1 f_1 + a_2 f_2)' = a_1 f_1' + a_2 f_2'$
3. [Leibniz formula] $(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'$.

Teorema 7. Para que una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definida en una región θ sea derivable en un punto z de esta región como función de variable compleja es necesario y suficiente que las funciones $u(x, y)$, $v(x, y)$ sean derivables en este punto y además se cumplen las condiciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (31)$$

y la derivada se expresa:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

A las ecuaciones en (31) se les llaman *Ecuaciones de Cauchy-Riemann*.

Ejemplo 10. La función $f(z) = e^z$ tiene como derivada $f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sen y$.

Teorema 8. La composición de dos funciones holomorfas f y g es holomorfa, y

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) f'(z).$$

Definición 32. Una función $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica en D si para todo $z_0 \in D$ existen $r_0 > 0$ y una serie de potencias centrada en z_0 , $\sum_{n \in \mathbb{N}} z_n (z - z_0)^n$ tal que $B(z_0, r_0) \subset D$ y $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} z_n (z - z_0)^n$ para todo $z \in B(z_0, r_0)$.

Tomemos una serie de potencias convergente alrededor de $a \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

Sea $R > 0$ su *radio de convergencia*.

Teorema 9. La anterior $f(z)$ es una función holomorfa en $\Delta(a; R)$, y

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - a)^{n-1}.$$

Aquí el *radio de convergencia de la parte derecha* es R , también.

Corolario 1. Una función analítica es holomorfa.

Teorema 10. [5] Una función holomorfa f en D es analítica, y alrededor de un punto arbitrario $a \in D$ $f(z)$ es expandible a una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad z \in \Delta(a; d(a; \partial D)),$$

cuyo radio de convergencia no es menor que $d(a; \partial D)$.

Teorema 11. [5] Una función f es analítica si, y sólo si, es holomorfa.

Si $f'(z_0)$ existe entonces f es continua en z_0 .

Observemos que si f es continua entonces f es diferenciable.

Teorema 12. [5] Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en D que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D . Entonces la función límite f es holomorfa y

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(z), \quad z \in D, \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

La convergencia en el Teorema 13 es uniforme sobre subconjuntos compactos de D .

Teorema 13 (Del Módulo Mínimo). [20] Si $f(z)$ es holomorfa dentro y sobre una curva cerrada M y $f(z) \neq 0$ dentro de M , entonces $f(z)$ toma su valor mínimo sobre M .

Teorema 14 (Del Módulo Máximo). [20] Si $f(z)$ es holomorfa dentro y sobre una curva cerrada M y $f(z)$ no idénticamente igual a una constante, entonces el valor máximo de $|f(z)|$ ocurre sobre M .

5.1. Singularidades y su clasificación

Sea $G \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja.

Definición 33. Un punto $z \in G$ en el cual la función f no es analítica es llamado un *punto singular o singularidad de f* .

Definición 34. Una función f tiene una singularidad aislada en $z_0 \in G$ si f no es diferenciable en z_0 y existe $r > 0$ tal que f está definida y es analítica en $B(z_0, r)$.

Si z_0 es una singularidad aislada de f , entonces puede ser singularidad removible, polo o singularidad esencial:

- (i) Una singularidad aislada z_0 de f es una *singularidad removible* si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe y pertenece a \mathbb{C} .
- (ii) Una singularidad aislada z_0 de f es un *polo* si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

- (iii) Una *singularidad esencial* es una singularidad aislada que no es polo ni singularidad removible.

Definición 35. f tiene un *polo de orden m en z_0* si f tiene un polo en z_0 y m es el mínimo natural tal que $f(z)(z - z_0)^m$ tiene una singularidad removible en z_0 .

Definición 36. Un punto $z_0 \in G$, es un *valor omitido* o un *valor excepcional de Picard* de una función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ si, $f(z) \neq z_0$ para todo $z \in G$.

Teorema 15. [1] Si f tiene una singularidad removible en z_0 , entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe. Además, si se define $f(z_0)$ como este límite la función es analítica en un entorno de z_0 .

5.2. Fórmula de la Integral de Cauchy

Definición 37. Una trayectoria en una región $D \subset \mathbb{C}$ es una función continua $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ para algún intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$. Si $\gamma'(t)$ existe para cada $t \in [a, b]$ y $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua entonces γ es una trayectoria suave.

Teorema 16 (De Cauchy). [17] Si $f(z)$ es holomorfa en D entonces $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ para cada ciclo el cual es homólogo a cero en D .

Definición 38. Definiremos al *índice del punto a con respecto a la curva γ* por la ecuación

$$\eta(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}.$$

Observación 39. $\eta(-\gamma, a) = -\eta(\gamma, a)$.

Teorema 17. Supongamos que $f(z)$ es holomorfa en un disco abierto Δ , y sea γ una curva cerrada en Δ tal que $\eta(\gamma, a) \neq 0$ y $a \in \Delta$ la cual no cae sobre γ . Entonces,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - a}.$$

La fórmula anterior nos ayudará para el estudio de algunas propiedades locales de las funciones holomorfas.

La n -ésima derivada de $f(z)$ en $z = a$ está dada por la siguiente fórmula:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}.$$

A continuación veremos la *Desigualdad de Cauchy*.

Si $f(z)$ es holomorfa dentro y sobre un círculo C de radio r y centro en $z = a$, entonces

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde M es una constante tal que $|f(z)| < M$ sobre C , es decir, M es una cota superior de $|f(z)|$ sobre C .

Familias Normales

En este capítulo estudiaremos algunos resultados relacionados con Familias Normales, iniciando con la definición de convergencia normal en una sucesión de funciones para después revisar algunos resultados importantes que serán de ayuda para el tema principal de esta tesis. La referencia a este capítulo: [3], [17] y [14].

Definición 40. Sea

$$\mathbb{F} = \{f|A \rightarrow B\},$$

a $\mathcal{F} \subset \mathbb{F}$ le llamamos una *familia de funciones* de \mathbb{F} .

Definición 41. Diremos que \mathcal{F} esta *acotada puntualmente* en D si para cada z fijo en D , el conjunto de valores

$$\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$$

es un conjunto acotado de números complejos.

Definición 42. La familia \mathcal{F} es *localmente acotada* en D si cada $f \in \mathcal{F}$ es uniformemente acotada en cada conjunto compacto de D , es decir, existe para cada subconjunto compacto K de D una constante $m = m(K)$ con la propiedad $|f(z)| \leq m$ para cada punto $z \in K$ y cada función $f \in \mathcal{F}$.

Ahora enunciaremos algunos resultados.

Lema 1. [3] Supongamos que D es un conjunto abierto en el plano complejo y K un subconjunto compacto de D . Entonces existe un $r > 0$ tal que para cada $z \in K$ el disco $\Delta(z, r)$ está contenido en D .

Demostración. (Por contradicción). Sea $r > 0$ fijo. Si $D = \mathbb{C}$ el lema se cumple para cualquier $r > 0$ que tomemos. Supongamos que $D \neq \mathbb{C}$. Además,

para cada $r > 0$, existe $z \in K$ tal que $\Delta(z, r) \subset D$.

Si $r = 1$, existe $z_1 \in K$, $\Delta(z_1, 1) \not\subset D$, entonces $w_1 \in \Delta(z_1, 1)$ tal que $w_1 \notin D$.

Si $r = \frac{1}{2}$, existe $z_2 \in K$, $\Delta(z_2, \frac{1}{2}) \not\subset D$, entonces $w_2 \in \Delta(z_2, \frac{1}{2})$ tal que $w_2 \notin D$.

Si $r = \frac{1}{3}$, existe $z_3 \in K$, $\Delta(z_3, \frac{1}{3}) \not\subset D$, entonces $w_3 \in \Delta(z_3, \frac{1}{3})$ tal que $w_3 \notin D$.

⋮

Si $r = \frac{1}{n}$, existe $z_n \in K$, $\Delta(z_n, \frac{1}{n}) \not\subset D$, entonces $w_n \in \Delta(z_n, \frac{1}{n})$ tal que $w_n \notin D$.

Observemos que $w_n \in \mathbb{C} \setminus D$, $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$. Dado que K es compacto, la sucesión $\{z_n\}$ tiene un punto de acumulación en K . Sea z_0 tal punto, y sea $\{z_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{z_n\}$ con la propiedad $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = z_0$. Entonces

$$|w_{n_k} - z_0| \leq |w_{n_k} - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z_0| \leq \frac{1}{n_k} + |z_{n_k} - z_0| \rightarrow 0$$

cuando $k \rightarrow \infty$, así $\lim_{k \rightarrow \infty} w_{n_k} = z_0$. Esto lleva a que z_0 sea un punto de acumulación de $\{w_n\}$. Como $\{w_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{C} \setminus D$ y $\mathbb{C} \setminus D$ es un conjunto cerrado, entonces $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$. Por tanto, $z_0 \in K \cap (\mathbb{C} \setminus D)$, lo cual es imposible ya que K es un subconjunto de $D = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{C} \setminus D)$. ■

Definición 43. Una familia \mathcal{F} de funciones complejas se dice *normal en* D si cada sucesión $\{f_n\}$ de funciones $f_n \in \mathcal{F}$ contiene o una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}\}$ converge uniformemente, o bien una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que tiende uniformemente a ∞ en cada subconjunto compacto de D .

Nota 44. Si \mathcal{F} es una familia de funciones analíticas, entonces la función límite f , de $\{f_{n_k}\}$ es una función analítica o idénticamente ∞ .

Observación 45. La definición anterior no requiere que las funciones límite de las subsucesiones convergentes pertenezcan a la familia \mathcal{F} .

Por ejemplo, \mathcal{F} puede estar formada por todas las iteradas de $f(z) = z^2$, definidas sobre un abierto D contenido en S^1 ; para este caso la función límite es la función constante cero; no pertenece a \mathcal{F} y sin embargo es normal.

El siguiente lema será de gran ayuda para la comprensión de la convergencia normal de una sucesión de funciones.

Lema 2. [3] Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto abierto D . La sucesión converge normalmente en D sí, y sólo si converge uniformemente sobre cada disco cerrado contenido en D .

Demostración. (\implies) se cumple por definición de la convergencia normal. (\impliedby) Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre cada disco cerrado de D . Denotamos por f a la función límite. Sea $K \subseteq D$, compacto y no vacío. Demostraremos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre K . Sea $r > 0$ fijo tal que para cada $z \in K$ el disco $\bar{\Delta}(z, r)$ está contenido en D , y considerando el lema 1 escogemos un punto $z_1 \in K$, o K está contenido en $\Delta_1 = \bar{\Delta}(z_1, r)$, o podemos elegir un z_2 de $K \setminus \Delta_1$. Si sucede este último caso, sea $\Delta_2 = \bar{\Delta}(z_2, r)$. Entonces, o $K \in \Delta_1 \cup \Delta_2$, o podemos elegir un punto z_3 de $K \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$, y así sucesivamente. Después de un número finito de pasos, digamos p pasos llegamos a una colección $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$ de discos cerrados en D , cuya unión cubre a K . Dado que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en cada uno de los discos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$, la convergencia uniforme se da también en $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_p$, y por tanto en K . Se sigue que $f_n \rightarrow f$ normalmente en D . ■

Ejemplo 11. La familia de funciones $\{f_n(z) = \frac{z}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia normal en \mathbb{C} .

Ejemplo 12. Sea $f_n(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$. Entonces $\{f_n\}$ converge normalmente en $|z| < 1$.

6. Equicontinuidad

Definición 46. Las funciones de una familia \mathcal{F} se dicen *equicontinuas en un conjunto* $D' \subset D$ si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$

$$z, w \in D, |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \epsilon.$$

Observación 47. En este caso, cada $f \in \mathcal{F}$ es uniformemente continua.

Teorema 18. [5] Si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones complejas en D es uniformemente acotada y equicontinua sobre subconjuntos compactos de D , entonces contiene una subsucesión que converge uniformemente en subconjuntos compactos de D .

Teorema 19. [3] Supongamos que cada función de la sucesión $\{f_n\}$ es analítica en un conjunto abierto D y $\{f_n\}$ converge normalmente en D a la función límite f . Entonces f es analítica en D . Por otra parte, $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ normalmente en D para cada entero positivo k .

A continuación enunciaremos un teorema bastante útil que establece la relación entre la definición de equicontinuidad y normalidad de una familia de funciones complejas

Teorema 20 (Arzelà-Ascoli). [17] Una familia \mathcal{F} de funciones continuas definidas en una región D del plano complejo es normal sí, y sólo si

1. \mathcal{F} es equicontinua en cada subconjunto compacto $E \subset D$; y
2. Para cada $z \in D$, $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ se encuentra en un subconjunto compacto del plano.

Demostración. Probaremos la necesidad de 1. Si \mathcal{F} es equicontinua en E entonces existen un $\epsilon > 0$, sucesiones de puntos $z_n, z'_n \in E$ y funciones $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $|z_n - z'_n| \rightarrow 0$ si $|f_n(z_n) - f_n(z'_n)| \geq \epsilon$ para toda n . Dado que E es compacto podemos elegir subsucesiones de $\{z_n\}$ y $\{z'_n\}$ que converjan a un límite en común $z'' \in E$, y dado que \mathcal{F} es normal existe una subsucesión de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en E . Observemos que podemos elegir a las tres subsucesiones de tal forma que todas tengan los mismos subíndices n_k . La función límite f de $\{f_{n_k}\}$ es uniformemente continua en E . Por lo tanto podemos encontrar un k tal que las distancias de $f_{n_k}(z_{n_k})$ a $f(z_{n_k})$, de $f(z_{n_k})$ a $f(z'_{n_k})$, y de $f(z'_{n_k})$ a $f_{n_k}(z'_{n_k})$ son todas $< \epsilon/3$. Se sigue que $|f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(z'_{n_k})| < \epsilon$, contrariamente a la suposición de que $|f_n(z_n) - f_n(z'_n)| \geq \epsilon$ para toda n . Para la necesidad de 2. Mostraremos que la clausura del conjunto formado por todos los valores $f(z)$, $f \in \mathcal{F}$, es compacto. Sea $\{w_n\}$ una sucesión en dicha clausura. Para cada w_n fijamos $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $|f_n(z) - w_n| < 1/n$. Por la normalidad existe una subsucesión convergente $\{f_{n_k}(z)\}$, y la sucesión $\{w_{n_k}\}$ converge al mismo valor.

Para demostrar la suficiencia de 1 y 2 usaremos el proceso de la diagonal de Cantor. Primero observemos que por todas partes de D existe una sucesión densa de puntos ζ_k . De la sucesión $\{f_n\}$ escogeremos una subsucesión tal que converge en todos los puntos ζ_k . Encontrar una subsucesión que converja a un punto dado es siempre posible por la condición 2. Por tanto podemos encontrar un colección de subíndices

$$\begin{array}{ccccccc}
n_{11} < n_{12} < & \dots & < n_{1i} < \dots \\
n_{21} < n_{22} < & \dots & < n_{2i} < \dots \\
\vdots & & \vdots & & \ddots \\
n_{k1} < n_{k2} < & \dots & < n_{ki} < \dots \\
\vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

tal que

- (a) cada fila esta contenida en la anterior, y
- (b) $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_{ki}}(\zeta_k)$ existe para toda k .

Por tanto $\{n_{ii}\}$ es una sucesión de $\{f_n\}$ que converge por (b) a todos los puntos ζ_k . Por conveniencia, escribiremos f_{n_i} en lugar de $f_{n_{ii}}$. Ahora, sea K un subconjunto compacto de D , entonces por 1, \mathcal{F} es equicontinua en K . Dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para $z_1, z_2 \in K$ y $f \in \mathcal{F}$ sucede $|z_1 - z_2| < \delta$, entonces $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$. Dado que K es compacto, la cubierta de las vecindades de radio $\delta/2$ tiene una subcubierta finita; tomemos un punto ζ_k de cada una. Para toda h y j suficientemente grandes, diremos que $h, j > i_0$, $|f_{n_h}(\zeta_k) - f_{n_j}(\zeta_k)| < \epsilon$ para todos los ζ_k (esto porque $f_{n_i}(\zeta_k)$ converge cuando $i \rightarrow \infty$).

Como hemos tomado una $\delta/2$ subcubierta, para cada $z \in K$, existe un ζ_k tal que $|\zeta_k - z| < \delta$, y así $|f_{n_j}(\zeta_k) - f_{n_j}(z)| < \epsilon$, $|f_{n_h}(z) - f_{n_h}(\zeta_k)| < \epsilon$ por la equicontinuidad.

Así,

$$3\epsilon > |f_{n_h}(z) - f_{n_h}(\zeta_k)| + |f_{n_h}(\zeta_k) - f_{n_j}(\zeta_k)| + |f_{n_j}(\zeta_k) - f_{n_j}(z)| \geq |f_{n_h}(z) - f_{n_j}(z)|.$$

Por lo tanto, dado que ϵ es un número positivo arbitrario, $\{f_{n_i}\}$ es uniformemente convergente en K . ■

Para familias de funciones analíticas, podemos aplicar la siguiente consecuencia del teorema de *Arzelà-Ascoli*.

Teorema 21. Una familia \mathcal{F} de funciones analíticas en una región D es normal si las funciones en \mathcal{F} son uniformemente acotadas en cada subconjunto compacto de D .

Teorema 22 (Weierstrass). [13] Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas en un dominio D que converge uniformemente en subconjuntos compactos de D a una función f . Entonces f es analítica en D , y la sucesión de derivadas $\{f_n^{(k)}\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos a $f^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Demostración. Para un $z_0 \in D$, escogemos un disco $\Delta(z_0; r) \subseteq D$, y escribimos

$$C_r = \{z : |z - z_0| = r\}.$$

Dado $\epsilon > 0$, por hipótesis existe $n_0 \in \mathcal{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \epsilon$$

para toda $\zeta \in C_r$. Ahora, definimos

$$F_k(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}},$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots$ para $z \in \Delta(z_0; \frac{r}{2})$. Entonces para $n \geq n_0$,

$$|F_k(z) - f_n^{(k)}| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(\zeta) - f_n(\zeta)|}{|\zeta - z|^{k+1}} |d\zeta| < \frac{k! \epsilon 2^{k+1}}{r^k},$$

esto es, $f_n^{(k)}(z) \rightarrow F_k(z)$ uniformemente en $\Delta(z_0; \frac{r}{2})$, $k=0,1,2,\dots$. Para $k = 0$, $f_n(z) \rightarrow f(z)$ y $f_n(z) \rightarrow F_0(z)$, da $f(z) \equiv F_0(z)$, que es una función analítica en $\Delta(z_0; \frac{r}{2})$. Como z_0 es arbitrario, $f(z)$ es analítica en D . Entonces $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ uniformemente en $\Delta(z_0, \frac{r}{2})$, y el argumento para la compacidad prueba el teorema. ■

Teorema 23 (Rouché). [9] Sea G un abierto acotado de \mathbb{C} . Sean φ y ψ dos funciones holomorfas en G y continuas en \bar{G} . Supongamos que se verifica

$$|\varphi(z) - \psi(z)| < |\varphi(z)| + |\psi(z)| \quad \forall z \in G.$$

Entonces φ y ψ tienen el mismo número de ceros (contando los ordenes de multiplicidad) en G .

Teorema 24 (Hurwitz). [25] Sea $D \subset \mathbb{C}$ una región y supongamos que la sucesión de funciones holomorfas $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D a una función holomorfa f . Si f no es idénticamente cero, $D(z_0, r) \subset D$ y $f(z) \neq 0$ para z tal que $|z - z_0| = r$, entonces existe un N tal que para todo $n \geq N$, f y f_n tienen el mismo número de ceros en $B(z_0, r)$.

Corolario 2. [25] Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ y supongamos que f_n converge a una función $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ cuando $n \rightarrow \infty$ localmente uniformemente en D . Sea $a \in \mathbb{C}$. Si $f_n(z) \neq a$ para todo $z \in D$ y para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces $f(z) \neq a$ para toda $z \in D$ o $f \equiv a$.

Demostración. Supongamos que $f(z) \neq 0$. Entonces los ceros de $f(z)$ son aislados. Así, dado $z_0 \in D$, existe un r con $f(z) \neq 0$ para $z \in B(z_0, r) \setminus z_0$. Entonces $\inf_{z \in C(z_0, r)} |f(z)| = m > 0$. Por tanto $\frac{1}{f_n(z)}$ converge uniformemente a $\frac{1}{f(z)}$ en $C(z_0, r)$. También (por teorema de Weierstrass), $f'_n(z)$ converge uniformemente a $f'(z)$ en $C(z_0, r)$. Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Pero, por hipótesis, cada integral de la izquierda es igual a 0. Por lo tanto la integral de la derecha es 0 y así $f(z_0) \neq 0$. Como $z_0 \in D$ es arbitrario, el teorema se sigue. ■

Montel estableció condiciones necesarias y suficientes para que una familia de funciones analíticas sea normal.

Teorema 25 (Montel). [3] Sea \mathcal{F} una familia de funciones que son analíticas en un conjunto abierto D . Supongamos que \mathcal{F} es localmente acotada en U . Entonces \mathcal{F} es una familia normal en este conjunto.

Demostración. Observemos que la familia \mathcal{F} es puntualmente acotada en D , dado que es localmente acotada. Por el Teorema de Arzelà-Ascoli bastará demostrar que la familia \mathcal{F} es equicontinua en D . Fijamos un punto z_0 en D y establecemos la equicontinuidad de \mathcal{F} en z_0 . Para esto, escojamos $r > 0$ con la propiedad de que el disco cerrado $K = \Delta(z_0, 2r)$ está en D . Por hipótesis existe una constante $m = m(K) > 0$ tal que $|f(\zeta)| \leq m$ es válido siempre que f pertenezca a \mathcal{F} y ζ a K . Para z en el disco $\Delta = \Delta(z_0, r)$ usamos la fórmula de la integral de Cauchy que nos da una estimación válida para cada miembro f de \mathcal{F} :

$$|f(z) - f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|z - z_0|}{2\pi} \left| \int_{|\zeta - z_0|=2r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \right| \\
&\leq \frac{|z - z_0|}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0|=2r} \frac{|f(\zeta)||d\zeta|}{|\zeta - z||\zeta - z_0|} \leq \frac{m|z - z_0|}{r}.
\end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \min\{r, r\epsilon/m\}$. La estimación anterior de que la desigualdad $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ es válida para cada f de la familia \mathcal{F} , siempre que z satisfaga $|z - z_0| < \delta$. Esto prueba la equicontinuidad de \mathcal{F} en z_0 , un punto arbitrario de D . La normalidad de \mathcal{F} en D se sigue. ■

De ahora en adelante, vamos a considerar la métrica esférica d_χ definida en el capítulo anterior.

Definición 48. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge *uniformemente en el sentido esférico* a f en un conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ si, dado $\epsilon > 0$, existe un número n_0 tal que $n \geq n_0$ implica

$$d_\chi(f(z), f_n(z)) < \epsilon,$$

para cada $z \in E$.

Observación 49. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en E , entonces también converge uniformemente en el sentido esférico a f en E . La convergencia es válida si la función límite es acotada.

Teorema 26. [13] Si una sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente de manera esférica a una función acotada f en E , entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en E .

Demostración. Supongamos que $|f(z)| \leq M$ en E . Entonces

$$d_\chi(0, f(z)) \leq d_\chi(0, M) = \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} < 1.$$

Escogemos a $\epsilon < 1 - \frac{M}{\sqrt{1+M^2}}$. Entonces existe un entero positivo n_0 tal que $n \geq n_0$ implica

$$d_\chi(f(z), f_n(z)) < \epsilon,$$

entonces,

$$\frac{|f_n(z)|}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}} = d_\chi(0, f_n(z)) \leq d_\chi(0, f(z)) + d_\chi(f(z), f_n(z))$$

$$< \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} + \epsilon = m < 1.$$

Así,

$$|f_n(z)| < \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} = M_1,$$

para toda $n \geq n_0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |f(z) - f_n(z)| &= \sqrt{1+|f(z)|^2} \sqrt{1+|f_n|^2} \cdot d_x(f(z), f_n(z)) \\ &< \sqrt{1+M^2} \sqrt{1+M_1^2} \cdot d_x(f(z), f_n(z)), \end{aligned}$$

$n \geq n_0$. Por lo tanto, la convergencia uniforme se cumple. ■

Para tener una noción de continuidad con respecto a la métrica cordal tenemos la siguiente definición,

Definición 50. Una función f es *esféricamente continua* en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_x(f(z), f(z_0)) < \epsilon,$$

siempre que $|z - z_0| < \delta$.

Ahora bien, la siguiente definición es una extensión de la definición de una Familia Normal.

Definición 51. Una familia \mathcal{F} de funciones analíticas en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ es *normal* en D si cada sucesión de funciones $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ contiene o una subsucesión que converge a una función límite $f \neq \infty$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D , o una subsucesión que converge uniformemente a ∞ en cada subconjunto compacto.

En el primer caso, la función límite es una función analítica por el teorema de Weierstrass.

La familia \mathcal{F} se dice *normal en un punto* $z_0 \in D$ si es normal en alguna vecindad de z_0 .

Teorema 27. Una familia de funciones analíticas \mathcal{F} es normal en un dominio D sí, y sólo si \mathcal{F} es normal en cada punto de D .

Definición 52. Denotaremos por $\rho(f)$ a la *derivada esférica* de f , esto es

$$(a) \rho(f(z)) = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}, \text{ si } z \neq \infty \text{ y } f(z) \neq \infty,$$

de otra manera,

$$(b) \rho(f(z)) = \lim_{w \rightarrow z} \rho(f(w)).$$

Definición 53. Una función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ donde G es abierto de \mathbb{C} se dice *meromorfa en G* si existe $A \subset G$ tal que:

$$(i) A' \cap G = \emptyset$$

(ii) f es analítica en $G \setminus A$

(iii) f tiene un polo en cada punto de A .

Teorema 28 (Teorema de Marty). [25] Sea \mathcal{F} una familia de funciones meromorfas en un dominio $D \subset \hat{\mathbb{C}}$. Entonces \mathcal{F} es normal en D sí y sólo si f Una familia $\mathcal{F} : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de mapeos holomorfos es normal sí y sólo si la derivada esférica es localmente acotada.

Teorema 29 (Montel-Carathéodory). [6] Sea \mathcal{F} una familia de funciones analíticas en un dominio D . Si existen dos valores distintos a y $b \in \mathbb{C}$ tales que $a \notin f(D)$ y $b \notin f(D)$ para toda función f en la familia, entonces \mathcal{F} es normal en D .

Corolario 3. Sea \mathcal{F} una familia de funciones analíticas tal que para toda vecindad V de z_0 la familia no es normal. Entonces,

$$\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(V)$$

omite a lo más dos puntos en $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Teorema 30 (Grande de Picard). [5] Si una función meromorfa f en $G - \{z_0\}$ tiene una singularidad esencial en z_0 , entonces f toma todos los puntos de \mathbb{C}_∞ un número infinito de veces en una vecindad arbitraria de z_0 , excepto a lo más para dos puntos de \mathbb{C}_∞ .

Funciones de clase \mathcal{E}

En este capítulo presentaremos la definición de las funciones enteras trascendentes que estudiaremos en el siguiente capítulo, así como algunas de sus propiedades, y definiremos los puntos fijos, la iteración y los conjuntos de Fatou y Julia.

7. Funciones Enteras

A una función holomorfa en todo \mathbb{C} le llamaremos una *función entera*.

Definición 54. Si $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en todos los puntos de un abierto $D \subset \mathbb{C}$ se dice que f es holomorfa en D . A las funciones definidas y holomorfas en todo \mathbb{C} se les llama *funciones enteras*. En este caso la función $f' : z \in D \rightarrow f'(z) \in \mathbb{C}$ es llamada la *función derivada o derivada de f* , y también la denotamos por $\frac{df}{dz}$.

Sea f una función entera. Entonces uno de los tres siguientes casos sucede:

- (i) f es una función constante
- (ii) f tiene un polo en ∞
- (iii) f tiene una singularidad aislada esencial en ∞ .

Este resultado se sigue de los siguiente casos, si f se expande a una serie de Taylor,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

entonces,

- (i) $a_n = 0, n \geq 1$.
- (ii) Existe algún n_0 tal que $a_n = 0, n \geq n_0$, es decir, $f(z)$ es un polinomio
- (iii) Hay infinitos n con $a_n \neq 0$.

En el último caso, (iii), f se dice ser *trascendental*. Es decir, las funciones enteras trascendentes son aquellas en las que la función es analítica y $f(\infty)$ no está definida, no hay polos.

Al conjunto de clase de funciones enteras trascendentes lo denotaremos como sigue:

$$\mathcal{E} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es entera trascendente}\}.$$

Ejemplo 13. Las siguientes funciones pertenecen a la clase \mathcal{E}

- (i) $f(z) = e^z + \text{sen}(z)$.
- (ii) $g(z) = \lambda \text{sen}(z), \lambda \in \mathbb{R}$.
- (iii) $h(z) = e^z + z$.

A continuación enunciamos el teorema pequeño de Picard,

Teorema 31 (Pequeño de Picard). [5] El número de valores omitidos de una función entera no constante f es a lo más dos.

8. Iteración y Puntos Fijos

Si $f(z)$ es una función entera, las iteradas

$$f^{on}(z), n = 1, 2, \dots$$

se definen inductivamente por

$$f^{o(n+1)}(z) = f(f^{on}(z)), n \geq 1 \text{ y } f^1(z) = f(z).$$

Nota 55. La n -ésima iterada de f se denota como $f^{on}(z)$, donde $z \in \mathbb{C}$.

Observación 56. Las funciones en la clase \mathcal{E} cumplen lo siguiente:

$$\text{Si } f \in \mathcal{E}, \text{ entonces } f^{on} \in \mathcal{E}.$$

Definición 57. Un punto fijo α de orden n de $f(z)$ es una solución de $f^{\circ n}(z) = z$; tiene un orden exacto n si $f^{\circ k}(\alpha) = \alpha$ para $k = n$ pero no para cualquier $k < n$ y en este caso $\lambda = (f^{\circ n})'(\alpha)$ es llamado *el multiplicador de α* .

Observación 58. Por regla de la cadena,

$$(f^{\circ n})'(z_0) = \prod_{j=0}^{n-1} f'(f^{\circ j}(z_0)).$$

Definición 59. El punto fijo α es llamado

- (a) *super-atractor* si $\lambda = 0$,
- (b) *atractor* si $|\lambda| < 1$,
- (c) *repulsor* si $|\lambda| > 1$,
- (d) *indiferente* si $|\lambda| = 1$.

Dado z_0 , la *órbita hacia adelante* de z_0 se define como

$$\mathcal{O}^+(z_0) = \{z_n = f^{\circ n}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Nota 60. Si z_0 es un punto periódico de período n , entonces $\mathcal{O}^+(z_0)$ es llamada *ciclo*.

La *órbita hacia atrás* de z_0 se define como el conjunto

$$\mathcal{O}^-(z_0) = \{z_n = f^{\circ n}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

La gran órbita de z_0 está definida por:

$$\mathcal{O}(z_0) = \mathcal{O}^-(z_0) \cup \mathcal{O}^+(z_0).$$

Definición 61. Un punto $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$ es llamado un *punto excepcional* si $\mathcal{O}^-(z_0)$ es finita. El conjunto de puntos excepcionales de f es denotado por $\mathbf{E}(f)$.

A continuación enunciaremos (y demostraremos) el *Lema de Zalcman*, el cual es bastante útil en la dinámica compleja, especialmente en el estudio de la dinámica trascendente.

Teorema 32 (Zalcman). [18] Sea F una familia de funciones meromorfas en un dominio $U \subset \mathbb{C}$. Si F no es normal en $z_0 \in U$, entonces existe una sucesión $\{f_n\}$ en F , una sucesión $\{z_n\} \in U$, una sucesión $\{\rho_n\}$ de números reales positivos, y una función meromorfa no constante $g : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tal que $z_n \rightarrow z_0$, $\rho_n \rightarrow 0$ y la sucesión $f_n(z_n + \rho_n z) \rightarrow g(z)$ localmente uniformemente en \mathbb{C} cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Por teorema de Marty 28, existe $f_n \in F$ y $z_n^* \in U$ tal que $z_n^* \rightarrow z_0$ y $K_n = f_n^\#(z_n^*) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Definamos $r_n = \max\{2|z_n^* - z_0|, 1/\sqrt{K_n}\}$. Entonces $r_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y por lo tanto podemos asumir que $D(z_0, r_n) \subset U$. Podemos escoger $z_n \in D(z_0, r_n)$ tal que

$$M_n = \max_{|z-z_0| \leq r_n} \left(1 - \frac{|z-z_0|^2}{r_n^2}\right) f_n^\#(z) = \left(1 - \frac{|z_n-z_0|^2}{r_n^2}\right) f_n^\#(z_n).$$

Entonces

$$M_n \geq \left(1 - \frac{|z_n^*-z_0|^2}{r_n^2}\right) f_n^\#(z_n^*) \geq \frac{3}{4}K_n$$

de modo que $M_n \rightarrow \infty$. Definamos

$$\rho_n = \frac{1}{f_n^\#(z_n)} = \frac{1}{M_n} \left(1 - \frac{|z_n-z_0|^2}{r_n^2}\right).$$

Entonces $\rho_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y

$$\begin{aligned} \sqrt{K_n}\rho_n &= \frac{\sqrt{K_n}r_n + |z_n-z_0|}{M_n} \frac{r_n - |z_n-z_0|}{r_n} \\ &\leq \frac{2\sqrt{K_n}}{M_n r_n} (r_n - |z_n-z_0|) \\ &\leq \frac{8}{3\sqrt{K_n}r_n} (r_n - |z_n-z_0|) \\ &\leq \frac{8}{3} (r_n - |z_n-z_0|). \end{aligned}$$

Deducimos que si $|z| < \frac{3}{8}\sqrt{K_n}$, entonces

$$|z_n + \rho_n z - z_0| \leq |z_n - z_0| + \rho_n |z| < |z_n - z_0| + (r_n - |z_n - z_0|) \leq r_n$$

y por lo tanto $z_n + \rho_n z \in D(z_0, r_n) \subset U$. Así $g_n(z) = f_n(z_n + \rho_n z)$ esta definida por $|z| < \frac{3}{8}\sqrt{K_n}$. Para $|z| < \frac{3}{16}\sqrt{K_n}$ tenemos

$$\begin{aligned}
g_n^\#(z) &= \rho_n f_n^\#(z_n + \rho_n z) \\
&\leq \frac{\rho_n M_n}{1 - \frac{|z_n - z_0|^2}{r_n^2}} \\
&= \frac{r_n^2 - |z_n - z_0|^2}{r_n^2 - |z_n + \rho_n z - z_0|^2} \\
&\leq \frac{r_n^2 - |z_n - z_0|^2}{r_n^2 - (|z_n - z_0| + \rho_n |z|)^2} \\
&= \frac{r_n + |z_n - z_0|}{r_n + |z_n - z_0| + \rho_n |z|} \frac{r_n - |z_n - z_0|}{r_n - (|z_n - z_0| + \rho_n |z|)} \\
&\leq \frac{r_n - |z_n - z_0|}{r_n - (|z_n - z_0| + \frac{1}{2}(r_n - |z_n - z_0|))} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Así, $\{g_n^\#\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada localmente uniformemente en \mathbb{C} y por teorema de Marty 28, $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es normal en \mathbb{C} . Restringiendo a una subsucesión, si es necesario, podemos asumir que $g_n \rightarrow g$ cuando $n \rightarrow \infty$ para alguna función g meromorfa en \mathbb{C} . Porque $g_n^\#(0) = 1$ por construcción, tenemos que $h^\#(0) = 1$ y por tanto g es no constante. El teorema de Hurwitz, véase Teorema 24, implica que $g : U \rightarrow V$. ■

Los siguientes resultados muestran la relación que existe entre la definición topológica y el multiplicador.

Definición 62. Un punto fijo z_0 de una función f es *atractor* si existe una vecindad V , donde la sucesión $\{f^n(z_0)\}$ converge uniformemente a la función constante z_0 .

Teorema 33 (Caracterización Topológica de Puntos Atractores). [15] Un punto fijo para una función holomorfa es *topológicamente atractor* si, y sólo si, su multiplicador λ satisface $|\lambda| < 1$.

Definición 63. Un punto fijo z_0 de una función f es *repulsor*, si existe una vecindad V de z_0 tal que para cada $z \in U \setminus \{z_0\}$, existe $n \geq 1$ que cumple que $f^n(z) \in V$.

En otras palabras, la única órbita que está completamente contenida en V es la órbita del punto fijo z_0 . Si este es el caso, V es llamada *vecindad aislada bajo iteración*.

Teorema 34 (Caracterización de Punto Repulsor). [15] Un punto fijo para una función holomorfa, es *topológicamente repulsor* si, y sólo si, su multiplicador λ satisface $|\lambda| > 1$.

Teorema 35. Sea $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y supóngase que z_0 es un punto fijo repulsor para f , entonces la familia de iteradas $\{f^n\}$ de f no es normal en z_0 .

Demostración. Supongamos que $\{f^n\}$ es normal en alguna vecindad V de z_0 . Por hipótesis $f^n(z_0) = z_0$ para toda n , se sigue que no converge a ∞ en V . Por lo tanto existe alguna subsucesión de $\{f^n\}$, digamos f^{n_j} , que converge uniformemente a una función g sobre v , así $|(f^{n_j})(z_0)| \rightarrow |g'(z_0)|$ por el Teorema de Convergencia de Weierstrass, pero $|(f^{n_i})(z_0)| = |f'(z_0)| \dots n_i$ veces $\dots |f'(z_0)| = |\lambda|^{n_i} \rightarrow \infty$ ya que $|\lambda| > 1$ por ser z_0 un punto repulsor de f , pero esto es una contradicción por que $|(f^{n_i})'(z_0)| \rightarrow |g'(z_0)|$. Por lo tanto la familia de iteradas de f no es normal en z_0 . ■

Corolario 4. Sea $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y supóngase que z_0 es un punto periódico repulsor de f , entonces la familia de iteradas $\{f^n\}$ no es normal en z_0 .

Conjunto de Fatou y Conjunto de Julia

En este capítulo enunciaremos las definiciones de los conjuntos de Fatou y Julia así como algunos resultados y propiedades básicas de estos para las funciones trascendentes enteras \mathcal{E} .

El plano complejo se divide en dos conjuntos el estable y el inestable, a la parte estable se le llama conjunto de Fatou y a la parte inestable se le llama conjunto de Julia.

Definición 64. Sea $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera trascendente ($f \in \mathcal{E}$), el conjunto de Fatou de f o conjunto estable, denotado por $F(f)$, está formado por todos los puntos $z \in U$ tal que la sucesión de iteradas de f está bien definida y forma una familia normal en una vecindad de z , es decir,

$$F(f) = \{z \in U : f^n(z) \text{ está definida y } \{f^n\} \text{ es normal en una vecindad de } z\}.$$

Definición 65. Sea $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera trascendente, $f \in \mathcal{E}$, el conjunto de Julia de f o conjunto inestable, denotado por $J(f)$, es el complemento del conjunto de Fatou, es decir,

$$J(f) = (F(f))^c = U \setminus F(f).$$

A continuación enunciaremos algunas propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou para una función entera trascendente, esto es $f \in \mathcal{E}$.

Teorema 36. Si $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera trascendente se tienen las siguientes propiedades, véase [21], [7] y [26].

- (a) $F(f)$ es abierto y $J(f)$ es cerrado.

- (b) $J(f)$ es perfecto.
- (c) $F(f)$ y $J(f)$ son completamente invariantes, es decir, $z \in F(f)$ si y sólo si, $f(z) \in F(f)$ y $z \in J(f)$ si, y sólo si, $f(z) \in J(f)$.
- (d) $F(f^n) = F(f)$ y $J(f^n) = J(f)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aproximadamente entre 1918 y 1920, estas propiedades fueron demostradas para funciones racionales por Fatou y Julia. Para las funciones enteras trascendentes las propiedades (a)–(d) fueron demostradas por Fatou en 1926.

A continuación enunciaremos y demostraremos un teorema que relaciona al conjunto de Julia con las órbitas hacia atrás dado un punto $z_0 \in J(f)$.

Teorema 37. Si $z_0 \in J(f)$ y $z_0 \notin E$, entonces $J = \overline{\mathcal{O}^-(z_0)}$.

Demostración. Dado que J es cerrado y completamente invariante, se cumple que $\overline{\mathcal{O}^-(z_0)} \subset J$. Para probar la otra inclusión, tomemos $z_1 \in J$, y sea U una vecindad de dicho punto, y supongamos que $U \cap \overline{\mathcal{O}^-(z_0)} = \emptyset$. Entonces $f^n(z) \neq \omega$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $z \in U$ y $\omega \in \overline{\mathcal{O}^-(z_0)}$. Como $|\overline{\mathcal{O}^-(z_0)}| = \infty$, el teorema de Montel muestra que $\{f^{on}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es normal en U , lo que contradice nuestro supuesto de $z_1 \in J$. Por lo tanto $U \cap \overline{\mathcal{O}^-(z_0)} \neq \emptyset$. Se sigue que $z_1 \in \overline{\mathcal{O}^-(z_0)}$ y así $J \subset \overline{\mathcal{O}^-(z_0)}$. ■

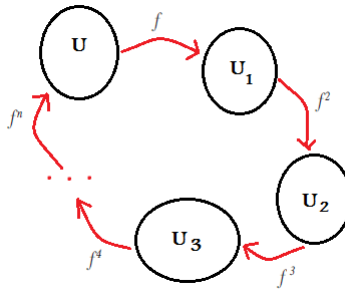
9. Componentes del conjunto de Fatou

Recordar que si X es un espacio topológico y E un subespacio de X , entonces E es una componente de X si y sólo si,

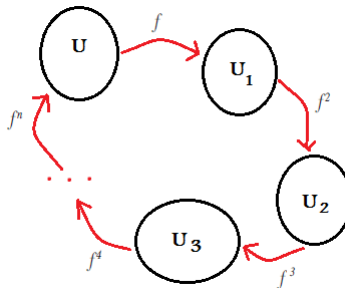
- (i) E es conexo, y
- (ii) si D es un subespacio conexo de X que contiene a E entonces, $D = E$.
(Las componentes son subespacios conexos maximales).

Definición 66. Sea $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera trascendente y U una componente de Fatou. El comportamiento de la órbita de U bajo f tiene tres posibilidades:

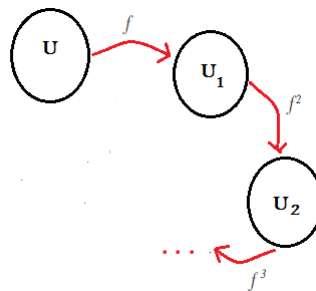
- (i) Si $f^n(U) \subset U$ para algún $n \geq 1$, U es llamado una *componente periódica* de $F(f)$. El mínimo n es el período de la componente U . En particular si $n = 1$, se dice que la componente U es *invariante*.



(ii) Si f^m es periódico para algún entero $m \geq 1$, llamamos a U una *componente pre-periódica*. En particular, si U es pre-periódica pero no periódica, entonces llamamos a U una *componente pre-periódica propia*.



(iii) Si U no es periódica o pre-periódica, llamamos a U una *componente errante*.



9.1. Clasificación de componentes periódicas

Las componentes periódicas del conjunto de Fatou para funciones en la clase \mathcal{E} se clasifican de la siguiente forma:

Sea f una función entera trascendente y sea U una componente periódica de Fatou de período p , entonces tenemos una de las siguientes posibilidades:

- (i) U contiene un punto periódico atractor z_0 de período p . Entonces $f^{np}(z) \rightarrow z_0$, para $z \in U$ cuando $n \rightarrow \infty$. U es llamado una *componente atractor*. Si z_0 es punto periódico superatractor, entonces U es llamado un *Dominio de Bötcher*. En cualquier otro caso U es llamado un *Dominio de Schröder*.
- (ii) ∂U contiene un punto periódico z_0 de período m y $f^{nm}(z) \rightarrow z_0$, para $z \in U$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces $(f^m)'(z_0) = 1$. En este caso, U es llamado una *Componente Parabólica* o *Dominio de Leau*.
- (iii) Existe un homeomorfismo analítico $\psi : U \rightarrow D$, donde D es el disco unitario tal que $\psi \circ f \circ \psi^{-1}(z) = e^{2\pi i\theta}$ para algún $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En este caso, U es llamado un *Disco de Siegel*.
- (iv) $f^{np}(z) \rightarrow z_0 \in \partial U$ para $z \in U$ cuando $n \rightarrow \infty$, pero f^p no es holomorfa en z_0 . En este caso, U es llamado un *Dominio de Baker*.

El conjunto de puntos periódicos repulsores es denso en $J(f)$

En este capítulo se darán dos demostraciones de la propiedad siguiente:

Sea f función entera trascendente diferente de un polinomio, tenemos que,

Teorema 38. $J(f)$ es la clausura del conjunto de todos los puntos periódicos repulsores de f .

Es decir,

$$J(f) = \overline{\{\text{puntos peridicos repulsores de } f\}}.$$

Primero veremos la prueba con el Lema de Ahlfors y después la prueba usando el Lema de Zalcman.

Demostración. 1 Primero enunciaremos el lema conocido como *Lema de las 5 islas de Ahlfors* pero para el caso de funciones holomorfas.

Lema 3 (Ahlfors). [11]

Sea $f(z)$ holomorfa en el disco $|z| < R$ y sean K_1, K_2, K_3 regiones simplemente conexas en el ω -plano, acotadas por curvas de Jordan seccionalmente analíticas y tal que las clausuras de K_1, K_2, K_3 son mutuamente disjuntas. Si existe una constante c que depende solamente de las regiones K_1, K_2, K_3 y no de $f(z)$ tal que cumple

$$\frac{R|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} > c$$

entonces el disco $|z| < R$ contiene un dominio que es mapeado univalentemente por $f(z)$ sobre uno de los K_i , $0 \leq i \leq 3$.

Ahora, sean $p \in J(f)$ y N una vecindad arbitraria de p . Por demostrar que N contiene un punto fijo repulsor de algún orden.

Por propiedades del conjunto de Julia, tenemos que $J(f)$ es perfecto, así N contiene un subconjunto no numerable de $J(f)$, tomemos a_1, a_2 y $a_3 \in J(f)$ puntos distintos que estén contenidos en N y tal que ninguno sea punto excepcional para $f(z)$. Como $J(f)$ es denso podemos tomar $\delta > 0$ tan pequeña que las clausuras de los $K_i = \{z - a_i\} < \delta$ estén contenidas en N , sean mutuamente disjuntas y además ninguna de las tres clausuras contenga puntos excepcionales, en caso de que hubiese.

Sean $D_i = \{z - a_i\} < \frac{\delta}{3}$, $i = 1, 2, 3$. Para el inicio de la prueba debemos encontrar puntos $b_1 \in D_1, b_2 \in D_2$ y $b_3 \in D_3$, $b_i \in J(f)$, $i = 1, 2, 3$ tal que la derivada esférica

$$\rho(f) = \frac{|f'|}{(1 + |f|^2)}$$

satisfaga

$$\rho(f^{on}(b_i)) = \frac{|(f^{on})'(b_i)|}{1 + |f^{on}(b_i)|^2} \geq \frac{3c}{\delta}$$

donde c es la constante del *Lema de Ahlfors* en el caso cuando $R = \frac{\delta}{3}$ y K_1, K_2, K_3 son las tres regiones.

Como $J(f)$ es completamente invariante es equivalente encontrar dichos puntos en $J(f^{on})$.

Tomemos $b_1, b_2, b_3 \in J(f^{on})$ donde $b_1 \in D_1, b_2 \in D_2$ y $b_3 \in D_3$, como dichos puntos se encuentran en el conjunto de Julia la sucesión de iteradas $\{f^{on}\}$ no es normal en cada b_i , $1 \leq i \leq 3$, luego por *Teorema de Marty 28* la familia de derivadas esféricas $\{\rho(f^{on})\}$ no es localmente uniformemente acotada en b_i , $1 \leq i \leq 3$, por tanto existe una vecindad compacta D_i , $1 \leq i \leq 3$ y una constante $M(D_i) < \infty$ tal que $\{\rho(f^{on}(b_i))\} > M(D_i)$.

Observemos que si $M(D_i) = \frac{3c}{\delta}$,

$$\begin{aligned} \rho(f^{on}(b_i)) &= \frac{|(f^{on})'(b_i)|}{1 + |f^{on}(b_i)|^2} \geq \frac{3c}{\delta} \\ \iff \frac{\frac{\delta}{3} |(f^{on})'(b_i)|}{1 + |f^{on}(b_i)|^2} &> c \end{aligned}$$

tenemos ya a los b_i buscados.

A continuación haremos un cambio de variable debido a que la hipótesis del Lema de Ahlfors, $\frac{R|(f^{on})'(0)|}{1+|f^{on}(0)|^2} > c$, está dada en cero. Pongamos $g_i(t) = f^{on}(z)$, $z = b_i + t$ así $g_i(t)$ es holomorfa en el disco $|t| < \frac{\delta}{3}$ el cual corresponde al disco $L_i = |z - b_i| < \frac{\delta}{3}$ en el z -plano. Observemos que $\overline{L_i} = |z - b_i| \leq \frac{\delta}{3}$ está contenida en K_i .

Ahora,

$$\rho(g_i(0)) = \rho(f^{on}(b_i)) > \frac{3c}{\delta}$$

Con $R = \frac{\delta}{3}$ y K_1, K_2, K_3 regiones en el w -plano aplicamos el Lema de Ahlfors y así, L_i contiene un subconjunto G_i el cual es mapeado univalentemente por f^{on} sobre uno de los discos K_1, K_2 o K_3 . Se tienen dos casos:

1. G_i es mapeado univalentemente por f^{on} sobre K_i y
2. Sin pérdida de generalidad G_1 es mapeado univalentemente por f^{on} sobre $K_i, i = 2, 3$.

Caso 1. Consideremos a $z := \phi(w)$ como la aplicación inversa de f^{on} que mapea el disco K_i (en w -plano) univalentemente sobre G_i .

Aplicando el Teorema de Rouché 23 a la función

$$z - \phi(z) = (z - a) - (\phi(z) - a) \dots (1)$$

en el disco $K_i = |z - a_i| < \delta$, tenemos que

$$\begin{aligned} |(z - a) - ((z - a) + (a - \phi(z)))| &= |(z - a) - (z - \phi(z))| \\ &= |\phi(z) - a| \end{aligned}$$

y $|\phi(z) - a| < |z - a|$ ya que $G_i \subset K_i$, de (1)

$$\begin{aligned} |z - a| &= |(z - \phi(z)) + (\phi(z) - a)| \\ &\leq |(z - \phi(z))| + |(\phi(z) - a)| \text{ por desigualdad triangular} \end{aligned}$$

luego,

$$|(z - a) - ((z - a) + (a - \phi(z)))| \leq |z - \phi(z)| + |\phi(z) - a|$$

por lo tanto, $(z - a)$ y $((z - a) + (a - \phi(z)))$ tienen el mismo número de ceros.

Como $(z - a)$ tiene un solo cero $z = a$, entonces $((z - a) + (a - \phi(z)))$ tiene solo un cero. Así, $\phi(z) = z$ tiene una solución, digamos γ en K_i pero $\overline{G_i} \subset \overline{L_i} \subset K_i$ entonces la solución $\gamma \in \overline{G_i}$ y entonces es un punto fijo de $(f^{on})^{-1}$.

Fijemos $K_i = K$, con $i = 1, 2$ o 3 y $a_i = a$, con $i = 1, 2$ o 3 . Sea $\omega = L(t)$ un mapeo bilineal tal que

$$L(t) : |t| < 1 \longrightarrow K$$

con

$$t = 0 \longrightarrow \omega = \gamma.$$

Sea $\Psi(t) = L^{-1}(\phi(L(t)))$ que mapea $|t| < 1$ sobre un conjunto propio $p \subset |t| < \sigma$ para algún $0 < \sigma < 1$.

$\psi(0) = L^{-1}(\phi(L(0))) = L^{-1}(\phi(a))$ pero la relación $\phi(z) - z = 0$ tiene una solución en $z = a$, así $\phi(a) = a$ entonces $L^{-1}(\phi(a)) = L^{-1}(a)$ luego, como a es el centro correspondiente a K_i entonces L^{-1} mapea a a al centro de t que es cero por lo tanto $L^{-1}(\phi(a)) = 0$, así $\Psi(0) = 0$.

Apliquemos el Lema de Scharwz a $\frac{\Psi(t)}{\sigma}$:

- $\frac{\Psi(t)}{\sigma}$ es holomorfa en $|t| < 1$
- $\left| \frac{\Psi(0)}{\sigma} \right| = 0$ puesto que $\frac{\Psi(0)}{\sigma} = 0$
- $\left| \frac{\Psi(z)}{\sigma} \right| \leq 1 \quad \forall z \in |t| < 1$ pues $\left| \frac{\Psi(z)}{\sigma} \right| < 1$ si y sólo si $|\psi(z)| < |\sigma|$ pero $0 < \sigma < 1$

Se sigue $\left| \frac{\Psi'(0)}{\sigma} \right| \leq 1$ y $\frac{\Psi(z)}{\sigma} \leq |z|$. Por lo tanto $|\Psi'(0)| \leq |\sigma| < 1$. Finalmente,

$$\psi'(0) = 0 = \phi'(\gamma) = ((f^{on})')^{-1}(\gamma) = ((f^{on})')^{-1}(\gamma)$$

lo que implica que

$$1 > |\Psi'(0)| = |\phi'(\gamma)| = \left| ((f^{on})^{-1})'(\gamma) \right| = ((f^{on})')^{-1}(\gamma),$$

de aquí

$$1 > \left| ((f^{on})^{-1})'(\gamma) \right|,$$

concluimos que

$$1 < |(f^{on})'(\gamma)|.$$

Es decir, hemos encontrado un punto fijo repulsor γ de orden n tal que $\gamma \in K_i \subseteq N$.

Caso 2. Demostrémoslo para K_2 , es similar para K_3 .

Supongamos entonces que G_1 es mapeado univalentemente en K_2 , apliquemos el Lema de Ahlfors 3 en $|t| < \frac{\delta}{3}$ correspondiente a $L_2 = |z - b_2| < \frac{\delta}{3}$ entonces existe G_2 dominio contenido en $L_2 \subseteq K_2$ el cual es mapeado univalentemente por f^{on} sobre uno de los discos K_1, K_2, K_3 . Teniendo tres subcasos :

- Si G_2 es mapeado sobre K_1 . Apliquemos nuevamente el Lema de Ahlfors en G_1 , luego existirá un dominio $H_1 \subset G_1$ tal que es mapeado univalentemente sobre K_1, K_2 o K_3 . Ahora si H_1 es mapeado por f^{on} sobre K_1 se continua con la parte de la prueba del *Caso 1*. Si H_1 es mapeado sobre K_2 o sobre K_3 se procede con el inicio del *Caso 2*.
- Si G_2 es mapeado sobre K_2 . Este caso se sigue del *Caso 1*.
- Si G_2 es mapeado sobre K_3 . Procedemos como en el *Caso 2*.

En todos los subcasos anteriores conseguimos algún $K_i, i = 1, 2, 3$ en el cual existe un dominio $H_i \subset K_i$ que es mapeado univalentemente por f^{on} sobre K_i , de aquí se sigue como en el *Caso 1*. ■

A continuación demostraremos la propiedad utilizando el Lema de Zalcman.

Demostración. 2

Empezaremos demostrando que

$$J(f) \supseteq \overline{\{\text{puntos peridicos repulsores de } f\}}$$

Sea p un punto periódico repulsor de la función f de período n , entonces tenemos que p es punto fijo repulsor de $g = f^n$. Supongamos por contradicción que $\{g^k\}$ es normal en p , entonces existe una vecindad abierta V tal que $p \in V$, y cada subsucesión g^{k_i} converge a una función analítica, digamos g_0 ; observemos que dicha subsucesión no puede converger a ∞ porque $g^k(p) = p$ para toda k . Por Teorema de Weierstrass, las derivadas también convergen, $(g^{k_i})'(z) \rightarrow g_0'(z)$ si $z \in V$. Sin embargo, por regla de la cadena, $\left| (g^{k_i})'(p) \right| = \left| (g'(p))^{k_i} \right|$, como p es punto fijo repulsor y $|g'(p)| > 1$ tenemos que

$$\left| (g'(p))^{k_i} \right| \rightarrow \infty$$

y, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass esto implica que ninguna subsucesión de $\{g^{k_i}\}$ converge uniformemente en una vecindad de p . Así, $\{g^k\}$ no puede ser normal en el punto p . Por lo tanto, p pertenece al conjunto de *Julia* de f^n , así $p \in J(g) = J(f^n) = J(f)$, por la propiedad del conjunto de *Julia*. Porque $J(f)$ es cerrado, la clausura de los puntos fijos repulsores está en $J(f)$.

Ahora, para demostrar la otra inclusión definamos \mathbb{B} al conjunto de todas las $z \in J$ que pertenecen a la clausura del conjunto $\{f^{on}(z) : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{z\}$, es decir, el conjunto de puntos recurrentes pero no periódicos de J .

La prueba se divide en dos pasos.

Paso 1. \mathbb{B} está contenido en la clausura del conjunto de puntos periódicos repulsores de f .

Paso 2. \mathbb{B} es denso en J .

Paso 1. Tomemos $z_0 \in \mathbb{B}$. Sea U una vecindad del punto z_0 , $U \subset \mathbb{C}$. Aplicando el lema de Zalcman, véase Teorema 32, existen una sucesión α_n estrictamente creciente de números naturales, sucesiones $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en U y $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de números reales positivos y una función meromorfa no constante $g : \mathbb{C} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ \alpha_n} \circ (z_n + \rho_n Id_{\mathbb{C}}) = g.$$

Como $z_0 \in \mathbb{B}$ y g es no constante, se sigue del teorema Pequeño de Picard que existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^{\circ k}(z_0) \in U \cap g(\mathbb{C})$. Tomemos $x \in g^{-1}(f^{\circ k}(z_0))$, entonces existe V vecindad abierta de x en el plano complejo tal que $g(V) \subset U$ y $g'(v) \neq 0$ para cada $v \in V \setminus \{x\}$.

Si $z_0 \in \mathbb{B}$ entonces cada iterada de z_0 está en \mathbb{B} , es decir, $f^{on}(z_0) \in \mathbb{B}$. Existe

i número natural y $v \in V \setminus \{x\}$ tal que $g(v) = f^{\circ i}(z_0)$.

Si definimos h como $h := g - f^{\circ i}(z_0)$ entonces v es un cero aislado de dicha función y observemos que

$$h := g - f^{\circ i}(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((f^{\circ \alpha_n} \circ (\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n)) - f^{\circ i} \circ (\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n)).$$

Por el teorema de Hurwitz existe una sucesión $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{C} tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ y

$$f^{\circ \alpha_n}(\rho_n v_n + z_n) - f^{\circ i}(\rho_n v_n + z_n) = 0$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Por tanto, si $\omega_n := f^{\circ i}(\rho_n v_n + z_n)$ tenemos que $f^{\circ \alpha_n - i} \circ (f^{\circ i}(\rho_n v_n + z_n)) = f^{\circ \alpha_n} \circ (\rho_n v_n + z_n) = g(v) = f^{\circ i}(z_0) = f^{\circ i}(\rho_n v_n + z_n)$ para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Así, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande ω_n es un punto fijo de $f^{\circ \alpha_n - i}$. Usando el teorema de Weierstrass y la regla de cadena tenemos que

$$\begin{aligned} g'(v) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{\circ \alpha_n} \circ (\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n))'(v_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((f^{\circ \alpha_n - i} \circ f^{\circ i})'(\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n) (\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n)' \right)(v_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((f^{\circ \alpha_n - i})'(f^{\circ i}(\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n)) (f^{\circ i})'(\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n) (\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n)' \right)(v_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((f^{\circ \alpha_n - i})'(\omega_n) (f^{\circ i})'(\rho_n Id_{\mathbb{C}} + z_n) \omega_n \right)(v_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((f^{\circ \alpha_n - i})'(\omega_n) (f^{\circ i})'(\rho_n v_n + z_n) \omega_n \right). \end{aligned}$$

Como $v \in V \setminus \{x\}$, tenemos que $g'(v) \neq 0$. Y Además, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f^{\circ i})'(\rho_n v_n + z_n) \rho_n = (f^{\circ i})'(z_0) \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0,$$

concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (f^{\circ(\alpha_n - i)})'(\omega_n) \right| = \infty$, así todos excepto un número finito de puntos periódicos ω_n , $n \in \mathbb{N}$, son repulsores. Por último,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ i}(\rho_n v_n + z_n) = f^{\circ i}(z_0) \in U,$$

por tanto, U contiene un punto periódico repulsor de f . ■

Paso 2. Como J no contiene puntos aislados, la prueba es una consecuencia del siguiente teorema,

Teorema 39. $\{z \in J : \{f^{on} : n \in \mathbb{N}\} \text{ es denso en } J\}$ es denso en J .

Para $J \neq \emptyset$, de lo contrario no hay nada que probar, sea d la métrica esférica cuando $D = \overline{\mathbb{C}}$, la métrica euclídeana para el caso cuando $D = \mathbb{C}$ y definiremos

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (z, w) &\mapsto |z - w| + \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{w} \right| \end{aligned}$$

para el caso $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En cualquiera de los tres casos $(J, d_{J \times J})$ forma un espacio métrico completo y separable. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $\{B_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de d -bolas con radio $\frac{1}{n}$ tal que $J \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{n,k}$ y $B_{n,k} \cap J \neq \emptyset$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Como J no contiene puntos aislados, concluimos que, para cada $n, k \in \mathbb{N}$, el conjunto $B_{n,k} \cap J$ es un conjunto infinito, el teorema de Montel-Caratheodory

$$\mathcal{Q}_{n,k} := J \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-j}(B_{n,k})$$

es abierto y denso en J . Por el Teorema de Baire 4 concluimos que

$$\mathcal{Q} := \bigcap_{n,k \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_{n,k}$$

también es denso en J . Ahora, sea $q \in \mathcal{Q}$. Entonces $\{f^j(q) : j \in \mathbb{N}\} \cap B_{n,k} \neq \emptyset$, para cada $n, k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\{f^j(q) : j \in \mathbb{N}\}$ es denso en J . ■

Por lo tanto, $J(f) = \overline{\{\text{puntos periódicos repulsores de } f\}}$. ■

Bibliografía

- [1] Alain Etcheberry. *Elementos de Variable Compleja*, 2da ed. Equinoccio, (2000).
- [2] Antonio Lascurain O. *Curso básico de Variable Compleja*, 1era edición, (2007).
- [3] Bruce P. Palka. *An introduction to Complex Function Theory*, 2da ed. Springer-Verlag, (1990).
- [4] Daniel S. Alexander, Felice Lavernaro and Alessandro Rosa. *Early Days in Complex Dynamics: A History of Complex Dynamics in One Variable During 1906-1942*. American Mathematical, Soc., (2012).
- [5] Junjiro Noguchi. *Introduction to Complex Analysis*, Vol. 168, American Mathematical Society, (1998).
- [6] Carlos I. Castillo. *Funciones de Variable Compleja con Aplicaciones a la Teoría de Números*. Universidad de Valencia.
- [7] Chi-Tai Chuang and Chung-Chung Yang. *Fix-Points and Factorization of Meromorphic Functions*. World Scientific, (1990).
- [8] Detlef Bargmann. Simple Proofs of Some Fundamental Properties of the Julia Set, *Mathematisches Seminar*, Universitaet Kiel, G.,(1999), p. 553-558.
- [9] Enrique De Amo. *Introducción al curso de Análisis Complejo*, Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-2009, Universidad de Almería.
- [10] Gaston Julia. Sur l'itération des fonctions rationnelles, *J. Math. Pure Appl.*, (1918), p. 61-64.

- [11] Irving N. Baker, Repulsive Fixpoints of Entire Functions. *Math. Zeitschr.*, (1968), p. 252-256.
- [12] James R. Munkres. *TOPOLOGY A first Course*, Prentice Hall, Incorporated, (2000).
- [13] Joel F. Schiff. *Normal Families*, Springer, (1993).
- [14] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, (1978).
- [15] John Milnor. *Dynamics in One Complex Variable*, Princeton University Press, third edition, (2006).
- [16] José I. Nieto and Eva V. Chesneau. *Funciones de Variable Compleja*, ed. 3, Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, (1980).
- [17] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis an Introduction to the Theory of Analytic functions of one Complex Variable*, 2da ed. McGraw-Hill Book Company, (1966).
- [18] Lawrence Zalcman. A Heuristic Principle in Complex Function Theory. *The American Mathematical Monthly*, (1975), p. 813-817.
- [19] Marco A., Eric B., Marco B., Tien-Cuong D., Dierk S. and Nessim S., *Holomorphic Dynamical Systems*. Lectures notes in mathematics, Springer, (1998).
- [20] Murray R. Spiegel. *Variable Compleja*. McGraw-Hill, (2004).
- [21] Patricia Domínguez and J. E. Valente, *Dinámica Holomorfa, Los conjuntos de Fatou y Julia y algunas de sus propiedades de tres clases de funciones meromorfas*. Monografía, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Editorial BUAP, (2014).
- [22] Pierre Fatou. Sur les équations fonctionnelles *Bulletin de la Société Mathématique de France*. Vol. 47, (1919), p. 161-271.
- [23] Pierre Fatou. Sur les équations fonctionnelles. *Bull. Soc. Math. France* 47, (1919).

- [24] Sanford L. Segal. *Nine Introductions in Complex Analysis*. Elsevier, (2008).
- [25] Walter Bergweiler. An Introduction to Complex Dynamics, *Textos de Matemática*, Universidad de Coimbra, Série B, No. 6, (1995).
- [26] Xin-Hou Hua and Chung-Chung Yang, *Dynamics of Transcendental Functions*. Asian Mathematics Series, Gordon and Breach Science Publishers, (1998).